Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування

Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки
Кафедра комп'ютерних наук та прикладної математики

04-01-67М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних завдань та самостійної роботи
з навчальної дисципліни «**Методи обчислень**»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Прикладна математика» спеціальності 113 Прикладна математика», «Інтернет речей» спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення», «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»
денної та заочної форм навчання. Частина I

Рекомендовано
науково-методичною радою
з якості ННІАКОТ
Протокол № 9 від 30 серпня 2021 р.

Рівне – 2021

Методичні вказівки до лабораторних завдань та самостійної роботи з навчальної дисципліни «Методи обчислень» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Прикладна математика» спеціальності 113 Прикладна математика», «Інтернет речей» спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення», «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної та заочної форм навчання. Частина I [Електронне видання] / Цвєткова Т. П. – Рівне : НУВГП, 2021. – 41 с.

Укладач: Цвєткова Т. П., к.т.н, доцент кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики.

Відповідальний за випуск: Турбал Ю. В., д.т.н., професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики.

Керівник групи забезпечення спеціальності 113 «Прикладна математика»: Прищепа О. В., к.ф.-м.н., доцент кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики.

Керівник групи забезпечення спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення»: Жуковський В. В., к.т.н., доцент кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики.

Керівник групи забезпечення спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»: Мартинюк П. М., д.т.н., професор, директор навчально-наукового інституту автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки.

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Методи обчислень» полягає у вивченні студентами класичних та сучасних методів обчислень для розв'язування прикладних задач, що виникають у професійній діяльності. Фахівцям, зокрема бакалаврам, що навчаються за освітньо-професійними програмами «Прикладна математика» спеціальності 113 «Прикладна математика», «Інтернет речей» спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення», «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» в НУВГП, необхідні глибокі знання щодо чисельного розв'язування широкого класу задач на комп'ютері шляхом програмування обчислювальних алгоритмів на універсальних та спеціалізованих мовах програмування та використанням спеціалізованих прикладних програм.

У методичних вказівках до кожної лабораторної роботи зазначено тему заняття, основну мету та ключові поняття. Також наведено теоретичні відомості щодо загальних положень теми, детальну інформацію щодо методів та алгоритмів розв'язування задач, завдання для лабораторних робіт. Тому дані вказівки можуть бути використані як для лабораторних занять, так і для самостійної роботи студента.

Методичні вказівки складені відповідно до освітньо-професійних програм підготовки бакалаврів зазначених спеціальностей з метою забезпечення необхідних загальних, фахових компетентностей та програмних результатів навчання.

1. МЕТА ТА ЗАВДАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Основною **метою** навчальної дисципліни «Методи обчислень» є оволодіння студентами методами розв’язування прикладних задач, що стосуються розділів лінійної алгебри, математичного аналізу, звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь у частинних похідних, інтегральних рівнянь, наближення функцій; виконання програмної реалізації обчислювальних алгоритмів; здійснення оцінки похибок наближених результатів обчислень.

Основними **завданнями**, що мають бути вирішені при вивченні дисципліни, є:

- сформувати у студентів знання теорії методів обчислень;
- формування навиків застосування методів обчислень до розв’язання практичних задач;
- вміння вибрати відповідний метод розв’язування задачі;
- записати алгоритм розв’язування задачі та здійснити його програмну реалізацію;
- провести аналіз отриманих результатів.

2. ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. Методи лінійної алгебри

Лабораторна робота №1
Метод Гауса (класичний, модифіковані методи) розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Мета роботи – навчитися розв’язувати СЛАР точними методами: класичним методом Гауса та його модифікаціями.

Ключові поняття: *прямий (точний) метод, метод Гауса, прямий хід, зворотний хід, головний елемент, корені системи, похибка.*

Теоретичні відомості

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), яка містить *m* рівнянь та *n* невідомих, називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

де a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ - коефіцієнти системи, b_i, $i = \overline{1,m}$ - вільні члени.

Систему (2.1) можна записати у вигляді матричного рівняння

$$AX = B \tag{1.2}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матриця коефіцієнтів при невідомих системи; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – стовпець вільних членів; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – стовпець невідомих.

Система (1.1) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени системи дорівнюють нулю $b_i = 0$, $i = \overline{1,m}$, в протилежному випадку – *неоднорідною*.

СЛАР (1.1) називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо немає жодного розв'язку.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо має більше одного розв'язку.

Для невизначеної системи кожен її розв’язок називається *частинним розв’язком* системи. Сукупність частинних розв’язків системи називається її *загальним розв’язком*.

Система (1.1) має *єдиний розв’язок*, якщо її матриця невироджена, тобто, визначник матриці А відмінний від нуля: $\det A \neq 0$.

У випадку *виродженості* матриці *А* система може мати безліч розв’язків або не мати жодного.

Сукупність чисел, які перетворюють систему (1.1) у тотожність, називається *розв’язком системи*, а самі числа – її *коренями*.

Розглянемо один з точних (прямих) методів розв’язування СЛАР (1.1) – *класичний метод Гауса*.

В основі даного методу лежить ідея послідовного виключення невідомих. Є декілька модифікацій методу. Розглянемо *схему єдиного ділення*, за якою систему розв’язують у два етапи – прямий та зворотній ходи.

На *першому етапі* вихідну систему зводять до рівносильної їй системи трикутної форми, виключаючи невідомі.

На *другому етапі*, який називається *зворотним (оберненим) ходом*, знаходять розв’язок лінійної системи рівнянь трикутної форми.

Вважатимемо, що (1.1) є невиродженою системою (розмірність такої системи *m*=*n* та $\det A \neq 0$).

Алгоритм методу Гауса

Записуємо розширену матрицю системи (1.1):

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{1n} & b_2 \\ & & \ldots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

1. Вибираємо головний елемент $a_{11} \neq 0$, якщо $a_{11} = 0$, то міняємо місцями перший рядок з другим або третім.

2. Ділимо всі коефіцієнти першого рядка розширеної матриці на головний елемент a_{11}.

3. Другий та третій рядки матриці перераховуємо за правилом багатокутника (прямокутника): $a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{ik} \cdot a_{lj}}{a_{lk}}$, де

a'_{ij} - елемент, який перераховується, a_{ij} - попереднє значення елемента, який перераховується, a_{lk} - головний елемент.

Всі елементи під головною діагоналлю на кожному кроці обнулюємо шляхом елементарних перетворень.

4. В результаті отримаємо матрицю з одиничним першим стовпцем. «Прямокутник» з коефіцієнтів системи однозначно визначається головним елементом і елементом, який перераховується.

5. На другому кроці головним елементом вибираємо $a_{22} \neq 0$.

6. Ділимо всі коефіцієнти другого рядка на головний елемент a_{22}. Перший рядок переписуємо без змін. Решту елементів перераховуємо за правилом прямокутника.

7. Даний алгоритм продовжуємо до тих пір, поки обнулимо всі елементи під головною діагоналлю. Тоді завершується прямий хід методу Гауса.

8. В результаті застосування *зворотного ходу* знайдемо значення невідомих $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ за формулами:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}; \quad x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j}{a_{kk}^{(k)}}, \; k = n-1, \ldots 2, 1.$$

9. Робимо перевірку, підставивши знайдені корені системи в (2.1).

Модифікацією класичного методу Гауса є *метод Гауса з вибором головного елемента*.

Головним елементом матриці *A* називається найбільший за модулем елемент матриці, який можна обрати а) по стовпцю, б) по рядку, в) по всій матриці. Кожний з варіантів а), б), в) досягається шляхом перестановки а) рядків, б) стовпців), в) рядків і стовпців. Розв’язання СЛАР проводиться за алгоритмом класичного методу Гауса.

Також модифікацією методу Гауса є метод Жордана-Гауса, який ще називають методом повного виключення. У випадку розв’язування СЛАР (1.1) даним методом виключення невідомих відбувається не лише під головною діагоналлю, а й над нею. В результаті отримується одинична матриця та розв’язок вихідної системи рівнянь. Перетворення коефіцієнтів системи також проводиться за правилом прямокутника.

Завдання для лабораторної роботи

Знайти розв’язок СЛАР наступними методами, згідно варіанта.

1) Класичним методом Гауса.

При розв’язуванні системи рівнянь даним методом вихідну систему звести до рівносильної їй системі трикутного вигляду з 1) одиничною головною діагоналлю, 2) без перетворень головної діагоналі в одиничну.

2) Методом Гауса з вибором головного елемента (по рядках, по стовпцях, по всій матриці).

3) Методом Жордана-Гауса.

Обчислення проводити з точністю 0,0001.

Варіанти завдань:

1 $$\begin{cases} 3.21x_1 - 4.25x_2 + 2.13x_3 = 5.06; \\ 7.09x_1 + 1.17x_2 - 2.23x_3 = 4.75; \\ 0.43x_1 - 1.4x_2 - 0.62x_3 = -1.05. \end{cases}$$

2 $$\begin{cases} 0.34x_1 - 0.04x_2 + 0.10x_3 = 0.33; \\ -0.04x_1 + 0.10x_2 + 0.12x_3 = -0.5; \\ 0.10x_1 + 0.12x_2 + 0.71x_3 = 0.28. \end{cases}$$

3 $\begin{cases} 2.5x_1 - 3.12x_2 - 4.03x_3 = -7.5; \\ 0.61x_1 + 0.71x_2 - 0.05x_3 = 0.44; \\ -1.03x_1 - 2.05x_2 + 0.877x_3 = -1.6. \end{cases}$

4 $\begin{cases} 1.17x_1 + 0.53x_2 - 0.84x_3 = 1.15; \\ 0.64x_1 - 0.72x_2 - 0.43x_3 = 0.15; \\ 0.32x_1 + 0.43x_2 - 0.93x_3 = -0.48. \end{cases}$

5 $\begin{cases} 1.14x_1 - 2.15x_2 - 5.11x_3 = -4.16; \\ -0.71x_1 + 0.81x_2 - 0.02x_3 = -0.17; \\ 0.42x_1 - 1.13x_2 + 7.05x_3 = 6.15. \end{cases}$

6 $\begin{cases} 0.66x_1 - 1.44x_2 - 0.18x_3 = 1.83; \\ 0.48x_1 - 0.24x_2 + 0.37x_3 = -0.8; \\ 0.86x_1 + 0.43x_2 + 0.64x_3 = 0.64. \end{cases}$

7 $\begin{cases} 3.11x_1 - 1.66x_2 - 0.60x_3 = -0.92; \\ -1.65x_1 + 3.51x_2 - 0.78x_3 = 2.57; \\ 0.60x_1 + 0.78x_2 - 1.87x_3 = 1.65. \end{cases}$

8 $\begin{cases} 1.6x_1 + 0.12x_2 + 0.57x_3 = 0.18; \\ 0.38x_1 + 0.25x_2 - 0.54x_3 = 0.63; \\ 0.28x_1 + 0.46x_2 - 1.12x_3 = 0.88. \end{cases}$

9 $\begin{cases} 0.71x_1 + 0.10x_2 + 0.12x_3 = 0.29; \\ 0.10x_1 + 0.34x_2 - 0.04x_3 = 0.32; \\ 0.12x_1 - 0.04x_2 + 0.10x_3 = -0.10. \end{cases}$

10 $\begin{cases} 0.10x_1 - 0.04x_2 - 0.13x_3 = -0.15; \\ -0.04x_1 + 0.34x_2 + 0.05x_3 = 0.31; \\ -0.13x_1 + 0.05x_2 + 0.63x_3 = 0.37. \end{cases}$

11 $\begin{cases} 0.12x_1 - 0.43x_2 + 0.14x_3 = -0.17; \\ -0.07x_1 + 0.34x_2 + 0.72x_3 = 0.62; \\ 1.18x_1 - 0.08x_2 - 0.25x_3 = 1.12. \end{cases}$

12 $\begin{cases} 0.20x_1 + 0.44x_2 + 0.81x_3 = 0.74; \\ 0.58x_1 - 0.29x_2 + 0.05x_3 = 0.02; \\ 0.05x_1 + 0.34x_2 + 0.10x_3 = 0.32. \end{cases}$

13 $\begin{cases} 0.42x_1 - 1.13x_2 + 7.05x_3 = 6.15; \\ 1.14x_1 - 2.15x_2 + 5.11x_3 = -4.16; \\ -0.71x_1 + 0.81x_2 - 0.02x_3 = -0.17. \end{cases}$

14 $\begin{cases} 0.42x_1 - 1.13x_2 + 7.05x_3 = 6.15; \\ 1.14x_1 - 2.15x_2 + 5.11x_3 = -4.16; \\ -0.71x_1 + 0.81x_2 - 0.02x_3 = -0.17. \end{cases}$

15 $\begin{cases} 7.09x_1 + 1.17x_2 - 2.23x_3 = -4.75; \\ 0.43x_1 - 1.4x_2 - 0.62x_3 = -1.05; \\ 3.21x_1 - 4.25x_2 + 2.13x_3 = 5.06. \end{cases}$

16 $\begin{cases} 7.09x_1 + 1.17x_2 - 2.23x_3 = -4.75; \\ 0.43x_1 - 1.4x_2 - 0.62x_3 = -1.05; \\ 3.21x_1 - 4.25x_2 + 2.13x_3 = 5.06. \end{cases}$

17 $\begin{cases} 0.61x_1 + 0.71x_2 - 0.05x_3 = 0.44; \\ -1.03x_1 - 2.05x_2 + 0.87x_3 = -1.16; \\ 2.5x_1 - 3.12x_2 - 5.03x_3 = -7.5. \end{cases}$

18 $\begin{cases} 0.61x_1 + 0.71x_2 - 0.05x_3 = 0.44; \\ -1.03x_1 - 2.05x_2 + 0.87x_3 = -1.16; \\ 2.5x_1 - 3.12x_2 - 5.03x_3 = -7.5. \end{cases}$

19
$$\begin{cases} 0.10x_1 + 0.12x_2 - 0.13x_3 = 0.10; \\ 0.12x_1 + 0.71x_2 + 0.15x_3 = 0.26; \\ -0.13x_1 + 0.15x_2 + 0.63x_3 = 0.38. \end{cases}$$

20
$$\begin{cases} 0.10x_1 + 0.12x_2 - 0.13x_3 = 0.10; \\ 0.12x_1 + 0.71x_2 + 0.15x_3 = 0.26; \\ -0.13x_1 + 0.15x_2 + 0.63x_3 = 0.38. \end{cases}$$

Лабораторна робота №2
Методи факторизації.
Метод LU-розкладу. Метод квадратних коренів

Мета роботи – навчитися здійснювати LU-розклад матриці та розв'язувати СЛАР з його застосуванням.

Ключові поняття: *метод факторизації,* LU-розклад, квадратні корені.

Теоретичні відомості

Розв'язування СЛАР за допомогою LU-розкладу

Алгоритм методу LU-розкладу (факторизації) досить близький до методу Гауса. Основною перевагою даного методу в порівнянні з методом Гауса є можливість більш швидкого одержання результатів розв'язку для різних векторів B СЛАР вигляду

$$AX = B \tag{2.1}$$

де A – матриця розмірності nxn зі сталими коефіцієнтами, B – n-вимірний вектор вільних членів, X – n-вимірний вектор невідомих.

Метод LU-розкладу матриці A представляє собою розклад матриці A в добуток нижньої та верхньої трикутних матриць, тобто, $A=LU$, де L – нижня трикутна матриця (матриця, в якої всі елементи, що знаходяться вище головної діагоналі, дорівнюють нулю: $l_{ij}=0$, $i<j$), U-верхня трикутна матриця (матриця, в якій всі елементи, що знаходяться нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю: $u_{ij} = 0$, $i>j$).

Теоретичне обґрунтування можливості розкладу матриці A у добуток двох трикутних матриць містить наступна теорема.

Теорема. *Нехай всі головні мінори матриці A відмінні від нуля* $\Delta_j \neq 0$, $j = \overline{1, m}$. *Тоді матрицю A можна записати єдиним способом у вигляді добутку*

$$A = LU, \tag{2.2}$$

де L – нижня трикутна матриця з ненульовими діагональними елементами, U – верхня трикутна матриця з одиничною головною діагоналлю.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \dots & \cdots & \dots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \dots & \cdots & \dots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Слід зазначити, якщо хоча б один з головних мінорів матриці *A* дорівнює нулю, то описаний LU-розклад неможливий.

Представимо (2.2) у вигляді

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \dots & \cdots & \dots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \dots & \cdots & \dots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \dots & \cdots & \dots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Перемножимо матриці в (2.3) і прирівняємо поелементно ліву і праву частини рівності, отримаємо формули для визначення l_{ij} (при $i<j$) та u_{ij} (при $i>j$):

1) $k=1$: $\quad l_{i1}=a_{i1}, \quad i=\overline{1,n}$;

$$u_{1j}=a_{1j}, \quad j=\overline{2,n}, \quad u_{ii}=1;$$

2) $k=k+1$: $\quad l_{ik}=a_{ik}-\sum_{m=1}^{k-1} l_{im}u_{mk}$, $i=\overline{k,n}$;

$$u_{kj}=\left(a_{kj}-\sum_{m=1}^{k-1} l_{km}u_{mj}\right)/\,l_{kk}, \; j=\overline{k+1,n}.$$

Підставимо розклад (2.3) у систему (2.1):

$$LUX=B. \qquad (2.4)$$

Введемо допоміжний вектор Y в (2.4):

$$UX=Y \qquad (2.5)$$

Тоді (2.4) запишемо у вигляді

$$LY=B \qquad (2.6)$$

Таким чином, розв'язування системи (2.1) відбувається у два етапи: прямий хід – розв'язування системи (2.6), зворотний хід – розв'язування системи (2.5).

Перевірку можна зробити, виконавши $LU=A$.

Обчислення визначника LU-факторизованої матриці A зводиться до обчислення добутку діагональних елементів матриці L:

$$\det A=\det L\cdot\det U=l_{11}\cdot l_{22}\cdot\ldots\cdot l_{nn},$$

тобто, $\det A=\det L$.

Даний метод також застосовують для обчислення оберненої матриці A: $A^{-1}=U^{-1}\cdot L^{-1}$.

Метод квадратних коренів

У випадках, коли матриця СЛАР є симетричною, то для розв'язування таких систем використовують метод квадратних коренів (метод Холецького).

Нехай задано СЛАР (2.1), де $A_{ij}=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – симетрична, додатньо визначена матриця, тобто, головні мінори матриці додатні. Тоді матрицю A можна записати у вигляді добутку двох транспонованих між собою трикутних матриць:

$$A = U \cdot U^T\,, \qquad (2.7)$$

де $$U = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}, \quad U^T = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{n1} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{n2} \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для знаходження елементів матриць U, U^T необхідно виконати множення цих матриць, і прирівняти відповідні елементи матриць у рівності (2.7). Таким чином, знаходження елементів матриць U, U^T проводимо за наступними формулами:

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}}\,;\ u_{i1} = \frac{a_{1j}}{u_{11}}\,;\ u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2} \text{ для } i = \overline{2,n},\ j = \overline{2,n}\,;$$

(з урахуванням припущень на матрицю *A*, що підкореневий вираз додатний)

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}}{u_{ii}} \text{ для } i = \overline{2,n},\ j = \overline{2,n}\ (i > j)\,;$$

$$u_{ii} \neq 0 \text{ для } i = \overline{1,n}\,; \quad u_{ij} = 0 \text{ для } i < j\,.$$

Розв’язок симетричної системи (2.6) зводиться до послідовного розв’язування двох трикутних систем:

згідно (2.7) введемо допоміжний вектор Y в (2.1)

$$U^T X = Y \qquad (2.7)$$

Тоді (2.1) запишемо у вигляді

$$UY = B \qquad (2.8)$$

Таким чином, розв’язування системи (2.1) відбувається у два етапи: прямий хід – розв’язування системи (2.8), зворотний хід – розв’язування системи (2.7).

Розкладу UU^T - розкладу симетричної матриці можуть завадити дві обставини: перетворення в нуль елемента u_{ii} при певному $i = \overline{1,n}$ та від’ємність підкореневого виразу. Відомо, що кожному класу додатньо визначених матриць, розклад матриці за наведеними вище формулами є можливим.

Якщо не враховувати процес знаходження коренів, то даний метод є на порядок швидшим за метод Гауса.

Завдання для лабораторної роботи

1. Виконати LU-розклад матриці та розв'язати за його допомогою СЛАР з лабораторної роботи №1 згідно варіанта.
2. Знайти розв'язок СЛАР методом квадратних коренів.

Обчислення проводити з точністю 0,0001.

Варіанти завдань:

1 $$\begin{cases} 3.14x_1 - 2.12x_2 + 1.17x_3 = 1.27; \\ -2.12x_1 + 1.32x_2 - 2.45x_3 = 2.13; \\ 1.17x_1 - 2.45x_2 + 1.18x_3 = 3.14. \end{cases}$$

2 $$\begin{cases} 3.23x_1 + 1.62x_2 + 0.65x_3 = 1.28; \\ 1.62x_1 - 2.33x_2 - 1.43x_3 = 0.87; \\ 0.65x_1 - 1.43x_2 + 2.18x_3 = -2.87. \end{cases}$$

3 $$\begin{cases} 1.65x_1 - 2.27x_2 + 0.18x_3 = 2.25; \\ -2.27x_1 + 1.73x_2 - 0.46x_3 = 0.93; \\ 0.18x_1 - 0.46x_2 + 2.16x_3 = 1.33. \end{cases}$$

4 $$\begin{cases} 3.23x_1 + 1.62x_2 + 0.65x_3 = 1.28; \\ 1.62x_1 - 2.33x_2 - 1.43x_3 = 0.87; \\ 0.65x_1 - 1.43x_2 + 2.18x_3 = -2.87. \end{cases}$$

5 $$\begin{cases} 0.93x_1 + 1.42x_2 - 2.55x_3 = 2.48; \\ 1.42x_1 - 2.87x_2 + 2.36x_3 = -0.75; \\ -2.55x_1 + 2.36x_2 - 1.44x_3 = 1.83. \end{cases}$$

6 $$\begin{cases} 2.23x_1 - 0.71x_2 + 0.63x_3 = 1.28; \\ -0.71x_1 + 1.45x_2 - 1.34x_3 = 0.64; \\ 0.63x_1 - 1.34x_2 + 0.77x_3 = -0.87. \end{cases}$$

7 $$\begin{cases} 0.78x_1 + 1.08x_2 - 1.35x_3 = 0.57; \\ 1.08x_1 - 1.28x_2 + 0.37x_3 = 1.27; \\ -1.35x_1 + 0.37x_2 + 2.86x_3 = 0.47. \end{cases}$$

8 $$\begin{cases} 2.74x_1 - 1.18x_2 + 1.23x_3 = 0.16; \\ -1.18x_1 + 1.71x_2 - 0.52x_3 = 1.81; \\ 1.23x_1 - 0.52x_2 + 0.62x_3 = -1.25. \end{cases}$$

9 $$\begin{cases} 1.48x_1 + 0.75x_2 - 1.23x_3 = 0.83; \\ 0.75x_1 - 0.96x_2 + 1.64x_3 = -1.12; \\ -1.23x_1 + 1.64x_2 - 0.55x_3 = 0.47. \end{cases}$$

10 $$\begin{cases} 0.63x_1 - 1.72x_2 + 3.37x_3 = -0.75; \\ -1.72x_1 - 2.27x_2 + 1.62x_3 = 1.27; \\ 3.37x_1 + 1.62x_2 - 0.43x_3 = 2.74. \end{cases}$$

11
$$\begin{cases} 2.32x_1 + 1.17x_2 - 0.28x_3 = 1.43; \\ 1.17x_1 - 1.43x_2 + 0.88x_3 = -0.47; \\ -0.28x_1 + 0.88x_2 - 1.45x_3 = 1.09. \end{cases}$$

12
$$\begin{cases} 1.17x_1 - 0.65x_2 + 1.54x_3 = -1.43; \\ -0.65x_1 + 1.16x_2 - 1.73x_3 = 0.68; \\ 1.54x_1 - 1.73x_2 + 2.15x_3 = 1.87. \end{cases}$$

13
$$\begin{cases} 1.42x_1 - 2.15x_2 + 1.07x_3 = 2.48; \\ -2.15x_1 + 0.76x_2 - 2.18x_3 = 1.15; \\ 1.07x_1 - 2.18x_2 + 1.23x_3 = 0.88. \end{cases}$$

14
$$\begin{cases} 1.63x_1 + 1.27x_2 - 0.84x_3 = 1.51; \\ 1.27x_1 + 0.65x_2 + 1.27x_3 = -0.63; \\ -0.84x_1 + 1.27x_2 - 1.21x_3 = 2.15. \end{cases}$$

15
$$\begin{cases} 0.83x_1 + 2.18x_2 - 1.73x_3 = 0.28; \\ 2.18x_1 - 1.41x_2 + 1.03x_3 = -1.18; \\ -1.73x_1 + 1.03x_2 + 0.27x_3 = 0.72. \end{cases}$$

16
$$\begin{cases} 1.35x_1 - 0.72x_2 + 1.38x_3 = 0.88; \\ -0.72x_1 + 1.45x_2 - 2.18x_3 = 1.72; \\ 1.38x_1 - 2.18x_2 + 0.93x_3 = -0.72. \end{cases}$$

17
$$\begin{cases} 2.16x_1 - 3.18x_2 + 1.26x_3 = 1.83; \\ -3.18x_1 + 0.63x_2 - 2.73x_3 = 0.54; \\ 1.26x_1 - 2.73x_2 + 3.15x_3 = 1.72. \end{cases}$$

18
$$\begin{cases} 1.36x_1 + 0.92x_2 - 1.87x_3 = 2.15; \\ 0.92x_1 - 2.24x_2 + 0.77x_3 = -2.06; \\ -1.87x_1 + 0.77x_2 - 1.16x_3 = 0.17. \end{cases}$$

19
$$\begin{cases} 0.75x_1 - 1.24x_2 + 1.56x_3 = 0.49; \\ -1.24x_1 + 0.18x_2 - 1.72x_3 = -0.57; \\ 1.56x_1 - 1.72x_2 + 0.79x_3 = 1.03. \end{cases}$$

20
$$\begin{cases} 1.18x_1 + 2.32x_2 - 0.67x_3 = 1.83; \\ 2.32x_1 + 1.87x_2 + 1.35x_3 = -0.73; \\ -0.67x_1 + 1.35x_2 - 0.88x_3 = 0.68. \end{cases}$$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2
Ітераційні методи розв’язування задач лінійної та нелінійної алгебри

Лабораторна робота №3
СЛАР з тридіагональною матрицею. Метод прогонки

Мета роботи – навчитися розв’язувати СЛАР з тридіагональною матрицею методом прогонки.

Ключові поняття: тридіагональна матриця, метод прогонки, коректність та стійкість методу.

Теоретичні відомості

В загальному вигляді вихідна СЛАР з тридіагональною матрицею записується у вигляді

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \, , \tag{3.1}$$

де $1 \le i \le n$, $a_1 = 0$, $c_n = 0$, $b_i \ne 0$.

В розгорнутому вигляді система (3.1) є наступною:

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2, \\ a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = d_3, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = d_{n-1}, \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Найчастіше для розв'язування СЛАР вигляду (3.2) використовують метод прогонки, який є частковим випадком методу Гауса.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Метод прогонки реалізується у два етапи: *прямий* та *обернений хід*.

Прямий хід методу полягає в знаходженні прогоночних коефіцієнтів A_i, B_i, $i = \overline{1,n}$. Кожне невідоме x_i виражається через x_{i+1} за допомогою прогоночних коефіцієнтів a_i, b_i:

$$x_i = A_i x_{s+1} + B_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.3}$$

Наприклад, з першого рівняння (3.2) знайдемо

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1} \, , \tag{3.4}$$

звідки $a_1 = -\dfrac{c_1}{b_1}$, $\quad b_1 = \dfrac{d_1}{b_1}$.

Тоді $x_1 = A_1 x_2 + B_1$.

Далі з другого рівняння системи (3.2) за допомогою (3.4) виражаємо x_2 через x_3, замінюючи x_1 формулою (3.4).

Продовжуючи даний процес, для і-го рівняння системи

(3.1) отримаємо

$$x_i = -\frac{c_i}{b_i + a_i A_{i-1}} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{b_i + a_i A_{i-1}}, \qquad (3.5)$$

де $\quad A_i = -\frac{c_i}{b_i + a_i A_{i-1}}, \quad B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{b_i + a_i A_{i-1}}, \quad i = \overline{2, n-1}.$

Таким чином, прямий хід методу прогонки (визначення прогоночних коефіцієнтів A_i, B_i, $i = \overline{1, n}$) завершений.

Обернений хід методу прогонки (аналог оберненого ходу методу Гауса) полягає у послідовному обчисленні x_i, $i = \overline{n, n-1, ..., 1}$:

$$\begin{cases} x_n = A_n x_{n+1} + B_n, \\ x_{n-1} = A_{n-1} x_n + B_{n-1}, \\ x_{n-2} = A_{n-2} x_{n-1} + B_{n-2}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1 = A_1 x_2 + B_1. \end{cases}$$

Теорема. *Достатніми умовами коректності і стійкості методу прогонки (3.3)-(3.5) для розв'язування СЛАР (3.1), (3.2) є виконання нерівності:*

$$|B_i| \ge |A_i| + |C_i|, \quad i = \overline{1, n-1}, \ A_i \ne 0, \ B_i \ne 0. \qquad (3.6)$$

Прогонка називається *коректною*, якщо знаменники у прогоночних формулах (3.5) відмінні від нуля. Це забезпечує існування єдиного розв'язку та достатню стійкість методу прогонки відносно похибок заокруглення.

Умова (3.6) являється достатньою, але не необхідною, оскільки в ряді випадків для добре обумовлених систем вигляду (3.1) або (3.2) метод прогонки залишається стійким без урахування умов (3.6).

Завдання для лабораторної роботи

Знайти розв'язок СЛАР методом прогонки. Обчислення проводити з точністю 0,0001.

Варіанти завдань:

1 $\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 = 6, \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_2 + 10x_3 - 4x_4 = 8, \\ -x_3 + 6x_4 = 5. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 23, \\ 5x_3 + 2x_4 = 29. \end{cases}$

3 $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 8, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 10, \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_3 - 3x_4 = -2. \end{cases}$

4 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$

5 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$

6 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 12, \\ x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

7 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -2, \\ 5x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 4, \\ 6x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

9 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -3, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

10 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 10, \\ x_3 + 1x_4 = 2. \end{cases}$

11 $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 7, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5, \\ 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$$

12 $$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

13 $$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 4, \\ 6x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

14 $$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = -4, \\ 6x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

15 $$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 7, \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 10, \\ 2x_3 - 4x_4 = -8. \end{cases}$$

16 $$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

17 $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7, \\ 2x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

18 $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 7, \\ x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$$

19 $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_3 + 1x_4 = 5. \end{cases}$$

20 $$\begin{cases} 6x_1 - x_2 = 4, \\ x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Лабораторна робота №4
Ітераційні методи розв'язування СЛАР: метод Якобі, метод Зейделя

Мета роботи – навчитися розв'язувати СЛАР ітераційними методами.

Ключові поняття: ітераційні методи, метод простих ітерацій, метод покращених ітерацій, збіжність ітераційного процесу.

Теоретичні відомості

Методи послідовних наближень, в яких при обчисленні наступного наближеного розв'язку використовуються попередні, вже відомі наближені розв'язки, називаються *ітераційними методами*. Дані методи представляють собою збіжний ітераційний процес, і є швидшими в порівнянні з точними методами.

Ітераційний метод для початку обчислень потребує задання одного або декількох початкових наближень. Умови збіжності та швидкість збіжності кожного ітераційного процесу суттєво залежить від властивостей матриці системи і вибору початкових наближень.

Розглянемо лінійні стаціонарні методи першого порядку: *метод простих ітерацій (Якобі)* та *метод покращених ітерацій (Зейделя)*.

Нехай задано СЛАР вигляду

$$AX = B. \tag{4.1}$$

Оскільки метод простих ітерацій є стаціонарним, то систему (4.1) представимо у вигляді

$$x = Cx + D, \tag{4.2}$$

де C – квадратна матриця з елементами $\{c_{ij}\},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}$, D – вектор-стовпець з елементами $\{d_i\},\ i=\overline{1,n}.$

Система (4.2) у розгорнутому вигляді є наступною:

$$
\begin{cases}
x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n + d_1, \\
x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n + d_2, \\
\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + c_{n3}x_3 + \ldots + c_{nn}x_n + d_n.
\end{cases}
\tag{4.3}
$$

Перехід (4.1) до (4.2) можна здійснити різними способами.

Найпростіший спосіб перетворення (4.1) до вигляду (4.2) або (4.3) полягає у наступному: розв'яжемо систему (4.3) відносно невідомих при ненульових діагональних елементах $c_{ii} \neq 0,\ i = \overline{1, n}$ (якщо будь-який елемент головної діагоналі дорівнює нулю, достатньо відповідне рівняння переставити місцями з будь-яким іншим рівнянням).

Для цього з першого рівняння системи (4.3) виразимо невідоме x_1: $x_1 = \frac{1}{c_{11}}\left(d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - \ldots - c_{1n}x_n\right)$.

Аналогічно з другого рівняння системи (4.3) виразимо невідоме x_2: $x_2 = \frac{1}{c_{22}}\left(d_2 - c_{21}x_1 - c_{23}x_3 - \ldots - c_{2n}x_n\right)_1$.

Даний процес продовжуємо до x_n.

В результаті отримаємо систему вигляду

$$
\begin{cases}
x_1 = \qquad\quad c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n + d_1, \\
x_2 = c_{21}x_1 + \qquad\quad + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n + d_2, \\
\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + c_{n3}x_3 + \ldots + c_{nn-1}x_n + d_n.
\end{cases}
\tag{4.4}
$$

В системі (4.4) на головній діагоналі матриці C знаходяться нульові елементи, інші коефіцієнти обчислюються за формулами:

$$
c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}},\ d_i = -\frac{b_i}{a_{ii}},\ i, j = \overline{1, n},\ i \neq j,\ c_{ii} = 0,\ i = j. \tag{4.5}
$$

Якщо для системи (4.1) виконується умова $a_{ii} \neq 0,\ i = \overline{1, n}$, то з кожного i-го рядка визначаємо x_i. Таку систему називають системою, зведеною до нормального вигляду. Для неї ітераційний процес має вигляд

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.6}$$

Або у матричному вигляді (4.5) є наступною: $x = Cx + D.$

Побудований ітераційний процес називають *методом простих ітерацій (методом Якобі)*. Даний метод збігається, якщо виконується одна з умов:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \text{ для всіх } i = \overline{1, n}.$$

Тобто, достатньою умовою збіжності ітераційного процесу є перевага діагональних елементів матриці A.

Алгоритм методу простих ітерацій:

1. Вибирають початкове наближення
$$x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)^T.$$

В якості початкового наближення можна обрати $x^{(0)} = d$ або $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)^T = (d_1, d_2, \ldots, d_n)^T.$

2. Підставляючи $x^{(0)}$ в праву частину системи (4.2), отримаємо $x^{(1)} = Cx^{(0)} + D.$
3. Підставляючи наближене значення $x^{(1)}$ в праву частину системи (4.2), отримаємо $x^{(2)} = Cx^{(1)} + D.$
4. В результаті виконання наступних ітерацій отримаємо послідовність векторів $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots.$

Таким чином, ітераційний процес проводиться за формулою

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + D, \; k = 0, 1, 2 \ldots \tag{4.7}$$

або (4.7) у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1, \\ x_2 = c_{21}x_1^{(k)} + c_{22}x_2^{(k)} + c_{23}x_3^{(k)} + \ldots + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n = c_{n1}x_1^{(k)} + c_{n2}x_2^{(k)} + c_{n3}x_3^{(k)} + \ldots + c_{nn}x_n^{(k)} + d_n. \end{cases} \tag{4.8}$$

Метод простих ітерацій (4.8) збігається до єдиного розв'язку системи (4.4) (відповідно й до системи (4.1)) при будь-якому початковому наближенні $x^{(0)}$, якщо норма матриці еквівалентної системи менша одиниці: $\|\alpha\|_C < 1$.

Оскільки умова $\|\alpha\|_C < 1$ являється тільки достатньою умовою збіжності ітераційного процесу методу простих ітерацій, то ітераційний процес може збігатися у випадку, якщо дана умова не виконується.

Тоді критерієм збіжності ітераційного процесу є наступна найпростіша умова:

$$\left| x^{(k+1)} - x^{(k+1)} \right| \le \varepsilon,$$

де ε - задана точність обчислень.

Розглянемо *метод покращених ітерацій (Зейделя).*

Нехай система (4.1) зведена до вигляду системи (4.4), коефіцієнти якої обчислюються за формулами (4.5).

Метод простих ітерацій досить повільно збігається. Пришвидшення збіжності ітераційного процесу можна домогтися за допомогою методу Зейделя, який являється модифікацією методу Якобі.

Основна ідея модифікації полягає в тому, що для обчислення $(k+1)$ наближення невідомjuj x_i при $i > 1$, використовують вже обчислені раніше $(k+1)$ наближення невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

За початкове наближення можна приймати вектор правої частини $x_0 = \left(d_1, d_2, \ldots, d_n\right)^T$ аналогічно до методу Якобі.

Таким чином, ітераційний процес за методом Зейделя проводиться за формулою

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k+1)} + \tilde{C}x^{(k)} + D, \; k = 0,1,2..., \tag{4.7}$$

де C - нижня трикутна матриця системи (4.3) з діагональними елементами рівними нулю, $\tilde{C}$ - верхня трикутна матриця з діагональними елементами відмінними від нуля, $D = \left(d_1, d_2, \ldots, d_n\right)^T$.

У розгорнутому вигляді (4.7)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \qquad\qquad c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1, \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + \qquad\qquad + c_{23}x_3^{(k)} + \ldots + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2, \\ \qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_m^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + c_{n3}x_3^{(k+1)} + \qquad \ldots \qquad + d_n. \end{cases} \qquad (4.8)$$

Ітераційний процес (4.8) за даним методом збігається і при не виконанні умови $\|\alpha\|_C < 1$. Діагональна перевага елементів матриці А СЛАР гарантує збіжність методу Зейделя.

Критерій збіжності ітераційного процесу аналогічний методу простих ітерацій.

Завдання для лабораторної роботи

Привести СЛАР з лабораторної роботи №1 до нормалізованого вигляду. Знайти розв'язок даної системи ітераційними методами Якобі та Зейделя з точністю 0,0001. Порівняти отримані результати щодо швидкості збіжності ітераційних процесів та зробити висновки.

Лабораторна робота №5
Наближені методи розв'язування нелінійних рівнянь: хорд , дотичних, комбінований метод хорд та дотичних

Мета роботи – навчитися розв'язувати нелінійні рівняння з однією змінною наближеними методами.

Ключові поняття: нелінійне рівняння, відокремлення коренів, метод хорд, метод дотичних, збіжність ітераційного процесу.

Теоретичні відомості

Нехай задано рівняння

$$f(x) = 0, \qquad (5.1)$$

де $f(x)$ – функція дійсного або комплексного аргументу, визначена і неперервна на деякому проміжку $[a,b]$.

Розв’язати рівняння (5.1) означає знайти множину його коренів, тобто, таких значень $x \in [a,b]$, при яких рівняння (5.1) перетворюється у тотожність.

Корінь рівняння (5.1) ще називають *нулем функції* $f(x)$.

Обчислювальні алгоритми наближеного знаходження коренів нелінійного рівняння складаються з таких етапів:

I) відшукання достатньо малих відрізків (інтервалів), що належать області визначення рівняння, у кожному з яких є один і тільки один корінь рівняння $f(x)=0$. Це етап *відокремлення коренів рівняння або визначення відрізків ізоляції коренів*;

II) обчислення кореня з заданою точністю, якщо відоме деяке його початкове наближення в інтервалі, що не містить інших коренів. Це етап *уточнення наближених коренів рівняння.*

Відокремлення коренів нелінійних рівнянь

На практиці результатом I етапу є встановлення в області визначення функції таких інтервалів, які містять лише один корінь. Тому цей етап називається *процесом відокремлення коренів*.

Відокремлення коренів рівняння здійснюється за допомогою *аналітичних* або *графічних методів*.

Аналітичний метод ґрунтується на теоремах з математичного аналізу.

Теорема 1. (теорема існування кореня рівняння)

Якщо функція $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$ *і набуває на кінцях цього відрізка значень протилежних знаків, тобто,* $f(a)\cdot f(b) < 0,$ *то всередині цього відрізка існує хоча б один корінь рівняння* $f(x)=0.$

Теорема 2. (теорема існування та єдиності кореня)

Якщо функція $f(x)$ *неперервна і диференційована на* $[a,b]$*, набуває на кінцях цього відрізка значень протилежних знаків, а похідна функції* $f'(x)$ *зберігає сталий знак всередині цього відрізка, то рівняння* $f(x)=0$ *на цьому відрізку має* *корінь, причому єдиний.*

Алгоритм відокремлення коренів

1. Знайти область визначення функції $f(x)$ рівняння (5.1).
2. Обчислити похідну $f'(x)$ і знайти точки, в яких похідна перетворюється в нуль (критичні точки функції $f(x)$).
3. Записати інтервали монотонності.
4. Дослідити знак функції $f(x)$ на кінцях інтервалів монотонності.
5. Визначити відрізки, на кінцях яких функція $f(x)$ набуває значень протилежних знаків (відрізки ізоляції коренів).
6. Знайдені відрізки ізоляції коренів при необхідності звузити до одиничної довжини.

Графічний метод доцільно використовувати, коли функція $f(x)$ має нескладний вигляд, тобто, є можливість побудови графіка функції $y = f(x)$, та знайти точки перетину графіка з віссю абсцис та кінці ізоляції кореня.

Якщо побудувати графік функції $y = f(x)$ викликає труднощі, то рівняння (8.1) можна записати у вигляді

$$f_1(x) = f_2(x)$$

і побудувати графіки функцій $y = f_1(x),\quad y = f_2(x).$ Абсциси точок перетину цих графіків будуть відповідати значенням коренів розв'язуваного рівняння.

Розглянемо методи уточнення коренів нелінійних рівнянь.

Метод хорд

Даний метод ще називають методом *січних*, *методом пропорційних частин*, *методом лінійної інтерполяції.*

Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$ і має неперервні похідні $f'(x)$, $f''(x)$ на даному відрізку. Крім того, $f'(x)$, $f''(x)$ не змінюють знак і не перетворюються в нуль на відрізку $[a,b]$. На кінцях відрізка функція $f(x)$ приймає значення різних знаків, отже, функція має єдиний корінь на відрізку $[a,b]$.

В даному методі припускається, що відрізок $[a,b]$ достатньо малий і на ньому функція $f(x)$ близька до лінійної, тобто, нелінійна функція замінюється хордою – прямою, що стягує кінці нелінійної функції.

За наближене значення кореня приймають точку перетину хорди з віссю OX.

Для вибору початкового наближення в методі хорд користуються правилом закріпленого кінця. Нерухомим кінцем проміжку є той, для якого знак функції збігається із знаком другої похідної:

$$f(x_0)\cdot f''(x_0)>0. \tag{5.2}$$

Якщо умова виконується, то за нерухомий кінець вибираємо точку b, а за початкове наближення точку $x_0=a$, інакше – навпаки.

Алгоритм методу хорд

1. Знайти похідні функції $f'(x)$, $f''(x)$.
2. Знайти значення $f(b)$, $f''(b)$.
3. Перевірити виконання умови $f(b)\cdot f''(b)>0$.
4. Якщо умова виконується, то за нерухомий кінець вибирається точка b, а за початкове наближення точку $x_0=a$. В цьому випадку послідовні наближення $x_n, (n=1,2,\ldots)$ до точного значення кореня x^* обчислюють за формулою:

$$\begin{cases} x_{\mathrm{n+1}}=x_n-\dfrac{(b-x_n)}{(\mathrm{b})\text{ - }\mathrm{f}(x_n)}\cdot \mathrm{f}(x_n),\ n=0,1,2,.... \\ x_o=a. \end{cases} \tag{5.3}$$

5. Якщо умова п. 3 не виконується, то за нерухомий кінець вибирається точка a, а за початкове наближення точка $x_0=b$. В цьому випадку послідовні наближення $x_n, (n=1,2,\ldots)$ до точного значення кореня x^* обчислюють за формулою:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} \cdot f(x_n), n = 0,1,2,.... \\ x_o = b. \end{cases} \quad (5.4)$$

6. Завершуємо уточнення кореня рівняння за умовою

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon, \quad (5.5)$$

де ε - задана точність обчислень.

Метод дотичних (Ньютона)

Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$ і має неперервні похідні $f'(x)$, $f''(x)$ на даному відрізку, не змінюють знак і не перетворюються в нуль на даному відрізку.

Методом дотичних знаходять абсциси точок перетину дотичних до графіка функції $y = f(x)$ у точках $x = x_n$ $(n = 1,2,\ldots)$

В даному методі суттєвим є вибір початкового наближення x_0, , яке залежить від вигляду функції.

За початкове наближення x_0 доцільно вибирати той край проміжка $[a,b]$, для якого виконується умова (5.2):

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Наступні наближення обчислюють за ітераційною формулою методу Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; n = 0,1,2,....; \qquad f'(x_n) \ne 0. \quad (5.6)$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо функція* $f(x) \in C^2[a,b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, *а* $f''(x_0)$ *не змінює знак на відрізку* $[a,b]$, *то, виходячи з початкового наближення* $x_0 = [a,b]$, *що задовольняє умову* $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, *можна обчислити методом дотичних єдиний корінь* x^* *рівняння (5.1) з будь-якою степінню точності.*

Якщо на проміжку $[a,b]$, похідна змінюється мало, то для спрощення обчислень можна прийняти $f'(x_n) \approx f''(x_0)\cdot$ Тоді формула *модифікованого методу дотичних* має вигляд

$$\mathrm{x}_{\mathrm{n+1}} = x_n - \frac{\mathrm{f}(x_n)}{\mathrm{f}'(x_0)},\ n = 0,1,2,....;\ \mathrm{f}'(x_0) \neq 0. \qquad (5.7)$$

Ітераційний процес уточнення кореня рівняння завершуємо при умові $\left|\mathrm{x}_{\mathrm{n}} - x_{n-1}\right| \leq \varepsilon$, де ε - задана точність обчислень.

Комбінований метод хорд і дотичних

Методи хорд і дотичних дають наближення кореня з різних сторін. Тому часто їх застосовують у комбінації один з одним, і уточнення кореня відбувається швидше.

З урахуванням типу графіка ці методи комбінують так:

Якщо $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0,$ то метод хорд дає наближене значення кореня з недостачею, а метод дотичних – з надлишком.

Якщо $f(x_0)\cdot f''(x_0) < 0,$ то за методом хорд отримаємо значення кореня з надлишком, а методом дотичних – з недостачею.

В усіх випадках точний корінь x^* розміщений між наближеними значеннями, отриманий методом хорд і дотичних, тобто,

$$a < \underline{x_n} < x^* < \overline{x^n} < b,$$

де $\underline{x_n}$ – наближене значення кореня з недостачею, $\overline{x}_n$ – наближене значення кореня з надлишком.

Нехай $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0.$ Тоді з кінця a знаходяться наближені значення, отримані за *методом хорд*, а з кінця b – за *методом дотичних*.

Ітераційний процес за комбінованим методом хорд і дотичних проводиться за формулами:

$$\underline{x}_0 = a\,,\ \overline{x}_0 = b;$$

$$\underline{x}_n = \underline{x}_{n-1} - \frac{f(\underline{x}_{n-1})(\overline{x}_{n-1} - \underline{x}_{n-1})}{f(\overline{x}_{n-1}) - f(\underline{x}_{n-1})}; \qquad (5.8)$$

$$\overline{x}_n = \overline{x}_{n-1} - \frac{f(\overline{x}_{n-1})}{f'(\overline{x}_{n-1})}; \quad \text{n=1, 2, \dots .}$$

Нехай $f(x_0)\cdot f''(x_0) < 0$. Тоді, навпаки, з кінця a є наближені значення кореня за методом дотичних , а з кінця b – за методом хорд.

$$\underline{x}_0 = a\,,\ \overline{x}_0 = b;$$

$$\underline{x}_n = \underline{x}_{n-1} - \frac{f(\underline{x}_{n-1})}{f'(\underline{x}_{n-1})}; \qquad (5.9)$$

$$\overline{x}_m = \overline{x}_{n-1} - \frac{f(\overline{x}_{n-1})(\overline{x}_{n-1} - \underline{x}_{n-1})}{f(\overline{x}_{n-1}) - f(\underline{x}_{n-1})}; \quad \text{n=1, 2, \dots .}$$

Ітераційний процес завершуємо при умові $\left|\overline{x}_\text{n} - \underline{x}_n\right| \le \varepsilon.$

$\left|\text{x}_\text{n} - x_{n-1}\right| \le \varepsilon,$ де ε - задана точність обчислень.

За значення кореня вибираємо середину звуженого проміжка $a = \frac{1}{2}\left|\overline{x}_\text{n} + \underline{x}_n\right|.$

Завдання для лабораторної роботи

1. Відокремити корені рівняння *графічно* та уточнити один з них *методом хорд* з точністю $\varepsilon = 0.001$.
2. Відокремити корені рівняння *аналітично* та уточнити один з них *методом дотичних* з точністю $\varepsilon = 0.001$.
3. Уточнити один з коренів з завдань 1 або 2 *комбінованим методом хорд та дотичних*.

Варіанти завдань:

1	$x - \sin x = 0.25$	$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$
2	$tg(0.58x + 0.1) = x^2$	$x^3 - 6x - 2 = 0$
3	$\sqrt{x} - \cos(0.38x) = 0$	$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$
4	$tg(0.4x + 0.4) = x^2$	$x^3 - 0.1x^2 - 0.4x - 1.5 = 0$
5	$\lg x - \frac{7}{2x + 6} = 0$	$x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = 0$
6	$tg(0.5x + 0.2) = x^2$	$x^3 - x - 5 = 0$
7	$3x - \cos x - 1 = 0$	$x^3 + 0.2x^2 - 0.5x - 2 = 0$
8	$x + \lg x = 0.5$	$x^3 - 2x + 4 = 0$
9	$tg(0.5x + 0.2) = x^2$	$x^3 + 0.2x^2 - 0.3x - 1.2 = 0$
10	$x^2 + 4\sin x = 0$	$x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0$
11	$ctg(1.05x + 0.1) - x^2 = 0$	$x^3 + 0.2x^2 - 0.5x + 0.8 = 0$
12	$x \lg x - 1.2 = 0$	$x^3 + 3x^2 - 6x - 5 = 0$
13	$tg(0.1x + 0.3) = x^2$	$x^3 - 0.1x^2 - 0.4x + 1.2 = 0$
14	$1.8x^2 - \sin 10x = 0$	$x^3 - 4x - 6 = 0$
15	$ctgx - \frac{x}{3} = 0$	$x^3 - 0.1x^2 - 0.4x - 1.4 = 0$
16	$tg(0.3x + 0.4) = x^2$	$x^3 - x - 3 = 0$
17	$x^2 - 20\sin x = 0$	$x^3 - 3x^2 - 12x - 12 = 0$

18	$ctgx-\frac{x}{3}=0$	$x^3-0.2x^2-0.5x-1=0$
19	$2x-\lg x-7=0$	$x^3-0.1x^2-0.4x+2=0$
20	$ctgx+\frac{x}{2}=0$	$x^3-0.4x^2-0.6x-1.6=0$

Лабораторна робота №6
Наближені методи розв'язування систем нелінійних рівнянь: метод простих ітерацій, метод Ньютона

Мета роботи – навчитися розв'язувати системи нелінійних рівнянь ітераційними методами.

Ключові поняття: система нелінійних рівнянь, метод простих ітерацій, метод Ньютона, збіжність ітераційного процесу.

Теоретичні відомості

Нехай задано систему вигляду

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=0; \\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=0; \\ \quad\dots\quad\dots \\ f_m(x_1,x_2,\dots,x_n)=0; \end{cases} \tag{6.1}$$

де $x_1,x_2,\dots,x_n$ - невідомі змінні, і серед функцій системи хоча б одна є нелінійною. Тоді система (6.1) називається *системою нелінійних рівнянь порядку m*.

Представимо (6.1) у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = \varPhi_1(x_1,x_2,\dots,x_n); \\ x_2 = \varPhi_2(x_1,x_2,\dots,x_n); \\ \quad\dots\quad\dots \\ x_m = \varPhi_m(x_1,x_2,\dots,x_n). \end{cases} \tag{6.2}$$

Складність розв'язання систем нелінійних рівнянь полягає у визначенні існування розв'язків, і якщо вони існують, то скільки таких розв'язків.

Визначення області, в якій знаходяться розв'язки системи, можна здійснити графічно. Для цього будують графіки функцій $\varPhi_i$ та визначають точки перетину графіків даних функцій.

Нехай функції $\varPhi_i$ визначені в області $\Omega.$. Тоді область $\Omega.$ є областю, де можна знайти розв'язок нелінійної системи.

Для уточнення розв'язків систем нелінійних рівнянь у заданій області найчастіше використовують *метод простих ітерацій* та *метод Ньютона.*

Метод простих ітерацій

Даний метод застосовують для розв'язування нелінійного рівняння вигляду $x = f(x)$ або $x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), i = \overline{1, m}$, тобто, у розгорнутому вигляді отримаємо систему (6.2).

При вибраних початкових наближеннях $x_i^{(0)}$, $i = \overline{1, n}$ ітераційний процес проводиться за формулами методу простих ітерацій:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varPhi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}); \\ x_2^{(k+1)} = \varPhi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}); \\ \qquad \ldots \quad \ldots \\ x_m^{(k+1)} = \varPhi_m(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}); \end{cases} \tag{6.3}$$

де *k=0, 1, …* - кроки ітерацій.

Достатньою умовою збіжності ітераційного процесу (6.3) є виконання однієї з наступних умов:

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varPhi_i}{\partial x_j} \right| < 1, \quad \forall i = \overline{1, m}$$

або $$\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}\right|<1, \quad \forall j=\overline{1,n}.$$

Метод Ньютона

При застосуванні методу Ньютона до розв'язування систем нелінійних рівнянь припускається, що в деякій області *G*, яка містить розв'язок $X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ системи (6.1), функції $f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n), i=\overline{1,m}$ мають неперервні похідні першого порядку і в деякому околі точки x^* матриця Якобі *F(X)* невироджена:

$$F(X)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

- матриця Якобі перших похідних вектор-функції $F(X)$.

За початкове наближення необхідно обрати вектор розв'язку $X^{(0)}$, достатньо близький до шуканого розв'язку системи X^*.

Якщо визначено початкове наближення $X^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})^T$, ітераційний процес знаходження розв'язку системи (6.1) методом Ньютона можна представити у вигляді

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+\Delta x_1^{(k)}; \\ x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+\Delta x_2^{(k)}; \\ \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n^{(k+1)}=x_n^{(k)}+\Delta x_n^{(k)}; \end{cases} \tag{6.5}$$

де значення приростів $\Delta x_1^{(k)}$, $\Delta x_2^{(k)}$,…, $\Delta x_n^{(k)}$ визначено із розв'язку системи, всі коефіцієнти якої виражаються через відоме попереднє наближення:

$$\begin{cases} f_1(x^{(k)}) + \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k)} + \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_2}\Delta x_2^{(k)} + ... + \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k)} = 0; \\ f_1(x^{(k)}) + \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k)} + \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_2}\Delta x_2^{(k)} + ... + \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k)} = 0; \\ \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ f_1(x^{(k)}) + \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k)} + \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_2}\Delta x_2^{(k)} + ... + \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k)} = 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

У векторній формі запису розрахункові формули (6.5) методу Ньютона мають вигляд

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta X^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, ... \qquad (6.7)$$

де вектор приростів $\Delta X^{(k)} = \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ \Delta x_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ знаходиться з розв'язку

рівняння $\quad f(X^{(k)}) + I(X^{(k)})\Delta X^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, ... \qquad (6.8)$

де $I(X)$ – матриця Якобі вигляду (6.4).

Виражаючи з (6.8) вектор приростів $\Delta X^{(k)}$ і підставляючи його в (6.7), ітераційний процес знаходження розв'язку можна записати у вигляді

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - I^{-1}(X^{(k)}) f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, ... \qquad (6.9)$$

де $I^{-1}(X^{(k)})$ – матриця, обернена матриці Якобі.

При реалізації алгоритму методу Ньютона в більшості випадків надають перевагу не обчисленню оберненої матриці $I^{-1}(X^{(k)})$, а знаходженню з системи (6.6) значень приростів $\Delta x_1^{(k)}$, $\Delta x_2^{(k)}$,…, $\Delta x_n^{(k)}$, і обчислення нового приросту з (6.5).

У випадку системи з двох нелінійних рівнянь згідно методу Ньютона послідовні наближення до розв'язку отримують за формулами

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\Delta x^{(k)}}{I(x_k, y_k)}, \; y_{k+1} = y_k - \frac{\Delta y^{(k)}}{I(x_k, y_k)}, \tag{6.10}$$

$$\Delta x^{(k)} = \begin{vmatrix} f_1(x_n, y_n) & f'_{1y}(x_n, y_n) \\ f_2(x_n, y_n) & f'_{2y}(x_n, y_n) \end{vmatrix};$$

де $\Delta y^{(k)} = \begin{vmatrix} f'_{1x}(x_n, y_n) & f_1(x_n, y_n) \\ f'_{2x}(x_n, y_n) & f_2(x_n, y_n) \end{vmatrix}; \quad n = 0,1,2, \ldots$

Якщо якобіан $I(x_k, y_k) = \begin{vmatrix} f'_{1x}(x_n, y_n) & f'_{1y}(x_n, y_n) \\ f'_{2x}(x_n, y_n) & f'_{2y}(x_n, y_n) \end{vmatrix} \neq 0,$ то знайдений розв'язок системи буде єдиний.

Умовою завершення ітераційного процесу є

$$\left| \mathrm{x}^{(k+1)} - x^{(k)} \right| \leq \varepsilon,$$

де ε - задана точність обчислень.

В даному методі припускається диференційованість функцій $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ і невиродженість матриці Якобі ($\det(I(X^{(k)})) \neq 0$.

Недоліком методу Ньютона є те, що при невдалому виборі початкового наближення $X^{(0)}$, ітераційний процес не має границі. У випадку, якщо $X^{(0)}$ вибрано у достатньо малому околі шуканого кореня, ітераційний процес збігається до точного розв'язку системи, при чому швидкість збіжності квадратична.

Завдання для лабораторної роботи

1. Розв'язати систему нелінійних рівнянь методом простих ітерацій.

2. Розв'язати систему нелінійних рівнянь методом Ньютона.

Обчислення проводити з точністю 0,001.

Варіанти завдань

1. 1) $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1.2, \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} tg(xy+0.4) = x^2, \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1, \end{cases}$

2. 1) $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0.5, \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1.6x = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$

3. 1) $\begin{cases} \sin x + 2y = 2, \\ \cos(y-1) + x = 0.7. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} tg(xy+0.1) = x^2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

4. 1) $\begin{cases} \cos x + y = 1.5, \\ 2x - \sin(y-0.5) = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1.2x = 0.2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

5. 1) $\begin{cases} \sin(x+0.5) - y = 1, \\ \cos(y-2) + x = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} tg(xy+0.3) = x^2, \\ 0.9x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

6. 1) $\begin{cases} \cos(x+0.5) + y = 0.8, \\ \sin y - 2x = 1.6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1.3x = 0, \\ x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

7. 1) $\begin{cases} \sin(x-1) = 1.3 - y, \\ x - \sin(y+1) = 0.8. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} tgxy = x^2, \\ 0.8x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

8. 1) $\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0, \\ x + \sin y = -0.4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1.5x = 0.1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

9. 1) $\begin{cases}\cos(x+0.5)-y=2,\\ \sin y-2x=1.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}tgxy=x^2,\\ 0.7x^2+2y^2=1.\end{cases}$

10. 1) $\begin{cases}\sin(x+2)-y=1.5,\\ x+\cos(y-2)=0.5.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin(x+y)-1.2x=0.1,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

11. 1) $\begin{cases}\sin(y+1)-x=1.2,\\ 2y+\cos x=2.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}tg(xy+0.2)=x^2,\\ 0.6x^2+2y^2=1.\end{cases}$

12. 1) $\begin{cases}\cos(y-1)+x=0.5,\\ y-\cos x=3.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin(x+y)=1.5x-0.1,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

13. 1) $\begin{cases}\sin y+2x=2,\\ \cos(x-1)+y=0.7.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}tg(xy+0.4)=x^2,\\ 0.8x^2+2y^2=1.\end{cases}$

14. 1) $\begin{cases}\cos y+x=1.5,\\ 2y-\sin(x-0.5)=1.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin(x+y)=1.2x-0.1,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

15. 1) $\begin{cases}\sin(y+0.5)-x=1,\\ \cos(x-2)+y=0.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}tg(xy+0.1)=x^2,\\ 0.9x^2+2y^2=1.\end{cases}$

16. 1) $\begin{cases}\cos(y+0.5)+x=0.8,\\ \sin x-2y=1.6.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin(x+y)-1.4x=0,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

17. 1) $\begin{cases}\sin(y-1)+x=1.3,\\ \sin(y-1)+x=0.8.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}tg(xy+0.1)=x^2,\\ 0.5x^2+2y^2=1.\end{cases}$

18. 1) $\begin{cases}2x-\cos(y+1)=0,\\ y+\sin x=-0.4.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin(x+y)=1.1x-0.1,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

19. 1) $\begin{cases}\cos(y+0.5)-x=2,\\ \sin x-2y=1.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}tg(x-y)-xy=0,\\ x^2+2y^2=1.\end{cases}$

20. 1) $\begin{cases}\sin(y+2)-x=1.5,\\ y+\cos(x-2)=0.5.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin(x-y)-xy=-1,\\ x^2-y^2=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

На самостійне опрацювання матеріалу відведено наступні теми:

1. Метод QR-факторизації розв'язання СЛАР
2. Матриці відбиття та обертання в повній проблемі власних значень матриць
3. Алгоритм методу обертання
4. Метод послідовної верхньої релаксації
5. Задачі, що приводять до систем з тридіагональними матрицями
6. Концепція методів розв'язування нелінійних рівнянь з однією змінною
7. Нелінійні методи Якобі та Зейделя

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М. : Физматгиз, 1960. 659 с.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. М. : Наука, 1978. 512 с.
3. Крылов В. Н., Монастырный В. В. Вычислительные методы. М.: Наука, 1982. 585 с.
4. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М. : Наука, 1989. 432 с.
5. Фельдман Л. П., Петренко О. А, Дмитрієва А. І. Чисельні методи в інформатиці : підручник. Київ : Видавн. група BHV, 2006. 480 с.
6. Шахно С. М., Дудикевич А. Т., Левицька С. М. Практикум з чисельних методів : навч. посібник. Л. : ЛНУ ім. І. Франка, 2013. 431 с.

Допоміжна

1. Андруник В. А., Висоцька В. А., Пасічник В. В. та ін. Чисельні методи в компютерних науках : навч. посібник. Львів : «Новий світ», 2020. Том 1. 449 с.
2. Гаврилюк І. П., Макаров Л. В. Методи обчислень : підручник. Київ: «Вища школа», 1995. 367 с.
3. Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики : навч. посібник. Київ : «Либідь», 1995. 280 с.
4. Ляшенко Б. М., Кривонос О. М., Вакалюк Т.А. Методи обчислень : навч.-метод. посібник для студ. фіз.-мат. факульт. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2014. 228 с.

Інформаційні ресурси

1. Національна бібліотека ім. В. І. Вернадського. URL: http://www.nbuv.gov.ua/
2. Обласна наукова бібліотека (м. Рівне, майдан Короленка, 6). URL: http://www.libr.rv.ua/
3. Наукова бібліотека НУВГП (м. Рівне, вул. Олекси Новака, 75). URL: https://lib.nuwm.edu.ua/