П. М. Мартинюк,
О. Р. Мічута

Методи оптимізації та дослідження операцій

Рівне – 2011

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Національний університет водного господарства та
природокористування

П. М. Мартинюк,
О. Р. Мічута

Методи оптимізації та дослідження операцій

Навчальний посібник

Рівне – 2011

УДК 519
ББК В183
М29

Затверджено вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування.
(Протокол №7 від 24 червня 2011 р.)

Рецензенти:
Наконечний О. Г., доктор фізико-математичних наук, професор Київського національного університету ім. Тараса Шевченка;
Власюк А. П., доктор технічних наук, професор Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне;
Бомба А. Я., доктор технічних наук, професор Рівненського державного гуманітарного університету.

Мартинюк П. М., Мічута О. Р.
М29 **Методи оптимізації та дослідження операцій:** Навч. посібник. – Рівне: НУВГП, 2011. – 283 с.

У навчальному посібнику викладено вступ до теорії методів оптимізації. Розглянуто методи лінійного програмування, методи нелінійної оптимізації, елементи теорії бегатокритеріальних та погано обумовлених оптимізаційних задач. Посібник містить велику кількість прикладів та завдання до самостійного виконання з двадцяти лабораторних робіт.

Навчальний посібник призначено для студентів за напрямом підготовки 6.040301 - “Прикладна математика”.

УДК 519
ББК В183

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Ще в дитинстві, йдучи зранку до школи, ми подумки із множини можливих маршрутів вибирали “найкращий”. В слово “найкращий” кожен з нас вкладав свій зміст – для одних найкоротший, для інших – вздовж річки з її весняними зеленими берегами та свіжим вранішнім повітрям. Ще для інших поняття “оптимальності” відразу змінювалося, як тільки з’являлися кишенькові гроші. Бо тоді цей маршрут мав пролягати повз магазин, куди зранку привозили смачні, политі шоколадом кексики. Це не важливо, що довжина шляху в такому випадку збільшувалась вдвоє. Звідси, як висновки, по-перше, критерії вибору оптимального маршруту можуть бути різними і залежними від певних умов, по-друге, на основі критерію ми приймаємо рішення.

Прийняття рішень є важливим і невід’ємним елементом нашого життя. І, приймаючи рішення, ми фактично намагаємося вибрати варіант, який, на нашу думку, є найкращим. Найкращий – означає оптимальний. Ми намагаємося прийняти “оптимальне” рішення. Таким чином, підходимо до ще одного висновку – задачами прийняття оптимальних рішень, або задачами оптимізації, наскрізь пронизано життя людини.

З точки зору математики критерій прийняття оптимального рішення має виражатись числом. Як було сказано вище, значення даного критерію може змінюватись залежно від певних умов. Тому критерій має виражатись не просто числом, а функцією, яка залежить від багатьох змінних і кожна змінна являє собою саме вищевказані умови. Така функція в оптимізаційних задачах називається **цільовою**. Умови прийняття рішення теж лежать в певних межах. Тому змінні, від яких залежить цільова функція, належать деякій області. Вона називається **областю допустимих розв’язків**.

Одна справа – поставити задачу, а інша – вирішити її. Тут потрібні методи: ефективні, обґрунтовані, з математичної точки зору. Саме такі методи ми розглянемо в посібнику.

Навчальний посібник написано на основі курсу лекцій та лабораторних робіт з одноіменної дисципліни, яку викладають для студентів за напрямом підготовки "Прикладна математика" в Національному університеті водного господарства та природокористування (м. Рівне). Посібник складається з кількох частин. Перша частина стосується задач безумовної оптимізації функцій однієї та багатьох змінних. Написана вона, ґрунтуючись на відомих роботах Ф. П. Васильєва [5, 6], Б. М. Пшеничного, Ю. М. Даниліна [19], І. В. Бейко, Б. М. Бублика, П. М. Зінька [3]. Друга частина містить класичну теорію задач лінійного програмування. При її написанні використано матеріал посібника Г. Г. Цегелика [24]. В цій частині, як приклади застосування вказаної теорії, висвітлено теми щодо методів розв'язання транспортної задачі та задач теорії матричних ігор. Заключна частина посібника присвячена задачам нелінійної умовної оптимізації. Висвітлено як аналітичні методи розв'язання таких задач (метод множників Лагранжа), так і чисельні (в основному, градієнтні методи). Також в посібнику висвітлено кілька тем щодо некласичної теорії методів оптимізації. Сюди слід віднести багатокритеріальні та погано обумовлені задачі. З огляду на те, що дисципліну вивчають студенти старших курсів, читач повинен володіти основами математичного аналізу, лінійної алгебри та геометрії. Також при реалізації чисельних методів бажано володіти основами програмування і знати принаймні одну із сучасних мов програмування.

Звичайно, не всі аспекти сучасних методів оптимізації та їх застосування можна викласти на такому об'ємі сторінок. Тому для поглиблення своїх знань читач може звернутись до наступних джерел: 1) [1, 15, 22, 24, 27] – для задач лінійного програмування; 2) [7] – для транспортної задачі; 3) [8, 10, 22, 25] – застосування методів розв'язання екстремальних задач; 4) [9, 26] – методи оптимізації недиференційованих функцій; 5) [3, 5, 13, 19, 21, 23, 25] – чисельні методи оптимізації.

Посібник містить матеріали та завдання для виконання дев'ятнадцяти лабораторних робіт. Практично кожна лабораторна робота проілюстрована прикладом або покроковим алгоритмом чисельного методу розв'язання задачі.

Пропонований посібник є початковим етапом роботи авторів у вказаному напрямку. Ми будемо вдячні за всі зауваження, побажання та пропозиції, які просимо надсилати П. М. Мартинюку на наступну адресу електронної пошти: Martinjuk@ukr.net

П. М. Мартинюк
О. Р. Мічута

РОЗДІЛ 1
МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

ТЕМА 1. ОПТИМІЗАЦІЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1.1. Постановка задачі та класичний метод її розв'язання

Розглянемо задачу відшукання мінімуму функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Дана задача є складовою частиною інших більш складних задач оптимізації. Надалі, як правило, будемо розглядати задачі відшукання мінімуму, оскільки задачу на відшукання максимуму функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ можна замінити задачею знаходження мінімуму функції $y = -f(x)$, $x \in [a,b]$.

Введемо два важливих означення.

Точка $x^* \in [a; b]$ називається точкою глобального мінімуму функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, якщо $\forall x \in [a; b]$, $x \neq x^*$, виконується нерівність:

$$f(x^*) \leq f(x). \tag{1.1}$$

Точка $x^* \in [a; b]$ називається точкою локального мінімуму функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, якщо $\exists \varepsilon > 0$, що $\forall x \in [a; b]$, $x \neq x^*$, з нерівності $|x - x^*| < \varepsilon$ випливає нерівність:

$$f(x^*) \leq f(x). \tag{1.2}$$

Якщо в (1.1) і (1.2) нерівності є строгими, тоді точка x^* називається точкою строгого глобального мінімуму та строгого локального мінімуму відповідно.

Отже, задача мінімізації функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ може бути розглянута в двох аспектах:

1. Знайти точку глобального мінімуму;
2. Знайти точки локальних мінімумів.

Класичною необхідною умовою екстремуму (локального мінімуму або максимуму), відомою з математичного аналізу, є

$f'(x)=0$. Розв'язуючи дане нелінійне рівняння можна знайти точки, підозрілі на екстремум. Крім того, при пошуку мінімального значення на відрізку потрібно брати до уваги значення функції на кінцях відрізка.

На рис. 1.1 та 1.2 наведено приклади точок глобального та локальних мінімумів. Зокрема, на рис. 1.1 точки $x=x^*$, $x=b$ та $x=a$ - точки локальних мінімумів. Але, крім того, точка $x=b$ - точка глобального мінімуму. Аналогічно, на рис. 1.2 точка $x=x_1{}^*$ - точка глобального мінімуму.

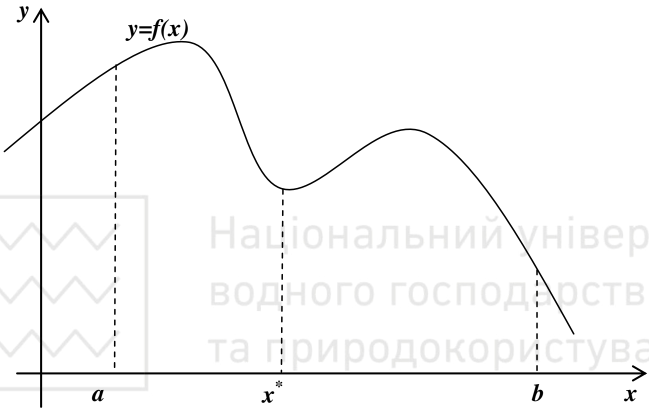

Рис. 1.1. Приклади точок локальних та глобального мінімумів

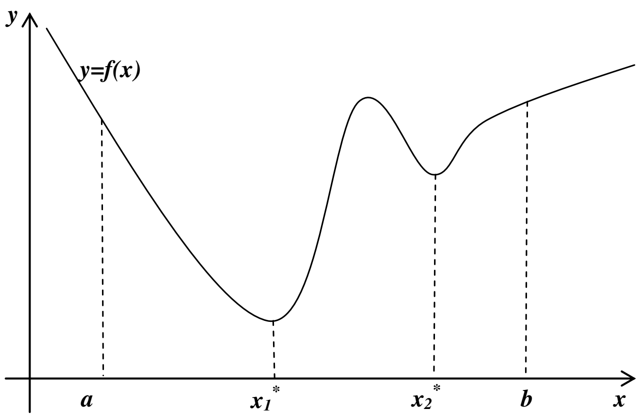

Рис. 1.2. Приклади точок локальних та глобального мінімумів

Множину всіх точок мінімумів функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ позначимо через M^*.

Зауважимо, що в загальному випадку точка глобального мінімуму є точкою локального мінімуму, але не навпаки. Однак, є функції, для яких точки глобальних та локальних мінімумів співпадають.

Неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ називається унімодальною, якщо існують числа α, β такі, що $a \le \alpha \le \beta \le b$, причому виконуються наступні умови:

1. При $x \in [a;\alpha]$ функція $y = f(x)$ є строго монотонно спадаючою (при умові $a < \alpha$);
2. При $x \in [\beta;b]$ функція $y = f(x)$ є строго монотонно зростаючою (при умові $\beta < b$);
3. При $x \in [\alpha;\beta]$ досягається мінімальне значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$, тобто $M^* = [\alpha;\beta]$.

Випадок, коли один або два з відрізків $[a;\alpha]$, $[\alpha;\beta]$, $[\beta;b]$ вироджуються в точку, не виключається.

Якщо $\alpha = \beta$, тоді функція $y = f(x)$, $x \in [a;b]$ називається строго унімодальною на відрізку $[a;b]$. На рисунку 1.3 наведено унімодальну функцію, а на рисунку 1.4 – строго унімодальну.

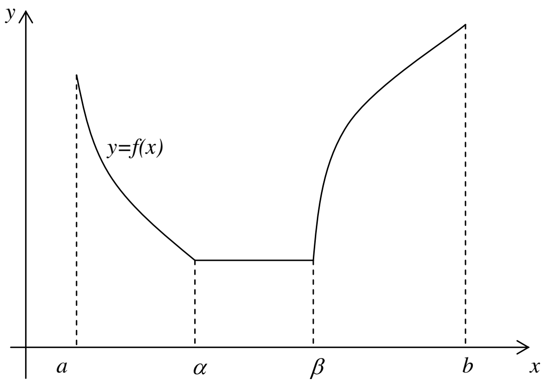

Рис. 1.3. Унімодальна функція

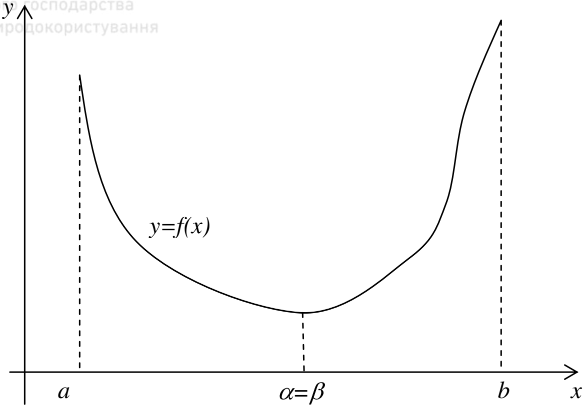

Рис. 1.4. Строго унімодальна функція

1.2. Методи пасивного та повного перебору

Одними з найпростіших чисельних методів пошуку екстремумів функції на відрізку є методи перебору – коли значення функції обчислюється на множині заданих або побудованих точок на відрізку $[a;\, b]$ і серед цих значень вибирається найменше (найбільше).

В методах пасивного перебору точки задаються всі одночасно до початку обчислення значень функції. В методах послідовного перебору вибір точки x_i, $i > 2$, здійснюється з урахуванням обчислених значень функції в попередніх точках $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$. Виникає два важливі питання:

1. Скільки має бути точок для досягнення потрібної точності обчислень $\varepsilon > 0$ (позначимо цю кількість через n);
2. Як побудувати ці точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, знову ж, для досягнення потрібної точності?

Позначимо через $Q(L)$ клас ліпшицевих функцій – клас функцій, які задовольняють умові Ліпшиця на відрізку $[a;\, b]$.

Функція $y = f(x)$ задовольняє умові Ліпшиця на відрізку $[a;\, b]$, якщо існує така константа $L > 0$, що

$$\left|f(u) - f(v)\right| \le L \cdot \left|u - v\right|,\ \forall u, v \in [a; b]. \qquad (1.3)$$

Детальніше деякі з властивостей функцій з класу $Q(L)$ розглянемо в пункті 4 даної теми. Зараз же введемо ряд позначень:

1. $f_{\min}$ – мінімальне значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$;
2. p_n – метод побудови точок $x_i \in [a;b],\ i=\overline{1,n}$, при заданій їх кількості n;
3. $\Delta(f, p_n) = \left(\min\limits_{1\le i\le n} f(x_i) - f_{\min}\right)$ – похибка методу p_n при мінімізації функції $f(x) \in Q(L)$;
4. $\sup\limits_{f(x)\in Q(L)} \Delta(f, p_n) = \delta(p_n)$ – гарантована точність методу p_n на класі функцій $Q(L)$.

З урахуванням введених позначень відповідь на два заданих вище запитання щодо вибору кількості n і побудови методу p_n потрібно шукати, добиваючись виконання умови:

$$\sup_{f(x)\in Q(L)} \left(\min_{1\le i\le n} f(x_i) - f_{\min}\right) = \delta(p_n) \le \varepsilon, \qquad (1.4)$$

де $\varepsilon > 0$ – задана точність пошуку мінімального значення функції.

Одним із найпростіших методів p_n для розв'язання задачі (1.4) є метод рівномірного перебору, коли точки $x_i,\ i=\overline{1,n}$, вибираються за правилом

$$\begin{gathered} x_1 = a + \frac{h}{2}, x_2 = x_1 + h, \ldots, x_{i+1} = x_i + h = x_1 + i\cdot h, \ldots, \\ x_{n-1} = x_1 + (n-2)h,\ x_n = \min\{x_1 + (n-1)h; b\}, \end{gathered} \qquad (1.5)$$

де $h = \dfrac{2\varepsilon}{L}$, а число n визначається з умови:

$$x_{n-1} < b - \frac{h}{2} \le x_1 + (n-1)h.$$

Метод (1.5) відноситься до пасивних методів і для нього справедлива наступна теорема [5]:

Теорема 1.1. Метод рівномірного перебору (1.5) розв'язує задачу (1.4) на класі функцій $Q(L)$. Якщо $h > \dfrac{2\varepsilon}{L}$, то існує функція $f(x) \in Q(L)$, для якої метод (1.5) не розв'язує задачу (1.4).

Доведення. Якщо $f(x) \in Q(L)$, то з означення випливає нерівність:

$$-L \cdot |x - x_i| \le f(x) - f(x_i) \le L \cdot |x - x_i|, i = \overline{1,n},$$

тобто

$$f(x) \ge f(x_i) - L \cdot |x - x_i|, i = \overline{1,n}.$$

Тоді для будь-якого $x \in \left[x_i - \frac{h}{2};\ x_i + \frac{h}{2} \right]$, $i = \overline{1,n}$, маємо

$$f(x) \ge f(x_i) - L \cdot |x - x_i| \ge f(x_i) - \frac{Lh}{2} \ge \min_{1 \le i \le n} f(x_i) - \varepsilon.$$

Оскільки система відрізків $\left[x_i - \frac{h}{2};\ x_i + \frac{h}{2} \right]$, $i = \overline{1,n}$, покриває весь відрізок $[a;b]$, тобто будь-яка точка з $[a;b]$ належить хоча б одному відрізку даної системи, то:

$$f(x) \ge \min_{1 \le i \le n} f(x_i) - \varepsilon, \forall x \in [a;b].$$

Серед точок x відрізка $[a;b]$ є і точка глобального мінімуму функції $f(x)$. Отже, $\forall f(x) \in Q(L)$ маємо:

$$f_{\min} \ge \min_{1 \le i \le n} f(x_i) - \varepsilon,$$

$$\min_{1 \le i \le n} f(x_i) - f_{\min} \le \varepsilon,$$

що і доводить виконання нерівності (1.4).

Якщо $h > \frac{2\varepsilon}{L}$, то, наприклад для функції $f(x) = Lx$ метод (1.5) дає:

$$\min_{1 \le i \le n}(Lx_i) - La = \frac{Lh}{2} > \varepsilon.$$

Теорема 1.1 доведена.

Методи послідовного перебору ефективніші за пасивні методи, оскільки вимагають меншої кількості обчислень. Серед найпростіших методів послідовного перебору розглянемо наступний:

$$x_1 = a + \frac{h}{2}; x_{i+1} = x_i + h + (f(x_i) - F_i)/L,\ i = \overline{1,n-2},$$

$$x_n = \min\{x_{n-1} + h + (f(x_{n-1}) - F_{n-1})/L; b\}, \tag{1.6}$$

де $h = \dfrac{2\varepsilon}{L}$, $F_i = \min\limits_{1\le j\le i} f(x_j)$, а число n визначається з умови:

$$x_{n-1} < b - \frac{h}{2} \le x_{n-1} + h + (f(x_{n-1}) - F_{n-1})/L.$$

Теорема 1.2. Метод послідовного перебору (1.6) розв'язує задачу (1.4) на класі $Q(L)$.

Доведення. Враховуючи нерівність $f(x) \ge f(x_i) - L\cdot|x - x_i|, i = \overline{1,n}$ для всіх $x \in [x_i; x_i + h/2 + (f(x_i) - F_i)/L]$ маємо:

$$f(x) \ge f(x_i) - L\cdot(h/2 + (f(x_i) - F_i)/L) = F_i - Lh/2 \ge F_i - \varepsilon.$$

Оскільки система відрізків $\{[x_i - h/2; x_i + h/2 + (f(x_i) - F_i)/L]\}, i = \overline{1,n}$ покриває весь відрізок $[a; b]$, то з попередньої нерівності випливає:

$$f(x) \ge F_n - \varepsilon, \forall x \in [a;b].$$

Тоді $f_{\min} \ge F_n - \varepsilon$ при всіх $f(x) \in Q(L)$, що відповідає нерівності (1.4).

Теорема 1.2 доведена.

Відмітимо, що метод (1.6) нагадує метод ламаних, але простіший в реалізації (див. пункт 4 даної теми).

Вищеописані методи належать до методів глобального пошуку і дозволяють знайти точку глобального мінімуму функції $y = f(x) \in Q(L)$ на відрізку $[a;b]$.

1.3. Методи золотого перетину та Фібоначчі

Дані методи полягають в побудові послідовності відрізків $[y_k, z_k]$ для функції $y = f(x)$, які стягуються в одну точку, в загальному випадку, локального мінімум даної функції, починаючи з початкового відрізка $[a_0, b_0]$. Дані методи відрізняються лиш вибором параметра λ і відносяться до послідовних методів, коли наступні точки будуються, враховуючи значення функції в попередніх точках.

Алгоритм 1.1.

1. Вибрати відрізок $[a_0, b_0]$ (якщо функція є унімодальною, то $[a_0, b_0] = [a, b]$), який містить точку x^* мінімум функції $y = f(x)$; задати точність ε, з якою хочемо визначити x^*; обчислити $\Delta_0 = b_0 - a_0$, $1/2 < \lambda < 1$, $\Delta_1 = \lambda\Delta_0$, $\Delta_2 = \Delta_0 - \Delta_1$, $t_0 = a_0 + \Delta_2$, $z_0 = b_0 - \Delta_2$, $f(t_0)$, $f(z_0)$, і покласти $k = 1$.
   Зауважимо, що $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_0$. Крім того $\Delta_2 = \Delta_0 - \Delta_1 = \Delta_0 - \lambda\Delta_0 = (1-\lambda)\Delta_0$. Якщо $1/2 < \lambda < 1$, то $0 < (1-\lambda) < 1/2 \Rightarrow \Delta_2 < 1/2\,\Delta_0$ (рис. 1.5).

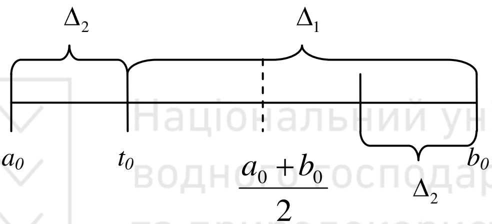

Рис. 1.5. Перший крок алгоритму 1.1

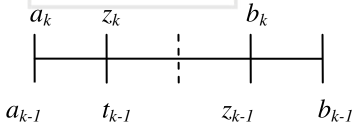

Рис. 1.6. Крок 2б) алгоритму 1.1

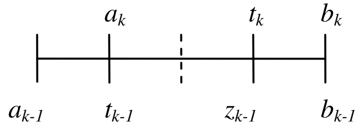

Рис. 1.7. Крок 2а) алгоритму 1.1

2. а) Якщо $f(t_{k-1}) > f(z_{k-1})$, то покласти $a_k = t_{k-1}$, $b_k = b_{k-1}$, $t_k = z_{k-1}$, обчислити $\Delta_k = b_k - a_k$, $\Delta_{k+1} = \lambda\Delta_k$, $\Delta_{k+2} = \Delta_k - \Delta_{k+1}$, $z_k = b_k - \Delta_{k+2}$, $f(t_k)$ і перейти до кроку 3.
   б) Якщо $f(t_{k-1}) \le f(z_{k-1})$, то покласти $a_k = a_{k-1}$, $b_k = z_{k-1}$, $z_k = t_{k-1}$, обчислити $\Delta_k = b_k - a_k$, $\Delta_{k+1} = \lambda\Delta_k$, $\Delta_{k+2} = \Delta_k - \Delta_{k+1}$, $t_k = a_k + \Delta_{k+2}$, $f(z_k)$ і перейти до кроку 3.

3. Якщо $\Delta_k \le \varepsilon$, то прийняти за точку мінімуму $x^* = \begin{cases} t_k, & f(t_k) \le f(z_k); \\ z_k, & f(t_k) > f(z_k). \end{cases}$ Якщо $\Delta_k > \varepsilon$, то покласти $k = k+1$ і перейти до кроку 2.

В методі Фібоначчі число λ вибирають за допомогою відношення чисел Фібоначчі, а в методі золотого перетину: $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Алгоритм 1.1 для методу Фібоначчі є нестійким до похибок. Тобто, похибки при обчисленні t_k, z_k можуть в процесі роботи програми накопичуватись і потрібна точність не буде досягнута. Наступний алгоритм менш чутливий до похибок.

Алгоритм 1.2. (модифікований метод Фібоначчі).

1. Вибрати відрізок $[a_0, b_0]$, який містить точку x^* мінімум функції $y = f(x)$. Задати точність $\varepsilon > 0$, покласти $F_1 = F_2 = 1$ (числа Фібоначчі), $j = 1$.
2. Обчислити $F_{j+2} = F_{j+1} + F_j$;
3. Якщо $F_{j+1} < \dfrac{1}{\varepsilon}(b_0 - a_0) \le F_{j+2}$, то покласти $m = j$ і перейти до кроку 4; інакше покласти $j = j+1$ і перейти до кроку 2;
4. Обчислити точки $t_1 = a_0 + \dfrac{F_m}{F_{m+2}}(b_0 + a_0)$, $z_1 = a_0 + \dfrac{F_{m+1}}{F_{m+2}}(b_0 + a_0)$;
5. Якщо $f(t_1) \le f(z_1)$, то покласти $a_1 = a_0$, $b_1 = z_1$, $k = 1$ і перейти до пункту 6; інакше $a_1 = t_1$, $b_1 = b_0$, $k = 1$ і перейти до пункту 6.
6. (Основний цикл) Якщо $f(t_k) \le f(z_k)$, то визначити точку $t_{k+1} = a_k + \dfrac{F_{m-k}}{F_{m+2}}(b_0 + a_0)$, обчислити $f(t_{k+1})$, покласти $z_{k+1} = t_k$, обчислити $f(z_{k+1})$ і перейти до кроку 7; інакше

покласти $t_{k+1} = z_k$, обчислити $f(t_{k+1})$, визначити точку $z_{k+1} = a_k + \frac{F_{m-k+1}}{F_{m+2}}(b_0 + a_0)$, обчислити $f(z_{k+1})$ і перейти до кроку 7;

7. Якщо $f(t_{k+1}) \le f(z_{k+1})$, то покласти $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_{k+1}$ і перейти до кроку 8; інакше покласти $a_{k+1} = t_{k+1}$, $b_{k+1} = b_k$ і перейти до кроку 8;
8. Якщо $k < m-1$, то покласти $k = k+1$ і перейти до кроку 6; інакше покласти $x^* = \frac{a_m + b_m}{2}$ і завершити обчислення.

Зауважимо, що на кроці 3 алгоритму 1.2 обчислюється кількість кроків m, необхідна для досягнення потрібної точності ε. Тобто, у модифікованому методі Фібоначчі спочатку обчислюється кількість кроків, а далі проводяться ітерації.

Описані методи дозволяють знайти точки глобального мінімуму, якщо функція $y = f(x)$ є унімодальною на відрізку $[a,b]$. Якщо ж $y = f(x)$ не є унімодальною на $[a,b]$, то, в загальному випадку, знайдена точка буде лише точкою локального мінімуму.

1.4. Методи глобального пошуку: метод ламаних

Розглянемо метод, який дозволяє знаходити точку глобального мінімуму не обов’язково унімодальної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Даний метод належить до так званих методів глобального пошуку. Єдиним обмеженням в методі ламаних є те, що досліджувана функція повинна задовольняти умові Ліпшиця (1.3) на відрізку $[a; b]$. Умова (1.3) має простий геометричний зміст: вона означає, що кутовий коефіцієнт (тангенс кута нахилу) $|f(u) - f(\upsilon)| \cdot |u - \upsilon|^{-1}$ хорди, що з'єднує дві точки $(u; f(u))$, $(\upsilon; f(\upsilon))$ графіка функції, не перевищує константи L для всіх точок $u, \upsilon \in [a; b]$.

Доведемо кілька допоміжних теорем.

Теорема 1.3. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кожнім відрізку $[a_i; a_{i+1}]$, $i=\overline{1,m}$, де $a_1 = a$, $a_{m+1} = b$ задовольняє умові (1.3) з константою L_i, $i=\overline{1,m}$. Тоді $f(x)$ задовольняє умові (1.3) на усьому відрізку $[a;b]$ з константою $L = \max\limits_{1\le i\le m} L_i$.

Доведення. Візьмемо дві довільні точки $u, \upsilon \in [a;b]$. Нехай $a_{p-1} \le u \le a_p, a_s \le \upsilon \le a_{s+1}$ при деяких p, s. Тоді

$$|f(u) - f(\upsilon)| = |f(u) - f(a_p) +$$

$$+\sum_{i=p}^{s-1}(f(a_i) - f(a_{i+1})) + f(a_s) - f(\upsilon)| \le$$

$$\le L_{p-1}|u - a_p| + \sum_{i=p}^{s-1} L_i |a_{i+1} - a_i| + L_s |a_s - \upsilon| \le L|u-\upsilon|,$$

оскільки $\left|u - a_p\right| + \sum\limits_{i=p}^{s-1}\left|a_{i+1} - a_i\right| + \left|a_s - \upsilon\right| = \left|u - \upsilon\right|$.

Теорема 1.3 доведена.

Теорема 1.4. Нехай функція $f(x)$ диференційовна на відрізку $[a;b]$ і її похідна $f'(x)$ обмежена на цьому відрізку константою $L > 0$. Тоді $f(x)$ задовольняє умові (1.3) з константою $L > 0$.

Доведення. За формулою скінченних приростів для будь-яких $u, \upsilon \in [a;b]$ маємо $f(u) - f(\upsilon) = f'(\upsilon + \theta(u-\upsilon))\cdot(u-\upsilon)$, $0 < \theta < 1$. Тоді

$$\left|f(u) - f(\upsilon)\right| = \left|f'(\upsilon + \theta(u-\upsilon))\cdot(u-\upsilon)\right| \le$$

$$\le \left|f'(\upsilon + \theta(u-\upsilon))\cdot\left|u-\upsilon\right|\right| \le L\cdot\left|u-\upsilon\right|.$$

Теорема 1.4 доведена.

Нехай функція $f(x)$ задовольняє умові (1.3) на відрізку $[a;b]$. Зафіксуємо деяку точку $\upsilon \in [a;b]$ і визначимо функцію $g(x,\upsilon) = f(\upsilon) - L\cdot\left|x - \upsilon\right|$ змінної x, $a \le x \le b$. Очевидно, що функція $g(x,\upsilon)$ кусково-лінійна на $[a;b]$ і її графік становить ламану лінію, яка складається з відрізків двох прямих, що мають кутові коефіцієнти $(-L)$ та (L) і які перетинаються в точці $(\upsilon;\ f(\upsilon))$. Крім того, в силу умови (1.3) отримуємо:

$$-L\cdot|u-\upsilon|\le f(u)-f(\upsilon)\le L\cdot|u-\upsilon|. \qquad (1.7)$$

Тоді, використовуючи першу з подвійної нерівності (1.7), маємо:

$$f(x)-g(x,\upsilon)=f(x)-f(\upsilon)+L\cdot|x-\upsilon|\ge -L\cdot|x-\upsilon|+L\cdot|x-\upsilon|=0,$$

тобто:

$$g(x,\upsilon)=f(\upsilon)-L\cdot|x-\upsilon|\le f(x) \qquad (1.8)$$

при всіх $x\in[a;b]$, причому $g(\upsilon,\upsilon)=f(\upsilon)$. Це означає, що графік функції $f(x)$ лежить вище ламаної $g(x,\upsilon)$ при всіх $x\in[a;b]$ і має з нею спільну точку $(\upsilon;\ f(\upsilon))$.

Властивість (1.8) ламаної $g(x,\upsilon)$ використаємо для побудови методу глобального пошуку, який називається ***методом ламаних***. Схематичний алгоритм методу ламаних наступний:

1. Вибираємо будь-яку точку $x_0\in[a;b]$ і складаємо функцію $g(x,x_0)=f(x_0)-L\cdot|x-x_0|=p_0(x)$.
2. Наступну точку x_1 визначаємо з умови $p_0(x_1)=\min\limits_{x\in[a;b]} p_0(x)$ (очевидно, що $x_1=a$ або $x_1=b$).
3. Створюється нова функція $p_1(x)=\max\{g(x,x_1);p_0(x)\}$ і чергова точка x_2 знаходиться із умови $p_1(x_2)=\min\limits_{x\in[a;b]} p_1(x)$.
4. Нехай точки $x_0,x_1,\dots,x_n$ вже відомі. Тоді створюється функція:

$$p_n(x)=\max\{g(x,x_n);p_{n-1}(x)\}=\max_{0\le i\le n}\{g(x,x_i)\}.$$

Наступна точка x_{n+1} визначається з умови $p_n(x_{n+1})=\min\limits_{x\in[a;b]} p_n(x)$.

5. Обчислення припиняють, якщо $\left| f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) \right| < \varepsilon$, де ε – деяка наперед задана точність. За шукану точку приймають $x_{\min} \approx x_{n+1}$.

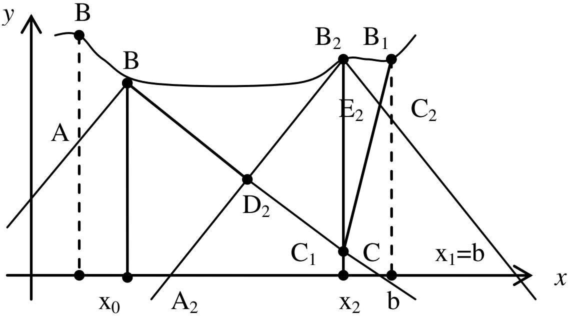

Рис. 1.8. Перші два кроки методу ламаних

На рис. 1.8 наведено в графічному вигляді перші два кроки методу ламаних. Пояснення до даного рисунка:

1) ABC – графік $p_0(x) = g(x, x_0)$.

2) $x_1 = b$, оскільки в цій точці $p_0(x)$ досягає мінімуму на відрізку $[a; b]$.

3) A_1B_1 – графік $g(x, x_1)$.

4) ABC_1B_1 – графік $p_1(x)$.

5) точка x_2 – точка мінімуму $p_1(x)$.

6) $A_2B_2C_2$ – графік $g(x, x_2)$.

7) $ABD_2B_2E_2B_1$ – графік $p_2(x)$.

Функція $p_n(x)$ є кусково-лінійною і її графік являє собою неперервну ламану лінію, яка складається з відрізків прямих з кутовими коефіцієнтами $+L$ або $-L$. З теореми 1.3 випливає, що $p_n(x)$ задовольняє умові (1.3) з тією ж константою L, що і функція $f(x)$. Ясно також, що

$$p_{n-1}(x) = \max_{0 \le i \le n-1} g(x, x_i) \le \max_{0 \le i \le n} g(x, x_i) = p_n(x),\ x \in [a, b]. \qquad (1.9)$$

Крім того, згідно (1.8) $g(x, x_i) \le f(x)$, $x \in [a; b]$ для всіх $i = \overline{0, n}$. Тому

$$p_n(x) \le f(x),\ x \in [a; b],\ n = 0,1,2\ldots \tag{1.10}$$

Таким чином, на кожному кроці методу ламаних задача мінімізації функції $f(x)$ заміняється більш простою задачею мінімізації кусково-лінійної функції $p_n(x)$, яка наближає $f(x)$ знизу, причому згідно (1.9) послідовність $\{p_n(x)\}$ монотонно зростає.

Таким чином, за допомогою методу ламаних можна розв'язати задачу мінімізації функції, яка задовольняє умову (1.3). Цей метод не вимагає унімодальності функції, і більше того, функція може мати скільки завгодно точок локального екстремуму на заданому відрізку. На кожному кроці методу ламаних потрібно мінімізувати кусково-лінійну функцію $p_n(x)$, що може бути зроблено простим перебором відомих вершин. Перебір істотно спрощується завдяки тому, що ламана $p_n(x)$ відрізняється від ламаної $p_{n-1}(x)$ не більш, ніж двома новими вершинами. До недоліків методу ламаних варто віднести те, що зі збільшенням числа кроків n зростає і необхідний об'єм пам'яті ЕОМ для збереження координат вершин ламаної $p_n(x)$.

Потрібно також зазначити, що метод ламаних, а також методи пасивного та послідовного перебору (див. пункт 2 даної теми) неможливо реалізувати без знання константи L з умови (1.3). На практиці оцінку для L одержують, обчислюючи кутові коефіцієнти деякого числа хорд, що з'єднують точки графіка функції, або аналітично, оцінюючи першу похідну функції. При визначенні L можуть бути корисні теореми 1.3 та 1.4. Варто відмітити, що використання завищеної оцінки для L погіршує швидкість збіжності методу ламаних, призводить до дуже великої кількості обчислень значень функції, яка мінімізується. Якщо ж користуватися заниженою оцінкою для L, то метод може привести до неправильного визначення наближеного мінімального значення.

Контрольні запитання

1. Чим відрізняється точка локального мінімуму від точки глобального мінімуму?
2. Як знайти константу Ліпшиця для диференційованої функції на відрізку?
3. Чи співпадає поняття точки глобального мінімуму функції на відрізку з поняттям точної нижньої межі функції?
4. Скільки точок мінімуму містить унімодальна функція на відрізку?
5. Скільки точок мінімуму містить строго унімодальна функція на відрізку?
6. Чи дозволяє метод повного перебору шукати точки локального екстремуму?
7. Чи дозволяє метод золотого перетину, в загальному випадку, шукати точки глобального екстремуму?
8. До класу яких методів належить метод ламаних?
9. Яку характеристику функції необхідно знати для застосування методу ламаних?
10. Чим відрізняються методи рівномірного та послідовного перебору?

Лабораторна робота №1
Методи Фібоначчі та золотого перетину пошуку мінімуму унімодальної функції на відрізку

Завдання для самостійної роботи

Знайти точку мінімуму унімодальної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ з точністю ε методом золотого перетину та модифікованим методом Фібоначчі.

1. $f(x) = x\sin x + 2\cos x,$ $\quad$ $[-5; -4]$, $\varepsilon = 0{,}02.$
2. $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90,$ $\quad$ $[1{,}5, 2]$, $\varepsilon = 0{,}05.$
3. $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1,$ $\quad$ $[-1; 0]$, $\varepsilon = 0{,}1.$
4. $f(x) = 10x\ln x - \dfrac{x^2}{2},$ $\quad$ $[0{,}5; 1]$, $\varepsilon = 0{,}05.$
5. $f(x) = x^2 + 2(x\lg\dfrac{x}{e} - 2),$ $\quad$ $[1{,}5; 2]$, $\varepsilon = 0{,}01.$
6. $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 21x^2 + 12x,$ $\quad$ $[0; 0{,}5]$, $\varepsilon = 0{,}01.$
7. $f(x) = \dfrac{2x}{\ln 2} - 2x^2,$ $\quad$ $[3{,}5; 4{,}5]$, $\varepsilon = 0{,}02.$
8. $f(x) = e^x - \dfrac{1}{3}x^3 - 2x,$ $\quad$ $[-1{,}5; -1]$, $\varepsilon = 0{,}01.$
9. $f(x) = x^2 - 2x + e^{-x},$ $\quad$ $[1; 1{,}5]$, $\varepsilon = 0{,}05.$
10. $f(x) = tgx - 2\sin x,$ $\quad$ $[0; \dfrac{\pi}{4}]$, $\varepsilon = 0{,}03.$
11. $f(x) = \sqrt{1 + x^2 + e^{-2x}},$ $\quad$ $[0; 1]$, $\varepsilon = 0{,}1.$
12. $f(x) = x^4 + 4x^2 - 32x + 1,$ $\quad$ $[1{,}5; 2]$, $\varepsilon = 0{,}05.$
13. $f(x) = \dfrac{1}{7}x^7 - x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - x,$ $\quad$ $[1; 1{,}5]$, $\varepsilon = 0{,}05.$
14. $f(x) = x^3 - 3\sin x,$ $\quad$ $[0{,}5; 1]$, $\varepsilon = 0{,}05.$
15. $f(x) = 5x^2 - 8x^{\frac{5}{4}} - 20x,$ $\quad$ $[3; 3{,}5]$, $\varepsilon = 0{,}02.$

16. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-5x+x\ln x,$ $[1{,}5;\ 2],\ \varepsilon=0{,}02.$

17. $f(x)=x^4+2x^2+4x+1,$ $[-1;\ 0],\ \varepsilon=0{,}1.$

18. $f(x)=x^5-5x^3+10x^2-5x,$ $[-3;\ -2],\ \varepsilon=0{,}1.$

19. $f(x)=x^2+3x(\ln x-1),$ $[0{,}5;\ 1],\ \varepsilon=0{,}05.$

20. $f(x)=x^2-2x-2x\cos x,$ $[0{,}5;\ 1],\ \varepsilon=0{,}05.$

21. $f(x)=(x+1)^4-2x^2,$ $[-3;\ -2],\ \varepsilon=0{,}05.$

22. $f(x)=3(5-x)^{\frac{4}{3}}+2x^2,$ $[1{,}5;\ 2],\ \varepsilon=0{,}025.$

23. $f(x)=-x^3+3(1+x)[\ln(1+x)-1],$ $[-0{,}5;0{,}5],\varepsilon=0{,}05.$

24. $f(x)=2+x^2+x^{\frac{2}{3}}-\ln(1+x^{\frac{2}{3}})-$
$-2x\,arctg\,x^{\frac{1}{3}},$ $[1{,}5;\ 2],\varepsilon=0{,}025.$

25. $f(x)=x^4-10x^3+36x^2+5x,$ $[3;\ 5],\ \varepsilon=0{,}05.$

Лабораторна робота №2
Відшукання точки глобального мінімуму багатоекстремальної функції

Перед використанням методів повного перебору або ламаних для функції $y = f(x)$ потрібно оцінити константу Ліпшиця L. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована на $[a;b]$, то $L = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$.

Наприклад, оцінимо L для функції $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ на відрізку $[10;15]$.

Отримуємо $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. Тоді

$$\left|f'(x)\right| = \left|\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right| \le \frac{|x|\cdot|\cos x| + |\sin x|}{x^2} \le \frac{|x|+1}{x^2} \le \frac{15+1}{100} = 0{,}16$$

при $x \in [10;15]$. Отже, $L = 0.16$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти точку глобального мінімуму x^* багатоекстремальної функції на відрізку $[a;b]$ з точністю ε, попередньо оцінивши при цьому константу Ліпшиця.

1. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1, [-1;0], \varepsilon = 0{,}1.$
2. $f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 5x, [-3;-2], \varepsilon = 0{,}1.$
3. $f(x) = x^2 + 3x(\ln x - 1), [0{,}5;1], \varepsilon = 0{,}05.$
4. $f(x) = x^2 - 2x - 2\cos x, [0{,}5;1], \varepsilon = 0{,}05.$
5. $f(x) = (x+1)^4 - 2x^2, [-3;-2], \varepsilon = 0{,}05.$
6. $f(x) = 3(5-x)^{4/3} + 2x^2, [1{,}5;2], \varepsilon = 0{,}025.$
7. $f(x) = -x^3 + 3(1+x)[\ln(1+x) - 1], [-0{,}5;0{,}5], \varepsilon = 0{,}05.$
8. $f(x) = 2 + x^2 + x^{2/3} - \ln(1 + x^{2/3}) - 2x\,arctg\,x^{1/3}, [0{,}5;1], \varepsilon = 0{,}025.$
9. $f(x) = \cos x / x^2, [7;11], \varepsilon = 0{,}01.$
10. $f(x) = -\sqrt{20x - x^2} + 0{,}01\sin x, [9;11], \varepsilon = 0{,}05.$

11. $f(x)=(0{,}1x-5)^8+\cos(0{,}02x),[49;51],\varepsilon=0{,}02.$

12. $f(x)=\ln x+0{,}1\sin(0{,}1x),[10;12],\varepsilon=0{,}01.$

13. $f(x)=(x-0{,}9)^2+(x-1{,}1)^4,[0{,}8;1{,}2],\varepsilon=0{,}05.$

14. $f(x)=x-\ln x,[0{,}1;2],\varepsilon=0{,}01.$

15. $f(x)=x^2-\sin x,[0;\frac{\pi}{2}],\varepsilon=0{,}01.$

16. $f(x)=x^4+x^2+x+1,[-1;2],\varepsilon=0{,}05.$

17. $f(x)=\frac{x^2}{2}-\cos x,[0;3],\varepsilon=0{,}01.$

18. $f(x)=\sqrt{1+x^2}+e^{-2x},[0;1],\varepsilon=0{,}01.$

19. $f(x)=e^x+\frac{1}{x},[0{,}1;2],\varepsilon=0{,}01.$

20. $f(x)=(x-4)^2+\ln x,[3;5],\varepsilon=0{,}05.$

21. $f(x)=x^4+e^{-x},[0;1],\varepsilon=0{,}01.$

22. $f(x)=2x^2+x+\cos^2 x,[0;1],\varepsilon=0{,}05.$

23. $f(x)=e^x+e^{-2x}+2x,[2;4],\varepsilon=0{,}01.$

24. $f(x)=x^2+x+\sin x,[1;2{,}5],\varepsilon=0{,}05.$

25. $f(x)=x^2-x+e^{-x},[-1;1],\varepsilon=0{,}01.$

ТЕМА 2. МЕТОДИ БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

2.1. Постановка задачі та класичний метод її розв'язання

Нехай R^n - це n–вимірний лінійний простір, а E^n - відповідний йому n - вимірний Евклідовий простір. Нагадаємо, що R^n стає Евклідовим простором, якщо в ньому ввести операцію скалярного добутку n–вимірних векторів (a,b), $a \in E^n, b \in E^n$ і на його основі – норму вектора $|a| = (a,a)^{1/2}$.

Однією з важливих задач, до якої зводиться багато прикладних проблем, є задача відшукання екстремуму скалярної функції $f(\mathbf{X})$, де $\mathbf{X} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$. Не зменшуючи загальності, надалі будемо розглядати лише задачу на мінімум:

$$f(\mathbf{X}) \to \min, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{X} \in E^n. \tag{2.2}$$

Задача (2.1), (2.2) є задачею безумовної оптимізації, оскільки екстремуми шукаються у всьому просторі E^n.

Точка $\mathbf{X}^* = (x^*{}_1, x^*{}_2, \ldots x^*{}_n) \in E^n$ називається точкою локального мінімуму функції $f(\mathbf{X})$ в просторі E^n, якщо при деякому достатньо малому $\varepsilon > 0$, $\forall \mathbf{X} \neq \mathbf{X}^* \in E^n$ таких, що $\left|\mathbf{X} - \mathbf{X}^*\right| < \varepsilon$ виконується нерівність:

$$f(\mathbf{X}^*) \le f(\mathbf{X}). \tag{2.3}$$

Класичний підхід до розв'язання задачі (2.1), (2.2) і відшукання точок підозрілих на мінімум базується на теоремі.

Теорема 2.1. Для того, щоб в точці $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ функція $f(\mathbf{X})$ досягала безумовного локального екстремуму необхідно, щоб мали місце наступні рівності:

$$
\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*}=0,
$$

$$
\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*}=0, \qquad (2.4)
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*}=0.
$$

Теорема 2.1 дає лише необхідну умову відносного екстремуму. Тобто, розв’язки системи (2.4) будуть підозрілими на екстремум. Але знайти аналітичний розв’язок системи, в загальному випадку, нелінійних рівнянь (2.4) здебільшого неможливо. Тому постає необхідність в чисельних методах відшукання безумовних екстремумів або, принаймні, точок підозрілих на безумовний екстремум.

2.2. Метод спуску та градієнтні методи: загальна схема

Щоб чисельно розв’язати задачу (2.1), (2.2), потрібно побудувати послідовність точок $\mathbf{X}^{(0)}, \mathbf{X}^{(1)}, \ldots, \mathbf{X}^{(k)}, \ldots$, які задовольняють умови $f(\mathbf{X}^{(0)}) > f(\mathbf{X}^{(1)}) > f(\mathbf{X}^{(2)}) > \ldots > f(\mathbf{X}^{(k)}) > \ldots$. Такі послідовності $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$ називаються релаксаційними, а методи їх побудови – методами спуску (в задачах на відшукання максимуму – методами підйому).

В методах спуску точки послідовності $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$ обчислюються за формулою:

$$
\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \alpha^{(k)}\vec{\mathbf{P}}^{(k)}, \qquad (2.5)
$$

де $\vec{\mathbf{P}}^{(k)}$ - вектор, який вказує напрямок спуску, $\alpha^{(k)} > 0$ - довжина кроку вздовж даного напрямку. Різні модифікації методів спуску відрізняються між собою способами вибору напрямку спуску та довжини кроку вздовж даного напрямку.

В градієнтних методах за напрямок спуску вибирають вектор $-grad\, f(\mathbf{X})$, оскільки антиградієнт вказує напрямок найшвидшого спадання функції $f(\mathbf{X})$. Тобто, загальна схема градієнтного методу спуску у векторній формі має наступний вигляд:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \alpha^{(k)} grad\, f(\mathbf{X}^{(k)}), \tag{2.6}$$

$k = 0,1,2,\ldots$, а в по координатній:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \alpha^{(k)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{X}^{(k)}),\ i = \overline{1,n}. \tag{2.7}$$

2.3. Градієнтні методи з поділом кроку

Перша проблема з якою стикаються при реалізації ітераційного процесу (2.6), – це вибір кроку $\alpha^{(k)}$. Досить малий крок $\alpha^{(k)}$ забезпечить спадання функції, тобто виконання нерівності:

$$f(\mathbf{X}^{(k+1)}) < f(\mathbf{X}^{(k)})$$

або

$$f(\mathbf{X}^{(k)} - \alpha^{(k)} gradf(\mathbf{X}^{(k)})) < f(\mathbf{X}^{(k)}), \tag{2.8}$$

але може привести до великої кількості ітерацій, необхідних для досягнення точки мінімуму. Дуже великий крок може викликати зростання функції або привести до коливання навколо точки мінімуму.

Приклад 2.1. Розглянемо задачу

$$f(x) = ax^2 \to \min, x \in E^1,$$

де $a > 0$. Тоді формула (2.6) набуває вигляду:

$$x^{(k+1)} = (1 - 2\alpha^{(k)}a)x^{(k)},\ k = 0,1,2,\ldots \tag{2.9}$$

причому

$$f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) = a((1 - 2\alpha^{(k)}a)x^{(k)})^2 - a(x^{(k)})^2 =$$
$$= a(x^{(k)})^2((1 - 2\alpha^{(k)}a)^2 - 1) = a(x^{(k)})^2(-4\alpha^{(k)}a +$$
$$+ 4(\alpha^{(k)}a)^2) = 4\alpha^{(k)}a^2(x^{(k)})^2(-1 + \alpha^{(k)}a).$$

Для виконання умов (2.8) потрібно, щоб $f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) < 0$. Оскільки $\alpha^{(k)} > 0$, то маємо умову

$$-1 + \alpha^{(k)}a < 0,$$

або $\alpha^{(k)} < 1/a$.

Отже, при $0 < \alpha^{(k)} < \dfrac{1}{a}$ процес (2.6) буде збіжний, а при $\alpha^{(k)} > 1/a$ - розбіжний, тобто цільова функція буде зростати. Якщо ж покласти $\alpha^{(k)} = 1/a$, то згідно (2.9) $x^{(1)} = -x^{(0)}$, $x^{(2)} = x^{(0)}$, $x^{(3)} = -x^{(0)}$ і т. д., тобто відбудеться зациклення. Очевидно, що розв'язком даної задачі є точка $x = 0$.

В методі градієнтного спуску з поділом кроку величину кроку $\alpha^{(k)}$ можна вибрати з умови виконання наступної нерівності [19]:

$$f(\mathbf{X}^{(k)} - \alpha^{(k)} gradf(\mathbf{X}^{(k)})) - f(\mathbf{X}^{(k)}) \le -\varepsilon\alpha^{(k)} \left| gradf(\mathbf{X}^{(k)}) \right|^2, \quad (2.10)$$

де $\varepsilon \in (0;1)$. Зауважимо, що якщо існує така константа R, що $\left| \, gradf(\mathbf{X}) - gradf(\mathbf{Y}) \, \right| \le R \left| \mathbf{X} - \mathbf{Y} \right|$, $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in E^n$, то можна використати градієнтний метод з постійним кроком $\alpha^{(k)} \equiv \alpha = \dfrac{1-\varepsilon}{R}$. Обґрунтування цих способів вибору кроку $\alpha^{(k)}$ наведено в доведенні теореми 2.2 (параграф 6 даної теми).

Національний університет водного господарства та природокористування

Алгоритм 2.1. (градієнтний метод з поділом кроку)

1. Вибрати довільну початкову точку $\mathbf{X}^{(0)} \in E^n$, довільну константу $\alpha > 0$, довільний множник $\beta \in [1/2; 1]$ (коефіцієнт поділу кроку), довільну константу $\varepsilon > 0$ (рекомендується $\varepsilon \approx 1/2$). Покласти $k = 0$.
2. Обчислити $gradf(\mathbf{X}^{(k)})$.
3. Якщо $gradf(\mathbf{X}^{(k)}) = 0$, то покласти $\mathbf{X}_{\min} = \mathbf{X}^{(k)}$ і припинити обчислення; інакше – перейти до кроку 4.
4. Покласти $\alpha^{(k)} = \alpha$.
5. Обчислити точку $\mathbf{X}^{(k+1)}$ за формулою (2.6).
6. Якщо виконується нерівність (2.10), то покласти $k = k + 1$ і перейти до кроку 2; інакше покласти $\alpha = \alpha \cdot \beta$ (провести поділ кроку) і перейти до кроку 4.

При практичній реалізації алгоритму 2.1 ітерації припиняють, наприклад, якщо для всіх i, $i=\overline{1,n}$, виконуються умови:

$$\left|\frac{\partial f(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_i}\right| \le \delta,\ \ i=\overline{1,n},$$

де δ - деяке наперед задане додатне число, яке характеризує точність знаходження мінімуму. Однак, єдиного підходу до практичного критерію зупинки обчислень не існує.

2.4. Метод найшвидшого спуску

При використанні градієнтних методів з поділом кроку або з постійним кроком, як правило, крок виявляється досить малим, що приводить до необхідності проведення великої кількості ітерацій для досягнення точки мінімуму. Тому метод спуску зі змінним кроком є більш економним.

Процес (2.6) на кожній ітерації якого крок $\alpha^{(k)}$ вибирається з наступної умови мінімуму функції в напрямку руху:

$$f\left(\mathbf{X}^{(k)}-\alpha^{(k)} gradf\left(\mathbf{X}^{(k)}\right)\right)=\min_{\alpha\ge 0} f\left(\mathbf{X}^{(k)}-\alpha\ gradf\left(\mathbf{X}^{(k)}\right)\right) \qquad (2.11)$$

називається методом найшвидшого спуску. Тут на кожній ітерації потрібно розв'язувати задачу одновимірної мінімізації (2.11) по α функції $\varphi(\alpha)=f\left(\mathbf{X}^{(k)}-\alpha\ gradf\left(\mathbf{X}^{(k)}\right)\right)$. Про методи розв'язання таких задач розказано в темі 1.

2.5. Метод Ньютона

Нехай $\varphi(\mathbf{X})=(\varphi_1(\mathbf{X}),\varphi_2(\mathbf{X}),\ldots,\varphi_n(\mathbf{X}))$ - n-вимірна функція векторного аргументу $\mathbf{X}$ тієї ж розмірності. Розкладаючи покоординатно вектор–функцію $\varphi(\mathbf{X})$ в ряд Тейлора в околі деякої точки $\mathbf{X}^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)})$, отримаємо наступну систему рівнянь для відшукання розв'язку системи рівнянь $\varphi(\mathbf{X})=\mathbf{0}$:

$$\begin{cases} \varphi_1(\mathbf{X}^{(k)}) + \sum\limits_{s=1}^{n}(x_s - x_s^{(k)})\dfrac{\partial\varphi_1(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_s} + o(\left|\mathbf{X}-\mathbf{X}^{(k)}\right|^2) = 0, \\ \varphi_2(\mathbf{X}^{(k)}) + \sum\limits_{s=1}^{n}(x_s - x_s^{(k)})\dfrac{\partial\varphi_2(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_s} + o(\left|\mathbf{X}-\mathbf{X}^{(k)}\right|^2) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(\mathbf{X}^{(k)}) + \sum\limits_{s=1}^{n}(x_s - x_s^{(k)})\dfrac{\partial\varphi_n(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_s} + o(\left|\mathbf{X}-\mathbf{X}^{(k)}\right|^2) = 0. \end{cases}$$

Відкидаючи у вищенаведеній системі нескінченно малі другого порядку і вище, отримаємо відносно невідомої точки $\mathbf{X}$ систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР):

$$\varphi_i(\mathbf{X}^{(k)}) + \sum_{s=1}^{n}(x_s - x_s^{(k)})\frac{\partial\varphi_i(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_s} = 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Відшукання розв'язку вищенаведеної СЛАР описується наступною ітераційною формулою:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - (\varphi'(\mathbf{X}^{(k)}))^{-1}\cdot\varphi(\mathbf{X}^{(k)}),\ k = 0,1,2,3... \quad (2.12)$$

де $\varphi'(\mathbf{X}^{(k)}) = \left\{\dfrac{\partial\varphi_i(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_s}\right\}_{i=1;s=1}^{n;n}$ - квадратна матриця розмірності $n\times n$, а степінь (-1) означає обернену матрицю.

Тепер розглянемо випадок, коли вектор-функція $\varphi(\mathbf{X})$ є градієнтом деякої скалярної функції $f(\mathbf{X})$, тобто $\varphi(\mathbf{X}) = grad\, f(\mathbf{X})$. Тоді, згідно (2.12), відшукання розв'язку системи нелінійних рівнянь $grad\, f(\mathbf{X}) = 0$ описується рекурентною формулою

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - (f''(\mathbf{X}^{(k)}))^{-1} grad\, f(\mathbf{X}^{(k)}), \quad (2.13)$$

де $f''(\mathbf{X}^{(k)})$ - матриця розмірності $n\times n$ других похідних функції $f(\mathbf{X})$.

Формула (2.13) і є основою методу Ньютона безумовної оптимізації функції $f(\mathbf{X})$. З використанням ітераційного процесу (2.13) будується послідовність точок $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$, яка (при певних припущеннях) збігається до деякої, підозрілої на екстремум, стаціонарної точки $\mathbf{X}^*$ функції $f(\mathbf{X})$. Якщо матриця других похідних (матриця Гессе) $f''(\mathbf{X}^*)$ додатньо визначена, то точка $\mathbf{X}^*$ є точкою мінімуму, і точкою максимуму, якщо матриця $f''(\mathbf{X}^*)$ від'ємно визначена. Перевірка знаковизначеності матриці може бути здійснена, наприклад, за допомогою критерію Сильвестра. Необхідною і достатньою умовою додатної визначеності симетричної матриці $\mathbf{A} = \left\{a_{ij}\right\}_{i=1;\, j=1}^{n;n}$ є виконання n нерівностей:

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, ..., \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

а умовою від'ємної визначеності є:

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

тобто чергування знаків головних мінорів матриці $\mathbf{A}$.

Однак, метод Ньютона (2.13) збіжний до точки екстремуму $\mathbf{X}^*$ лише у випадку вибору початкової точки $\mathbf{X}^{(0)}$ з деякого околу $\mathbf{X}^*$, що далеко не завжди є простою задачею. Тому на практиці використовують узагальнений метод Ньютона з регулюванням кроку:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \alpha^{(k)} \left(f''\left(\mathbf{X}^{(k)}\right)\right)^{-1} gradf\left(\mathbf{X}^{(k)}\right). \qquad (2.14)$$

Виникає питання: як обчислювати елементи оберненої матриці $\left(f''\left(\mathbf{X}^{(k)}\right)\right)^{-1}$? Існує спосіб, відмінний від класичного. Метод (2.14) можна подати у наступному вигляді:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \alpha^{(k)} \cdot \vec{\mathbf{P}}^{(k)},$$

де $\vec{\mathbf{P}}^{(k)} = -\left(f''\left(\mathbf{X}^{(k)}\right)\right) grad\ f\left(\mathbf{X}^{(k)}\right)$, або $f''\left(\mathbf{X}^{(k)}\right) \cdot \vec{\mathbf{P}}^{(k)} = -grad\ f\left(\mathbf{X}^{(k)}\right)$. В покоординатній формі отримуємо:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f\left(\mathbf{X}^{(k)}\right)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot p_j^{(k)} = -\frac{\partial f\left(\mathbf{X}^{(k)}\right)}{\partial x_i}, \; i = \overline{1,n},. \qquad (2.15)$$

Тобто, для визначення вектора $\vec{\mathbf{P}}^{(k)}$, який вказує на напрям руху, можна розв'язувати СЛАР (2.15) замість того, щоб шукати обернену матрицю $\left(f''(\mathbf{X}^{(k)})\right)^{-1}$.

Крок $\alpha^{(k)}$ у випадку мінімізації функції можна вибирати з умови виконання нерівності

$$f\left(\mathbf{X}^{(k)}+\alpha^{(k)}\vec{\mathbf{P}}^{(k)}\right)-f\left(\mathbf{X}^{(k)}\right)\le\varepsilon\cdot\alpha^{(k)}\left(gradf\,(\mathbf{X}^{(k)}),\vec{\mathbf{P}}^{(k)}\right), \quad (2.16)$$

де $0<\varepsilon<1/2$ (аналог градієнтного методу з поділом кроку), або з умови мінімуму функції $f(\mathbf{X})$ в напрямку руху

$$f\left(\mathbf{X}^{(k)}+\alpha^{(k)}\cdot\vec{\mathbf{P}}^{(k)}\right)=\min_{\alpha\ge0}f\left(\mathbf{X}^{(k)}+\alpha\cdot\vec{\mathbf{P}}^{(k)}\right) \quad (2.17)$$

по аналогії з методом найшвидшого спуску.

2.6. Про збіжність та точність методів

При оцінці якості чисельного методу мінімізації функції говорять про лінійну швидкість збіжності (або про збіжність зі швидкістю геометричної прогресії), якщо

$$\left|\mathbf{X}^{(k+1)}-\mathbf{X}_{\min}\right|\le g\left|\mathbf{X}^{(k)}-\mathbf{X}_{\min}\right|,$$

де $0<g<1$ – деяка константа. Швидкість збіжності надлінійна, якщо

$$\left|\mathbf{X}^{(k+1)}-\mathbf{X}_{\min}\right|\le g_k\left|\mathbf{X}^{(k)}-\mathbf{X}_{\min}\right|,$$

де $g_k\to0$ при $k\to\infty$, і квадратична, якщо

$$\left|\mathbf{X}^{(k+1)}-\mathbf{X}_{\min}\right|\le C\cdot\left|\mathbf{X}^{(k)}-\mathbf{X}_{\min}\right|^2,\ C\ge0\,.$$

Теорема 2.2. Якщо функція $f(\mathbf{X})$ обмежена знизу, її градієнт задовольняє умову $\left|gradf(\mathbf{X})-gradf(\mathbf{Y})\right|\le R\left|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\right|,\ R>0$, а вибір кроку $\alpha^{(k)}$ здійснюється згідно (2.10), то для процесу (2.6) буде виконуватись $\left|\ gradf(\mathbf{X}^{(k)})\ \right|\to0$ при $k\to\infty$ і довільній початковій точці $\mathbf{X}^{(0)}$.

Доведення. Згідно теореми про середнє

$$f(\mathbf{X}^{(k+1)})-f(\mathbf{X}^{(k)})=(gradf(\mathbf{X}^{(k)}),\mathbf{X}^{(k+1)}-\mathbf{X}^{(k)})\,, \quad (2.18)$$

де $\mathbf{X}^{(c)} = \mathbf{X}^{(k)} + \Theta(\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)})$, $\Theta \in [0;1]$; $(\cdot,\cdot)$ - скалярний добуток векторів. Зрозуміло, що $\left|\mathbf{X}^{(c)} - \mathbf{X}^{(k)}\right| \le \left|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\right|$. З (2.18) отримуємо:

$$f(\mathbf{X}^{(k+1)}) - f(\mathbf{X}^{(k)}) = (gradf(\mathbf{X}^{(k)}), \mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}) +$$
$$+ (gradf(\mathbf{X}^{(c)}) - gradf(\mathbf{X}^{(k)}), \mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}).$$

Тоді очевидною є нерівність:

$$f(\mathbf{X}^{(k+1)}) - f(\mathbf{X}^{(k)}) \le (gradf(\mathbf{X}^{(k)}), \mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}) +$$
$$+ \left|gradf(\mathbf{X}^{(c)}) - gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right| \cdot \left|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\right|.$$

Звідси, враховуючи, що $\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)} = -\alpha^{(k)} gradf(\mathbf{X}^{(k)})$ та використовуючи умову $\left|gradf\,(\mathbf{X}^{(c)}) - gradf\,(\mathbf{X}^{(k)})\right| \le R\left|\mathbf{X}^{(c)} - \mathbf{X}^{(k)}\right|$, отримаємо:

$$f(\mathbf{X}^{(k+1)}) - f(\mathbf{X}^{(k)}) \le -\alpha^{(k)}(gradf(\mathbf{X}^{(k)}), gradf(\mathbf{X}^{(k)})) +$$
$$+ \alpha^{(k)} R\left|\mathbf{X}^{(c)} - \mathbf{X}^{(k)}\right| \cdot \left|gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right| \le -\alpha^{(k)}\left|gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right|^2 +$$
$$+ \alpha^{(k)} R\left|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\right| \cdot \left|gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right| = \alpha^{(k)}\left|gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right|^2 \cdot (-1 + \alpha^{(k)} R).$$

Отримана нерівність показує, що існує значення $\alpha^{(k)} \ne 0$, таке, що нерівність (2.10) виконується: для цього досить вибрати $\alpha^{(k)}$ таким чином, щоб $(-1 + \alpha^{(k)} R) \le -\varepsilon$. Це завжди можна зробити, оскільки R – обмежена величина, а $0 < \varepsilon < 1$. Отже, (2.10) буде завжди виконуватись при $\alpha^{(k)} \le \dfrac{1-\varepsilon}{R}$. Отже, вибираючи $\alpha^{(k)}$ відповідно до наведеного алгоритму, ми доб'ємось виконання нерівності (2.8).

Оскільки за умовою теореми $f(\mathbf{X})$ обмежена знизу, то обов'язково $(f(\mathbf{X}^{(k+1)}) - f(\mathbf{X}^{(k)})) \to 0$, при $k \to +\infty$. Це доводиться методом від супротивного. Припустимо, що $\lim\limits_{k\to+\infty}(f(\mathbf{X}^{(k+1)}) - f(\mathbf{X}^{(k)})) \ne 0$. Тоді $(f(\mathbf{X}^{(k+1)}) - f(\mathbf{X}^{(k)})) = \delta^{(k)} \ne 0$. Тобто $f(\mathbf{X}^{(1)}) = f(\mathbf{X}^{(0)}) + \delta^{(0)}$, далі

$$f(\mathbf{X}^{(2)}) = f(\mathbf{X}^{(1)}) + \delta^{(1)} = f(\mathbf{X}^{(0)}) + \delta^{(0)} + \delta^{(1)},$$

далі $f\left(\mathbf{X}^{(k+1)}\right) = f\left(\mathbf{X}^{(0)}\right) + \sum_{i=0}^{k}\delta^{(i)}$, причому $\delta^{(i)} < 0, i = 0,1,2\ldots$. Тобто, $f(\mathbf{X})$ - необмежена знизу. А це неможливо. Тоді маємо, що $\left(f\left(\mathbf{X}^{(k+1)}\right) - f\left(\mathbf{X}^{(k)}\right)\right) \to 0$, при $k \to +\infty$ і $\left|gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right|^2 \le \dfrac{f(\mathbf{X}^{(k+1)}) - f(\mathbf{X}^{(k)})}{-\varepsilon\alpha^{(k)}} \Rightarrow \left|gradf\,(\mathbf{X}^{(k)})\right| \to 0$ при $k \to \infty$.

Теорема 2.2 доведена.

Також можна оцінити швидкість збіжності методу (2.6), (2.10), накладаючи додаткові обмеження на функцію $f(\mathbf{X})$.

Теорема 2.3. Нехай $f(\mathbf{X})$ - двічі неперервно диференційована функція, причому її матриця других похідних задовольняє умовам

$$m|\mathbf{Y}|^2 \le \left(f''(\mathbf{X})\mathbf{Y}, \mathbf{Y}\right) \le M|\mathbf{Y}|^2, M \ge m > 0, \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in E^n, \tag{2.19}$$

а послідовність $\left\{\mathbf{X}^{(k)}\right\}$ будується методом (2.6), де $\alpha^{(k)}$ вибирається з умови (2.10). Тоді, при довільній початковій $\mathbf{X}^{(0)}$ буде $\mathbf{X}^{(k)} \to \mathbf{X}_{\min}$, $f\left(\mathbf{X}^{(k)}\right) \to f\left(\mathbf{X}_{\min}\right)$. Причому, для швидкості збіжності справедливі оцінки

$$f\left(\mathbf{X}^{(k)}\right) - f\left(\mathbf{X}_{\min}\right) \le g^k\left(f\left(\mathbf{X}^{(0)}\right) - f\left(\mathbf{X}_{\min}\right)\right),\ \left|\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}_{\min}\right| \le Cg^{\frac{k}{2}}, \tag{2.20}$$

де $0 < C < \infty$, $0 < g < 1$.

Доведення . Використовуючи формулу Тейлора, отримаємо:

$$f\left(\mathbf{X}_{\min}\right) = f\left(\mathbf{X}\right) + \left(f'\left(\mathbf{X}\right), \mathbf{X}_{\min} - \mathbf{X}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(f''\left(\mathbf{X}^{(c)}\right)\cdot\left(\mathbf{X}_{\min} - \mathbf{X}\right), \mathbf{X}_{\min} - \mathbf{X}\right)$$

де $\mathbf{X}^{(c)} = \mathbf{X} + \Theta\cdot\left(\mathbf{X}_{\min} - \mathbf{X}\right), \Theta \in [0,1]$. Тоді, враховуючи(2.19), що

$$-\left(f''\left(\mathbf{X}^{(c)}\right)\left(\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}\right), \mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}\right) \le -m\left|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}\right|^2,$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} f\left(\mathbf{X}\right) - f\left(\mathbf{X}_{\min}\right) &\le \left(f'\left(\mathbf{X}\right), \mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}\right) - \frac{m}{2}\left|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}\right|^2 \le \\ &\le \left|f'\left(\mathbf{X}\right)\right|\cdot\left|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}\right| - \frac{m}{2}\left|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}\right|^2. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Аналогічно отримаємо:

$$f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}_{\min}) + (f'(\mathbf{X}_{\min}), \mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}) + \frac{1}{2}(f''(\mathbf{X}^{(1)})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}), \mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}),$$

де $\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}_{\min} + \Theta_1(\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min,})$, $\Theta \in [0,1]$. Враховуючи, що $f'(\mathbf{X}_{\min}) = \mathbf{0}$, отримаємо:

$$f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_{\min}) = \frac{1}{2}(f''(\mathbf{X}^{(1)})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}), \mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}).$$

Тому в силу (2.19), маємо:

$$\frac{m}{2}\left|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}\right|^2 \le f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_{\min}) \le \frac{M}{2}\left|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}\right|^2. \tag{2.22}$$

Тоді, використовуючи ліву з нерівностей (2.22) та нерівність (2.21), отримаємо:

$$\frac{m}{2}\left|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}\right|^2 \le \left|f'(\mathbf{X})\right|\left|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}\right| - \frac{m}{2}\left|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}\right|^2,$$

або

$$\left|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}\right| \le \frac{\left|f'(\mathbf{X})\right|}{m}. \tag{2.23}$$

А з правої нерівності (2.22) випливає

$$\left|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\min}\right|^2 \ge \frac{2}{M}(f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_{\min})).$$

З урахуванням отриманих оцінок (2.21) можна записати наступним чином:

$$f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_{\min}) \le \frac{\left|f'(\mathbf{X})\right|^2}{m} - \frac{m}{M}(f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_{\min})),$$

звідки:

$$\left|f'(\mathbf{X})\right|^2 \ge m(1 + \frac{m}{M})(f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_{\min})). \tag{2.24}$$

Використовуючи оцінку (2.24), з нерівності (2.10) отримаємо:

$$f(\mathbf{X}^{(k+1)}) - f(\mathbf{X}^{(k)}) \le -\varepsilon\alpha^{(k)} m(1 + \frac{m}{M})(f(\mathbf{X}^{(k)}) - f(\mathbf{X}_{\min})). \tag{2.25}$$

Тоді, використовуючи ряд Тейлора та враховуючи, що $\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)} = -\alpha^{(k)} f'(\mathbf{X}^{(k)})$, отримаємо

$$f(\mathbf{X}^{(k+1)}) - f(\mathbf{X}^{(k)}) = (f'(\mathbf{X}^{(k)}), \mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}) +$$

$$+\frac{1}{2}(f''(\mathbf{X}^{c(k)})(\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}), \mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}) = -\alpha^{(k)}\left|f'(\mathbf{X}^{(k)})\right|^2 +$$

$$+\frac{(\alpha^{(k)})^2}{2}(f''(\mathbf{X}^{k(k)})f'(\mathbf{X}^{(k)}), f'(\mathbf{X}^{(k)})) \le -\alpha^{(k)}(1 - \frac{\alpha^{(k)}M}{2})\left|f'(\mathbf{X}^{(k)})\right|^2$$

Звідси випливає, що нерівність (2.10) буде виконуватись, якщо $1 - \frac{\alpha^{(k)}M}{2} \ge \varepsilon$, тобто $\alpha^{(k)} \le \overline{\alpha} = \frac{2(1-\varepsilon)}{M}$. З урахуванням встановленої умови та з (2.25) випливає:

$$f(\mathbf{X}^{(k+1)}) - f(\mathbf{X}_{\min}) = f(\mathbf{X}^{(k+1)}) - f(\mathbf{X}^{(k)}) + f(\mathbf{X}^{(k)}) - f(\mathbf{X}_{\min}) \le$$

$$\le f(\mathbf{X}^{(k)}) - f(\mathbf{X}_{\min}) - \varepsilon\alpha^{(k)}m(1 + \frac{m}{M})(f(\mathbf{X}^{(k)}) - f(\mathbf{X}_{\min})) \le$$

$$\le q(f(\mathbf{X}^{(k)}) - f(\mathbf{X}_{\min})),$$

де $q = 1 - \varepsilon\overline{\alpha}m(1 + \frac{m}{M}) < 1$. Тобто

$$f(\mathbf{X}^{(k)}) - f(\mathbf{X}_{\min}) \le q^k(f(\mathbf{X}^{(0)}) - f(\mathbf{X}_{\min})). \qquad (2.26)$$

Оскільки $\overline{\alpha} = \frac{2(1-\varepsilon)}{M}$, то $q = 1 - \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)m}{M}(1 + \frac{m}{M})$. Звідси випливає, що мінімальне значення знаменника прогресії досягається при $\varepsilon = 1/2$. Тоді $q = 1 - \frac{m}{2M}(1 + \frac{m}{M})$. Тобто, в умові (2.10) доцільно покладати $\varepsilon = 1/2$. Оцінка (2.26) разом з лівою із оцінок (2.22) дозволяє встановити збіжність та оцінку швидкості збіжності послідовності $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$ до точки $\mathbf{X}_{\min}$. Зокрема:

$$\left|\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}_{\min}\right| \le \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(f(\mathbf{X}^{(k)}) - f(\mathbf{X}_{\min})\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} \left(f(\mathbf{X}^{(0)}) - f(\mathbf{X}_{\min})\right)^{1/2} q^{k/2} = Cq^{k/2},$$

де $C = \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} \left(f(\mathbf{X}^{(0)}) - f(\mathbf{X}_{\min})\right)^{1/2}$.

Теорема 2.3 доведена.

Аналогічні теореми справедливі для методу найшвидшого спуску (2.6), (2.11).

Теорема 2.4. Якщо функція $f(\mathbf{X})$ задовольняє вимогам теореми 2.2 і в методі (2.6) крок $\alpha^{(k)}$ вибирається з умови (2.11), то $\left|gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right| \to 0$ при $k \to \infty$ та довільній початковій точці $\mathbf{X}^{(0)}$.

Доведення. Як і в теоремі 2.2 отримуємо оцінку:

$$f(\mathbf{X}^{(k+1)}) - f(\mathbf{X}^{(k)}) = -\alpha^{(k)}\left|gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right|^2 -$$
$$-\alpha^{(k)}\left(gradf(\mathbf{X}^{(c)}) - gradf(\mathbf{X}^{(k)}), gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right) \le$$
$$\le -\alpha^{(k)}\left|gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right|^2 + \left(\alpha^{(k)}\right)^2 R\left|gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right|^2,$$

де $\mathbf{X}^{(c)} = \mathbf{X} + \Theta \cdot \left(\mathbf{X}_{\min} - \mathbf{X}\right), \Theta \in [0,1]$.

Мінімум функції $\varphi(\alpha) = \left(-\alpha + \alpha^2 R\right)\left|gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right|^2$ досягається при $\alpha_{\min} = \frac{1}{2R}$, причому $\varphi(\alpha_{\min}) = -\frac{\left|gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right|^2}{4R}$. Оскільки $\left(\alpha^{(k)}\right)^2 R\left|gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right|^2$ є верхньою оцінкою члена $-\alpha^{(k)}\left(gradf(\mathbf{X}^{(c)}) - gradf(\mathbf{X}^{(k)}), gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right)$, то значення $\alpha^{(k)}$, яке задовольняє умові (2.11), буде не менше $\alpha_{\min}$, і

$$f(\mathbf{X}^{(k+1)}) - f(\mathbf{X}^{(k)}) \le -\frac{\left|gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right|^2}{4R}. \qquad (2.27)$$

Подальші судження повторюють міркування теореми 2.2, з яких випливає, що $\left|gradf(\mathbf{X}^{(k)})\right| \to 0$ при $k \to \infty$.

Теорема 2.4 доведена.

Так само для методу (2.6), (2.11) можна довести справедливість оцінок (2.20), які встановлені в теоремі 2.3 для методу (2.6), (2.10). Єдина відмінність в доведенні полягає в тому, що вираз (2.24) потрібно використовувати в оцінці:

$$f(\mathbf{X}^{(k+1)}) - f(\mathbf{X}^{(k)}) \leq -\frac{1}{2M}\left|grad f\,(\mathbf{X}^{(k)})\right|^2,$$

яка отримується так само, як і (2.27).

В роботі [19] також дана якісна оцінка модифікованого методу Ньютона. В зв'язку з деякою громіздкістю доведення теорем ми обмежимось лише їх формулюванням, а з самими доведеннями читач може ознайомитись у вказаній книзі.

Теорема 2.5. Якщо для мінімізації функції $f(\mathbf{X})$, яка задовольняє умову (2.19), використовується метод (2.14), в якому вибір кроку $\alpha^{(k)}$ здійснюється з умови (2.16), то незалежно від вибору початкової точки $\mathbf{X}^{(0)}$, послідовність $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$ збігається до точки мінімуму із надлінійною швидкістю.

Результати теореми 2.5 можна підсилити, якщо додатково, окрім умови (2.19), припустити, що матриця $f''(\mathbf{X})$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\left|f''(\mathbf{X}) - f''(\mathbf{Y})\right| \leq R\left|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\right|, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in E^n,\ R > \mathbf{0}. \qquad (2.28)$$

Теорема 2.6. Якщо функція $f(\mathbf{X})$ задовольняє умовам (2.19), (2.28), то послідовність (2.14), в якій значення параметра $\alpha^{(k)}$ вибираються із умови (2.16), незалежно від вибору початкової точки $\mathbf{X}^{(0)}$ збігається до точки мінімуму з квадратичною швидкістю.

Контрольні запитання

1. В чому полягає класичний метод розв'язання задачі про пошук екстремуму функції $y = f(\mathbf{X})$?
2. Запишіть загальну схему методу спуску; методу підйому.
3. Який напрямок спуску вибирається в градієнтних методах?
4. Чим відрізняється градієнтний метод від методу Ньютона?
5. З яких умов вибирається крок в методі найшвидшого спуску?
6. Якими швидкостями збіжності характеризуються чисельні методи мінімізації функції?
7. Яка швидкість збіжності модифікованого методу Ньютона?
8. При яких умовах збігається метод найшвидшого спуску?

Лабораторна робота №3
Градієнтні методи безумовної оптимізації функцій багатьох змінних (методи першого порядку)

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти мінімум функції градієнтним методом з поділом кроку. Обчислення завершити при $\left|\dfrac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_i}\right| \le \varepsilon$, $i = \overline{1,n}$, де ε – точність обчислень.

1. $f(X) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2$.
2. $f(X) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2$.
3. $f(X) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 17x_2^2 + 5x_2$.
4. $f(X) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2$.
5. $f(X) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 17x_1$.
6. $f(X) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - 3x_2$.
7. $f(X) = 10x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + 10x_2$.
8. $f(X) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2 + x_1 - x_2$.
9. $f(X) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 - x_2 + x_3$.
10. $f(X) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_1 - 3x_3$.
11. $f(X) = x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 + 5x_1 - 3x_2 + x_3$.
12. $f(X) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6x_1 - 7x_3$.
13. $f(X) = 7x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 - 3x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 + x_1 - x_2 + x_3$.
14. $f(X) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_1 + x_3$.
15. $f(X) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + 7x_1 + x_3$.
16. $f(X) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 - x_1 + x_2 - x_3$.
17. $f(X) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$.
18. $f(X) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3 - 3x_2 + x_3$.

19. $f(X)=5x_1^2+8x_2^2+x_3^2-x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3-3x_1+x_2+5x_3$.

20. $f(X)=4x_1^2+8x_2^2+2x_3^2-x_3x_2+2x_1x_3-x_2x_3-7x_2+6x_3$.

21. $f(X)=4x_1^2+6x_2^2+7x_3^2-3x_1x_3+x_2x_3-x_1x_2-x_1+x_2+x_3$.

22. $f(X)=6x_1^2+4x_2^2+4x_1x_2-17x_2$.

23. $f(X)=3x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+x_1x_2+2x_1x_3+x_2x_3+x_2+5x_3$.

24. $f(X)=5x_1^2+4x_2^2+3x_3^2-x_1x_2+2x_1x_3-x_2x_3+x_2+7x_3$.

25. $f(X)=4x_1^2+x_2^2+4x_3^2+x_1x_2-x_1x_3+2x_2x_3+x_1-x-3x_3$.

Завдання 2. Знайти мінімум функції (див. завдання 1) методом найшвидшого спуску. Для пошуку кроку використати один з відомих методів одновимірної оптимізації. Порівняти метод найшвидшого спуску та метод з поділом кроку щодо кількості ітерацій, які необхідні для досягнення вказаної точності.

Лабораторна робота №4
Метод Ньютона безумовної оптимізації функцій багатьох змінних

Завдання для самостійної роботи

Знайти мінімум функції методом Ньютона з поділом кроку. Обчислення завершувати при $\left|\dfrac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right| \le \varepsilon,\ \ i = \overline{1,n}$, де ε – точність обчислень.

1. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1^2 + x_2^2} - x_1 + 2x_2.$
2. $f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2.$
3. $f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2 \cdot x_2^2 + 2x_1 + x_2\,.$
4. $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2)\,.$
5. $f(x) = \sqrt{1 + 2x_1^2 + x_2^2} + e^{x_1^2 + 2x_2^2} - x_1 - x_2.$
6. $f(x) = x_1 + 5x_2 + e^{x_1^2 + x_2^2}\,.$
7. $f(x) = x_1^4 + x_2^4 + \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2} - 2x_1 + 3x_2.$
8. $f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2\sin(\frac{x_1 - x_2}{2}) + x_2.$
9. $f(x) = \ln\left(1 + 3x_1^2 + 5x_2^2 + \cos(x_1 - x_2)\right).$
10. $f(x) = x_1^2 + e^{x_1^2 + x_2^2} + 4x_1 + 3x_2.$
11. $f(x) = x_1 + 2x_2 + 4\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}\,.$
12. $f(x) = 2x_1 - 5x_2 + e^{x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2}\,.$
13. $f(x) = 2\sqrt{3 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2} - x_1 - x_3.$
14. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1^2 \cdot x_2^2 + x_3 + e^{x_2^2 + x_3^2} - x_2 + x_3.$
15. $f(x) = 4\sqrt{1 + x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2} + x_1 - 2x_2.$
16. $f(x) = 2x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 \cdot x_2^2 + x_3^4 + x_1^2 \cdot x_3^2 + x_1 + x_2.$

17. $f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + \cos(x_1 - x_2 + x_3)$.

18. $f(x) = e^{x_2^2 + x_3^2} + \ln(4x_1 + x_2^2 + 2x_3^2)$.

19. $f(x) = x_1 + x_2 - 5x_3 + e^{x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2}$.

20. $f(x) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 x_2^2 + \sqrt{5 + x_2^2 + 2x_3^2} + x_1 + x_3$.

21. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2\sin(\dfrac{x_1 + x_2 - x_3}{2})$.

22. $f(x) = 2\sqrt{x_1^2 + 3x_2^2 + 3} + x_2^2 x_3^2 - x_1 - x_2$.

23. $f(x) = x_2^2 + x_3^2 + e^{x_1^2 + x_3^2 + x_3^2} + x_1 - x_2$.

24. $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + 3\sqrt{x_1^2 + x_3^2 + 1} + e^{x_1^2 + x_2^2}$.

25. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + \sin(x_1 + x_2) + \sqrt{3 + x_2^2 + x_3^2}.$

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

ТЕМА 3. ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗАННЯ

3.1. Загальна задача лінійного програмування (ЗЛП). Стандартна та канонічна форма запису ЗЛП

Під лінійними програмуванням розуміють розділ теорії екстремальних задач, в якому вивчаються задачі максимізації (або мінімізації) лінійних функцій на множинах, які задаються системами лінійних рівностей та нерівностей. Викладки даного розділу базуються на підручнику [24].

Загальна задача лінійного програмування (ЗЛП) формулюється наступним чином:
відшукати екстремум функції

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max(\min) \qquad (3.1)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (3.2)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots, x_r \ge 0. \qquad (3.3)$$

Тут $k \le m, r \le n;\ c_j, a_{ij}, b_i,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$, - задані числа, причому не всі із чисел c_j та не всі із чисел a_{ij}, $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$, дорівнюють нулю.

ЗЛП записана в канонічній формі, якщо вона формулюється наступним чином:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min) \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1, n}. \tag{3.6}$$

Запишемо задачу (3.4)-(3.6) в матричній формі:

$$f = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \to \max(\min) \tag{3.7}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}, \tag{3.8}$$

$$\mathbf{X} \ge \mathbf{0}, \tag{3.9}$$

де $\mathbf{C} = (c_1, c_2, ..., c_n)$, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T.$$

ЗЛП записана в стандартній формі, якщо вона має вигляд:

$$f = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \to \max(\min) \tag{3.10}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \le \mathbf{B}, \tag{3.11}$$

$$\mathbf{X} \ge \mathbf{0}. \tag{3.12}$$

Теорема 3.1. Будь-яку ЗЛП можна записати як в канонічній, так і в стандартній формах.

Доведення. Для того, щоб довести теорему, потрібно показати, що, по-перше, від обмеження-нерівності можна перейти до обмеження рівності й навпаки, і, по-друге, від змінної, на яку не накладена умова невід'ємності, можна перейти до невід'ємної змінної (змінних).

1. Нехай маємо обмеження-рівність:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k.$$

Для неї є еквівалентною система обмежень-нерівностей:

$$\begin{cases} a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \ge b_k, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ -a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \ldots - a_{kn}x_n \le b_k. \end{cases}$$

2. Нехай маємо обмеження-нерівність:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k .$$

З даної нерівності отримуємо обмеження-рівність за допомогою введення додаткової невід'ємної змінної $x_{n+1} \ge 0$:

$$\begin{cases} a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ x_{n+1} \ge 0. \end{cases}$$

3. Якщо на змінну x_r не накладається умов знаковизначеності, то вона заміняється через різницю двох невід'ємних змінних:

$$x_r = x_r' - x_r'',$$
$$x_r' \ge 0, x_r'' \ge 0.$$

Теорема 3.1 доведена.

Зауважимо, що при переході від стандартної до канонічної форм ЗЛП (і навпаки) кількість обмежень та кількість змінних можуть змінюватись. Сформулюємо кілька важливих означень.

Лінійна функція (3.1) називається цільовою функцією, або функцією мети, ЗЛП.

Вектор $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається допустимим вектором або планом, якщо він задовольняє всім обмеженням ЗЛП.

Оптимальним називається такий план ЗЛП, при якому цільова функція досягає свого екстремального (найбільшого або найменшого) значення.

3.2. Множина допустимих розв'язків та її опуклість

Множина всіх планів ЗЛП називається допустимою областю або множиною допустимих розв'язків.

Множину допустимих розв'язків ЗЛП позначимо через $\mathbf{M}$.

Нагадаємо, що множина G називається опуклою, якщо $\forall \mathbf{Y} \in G$, $\mathbf{Z} \in G$, $\forall \alpha \ge 0, \beta \ge 0, \alpha + \beta = 1$, точка $(\alpha \mathbf{Y} + \beta \mathbf{Z})$ також належить множині G.

Доведемо одну з фундаментальних властивостей множини $\mathbf{M}$.

Теорема 3.2. Множина $\mathbf{M}$ допустимих розв'язків ЗЛП є опуклою.

Доведення. Беручи до уваги теорему 3.1, доведення проведемо, наприклад, для задачі (3.7)-(3.9). Нехай $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ – довільні допустимі плани задачі (3.7)-(3.9). Тоді

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},\ \mathbf{X} \ge \mathbf{0},$$
$$\mathbf{AY} = \mathbf{B},\ \mathbf{Y} \ge \mathbf{0}.$$

Для довільних двох чисел $\alpha \ge 0, \beta \ge 0$ таких, що $\alpha + \beta = 1$, маємо

$$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y}) = \alpha \mathbf{AX} + \beta \mathbf{AY} = \alpha \mathbf{B} + \beta \mathbf{B} =$$
$$= (\alpha + \beta)\mathbf{B} = \mathbf{B}.$$

Крім того, з умов $\mathbf{X} \ge 0, \mathbf{Y} \ge 0, \alpha \ge 0, \beta \ge 0$ випливає:

$$\alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y} \ge \mathbf{0}.$$

Отже, вектор $(\alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y})$ задовольняє обмеженням задачі (3.7)-(3.9), тобто він є допустимим. Тому $(\alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y}) \in \mathbf{M}$ і множина $\mathbf{M}$ - опукла згідно означення.

Теорема 3.2 доведена.

Сформулюємо означення, яке нам буде потрібним в подальших випадках.

Точка $\mathbf{Z}$ називається крайньою точкою опуклої множини G, якщо не існує векторів $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in G, \mathbf{X} \ne \mathbf{Y}$, таких що $\mathbf{Z} = \alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y}$, де $\alpha, \beta -$ деякі числа, такі що $\alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta > 0.$

Іншими словами, з геометричної точки зору, точка $\mathbf{Z}$ називається крайньою точкою опуклої множини G, якщо вона не належить внутрішності жодного з відрізків, який повністю належить G. Наприклад, в опуклій множині G, зображеній на рис.3.1, крайніми будуть точки дуги CB (включаючи і самі точки C, B) та точка A.

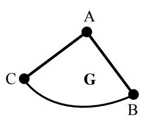

Рис. 3.1. Опукла множина G.

3.3. Опорні плани та вершини множини допустимих розв’язків

Розглянемо канонічну ЗЛП (3.4)-(3.6). Додатково будемо вимагати виконання умови $b_i \geq 0, i = \overline{1,m}$. Виконання даної умови завжди можна досягти, домножуючи на (-1) ті обмеження-рівності, в яких число справа є від’ємним.

Вводячи в розгляд вектори:

$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, ..., c_n), \mathbf{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T, \mathbf{B} = (b_1, b_2, ..., b_m)^T,$$

$$\mathbf{A_j} = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})^T, j = \overline{1,n},$$

ЗЛП (3.4)-(3.6) запишемо у векторній формі

$$f = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \to \max(\min) \qquad (3.13)$$

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + ... + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{B}, \qquad (3.14)$$

$$\mathbf{X} \geq 0. \qquad (3.15)$$

Тепер нам доведеться згадати деякі відомості з лінійної алгебри. Зокрема, що стосується систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР). Система умов (3.5) (або (3.8), або (3.14)) є СЛАР, яка містить m рівнянь та n невідомих. Припустимо, що ранг матриці $\mathbf{A}$ дорівнює m. По-перше, він не може бути більшим за m. По-друге, що буде, якщо ранг $\mathbf{A}$ буде меншим за m? Наприклад, нехай ранг матриці $\mathbf{A}$ дорівнює $(n-1)$. Тоді серед m рівнянь даної СЛАР буде одне, яке лінійно виражається через інші $(n-1)$ рівняння (іншими словами, серед векторів $\mathbf{A}_i, i = \overline{1,n}$ буде лише $(n-1)$ лінійно незалежних). Отже, дане рівняння-обмеження можна без шкоди для ЗЛП просто відкинути - і обмежень залишиться $(n-1)$, тобто рівно стільки, який ранг матриці $\mathbf{A}$. Отже, в будь-якій канонічній ЗЛП ранг матриці $\mathbf{A}$ можна зробити рівним кількості обмежень. Вважаємо, що це вже зроблено в будь-якій канонічній ЗЛП, які розглядаються в даному посібнику. Отже, серед векторів $\mathbf{A}_j, j = \overline{1,n}$ ЗЛП (3.13)-(3.15) є рівно m лінійно незалежних.

Система із m лінійно незалежних векторів утворює базис в m вимірному векторному просторі. Нехай ранги $r(\mathbf{A})$ та $r(\mathbf{A_B})$ матриці

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

та розширеної матриці

$$\mathbf{A_B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

ЗЛП (3.13)-(3.15) дорівнюють m.

Тобто, $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A_B})=m$. Якщо $r(\mathbf{A})\neq r(\mathbf{A_B})$, то $\mathbf{M}=\varnothing$ і ЗЛП (3.13)-(3.15) не має розв‘язків. Якщо $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A_B})=m_1<m$, то система обмежень (3.14) містить $(m-m_1)$ „зайвих ” рівнянь, які є лінійними комбінаціями інших рівнянь і які можна, без зайвої шкоди, виключити із даної системи обмежень. Тобто, в даному випадку завжди можна кількість рівнянь в системі (3.14) зробити рівною рангу матриць $\mathbf{A}$ та $\mathbf{A_B}$.

Як раніше вказувалось, планом ЗЛП називається вектор $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, компоненти якого задовольняють всім умовам даної ЗЛП. Сформулюємо кілька важливих означень.

План $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ називається опорним, якщо вектори $\mathbf{A_j}$, які відповідають його додатним компонентам $x_j>0$, утворюють лінійно незалежну систему.

Опорний план називається невиродженим, якщо він містить рівно m додатних компонент. Якщо опорний план містить менше за m додатних компонент, то він називається вироджений.

Поставимо питання для допитливих: чому в плані $\mathbf{X}$ не може бути більше як m додатних компонент? Якщо Ви не відповіли після кількахвилинних роздумів – то прочитайте даний параграф спочатку.

А тепер згадаємо про крайні точки опуклої множини.

Теорема 3.3. Для того, щоб точка $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ опуклої множини $\mathbf{M}$ планів ЗЛП була крайньою, необхідною і достатньою, щоб вектори $\mathbf{A_j}$, які відповідають додатним компонентам x_j, утворювали лінійно незалежну систему.

Доведення. ***Необхідність.*** Нехай $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ - крайня точка множини $\mathbf{M}$ допустимих розв‘язків ЗЛП (3.13)-(3.15). Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що вектор $\mathbf{X}$ має вигляд: $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$, де $x_j>0,\ j=\overline{1,k}, k\le m$. Вказаний вигляд вектора $\mathbf{X}$ досягається простим переприсвоєнням змінних $x_j>0,\ j=\overline{1,n}$. Покажемо, що система векторів $\mathbf{A_1},\mathbf{A_2},\ldots,\mathbf{A_k}$ лінійно незалежна. Від супротивного припустимо, що система векторів $\mathbf{A_1},\mathbf{A_2},\ldots,\mathbf{A_k}$ лінійно залежна. Тоді існують такі числа $d_1,d_2,..d_k$, серед яких є хоча б одне відмінне від нуля, що має місце рівність:

$$d_1\mathbf{A}_1+d_2\mathbf{A}_2\ldots+d_k\mathbf{A}_k=0. \qquad (3.16)$$

Точка $\mathbf{X}\in\mathbf{M}$. Тому

$$x_1\mathbf{A}_1+x_2\mathbf{A}_2+\ldots+x_k\mathbf{A}_k=\mathbf{B}. \qquad (3.17)$$

Помножимо (3.14) на довільне додатне число $d>0$ і результат додамо та віднімемо від (3.17). Маємо:

$$(x_1+dd_1)\mathbf{A}_1+(x_2+dd_2)\mathbf{A}_2+\ldots+(x_k+dd_k)\mathbf{A}_k=\mathbf{B};$$

$$(x_1-dd_1)\mathbf{A}_1+(x_2-dd_2)\mathbf{A}_2+\ldots+(x_k-dd_k)\mathbf{A}_k=\mathbf{B}.$$

Отже, вектори:

$$\mathbf{Y}=(x_1+dd_1;\ldots;x_k+dd_k;0;\ldots;0),\ \mathbf{Z}=(x_1-dd_1;\ldots;x_k-dd_k;0;\ldots;0)$$

задовольняють умову (3.14). Оскільки $x_j>0(j=\overline{1,k})$, то число $d>0$ можна вибрати настільки малим, щоб перші k компонент векторів $\mathbf{Y}$ та $\mathbf{Z}$ мали невід’ємні значення. Нехай при $d=\overline{d}$ маємо $\mathbf{Y}\ge 0,\ \mathbf{X}\ge 0.$ Отже, при $d=\overline{d}$ вектори $\mathbf{Y},\mathbf{Z}$ задовольняють умову (3.15), а тому є планами ЗЛП (3.13)-(3.15). Тобто, точки $\mathbf{Y},\mathbf{Z}\in\mathbf{M}$. Вектор $\mathbf{X}$ є опуклою комбінацією векторів $\mathbf{Y},\mathbf{Z}$

$$\mathbf{X}=\frac{1}{2}\mathbf{Y}+\frac{1}{2}\mathbf{Z},$$

що не можливо, адже за умовою теореми $\mathbf{X}$ – крайня точка множини $\mathbf{M}$. Отримана суперечність і доводить, що система векторів $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ є лінійно незалежною.

Достатність. Нехай $\mathbf{X} \in \mathbf{M}$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $\mathbf{X}$ має вигляд $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_l, 0, \ldots, 0)$, де $x_j > 0,\ j = \overline{1,l}$. Відомо, що вектори $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_l$ утворюють лінійно незалежну систему. Покажемо, що точка $\mathbf{X}$ – крайня точка множини $\mathbf{M}$.

Припустимо, що $\mathbf{X}$ не є крайньою точкою множини $\mathbf{M}$. Тоді $\mathbf{X}$ можна подати у вигляді опуклої комбінації двох різних точок $\mathbf{Y}$ та $\mathbf{Z}$ із множини $\mathbf{M}$. Тобто,

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{Y} + (1-\alpha)\mathbf{Z}, 0 < \alpha < 1.$$

Оскільки компоненти векторів $\mathbf{Y}$ і $\mathbf{Z}$ невід‘ємні, $0 < \alpha < 1$, останні $(n-l)$ компонент вектора $\mathbf{X}$ - нулі, то останні $(n-l)$ компонент векторів $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ також повинні дорівнювати нулю. Тобто, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ мають вигляд:

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_l, 0, \ldots, 0),$$

$$\mathbf{Z} = (z_1, z_2, \ldots, z_l, 0, \ldots, 0).$$

Точки $\mathbf{Y}$ і $\mathbf{Z}$ належать множині $\mathbf{M}$. Тому

$$y_1 \mathbf{A}_1 + y_2 \mathbf{A}_2 + \ldots + y_l \mathbf{A}_l = \mathbf{B},$$

$$z_1 \mathbf{A}_1 + z_2 \mathbf{A}_2 + \ldots + z_l \mathbf{A}_l = \mathbf{B}.$$

Віднявши від першої рівності другу , одержимо

$$(y_1 - z_1)\mathbf{A}_1 + (y_2 - z_2)\mathbf{A}_2 + \ldots + (y_l - z_l)\mathbf{A}_l = 0.$$

За умовою вектори $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_l$ утворюють лінійно незалежну систему. Тому остання рівність можлива лише при умові

$$y_j - z_j = 0, \ \ j = \overline{1,l},$$

що еквівалентне $y_j = z_j, \ \ j = \overline{1,l}$. Тобто, $\mathbf{X}$ не можна зобразити у вигляді опуклої комбінації двох різних точок із множини $\mathbf{M}$. Це означає, що $\mathbf{X}$ є крайньою точкою множини $\mathbf{M}$.

Теорема 3.3. доведена.

Із даної теореми випливає, що кожний опорний план ЗЛП є крайньою точкою множини $\mathbf{M}$. Тоді справедливі наступні наслідки.

Наслідок 3.1. Кожній крайній точці множини планів $\mathbf{M}$ ЗЛП (3.13)-(3.15) відповідає рівно m лінійно незалежних векторів із системи $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n$.

Наслідок 3.2. Вектор $\mathbf{X}$ є опорним планом ЗЛП (3.1)-(3.3) тоді і лише тоді, коли $\mathbf{X}$ – крайня точка множини $\mathbf{M}$ допустимих розв'язків даної ЗЛП.

Увага до крайніх точок множини $\mathbf{M}$ пояснюється наступною теоремою.

Теорема 3.4. Цільова функція ЗЛП досягає екстремального значення у крайній точці множини допустимих розв'язків $\mathbf{M}$. Якщо цільова функція набуває екстремального значення більш, ніж в одній крайній точці, то вона набуває цього ж значення в будь-якій точці, яка є опуклою комбінацією цих крайніх точок.

Доведення. Не зменшуючи загальності, теорему доведемо для ЗЛП (3.13)-(3.15). Крім того, розглянемо задачу лише на мінімум. Це обґрунтовується тим, що задачу на максимум для цільової функції $f(\mathbf{X})$ можна замінити задачею на мінімум для цільової функції $(-f(\mathbf{X}))$.

Множина $\mathbf{M}$ для будь-якої ЗЛП є многогранником (обмеженим або необмеженим – залежно від властивостей самої задачі). Це обґрунтовується тим, що обмеження ЗЛП є лінійними, а саме лінійними рівняннями задаються грані многогранника. Крім того, зважаючи на теорему 3.2, многогранник $\mathbf{M}$ є опуклим.

Крайніми точками многогранника є його вершини і їх скінченна кількість $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$. Нехай $\mathbf{X}_0$ – оптимальний план ЗЛП (3.13)-(3.15). Тоді

$$f(\mathbf{X}_0) \le f(\mathbf{X}), \forall \mathbf{X} \in \mathbf{M}. \qquad (3.18)$$

Припустимо, що $\mathbf{X}_0$ не є крайньою точкою, оскільки в протилежному випадку перша частина теореми стає тривіальною. Тоді точку $\mathbf{X}_0$ можна подати у вигляді опуклої комбінації крайніх точок:

$$\mathbf{X}_0 = d_1\mathbf{X}_1 + d_2\mathbf{X}_2 + \ldots + d_k\mathbf{X}_k,$$

де $d_i \ge 0, i = \overline{1,k},\ \sum_{i=1}^{k} d_i = 1$.

Оскільки $f(\mathbf{X})$ є лінійною функцією, то

$$f(\mathbf{X}_0)=\sum_{i=1}^{k}d_i f(\mathbf{X}_i).$$

Щоб показати це достатньо підставити вираз для $\mathbf{X}_0$ в цільову функцію $f(\mathbf{X})$.

Нехай

$$\min_{1\le i\le k} f(\mathbf{X}_i)=f(\mathbf{X}_l),\ 1\le l\le k.$$

Тоді

$$f(\mathbf{X}_0)=\sum_{i=1}^{k}d_i f(\mathbf{X}_i)\ge\sum_{i=1}^{k}d_i f(\mathbf{X}_l)=f(\mathbf{X}_l)\sum_{i=1}^{k}d_i=f(\mathbf{X}_l).$$

Тобто,

$$f(\mathbf{X}_0)\ge f(\mathbf{X}_l). \tag{3.19}$$

Нерівність (3.18) виконується для всіх $\mathbf{X}\in\mathbf{M}$. При $\mathbf{X}=\mathbf{X}_l$ вона набуває вигляду:

$$f(\mathbf{X}_0)\le f(\mathbf{X}_l). \tag{3.20}$$

З (3.19), (3.20) випливає, що $L(\mathbf{X}_l)=L(\mathbf{X}_0)$. Тобто, існує така крайня точка $\mathbf{X}_l$, в якій цільова функція досягає свого мінімального значення. Перша частина теореми доведена.

Тепер припустимо, що $f(\mathbf{X})$ набуває мінімального значення не в одній крайній точці, а в кількох. Тобто

$$f(\mathbf{X}_1)=f(\mathbf{X}_2)=\ldots=f(\mathbf{X}_s)=m.$$

Нехай $\mathbf{X}=\sum_{i=1}^{k}d_i\mathbf{X}_i$, де $d_i\ge 0, i=\overline{1,k},\ \sum_{i=1}^{k}d_i=1$. Оскільки $\mathbf{M}$ – опукла, то $\mathbf{X}\in\mathbf{M}$. Тоді

$$f(\mathbf{X})=f\left(\sum_{i=1}^{k}d_i\mathbf{X}_i\right)=\sum_{i=1}^{k}d_i f(\mathbf{X}_i)=\sum_{i=1}^{k}d_i m=m\sum_{i=1}^{k}d_i=m\cdot 1=m.$$

Отже в точці $\mathbf{X}$, яка є лінійною комбінацією крайніх точок $\mathbf{X}_i, i=\overline{1,k}$, цільова функція також набуває мінімального значення.

Теорема 3.4 доведена.

3.4. Перебір вершин допустимої області методом Жордана-Гаусса

Згідно теореми 3.4 достатньо перебрати всі вершини многогранника $\mathbf{M}$ допустимих розв'язків ЗЛП, знайти в них значення цільової функції і вибрати серед них найбільше (найменше) значення – це і буде розв'язком ЗЛП. Виникає питання – як перебрати вершини множини $\mathbf{M}$ у випадку довільної розмірності задачі? Відповідь на це питання дає наслідок 3.1. Потрібно із системи векторів $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ вибрати всі підсистеми із m лінійно незалежних векторів, знайти плани, які відповідають даним підсистемам і вибрати із них оптимальний.

Виділення базису із m векторів із системи векторів $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ здійснюється методом Жордана-Гауса. Виділення базису із m векторів означає зведення даних векторів до одиничних. При цьому коефіцієнти ведучого рядка діляться на ведучий елемент, а інші коефіцієнти матриці обчислюються за «правилом прямокутника»

$$a'_{lk} = a_{lk} - \frac{a_{li} \cdot a_{ik}}{a_{ij}},$$

де a_{ij} – ведучий елемент; a'_{lk}, a_{lk} – нове та попереднє значення коефіцієнта, який перераховується; i – номер вектора, який виводиться з базису; j – номер вектора, який вводиться в базис.

<u>Приклад 3.1.</u>

Переберемо кілька вершин області допустимих розв'язків наступної ЗЛП:

$$f = 3x_1 + 2x_2 \to \max, \tag{3.21}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ x_2 + x_5 = 3, \end{cases} \tag{3.22}$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,5}. \tag{3.23}$$

В системі обмежень (3.22) вже виділено базис $(\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5)$. В даному випадку $x_1 = 0, x_2 = 0$ (оскільки вектори $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ не входять в базис), $x_3 = 7$, $x_4 = 8$, $x_5 = 3$. Оскільки отримані значення змінних задовольняють умову невід'ємності (3.23), то точка $\mathbf{X}_1 = (0; 0; 7; 8; 3)$ є вершиною допустимої області $\mathbf{M}$ і $f(\mathbf{X}_1) = 0$. В наступних таблицях наведено ще кілька варіантів базисів.

Таблиця 3.1

Таблиця варіантів базису

№	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{B}$
	1	2	1	0	0	7
1	2	1	0	1	0	8
	0	$\boxed{1}$	0	0	1	3
	$\boxed{1}$	0	1	0	-2	1
2	2	0	0	1	-1	5
	0	1	0	0	1	3
	1	0	1	0	-2	1
3	0	0	-2	1	$\boxed{3}$	3
	0	1	0	0	1	3
	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	3
4	0	0	$-2/3$	$1/3$	1	1
	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	2

Таблиця 2 отримана з таблиці 1 введенням в базис замість вектора $\mathbf{A}_5$ вектора $\mathbf{A}_2$. Тобто, ведучим є елемент $a_{32}=1$ (нумерація елементів здійснюється відповідно до рядків та стовпців таблиці). Тому для отримання таблиці 2 всі елементи третього рядка таблиці 1 діляться на ведучий елемент, а інші обчислюються за правилом прямокутника. Наприклад, $a_{15}^{(2)} = a_{15}^{(1)} - \frac{a_{35}^{(1)} \cdot a_{12}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} = 0 - \frac{1 \cdot 2}{1} = -2$.

Для таблиць 2, 3 та 4 відповідають базиси $(\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_2)$, $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_2)$, $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_2)$. Для цих базисів відповідають опорні плани (отримуються із останнього стовпця таблиць) $\mathbf{X}_2 = (0;3;1;5;0)$, $\mathbf{X}_3 = (1;3;0;3;0)$, $\mathbf{X}_4 = (3;2;0;0;1)$ і значення функції $f(\mathbf{X}_2) = 6$, $f(\mathbf{X}_3) = 9$, $f(\mathbf{X}_4) = 13$.

Хоча описана процедура пошуку розв'язків у випадку обмеженості многогранника розв'язків $\mathbf{M}$ є скінченною, однак для ЗЛП, виникаючих із практичних потреб, вона є прийнятною. Адже, наприклад, при $n = 50$, $m = 25$ кількість можливих базисів вимірюється числом порядку 10^{14}. Отже, потрібний інший метод розв'язання ЗЛП, який буде розглянутий в наступній темі.

3.5. Геометрична інтерпретація та графічний метод розв'язання ЗЛП

Гіперплощиною в просторі $\mathbf{R}^n$ називається множина точок $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, координати яких задовольняють рівняння:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = c,$$

де $p_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad c$ – деякі відомі числа.

Область допустимих розв'язків задачі (3.10)-(3.12) утворюється перетином m множин. Кожна з них визначається нерівністю:

$$a_{i1}x_1 + a_{i1}x_2 \ldots + a_{in}x_n \le b_i \text{ , } i = \overline{1,m},$$

і являє собою півпростір, який лежить по одну сторону від відповідної гіперплощини

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \text{ , } i = \overline{1,m}.$$

Перетин вказаних півпросторів є многогранником $\mathbf{M}$, який і буде областю допустимих розв'язків (якщо такий перетин не є порожньою множиною).

Лінії рівняння цільової функції

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = const \tag{3.18}$$

утворюють сім'ю паралельних гіперплощин, а $gradf = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ вказує напрямок найшвидшого зростання цільової функції і є вектором нормалі до даних гіперплощин.

Перший спосіб графічного розв'язання ЗЛП полягає в наступному. Виберемо із сім'ї (3.24) довільну гіперплощину, яка перетинає область допустимих розв'язків $\mathbf{M}$. Будемо переміщати дану гіперплощину в напрямку $gradf$ (якщо ЗЛП на максимум) або в напрямку $(-gradf)$ (якщо ЗЛП на мінімум). Переміщення продовжуємо, поки многогранник $\mathbf{M}$ не виявиться в одному з півпросторів, породжених вибраною гіперплощиною, але хоча б одна точка з області допустимих розв'язків $\mathbf{M}$ все ще буде їй належати. Отримана гранична гіперплощина називається опорною для многогранника, а його точки, які належать даній гіперплощині, будуть розв'язками задачі.

Другий спосіб – використати теорему 3.4. Згідно даної теореми достатньо перебрати всі вершини многогранника допустимих розв'язків $\mathbf{M}$, знайти в них значення цільової функції і вибрати серед них найбільше (найменше) – це і буде розв'язком ЗЛП.

Якщо ЗЛП містить лише дві змінні, то таку задачу можна розв'язати графічно. У випадку трьох змінних графічний метод практично вже не застосовується. Також графічний метод можна застосувати до ЗЛП в канонічній формі (3.4)-(3.6), якщо $n-m=2$.

Приклади застосування графічного методу наведені в лабораторній роботі №5.

Контрольні запитання

1. Загальна задача лінійного програмування полягає в наступному…
2. Канонічна форма запису ЗЛП має вигляд…
3. Яку точку опуклої множини називають крайньою?
4. Що називають опуклою комбінацією точок $\mathbf{X}_i, i=\overline{1,l}$?
5. Який план ЗЛП називається невиродженим?
6. Скільки лінійно незалежних векторів із обмежень ЗЛП відповідає кожній крайній точці області допустимих розв'язків?
7. Чи може екстремальне значення цільова функція ЗЛП досягати не в крайній точці?
8. В якому випадку доцільно застосовувати графічний метод для розв'язання ЗЛП?
9. Яким методом перераховуються елементи векторів в методі Жордана-Гауса?

Лабораторна робота №5
Графічний метод розв’язання ЗЛП

Приклад Л5.1. Розв'язати графічно ЗЛП

$$f = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge \mathbf{0}.$$

Розв'язання.

1. Спочатку будуємо область допустимих розв’язків ЗЛП. Для цього будуємо граничні прямі, рівняння яких отримують в результаті заміни нерівностей на рівності (пам’ятаючи, що пряма визначається двома своїми точками)

(1)	$x_1 + 2x_2 = 7,$	(2)	$2x_1 + x_2 = 8,$	(3)	$x_2 = 3,$
	$x_1 = 1, x_2 = 3,$		$x_1 = 4, x_2 = 0,$	(4)	$x_1 = 0,$
	$x_1 = 7, x_2 = 0;$		$x_1 = 0, x_2 = 8;$	(5)	$x_2 = 0.$

   За допомогою обмежень визначаємо многокутник допустимих розв'язків (рис.Л5.1). Для цього використовуємо властивість, що пряма $ax + by = c$ розбиває площину на дві півплощини, в одній з яких $ax + by < c$, а в іншій $ax + by > c$. Щоб з’ясувати, яка саме нерівність виконується в даній півплощині, потрібно підставити довільну точку з даної півплощини в рівняння прямої і визначити знак нерівності. Многокутник допустимих розв’язків будується як спільна частина всіх півплощин, визначених обмеженнями.

2. Будуємо одну з ліній рівня цільової функції, найпростіше **(6)** $3x_1 + 2x_2 = \mathbf{0}$. Будуємо вектор $grad\ f = (3;2)$.

3. Переміщуючи лінію рівня (6) в напрямку вектора $grad\ f$, знаходимо останню точку, в якій вона покидає область допустимих розв’язків. Це і буде точка максимуму цільової функції (якщо потрібно знайти точку мінімуму цільової функції, то лінію рівня переміщують в напрямку $-grad\ f$). Як видно з рис.Л5.1. - це точка С. Знаходимо координати точки С, як точки перетину прямих (1) та (2):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7, \\ 2x_1 + x_2 = 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Отже,

$$f_{\max} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13.$$

$$\mathbf{X}_{\max} = (3;2).$$

Зауважимо, що згідно теореми 3.4 розв'язок задачі можна знайти простим перебором вершин многокутника допустимих розвязків OABCD. Далі потрібно вибрати серед значень цільової функції максимальне.

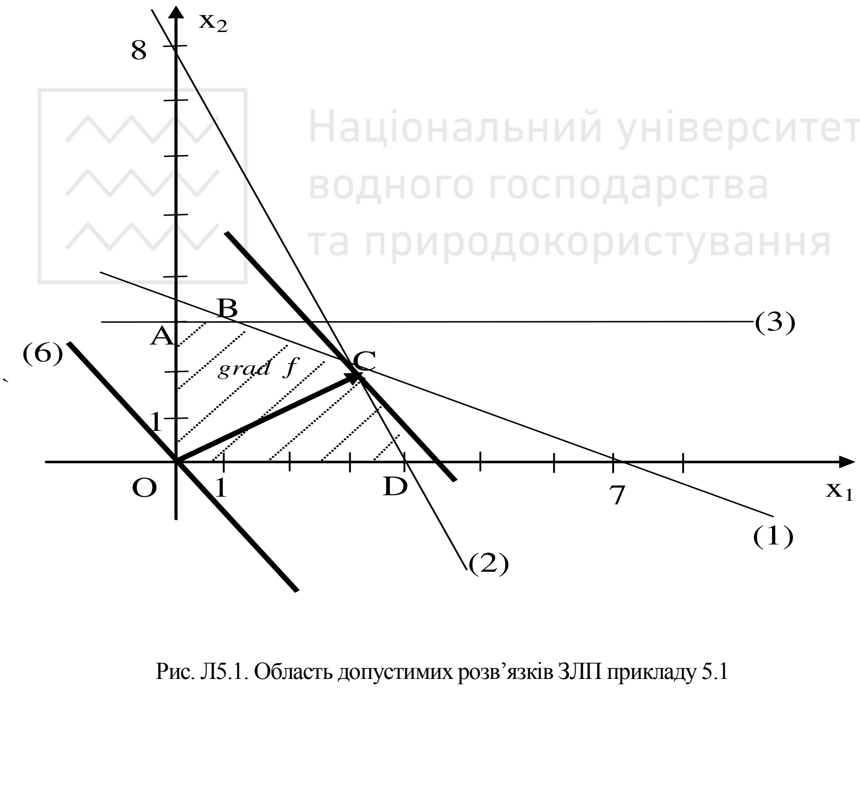

Рис. Л5.1. Область допустимих розв'язків ЗЛП прикладу 5.1

Приклад Л5.2. Розв'язати графічно ЗЛП

$$f = x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 2, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ x_3 + x_6 = 3, \\ x_4 + x_5 + x_6 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Розв'язання.

Легко переконатись, що $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_B}) = 4$. В даному випадку $n - m = 2$ і ЗЛП можна розв'язати графічно. Будемо вважати $x_j,\ j = \overline{1,4}$ - базисними змінними (кількість базисних змінних дорівнює рангу матриці $\mathbf{A}$), а змінні x_5, x_6 - вільними. Виразимо базисні змінні через вільні. Для цього зведемо підматрицю, яка складається з перших чотирьох стовпців матриці $\mathbf{A}$, до одиничного вигляду. Маємо

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Отже, система обмежень ЗЛП набуває вигляду

$$\begin{cases} x_1 = -4 + x_5 + x_6, \\ x_2 = 5 - x_5, \\ x_3 = 3 - x_6, \\ x_4 = 6 - x_5 - x_6. \end{cases} \tag{Л5.1}$$

Підставляючи отримані вирази базисних змінних в цільову функцію, отримаємо:

$$\begin{gathered} f = -4 + x_5 + x_6 + 9(5 - x_5) + 5(3 - x_6) + \\ + 3(6 - x_5 - x_6) + 4x_5 + 14x_6 = 74 - 7x_5 + 7x_6. \end{gathered} \tag{Л5.2}$$

З урахуванням умов невід'ємності $x_j \geq 0, j = \overline{1,6}$ та рівностей (Л5.1), (Л5.2), отримуємо нову ЗЛП, еквівалентну попередній:

$$f = 74 - 7x_5 + 7x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_5 + x_6 \geq 4, \\ x_5 \leq 5, \\ x_6 \leq 3, \\ x_5 + x_6 \leq 6, \end{cases}$$

$$x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0.$$

Розв'язуючи її графічним методом (рис. Л5.2), отримуємо:

$$f_{\min} = 39,\ x_5 = 5,\ x_6 = 0.$$

Використовуючи (Л5.1), знаходимо $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3,\ x_4 = 1$. Отже, розв'язок початкової ЗЛП наступний:

$$f_{\min} = 39, \quad \mathbf{X}_{\min} = (1; 0; 3; 1; 5; 0).$$

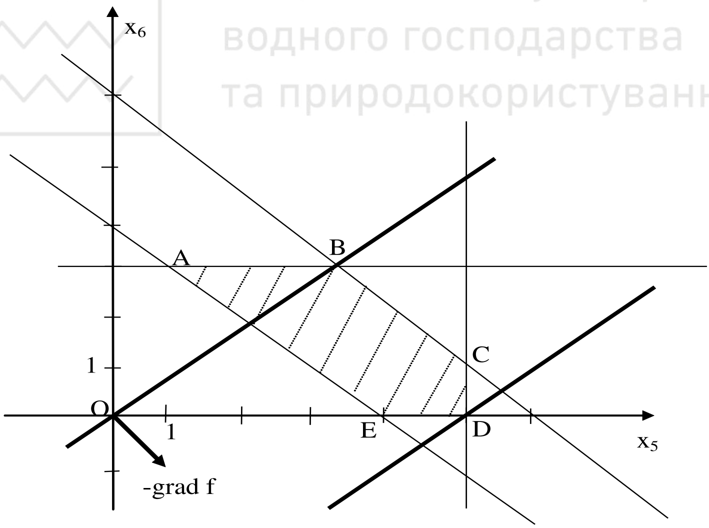

Рис. Л5.2. Область допустимих розв'язків прикладу 5.2

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом.

1. $f = 2x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \ge 12; \\ x_1 - 4x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2. $f = -2x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

3. $f = x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

4. $f = x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

5. $f = -2x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

6. $f = x_1 - 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 20, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

7. $f = -x_1 + 4x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \le 5, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 8, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

8. $f = -3x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

9. $f = -2x_1 - x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

10. $f = -x_1 - x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 2x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \le 2, \\ x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

11. $f = 7x_1 - 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

12. $f = 3x_1 + 3x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

13. $f = 2x_1 - x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -3, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 42, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

14. $f = 5x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \ge 7, \\ -2x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 7x_1 + x_2 \ge 7, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \le 7, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

15. $f = x_1 - x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 8, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 80, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

16. $f = x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -5x_1 + x_2 \le 0, \\ -x_1 + 5x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \le 6, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

17. $f = 5x_1 + 5x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 + 7x_2 \ge 21, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 0 \le x_1 \le 1, \\ 0 \le x_2 \le 1. \end{cases}$$

18. $f = -3x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 3x_1 + x_2 \ge 15, \\ x_1 \le 8, \\ x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

19. $f = x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 3x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + 5x_2 \ge 4, \\ 0 \le x_1 \le 3, \\ 0 \le x_2 \le 3. \end{cases}$$

20. $f = -2x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

21. $f = 3x_1 + 3x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 9, \\ -4x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

22. $f = -x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \\ 7x_1 + 6x_2 \le 42, \\ -x_1 + x_2 \ge -1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

23. $f = -x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 10, \\ 5x_1 + 8x_2 \le 120, \\ -2x_1 + x_2 \le 4, \\ 4x_1 + x_2 \ge 6, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

24. $f = x_1 - 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 - x_2 \le 10, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

25. $f = x_1 - 3x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_1 \le 12, \\ x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

ТЕМА 4. СИМПЛЕКС-МЕТОД (МЕТОД ПОСЛІДОВНОГО ПОКРАЩЕННЯ ПЛАНУ)

4.1. Теоретичні основи симплекс-методу

Розглянемо канонічну ЗЛП, записану у векторній формі

$$f = \mathbf{CX} \to \max(\min) \tag{4.1}$$

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \ldots + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{B}, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{X} \geq 0. \tag{4.3}$$

Симплекс метод полягає в послідовному переході від одного опорного плану до іншого так, що значення цільової функції (4.1) збільшується (зменшується). Оскільки число опорних планів скінчене, то, як правило, за скінчене число кроків метод дає змогу знайти оптимальний план (якщо він існує) або впевнитись, що цільова функція на множині планів необмежена зверху (знизу). ***Для роботи методу повинен бути відомим початковий опорний план та базис, який йому відповідає.***

Нехай $\mathbf{X}$ - деякий невироджений опорний план ЗЛП (4.1)-(4.3). Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0), \text{де } x_i > 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Тоді

$$f_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m, \tag{4.4}$$

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_1\mathbf{A}_1 + \ldots + x_m\mathbf{A}_m = \mathbf{B}. \tag{4.5}$$

Опорному плану $\mathbf{X}$ відповідає система лінійно незалежних векторів $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$, яка утворює базис в m-вимірному просторі. Нехай розклад векторів $\mathbf{A}_j\ (j = \overline{1,n})$ за векторами базису $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ має вигляд

$$\mathbf{A}_j = x_{1j}\mathbf{A}_1 + x_{2j}\mathbf{A}_2 + \ldots + x_{mj}\mathbf{A}_m,\ j = \overline{1,n}. \tag{4.6}$$

Знайдемо величини

$$f_j = c_1x_{1j} + c_2x_{2j} + \ldots + c_mx_{mj},\ j = \overline{1,n} \tag{4.7}$$

і обчислимо різниці

$$\Delta_j = f_j - c_j,\ j = \overline{1,n}.$$

Теорема 4.1. Якщо існує такий індекс j, $j = 1,2,\ldots,n$, для якого $\Delta_j < 0\ (\Delta_j > 0)$ і серед коефіцієнтів $x_{ij}, i = \overline{1,m}$, розкладу вектора $\mathbf{A}_j$ через вектори базису є хоча б один додатний, то від опорного плану

$\mathbf{X}$ можна перейти до нового опорного плану $\mathbf{X}^{'}$ такого, що $f(\mathbf{X}^{'}) > f(\mathbf{X})$ $(f(\mathbf{X}^{'}) < f(\mathbf{X}))$.

Доведення. Доведемо дану теорему, наприклад, для задачі на мінімум. Нехай для $j = k$ виконуються умови:

$$\Delta_k > 0$$

і серед коефіцієнтів $x_{ik}, i = \overline{1,m}$, розкладу вектора $\mathbf{A}_k$ через вектори базису:

$$\mathbf{A}_k = x_{1k}\mathbf{A}_1 + x_{2k}\mathbf{A}_2 + \ldots + x_{mk}\mathbf{A}_m, \tag{4.8}$$

є хоча б один додатний. Нехай

$$f_k = c_1 x_{1k} + c_2 x_{2k} + \ldots + c_m x_{mk} \,. \tag{4.9}$$

Помножимо рівності (4.8), (4.9) на число θ і віднімемо відповідно від рівностей (4.4), (4.5). Маємо

$$(x_1 - \theta x_{1k})\mathbf{A}_1 + (x_2 - \theta x_{2k})\mathbf{A}_2 + \ldots + (x_m - \theta x_{mk})\mathbf{A}_m + \theta\mathbf{A}_k = \mathbf{B}, \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}(x_1 - \theta x_{1k})c_1 + (x_2 - \theta x_{2k})c_2 + \ldots + (x_m - \theta x_{mk})c_m + \theta c_k = \\ = f_0 - \theta(f_k - c_k),\end{aligned} \tag{4.11}$$

де в останній рівності до обох частин додано величину θc_k. З (4.10) вектор $\mathbf{X}^{'} = (x_1 - \theta x_{1k}; x_2 - \theta x_{2k}; \ldots; x_m - \theta x_{mk}; 0; \ldots 0; \theta; 0; \ldots 0)$, де число θ стоїть на k-тому місці, у випадку невід'ємності своїх компонент буде планом ЗЛП (4.1)-(4.3). Компоненти $\mathbf{X}^{'}$ будуть невід'ємними тоді, коли $\theta > 0$ і таке, що $x_i - \theta x_{ik} \geq 0$ для всіх i, для яких $x_{ik} \geq 0$. Звідси:

$$0 < \theta \leq \frac{x_i}{x_{ik}}, x_{ik} > 0.$$

Тому при будь-якому θ, що задовольняє умову $0 < \theta \leq \min\limits_i \frac{x_i}{x_{ik}}$, де мінімум береться по тих i, для яких $x_{ik} > 0$, вектор $\mathbf{X}^{'}$ - новий план ЗЛП. Щоб $\mathbf{X}^{'}$ був опорним планом потрібно θ вибрати так, щоб план $\mathbf{X}^{'}$ мав не більше, ніж m додатних компонент. Якщо прийняти

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ik}}, \tag{4.12}$$

де мінімум береться по тих i, при яких $x_{ik} > 0$, то принаймні одна з перших m компонент вектора $\mathbf{X}'$ буде дорівнювати нулю. Нехай мінімум в (4.12) досягається при $i = l$. Тобто

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ik}} = \frac{x_l}{x_{lk}}.$$

Тоді при $\theta = \theta_0$ вектор $\mathbf{X}'$ буде мати вигляд:

$$\mathbf{X}' = (x_1', x_2', \ldots, x_{l-1}', 0, x_{l+1}', \ldots, x_m, 0, \ldots, 0, \theta_0, 0, \ldots, 0)$$

де $x_i' = x_i - \theta_0 x_{ik}, i = 1,2,\ldots, l-1, \ldots, m.$ Якщо ми доведемо, що система векторів

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_{l-1}, \mathbf{A}_{l+1}, \ldots, \mathbf{A}_m, \mathbf{A}_k$$

є лінійно незалежною, то покажемо, що план $\mathbf{X}'$ є новим опорним планом ЗЛП (4.1)-(4.3). Припустимо, що вказана система векторів є лінійно залежною. Тобто, існують числа $d_1, d_2, \ldots, d_{l-1}, d_{l+1}, \ldots, d_m, d_k$, серед яких є хоча б одне відмінне від нуля, для яких справедлива рівність:

$$d_1\mathbf{A}_1 + d_2\mathbf{A}_2 + \ldots + d_{l-1}\mathbf{A}_{l-1} + d_{l+1}\mathbf{A}_{l+1} + \ldots + d_m\mathbf{A}_m + d_k\mathbf{A}_k = 0. \quad (4.13)$$

Система векторів $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ є лінійно незалежною, тому лінійно незалежною буде її підсистема $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{l-1}, \mathbf{A}_{l+1}, \ldots, \mathbf{A}_m$. Отже, щоб виконувалась рівність (4.13), повинна виконуватись умова $d_k \neq 0.$ Виразимо вектор $\mathbf{A}_k$ з рівності (4.13):

$$\mathbf{A}_k = r_1\mathbf{A}_1 + r_2\mathbf{A}_2 + \ldots + r_{l-1}\mathbf{A}_{l-1} + r_{l+1}\mathbf{A}_{l+1} + \ldots + r_m\mathbf{A}_m, \qquad (4.14)$$

де $r_i = -\dfrac{d_i}{d_k}, i = 1,2,\ldots, l-1, l+1, \ldots, m.$ Віднімаючи рівність (4.14) від (4.8), одержимо:

$$(x_k - r_1)\mathbf{A}_1 + (x_{2k} - r_2)\mathbf{A}_2 + \ldots + (x_{l-1,k} - r_{l-1})\mathbf{A}_{l-1} +$$
$$+ x_{lk}\mathbf{A}_l + (x_{l+1,k} - r_{l+1})\mathbf{A}_{l+1} + \ldots + (x_{mk} - r_m)\mathbf{A}_m = 0.$$

Оскільки система векторів $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ є лінійно незалежною, то остання рівність виконується тільки тоді, коли всі коефіцієнти дорівнюють нулю. А це неможливо, бо, наприклад, $x_{lk} \neq 0$. Отже, наше припущення неправильне. Тобто, система векторів $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_{l-1}, \mathbf{A}_{l+1}, \ldots, \mathbf{A}_m, \mathbf{A}_k$ є лінійно незалежною. Отже, вектор $\mathbf{X}'$ є новим опорним планом ЗЛП (4.1)-(4.3).

Враховуючи (4.11), маємо:

$$f(\mathbf{X}') = f_0' = f_0 - \theta_0 (f_k - c_k).$$

Оскільки $\theta_0 > 0$ і $\Delta_k = f_k - c_k > 0$, то $f_0' < f_0$, що і треба було довести.

Теорема 4.1 доведена.

Теорема 4.2. (ознака необмеженості цільової функції). Якщо існує такий індекс $j, (1 \le j \le n)$, для якого $\Delta_j < 0$ ($\Delta_j > 0$) і серед всіх коефіцієнтів $x_{ij}, i = \overline{1,m}$ розкладу вектора $\mathbf{A}_j$ за векторами базису немає додатніх, то цільова функція $f(\mathbf{X})$ на множині планів є необмеженою і ЗЛП (4.1)-(4.3) не має розв'язку.

Доведення. Проведемо доведення даної теореми, як і теореми 4.1, для ЗЛП на мінімум. Нехай при $j = k$ виконуються умови: $\Delta_j > 0$ і всі коефіцієнти $x_{ik} \le 0 \, (i = \overline{1,m})$. Тоді, згідно (4.10) вектор $\mathbf{X}' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$, де $x_i' = x_i - \theta_0 x_{ik}$ $(i \le m)$, $x_k' = \theta$, $x_i' = \mathbf{0}$, $(i > m, i \ne k)$, при будь-якому $\theta \ge 0$ буде планом ЗЛП, який містить $(m+1)$ додатніх компонент. Згідно (4.11)

$$f(\mathbf{X}') = f_0' = f_0 - \theta_0 (f_k - c_k).$$

Оскільки $\Delta_k = f_k - c_k > 0$, то при $\theta \to +\infty$ значення f_0' прямує до $(-\infty)$. Отже, $f(\mathbf{X})$ є необмеженою знизу. Тобто, ЗЛП не має розв'язку.

Теорема 4.2 доведена.

Теорема 4.3. (ознака оптимальності опорного плану). Якщо для всіх індексів $j, (1 \le j \le n)$ виконується умова $\Delta_j \le 0$ ($\Delta_j \ge 0$), то опорний план $\mathbf{X}$ є оптимальним.

Доведення. Проводимо доведення теореми для задачі на мінімум. Нехай $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – будь-який план ЗЛП (4.1)-(4.3). Тоді

$$y_1 \mathbf{A}_1 + y_2 \mathbf{A}_2 + \ldots + y_n \mathbf{A}_n = \mathbf{B}, \tag{4.15}$$

$$\bar{f} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n. \tag{4.16}$$

За умовою теореми $\Delta_j \le 0 \ (j=\overline{1,n})$. Тоді $f_j - c_j \le 0$ і звідси $f_j \le c_j \ (j=\overline{1,n})$. Тому при заміні в (4.16) c_j на f_j одержимо:

$$f_1 y_1 + f_2 y_2 + \ldots + f_n y_n \le \bar{f}.$$

Підставляючи в дану нерівність замість $f_j \ (j=\overline{1,n})$ їх значення з (4.7), отримаємо:

$$\begin{gathered} y_1 \cdot (c_1 x_{11} + c_2 x_{21} + \ldots + c_m x_{m1}) + y_2 \cdot (c_1 x_{12} + c_2 x_{22} + \ldots + c_m x_{m2}) + \ldots \\ + y_n \cdot (c_1 x_{1n} + c_2 x_{2n} + \ldots + c_m x_{mn}) \le \bar{f}, \\ c_1 \cdot (y_1 x_{11} + y_2 x_{21} + \ldots + y_n x_{1n}) + c_2 \cdot (y_1 x_{12} + y_2 x_{22} + \ldots + y_n x_{2n}) + \ldots \\ + c_m \cdot (y_1 x_{m1} + y_2 x_{m2} + \ldots + y_n x_{mn}) \le \bar{f}. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Підставивши у рівність (4.15) замість $\mathbf{A}_j \ (j=\overline{1,n})$ їх розклади із (4.6), отримаємо:

$$\begin{gathered} y_1 \cdot (\mathbf{A}_1 x_{11} + \mathbf{A}_2 x_{21} + \ldots + \mathbf{A}_m x_{m1}) + y_2 \cdot (\mathbf{A}_1 x_{12} + \mathbf{A}_2 x_{22} + \ldots + \mathbf{A}_m x_{m2}) + \ldots \\ + y_n \cdot (\mathbf{A}_1 x_{1n} + \mathbf{A}_2 x_{2n} + \ldots + \mathbf{A}_m x_{mn}) = \mathbf{B}, \\ \mathbf{A}_1 (y_1 x_{11} + y_2 x_{21} + \ldots + y_n x_{1n}) + \mathbf{A}_2 (y_1 x_{12} + y_2 x_{22} + \ldots + y_n x_{2n}) + \ldots \\ + \mathbf{A}_m (y_1 x_{m1} + y_2 x_{m2} + \ldots + y_n x_{mn}) = \mathbf{B}. \end{gathered} \tag{4.18}$$

Оскільки система векторів $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m)$ лінійно незалежна, то коефіцієнти при однакових векторах у (4.5) та (4.18) повинні бути однакові. Тобто:

$$x_i = y_1 x_{i1} + y_2 x_{i2} + \ldots + y_n x_{in}, \ i=\overline{1,m}.$$

Враховуючи це, нерівність (4.17) набуває вигляду

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m \le \bar{f},$$

або, згідно з (4.4),

$$f_0 \le \bar{f},$$

що і треба було довести.

Теорема 4.3 доведена.

Таблиця 4.1

Таблиця симплекс-методу

Б	$C_б$	**X**	$c_1 =$	$c_2 =$	…	$c_m =$	$c_{m+1} =$	…	$c_n =$	θ_i
			$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	…	$\mathbf{A}_m$	$\mathbf{A}_{m+1}$	…	$\mathbf{A}_n$	
$\mathbf{A}_1$	c_1	$\mathbf{X}_1$	1	0	…	0	$\mathbf{A}_{1,m+1}$	…	$\mathbf{A}_{1n}$	
$\mathbf{A}_2$	c_2	$\mathbf{X}_2$	0	1	…	0	$\mathbf{A}_{2,m+1}$	…	$\mathbf{A}_{2n}$	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
$\mathbf{A}_i$	c_i	$\mathbf{X}_i$	0	0	…	0	$\mathbf{A}_{i,m+1}$	…	$\mathbf{A}_{in}$	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
$\mathbf{A}_m$	c_m	$\mathbf{X}_m$	0	0	…	1	$\mathbf{A}_{m,m+1}$	…	$\mathbf{A}_{mn}$	
		f	Δ_1	Δ_2	…	Δ_m	Δ_{m+1}	…	Δ_n	

4.2. Алгоритм симплекс-методу

На практиці симплекс-метод зручно реалізовувати з використанням так званих симплекс-таблиць (див. табл. 4.1).

Алгоритм симплекс-методу з використанням симплекс-таблиць

1. Записуємо ЗЛП в канонічній формі (4.1) – (4.3).
2. Знаходимо початковий невироджений опорний план ЗЛП. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що даний план має вигляд:

$$\overline{\mathbf{X}} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0),\ x_i > 0, i = \overline{1, m}.$$

3. Знаходимо методом Жордана-Гауса розклад векторів $\mathbf{A}_{m+1}, \mathbf{A}_{m+2}, \ldots, \mathbf{A}_n$ за векторами базису $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$. Для цього потрібно базисні вектори (все тим же методом Жордана-Гауса) звести до одиничних.
4. Заповнюємо початкову симплекс-таблицю, аналогічну таблиці 4.1.
5. Якщо для всіх оцінок Δ_j плану в даній сиплекс-таблиці виконується умова

на мінімум	на максимум
$\Delta_j \le 0,$	$\Delta_j \ge 0,$

то даний план є оптимальним, і ЗЛП розв'язана.
6. Якщо для ЗЛП

<u>на мінімум</u> серед додатних оцінок $\Delta_j = f_j - c_j > 0$

<u>на максимум</u> серед від'ємних оцінок $\Delta_j = f_j - c_j < 0$

є стовпці $\mathbf{A}_k$, для яких всі елементи $x_{ik} \le 0$, то цільова функція не обмежена на області допустимих розв'язків. ЗЛП не має розв'язку.

7. Для покращення опорного плану знаходимо ведучий елемент симплекс-таблиці, який вказує, який вектор $\mathbf{A}_k$ потрібно ввести в базис, а який вектор вивести з базису. Для цього потрібно для ЗЛП

<u>на мінімум</u> | <u>на максимум</u>

відмітити стовпець симплекс-таблиці з

найбільшою додатною оцінкою $\Delta_j = f_j - c_j > 0$ | найменшою від'ємною оцінкою $\Delta_j = f_j - c_j < 0$

Це і визначить ведучий стовпець симпекс-таблиці (тобто, який вектор треба ввести в базис).

8. Для додатних елементів $x_{ij} > 0$ ведучого стовпця j знаходимо відношення

$$\theta_i = \frac{x_i}{x_{ij}}.$$

Число

$$\theta_0 = \min_i \theta_i = \min_i \left\{ \frac{x_i}{x_{ij}} \right\}$$

визначить ведучий рядок симплекс-таблиці (який вектор потрібно вивести з базису). На перетині ведучого рядка та ведучого стовпця знаходиться ведучий елемент симплекс-таблиці.

9. Після вибору ведучого елемента наступну симплекс-таблиці перераховуємо за методом Жордана-Гаусса, використовуючи ”правило прямокутника“ (див. тему 3). Далі переходимо до пункту 5.

Як уже відзначалось раніше, перед застосуванням симплекс-методу потрібно знати початковий невироджений опорний план ЗЛП. Розглянемо приклад, де початковий опорний план шукається дуже легко. Припустимо, що система обмежень (4.2) має наступний вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n-m}x_{n-m} + x_{n-m+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,n-m}x_{n-m} + x_{n-m+2} = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3,n-m}x_{n-m} + x_{n-m+3} = b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{m,n-m}x_{n-m} + x_n = b_m, \end{cases}$$

де $b_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, $l + m = n$. Тоді очевидним початковим невиродженим опорним планом буде

$$\mathbf{X} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-m}, b_1, b_2, \ldots, b_m),$$

а векторами базису є $\mathbf{A}_{n-m+1}, \mathbf{A}_{n-m+2}, \ldots, \mathbf{A}_n$.

4.3. Про зациклення в симплекс-методі

Зациклення в алгоритмі симплекс-методу можливе лише тоді, коли серед опорних планів ЗЛП є вироджені. Оскільки кожному виродженому опорному плану відповідає більш ніж один базис, складений із векторів системи $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, то можливий випадок, що при переході від одного виродженого опорного плану до іншого $\theta_0 = 0$. Тобто опорний план не зміниться, а зміниться тільки базис, що йому відповідає. Такий перехід може повторюватись декілька разів. Якщо при цьому відбулося повернення до базису, що вже траплявся, то в алгоритмі симплекс-методу утворюється цикл.

В невиродженому випадку $\theta_0 = \min\limits_i \left\{ \dfrac{x_i}{x_{ij}} \right\}, x_{ij} > 0$, досягається лише для одного i. У виродженій задачі дана умова може виконатись відразу для декількох значень i. Тобто, головною проблемою у виродженій задачі є неоднозначність вибору вектора, який потрібно вивести з базису. Наведемо просте правило (без теоретичного обґрунтування), яке дозволяє зняти дану неоднозначність. Нехай $\Delta_j < 0$ $(\Delta_j > 0)$, а $\min\limits_{x_{ij} > 0} \left\{ \dfrac{x_i}{x_{ij}} \right\}$ досягається для декількох значень номера i. Щоб вибрати із них номер вектора, який потрібно вивести із базису, слід порівняти для них значення $\frac{x_{i1}}{x_{ij}}$. Вектор $\mathbf{A}_r$, для якого $\frac{x_{i1}}{x_{ij}}$ приймає найменше значення , і є шуканим. Тобто, $i = r$. Може виявитись, що не лише $\frac{x_i}{x_{ij}}$, але і $\frac{x_{i1}}{x_{ij}}$ досягає мінімуму при декількох (спільних для обох відношень) значеннях i. Тоді процес порівняння відношень компонент чергового вектора та компонент $\mathbf{A}_j$ потрібно продовжити. Таким чином, завжди вдається однозначно виділити вектор $\mathbf{A}_r$, який потрібно вивести з базису. В даному випадку зациклення не можливе і розв'язок отримується за скінченне число кроків.

Контрольні запитання

1. Що потрібно знати для початку роботи симплекс-методу?
2. В якій формі має бути записана ЗЛП для можності застосування симплекс-методу?
3. Чи можливі зациклення в симплекс-методі? Якщо так, то в якому випадку?
4. До задач яких розмірностей може бути застосований симплекс-метод?
5. В якому випадку задача на максимум не має розв'язку?
6. В якому випадку задача на мінімум вже розв'язана?
7. Сформулюйте правило визначення ведучого елемента в задачі на мінімум.
8. Сформулюйте правило визначення ведучого елемента в задачі на максимум.
9. Чи може $\theta_0 = 0$?
10. Якщо x_{kl} є ведучим елементом, то який вектор вводиться в базис, а який виводиться з базису?

Лабораторна робота №6
Симплекс-метод розв'язування ЗЛП

Приклад Л6.1. Розв'яжемо симплекс-методом задачу прикладу Л5.1.

$$f = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 .$$

1. Вводячи нові невід'ємні змінні x_3, x_4, x_5 записуємо ЗЛП в канонічній формі

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ x_2 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5} .$$

Таблиця Л6.1

Симплекс-таблиці до прикладу Л6.1.

	Базис	$C_{базисні}$	X	$c_1=3$	$c_2=2$	$c_3=0$	$c_4=0$	$c_5=0$	θ_i
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
1	A_3	0	7	1	2	1	0	0	7/1=7
	$\to A_4$	0	8	2	1	0	1	0	8/2=4(min)
	A_5	0	3	0	1	0	0	1	-
			0	-3↑	-2	0	0	0	

2	$\to A_3$	0	3	0	3/2	1	-1/2	0	2(min)
	A_1	3	4	1	1/2	0	1/2	0	8
	A_5	0	3	0	1	0	0	1	3
			12	0	-1/2↑	0	3/2	0	

3	A_2	2	2	0	1	2/3	-1/3	0	
	A_1	3	3	1	0	-1/3	1/3	0	
	A_5	0	1	0	0	-2/3	1/3	1	
			13	0	0	1/3	1/3	0	

2. Тоді початковим опорним планом для даної задачі буде $\mathbf{X} = (0;0;7;8;3)$, а відповідним базисом $\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5$. Очевидно, що $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_3 + 2\mathbf{A}_4 + 0 \cdot \mathbf{A}_5$, $\mathbf{A}_2 = 2\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4 + \mathbf{A}_5$. Заповнюючи початкову симплекс-таблицю, далі розв'язок продовжуємо з використанням таблиць.

В таблиці 1 серед Δ_j, (нижній рядок таблиці в стовпчиках векторів $\mathbf{A}_j$) є від'ємні. Отже, опорний план не є оптимальним. В той же час, не існує такого стовпчика, де $\Delta_j < \mathbf{0}$ і всі елементи $x_{ij} \le \mathbf{0}$. Тому можна перейти до нового опорного плану, при якому значення цільової функції зросте (поки що значення цільової функції дорівнює нулю – перше число в нижньому рядку таблиці). Серед Δ_j вибираємо найменше. Це $\Delta_1 = -3$. Отже, вектор $\mathbf{A}_1$ потрібно ввести в базис. Щоб знайти ведучий рядок, знаходимо відношення x_i до додатніх елементів ведучого стовпця і вибираємо серед цих відношень найменше. Вказані відношення θ_i записані в останньому стовпці таблиці. Отже, $\min\theta_i = 4$ досягається в рядку вектора $\mathbf{A}_4$, а це означає, що цей вектор потрібно вивести з базису. На перетині ведучого стовпця та ведучого рядка стоїть ведучий елемент. Перехід до симплекс-таблиці 2 здійснюється згідно правила прямокутника.

В симплекс-таблиці 3 виконуються умови оптимальності. Отже:

$$f_{\max} = 13,$$
$$\mathbf{X}_{\max} = (3;2;0;0;1).$$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом, використовуючи x_0 в якості початкового опорного плану.

1. $f = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = -1, \end{cases}$$

$x_i \ge 0, i = \overline{1,5}, \ \ x_0 = (0;0;7;5;6).$

2. $f = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_3 - x_4 = 3, \end{cases}$$

$x_i \ge 0, i = \overline{1,4}, \ \ x_0 = (2;2;3;0).$

3. $f = -x_1 - x_2 - 2x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

$x_i \ge 0, i = \overline{1,4}, \ \ x_0 = (2;0;0;2).$

4. $f = x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5, \end{cases}$$

$x_i \ge 0, i = \overline{1,4}, \ \ x_0 = (1;2;1;0).$

5. $f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 = 1, \end{cases}$$

$x_i \ge 0, i = \overline{1,5}, \ \ x_0 = (1;1;0;1;0).$

6. $f = -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 6, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5},\ \ x_0 = (1;0;1;2;0).$

7. $f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4},\ \ x_0 = (0;0;1;1).$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

8. $f = -6x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4},\ \ x_0 = (1;0;0;1).$

9. $f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,4},\ \ x_0 = (0;1;1;0).$

10. $f = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4},\ \ x_0 = (0;0;0;1).$

11. $f = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9, \end{cases}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4},\ \ x_0 = (1;0;1;0).$

12. $f = -x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5},\ \ x_0 = (0;0;1;2;1).$

13. $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4},\ \ x_0 = (0;1;0;1).$

14. $f = -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3, \\ x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_4 - x_5 = 0, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5},\ \ x_0 = (0;2;0;1;1).$

15. $f = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \end{cases}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4},\ \ x_0 = (0;0;1;1).$

16. $f = -x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 - 6x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 18, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_4 + 8x_5 = 13, \\ x_3 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5},\quad x_0 = (0;1;2;0;1).$

17. $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 19, \\ x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = 2, \end{cases}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5},\quad x_0 = (;0;1;2;0).$

18. $f = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -6, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 = 12, \end{cases}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5},\quad x_0 = (;1;2;0;0).$

19. $f = -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 + x_6 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 + 3x_6 = 15, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 9, \end{cases}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,6},\quad x_0 = (;0;0;0;0;4).$

20. $f = -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 + x_6 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 2, \end{cases}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,6},\quad x_0 = (0;0;0;0;1;2).$

21. $f = x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 + 6x_5 = 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 5, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5},\ x_0 = (2;0;1;1;0).$

22. $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4},\ x_0 = (1;0;0;0;0).$

23. $f = -x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 9, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5},\ x_0 = (0;1;2;1;0).$

24. $f = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 9, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5},\ x_0 = (0;3;0;1;2).$

25. $f = -x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 + 6x_6 = 18, \\ 4x_1 + 12x_2 + 8x_3 + x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 20, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6},\ x_0 = (4;0;0;0;0;1).$

ТЕМА 5. ЗНАХОДЖЕННЯ ПОЧАТКОВОГО ОПОРНОГО ПЛАНУ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

5.1. Метод штучного базису

При розгляді алгоритму симплекс-методу ми вважали, що початковий опорний план ЗЛП є відомий (заданий або очевидний). Якщо ця умова не виконується, то для розв'язання ЗЛП симплекс-методом треба знайти один з її опорних планів. Розглянемо один з таких методів – метод штучного базису.

Розглянемо ЗЛП, записану в канонічній формі:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nb_n \to \max(\min) \qquad (5.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (5.2)$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1,n}. \qquad (5.3)$$

Будемо вимагати виконання умови $b_j \ge 0, j = \overline{1,m}$. Цього завжди можна досягти, помножуючи рівності, в яких $b_j < 0$, на (-1).

Поряд із ЗЛП (5.1)-(5.3) розглянемо наступну допоміжну задачу:

$$\tilde{f} = x_{n+1} + x_{n+2} .... + x_{n+m} \to \min, \qquad (5.4)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_{2,} \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_n + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_{m,} \end{cases} \qquad (5.5)$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1,n+m}. \qquad (5.6)$$

Змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ називаються штучними змінними, а вектори $\mathbf{A}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+2}, ..., \mathbf{A}_{n+m}$, які їм відповідають, - штучними векторами. При умові $b_j \ge 0$, $j = \overline{1,m}$, початковим опорним планом задачі (5.4)-(5.6) є вектор $\mathbf{X} = (\underbrace{0{,}0{,}0{,}\ldots\ldots{,}0}_{n}, b_1, b_2, \ldots, b_m)$, а початковий базис складається з одиничних векторів $\mathbf{A}_{n+1}, \ldots, \mathbf{A}_{n+m}$. Цільова функція (5.4) обмежена знизу на допустимій множині розв'язків, оскільки для будь-яких $x_i \geq 0,\ i = \overline{n+1, n+m}$ виконується $\tilde{f} \geq 0$. Тому, розв'язуючи ЗЛП (5.4)-(5.6) симплекс-методом, за скінчене число кроків знайдемо її оптимальний розв'язок. При цьому можливі два випадки.

<u>Випадок 1.1</u>.

Теорема 5.1. Якщо $\min \tilde{f} > 0$, то ЗЛП (5.1)-(5.3) не має жодного плану, тобто система її умов несумісна.

Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що ЗЛП (5.1)-(5.3) має плани. Нехай одним з них є вектор $X' = (x_1', x_2', \ldots x_n')$. Тоді вектор $\overline{X}' = \left(x_1', x_2', \ldots x_n', \underbrace{0{,}0{,}\ldots{,}0}_{m} \right)$ буде планом допоміжної задачі (5.4)-(5.6) . Причому $\tilde{f}(\overline{X}') = 0$, що суперечить умові теореми. Отже, ЗЛП (5.1)-(5.3) не має жодного розв'язку.

Теорема 5.1 доведена.

<u>Випадок 1.2.</u>

Тут $\min \tilde{f} = 0$. В даному випадку, якщо $\overline{\mathbf{X}}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, x_{n+1}^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ - оптимальний план задачі (5.4)-(5.6), то обов'язково $x_{n+1}^* = x_{n+2}^* = \ldots = x_{n+m}^* = 0$.

Теорема 5.2. Якщо $\min \tilde{f} = 0$ і $\overline{\mathbf{X}}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, 0{,}0{,}\ldots{,}0)$ - оптимальний план задачі (5.4)-(5.6), то вектор $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ буде опорним планом задачі (5.1)-(5.3).

Доведення. Нехай $\mathbf{M}$ – многогранник допустимих розв'язків задачі (5.1)-(5.3), який визначається умовами (5.2) та (5.3), а $\overline{\mathbf{M}}$ – многогранник допустимих розв'язків задачі (5.4)-(5.6). Покажемо, що $\mathbf{X}^* \in \mathbf{M}$. Оскільки $\overline{\mathbf{X}}^* \in \overline{\mathbf{M}}$, то виконуються умови (5.6): $x_i \geq 0, i = \overline{1, n+m}$. Тобто, умови (5.3) також виконуються. Аналогічно, при $x_i = 0, i = \overline{n+1, n+m}$, з умов (5.5) отримуємо виконання умови (5.2). Отже, для $\mathbf{X}^*$ умова (5.2) та (5.3) виконуються. Тому $\mathbf{X}^* \in \mathbf{M}$.

Залишилось довести, що $\mathbf{X}^*$ є крайньою точкою многогранника $\mathbf{M}$. Тоді план $\mathbf{X}^*$ буде опорним. Розглянемо представлення

$$\mathbf{X}^* = \alpha \cdot \mathbf{X}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{X}^{(2)}, \quad 0 < \alpha < 1, \mathbf{X}^{(1)} \in \mathbf{M},\ \mathbf{X}^{(2)} \in \mathbf{M} \quad (5.7)$$

і покажемо, що воно можливе лише при $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(2)}$. Точки

$$\overline{\mathbf{X}}^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots x_n^{(1)}, \underbrace{0,0,\ldots,0}_{m} \right), \quad \overline{\mathbf{X}}^{2} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots x_n^{(2)}, \underbrace{0,0,\ldots,0}_{m} \right)$$

належать многограннику $\overline{\mathbf{M}}$. Тоді (5.7) можна переписати у вигляді:

$$\overline{\mathbf{X}}^* = \alpha \cdot \overline{\mathbf{X}}^{(1)} + (1-\alpha)\overline{\mathbf{X}}^{(2)}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Але $\overline{\mathbf{X}}^*$ - крайня точка многогранника $\overline{\mathbf{M}}$. Тому остання рівність можлива лише при $\overline{\mathbf{X}}^* = \overline{\mathbf{X}}^{(1)} = \overline{\mathbf{X}}^{(2)}$. Отже, $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(2)}$. Звідси випливає, що $\mathbf{X}^*$ є крайньою точкою многогранника $\mathbf{M}$.
Теорема 5.2 доведена.

Та нам потрібно знати не лише початковий опорний план, але і базис, який йому відповідає та розклад решти векторів за векторами цього базису. При цьому можливі два підвипадки.

<u>Випадок 1.2.1.</u> До базису, що відповідає оптимальному плану $\overline{\mathbf{X}}^*$ задачі (5.4)-(5.6), не належать штучні вектори. Тоді базис оптимального плану $\overline{\mathbf{X}}^*$ задачі (5.4)-(5.6) буде базисом, що відповідає початковому опорному плану $\mathbf{X}^*$ задачі (5.1)-(5.3). При цьому в останній симплекс-таблиці для розв'язування допоміжної задачі будемо мати і коефіцієнти розкладу векторів $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ через вектори базису.

<u>Випадок 1.2.2.</u> До базису, який відповідає $\overline{\mathbf{X}}^*$, належить хоча б один штучний вектор. В даному випадку ми не можемо за останньою симплекс-таблицею допоміжної задачі визначити базис із m векторів, які відповідають $\mathbf{X}^*$. Припустимо, що базис, який відповідає оптимальному плану $\overline{\mathbf{X}}^*$, складається з основних векторів $\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, \ldots, \mathbf{A}_{i_k}$ та штучних векторів $\mathbf{A}_{i_{k+1}}, \mathbf{A}_{i_{k+2}}, \ldots, \mathbf{A}_{i_m}$, $0 < k < m$. В останній симплекс-таблиці для розв'язування допоміжної задачі містяться коефіцієнти розкладу векторів $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n$ через вектори базису. Нехай:

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_{i_1} \cdot x_{i_1 j} + \mathbf{A}_{i_2} \cdot x_{i_2 j} + ... + \mathbf{A}_{i_m} \cdot x_{i_m j},\ j = \overline{1, n}. \qquad (5.8)$$

Якщо всі $x_{i_s j} = 0$, де $k + 1 \le s \le m$, то початковому опорному плану $\mathbf{X}^*$ задачі (5.1)-(5.3) відповідає базис, що складається з векторів $\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, ..., \mathbf{A}_{i_k}$. Наявність у базисі менше ніж m векторів свідчить про те, що система рівнянь (5.2) є лінійно залежна. Тобто в системі (5.2) є $(m - k)$ рівнянь, які можна відкинути, не порушуючи множини планів задачі.

Якщо не всі $x_{i_s j}$ у розкладі (5.8) дорівнюють нулю, то шукаємо базис, який відповідає початковому опорному плану $\mathbf{X}^*$ задачі (5.1)-(5.3). Для цього вводимо в базис один із векторів $\mathbf{A}_j$, $j = \overline{1, n}$, якому відповідає $x_{i_s j} \ne 0$, замість відповідного штучного вектора. При цьому перераховуємо тільки ту частину симплекс-таблиці, яка належить до задачі (5.1)-(5.3). Новий базис також відповідає опорному плану $\mathbf{X}^*$ (при зміні базису опорний план не зміниться, оскільки $x^*_{i_s j} = 0$). Якщо в новому базисі залишились штучні вектори і є відповідні коефіцієнти, відмінні від нуля, то знову замість одного штучного вектора вводимо в базис основний вектор. Через скінчене число кроків знайдемо базис, у якому немає штучних векторів, або прийдемо до випадку $x_{i_s j} = 0$.

Маючи початковий опорний план $\mathbf{X}^*$ ЗЛП (5.1)-(5.3), базис, який йому відповідає, і розклади векторів $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n$ через вектори базису, складаємо першу симплекс-таблицю для розв’язування задачі (5.1)-(5.3) і її розв’язуємо.

5.2. Розв’язання ЗЛП за допомогою M - методу

Як випливає з попереднього пункту, процес розв’язання ЗЛП (5.1)-(5.3) складається з двох етапів:

1. Знаходження початкового опорного плану ЗЛП.
2. Знаходження оптимального плану ЗЛП.

Проте існує прийом, який дозволяє об'єднати обидва етапи. Поряд із ЗЛП (5.1)-(5.3) розглянемо наступну задачу лінійного програмування:

$$\tilde{f} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - (+)M(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}) \to \max(\min), \quad (5.9)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{13}x_3 + x_{n+1} & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{23}x_3 \quad + x_{n+2} & = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{m3}x_3 \qquad + x_{n+m} & = b_m, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1, n+m}. \quad (5.11)$$

Тут М - деяке додатне число. Задача (5.9)-(5.11) називається M - задачею. Змінні x_{n+1}, $x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ - штучні, так само, як і вектори $\mathbf{A}_{n+1}$, $\mathbf{A}_{n+2}, \ldots$, $\mathbf{A}_{n+m}$. Сформулюємо без доведення теорему, яка є основою M -методу.

Теорема 5.3. Якщо вектор $\overline{\mathbf{X}} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \underbrace{0,0,0,\ldots,0}_{m})$ є оптимальним розв'язок ЗЛП (5.9)-(5.11), то вектор $\mathbf{X}^* = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ є оптимальним розв'язком ЗЛП (5.1)-(5.3). Крім того, якщо ЗЛП (5.1)-(5.3) має розв'язок, тоді існує деяке число $M_0 > 0$, таке, що при будь-якому $M > M_0$ існує розв'язок ЗЛП (5.9)-(5.11), причому якщо $\overline{\mathbf{X}} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ є розв'язком ЗЛП (5.9)-(5.11), то обов'язково $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{n+m} = 0$.

Наслідок 5.1. Якщо вектор $\overline{\mathbf{X}}$ є оптимальним розв'язком ЗЛП (5.9)-(5.11) і в ньому не всі останні m компонентів рівні нулю, тоді ЗЛП (5.1)-(5.3) не має розв'язку.

На практиці немає потреби шукати число M_0. Просто припускається, що число M є більшим за будь-яке інше число, яке з ним порівнюється. Значення цільової функції $\tilde{f}$ та оцінок Δ_j розпадається на дві складові: перша складова – це коефіцієнт при M, а інша – вільні члени (коефіцієнти без M). Тому при розв'язуванні M - задачі симплекс-методом в симплекс-таблицях з'являється додатковий $(n+2)$-й рядок, де записуються коефіцієнти при M. Елементи таблиць для розв'язання M-задачі перетворюється за тими ж самими правилами, що й звичайні симплекс-таблиці. Але критерієм для вводу вектора в базис виступає найменша від'ємна (найбільша додатна) оцінка Δ_j $(n+2)$-го рядка. При цьому, штучний вектор, який виводиться з базису, немає сенсу вводити в будь-який інший базис, а тому з наступної симплекс-таблиці він просто викидається. Процес введення в базис векторів за критерієм $(n+2)$-го рядка продовжуються до виконання однієї з наступних двох умов:

1. Всі штучні вектори виведені з базису. Це означає: знайдено невироджений початковий опорний план ЗЛП (5.1)-(5.3). Далі розв'язок продовжуємо, керуючись критерієм оцінок $(n+1)$-го рядка, оскільки всі елементи $(n+2)$-го рядка будуть дорівнювати нулю.
2. Не всі штучні вектори виведені з базису, але серед оцінок Δ_j $(n+2)$-го рядка немає від'ємних (додатних). Якщо при цьому значення цільової функції не дорівнює нулю (в $(n+2)$-му рядку), тоді ЗЛП (5.1)-(5.3) не має розв'язку. В протилежному випадку ми знайшли вироджений початковий опорний план ЗЛП (5.1)-(5.3). Далі розв'язок продовжуємо, керуючись найменшою від'ємною (найбільшою додатною) з оцінок Δ_j $(n+1)$-го рядка, які стоять над нульовими оцінками $(n+2)$-го рядка. Так ми знайдемо оптимальний розв'язок або покажемо, що ЗЛП (5.1)-(5.3) не має розв'язку.

5.3. Метод розширеної задачі

Розглянемо ЗПЛ, записану в канонічній формі:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{5.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,n}, \tag{5.13}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}. \tag{5.14}$$

де $b_i \geq 0, i = \overline{1,m}$.

Розглянемо інший підхід до розв'язування задачі (5.12)-(5.14) симплекс-методом [24]. Його ідея полягає в тому, що для знаходження розв'язку ЗЛП можна використати процес розв'язування наступної розширеної ЗЛП:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{5.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \,, i = \overline{1,m}, \tag{5.16}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n+m}. \tag{5.17}$$

Змінні $x_{n+i}, i = \overline{1,m}$ задачі (5.15)-(5.17) назвемо штучними, а вектори $\mathbf{A}_{n+i}, i = \overline{1,m}$, які їм відповідають, штучними векторами.

Очевидно, множина планів задачі (5.15)-(5.17) не є порожньою. Тому ця задача має розв'язок або лінійна форма на її множині планів – необмежена.

Теоретичною основою методу розширеної задачі є такі твердження [24]:

1. Якщо задача (5.12)-(5.14) має розв'язок, то серед опорних планів задачі (5.13)-(5.15) існує такий $\overline{\mathbf{X}} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \underbrace{0,0,0,\dots,0}_{m})$, що вектор $\overline{\mathbf{X}} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ буде оптимальним опорним планом задачі (5.12)-(5.14).
2. Якщо задача (5.15)-(5.17) має розв'язок і $\overline{\mathbf{X}} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \underbrace{0,0,0,\dots,0}_{m})$ є її оптимальним планом, то вектор $\overline{\mathbf{X}} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ – оптимальний план задачі (5.12)-(5.14).
3. Якщо множина планів задачі (5.12)-(5.14) є порожньою, то для задачі (5.15)-(5.17) не існує плану, останні m компонент якого – нулі.
4. Якщо цільова функція задачі (5.12)-(5.14) необмежена на множині планів, то вона буде необмеженою на множині планів задачі (5.15)-(5.17).

З урахуванням цих тверджень знаходження розв’язку задачі (5.12)-(5.14) зводиться до наступного.

Розв’язуємо задачу (5.15)-(5.17) симплекс-методом. Якщо цільова функція на множині планів задачі (5.15)-(5.17) обмежена, то можливі такі два випадки.

<u>Випадок 3.1</u>.

Базис, що відповідає оптимальному опорному плану задачі (5.15)-(5.17), складається тільки з основних векторів.

<u>Випадок 3.2</u>.

Базис, що відповідає оптимальному опорному плану задачі (5.15)-(5.17), містить один або більше штучних векторів.

Якщо виконуються умови першого випадку і $\overline{\mathbf{X}} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \underbrace{0,0,0,\ldots,0}_{m})$ – оптимальний опорний план задачі (5.13)-(5.15), то вектор $\overline{\mathbf{X}} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$ буде оптимальним опорним планом задачі (5.12)-(5.14).

У другому випадку виводимо штучні вектори з базису доти, поки: 1) не знайдемо опорного плану задачі (5.15)-(5.17), якому буде відповідати базис, що складається тільки з основних векторів. Якщо таким опорним планом задачі (5.15)-(5.17)буде вектор $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \underbrace{0,0,0,\ldots,0}_{m})$, то вектор $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ буде опорним планом задачі (5.12)-(5.14); 2) не знайдемо опорного плану, в якому компоненти, що відповідають штучним векторам базису, дорівнюють нулю. У цьому випадку одержуємо вироджений опорний план початкової задачі.

Маючи опорний план і базис, що йому відповідає, продовжуємо до кінця розв’язувати задачу (5.12)-(5.14).

Якщо лінійна форма задачі (5.15)-(5.17) необмежена на множині планів (про це нас інформують симплекс-таблиці в процесі розв’язування задачі (5.15)-(5.17)), то, незважаючи на це, розв’язуємо задачу (5.15)-(5.17) доти, поки компоненти опорного плану, що відповідають штучним векторам базису, не будуть дорівнювати нулю. Після цього продовжуємо розв’язувати задачу (5.12)-(5.14).

Зауважимо, що в процесі виведення штучних векторів із базису може не виконуватись критерій вибору вектора, що треба ввести в новий базис. Тому на окремих кроках алгоритму перехід від одного опорного плану до іншого може зумовити не зменшення значення цільової функції, а його збільшення. Оскільки кінцевою метою процесу розв'язування задачі (5.15)-(5.17) є виведення всіх штучних векторів із базису, то стовпчики симплекс-таблиць, які відповідають виведеним з базису штучним векторам, можна не тільки не перетворювати, а й зовсім не розглядати.

Якщо множина планів задачі (5.12)-(5.14) є порожньою, то в процесі розв'язування задачі (5.15)-(5.17) завжди повинен настати момент, коли базис опорного плану містить один або більше штучний вектор і жоден з них не можна вивести з базису. При цьому компоненти опорного плану, що відповідають штучним векторам базису, додатні.

Контрольні запитання

1. Навіщо знаходити початковий опорний план ЗЛП?
2. Чи дозволяє метод штучного базису знайти оптимальний розв'язок ЗЛП?
3. Навіщо знаходити базис, який відповідає початковому опорному плану ЗЛП?
4. Чи правильне твердження: якщо в базис оптимального розв'язку допоміжної задачі входять штучні вектори, то основна ЗЛП розв'язку не має?
5. Чому в M -задачі з'являється другий рядок оцінок?
6. Чи існують методи для знаходження числа M_0 з умов теореми 5.3?
7. В яких випадках в M -задачі від використання оцінок $(n+2)$-го рядка переходять до оцінок $(n+1)$-го рядка?
8. Чи можна за допомогою M -методу знайти оптимальний розв'язок ЗЛП?
9. Чим відрізняється метод розширеної задачі від M -методу?

Лабораторна робота №7
Метод штучного базису відшукання початкового опорного плану ЗЛП

Приклад Л7.1. Знайти початковий опорний план наступної ЗЛП, базис, який йому відповідає, та записати першу таблицю симплекс-методу.

$$f = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_4 = 11; \end{cases} \qquad (Л7.1)$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Розв'язання. Зауважимо, що всі вільні члени в обмеженнях ЗЛП мають бути невід'ємними. Якщо в деякому з обмежень вільний член від'ємний, то дане обмеження потрібно домножити на (-1). Згідно методу штучного базису розв'язуємо наступну допоміжну задачу:

$$\tilde{f} = x_5 + x_6 + x_7 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_4 + x_7 = 11; \end{cases} \qquad (Л7.2)$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,7}.$$

Задачу (Л7.2) розв'язуємо звичайним симплекс-методом, оскільки її початковим опорним планом є $\mathbf{X} = (0;0;0;0;5;1;11)$ і відповідним базисом $\{\mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6, \mathbf{A}_7\}$ (табл. Л7.1).

Таблиця Л7.1

Симплекс-таблиці до прикладу Л.7.1

	Базис	$C_б$	X	$C_1=0$	$C_2=0$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=1$	$C_6=1$	$C_7=1$	θ_i
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	A_5	1	5	1	2	-1	1	1	0	0	5/2
	$\to A_6$	1	1	-1	1	2	1	0	1	0	1(min)
	A_7	1	11	1	5	0	3	0	0	1	11/5
			17	1	8↑	1	5	0	0	0	

2	$\rightarrow A_5$ A_2 A_7	1 0 1	3 1 6	3 -1 6	0 1 0	-5 2 -10	-1 1 -2	1 0 0	-2 1 -5	0 0 1	3/3=1 - 6/6=1
			9	9↑	0	-15	-3	0	-8	0	

3	A_1 A_2 A_7	0 0 1	1 2 0	1 0 0	0 1 0	-5/3 1/3 0	-1/3 2/3 0	1/3 1/3 -2	-2/3 1/3 -1/3	0 0 1	
			0	0	0	0	0	-3	-2	0	

Як видно з останньої таблиці $\min \tilde{f} = 0$ і $\overline{\mathbf{X}}^* = (1,2,0,0,0,0,0)$. Оптимальному плану допоміжної задачі (Л7.2) відповідає базис $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_7)$. Штучний вектор $\mathbf{A}_7$, який знаходиться у базисі, входить з нульовими коефіцієнтами у розклади основних векторів $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ (див. третій рядок останньої таблиці). Третє рівняння системи обмежень є лінійною комбінацією перших двох рівнянь у задачі (Л7.1). Отже, початковий опорний план ЗЛП (Л7.1) $\mathbf{X}^* = (1,2,0,0)$ і йому відповідає базис $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$. Перша таблиця симплекс-методу для задачі (Л7.1) буде мати вигляд

(продовження табл. Л7.1)

				$C_1=1$	$C_2=1$	$C_3=-2$	$C_4=1$	θ_i
	Базис	$C_{базисні}$	X	A_1	A_2	A_3	A_4	
4	A_1 A_2	1 1	1 2	1 0	0 1	-5/3 1/3	-1/3 2/3	
			3	0	0	2/3	-2/3	

Приклад Л7.2. Знайти початковий опорний план наступної ЗЛП та базис, який йому відповідає:

$$f = x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 + 2x_6 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 3x_5 - x_6 = 2, \\ -4x_1 + 4x_2 - 12x_3 \qquad - 2x_5 + 2x_6 = 2; \end{cases} \qquad (Л7.3)$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,6}.$$

Розв'язання. Згідно методу штучного базису, розв’язуємо наступну допоміжну задачу:

$$\tilde{f} = x_7 + x_8 + x_9 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 3x_5 - x_6 + x_8 = 2, \\ -4x_1 + 4x_2 - 12x_3 - 2x_5 + 2x_6 + x_9 = 2; \end{cases} \quad (Л7.4)$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,9}.$$

Задачу (Л7.4) розв’язуємо звичайним симплекс-методом, враховуючи, що початковим опорним планом даної задачі буде вектор $\overline{\mathbf{X}}_0 = (0;0;0;0;0;0;1;2;2)$, а базисом $(\mathbf{A}_7; \mathbf{A}_8; \mathbf{A}_9)$ (табл. Л7.2).

Із останньої таблиці випливає, що $\min \tilde{f} = 0$ і $\overline{\mathbf{X}}_{\min} = \left(0, \frac{1}{2}, 0,0,0,0,0,0,0\right)$. Базис, який відповідає оптимальному плану допоміжної задачі (Л7.4), містить два штучні вектори $\mathbf{A}_8$ та $\mathbf{A}_9$. Вони входять в розклади основних векторів з коефіцієнтами, відмінними від нуля. Отже, початковий опорний план ЗЛП $\mathbf{X}_0 = \left(0, \frac{1}{2}, 0,0,0,0\right)$ (Л7.3) є виродженим.

Знайдемо базис, який йому відповідає. Для цього введемо в базис вектор $\mathbf{A}_3$ замість $\mathbf{A}_8$. Одержимо таблицю 3 (без зайвих стовпчиків і рядків). У базисі є ще один штучний вектор $\mathbf{A}_9$. Ввівши замість нього вектор $\mathbf{A}_1$, одержимо таблицю 4. Із таблиці 4 бачимо, що виродженому початковому опорному плану вихідної ЗЛП (Л7.3) відповідає базис $(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_1)$.

Таблиця Л7.2

Симплекс-таблиці до прикладу Л.7.2.

	Б	$C_б$	X	$C_1=0$	$C_2=0$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=1$	$C_6=1$	$C_7=1$	$C_8=1$	$C_9=1$	θ_i
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	
1	$\to A_7$	1	1	1	2	-3	3	1	2	1	0	0	1/2(min)
	A_8	1	2	1	4	-5	-5	-3	-1	0	1	0	2/4=1/2
	A_9	1	2	-4	4	-12	0	-2	2	0	0	1	2/4=1/2
			5	-2	10↑	-20	-2	-4	2	0	0	0	
2	A_2	0	1/2	1/2	1	-3/2	3/2	1/2	1/2	1/2	0	0	
	A_8	1	0	-1	0	1	-11	-5	-3	-2	1	0	
	A_9	1	0	-6	0	-6	-6	-4	0	-2	0	1	
			0	-7	0	-5	-17	-9	-3	-5	0	0	
3	A_2		1/2	0	1	0	-9	-25/6	-5/2				
	A_3		0	0	0	1	-5	-13/6	-3/2				
	A_1		0	1	0	0	6	17/6	3/2				
4	A_2		1/2	-1	1	0	-15	-7	-4				
	A_3		0	-1	0	1	-11	-5	-3				
	A_9		0	-12	0	0	-72	-34	-18				

Завдання для самостійної роботи

Знайти початкові опорні плани ЗЛП методом штучного базису та записати перші таблиці симплекс-методу.

1. $f = x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4, \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, $i = \overline{1,4}$.

2. $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5, \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, $i = \overline{1,4}$.

3. $f = x_1 + 10x_2 - x_3 + 5x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4, \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, $i = \overline{1,4}$.

4. $f = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 10, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 20, \\ 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 30, \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, $i = \overline{1,5}$.

5. $f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 2, \\ 6x_1 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 2, \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, $i = \overline{1,5}$.

6. $f = -x_1 - 4x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 13, \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 30, \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, $i = \overline{1,5}$.

7. $f = 34x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, $i = \overline{1,4}$.

8. $f = -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, $i = \overline{1,4}$.

9. $f = 3x_1 - x_3 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 7, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}.$

10. $f = -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ -3x_1 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_3 - x_4 = 3, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}.$

11. $f = x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = -1, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}.$

12. $f = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}.$

13. $f = x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 5x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 + 6x_5 = 6, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}.$

14. $f = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}.$

15. $f = -x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 9, \\ x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 = 6, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}.$

16. $f = 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3, \\ -x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_3 + x_4 - x_5 = 0, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}.$

17. $f=-6x_1-2x_2-2x_3-x_4-x_5\to\min,$

$$\begin{cases}9x_1+3x_2\,3x_3+x_4+x_5=18,\\ 8x_1+5x_2+2x_4+x_5=13,\\ x_1+x_3=3,\end{cases}$$

$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,5}.$

18. $f=x_1+x_2+x_3-$
$-x_4+4x_5-2x_6\to\max,$

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3+6x_4+9x_5+3x_6=15,\\ x_1-x_2+2x_3+2x_4+3x_5+x_6=5,\end{cases}$$

$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,6}.$

19. $f=-x_1-x_2+x_3-2x_4-x_5+x_6\to\min,$

$$\begin{cases}x_1+3x_2-3x_3+x_4+4x_5+x_6=6,\\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_6=5,\end{cases}$$

$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,6}.$

20. $f=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\to\max,$

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=4,\\ -2x_1-2x_3+x_4-x_5=-6,\\ -x_1+x_2+6x_3+x_4+x_5=12,\end{cases}$$

$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,5}.$

21. $f=x_1+2x_2+3x_3+x_4+x_5\to\max,$

$$\begin{cases}x_1+x_2+4x_3-x_4+x_5=1,\\ x_1-x_2-2x_3+x_4+x_5=1,\\ -x_1+x_2-6x_3+x_4+x_5=1,\end{cases}$$

$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,5}.$

22. $f=x_1+x_2-3x_4\to\min,$

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_4=3,\\ 4x_1+x_2+x_3+x_4=7,\\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=5,\end{cases}$$

$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}.$

23. $f=4x_1-x_2+x_4\to\max,$

$$\begin{cases}x_2+2x_3=8,\\ x_1+x_2+x_3+2x_4=7,\\ x_2+x_3+x_4=5,\end{cases}$$

$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}.$

24. $f=x_2+x_3-x_4\to\min,$

$$\begin{cases}2x_1+2x_3+4x_4=4,\\ x_1+x_2-x_3+x_4=1,\\ x_1-x_2+x_3+x_4=1,\end{cases}$$

$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}.$

25. $f=-3x_1-4x_2+5x_4\to\max,$

$$\begin{cases}x_2+x_3+2x_4+x_5=6,\\ x_1+x_2+x_3+3x_4+2x_5=9,\\ x_1+x_2+2x_4+x_5=5,\end{cases}$$

$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,5}.$

Лабораторна робота №8
М-метод розв'язування ЗЛП

Приклад Л8.1. Розв'язати ЗЛП М-методом

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24, \end{cases} \qquad \text{(Л8.1)}$$

$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}.$$

Розв'язання. Щоб розв'язати задачу (Л8.1) розв'яжемо наступну М-задачу:

$$\overline{f} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - M(x_5 + x_6) \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 + x_6 = 24, \end{cases} \qquad \text{(Л8.2)}$$

$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,6},$$

де $M > 0$ - як завгодно велике число.

Розв'язок ЗЛП (Л8.2) проводимо з використанням звичайних симплекс-таблиць, доповнених додатковим рядком оцінок (табл. Л8.1).

Таблиця Л8.1

Симплекс-таблиця до прикладу Л8.1

Базис	$C_{базисні}$	**X**	C_1=1	C_2=2	C_3=3	C_4=-4	C_5=-M	C_6=-M	θ_i
			$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$	
$\mathbf{A}_5$	-M	2	1	1	-1	1	1	0	2
$\to \mathbf{A}_6$	-M	24	1	14	10	-10	0	1	12/7
m+1		0	-1	-2	-3	4	0	0	
m+2(M)		-26	-2	-15↑	-9	9	0	0	
$\to \mathbf{A}_5$	-M	2/7	13/14	0	-12/7	12/7	1		1/6
$\mathbf{A}_2$	2	12/7	1/14	1	5/7	-5/7	0		-
m+1		24/7	-6/7	0	-11/7	18/7	0		
m+2(M)		-2/7	-13/14	0	12/7	-12/7↑	0		

→A_4	-4	1/6	13/24	0	-1	1	4/13 (min)
A_2	2	11/6	11/24	1	0	0	4
m+1		3	-9/4↑	0	1	0	
m+2(M)		0	0	0	0	0	

В таблиці 3 всі штучні вектори виведені із базису (всі елементи ($m+2$)-го рядка дорівнюють нулю). Далі розв'язок продовжуємо симплекс-методом, керуючись, як критерієм, оцінками ($m+1$)-го рядка.

(продовження табл.Л8.1)

Базис	$C_{базисні}$	**X**	$C_1=1$	$C_2=2$	$C_3=3$	$C_4=4$	θ_i
			$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	
$\mathbf{A}_1$	1	4/13	1	0	-24/13	24/13	-
→$\mathbf{A}_2$	2	22/13	0	1	11/13	-11/13	2
		48/13	0	0	-41/13↑	54/13	
$\mathbf{A}_1$	1	4	1	24/11	0	0	
$\mathbf{A}_3$	3	2	0	13/11	1	-1	
		10	0	41/11	0	-1	

З таблиці 5 випливає, що

$$\mathbf{X}_{\max} = (4;\ 0;\ 2;\ 0), \quad f_{\max} = 10.$$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати задачу лінійного програмування М-методом.

1. $f = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1,4}.$$

2. $f = -2x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 6, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}$

3. $f = x_1 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 15, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_5 = 12, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 17, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,6}.$

4. $f = -x_1 - 2x_2 - 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 14, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,4}.$

5. $f = -x_1 - x_2 - 2x_3 - 8x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ -x_1 + 3x_3 - 4x_3 + 4x_4 = 1, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,4}.$

6. $f = -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 + 4x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 = 1, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$

7. $f = x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 6x_4 + x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 4x_1 + 16x_2 - x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 28, \\ 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ 5x_1 + x_2 = 6, \\ 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 12, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$

8. $f = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$

9. $f = -5x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 11x_4 - 10x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 10, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 14, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$

10. $f = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 7, \\ x_1 - x_3 + x_5 - x_6 = 2, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 = 5, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$

11. $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 3, \\ -x_2 + x_3 + 2x_5 = 1, \\ -x_3 + x_4 - 2x_5 = -1, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$

12. $f = -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 6, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$

13. $f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 = 1, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$

14. $f = -x_1 - x_3 - x_6 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 15, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 5, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 + x_6 = 22, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,6}.$

15. $f = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 - 2x_6 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 19x_4 - 10x_5 - 5x_6 = 4, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}.$

16. $f = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + 3x_6 = 15, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 - x_6 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 22, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,6}.$

17. $f = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - x_3 + 7x_4 - 8x_5 = 9, \\ x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 25, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$

18. $f = -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 10, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 20, \\ 10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 30, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$

19. $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$

20. $f = -x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 - 6x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 18, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_4 + 8x_5 = 13, \\ x_3 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$

21. $f = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ -5x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 5, \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$

22. $f = -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_3 - x_4 = 3, \end{cases}$$

$x_i \ge 0, i = \overline{1,4}.$

23. $f = x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \end{cases}$$

$x_i \ge 0, i = \overline{1,4}.$

24. $f = 5x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 5, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$x_i \ge 0, i = \overline{1,5}.$

25. $f = x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$x_i \ge 0, i = \overline{1,5}.$

ТЕМА 6. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ДВОЇСТОСТІ

6.1. Пара взаємнодвоїстих задач лінійного програмування

Теорія двоїстості в лінійному програмуванні вивчає загальні властивості взаємопов'язаних ЗЛП, кожна з яких є двоїстою до іншої.

Розглянемо ЗЛП, записану у канонічній формі:

$$f(\mathbf{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (6.1)$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,n}.$$

Двоїстою до задачі (6.1) називається наступна ЗЛП:

$$F(\mathbf{Y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \leq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \leq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \leq c_n. \end{cases} \qquad (6.2)$$

Задачу (6.1) називають прямою. Можна довести, що якщо за пряму задачу вважати (6.2), то двоїстою до неї буде (6.1). Відмітимо кілька аспектів:

1. Цільові функції взаємодвоїстих задач прямують до різних екстремумів;
2. Кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількість змінних прямої задачі;
3. Знак обмежень двоїстої задачі визначається цільовою функцією прямої задачі.

Виходячи із введеного означення двоїстості, можна довести, що двоїстою до ЗЛП

$$f(\mathbf{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{6.3}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n},$$

є наступна:

$$F(\mathbf{Y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n. \end{cases} \tag{6.4}$$

Приклад 6.1. Записати двоїсту до наступної ЗЛП:

$$f(\mathbf{X}) = -x_1 - 2x_2 + x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_4 \geq 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 7, \end{cases} \tag{6.5}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_4 \geq 0.$$

Розв'язання. ЗЛП (6.5) потрібно звести спочатку до канонічного вигляду (6.1). Введемо допоміжні змінні $x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$, маємо:

$$f(\mathbf{X}) = -x_1 - 2x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 7, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

Ввівши заміни $x_2 = -x_2', x_3 = x_3' - x_3''$, де $x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0$, отримаємо

$$f(\mathbf{X}) = -x_1 + 2x_2' + 0\cdot x_3' - 0\cdot x_3'' + x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2' - x_3' + x_3'' + 3x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2' - x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 - 3x_2' + 2x_3' - 2x_3'' - x_4 + x_6 = 7, \end{cases} \tag{6.6}$$

$$x_1 \ge 0, x_2' \ge 0, x_3' \ge 0, x_3'' \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0.$$

Тоді, згідно означення, двоїстою до задачі (6.6) буде:

$$F(\mathbf{Y}) = 4y_1 + y_2 + 7y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \le -1, \\ -y_1 + y_2 - 3y_3 \le 2, \\ -y_1 + 2y_3 \le 0, \\ \ \ y_1 - 2y_3 \le 0, \\ 3y_1 - y_2 - y_3 \le 1, \\ -y_2 \le 0, \\ y_3 \le 0. \end{cases} \quad \Rightarrow y_1 - 2y_3 = 0,$$

Далі маємо наступну ЗЛП, двоїсту до задачі (6.6):

$$F(\mathbf{Y}) = 4y_1 + y_2 + 7y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2y_1 - 3y_2 - y_3 \ge 1, \\ -y_1 + y_2 - 3y_3 \le 2, \\ y_1 - 2y_3 = 0, \\ 3y_1 - y_2 - y_3 \le 1, \\ y_2 \ge 0, y_3 \le 0. \end{cases}$$

Можна показати, що двоїстою до задачі

$$f(\mathbf{X})=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\le b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m, \end{cases} \tag{6.7}$$

$$x_i\ge 0, i=\overline{1,n},$$

буде задача:

$$F(\mathbf{Y})=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m\to\min,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m\ge c_1,\\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{m2}y_m\ge c_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{mn}y_m\ge c_n, \end{cases} \tag{6.8}$$

$$y_j\ge 0, j=\overline{1,m}.$$

Задачі (6.7), (6.8) називаються парою симетричних взаємодвоїстих ЗЛП.

6.2. Основні теореми двоїстості

Введемо позначення $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, $\mathbf{Y}=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ і ЗЛП (6.1), (6.2) запишемо у матричній формі:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{X})=\mathbf{cX}\to\min,\\ \mathbf{AX}=\mathbf{b},\\ \mathbf{X}\ge 0, \end{gathered} \tag{6.9}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{F}(\mathbf{Y})=\mathbf{Yb}\to\max,\\ \mathbf{YA}\le\mathbf{c}. \end{gathered} \tag{6.10}$$

Теорема 6.1. (Перша теорема двоїстості) Якщо одна із задач (6.9), (6.10) має розв’язок, то інша задача також має розв’язок. Причому, для довільних планів **X** та **Y** задач (6.9), (6.10) виконується нерівність:

$$\mathbf{Yb}\le\mathbf{cX}, \tag{6.11}$$

яка переходить в рівність тоді, коли $\mathbf{X}$ та $\mathbf{Y}$ є оптимальними планами задач (6.9), (6.10). Якщо цільова функція однієї із задач необмежена на множині допустимих розв'язків (для ЗПЛ (6.9) знизу, а для ЗЛП (6.10) зверху), тоді множина планів другої задачі є порожньою.

Доведення. Враховуючи взаємну двоїстість задач (6.9) та (6.10) доведення можна провести, взявши за початкову одну з них, наприклад (6.9). Нехай $\mathbf{X}$ є планом ЗЛП (6.9). Покажемо, що задача (6.10) також має хоча б один план і виконується нерівність (6.11). Нехай $\mathbf{X}_{\min} = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)^T$ оптимальний розв'язок задачі (6.9), а відповідний йому базис складається із векторів $\left(\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, \ldots, \mathbf{A}_{i_m}\right)$.

В останній симплекс-таблиці для розв'язку задачі (6.9) містяться коефіцієнти розкладу векторів $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ за векторами базису. Нехай

$$\mathbf{A}_j = x_{i_1 j}\mathbf{A}_{i_1} + x_{i_2 j}\mathbf{A}_{i_2} + \ldots + x_{i_m j}\mathbf{A}_{i_m}, \ j = \overline{1,n}. \tag{6.12}$$

Складемо матрицю $\mathbf{B}$ та визначимо вектори $\mathbf{X}_j$, $\mathbf{X}_0$ за правилом:

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, \ldots, \mathbf{A}_{i_m}\right),$$

$$\mathbf{X}_j = \left(x_{i_1 j}, x_{i_2 j}, \ldots, x_{i_m j}\right)^T,$$

$$\mathbf{X}_0 = \left(x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, \ldots, x_{i_m}^0\right)^T.$$

Тоді, $\mathbf{A}_j = \mathbf{B}\mathbf{X}_j$, $j = \overline{1,n}$. Також $\mathbf{B}\mathbf{X}_0 = \mathbf{b}$. Позначивши матрицю $\mathbf{H} = \left(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n\right)$, отримаємо:

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n\right) = \left(\mathbf{B}\mathbf{X}_1, \mathbf{B}\mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{B}\mathbf{X}_n\right) = \mathbf{B}\left(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n\right) = \mathbf{B}\mathbf{H}.$$

Отже, враховуючи вищенаведені міркування, отримаємо:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}, \tag{6.13}$$

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \tag{6.14}$$

$$\min \mathbf{c}\mathbf{X} = \mathbf{c}_0\mathbf{X}_0, \tag{6.15}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{c}_0\mathbf{H} - \mathbf{c} \le 0, \tag{6.16}$$

де $\mathbf{c}_0 = (\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_m})$ – вектор коефіцієнтів цільової функції, який відповідає векторам базису $\mathbf{az} = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$ – вектор оцінок. Покажемо, що вектор

$$\mathbf{Y}_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0),$$

який визначається рівністю

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{c}_0 \mathbf{B}^{-1}$$

є планом двоїстої задачі (6.10). Враховуючи (6.13)-(6.16), отримаємо:

$$\mathbf{Y}_0\mathbf{A} - \mathbf{c} = \mathbf{c}_0\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c} = \mathbf{c}_0\mathbf{H} - \mathbf{c} = \mathbf{z} \le 0.$$

Отже, $\mathbf{Y}_0\mathbf{A} \le \mathbf{c}$. Тобто, принаймні один план двоїстої задачі існує. Значення цільової функції ЗЛП (6.10) для плану $\mathbf{Y}_0$ дорівнює $\mathbf{Y}_0\mathbf{b}$. Тоді

$$\mathbf{Y}_0\mathbf{b} = \mathbf{c}_0\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_0\mathbf{X}_0 = \min \mathbf{cX}. \qquad (6.17)$$

Для будь-яких планів ЗЛП (6.9) та (6.10) виконується співвідношення:

$$\mathbf{Yb} = \mathbf{YAX}, \mathbf{YA} \le \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{Yb} \le \mathbf{cX},$$

тобто нерівність (6.11) виконується, причому $\max \mathbf{Yb} \le \min \mathbf{cX}$. Оскільки, згідно (6.17) $\mathbf{Y}_0\mathbf{b} = \min \mathbf{cX}$ тоді, $\max \mathbf{Yb} \le \mathbf{Y}_0\mathbf{b}$. Звідси отримаємо, що $\max \mathbf{Yb} = \mathbf{Y}_0\mathbf{b}$, оскільки $\mathbf{Y}_0$ є планом задачі (6.10). Тобто $\mathbf{Y}_0$ – оптимальний розв’язок задачі (6.10). Враховуючи вищенаведену рівність та рівність (6.17), отримаємо:

$$\max \mathbf{Yb} = \mathbf{Y}_0\mathbf{b} = \min \mathbf{cX}.$$

Перша частина доведена.

Доведемо другу частину. Нехай відомо, що цільова функція задачі (6.9) є необмеженою знизу. Покажемо, що множина планів задачі (6.10) є порожньою. Від супротивного припустимо, що задача (6.10) має деякий план $\overline{\mathbf{Y}}$, значення цільової функції для якого дорівнює $\overline{\mathbf{Y}}\mathbf{b}$. Оскільки цільова функція задачі (6.9) необмежена знизу, то існує такий план $\overline{\mathbf{X}}$ цієї задачі, що значення цільової функції задачі (6.9) буде менше за число $\overline{\mathbf{Y}}\mathbf{b}$. Тобто $\mathbf{c}\overline{\mathbf{X}} < \overline{\mathbf{Y}}\mathbf{b}$. Отримана нерівність суперечить доведеній нерівності (6.11). Отже, наше припущення неправильне і множина планів задачі (6.10) є порожньою. **Теорема 6.1 доведена.**

Теорема 6.2. (Друга теорема двоїстості). Для того, щоб плани $\overline{\mathbf{X}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T$, $\overline{\mathbf{Y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$ задач (6.9), (6.10) були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувались рівності:

$$(a_{1j}\bar{y}_1 + a_{2j}\bar{y}_2 + \ldots + a_{mj}\bar{y}_m - c_j)\bar{x}_j = 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Доведення. Достатність. Нехай $\overline{\mathbf{X}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T$ і $\overline{\mathbf{Y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$ - плани відповідно задач (6.9) та (6.10) і якщо при деякому $j\ (j = \overline{1,n})$ має місце нерівність:

$$a_{1j}\bar{y}_1 + a_{2j}\bar{y}_2 + \ldots + a_{mj}\bar{y}_m < c_j$$

то $\bar{x}_j = 0$. Якщо ж $\bar{x}_j > 0$, то

$$a_{1j}\bar{y}_1 + a_{2j}\bar{y}_2 + \ldots + a_{mj}\bar{y}_m = c_j.$$

Тоді

$$\mathbf{c}\overline{\mathbf{X}} = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_n\bar{x}_n = (a_{11}\bar{y}_1 + a_{21}\bar{y}_2 + \ldots + a_{m1}\bar{y}_m)\bar{x}_1 +$$
$$+ (a_{12}\bar{y}_1 + a_{22}\bar{y}_2 + \ldots + a_{m2}\bar{y}_m)\bar{x}_2 + \ldots + (a_{1n}\bar{y}_1 + a_{2n}\bar{y}_2 + \ldots + a_{mn}\bar{y}_m)\bar{x}_n.$$

Перегрупувавши доданки в правій частині рівності, одержимо:

$$\mathbf{c}\overline{\mathbf{X}} = (a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + \ldots + a_{1n}\bar{x}_n)\bar{y}_1 +$$
$$+ (a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + \ldots + a_{2n}\bar{x}_n)\bar{y}_2 + \ldots + (a_{m1}\bar{x}_1 + a_{m2}\bar{x}_2 + \ldots + a_{mn}\bar{x}_n)\bar{y}_m$$

Оскільки $\overline{\mathbf{X}}$ – план задачі (6.9), то

$$a_{i1}\bar{x}_1 + a_{i2}\bar{x}_2 + \ldots + a_{in}\bar{x}_n = b_i,\quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

Тому

$$\mathbf{c}\overline{\mathbf{X}} = b_1\bar{y}_1 + b_2\bar{y}_2 + \ldots + b_m\bar{y}_m = \overline{\mathbf{Y}}\mathbf{b}.$$

Це означає, що $\overline{\mathbf{X}}$ і $\overline{\mathbf{Y}}$ – оптимальні плани відповідно задач (6.9) та (6.10).

Необхідність. Нехай відомо, що $\overline{\mathbf{X}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T$ і $\overline{\mathbf{Y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$ – оптимальні плани відповідно задач (6.9) і (6.10). Тоді на основі першої теореми двоїстості:

$$b_1\bar{y}_1 + b_2\bar{y}_2 + \ldots + b_m\bar{y}_m = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_n\bar{x}_n.$$

Оскільки

$$a_{i1}\bar{x}_1 + a_{i2}\bar{x}_2 + \ldots + a_{in}\bar{x}_n = b_i \;\; (i = 1,2,\ldots,m),$$

то

$$c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_n\bar{x}_n = (a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + \ldots + a_{1n}\bar{x}_n)\bar{y}_1 +$$
$$+ (a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + \ldots + a_{2n}\bar{x}_n)\bar{y}_2 + \ldots + (a_{m1}\bar{x}_1 + a_{m2}\bar{x}_2 + \ldots + a_{mn}\bar{x}_n)\bar{y}_m,$$

або

$$c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_n\bar{x}_n = (a_{11}\bar{y}_1 + a_{21}\bar{y}_2 + \ldots + a_{m1}\bar{y}_m)\bar{x}_1 +$$
$$+ (a_{12}\bar{y}_1 + a_{22}\bar{y}_2 + \ldots + a_{m2}\bar{y}_m)\bar{x}_2 + \ldots + (a_{1n}\bar{y}_1 + a_{2n}\bar{y}_2 + \ldots + a_{mn}\bar{y}_m)\bar{x}_n.$$

Звідси

$$(a_{11}\bar{y}_1 + a_{21}\bar{y}_2 + \ldots + a_{m1}\bar{y}_m - c_1)\bar{x}_1 + (a_{12}\bar{y}_1 + a_{22}\bar{y}_2 + \ldots + a_{m2}\bar{y}_m - c_2)\bar{x}_2 +$$
$$+ \ldots + (a_{1n}\bar{y}_1 + a_{2n}\bar{y}_2 + \ldots + a_{mn}\bar{y}_m - c_n)\bar{x}_n = 0.$$

Це означає, що для кожного індекса j, для якого $a_{1j}\bar{y}_1 + a_{2j}\bar{y}_2 + \ldots + a_{mj}\bar{y}_m < c_j$ обов'язково $\bar{x}_j = 0$. Що й треба було довести.

Теорема 6.2 доведена.

Отже, якщо оптимальний план двоїстої задачі (6.10) перетворює j -те обмеження цієї задачі у строгу нерівність, то j -та компонента оптимального плану початкової задачі (6.9) дорівнює нулю. Навпаки, якщо для всякого $j \left(j = \overline{1,n} \right)$, для якого план $\overline{\mathbf{Y}}$ двоїстої задачі перетворює j-те обмеження у строгу нерівність, а j -та компонента плану $\overline{\mathbf{X}}$ початкової задачі дорівнює нулю, то плани $\overline{\mathbf{X}}$ і $\overline{\mathbf{Y}}$ відповідно задач (6.9) і (6.10) є оптимальними.

Для задач (6.7), (6.8) другу теорему двоїстості можна ще «підсилити».

Теорема 6.3. (Друга теорема двоїстості для симетричної пари двоїстих задач). Для того, щоб плани $\overline{\mathbf{X}} = \left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n \right)$, $\overline{\mathbf{Y}} = \left(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n \right)$ відповідно задач (6.7) та (6.8) були оптимальними планами цих задач, необхідно і досить, щоб виконувалися наступні рівності:

$$\left(a_{1j}\bar{y}_1 + a_{2j}\bar{y}_2 + \ldots + a_{mj}\bar{y}_m - c_j \right)\bar{x}_j = 0,\; j = \overline{1,n};$$
$$\left(a_{i1}\bar{x}_1 + a_{i2}\bar{x}_2 + \ldots + a_{in}\bar{x}_n - b_i \right)\bar{y}_i = 0,\; i = \overline{1,m}.$$

6.3. Зв'язок між псевдопланами ЗЛП та опорними планами двоїстої задачі

Викладки даного параграфа краще робити для задач, записаних у векторній формі. Тому розглянемо канонічну ЗЛП

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{cX} \to \min, \tag{6.18}$$

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \ldots + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{b}, \tag{6.19}$$

$$\mathbf{X} \geq 0, \tag{6.20}$$

та відповідну їй двоїсту задачу

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Yb} \to \max, \tag{6.21}$$

$$\mathbf{A}_j\mathbf{Y} \leq c_j,\ j = \overline{1,n}. \tag{6.22}$$

Вектор $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назвемо опорним розв'язком СЛАР (6.19), якщо його компоненти задовольняють систему (6.19) і вектори $\mathbf{A}_j$, які відповідають ненульовим компонентам вектора $\mathbf{X}$, утворюють лінійно незалежну систему.

Базисом опорного розв'язку $\mathbf{X}$ СЛАР (6.19) називається довільна лінійна незалежна система із m векторів $\mathbf{A}_j$, яка містить всі вектори, що відповідають ненульовим компонентам вектора $\mathbf{X}$.

Розглянемо будь-який опорний розв'язок СЛАР (6.19) $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Нехай базисом, що йому відповідає, буде система векторів $\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, \ldots, \mathbf{A}_{i_m}$. Нехай розклад векторів $\mathbf{A}_j,\ j = \overline{1,n}$ за векторного базису має вигляд:

$$\mathbf{A}_j = x_{i_1 j}\mathbf{A}_{i_1} + x_{i_2 j}\mathbf{A}_{i_2} + \ldots + x_{i_m j}\mathbf{A}_{i_m},\ j = \overline{1,n}.$$

Тоді

$$\Delta_j = z_j - c_j = c_{i_1}x_{i_1 j} + c_{i_2}x_{i_2 j} + \ldots + c_{i_m}x_{i_m j} - c_j,\ j = \overline{1,n}.$$

Опорний розв'язок $\mathbf{X}$ СЛАР (6.19) називається псевдопланом ЗЛП (6.18)-(6.20), якщо для всіх $j\ (j = \overline{1,n})$ виконується умова $\Delta_j \leq 0$.

Теорема 6.4. (Ознака оптимальності псевдоплану) Псевдоплан ЗЛП (6.18)-(6.20), у якого всі компоненти невід'ємні, є її оптимальним планом.

Доведення. Нехай $\mathbf{X}$ – псевдоплан задачі (6.18)-(6.20), всі компоненти якого невід'ємні. Тоді $\mathbf{X}$ є опорним планом задачі (6.18)-(6.20), для якого виконуються умови оптимальності $\Delta_j \le \mathbf{0},\ j = \overline{1,n}$. Отже, $\mathbf{X}$ – оптимальний план даної задачі.

Теорема 6.4 доведена.

План $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ двоїстої задачі (6.21), (6.22) називається опорним, якщо:

1) існує не менше як m індексів j, для яких виконуються умови $\mathbf{YA}_j = c_j$;
2) серед векторів $\mathbf{A}_j$ таких, що $\mathbf{YA}_j = c_j$ є m лінійно незалежних.

Базисом опорного плану $\mathbf{Y}$ двоїстої задачі називається довільна система з m лінійно незалежних векторів $\mathbf{A}_j$, таких, що $\mathbf{YA}_j = c_j$.

Опорний план $\mathbf{Y}$ двоїстої задачі називається невиродженим планом, якщо для будь-якого $\mathbf{A}_j$, який не належить до його базису, виконується умова $\mathbf{YA}_j < c_j$. В протилежному випадку опорний план $\boldsymbol{Y}$ називається виродженим.

Двоїста задача (6.21), (6.22) називається невиродженою, якщо всі її опорні плани є невиродженими.

Теорема 6.5. Кожному псевдоплану $\mathbf{X}$ задачі (6.18)-(6.20) з базисом $\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, \ldots, \mathbf{A}_{i_m}$ відповідає опорний план $\mathbf{Y}$ двоїстої задачі (6.21), (6.22) з цим же базисом.

Доведення. Введемо позначення:

$$\mathbf{c^0} = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m}) \, , \; \mathbf{B} = (\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, \ldots, \mathbf{A}_{i_m}) \, .$$

Оскільки $\mathbf{X}$ - псевдоплан, то $\Delta_j \le 0$ для всіх j $(j = \overline{1,n})$. Тому з першої теореми двоїстості випливає, що вектор $\mathbf{Y} = \mathbf{c^0 B}^{-1}$ буде планом двоїстої задачі. А це означає, що $\mathbf{Y}$ задовольняє систему рівнянь

$$\mathbf{YB} = \mathbf{c}^0$$

або

$$\mathbf{YA}_{i_k} = c_{i_k} \, , \; k = \overline{1,m} \, .$$

Вектори $\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, \ldots, \mathbf{A}_{i_m}$ є лінійно незалежні. Тому з останньої рівності випливає, що вектор $\mathbf{Y}$ є опорним планом двоїстоі задачі і базис, що йому відповідає, складається з векторів $\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, \ldots, \mathbf{A}_{i_m}$.

Теорема 6.5 доведена.

Теорема 6.6. Кожному псевдоплану $\mathbf{X}$ задачі (6.18)-(6.20) з базисом $\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, \ldots, \mathbf{A}_{i_m}$ і оцінками $\Delta_j < 0$ для тих індексів *j*, які не збігаються з індексами векторів базису, відповідає невироджений опорний план $\mathbf{Y}$ двоїстої задачі (6.21), (6.22) з цим же базисом.

Доведення. На основі теореми 6.5 псевдоплану $\mathbf{X}$ з базисом $\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, \ldots, \mathbf{A}_{i_m}$ відповідає опорний план $\mathbf{Y} = \mathbf{c^0 B}^{-1}$ двоїстої задачі з цим же базисом. Звідси випливає, що $\mathbf{Y}$ задовольняє систему рівнянь:

$$\mathbf{YB} = \mathbf{c^0},$$

або

$$\mathbf{YA}_{i_k} = c_{i_k} \, , \; k = \overline{1,m} \, .$$

Таким чином, компоненти опорного плану $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ задовольняють систему рівнянь:

$$\sum_{s=1}^{m} y_s a_{si_k} = c_{i_k} \, , \; k = \overline{1,m} \, .$$

Нехай розклад векторів $\mathbf{A}_j$ через вектори базису має вигляд:

$$\mathbf{A}_j = x_{i_1 j}\mathbf{A}_{i_1} + x_{i_2 j}\mathbf{A}_{i_2} + \ldots + x_{i_m j}\mathbf{A}_{i_m} \, , \; j = \overline{1,n} \, .$$

Тоді для компонент вектора одержуємо вирази:

$$a_{sj}=\sum_{k=1}^{m}a_{si_k}x_{i_kj},s=\overline{1,m}.$$

Тому

$$\Delta_j=\sum_{k=1}^{m}c_{i_k}x_{i_kj}-c_j=\sum_{k=1}^{m}(\sum_{s=1}^{m}y_sa_{si_k})x_{i_kj}-c_j=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}y_s(\sum_{k=1}^{m}a_{si_k}x_{i_kj})-c_j=\sum_{k=1}^{m}a_{sj}y_s-c_j.$$

Звідси випливає, що для тих індексів *j*, для яких $\Delta_j<0$ завжди $\sum_{s=1}^{m}a_{sj}y_s<c_j$. Це означає, що опорний план $\mathbf{Y}$ двоїстої задачі невироджений.

Теорема 6.6 доведена.

Теорема 6.7. Значення цільової функції для псевдоплану $\mathbf{X}$ задачі (6.18)-(6.20) збігається зі значенням цільової функції для відповідного опорного плану $\mathbf{Y}$ двоїстої задачі (6.21), (6.22).

Доведення. Нехай $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ псевдоплан задачі (6.18)-(6.20) і базис, що йому відповідає, складається з векторів $\mathbf{A}_{i_1},\mathbf{A}_{i_2},\ldots,\mathbf{A}_{i_m}$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{m}a_{si_k}x_{i_k}=b_s,\ s=\overline{1,m}.$$

Псевдоплану $\mathbf{X}$ відповідає опорний план $\mathbf{Y}=\mathbf{c}^0\mathbf{B}^{-1}$ двоїстої задачі. Тому компоненти вектора $\mathbf{Y}$ задовольняють систему рівнянь:

$$\sum_{s=1}^{m}y_sa_{si_k}x_{i_k}=c_{i_k},k=\overline{1,m}.$$

Виходячи з цього, одержуємо:

$$F(\mathbf{Y})=\sum_{s=1}^{m}b_sy_s=\sum_{s=1}^{m}(\sum_{k=1}^{m}a_{si_k}x_{i_k})y_s=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}x_{i_k}(\sum_{s=1}^{m}y_sa_{si_k})=\sum_{k=1}^{m}c_{i_k}x_{i_k}=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=f(\mathbf{X}),$$

тобто значення цільових функцій відповідно для псевдоплану $\mathbf{X}$ задачі (6.18)-(6.20) і для відповідного опорного плану $\mathbf{Y}$ двоїстої задачі (6.21), (6.22) збігаються.

Теорема 6.7 доведена.

Контрольні запитання

1. Які ЗЛП називаються парою симетричних взаємодвоїстих задач?
2. Що можна сказати про множину допустимих розв'язків двоїстої задачі, якщо цільова функція прямої задачі необмежена?
3. Якщо i-та компонента оптимального плану прямої задачі не дорівнює нулю, то який знак має бути у відповідному обмеженні двоїстої задачі?
4. Чим відрізняється друга теорема двоїстості для симетричної пари двоїстих задач від відповідної теореми для пари взаємодвоїстих звичайних ЗЛП?
5. Дайте означення псевдоплану ЗЛП.
6. Коли псевдоплан стає оптимальним планом ЗЛП?
7. Яким чином псевдоплани ЗЛП пов'язані з опорними планами двоїстої задачі?

ТЕМА 7. ДВОЇСТИЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

7.1. Теоретичні основи

Двоїстий симплекс-метод полягає в послідовному переході від одного псевдоплану задачі до іншого, значення цільової функції для якого більше (в задачі на мінімум), ніж для попереднього псевдоплану, оскільки на кожному кроці виключаються від'ємні компоненти. В результаті, згідно теореми 6.4, псевдоплан, в якому всі компоненти невід'ємні, є оптимальним планом ЗЛП.

Розглянемо ЗЛП:

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{cX} \to \min, \tag{7.1}$$

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \ldots + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{b}, \tag{7.2}$$

$$\mathbf{X} \geq 0. \tag{7.3}$$

та двоїсту до неї:

$$F(\mathbf{Y}) = \mathbf{Yb} \to \max, \tag{7.4}$$

$$\mathbf{YA}_j \leq c_j, (j = \overline{1,n}). \tag{7.5}$$

Припустимо, що $\mathbf{X}$ - деякий псевдоплан задачі (7.1)-(7.3). Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $\mathbf{X}$ має наступний вигляд:

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0),$$

а відповідний йому базис складається з векторів $\{\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_m}\}$. Знайдемо розклад векторів $\mathbf{A}_j$ через вектори базису, оцінки Δ_j і значення цільової функції z_0 для псевдоплану $\mathbf{X}$. Нехай

$$\mathbf{A}_j = x_{1j}\mathbf{A}_1 + x_{2j}\mathbf{A}_2 + \ldots + x_{mj}\mathbf{A}_m, (j = \overline{1,n}). \tag{7.6}$$

Тоді

$$\Delta_j = c_1x_{1j} + c_2x_{2j} + \ldots + c_mx_{mj} - c_j,\ j = (\overline{1,n}),$$

$$z_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Теорема 7.1. (Ознака переходу до нового псевдоплану). Якщо для псевдоплану $\mathbf{X}$ з базисом $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ виконуються умови:

а) існує такий індекс $l (l \leq m)$, що $x_l < 0$;

б) серед коефіцієнтів $x_{lj}(j=\overline{m+1,n})$ існує такий $x_{lk}<0$, що $\frac{\Delta_k}{x_{lk}} \le \frac{\Delta_j}{x_{lj}}$ для всіх $j(j \ne \overline{1,m;k})$, для яких $x_{lj}<0$,

то введення в базис вектора $\mathbf{A}_k$ замість $\mathbf{A}_l$ дає новий псевдоплан $\mathbf{X}'$ такий, що $f(\mathbf{X}') \ge f(\mathbf{X})$.

Доведення. Припустимо, що умови теореми виконуються. Введемо в базис вектор $\mathbf{A}_k$ замість $\mathbf{A}_l$ і перейдемо від псевдоплану $\mathbf{X}$ до деякого опорного розв'язку $\mathbf{X}'$ системи лінійних рівнянь (7.2). При цьому для перерахунку компонент вектора $\mathbf{X}'$, коефіцієнтів розкладу векторів $\mathbf{A}_j$ через вектори нового базису $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_{l-1}, \mathbf{A}_{l+1}, \dots, \mathbf{A}_m, \mathbf{A}_k\}$, оцінок Δ'_j та значення цільної функції z_0 для X' правило прямокутника. Тоді

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \cdot \Delta_k, (j=\overline{1,n}), \quad z'_0 = z_0 - \frac{x_l}{x_{lk}} \cdot \Delta_k,$$

де $\Delta_j = 0 (j=\overline{1,m})$, $\Delta_j \le 0 (j=\overline{m+1,n})$.

Оскільки $\Delta_j \le 0$, $(j=\overline{m+1,n})$, $x_{lk}<0$, то для тих індексів $j(j \ne 1,2,\dots,m,k)$, для яких $x_{lj} \ge 0$ оцінки $\Delta'_j \le 0$. Для індексів $j(j \ne 1,2,\dots,m,k)$, для яких $x_{lj}<0$, згідно з умовою теореми $\Delta_j \le \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \cdot \Delta_k$ (нерівність змінює знак, оскільки домножується на від'ємне число x_{lj}). Тому для цих індексів j

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \cdot \Delta_k \le 0.$$

Крім того, при $j=l$

$$\Delta'_l = \Delta_l - \frac{x_{ll}}{x_{lk}} \cdot \Delta_k = -\frac{\Delta_k}{x_{lk}} \le 0,$$

бо $x_{ll}=1$, $\Delta_l=0$, $\Delta_k\le 0$, $x_{lk}<0$. Таким чином, беручи до уваги, що $\Delta_j^{/}=0$, $(j=1,2,\ldots,l-1,l+1,\ldots,m,k)$, для опорного розв'язку $\mathbf{X}^{/}$ системи рівнянь ЗЛП (7.1)-(7.3) виконуються умови $\Delta_j^{/}\le 0,(j=\overline{1,n})$. Це означає, що вектор $\mathbf{X}^{/}$ є псевдопланом задачі (7.1)-(7.3). Оскільки $x_l<0$, $\Delta_k\le 0$, $x_{lk}<0$, то $z_0^{/}=z_0-\dfrac{x_l}{x_{lk}}\cdot\Delta_k\ge z_0$, тобто $f(\mathbf{X}^{/})\ge f(\mathbf{X})$.

Теорема 7.1 доведена.

Теорема 7.2. (Ознака нерозв'язності ЗЛП на основі псевдоплану). Якщо для псевдоплану $\mathbf{X}$ задачі (7.1)-(7.3) з базисом $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_m$ існує такий індекс $l\,(l\le m)$, що $x_l<0$ і всі коефіцієнти $x_{lj}\ge 0,(j=m+1,\ldots,n)$, то задача (7.1)-(7.3) не має планів.

Доведення. Припустимо від супротивного, що ЗЛП (7.1)-(7.3) має плани. Нехай одним з таких планів є $\overline{\mathbf{X}}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$. Тоді, згідно умови (7.2), маємо:

$$\bar{x}_1\mathbf{A}_1+\bar{x}_2\mathbf{A}_2+\ldots+\bar{x}_n\mathbf{A}_n=\mathbf{b}.$$

В дану рівність замість векторів $\mathbf{A}_j,(j=\overline{1,n})$ підставимо їх розклади (7.6). Маємо:

$$\bar{x}_1\left(x_{11}\mathbf{A}_1+x_{21}\mathbf{A}_2+\ldots+x_{m1}\mathbf{A}_m\right)+\bar{x}_2\left(x_{12}\mathbf{A}_1+x_{22}\mathbf{A}_2+\ldots+x_{m2}\mathbf{A}_m\right)+\ldots$$
$$+\bar{x}_n\left(x_{1n}\mathbf{A}_1+x_{2n}\mathbf{A}_2+\ldots+x_{mn}\mathbf{A}_m\right)=\mathbf{b}.$$

Перегрупувавши доданки, з вищенаведеної рівності отримаємо:

$$\mathbf{A}_1\left(\bar{x}_1x_{11}+\bar{x}_2x_{12}+\ldots+\bar{x}_nx_{1n}\right)+\mathbf{A}_2\left(\bar{x}_1x_{21}+\bar{x}_2x_{22}+\ldots+\bar{x}_nx_{2n}\right)+\ldots+$$
$$+\mathbf{A}_m\left(\bar{x}_1x_{m1}+\bar{x}_2x_{m2}+\ldots+\bar{x}_nx_{mn}\right)=\mathbf{b}. \qquad (7.7)$$

З іншого боку, за означенням псевдоплану, $\mathbf{X}$ задовольняє систему рівнянь (7.2), тобто:

$$x_1\mathbf{A}_1+x_2\mathbf{A}_2+\ldots+x_m\mathbf{A}_m=\mathbf{b}. \qquad (7.8)$$

Оскільки розклад вектора $\mathbf{b}$ за векторами базису $\left(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_m\right)$ єдиний, то з (7.7) та (7.8) маємо:

$$x_l=\bar{x}_1x_{l1}+\bar{x}_2x_{l2}+\ldots+\bar{x}_nx_{ln}. \qquad (7.9)$$

Тоді

1) за умовою теореми: $x_l < 0$, $x_{lj} \geq 0, (j = m+1,\ldots,n)$;

2) $\overline{\mathbf{X}}$ – план задачі, тому: $\bar{x}_j \geq \mathbf{0}, (j = \overline{1,n})$;

3) для базисних векторів: $x_{lj} = \mathbf{0}, (j \leq m, j \neq l), x_{ll} = 1$.

Отже, в (7.9) зліва стоїть від'ємна величина, а справа – невід'ємна. Отримали протиріччя, яке вказує на неможливість існування плану в ЗЛП (7.1)-(7.3).

Теорема 7.2 доведена.

7.2. Алгоритм двоїстого симплекс-методу

Розглянемо спочатку випадок, коли двоїста задача є не виродженою. Нехай вектор $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є початковим псевдопланом задачі (7.1)-(7.3) і базис, який йому відповідає, складається з векторів $\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, \ldots, \mathbf{A}_{i_m}$. Нехай розклад векторів $\mathbf{A}_j$ через вектори базису має вигляд:

$$\mathbf{A}_j = x_{i_1 j}\mathbf{A}_{i_1} + x_{i_2 j}\mathbf{A}_{i_2} + \ldots + x_{i_m}\mathbf{A}_{i_m} \; (j = \overline{1,n}).$$

Знайдемо різниці Δ_j:

$$\Delta_j = c_{i_1} x_{i_1 j} + c_{i_2} x_{i_2 j} + \ldots + c_{i_m} x_{i_m j} - c_j \; (j = \overline{1,n})$$

і

$$z_0 = c_{i_1} x_{i_1} + c_{i_2} x_{i_2} + \ldots + c_{i_m} x_{i_m}.$$

Алгоритм двоїстого симплекс-методу

1. Заповнюємо початкову симплекс-таблицю.
2. Якщо всі $x_{i_k} \geq \mathbf{0}, (k = \overline{1,m})$, то псевдоплан $\mathbf{X}$ - оптимальний план для задачі (7.1)-(7.3) і вона розв'язана. В протилежному випадку переходимо до кроку 3.
3. Припустимо, що серед $x_{i_k} \; (k = \overline{1,n})$, є від'ємні величини. Тоді можливі такі два випадки:

3.1. Існує такий індекс $k \; (k = \overline{1,m})$, для якого $x_{i_k} < \mathbf{0}$ і всі коефіцієнти $x_{i_k j} \geq 0 (j = \overline{1,n})$.Тоді, згідно теореми 7.2, ЗЛП (7.1)-(7.3) не має планів. Завершуємо роботу.

3.2. Для кожного індекса $k(k=\overline{1,m})$, для якого $x_{i_k}<\mathbf{0}$, серед коефіцієнтів $x_{i_k j}(j=\overline{1,n})$ є хоча б один від'ємний. Тоді згідно теореми 7.1 можна перейти до іншого псевдоплану, значення цільової функції для якого більше, ніж значення цільової функції для початкового псевдоплану. Переходимо до кроку 4.

4. Серед компонент $x_{i_k}\,(k=\overline{1,m})$ псевдоплану вибираємо найбільшу від'ємну. Нехай вибираною є компонента x_l. Тоді вектор $\mathbf{A}_l$ виводиться з базису. Якщо

$$\min\frac{\Delta_j}{x_{lj}}=\frac{\Delta_k}{x_{lk}}, \tag{7.7}$$

де мінімум береться по тих j, для яких $x_{lj}<0$, то вектор $\mathbf{A}_k$ вводимо в базис. Перехід до нової симплекс-таблиці здійснюється за тими ж правилами, як і для звичайного симплекс-методу. Далі переходимо до пункту 2.

При виродженій двоїстій задачі мінімум у формулі (7.7) може досягтись для декількох номерів j. Розроблені спеціальні правила для вибору номеру вектора, який треба ввести в базис, щоб процес не зациклився. Вони аналогічні до правил для звичайного симплекс-методу.

7.3. Знаходження початкового псевдоплану задачі

Для розв'язування ЗЛП двоїстим симплекс-методом необхідно мати початковий псевдоплан і базис, що йому відповідає. Існує декілька способів знаходження початкового псевдоплану, які за складністю еквівалентні пошуку початкового опорного плану при розв'язанні ЗЛП звичайним симплексним-методом. Але у багатьох випадках початковий псевдоплан ЗЛП можна безпосередньо знайти із двоїстої задачі. Для цього потрібно:

1. Записати двоїсту до даної ЗЛП.
2. Знайти опорний план двоїстої задачі і базис, який йому відповідає. Згідно означення, опорний план двоїстої ЗЛП можна знайти, як розв'язок СЛАР із не менше, як m рівнянь виду $\mathbf{YA}_j=c_j$. При цьому серед векторів $\mathbf{A}_j$ має бути m лінійно незалежних і вони утворюють базис опорного плану $\mathbf{Y}$ двоїстої задачі.

3. Згідно теореми 6.5 базис опорного плану двоїстої задачі буде базисом деякого псевдоплану $\mathbf{X}$ прямої задачі. Тому, розкладаючи вектор $\mathbf{b}$ за векторами базису, знайдемо початковий псевдоплан прямої ЗЛП.

Контрольні запитання

1. Який вектор називається псевдопланом ЗЛП?
2. В якому випадку псевдоплан буде оптимальним планом ЗЛП?
3. Сформулюйте ознаку переходу до нового псевдоплану для задачі на максимум.
4. Чи всяку ЗЛП можна розв'язати двоїстим симплекс-методом?
5. Який вектор визначається спочатку в двоїстому симплекс-методі – той, який виводиться з базису? Чи той, який вводиться в базис?
6. Які критерії вибору вектора, що вводиться в базис, в двоїстому симплекс-методі?
7. За яким правилом здійснюється перерахунок елементів нової таблиці в двоїстому симплекс-методі?
8. Сформулюйте правило для уникнення зациклень в двоїстому симплекс-методі.

Лабораторна робота №9
Двоїстий симплекс-метод

Приклад Л9.1.
Розв'язати двоїстим симплекс-методом наступну ЗЛП:

$$f = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 & \geq 40, \\ \quad x_2 \quad 3x_4 + x_5 & \geq 30, \\ \quad x_3 + \quad x_5 + 2x_6 & \geq 20, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6}.$$

Розв'язання.
Вводячи нові невід'ємні змінні x_7, x_8, x_9, записуємо ЗЛП в канонічній формі:

$$f = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 + 0 \cdot (x_7 + x_8 + x_9) \to \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 + x_7 = -40, \\ -x_2 - 3x_4 - x_5 + x_8 = -30, \\ -x_3 - x_5 - 2x_6 + x_9 = -20, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,9}.$$

Початковим псевдопланом задачі буде $\mathbf{X} = (0;0;0;0;0;0;-40;-30;-20)$, а початковим базисом $\mathbf{A}_7, \mathbf{A}_8, \mathbf{A}_9$. Заповнюючи початкову симплекс-таблицю, далі розв'язок продовжуємо двоїстим симплекс-методом з використанням таблиць (табл. Л9.1).

Таблиця Л9.1

Симплекс-таблиці до прикладу Л9.1

Базис	$C_б$	X	$c_1=20$	$c_2=30$	$c_3=15$	$c_4=5$	$c_5=25$	$c_6=10$	$c_7=0$	$c_8=0$	$c_9=0$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
→A_7	0	-40	$\boxed{-2}$	-1	-1	0	0	0	1	0	0
A_8	0	-30	0	-1	0	-3	-1	0	0	1	0
A_9	0	-20	0	0	-1	0	-1	-2	0	0	1
		0	-20↑	-30	-15	-5	-25	-10	0	0	0
A_1	20	20	1	1/2	1/2	0	0	0	-1/2	0	0
→A_8	0	-30	0	-1	0	$\boxed{-3}$	-1	0	0	1	0
A_9	0	-20	0	0	-1	0	-1	-2	0	0	1
		400	0	-20	-5	-5↑	-25	-10	-10	0	0
A_1	20	20	1	1/2	1/2	0	0	0	-1/2	0	0
A_4	5	10	0	1/3	0	1	1/3	0	0	-1/3	0
→A_9	0	-20	0	0	$\boxed{-1}$	0	-1	-2	0	0	1
		450	0	-55/3	-5↑	0	-70/3	-10	-10	-5/3	0
A_1	20	10	1	1/2	0	0	-1/2	-1	-1/2	0	1/2
A_4	5	10	0	1/3	0	1	1/3	0	0	-1/3	0
A_3	15	20	0	0	1	0	1	2	0	0	-1
		550	0	-55/3	0	0	-55/3	0	-10	-5/3	-5

Отже,

$$f_{\min} = 550,\ \mathbf{X}_{\min} = (10;0;20;10;0;0;0;0;0).$$

Завдання для самостійної роботи

Записати до даної ЗЛП двоїсту та знайти її розв'язок двоїстим симплекс-методом.

1. $f = x_1 + 2x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 1, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2. $f = -2x_1 + x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

3. $f = 2x_1 + x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 - x_2 \le 3, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

4. $f = x_1 - 3x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

5. $f = 4x_1 + 2x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - x_2 \le 15, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

6. $f = -2x_1 - 3x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - 4x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 5, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

7. $f = 2x_1 + x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 - 4x_2 \le 4, \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

8. $f = -5x_1 - 10x_2 - 2x_3 \to \min,$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_{3.} \ge 0.$

9. $f = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 24, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 36, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

10. $f = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12, \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 24, \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 15, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

11. $f = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 \qquad x_4 \le 30, \\ 4x_1 - 2x_2 \quad + 8x_4 \le 32, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}.$

12. $f = -18x_1 - 24x_2 - 12x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -2x_1 \quad + x_3 \quad \le 1, \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \quad \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \qquad \le 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

13. $f = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 30, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6}.$

14. $f = -2x_1 - x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 \le 14, \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 18, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

15. $f = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 12, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 \le 18, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 16, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

16. $f = -3x_1 - 5x_2 - 6x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 \le 12, \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 15, \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 \le 17, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

17. $f = 2x_1 - x_3 + 3x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 18, \\ 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 24, \\ x_2 + x_4 - 2x_5 + x_6 = 20, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6}.$

18. $f = 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 3x_3 \le 9, \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 18, \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 14. \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}.$

19. $f = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6}.$

20. $f = -5x_1 - 4x_2 - 6x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 11, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

21. $f = x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \le 12, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, \\ -4x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

22. $f = -4x_1 - 7x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 - 4x_3 \le 24, \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 15, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

23. $f = -6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 18, \\ -4x_1 + 3x_2 + x_3 \le 36, \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 24, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

24. $f = -10x_1 - 5x_2 - 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

25. $f = -5x_1 + 3x_2 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 - 3x_4 \le 30, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 28, \\ 8x_1 - 2x_3 + 4x_1 \le 32, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}.$

ТЕМА 8. ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

8.1. Постановка задачі лінійного цілочислового програмування

Задачі лінійного цілочислового програмування (ЗЛЦП) вивчаються в розділі лінійного програмування, де на змінні повністю або частково накладені умови цілочисловості. Такі задачі, звичайно, беруть початок з економіки. Адже не логічно, наприклад, говорити, що оптимальний план випуску продукції машинобудівного заводу – це 3,2 трактори і 8,7 комбайнів.

ЗЛЦП у загальному випадку формул наступним чином:

$$f(\mathbf{X}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =,\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =,\} b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =,\} b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,n}),$$

$$x_i \text{ - цілі } (i = \overline{1,n_1}).$$

Якщо $n_1 < n$, то ЗЛЦП – називається частково цілочисловою, якщо $n_1 = n$, то повністю цілочисловою.

Застосувати загальні методи лінійного програмування безпосередньо до ЗЛЦП не можна, бо вони, як правило, дають дробові розв’язки. Тому є потреба в розробці спеціальних методів. Усі спеціальні методи розв’язання ЗЛЦП можна поділити на три групи:

1. Методи відтинання (метод Гоморі та його модифікації).
2. Комбінаторні методи (метод гілок та меж).
3. Методи випадкового пошуку та евристичні методи.

8.2. Метод Гоморі

Розглянемо наступну повністю цілочислову ЗЛЦП:

$$f(\mathbf{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min, \tag{8.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{8.2}$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,n}), \tag{8.3}$$

$$x_i \text{ - цілі } (i = \overline{1,n}). \tag{8.4}$$

Множина планів ЗЛП (8.1)-(8.3) є опуклою множиною $\mathbf{M}$. Множина планів ЗЛЦП (8.1)-(8.4) – це сукупність цілочислових ізольованих точок, які належать множині $\mathbf{M}$. Позначимо дану множину через $\mathbf{N}$, а її опуклу оболонку - через $\mathbf{M}'$ (рис.8.1).

Очевидно, що $\mathbf{M}' \subseteq \mathbf{M}$. Неважко переконатися, що оптимальний план задачі з цільовою функцією (8.1) і допустимою множиною $\mathbf{M}'$ збігається з оптимальним планом ЗЛЦП (8.1)-(8.4). Ця властивість дає змогу використовувати для розв'язку ЗЛЦП (8.1)-(8.4) методи розв'язування ЗЛП і вона лежить в основі методів відтинання. До методів відтинання належить метод Гоморі, схематичний алгоритм якого наступний:

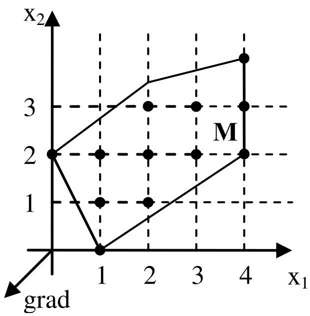

Рис. 8.1. Множини **M** та **N** (відмічені точки)

ЗЛП (8.1)-(8.3) розв'язуємо симплекс-методом.

1. Якщо одержаний оптимальний розв'язок є цілочисловий, то він буде оптимальним розв'язком ЗЛЦП (8.1)-(8.4). Задача розв'язана.
2. Якщо отриманий оптимальний розв'язок ЗЛП (8.1)-(8.3) не є цілочисловим, то складають додаткове обмеження, яке відтинає від множини $\mathbf{M}$ ту частину області, у якій знаходиться оптимальний розв'язок ЗЛП (8.1)-(8.3), але у якій немає планів ЗЛЦП (8.1)-(8.4).

3.ЗЛП (8.1)-(8.3), доповнену додатковим обмеженням, розв'язують двоїстим симплекс методом і переходять до пункту 2 алгоритму.

Розглянемо питання побудови додаткових обмежень, про які сказано в пункті 3 вищенаведеного алгоритму. Припустимо, що ЗЛЦП (8.1)-(8.4) має розв'язок. Тоді ЗЛП (8.1)-(8.3) також буде мати розв'язок. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $\overline{\mathbf{X}} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_m}, 0, 0, \ldots, 0)$ - оптимальний план ЗЛП (8.1)-(8.3), а відповідний базис складається із системи векторів $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m\}$. Нехай остання симплекс-таблиця для розв'язку ЗЛП (8.1)-(8.3) має вигляд таблиці 8.1.

Таблиця 8.1

Симплекс-таблиця до ЗЛП (8.1)-(8.3)

Б	Cб	X	$\mathbf{c}_1 =$	$\mathbf{c}_2 =$	...	$\mathbf{c}_m =$	$\mathbf{c}_{m+1} =$	...	$\mathbf{c}_n =$	θ_i
$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{C}_1$	$\overline{x_1}$	1	0	...	0	$x_{1,m+1}$	...	x_{1n}	
$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{C}_2$	$\overline{x_2}$	0	1	...	0	$x_{2,m+1}$	...	x_{2n}	
...	...	...	...	...	...	...	...			
$\mathbf{A}_l$	$\mathbf{C}_l$	$\overline{x_l}$	0	0	...	0	$x_{l,m+1}$	...	x_{1n}	
...	...	...	...	...	...	...	...	...		
$\mathbf{A}_m$	$\mathbf{C}_m$	$\overline{x_m}$	0	0	...	1	$x_{m,m+1}$	...	x_{mn}	
		z_0	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_n	

Таблиці 8.1 відповідає наступна СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 + \qquad\qquad + x_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + x_{1n}x_n = \overline{x_1}, \\ \quad + x_2 \qquad\qquad + x_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + x_{2n}x_n = \overline{x_2}, \\ \qquad\quad + x_3 \qquad + x_{3,m+1}x_{m+1} + \ldots + x_{3n}x_n = \overline{x_3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad + x_m + x_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + x_{mn}x_n = \overline{x_m}, \end{cases}$$

або

$$x_i - \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij} x_j = \bar{x}_i,\ i = \overline{1,m}.$$

Нехай серед компонент оптимального плану $\overline{\mathbf{X}}$ є хоча б одна дробова компонента. Нехай це буде $\overline{x_l}$. Тоді серед x_{lj} ($j = \overline{m+1,n}$) також мають бути дробові. Дійсно, як би серед x_{lj} ($j = \overline{m+1,n}$) не було дробових, то не можна було б підібрати цілих $x_l, x_{m+1}, \ldots, x_n$ так, щоб виконувалась рівність:

$$x_l = \overline{x_l} - \sum_{j=m+1}^{n} x_{lj} x_j\ . \tag{8.5}$$

А це означало б , що задача (8.1)-(8.4) не має розв'язку, що суперечило б нашому припущенню.

Нехай $[a]$ - ціла частина числа. За означенням ціла частина – це найбільше ціле число, яке не перевищує задане. Нехай $\{a\} = a - [a]$ - дробова частина числа. Очевидно, що $0 \le \{a\} \le 1$.

Покажемо, що лінійне обмеження

$$x_{n+1} = -\{\overline{x_l}\} - \sum_{j=m+1}^{n} (-\{x_{lj}\}) x_j\ , \tag{8.6}$$

де x_{n+1} - нова змінна, задовольняють усі плани ЗЛЦП (8.1)-(8.4), але не задовольняє знайдений оптимальний план ЗЛП (8.1)-(8.3).

Спочатку переконаємось, що при цілочисловому $\mathbf{X}$ виконуються умови $x_{n+1} \ge 0$ і x_{n+1} - ціле. З (8.5) та (8.6) отримаємо:

$$x_l = [\overline{x_l}] + \{\overline{x_l}\} - \sum_{j=m+1}^{n} ([x_{lj}] + \{x_{lj}\}) x_j = \{\overline{x_l}\} -$$

$$- \sum_{j=m+1}^{n} \{x_{lj}\} x_j + [\bar{x}_l] - \sum_{j=m+1}^{n} [x_{lj}] x_j = [\overline{x_l}] - \sum_{j=m+1}^{n} [x_{lj}] x_j - x_{n+1}.$$

Отже,

$$x_{n+1} = [\overline{x_l}] - \sum_{j=m+1}^{n} [x_{lj}] x_j - x_l\ .$$

Оскільки $[\overline{x_l}], [x_{lj}]$ - є цілим, то при $\mathbf{X} \in N$ отримаємо, що x_{n+1} - ціле.

Доведемо, що $x_{n+1} \geq 0$. Припустимо від супротивного, що $x_{n+1} < 0$. Оскільки x_{n+1} – ціле, то це означає, що $x_{n+1} \leq -1$. Тоді з (8.6) маємо:

$$-\{x_l\} - \sum_{j=m+1}^{n} (-\{x_{lj}\}) x_j \leq -1. \quad (8.7)$$

Оскільки $x_j \geq 0$ і $0 \leq \{x_{lj}\} < 1$, $j = \overline{m+1, n}$, то з нерівності (8.7) отримуємо

$$0 \leq -\sum_{j=m+1}^{n} (-\{x_{lj}\}) x_j \leq -1 + \{\overline{x_l}\}.$$

Отже, $\{\bar{x}_l\} - 1 \geq 0$. Звідси $\{\bar{x}_l\} \geq 1$, що неможливо. Отже, зроблене припущення неправильне і $x_{n+1} \geq 0$.

Компоненти вектора $\overline{\mathbf{X}}$ не задовольняють обмеження (8.6). Дійсно, підставляючи компоненти вектора $\overline{\mathbf{X}}$ в обмеження (8.6) та враховуючи, що $\overline{x_{m+1}} = \overline{x_{m+2}} = ... = \overline{x_n} = 0$, отримаємо $x_{n+1} = -\{\overline{x_l}\} < 0$. А це неможливо, оскільки за вищенаведеним $x_{n+1} \geq 0$.

Якщо таблицю 8.1 доповнити $(n+2)$-м рядком, який відповідає додатковому обмеженню (8.6), і новим стовпчиком з коефіцієнтами розкладу нового вектора $\mathbf{A}_{n+1}$ через вектори базису (сам базис доповняється вектором $\mathbf{A}_{n+1}$), то отримуємо таблицю 8.2.

Оскільки $\overline{x_i} \geq 0 (i = \overline{1, m})$, $-\{\overline{x_l}\} < 0$, то у таблиці 8.2 маємо псевдоплан і подальше розв'язання проводимо двоїстим симплекс-методом. Якщо отриманий оптимальний розв'язок розширеної задачі теж виявиться не цілочисловим, то будуємо нові додаткові обмеження вигляду (8.6). Цей процес продовжується, поки знайдений розв'язок не буде цілочисловим, або поки не буде доведено, що ЗЛЦП (8.1)-(8.4) не має розв'язку.

Таблиця 8.2

Таблиця 8.1, доповнена новим обмеженням (8.6)

Б	Cб	X	$\mathbf{c}_1 =$	$\mathbf{c}_2 =$	…	$\mathbf{c}_m =$	$\mathbf{c}_{m+1} =$	…	$\mathbf{c}_n =$	$\mathbf{c}_{n+1} =$
$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{c}_1$	$\overline{x_1}$	1	0	…	0	$x_{1,m+1}$	…	x_{1n}	0
$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{c}_2$	$\overline{x_2}$	0	1	…	0	$x_{2,m+1}$	…	x_{2n}	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$\mathbf{A}_l$	$\mathbf{c}_l$	$\overline{x_l}$	0	0	…	0	$x_{l,m+1}$	…	$x_{l,n}$	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$\mathbf{A}_m$	$\mathbf{c}_m$	$\overline{x_m}$	0	0	…	1	$x_{m,m+1}$	…	x_{mn}	0
		z_0	0	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_n	0
$\mathbf{A}_{n+1}$	0	$-\{\overline{x_l}\}$	0	0	…	0	$-\{x_{l,m+1}\}$	…	$-\{x_{l,n}\}$	1

Контрольні запитання

1. Яку ЗЛЦП називають частково цілочисельною?
2. Наведіть геометричну інтерпретацію методу відтинання.
3. Як визначається ціла частина числа? Знайдіть [5,7], [-5,7].
4. Як визначається дробова частина числа? Знайдіть {5,7}, {-5,7}.
5. Запишіть додаткове обмеження методу Гоморі.
6. Яким методом шукається розв’язок розширеної задачі (після введення додаткового обмеження)?
7. Звідки беруть початок постановки задач цілочислового лінійного програмування?

Лабораторна робота №10
Задача лінійного цілочислового програмування

Приклад Л10.1.

Знайти розв'язок ЗЛЦП:

$$f(\mathbf{X}) = -2x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 1; \end{cases} \qquad \text{(Л10.1)}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

$$x_1, \quad x_2 \text{ - цілі.}$$

Розв'язання. Розв'яжемо задачу (Л10.1) симплекс-методом без вимог цілочисловості змінних. Для цього зведемо її до канонічного вигляду. Отримаємо:

$$f(\mathbf{X}) = -2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1; \end{cases} \qquad \text{(Л10.2)}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,4}.$$

Далі використовуємо симплекс-таблиці.

Таблиця Л10.1

Симплекс-таблиці до прикладу Л10.1

	Базис	$C_{базисні}$	**X**	c_1=-2	c_2=1	c_3=0	c_4=0	Θ_i
				$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	
1	$\mathbf{A}_3$	0	6	2	1	1	0	3
	$\to\mathbf{A}_4$	0	1	$\boxed{1}$	-1	0	1	1(min)
			0	2↑	-1	0	0	
2	$\to\mathbf{A}_3$	0	4	0	$\boxed{3}$	1	-2	4/3
	$\mathbf{A}_1$	-2	1	1	-1	0	1	-
			-2	0	1↑	0	-2	
3	$\mathbf{A}_2$	1	4/3	0	1	1/3	-2/3	
	$\mathbf{A}_1$	-2	7/3	1	0	1/3	1/3	
			-10/3	0	0	-1/3	-4/3	

Отже, розв'язком задачі (Л10.2) є вектор $\overline{\mathbf{X}} = \left(\frac{7}{3}; \frac{4}{3}; 0; 0\right)$. Він не є цілочисловим. Тому введемо додаткове обмеження вигляду (8.6), яке задовольняють усі плани задачі (Л10.1), але не задовольняє знайдений оптимальний план. За змінну, на основі якої можна складати відтинання, можна брати x_1 або x_2, бо і перша, і друга компоненти оптимального плану задачі (Л10.2) є дробовими. Візьмемо змінну x_2. Тоді додаткове обмеження набуває вигляду

$$x_5 = -\{\bar{x}_2\} + \{x_{23}\} \cdot x_3 + \{x_{24}\} \cdot x_4,$$

де $\bar{x}_2 = \frac{4}{3}$, $x_{23} = \frac{1}{3}$, $x_{24} = -\frac{2}{3}$. Отже,

$$x_5 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} x_3 + \frac{1}{3} x_4. \qquad \text{(Л10.3)}$$

Доповнюючи таблицю 3 новим рядком, який відповідає додатковому обмеженню і новим стовпчиком з коефіцієнтами розкладу нового вектора $\mathbf{A}_5$ через вектори базису, отримаємо таблицю 4. Далі застосовуємо двоїстий симплекс метод.

(продовження таблиці Л10.1)

	Базис	$C_{базисні}$	**X**	c_1=-2	c_2=1	c_3=0	c_4=0	c_5=0
				$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
4	$\mathbf{A}_2$	1	4/3	0	1	1/3	-2/3	0
	$\mathbf{A}_1$	-2	7/3	1	0	1/3	-1/3	0
			-10/3	0	0	-1/3↓	-4/3	0
	→$\mathbf{A}_5$	0	-1/3	0	0	$\boxed{-1/3}$	-1/3	1
5	$\mathbf{A}_2$	1	1	0	1	0	-1	1
	$\mathbf{A}_1$	-2	2	1	0	0	0	1
			-3	0	0	0	-1	-1
	$\mathbf{A}_3$	0	1	0	0	1	1	-3

З таблиці 5 випливає, що оптимальним планом задачі (Л10.2) з додатковим обмеженням (Л10.3) є вектор $\overline{\mathbf{X}} = (2; 1; 1; 0; 0)$. Отже, розв'язком ЗЛЦП (Л10.1) є вектор $\mathbf{X}_{\min} = (2;1)$ і $f_{\min} = -3$.

Відповідь: $\mathbf{X}_{\min} = (2;1)$, $f_{\min} = -3$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти оптимальний цілочисловий розв’язок ЗЛП.

1. $f=-4x_1-3x_2\to\min,$
$$\begin{cases}4x_1+x_2\le 10,\\ 2x_1+3x_2\le 8,\end{cases}$$
$x_i\ge 0,\ x_i\in Z,\ i=1,2.$

2. $f=-x_2+x_3\to\max,$
$$\begin{cases}3x_2+x_3+x_4=3,\\ x_1-2x_2+x_3=1,\end{cases}$$
$x_i\ge 0,\ x_i\in Z,\ i=\overline{1,4}.$

3. $f=-x_2\to\min,$
$$\begin{cases}3x_1+x_2+x_3=12,\\ -8x_1+3x_2+x_4=24,\end{cases}$$
$x_i\ge 0,\ x_i\in Z,\ i=\overline{1,4}.$

4. $f=x_1+4x_2\to\max,$
$$\begin{cases}2x_1+4x_2\le 17,\\ 10x_1+3x_2\le 15,\end{cases}$$
$x_i\ge 0,\ x_i\in Z,\ i=\overline{1,2}.$

5. $f=-x_1-2x_2\to\min,$
$$\begin{cases}2x_1+2x_2\le 7,\\ 4x_1-5x_2\le 9,\end{cases}$$
$x_i\ge 0,\ x_i\in Z,\ i=\overline{1,2}.$

6. $f=8x_1+6x_2\to\max,$
$$\begin{cases}3x_1+5x_2\le 11,\\ 4x_1+x_2\le 8,\end{cases}$$
$x_i\ge 0,\ x_i\in Z,\ i=\overline{1,2}.$

7. $f=5x_1+6x_2+6x_3\to\min,$
$$\begin{cases}2x_1+6x_2\ge 10,\\ 2x_1+2x_2+2x_3\ge 8,\end{cases}$$
$x_i\ge 0,\ x_i\in Z,\ i=\overline{1,3}.$

8. $f=8x_1+6x_2\to\max,$
$$\begin{cases}2x_1+5x_2\le 12,\\ 4x_1+x_2\le 10.\end{cases}$$
$x_i\ge 0,\ x_i\in Z,\ i=\overline{1,2}.$

9. $f=-x_1-4x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 2x_1+4x_2 \le 7, \\ 10x_1+3x_2 \le 15, \end{cases}$$
$x_i \ge 0, \ x_i \in Z, \ i=\overline{1,2}.$

10. $f=x_1+2x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 5x_1+7x_2 \le 21, \\ -x_1+3x_2 \le 8, \end{cases}$$
$x_i \ge 0, \ x_i \in Z, \ i=\overline{1,2}.$

11. $f=5x_1+6x_2+6x_3 \to \min,$
$$\begin{cases} 2x_1+4x_2 \ge 10, \\ 3x_1+2x_2+2x_3 \ge 8, \end{cases}$$
$x_i \ge 0, \ x_i \in Z, \ i=\overline{1,3}.$

12. $f=x_1+x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 6x_1+5x_2 \le 20, \\ 2x_1+3x_2 \le 10, \end{cases}$$
$x_i \ge 0, \ x_i \in Z, \ i=\overline{1,2}.$

13. $f=x_1+2x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 2x_1+9x_2 \le 36, \\ x_1+x_2 \le 7, \end{cases}$$
$x_i \ge 0, \ x_i \in Z, \ i=\overline{1,2}.$

14. $f=8x_1+6x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 2x_1+5x_2 \le 11, \\ 4x_1+x_2 \le 10, \end{cases}$$
$x_i \ge 0, \ x_i \in Z, \ i=\overline{1,2}.$

15. $f=-x_1-x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \le 18, \\ x_1+2x_2 \le 16, \end{cases}$$
$x_i \ge 0, \ x_i \in Z, \ i=\overline{1,2}.$

16. $f=2x_1+x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 12, \\ 4x_1+x_2 \le 10, \end{cases}$$
$x_i \ge 0, \ x_i \in Z, \ i=\overline{1,2}.$

17. $f=6x_1+4x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \ge 3, \\ x_1-x_2 \ge 1, \end{cases}$$
$x_i \ge 0, \ x_i \in Z, \ i=\overline{1,2}.$

18. $f=2x_1+3x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} x_1+4x_2 \le 14, \\ 2x_1+3x_2 \ge 12, \end{cases}$$
$x_i \ge 0, \ x_i \in Z, \ i=\overline{1,2}.$

19. $f = 2x_1 + 3x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 16, \\ 2x_1 + x_2 \ge 16, \end{cases}$$
$x_i \ge 0,\ \ x_i \in Z,\ \ i = \overline{1,2}.$

20. $f = x_1 + x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 \le 75, \\ 12x_1 + 7x_2 \le 55, \end{cases}$$
$x_i \ge 0,\ \ x_i \in Z,\ \ i = \overline{1,2}.$

21. $f = -5x_1 - 3x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 1, \end{cases}$$
$x_i \ge 0,\ \ x_i \in Z,\ \ i = \overline{1,2}.$

22. $f = 4x_1 + 4x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \le 9, \end{cases}$$
$x_i \ge 0,\ \ x_i \in Z,\ \ i = \overline{1,2}.$

23. $f = -x_1 - x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$$
$x_i \ge 0,\ \ x_i \in Z,\ \ i = \overline{1,2}.$

24. $f = x_1 + x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ \quad x_2 \le 2, \end{cases}$$
$x_i \ge 0,\ \ x_i \in Z,\ \ i = \overline{1,2}.$

25. $f = -5x_1 + 3x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge -6, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 4, \end{cases}$$
$x_i \ge 0,\ \ x_i \in Z,\ \ i = \overline{1,2}.$

ТЕМА 9. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

9.1. Постановка транспортної задачі

Нехай маємо m постачальників $A_1, A_2, \dots, A_m$ із запасами однорідних вантажів $a_1, a_2, \dots, a_m$ та n споживачів $B_1, B_2, \dots, B_n$ з потребами $b_1, b_2, \dots, b_n$. Тарифи перевезень одиниці вантажу, які можуть виражатись різними показниками: відстанями, вартістю або часом, задані у вигляді матриці:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix},$$

де c_{ij} – тариф перевезення одиниці товару з i-го пункту постачання A_i в j-й пункт споживання B_j. Необхідно скласти такий план перевезень вантажів, щоб по можливості задовольнити потреби всіх споживачів, при цьому сумарна вартість перевезень повинна бути мінімальною.

Дана задача, як задача лінійного програмування, може бути розв'язана за допомогою симплекс-методу. Однак, внаслідок практичної важливості транспортної задачі та специфіки обмежень, для її розв'язання розроблені спеціальні методи, які поділяють на дві групи :

1. Базуються на симплекс-методі: метод потенціалів, роздільчий та його модифікації, метод Глейзала та ін.
2. Базуються на методі послідовного скорочення нев'язок: методи розв'язуючих додатків, метод диференціальних рент, угорський метод та його модифікації.

В даному посібнику розглянемо метод потенціалів. Дамо необхідні означення.

Якщо виконується умова

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{9.1}$$

то транспортна задача називається закритою. В протилежному випадку транспортна задача називається відкритою.

Надалі вважатимемо, що умова 9.1 виконується. Нехай x_{ij} – кількість одиниць товару, що планується перевезти з i–го пункту постачання A_i в j-й пункт споживання B_j (шукані величини). Тоді умову транспортної задачі зручно записати у вигляді таблиці 9.1

Таблиця 9.1

Умова транспортної задачі

		СПОЖИВАЧІ						**ОБ'ЄМ ЗАПАСІВ**
		B_1	**B_2**	**…**	**B_j**	**…**	**B_n**	
ПОСТАЧАЛЬНИКИ	**A_1**	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
	A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
	…	…	…	…	…	…	…	…
	A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
	…	…	…	…	…	…	…	…
	A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
ОБ'ЄМ ПОТРЕБ		b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$\Sigma a_i=\Sigma b_j$

Математична модель закритої транспортної задачі є наступною: знайти мінімум цільової функції

$$f(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\rightarrow\min \qquad (9.2)$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1,n}, \qquad (9.3)$$

$$x_{ij}\geq 0, i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \qquad (9.4)$$

Планом транспортної задачі (9.2)-(9.4) називається набір величин $x_{ij}, i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$, який задовольняє умови (9.3) та (9.4).

9.2. Властивості транспортної задачі

Теорема 9.1. Транспортна задача (9.2)-(9.4) завжди має розв’язок.
Доведення. Для доведення теореми потрібно показати, що множина планів транспортної задачі є непорожньою і цільова функція на ній обмежена знизу.

Нехай $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = v$. Розглянемо набір величин:

$$x_{ij} = (a_i \cdot b_j)/v \geq 0, \ (i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}).$$

Тоді

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (a_i \cdot b_j)/v = (a_i / v) \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j = \left(a_i / v \right) \cdot v = a_i, \ \ (i = \overline{1,m});$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} (a_i \cdot b_j)/v = (b_j / v) \cdot \sum_{i=1}^{m} a_i = \left(b_i / v \right) \cdot v = b_j, \ \ (j = \overline{1,n}).$$

Отже, для даного набору чисел $x_{ij}, i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$ виконуються умови (9.3) та (9.4). Тобто, принаймні один план транспортної задачі (9.2)-(9.4) існує. Оскільки $0 \leq x_{ij} \leq \min(a_i, b_j)$, то обов’язково знайдеться така константа $c > -\infty$, що $f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \geq c$. Тобто, цільова функція $f(X)$ є обмеженою знизу на множині планів транспортної задачі (9.2)-(9.4). Тому на цій множині планів обов’язково існує такий набір $x_{ij}, i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$, при якому вона досягає мінімального значення.
Теорема 9.1 доведена.

Теорема 9.2. Число лінійно незалежних рівнянь системи (9.3) дорівнює $(m + n - 1)$.
Доведення. Запишемо систему (9.3) в розгорнутому вигляді. Маємо:

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 , \\
x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 , \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots , \\
x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m , \\
x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 , \\
x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2 , \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots , \\
x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n .
\end{cases}
$$

Додамо n останніх рівнянь системи і від одержаної суми віднімемо суму другого, третього і т.д. m-го рівняння. Маємо:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=2}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=2}^{m} a_i .$$

Оскільки $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=2}^{m} a_i = v - \sum_{i=2}^{m} a_i = a_1$, то з вищенаведеної рівності отримуємо:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = a_1 .$$

Отримане рівняння є першим рівнянням системи (9.3). Отже, перше рівняння системи є лінійною комбінацією всіх інших рівнянь. А це означає, що система (9.3) містить не більше, ніж $(m+n-1)$ лінійно незалежних рівнянь.

Щоб показати, що число лінійно незалежних рівнянь системи дорівнює $(m+n-1)$, досить у матриці $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \ldots, \mathbf{A}_{1n}, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{22}, \ldots, \mathbf{A}_{2n}, \ldots, \mathbf{A}_{m1}, \mathbf{A}_{m2}, \ldots, \mathbf{A}_{mn})$ системи (9.3) де

$$\mathbf{A}_{ij} = \left(\underbrace{\underbrace{0,0,\ldots,0,1}_{i},0,0,\ldots,0}_{m},\underbrace{\underbrace{0,0,\ldots,0,1}_{j},0,0,\ldots,0}_{n} \right)^{T} ,$$

виявити квадратну підматрицю порядку $(m+n-1)$, визначник якої не дорівнює нулеві. Такою підматрицею є, наприклад, матриця, складена з перших $(m+n-1)$ компонент векторів $\mathbf{A}_{1n}$, $\mathbf{A}_{1n}, \mathbf{A}_{2n}, \ldots, \mathbf{A}_{mn}, \mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \ldots, \mathbf{A}_{1,n-1}$. Дійсно, її визначник:

$$\begin{matrix} m\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \\ n-1\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Теорема 9.2 доведена.

Є ще одна чудова властивість ТЗ [Цегелик, 1995], яку ми доводити не будемо, а лише сформулюємо.

Теорема 9.3. Якщо в транспортній задачі числа $a_i, i=\overline{1,m}, b_j, j=\overline{1,n}$ є цілими, то серед її розв'язків є хоча б один цілочисловий.

9.3. Критерій опорності планів та критерій невиродженості транспортної задачі

Перепишемо систему обмежень (9.3) у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_0,$$

де $\mathbf{A}_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$.

План $\mathbf{X} = (x_{ij})_{i=1;\, j=1}^{m\; n}$ транспортної задачі називається опорним, якщо вектори $\mathbf{A}_{ij}$, які відповідають додатнім величинам x_{ij} плану $\mathbf{X}$, утворюють лінійно незалежну систему .

Опорний план $\mathbf{X} = (x_{ij})_{i=1;\, j=1}^{m;\, n}$ транспортної задачі називається невиродженим, якщо він містить рівно $(m+n-1)$ додатних величин x_{ij}. В протилежному випадку, якщо додатних величин менше за $(m+n-1)$, опорний план називається виродженим.

Транспортна задача називаються не виродженою, якщо всі її опорні плани є не виродженими. Якщо хоч би один опорний план транспортної задачі є виродженим, то вона називається виродженою.

Базисом опорного плану $\mathbf{X}$ транспортної задачі будемо вважати будь-яку систему з $(m+n-1)$ лінійно незалежних векторів $\mathbf{A}_{ij}$, яка містить усі вектори, що відповідають додатнім перевезенням плану.

Розглянемо довільну таблицю розміром $m \times n$. Клітинку таблиці, яка розміщена на перетині i-го рядка та j-го стовпця таблиці, позначимо через (i,j). Встановимо взаємно однозначну відповідність між клітинами таблиці й векторами $\mathbf{A}_{ij}$ умов транспортної задачі. Набір клітин

$$(i_1,j_1),\ (i_1,j_2),\ (i_2,j_2),\ (i_2,j_3),\ \ldots\ldots\ldots$$

або

$$(i_1,j_1),\ (i_2,j_1),\ (i_2,j_2),\ (i_3,j_1),\ \ldots\ldots\ldots$$

будемо називати ланцюжком. Ланцюжок вважатимемо замкнутим, якщо він має вигляд:

$$(i_1,j_1),\ (i_1,j_2),\ (i_2,j_2),\ (i_2,j_3),\ \ldots\ldots\ldots,\ (i_s,j_1)$$

або

$$(i_1,j_1),\ (i_2,j_1),\ (i_2,j_2),\ (i_3,j_1),\ \ldots\ldots\ldots,\ (i_1,j_s)$$

Відмітимо, що ланцюжок не може містити більше двох послідовних клітинок в одному рядку або одному стовпці таблиці. Замкнутий ланцюжок інколи називають циклом. Будь-який набір послідовності клітин, що належать до ланцюжка, назвемо підланцюжком даного ланцюжка. Надалі будемо розглядати лише ті ланцюжки, які не містять замкнутих підланцюжків.

Розглянемо довільну систему $\mathbf{R}$ векторів $\mathbf{A}_{ij}$. Позначимо через $\mathbf{E}$ множину пар індексів (i,j), які відповідають векторам системи $\mathbf{R}$.

Теорема 9.4 (Критерій лінійної незалежності системи векторів $\mathbf{A}_{ij}$ умов транспортної задачі). Для того, щоб система векторів $\mathbf{R}$ була лінійно незалежною, необхідно і достатньо, щоб із клітин, які відповідають векторам системи, не можна було скласти замкнутий ланцюжок.

Доведення. Необхідність. Нехай система векторів $\mathbf{R}$ - лінійно незалежна. Покажемо, що з клітин, які відповідають векторам системи $\mathbf{R}$, не можна скласти замкнутий ланцюжок. Якщо б існував замкнутий ланцюжок (i_1,j_1), (i_1,j_2), (i_2,j_2), ……, (i_{s-1},j_{s-1}), (i_{s-1},j_s), (i_s,j_s), (i_s,j_1), складений із клітин, які відповідають векторам системи $\mathbf{R}$, то виконувалася б рівність:

$$\mathbf{A}_{i_1 j_1} - \mathbf{A}_{i_1 j_2} + \mathbf{A}_{i_2 j_2} - \ldots \ldots - \mathbf{A}_{i_{s-1} j_{s-1}} - \mathbf{A}_{i_{s-1} j_s} + \mathbf{A}_{i_s j_s} - \mathbf{A}_{i_s j_1} = 0.$$

Із цієї рівності випливає лінійна залежність векторів $\mathbf{A}_{i_1 j_1}, \mathbf{A}_{i_1 j_2}, \ldots, \mathbf{A}_{i_s j_s}, \mathbf{A}_{i_s j_1}$ системи $\mathbf{R}$, що суперечило б умові теореми.

Достатність. Нехай із клітин, які відповідають векторам системи $\mathbf{R}$, не можна скласти замкнутий ланцюжок. Покажемо, що система векторів $\mathbf{R}$ - лінійно незалежна. Припустимо від супротивного, що система векторів $\mathbf{R}$ - лінійно залежна. Тоді існують такі числа a_{ij}, $(i,j) \in \mathbf{E}$, серед яких є хоча б одне відмінне від нуля і виконується рівність:

$$\sum_{(i,j)\in \mathbf{E}} a_{ij} \cdot \mathbf{A}_{ij} = 0. \qquad (9.5)$$

Нехай $a_{i_1 j_1} \neq 0$. Тоді:

$$-a_{i_1 j_1} \cdot \mathbf{A}_{i_1 j_1} = \sum_{(i,j)\in \mathbf{E_1}} a_{ij} \cdot \mathbf{A}_{ij}, \qquad (9.6)$$

де $\mathbf{E_1}$ - множина $\mathbf{E}$ без пари (i_1, j_1). Компонента з номером i_1 вектора $a_{i_1 j_1} \cdot \mathbf{A}_{i_1 j_1}$ не дорівнює нулеві. Тому компонента з номером i_1 вектора у правій частині рівності (9.6) повинна бути відміною від нуля. Отже, серед векторів $\mathbf{A}_{ij}$, $(i, j) \in \mathbf{E_1}$, є такий вектор $\mathbf{A}_{i_1 j_2}$, що $a_{i_1 j_2} \neq 0$. Тоді зі співвідношення (9.6) одержимо:

$$-a_{i_1 j_1} \cdot \mathbf{A}_{i_1 j_1} - a_{i_1 j_2} \cdot \mathbf{A}_{i_1 j_2} = \sum_{(i,j)\in \mathbf{E_2}} a_{ij} \cdot \mathbf{A}_{ij}, \qquad (9.7)$$

де $\mathbf{E_2}$ множина $\mathbf{E_1}$ без пари індексів (i_1, j_2). Оскільки $j_2 \neq j_1$ то компонента з номером $(m + j_2)$ лівої частини рівності (9.7) , відмінна від нуля. Тому серед векторів $\mathbf{A}_{ij}, (i, j) \in \mathbf{E_2}$, знайдеться вектор $\mathbf{A}_{i_2 j_2}$,такий, що $a_{i_2 j_2} \neq 0$. Одержимо

$$-a_{i_1 j_1}\mathbf{A}_{i_1} - a_{i_1 j_2}\mathbf{A}_{i_1 j_2} - a_{i_2 j_2}\mathbf{A}_{i_2 j_2} = \sum_{(i,j)\in \mathbf{E_3}} a_{ij}\mathbf{A}_{ij} ,$$

де $\mathbf{E_3}$ – множина $\mathbf{E_2}$ без пари індексів (i_2, j_2) і т.д.

Процес перенесення векторів у ліву частину не може продовжуватися до нескінченності. Тому обов'язково знайдеться таке k , що в лівій частині будемо мати вираз:

$$-a_{i_1 j_1}\mathbf{A}_{i_1 j_1} - a_{i_1 j_2}\mathbf{A}_{i_1 j_2} - a_{i_2 j_2}\mathbf{A}_{i_2 j_2} - \ldots - a_{i_k j_k}\mathbf{A}_{i_k j_k} ,$$

причому $i_k = i_s$ при деякому $s (1 \leq s \leq k-2)$, або

$$-a_{i_1 j_1}\mathbf{A}_{i_1 j_1} - a_{i_1 j_2}\mathbf{A}_{i_1 j_2} - a_{i_2 j_2}\mathbf{A}_{i_2 j_2} - \ldots - a_{i_k j_k}\mathbf{A}_{i_k j_k} - a_{i_k j_{k+1}}\mathbf{A}_{i_k j_{k+1}} ,$$

причому $j_{k+1} = j_l$ при деякому $l (1 \leq l \leq k-1)$. В обох випадках із клітин

$$(i_1, j_1),(i_1, j_2),(i_2, j_2),\ldots,(i_k, j_k)$$

або

$$(i_1, j_1),(i_1, j_2),(i_2, j_2),\ldots,(i_k, j_k),(i_k, j_{k+1}) ,$$

які відповідають векторам системи $\mathbf{R}$, можна скласти замкнуті ланцюжки:

$$(i_s, j_{s+1}),(i_{s+1}, j_{s+1}),\ldots,(i_s j_k) ,$$

або

$$(i_l, j_l),(i_l, j_{l+1}),\ldots,(i_k, j_l) ,$$

а це суперечить умові теореми. Таким чином, зроблене припущення неправильне, система векторів $\mathbf{R}$ - лінійно незалежна.

Теорема 9.4 доведена.

Наслідок 9.1. (Критерій опорності планів транспортної задачі) Для того, щоб план $\mathbf{X}$ транспортної задачі був опорним, необхідно і достатньо, щоб із клітин, в яких містяться його додатні перевезення, не можна було скласти замкнутий ланцюжок.

Позначимо через $\mathbf{S}$ множину клітин, які відповідають векторам A_{ij} деякого опорного плану $\mathbf{X}$ транспортної задачі.

Теорема 9.5. (Критерій невиродженості опорного плану). Для того, щоб опорний план $\mathbf{X}$ транспортної задачі був невиродженим, необхідно і достатньо, щоб будь-які дві клітини множини $\mathbf{S}$ можна було з’єднати ланцюжком, складеним із клітин цієї ж множини.

Теорема 9.6 (Критерій невиродженості транспортної задачі). Для того щоб транспортна задача була не виродженою, необхідно і достатньо, щоб умова

$$\sum_{s=1}^{k} a_{i_s} \neq \sum_{s=1}^{l} b_{j_s} \qquad (9.8)$$

виконувалась для будь-яких підсистем індексів $i_1, i_2, \ldots, i_k; j_1, j_2, \ldots, j_l (k+l < m+n)$ відповідно систем індексів $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Іншими словами, для того, щоб транспортна задача була не виродженою, необхідно і достатньо, щоб не існувало такої підсистеми пунктів постачання і такої підсистеми пунктів споживання, щоб їх об’єми відповідно запасів і потреб збігалися.

Доведення двох останніх теорем наведено в [24].

9.4. Методи пошуку початкових опорних планів транспортної задачі

Всі методи пошуку початкових опорних планів транспортної задачі можна об’єднати в дві групи:

1) прямі методи (метод північно-західного кута, метод мінімального елемента в матриці, метод подвійної переваги);

2) методи, що базуються на додаткових обчисленнях (метод Фогеля, метод Лебедєва і ін.).

При використанні прямих методів початковий опорний план одержується дуже швидко. Однак, взагалі кажучи, такий опорний план може бути далеким від оптимального. Пошук початкового опорного плану методом другої групи передбачає проведення значних додаткових обчислень, однак отриманий план є близьким до оптимального.

Розглянемо два методи першої групи.

Метод північно західного кута

Заповнення таблиці перевезеннями складається з ряду кроків. При цьому на кожному кроці додатними перевезеннями заповнюють тільки верхню ліву клітину незаповненої частини таблиці (звідси й назва методу, оскільки дана клітинка є північно-західною), поміщаючи в цю клітину мінімум серед об'ємів запасів та об'ємів потреб. В таблиці 9.2 наведено принцип побудови початкового плану даним методом. Першою заповнюється клітинка $(1,1)$ числом $\min(a_1, b_1) = 10$ і виключається з розгляду перший стовпець. Далі заповнюється північно-західна клітинка незаповненої частини таблиці, тобто клітинка $(1,2)$ і т.д.

Таблиця 9.2

Метод північно-західного кута

i \ j		Споживачі				об'єм запасів
		B_1	B_2	B_3	B_4	
Постачальники	A_1	10 (5)	5 (4)	5 (7)	(8)	20
	A_2	(3)	(5)	15 (4)	(2)	15
	A_3	(1)	(4)	20 (6)	20 (10)	40
Об'єм потреб		10	5	40	20	75=75

Нехай N – число додатних перевезень плану, побудованого методом північно-західного кута. Оскільки таблиця містить $(m+n)$ рядків і стовпчиків і на кожному кроці методу заповнюється або рядок або стовпчик, причому на останньому кроці одночасно заповнюється щонайменше один рядок або стовпчик, то $N \le (m+n-1)$. Безпосередньо з побудови плану випливає, що з клітин, які відповідають додатнім перевезенням, не можна скласти замкнутий ланцюжок, тобто план є опорним.

<u>Метод мінімального елемента в матриці</u>

На першому кроці в заданій таблиці шукаємо мінімальний елемент вартості. Нехай ним буде елемент $c_{i_1 j_1}$, який міститься в клітинці (i_1, j_1). Тоді покладаємо $x_{i_1 j_1} = \min(a_{i_1 j_1}; b_{i_1 j_1})$ і виключаємо відповідний рядок або стовпець з розгляду. На наступному кроці шукаємо мінімальний елемент вартості в незаповненій частині таблиці і т.д.

Число додатних перевезень N плану, знайденого цим методом, не перевищує величини $(m+n-1)$. Дійсно, на кожному кроці виключається з розгляду один рядок або стовпчик, а на останньому – рядок і стовпчик одночасно. Можна довести, що знайдений таким чином план буде опорним. В таблиці 9.3 наведено приклад побудови початкового плану даним методом. В таблиці 9.3 найменший тариф перевезення $c_{31} = 1$. Оскільки, $\min(a_3, b_1) = b_1 = 10$, то присвоївши $x_{31} = 10$, виключаємо перший стовпець з розгляду. В таблиці, яка залишилась після цього, найменший тариф перевезення $c_{24} = 2$. Заповнивши дану клітинку числом $x_{24} = 15$ так продовжуємо, поки не будуть вичерпані всі запаси і не задоволені всі потреби.

Таблиця 9.3

Метод мінімального елемента

j / i		Споживачі				об'єм запасів
		B_1	B_2	B_3	B_4	
Постачальник	A_1	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	15 $\boxed{7}$	20 $\boxed{8}$	20
	A_2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	15 $\boxed{2}$	15
	A_3	10 $\boxed{1}$	5 $\boxed{4}$	25 $\boxed{6}$	$\boxed{10}$	40
Об'єм потреб		10	5	40	20	75=75

9.5. Метод потенціалів

Наступна теорема є теоретичною основою методу потенціалів розв'язання транспортної задачі.

Теорема 9.7 (Критерій оптимальності плану перевезень) Для того, щоб деякий план $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}_{i=1;\, j=1}^{m;\, n}$ транспортної задачі був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб йому відповідала така система із $(m+n)$ чисел $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n$, для якої виконуються умови

$$v_j + u_i \le c_{ij}, \ \left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right) \qquad (9.9)$$

$$v_j + u_i = c_{ij} \text{ для тих пар індексів } (i, j), \text{ для яких } x_{ij} > 0. \qquad (9.10)$$

Доведення. Достатність. Нехай для плану $\mathbf{X}$ існує система чисел $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n$, яка задовольняє умови (9.9), (9.10). Покажемо, що план $\mathbf{X}$ – оптимальний. Якщо розглянути будь-який інший план транспортної задачі $\mathbf{X}' = \{x'_{ij}\}_{i=1;\, j=1}^{m;\, n}$, то

$$f(\mathbf{X}') = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x'_{ij} \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (v_j + u_i) \cdot x'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x'_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j b_j + \sum_{i=1}^{m} u_i a_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (v_j + u_i) x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = f(\mathbf{X}).$$

В передостанній рівності використана умова (9.10). Отже, $f(\mathbf{X}') \ge f(\mathbf{X})$, тобто план $\mathbf{X}$ – оптимальний.

Необхідність. Нехай план $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}_{i=1;\, j=1}^{m;\, n}$ – оптимальний. Покажемо, що для плану $\mathbf{X}$ існує система чисел $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n$, для якої виконуються умови (9.9), (9.10). Перепишемо математичну модель транспортної задачі у вигляді:

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} & = a_1, \\
\qquad + x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} & = a_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\qquad\qquad + x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} & = a_m, \\
x_{11} \qquad + x_{21} + \ldots\ldots\ldots + x_{m1} & = b_1, \\
\quad + x_{12} \qquad + x_{22} + \ldots\ldots\ldots + x_{m2} & = b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\qquad x_{1n} \qquad + x_{2n} + \ldots\ldots\ldots + x_{mn} & = b_n,
\end{cases}
$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}).$$

Двоїстою до неї буде наступна задача:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j y_j + \sum_{i=1}^{m} a_i z_i \to \max; \qquad (9.11)$$

$$y_i + z_i \leq c_{ij} \ (i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}). \qquad (9.12)$$

Оскільки **X** – оптимальний план транспортної задачі, то на основі першої теореми двоїстості йому відповідає оптимальний план двоїстої задачі $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_m$, $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$. Позначимо $\bar{z}_i = u_i \ (i = \overline{1,m})$, $\bar{y}_j = v_j \ (j = \overline{1,n})$. Оптимальний план двоїстої задачі задовольняє умову (9.12), тому умова (9.9) для системи чисел $u_i \ (i = \overline{1,m}),\ v_j \ (j = \overline{1,n})$ виконується. З другої теореми двоїстості випливає, що

$$(v_j + u_i - c_{ij}) \cdot x_{ij} = 0, \ (i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}).$$

Враховуючи те, що $v_j + u_i - c_{ij} \leq 0$ і $x_{ij} \geq 0$, одержуємо, що для тих пар індексів (i, j), для яких $x_{ij} > 0$, обов'язково $v_j + u_i - c_{ij} = 0$, тобто $v_j + u_i = c_{ij}$. Отже, умова (9.10) для системи чисел $u_i \ (i = \overline{1,m}),\ v_j \ (j = \overline{1,n})$ теж виконується.

Теорема 9.7 доведена.

Умови (9.9), (9.10) прийнято називати умовами потенціальності системи чисел $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n$, а самі числа $u_i \ (i=\overline{1,m}),\ v_j \ (j=\overline{1,n})$ – потенціалами відповідних пунктів постачання і споживання.

На основі теореми 9.7 маємо

Алгоритм методу потенціалів

1. Складаємо початковий опорний план $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}_{i=1;\, j=1}^{m;\, n}$ транспортної задачі і визначаємо множину клітин $\mathbf{S}$, які відповідають векторам його базису. Якщо опорний план $\mathbf{X}$ не вироджений (містить $(m+n-1)$ додатних перевезень), то $\mathbf{S}$ складається з усіх клітин, які містять додатні перевезення. Якщо опорний план $\mathbf{X}$ вироджений (містить менше як $(m+n-1)$ додатних перевезень), то за $\mathbf{S}$ береться така довільна множина з $(m+n-1)$ клітин, яка задовольняє вимоги:
   а) множина містить усі клітини, в яких є додатні перевезення опорного плану $\mathbf{X}$;
   б) із клітин множини $\mathbf{S}$ не можна скласти замкнутого ланцюжка.
2. Для плану $\mathbf{X}$ знаходимо $(m+n)$ чисел $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n$, із наступної системи $(m+n-1)$ рівнянь:
$$v_j + u_i = c_{ij}, \quad (i, j) \in \mathbf{S}. \qquad (9.13)$$
   Для розв'язування системи (9.13) досить одній із невідомих надати певне значення (як правило, нуль).
3. Перевіряємо план $\mathbf{X}$ на оптимальність, тобто перевіряємо, чи виконується умова
$$v_j + u_i \le c_{ij}, \quad (i, j) \notin \mathbf{S}. \qquad (9.14)$$
4. Якщо умова (9.14) виконується, то задача розв'язана.
5. Якщо умова (9.14) не виконується, то план $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}_{i=1;\, j=1}^{m;\, n}$ не є оптимальним. Тоді існує хоча б одна клітинка $(i, j) \notin \mathbf{S}$, для якої виконується нерівність $v_j + u_i > c_{ij}$ або $v_j + u_i - c_{ij} > 0$.

Нехай $\max\limits_{(i,j)\notin \mathbf{S}} (v_j + u_i - c_{ij}) = v_l + u_k - c_{kl}$ (якщо максимум досягається для декількох пар індексів (i,j), то за (k,l) вибирають ту пару, якій відповідає мінімальна вартість перевезень). Тоді клітина (k,l) разом з клітинами, що відповідають векторам базису опорного плану $\mathbf{X}$, утворює єдиний замкнутий ланцюжок γ (ланцюжок γ не обовязково містить усі клітини, що відповідають векторам базису).

6. Обходимо ланцюжок γ у довільному напрямку, починаючи з клітини (k,l), і позначаємо його клітини поперемінно знаками "+" і "-". Клітина (k,l) завжди позначається знаком "+". Клітини замкнутого ланцюжка γ, позначені знаком "+", позначимо через γ^+, а знаком "-" – через γ^{--}. Нехай $\Theta = \min\limits_{(i,j)\in\gamma^-} (x_{ij}) = x_{st}$ (якщо мінімум досягається для декількох пар індексів (i,j), то за (s,t) вибираємо ту пару, якій відповідає максимальна вартість перевезень). Тоді компоненти нового опорного плану $\mathbf{X}' = \{x_{ij}\}_{i=1;j=1}^{m;n}$ визначаємо за правилом:

$$x_{ij}^{/} = \begin{cases} x_{ij} - \Theta, & \text{якщо} \quad (i,j)\in\gamma^-; \\ x_{ij} + \Theta, & \text{якщо} \quad (i,j)\in\gamma^+; \\ x_{ij}, & \text{якщо} \quad (i,j)\notin\gamma. \end{cases}$$

і переходимо до пункту 2. Зауважимо, що після вказаної процедури з множини $\mathbf{S}$ отримуємо множину $\mathbf{S}'$, де замість клітинки (s,t) буде міститись клітинка (k,l).

9.6. Відкрита модель транспортної задачі

Якщо для транспортної задачі умова балансу (9.1) не виконується, то ми одержуємо відкриту модель транспортної задачі. При цьому можливі два випадки.

1. Нехай

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Тоді математична модель транспортної задачі набуде вигляду:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ (i=\overline{1,m}),\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ (j=\overline{1,n}),\ x_{ij} \ge 0\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}).$$

Для розв'язання такої задачі треба ввести фіктивний $(n+1)$-й пункт споживання B_{n+1}^{Φ} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, і покласти, що $c_{i,n+1} = 0\ (i=\overline{1,m})$. Тоді одержуємо розширену задачу з m пунктами постачання і $(n+1)$–м пунктом споживання, для якої виконується умова балансу $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$. Якщо $\overline{\mathbf{X}} = (x_{ij})_{i=1,\,j=1}^{m,\,n+1}$ - оптимальний план розширеної задачі, то таблиця $\mathbf{X} = (x_{ij})_{i=1,\,j=1}^{m,\,n}$, одержана з таблиці $\overline{\mathbf{X}}$ відкиданням останнього стовпчика, буде розв'язком початкової задачі.

2. Якщо для транспортної задачі:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то її математична модель набуде вигляду

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\ ,\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\ ,\ x_{ij} \ge 0\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}).$$

Для розв'язування цієї задачі треба ввести фіктивний $(m+1)$-й пункт постачання $\mathbf{A}_{m+1}$ з об'ємом запасів $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, і покласти

$c_{m+1,j} = 0 \; (j = \overline{1,n})$. У результаті одержуємо розширену задачу з $(m+1)$-м пунктом постачання і n пунктами споживання, для якої виконується умова балансу:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j \, .$$

Якщо $\overline{\mathbf{X}} = \left\{x_{ij}\right\}_{i=1,\, j=1}^{m+1,\, n}$ - оптимальний план розширеної задачі, то таблиця $\mathbf{X} = \left\{x_{ij}\right\}_{i=1,\, j=1}^{m,\, n}$, одержана з таблиці $\overline{\mathbf{X}}$ відкиданням останнього рядка, буде розв’язком початкової задачі.

Контрольні запитання

1. Чи може опорний план транспортної задачі містити більше за $(m+n-1)$ додатних величин? Чому?
2. Чи завжди транспортна задача має розв’язок?
3. Чи можна транспортну задачу розв’язати симплекс-методом?
4. Який ланцюжок називають циклом?
5. Поясніть суть методу мінімального елемента в матриці для знаходження початкового опорного плану транспортної задачі.
6. Для чого використовується метод потенціалів – для знаходження початкового опорного плану чи для знаходження оптимального плану транспортної задачі?
7. Як звести відкриту модель транспортної задачі до закритої?
8. В якому випадку гарантовано існує цілочисловий оптимальний розв’язок транспортної задачі?
9. Як вибирається вектор в алгоритмі методу потенціалів, який потрібно вивести з базису? Який потрібно ввести в базис?

Лабораторна робота № 11
Транспортна задача

Приклад Л11.1. Розв'язати наступну транспортну задачу:
запаси $a = (25,19,22,26)$,
потреби $b = (31,28,25)$,

матриця вартості перевезень $C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 10 & 11 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Оскільки

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 25+19+22+26=92,\ \sum_{j=1}^{3} b_j = 31+28+25=84,$$

то ТЗ є відкритою. Щоб звести її до до закритої, введемо фіктивного споживача з потребами $b_4 = 92-84=8$, і нулевим тарифом перевезень. Побудуємо початковий опорний план двома методами.

Метод північно-західного кута

Таблиця Л11.1

Початковий опорний план

$i \backslash j$		споживачі				
		B$_1$	**B**$_2$	**B**$_3$	**B**$_4^ф$	Об'єм запасів
постачальники	**A**$_1$	4 25	8	12	0	25
	A$_2$	5 6	6 13	4	0	19
	A$_3$	7	9 15	5 7	0	22
	A$_4$	3	10	11 18	0 8	26
	Об'єм потреб	31	28	25	8	92

План не вироджений, оскільки заповнених клітинок є $7 = m + n\text{-}1$. Затрати на перевезення:

$$f(\mathbf{X}_1) = 25 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 13 \cdot 6 + 15 \cdot 9 + 7 \cdot 5 + 18 \cdot 11 + 8 \cdot 0 = 576.$$

Метод мінімального елемента

Таблиця Л11.2

Початковий опорний план

i \ j		споживачі				
постачальники		$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	$\mathbf{B}_4^{\phi}$	Об'єм запасів
	$\mathbf{A}_1$	4 5	8 20	12	0	25
	$\mathbf{A}_2$	5	+ 6	− 4 19	0	19
	$\mathbf{A}_3$	7	− 9 8	+ 5 6	0 8	22
	$\mathbf{A}_4$	3 26	10	11	0	26
	Об'єм потреб	31	28	25	8	92

План не вироджений. Затрати на перевезення:

$$f(\mathbf{X}_2) = 5 \cdot 4 + 20 \cdot 8 + 19 \cdot 4 + 8 \cdot 9 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 0 + 26 \cdot 3 = 436.$$

Оскільки $f(\mathbf{X}_2) < f(\mathbf{X}_1)$, то вибираємо опорний план, складений за допомогою метода мінімального елемента.

Для таблиці Л11.2 складаємо систему потенціалів.

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 4; \\ U_1 + V_2 = 8; \\ U_2 + V_3 = 4; \\ U_3 + V_2 = 9 \Rightarrow U_1 = -1, U_2 = -1, U_3 = 0, U_4 = -2, \\ \qquad\qquad\qquad V_1 = 5, V_2 = 9, V_3 = 5, V_4 = 0; \\ U_3 + V_3 = 5; \\ U_3 + V_4 = 0; \\ U_4 + V_1 = 3. \end{cases}$$

Перевіряємо на оптимальність незаповнені клітинки:

$U_1 + V_3 = 4 < 12;$

$U_1 + V_4 = -1 < 0;$

$U_2 + V_1 = 4 < 5;$

$U_2 + V_2 = 8 > 6\ (2);$

$U_2 + V_4 = -1 < 0;$

$U_3 + V_1 = 5 < 7;$

$U_4 + V_2 = 7 < 10;$

$U_4 + V_3 = 3 < 11;$

$U_4 + V_4 = -1 < 0.$

Отже, для клітинки $(2,2)$ умови оптимальності не виконуються. В таблиці Л11.2 перерозподіляємо перевезення для даної клітинки. Отримаємо таблицю Л11.3.

Таблиця Л11.3

План перевезень

i \ j		споживачі				
постачальники		$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	$\mathbf{B}_4^{\phi}$	Об'єм запасів
	$\mathbf{A}_1$	4 5	– 8 20	12	+ 0	25
	$\mathbf{A}_2$	5	+ 6 8	– 4 11	0	19
	$\mathbf{A}_3$	7	9	+ 5 14	– 0 8	22
	$\mathbf{A}_4$	3 26	10	11	0	26
	Об'єм потреб	31	28	25	8	92

Складаємо систему потенціалів для плану перевезень таблиці Л11.3:

$$\begin{cases} U_1+V_1=4; \\ U_1+V_2=8; \\ U_2+V_2=6; \\ U_2+V_3=4 \Rightarrow U_1=0, U_2=-2, U_3=-1, U_4=-1, \\ \qquad\qquad V_1=4, V_2=8, V_3=6, V_4=1; \\ U_3+V_3=5; \\ U_3+V_4=0; \\ U_4+V_1=3. \end{cases}$$

Отриману систему чисел перевіряємо на оптимальність:

$U_1+V_3=6<12;$

$U_1+V_4=1>0\ (1);$

$U_2+V_1=2<5;$

$U_2+V_4=-1<0;$

$U_3+V_1=3<7;$

$U_3+V_2=7<9;$

$U_4+V_2=7<10;$

$U_4+V_3=5<11;$

$U_4+V_4=0=0.$

Отже, для клітинки $(1,4)$ умови оптимальності не виконуються. В таблиці Л11.3 складаємо цикл перерозподілу перевезень для цієї клітинки. Отримуємо таблицю Л11.4.

Складаємо систему потенціалів для плану перевезень таблиці Л11.4.

$$\begin{cases} U_1+V_1=4; \\ U_1+V_2=8; \\ U_1+V_4=0; \\ U_2+V_2=6 \Rightarrow U_1=0, U_2=-2, U_3=-1, U_4=-1, \\ \qquad\qquad V_1=4, V_2=8, V_3=6, V_4=0; \\ U_2+V_3=4; \\ U_3+V_3=5; \\ U_4+V_1=3. \end{cases}$$

Таблиця Л11.4

План перевезень

$i \backslash j$		споживачі				
постачальники		$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	$\mathbf{B}_4^{\phi}$	Об'єм запасів
	$\mathbf{A}_1$	4 5	8 12	12	0 8	25
	$\mathbf{A}_2$	5	6 16	4 3	0	19
	$\mathbf{A}_3$	7	9	5 22	0	22
	$\mathbf{A}_4$	3 26	10	11	0	26
	Об'єм потреб	31	28	25	8	92

Перевіряємо на оптимальність:

$U_1+V_3=6<12;$

$U_2+V_1=2<5;$

$U_2+V_4=-2<0;$

$U_3+V_1=3<7;$

$U_3+V_2=7<9 \Rightarrow план\, в\, таблиці\, Л11.4\; оптимальний.$

$U_3+V_4=-1<0;$

$U_4+V_2=7<10;$

$U_4+V_3=5<11;$

$U_4+V_4=-1<0/$

Отже:

$$\mathbf{X}_{\min}=\begin{pmatrix} 5 & 12 & 0 \\ 0 & 16 & 3 \\ 0 & 0 & 22 \\ 26 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_{\min}(\mathbf{X})=5\cdot 4+26\cdot 3+12\cdot 8+16\cdot 6+3\cdot 4+22\cdot 5=412.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти оптимальний розв’язок транспортної задачі.

1. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $a = (30;50;20;35)$, $b = (15;15;40;30)$.

2. $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 22 & 5 \\ 10 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $a = (60;70;20;45;)$, $b = (40;30;30;50)$.

3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $a = (60;70;20;35)$, $b = (40;30;30;50)$.

4. $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $a = (60;65;70;75)$, $b = (40;60;70;25)$.

5. $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $a = (60;40;20;30)$, $b = (30;25;35;20)$.

6. $C=\begin{pmatrix}10 & 5 & 7 & 4\\ 7 & 4 & 9 & 10\\ 6 & 14 & 8 & 7\\ 8 & 9 & 7 & 5\end{pmatrix}$, $a=(40;25;35;30)$, $b=(15;40;30;15)$.

7. $C=\begin{pmatrix}1 & 9 & 7 & 1\\ 3 & 1 & 5 & 5\\ 6 & 8 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $a=(30;40;70;60)$, $b=(35;80;25;70)$.

8. $C=\begin{pmatrix}18 & 2 & 9 & 7\\ 30 & 4 & 1 & 2\\ 6 & 4 & 8 & 3\\ 6 & 3 & 6 & 20\end{pmatrix}$, $a=(68;55;40;40)$, $b=(20;30;3;16)$.

9. $C=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6 & 4 & 10\\ 10 & 3 & 2 & 3 & 7\\ 4 & 10 & 5 & 1 & 16\end{pmatrix}$, $a=(130;90;40)$, $b=(110;30;50;50;80)$.

10. $C=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3 & 4\\ 6 & 1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 3 & 8\\ 3 & 2 & 10 & 1\end{pmatrix}$, $a=(45;35;70;20)$, $b=(20;60;55;45)$.

11. $C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3 & 6\\ 9 & 4 & 5 & 7\\ 5 & 7 & 6 & 2\\ 3 & 5 & 4 & 8\end{pmatrix}$, $a=(30;70;50;20)$, $b=(10;40;40;60)$.

12. $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $a=(40;30;50;10)$, $b=(20;18;44;75)$.

13. $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $a=(10;20;35;45)$, $b=(25;30;40;15)$.

14. $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $a=(130;90;100;140)$, $b=(110;50;130;80)$.

15. $C=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $a=(100;120;130;110)$, $b=(30;80;100;90)$.

16. $C=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 8 & 10 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$, $a=(100;15;90;55)$, $b=(30;80;100;90)$.

17. $C=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $a=(115;55;45;45)$, $b=(60;75;45;10)$.

18. $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, $a = (05;30;80;20)$, $b = (30;43;10;17)$.

19. $C = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 7 & 8 \\ 2 & 10 & 9 & 5 \\ 12 & 10 & 9 & 6 \\ 8 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $a = (00;35;50;50)$, $b = (60;30;20;40)$.

20. $C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 5 & 2 \\ 9 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$, $a = (40;100;90;130)$, $b = (10;50;30;80)$.

21. $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 9 \\ 6 & 2 & 4 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 11 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $a = (30;110;100;120)$, $b = (30;80;100;90)$.

22. $C = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 & 8 \\ 6 & 11 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $a = (65;90;15;100)$, $b = (30;40;55;30)$.

23. $C=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 10 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $a=(45;115;55;45)$, $b=(60;50;70;10)$.

24. $C=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 & 10 \\ 4 & 4 & 13 & 7 \\ 4 & 6 & 5 & 9 \\ 4 & 3 & 11 & 3 \end{pmatrix}$, $a=(100;85;20;30)$, $b=(10;43;87;20)$.

25. $C=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 11 \\ 5 & 4 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $a=(70;40;20;40)$, $b=(65;60;25;40)$.

ТЕМА 10. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР

10.1. Гра двох осіб з нульовою сумою

В різних сферах людської діяльності часто виникають конфліктні ситуації, що характеризуються наявністю протилежних інтересів окремих індивідів та колективів, які намагаються досягнути власних цілей, часто на шкоду один одному. Головне місце у вивченні проблем конфлікту займає вибір та порівняльний аналіз можливих (допустимих) способів поведінки конфліктуючих сторін. Це дає основу для прийняття кожною стороною рішень, які допомагають досягти поставлених цілей. Однак, сторони при прийнятті рішень повинні враховувати не лише власні цілі, а й цілі своїх супротивників.

Гра – це реальний або формальний конфлікт, в якому є не менше двох учасників (гравців), кожен із яких намагається досягти власних цілей.

Допустимі дії кожного з гравців називають правилами гри.

Набір директив, які однозначно вказують гравцеві, який вибір (хід) він повинен зробити залежно від поточної ситуації, називається стратегією гравця.

Внаслідок застосування гравцями своїх стратегій, гра закінчується з певним результатом, згідно з яким розподіляється виграш. В теорії ігор розглядаються тільки такі ігри, в яких виграш можна виразити кількісно: вартістю, очками, балами та ін. Під програшем розуміється від'ємний виграш. Теорія ігор – це математична формалізація різних конфліктних ситуацій.

Розглянемо модель гри, в якій беруть участь два гравці І та ІІ зі взаємно протилежними інтересами. Ці гравці незалежно один від одного вибирають свої стратегії (способи поведінки). Вважаємо, що кожній із сторін відомі множина X допустимих стратегій гравця І і множина Y допустимих стратегій гравця ІІ, а також функції $G_1(x, y)$ і $G_2(x, y)$, які вказують, який виграш отримують гравці у випадку, коли перший з них вибирає стратегію $x \in X$, а другий – стратегію

$y \in Y$. Взаємна протилежність інтересів виражається в тому, що при довільних $x \in X$ і $y \in Y$ має місце рівність:

$$G_1(x, y) + G_2(x, y) = 0. \qquad (10.1)$$

Тоді згідно (10.1) достатньо знати лише одну з функцій, наприклад, функцію виграшу гравця I, яка одночасно є функцією програшу гравця II. В подальшому будемо позначати цю функцію через $G(x, y)$.

В загальній теорії ігор описану модель називають грою двох осіб із нульовою сумою.

В 1928 році Джоном Нейманом був запропонований наступний підхід до пошуку оптимальних стратегій гравців, який використовується в сучасній теорії ігор. Якість стратегій гравців оцінюється з точки зору результату, який відповідає найменш сприятливій поведінці суперника. В зв'язку з цим вводяться функції:

$$\mu(x) = \min_{y \in Y} G(x, y), \qquad x \in X, \qquad (10.2)$$

$$\nu(y) = \max_{x \in X} G(x, y), \qquad y \in Y. \qquad (10.3)$$

Перша з них характеризує величину гарантованого виграшу гравця I при використанні ним будь-якої стратегії. Аналогічно, друга функція при довільному $y \in Y$ характеризує максимально можливий програш гравця II. Гравець I зацікавлений у максимізації функції (10.2), а гравець II – в мінімізації функції (10.3). Тому свої оптимальні стратегії $x^* \in X$, $y^* \in Y$ гравці I та II знаходять з умов:

$$\mu_0 = \mu(x^*) = \max_{x \in X} \mu(x) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} G(x, y), \qquad (10.4)$$

$$\nu_0 = \nu(y^*) = \min_{y \in Y} \nu(y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} G(x, y). \qquad (10.5)$$

Зауважимо, що під максимумом та мінімумом у формулах (10.2)-(10.5) розуміють точну верхню та точну нижню межі відповідних функцій.

Теорема 10.1. Які б не були множини X та Y та функція $G(x, y)$, визначена на їх добутку, має місце нерівність:

$$\mu_0 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} G(x, y) \le \min_{y \in Y} \max_{x \in X} G(x, y) = \nu_0. \quad (10.6)$$

Доведення. При довільному $x \in X$ маємо $\min_{y \in Y} G(x, y) \le G(x, y)$.

Тоді при довільному $y \in Y$ маємо:

$$\mu_0 = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} G(x, y) \le \max_{x\in X} G(x, y).$$

Оскільки ліва частина в останній нерівності від y не залежить, то вона не перевищує величини $\min_{y\in Y} \max_{x\in X} G(x, y) = \nu_0$, що і треба було довести.

Теорема 10.1 доведена.

Величини ν_0 та μ_0 називаються відповідно нижньою та верхньою ціною гри.

Якщо в нерівності (10.6) досягається рівність, то величину $\vartheta = \nu_0 = \mu_0$ називають ціною гри.

Гра називається замкненою, якщо вона має ціну ϑ і у гравців є оптимальні стратегії $x^* \in X$, $y^* \in Y$, що $\mu(x^*) = \nu(y^*) = \vartheta$.

Оптимальні стратегії гравців пов'язані із сідловою точкою функції $G(x, y)$. Нагадаємо, що елементи $x^* \in X$, $y^* \in Y$ утворюють сідлову точку (x^*, y^*) функції $G(x, y)$, якщо при довільних $x \in X$, $y \in Y$ має місце нерівність:

$$G(x, y^*) \le G(x^*, y^*) \le G(x^*, y),$$

тобто

$$\max_{x\in X} G(x, y^*) = G(x^*, y^*) = \min_{y\in Y} G(x^*, y). \tag{10.7}$$

Теорема 10.2. Гра двох осіб з нульовою сумою буде замкненою тоді і лише тоді, коли функція $G(x, y)$ має хоча б одну сідлову точку. При цьому, для того, щоб стратегії $x^* \in X$, $y^* \in Y$ були оптимальними, необхідно й достатньо, щоб точка (x^*, y^*) була сідловою точкою функції $G(x, y)$.

Доведення. Необхідність. Нехай гра є замкненою і $x^* \in X$, $y^* \in Y$ - оптимальні стратегії гравців. Тоді

$$\mu_0 = \mu(x^*) = \min_{y\in Y} G(x^*, y) = \vartheta = \max_{x\in X} G(x, y^*) = \nu(y^*) = \nu_0. \tag{10.8}$$

З іншого боку, на основі означення мінімуму та максимуму, маємо:

$$\min_{y\in Y} G(x^*, y) \le G(x^*, y^*) \le \max_{x\in X} G(x, y^*)\,, \tag{10.9}$$

де крайні члени згідно (10.8) рівні одній і тій же величині ϑ. Отже, в нерівностях (10.9) досягаються рівності. А це означає справедливість співвідношення (10.7). Отже, точка (x^*, y^*) є сідловою точкою функції $G(x, y)$.

Достатність. Нехай елементи $x^* \in X$, $y^* \in Y$ утворюють сідлову точку функції $G(x, y)$, тобто задовольняють співвідношення (10.7). Тоді для величин ν_0 та μ_0 маємо

$$\nu_0 = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} G(x, y) \le \max_{x\in X} G(x, y^*) = G(x^*, y^*) = \min_{y\in Y} G(x^*, y) \le \le \max_{x\in X}\min_{y\in Y} G(x, y) = \mu_0. \tag{10.10}$$

З іншого боку, на основі теореми 10.1, справедлива протилежна нерівність (10.6). Отже, в нерівності (10.10) досягаються рівності, а це значить, що розглянута гра є замкненою, причому $x^* \in X$, $y^* \in Y$ - оптимальні стратегії гравців I та II.

Теорему 10.2 доведено.

10.2. Клас матричних ігор

Нехай є два гравця, перший з яких може вибрати i-ту стратегію із m своїх можливих стратегій ($i = \overline{1, m}$), а другий – j-ту із n своїх можливих стратегій ($j = \overline{1, n}$). В результаті перший гравець виграє величину a_{ij}, а другий програє цю величину. Сума виграшів обох гравців рівна нулю. Із чисел a_{ij} складемо матрицю:

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i=1,\,j=1}^{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рядки матриці $\mathbf{A}$ відповідають стратегіям першого гравця, а стовпці – стратегіям другого. Дані стратегії називаються явними.

Матриця $\mathbf{A}$ називається платіжною або матрицею гри.

Гру, яка визначається матрицею $\mathbf{A}$ розмірності $m \times n$, називають скінченою матричною грою двох гравців розмірності $m \times n$.

Отже, платіжна функція $G(x, y)$ визначається матрицею $\mathbf{A}$, якщо гравці застосовують явні стратегії. Тоді згідно (10.6) нижня та верхня ціни гри дорівнюють:

$$\mu_0 = \mu(x^*) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} G(x, y) = \max_i \min_j a_{ij},$$

$$\nu_0 = \nu(y^*) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} G(x, y) = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Якщо в грі з матрицею $\mathbf{A}$ виконується рівність $\mu_0 = \nu_0$, то кажуть, що гра має сідлову точку в явних стратегіях і явну ціну гри $\vartheta = \mu_0 = \nu_0$. Пара явних стратегій ($i_0, j_0$), що утворюють сідлову точку і сідловий елемент $a_{i_0 j_0}$, називається розв'язком гри. Ці явні стратегії (i_0, j_0) називають оптимальними явними стратегіями.

Матрична гра в явних стратегіях може мати одну або декілька сідлових точок, або не мати їх зовсім. Для знаходження сідлових точок в явних стратегіях потрібно послідовно проаналізувати кожен рядок матриці $\mathbf{A}$. Спочатку встановлюємо мінімальний елемент a_{1j} ($1 \le j \le n$) першого рядка. Якщо цей елемент є максимальним серед елементів свого стовпця, то він і є сідловим елементом і утворює розв'язок гри. Аналогічно шукаємо сідлові елементи і в інших рядках матриці $\mathbf{A}$.

Не кожна матрична гра має оптимальні явні стратегії. В даному випадку кожен гравець повинен намагатись так застосувати своїх явні стратегії, щоб максимально збільшити свій середній виграш.

Змішаною стратегією гравця називається повний набір імовірностей (відносних частот) застосування його явних стратегій.

Якщо перший гравець має m явних стратегій, то його змішана стратегія – це набір чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, таких, що

$x_i \geq 0 \ (i=\overline{1,m}),\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Якщо другий гравець має n явних стратегій, то його змішана стратегія - це набір чисел $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, таких, що $y_j \geq 0 \ (j=\overline{1,m}),\ \sum_{j=1}^{n} y_i = 1$. Явна стратегія може бути визначена як змішана стратегія, в якій всі складові, крім однієї, дорівнюють нулю.

Середній виграш першого гравця виражається у вигляді математичного сподівання його виграшів:

$$G(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \qquad (10.11)$$

а допустимі стратегії гравців характеризуються відповідно m-вимірними та n-вимірними ймовірнісними векторами з множин:

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_i \geq 0,\ i = \overline{1,m},\quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}, \qquad (10.12)$$

$$Y = \left\{ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \mid y_j \geq 0,\quad j = \overline{1,n},\quad \sum_{j=1}^{n} y_i = 1 \right\}. \qquad (10.13)$$

Теорема 10.3 (теорема Неймана). Яка б не була матриця $\mathbf{A}$, відповідна їй матрична гра завжди є замкненою, тобто функція (10.11), яка розглядається на добутку двох множин (10.12) та (10.13), має щонайменше одну сідлову точку.

10.3. Зведення матричних ігор до еквівалентних задач лінійного програмування

Нехай дана матрична гра розмірності $m \times n$ двох гравців з нульовою сумою. Потрібно знайти оптимальні змішані стратегії $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$, $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ першого та другого гравців. Нехай ціна даної гри (а вона існує згідно теореми Неймана) рівна ϑ.

Теорема 10.4. Ціну матричної гри можна змінити на довільне наперед задане число Θ, додавши його до всіх елементів платіжної матриці, не змінюючи при цьому розв'язку гри.

Доведення. Нехай (x^*, y^*) - розв'язок матричної гри. Розглянемо гру, яка задана платіжною матрицею $\mathbf{A}' = \{a_{ij} + \Theta\}_{i=1,\, j=1}^{m,\, n}$ і множинами змішаних стратегій X, Y, що збігаються з відповідними множинами початкової задачі. Визначаючи нижню ціну цієї гри, отримаємо:

$$\mu_0' = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \Theta) x_i y_j =$$

$$= \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j + \Theta \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j =$$

$$= \vartheta + \Theta \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j = \vartheta + \Theta \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot 1 =$$

$$= \vartheta + \Theta \cdot 1 = \vartheta + \Theta.$$

Аналогічно обчислюється верхня ціна гри.

Теорема 10.4 доведена.

Доведена теорема дає змогу зробити ціну додатною, не змінюючи при цьому оптимальних стратегій. Для цього досить в платіжній матриці $\mathbf{A}$ всі елементи зробити додатними. Надалі вважатимемо, що $\vartheta > 0$.

Припустимо, що другий гравець застосовує свою j-ту явну стратегію. Тоді математичне сподівання виграшу першого гравця при застосуванні ним змішаної стратегії $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ буде:

$$G(x, j) = G_j(x) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i, \; (j = \overline{1, n}). \tag{10.14}$$

Поставимо тепер питання про відшукання оптимальної змішаної стратегії першого гравця x^*, при умові, що його суперник застосовує оптимальну змішану стратегію y^*, тобто про відшукання максимуму функції:

$$\varphi = G(x, y^*). \tag{10.15}$$

Внаслідок оптимальності стратегії y^* всі величини (10.14) не менші від величини (10.15), тобто:

$$G_j(x) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq G(x, y^*), \ (j = \overline{1,n}). \quad (10.16)$$

Також має виконуватись умова:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1. \quad (10.17)$$

Отже, ми отримали ЗЛП на максимізацію цільової функції (10.15) при системі умов (10.16), (10.17) та

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad \varphi \geq 0. \quad (10.18)$$

Поділимо обидві частини нерівностей (10.16) на величину $\varphi = G(x, y^*) > 0$ і позначимо $\dfrac{x_i}{\varphi} = p_i \geq 0 \ \ (i = \overline{1,m})$. Поділивши на $\varphi = G(x, y^*) > 0$ обидві частини рівності (10.17) та позначивши $\dfrac{1}{\varphi} = z > 0$, отримаємо:

$$z = p_1 + p_2 + \cdots + p_m. \quad (10.19)$$

Очевидно, що задача максимізації функції (10.15) еквівалентна задачі мінімізації функції (10.19). Отже, отримуємо наступну ЗЛП, еквівалентну матричній грі

$$z = p_1 + p_2 + \cdots + p_m \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + \cdots + a_{m1} p_m \geq 1, \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + \cdots + a_{m2} p_m \geq 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + \cdots + a_{mn} p_m \geq 1, \end{cases} \quad (10.21)$$

$$p_i \geq 0, \ \ (i = \overline{1,m}).$$

Знайшовши $p_i, \ \ i = \overline{1,m}$, можна знайти ціну гри $\vartheta = \dfrac{1}{z}$ та оптимальні стратегії І-го гравця $x_i = \dfrac{p_i}{z}, \ i = \overline{1,m}$.

Проводячи аналогічні міркування щодо другого гравця, отримуємо наступну ЗЛП:

$$f = q_1 + q_2 + \cdots + q_m \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{21}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \le 1, \\ a_{12}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2n}q_n \le 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}q_1 + a_{2n}q_2 + \cdots + a_{mn}q_n \le 1, \end{cases} \tag{10.21}$$

$$q_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,n}).$$

Звідси, ціна гри визначається, як $\vartheta = \dfrac{1}{f}$ та оптимальні стратегії ІІ-го гравця $y_i = \dfrac{q_i}{f}$, $j = \overline{1,n}$.

Однак розв'язувати обидві ЗЛП (10.20) та (10.21) немає потреби. Задачі (10.20) та (10.21) є взаємно двоїстими, тому, розв'язавши одну з них, можна знайти розв'язок іншої.

Контрольні запитання

1. Що вивчає теорія ігор?
2. Які ігри називають матричними?
3. Якими методами можна знайти оптимальні стратегії гравців в матричних іграх?
4. Дайте означення сідлового елемента матриці.
5. Чому в грі двох осіб з нульовою сумою можна розглядати лише функцію виграшу першого гравця?
6. Коли гра двох осіб з нульовою сумою буде замкненою?
7. Коли матрична гра буде замкненою?
8. Яка величина називається ціною гри?
9. Яку гру називають замкненою?
10. Що називається змішаною стратегією гравця в матричній грі?

Лабораторна робота №12
Матричні ігри

Приклад Л12.1. Знайти ціну гри та стратегії гравців, якщо платіжна матриця має вигляд:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку спробуємо відшукати явну сідлову точку платіжної матриці $\mathbf{A}$: аналізуємо кожен рядок і знаходимо мінімальний елемент рядка; якщо даний мінімальний елемент є максимальним в стовпці, то цей елемент є сідловою точкою.

Матриця $\mathbf{A}$ не має явної сідлової точки, а отже, гравці не мають явних стратегій. Тому шукаємо розв'язок в змішаних стратегіях.

Спочатку робимо всі елементи матриці $\mathbf{A}$ додатними, додавши до них число $\Theta = 2$. Отримуємо:

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Нехай ϑ - ціна гри, а $y=(y_1; y_2; y_3)$ - змішана стратегія гравця II з платіжною матрицею $\mathbf{A}'$. Тоді, згідно (10.21), отримуємо наступну ЗЛП, еквівалентну даній матричні грі:

$$f = q_1 + q_2 + q_3 \to \max, \qquad \text{(Л12.1)}$$

$$\begin{cases} q_1 + 2q_2 + 3q_3 \le 1, \\ 4q_1 + 3q_2 + 5q_3 \le 1, \\ 7q_1 + 4q_2 + 3q_3 \le 1, \end{cases} \qquad \text{(Л12.2)}$$

$$q_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}, \qquad \text{(Л12.3)}$$

де $\vartheta = \dfrac{1}{f}$, $y_j = \dfrac{q_j}{f}$, $j=\overline{1,3}$. ЗЛП (Л12.1)-Л12.3) розв'язуємо симплекс-методом, попередньо звівши її до канонічного вигляду.

$$f = q_1 + q_2 + q_3 + 0 \cdot (q_4 + q_5 + q_6) \to \max,$$

$$\begin{cases} q_1 + 2q_2 + 3q_3 + q_4 = 1, \\ 4q_1 + 3q_2 + 5q_3 + q_5 = 1, \\ 7q_1 + 4q_2 + 3q_3 + q_6 = 1, \end{cases}$$

$$q_j \geq 0, \; j = \overline{1,6}.$$

Таблиця Л12.1

Симплекс-таблиця до прикладу Л12.1

	Б	$C_б$	Q	$C_1=1$	$C_2=1$	$C_3=1$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=0$	θ_i
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_4	0	1	1	2	3	1	0	0	1
	A_5	0	1	4	3	5	0	1	0	1/4
	$\to A_6$	0	1	7	4	3	0	0	1	1/7
			0	-1↑	-1	-1	0	0	0	
2	A_4	0	6/7	0	10/7	18/7	1	0	-1/7	1/3
	$\to A_5$	0	3/7	0	5/7	23/7	0	1	-4/7	3/23
	A_1	1	1/7	1	4/7	3/7	0	0	1/7	1/3
			1/7	0	-3/7	-4/7↑	0	0	1/7	
3	A_4	0	12/23	0	20/23	0	1	-18/23	7/23	3/5
	A_3	1	3/23	0	5/23	1	0	7/23	-4/23	3/5
	$\to A_1$	1	2/23	1	11/23	0	0	-3/23	5/23	2/11
			5/23	0	-7/23↑	0	0	4/23	1/23	
4	A_4	0	4/11	-20/11	0	0	1	-6/11	-1/11	
	A_3	1	1/11	-5/11	0	1	0	4/11	-3/11	
	A_2	1	2/11	23/11	1	0	0	-3/11	5/11	
			3/11	7/11	0	0	0	1/11	2/11	

Отже, $f = \dfrac{3}{11}$, $q = (0; \dfrac{2}{11}; \dfrac{1}{11}; \dfrac{4}{11}; 0; 0)$. Тому, ціною гри з платіжною матрицею $\mathbf{A}'$ є $\vartheta' = \dfrac{11}{3}$ і оптимальна змішана стратегія другого гравця $y = (0; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3})$. Це означає, що другий гравець із трьох спроб один раз має вибрати третю стратегію, а два рази – другу стратегію. З останньої симплекс-таблиці бачимо, що $p=(0;\frac{1}{11};\frac{2}{11};\frac{7}{11};0;0)$. Отже, оптимальна змішана стратегія першого гравця $x=(0;\frac{1}{3};\frac{2}{3})$. Ціна гри з матрицею **A** буде $\vartheta=\vartheta'-\Theta=\frac{11}{3}-2=\frac{5}{3}$.

Приклад Л12.2. Гра „парно-непарно”. Гравець І пише на клаптику паперу будь-яке число від 1 до 4, а його суперник на іншому клаптику намагається вгадати, яким буде число – парне чи непарне. Якщо він вгадує – то отримує 1 гривню, а якщо ні – то віддає 1 гривню. Побудувати платіжну матрицю і знайти розв’язок гри.

Розв'язання. Гравець І має 4-ри стратегії: стратегія i означає, що він записує число i. Гравець ІІ має дві стратегії: 1-ша – „парно”; 2-га – „непарно”. Тому матриця виграшів (платіжна матриця), побудована з точки зору І-го гравця, буде мати вигляд:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ 1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Спочатку спробуємо відшукати явну сідлову точку платіжної матриці, проаналізувавши матрицю $\mathbf{A}$, аналогічно прикладу Л12.1. Бачимо, що дана матриця не має явної сідлової точки, а отже, гравці не мають явних стратегій. Тому шукаємо розв'язок в змішаних стратегіях.

Робимо всі елементи матриці $\mathbf{A}$ додатними, додавши до них число $\Theta=2$. Отримуємо:

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\\ 3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Нехай ϑ - ціна гри, а $y=(y_1; y_2)$ - змішана стратегія гравця II з платіжною матрицею $\mathbf{A}'$. Тоді, згідно (10.21), отримуємо наступну ЗЛП:

$$f = q_1 + q_2 \to \max, \qquad (Л12.4)$$

$$\begin{cases} 3q_1 + q_2 \le 1, \\ q_1 + 3q_2 \le 1, \\ 3q_1 + q_2 \le 1, \\ q_1 + 3q_2 \le 1, \end{cases} \qquad (Л12.5)$$

$$q_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}, \qquad (Л12.6)$$

де $\vartheta = \dfrac{1}{f}$, $y_j = \dfrac{q_j}{f}$, $j = \overline{1,2}$.

ЗЛП (Л12.4)-(Л12.4) розв'язуємо симплекс-методом, попередньо звівши її до канонічного вигляду

$$f = q_1 + q_2 + 0\cdot(q_3 + q_4 + q_5 + q_6) \to \max,$$

$$\begin{cases} 3q_1 + q_2 + q_3 = 1, \\ q_1 + 3q_2 + q_4 = 1, \\ 3q_1 + q_2 + q_5 = 1, \\ q_1 + 3q_2 + q_6 = 1, \end{cases}$$

$$q_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Таблиця Л12.2

Симплекс-таблиці до прикладу Л.12.2

				C_1=1	C_2=1	C_3=0	C_4=0	C_5=0	C_6=0	θ_i
	Б	$C_б$	Q	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	$\to A_3$	0	1	3	1	1	0	0	0	1/3
	A_4	0	1	1	3	0	1	0	0	1
	A_5	0	1	3	1	0	0	1	0	1/3
	A_6	0	1	1	3	0	0	0	1	1
			0	-1↑	-1	0	0	0	0	
2	A_1	1	1/3	1	1/3	1/3	0	0	0	1
	$\to A_4$	0	2/3	0	8/3	-1/3	1	0	0	1/4
	A_5	0	0	0	0	-1	0	1	0	-
	A_6	0	2/3	0	8/3	-1/3	0	0	1	1/4
			1/3	0	-2/3↑	1/3	0	0	0	

3	A_1	1	1/4	1	0	3/8	-1/8	0	0	
	A_2	1	1/4	0	1	-1/8	3/8	0	0	
	A_5	0	0	0	0	-1	0	1	0	
	A_6	0	0	0	0	0	-1	0	1	
			1/2	0	0	1/4	1/4	0	0	

Отже, $f=\dfrac{1}{2}$, $q=(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4};0;0;0;0)$. Тому, ціна гри з платіжною матрицею $\mathbf{A}'$ дорівнює $\vartheta'=\dfrac{1}{f}=2$ і оптимальна змішана стратегія другого гравця $y=(\dfrac{q_1}{f};\dfrac{q_2}{f})=(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2})$. З останньої симплекс-таблиці бачимо, що $p=(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4};0;0;0;0)$. Отже, оптимальна змішана стратегія першого гравця $x=(\dfrac{p_1}{f};\dfrac{p_2}{f};\dfrac{p_3}{f};\dfrac{p_4}{f})=(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0;0)$. Ціна гри з матрицею $\mathbf{A}$ є $\vartheta=\vartheta'-\Theta=2-2=0$. Тобто, теоретично, перший гравець нічого не виграє, а другий – нічого не програє.

Завдання для самостійної роботи

Знайти ціну гри та оптимальні стратегії при заданій платіжній матриці А.

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ -2 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

4. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

6. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}10 & 11 & 9\\ 9 & 9 & 10\\ 11 & 10 & 9\end{pmatrix}$

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

11. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

14. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

17. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 0 & 10 & 2 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

18. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

19. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

20. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

21. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

22. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 16 & 12 & 14 \\ 13 & 18 & 15 \end{pmatrix}$

23. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

24. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

25. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 & 2 \\ 9 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

РОЗДІЛ 3
ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

ТЕМА 11. ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

11.1. Постановка задачі

В загальному вигляді задача нелінійного програмування полягає у відшуканні екстремуму функції:

$$f(\mathbf{X}) \to \min(\max) \tag{11.1}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} g_i(\mathbf{X}) \le b_i, (i = \overline{1,k}), \\ g_i(\mathbf{X}) = b_i, (i = \overline{k+1,m}), \end{cases} \tag{11.2}$$

де $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$; $f(\mathbf{X}),\ g_i(\mathbf{X}),\ i = \overline{1,m}$, – задані функції, причому хоча б одна із них нелінійна; $b_i, i = \overline{1,m}$, – задані числа; $k \le m$.

Задача лінійного програмування є частковим випадком задачі (11.1), (11.2), коли функції $f(\mathbf{X}), g_i(\mathbf{X})$, $i = \overline{1,m}$ є лінійними.

11.2. Геометрична інтерпретація задачі

В евклідовому просторі E^n система обмежень (11.2) визначає область допустимих розв'язків задачі (11.1), (11.2). На відміну від ЗЛП, дана область не завжди є опуклою. І взагалі, вона не є многогранником. Однак, в окремих випадках і задачу нелінійного програмування можна розв'язати графічно.

> Гіперповерхнею функції $f(\mathbf{X})$ називається сукупність точок $\mathbf{X} \in E^n$, в яких функція $f(\mathbf{X})$ приймає задане значення $h = const$.

Тобто, згідно означення гіперповерхня визначається рівнянням $f(\mathbf{X}) = h,\ h = const.$

В двовимірному випадку гіперповерхня називається лінією рівня. Наприклад, лініями рівня функції $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ є кола $x_1^2 + x_2^2 = h, h \geq 0$ з центром в початку координат.

Якщо визначена область допустимих розв'язків (ОДР), то знаходження розв'язку задачі (11.1), (11.2) зводиться до знаходження такої точки даної області, через яку проходить гіперповерхня найнижчого (найвищого) рівня $f(\mathbf{X}) = h, \quad h = const$. Вказана точка може знаходитись як на межі ОДР, так і всередині її. Рівняння $f(\mathbf{X}) = h_1, \quad h_1 = const$ визначає гіперповерхню найвищого рівня, якщо в ОДР не існує точок, в яких би цільова функція (11.1) приймала значення, більші за h_1. Аналогічне твердження стосується гіперповерхні найнижчого рівня.

Зважаючи на це, сформулюємо

Схематичний алгоритм графічного методу розв'язання задачі (11.1), (11.2)

1. Використовуючи обмеження (11.2), знаходимо ОДР задачі. Якщо ОДР порожня, то задача не має розв'язку.
2. Будуємо гіперповерхні $f(\mathbf{X}) = h, h = const$.
3. Визначаємо гіперповерхню найнижчого (найвищого) рівнів або встановлюємо нерозв'язність задачі із-за необмеженості функції (11.1) знизу (зверху) на області допустимих розв'язків.
4. Знаходимо точку (точки) ОДР, через яку проходить гіперповерхня найнижчого (найвищого) рівня і визначаємо в ній значення функції (11.1). Знайдена точка і значення цільової функції і є розв'язком задачі (11.1), (11.2).

Контрольні запитання

1. Чим відрізняються задачі нелінійного програмування від задачі лінійного програмування?
2. Чи можна в задачі нелінійного програмування ставити умови невід'ємності змінних?
3. Що називають гіперповерхнею деякої функції?
4. Яка гіперповерхню називають гіперповерхнею найнижчого (найвищого) рівня?
5. В яких випадках задача нелінійного програмування не має розв'язку?

Лабораторна робота №13
Графічний метод розв’язання задачі нелінійного програмування

Приклад Л13.1.
Знайти максимальне і мінімальне значення функції:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min(\max) \qquad \text{(Л13.1)}$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \qquad \text{(Л13.2)}$$

Розв’язання. Будуємо область допустимих розв’язків. Для цього будуємо граничні прямі, які відповідають обмеженням задачі, і визначаємо півплощини, в яких дані обмеження виконуються. Оскільки всі обмеження є лінійними, то побудова області допустимих розв’язків в даній задачі аналогічна до побудови ОДР в задачі лінійного програмування (див. лаб. роботу №5).

(1) $3x_1 + 2x_2 = 7$;	(2) $10x_1 - x_2 = 8$;	(3) $-18x_1 + 4x_2 = 12$
$x_1 = 1, x_2 = 2,$	$x_1 = 1, x_2 = 2,$	$x_1 = 1, x_2 = 2,$
$x_1 = 3, x_2 = -1,$	$x_1 = 1{,}5, x_2 = 7,$	$x_1 = 3, x_2 - 1,$

В результаті отримуємо, що ОДР задачі (Л13.1), (Л13.2) буде трикутник АВС (рис.Л13.1).

Покладаючи значення цільової функції (Л13.1) рівним деякому числу h, отримуємо лінії рівня

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = h, \; h = const.$$

Це є кола з центром в точці $E(3;4)$ і радіусами $\sqrt{h}$. Звідси випливає, що має виконуватись умова $h \geq 0$. Зі збільшенням чи зменшенням числа h значення цільової функції $f(x_1, x_2)$ відповідно збільшуються та зменшуються.

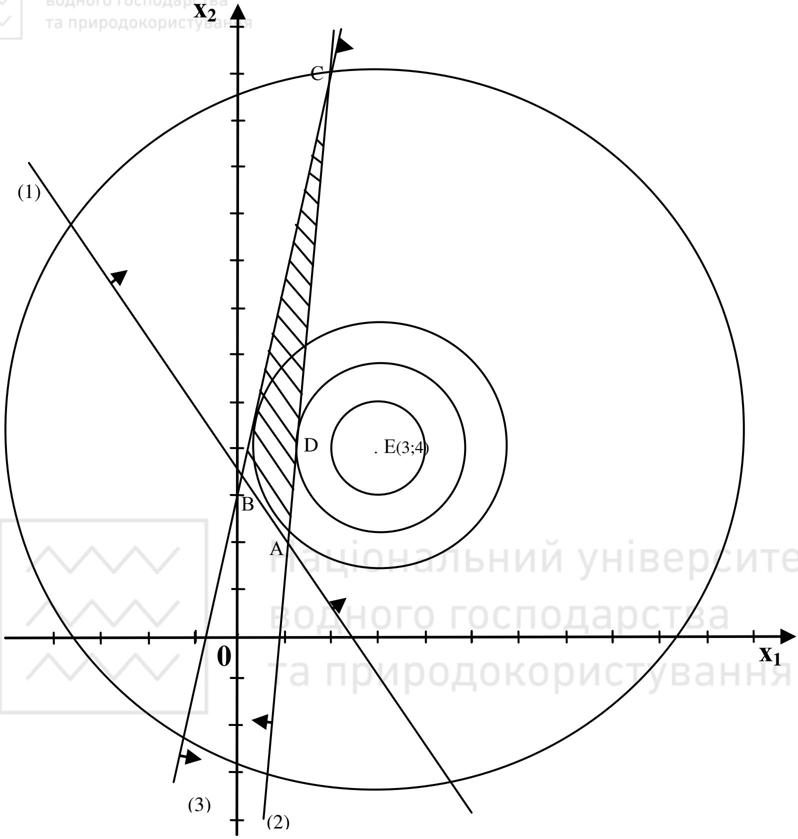

Рис. Л13.1. Область допустимих розв'язків та лінії рівня цільової функції

Проведемо з точки E кола різних радіусів. Бачимо, що мінімальне значення цільова функція досягає в точці D, в якій лінія рівня дотикається до області розв'язків на граничній прямій (2). Для визначення координат точки D потрібно два рівняння. Перше – це рівняння прямої (2): $10x_1 - x_2 = 8$. Друге складемо на основі рівностей кутових коефіцієнтів прямої (2) та дотичної до кола в точці D. З рівняння прямої (2) $x_2 = 10x_1 - 8$ бачимо, що її кутовий коефіцієнт $k_1 = 10$. Кутовий коефіцієнт дотичної до кола в точці D визначимо, як значення похідної неявної функції по змінній x_1. Диференціюючи рівняння кола, отримуємо:

$$2(x_1-3)+2(x_2-4)x_2'=0,$$

$$x_2'=-\frac{x_1-3}{x_2-4}.$$

Отже, $k_2=-\dfrac{x_1-3}{x_2-4}$. Оскільки $k_1=k_2$, то $-\dfrac{x_1-3}{x_2-4}=10$, що і буде другим рівнянням для визначення координат точки D. Отже, отримуємо наступну СЛАР:

$$\begin{cases}10x_1-x_2=8,\\ -\dfrac{x_1-3}{x_2-4}=10,\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=10x_1-8,\\ x_1+10x_2=43.\end{cases}$$

Розв'язком її є $x_1=\dfrac{123}{101}$, $x_2=\dfrac{422}{101}$. Отже, $\mathbf{X}_{\min}=(\dfrac{123}{101};\dfrac{422}{101})$,

$$f_{\min}=(\frac{123}{101}-3)^2+(\frac{422}{101}-4)^2=3\frac{21}{101}.$$

Як видно з рис. Л13.1, максимальне значення досягається в точці C, координати якої визначаються із СЛАР (точка перетину прямих (2) і (3)):

$$\begin{cases}10x_1-x_2=8,\\ -18x_1+4x_2=12.\end{cases}$$

Її розв'язком є $x_1=2, x_2=12$. Отже, $\mathbf{X}_{\max}=(2;12)$,

$$f_{\max}=(2-3)^2+(12-4)^2=1+64=65.$$

Відповідь: $\mathbf{X}_{\min}=(\dfrac{123}{101};\dfrac{422}{101})$, $f_{\min}=3\dfrac{21}{101}$.

$\mathbf{X}_{\max}=(2;12)$, $f_{\max}=65$.

Приклад Л13.2.

Знайти мінімальне і максимальне значення функції

$$f(x_1,x_2)=16(x_1-4)^2+25(x_2-3)^2\to\min(\max)$$

при умовах

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 18, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Будуємо область допустимих розв'язків даної задачі.

(1) $2x_1 + 3x_2 = 6$;(2) $3x_1 - 2x_2 = 18$; (3) $-x_1 + 2x_2 = 8$

$x_1 = 0, x_2 = 2,$ $x_1 = 6, x_2 = 0,$ $x_1 = 0, x_2 = 4,$

$x_1 = 3, x_2 = 0,$ $x_1 = 8, x_2 = 3,$ $x_1 = 2, x_2 = 5.$

В результаті маємо, що ОДР буде многокутником АВСДЕ (рис.Л13.2). Лініями рівня цільової функції є еліпси з центром в точці $F(4;3)$ та півосями $\frac{\sqrt{h}}{4}$ і $\frac{\sqrt{h}}{5}$. Дійсно

$$16(x_1 - 4)^2 + 25(x_1 - 3)^2 = h,$$

$$\frac{(x_1 - 4)^2}{\frac{\sqrt{h}}{4}} + \frac{(x_2 - 3)^2}{\frac{\sqrt{h}}{5}} = 1.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Як видно з рис.Л13.2, точкою мінімуму буде точка $F(4;3)$, тобто:

$$\mathbf{X}_{\min} = (4;3) \text{ і } f_{\min} = 16(4-4)^2 + 25(3-3)^2 = 0.$$

Точкою максимуму буде точка C – точка перетину прямих (2) та (3). В результаті маємо:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 18, \\ -x_1 + 2x_2 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 18, \\ 2x_1 = 26, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 13, \\ x_2 = 10{,}5. \end{cases}$$

Отже, $\mathbf{X}_{\max} = (13;10{,}5)$, $f_{\max} = 16(3-13)^2 + 25(10{,}5-3)^2 = 137{,}25$.

Відповідь: $\mathbf{X}_{\min} = (4;3)$, $f_{\min} = 0$.

$\mathbf{X}_{\max} = (13;10{,}5)$, $f_{\max} = 137{,}25$.

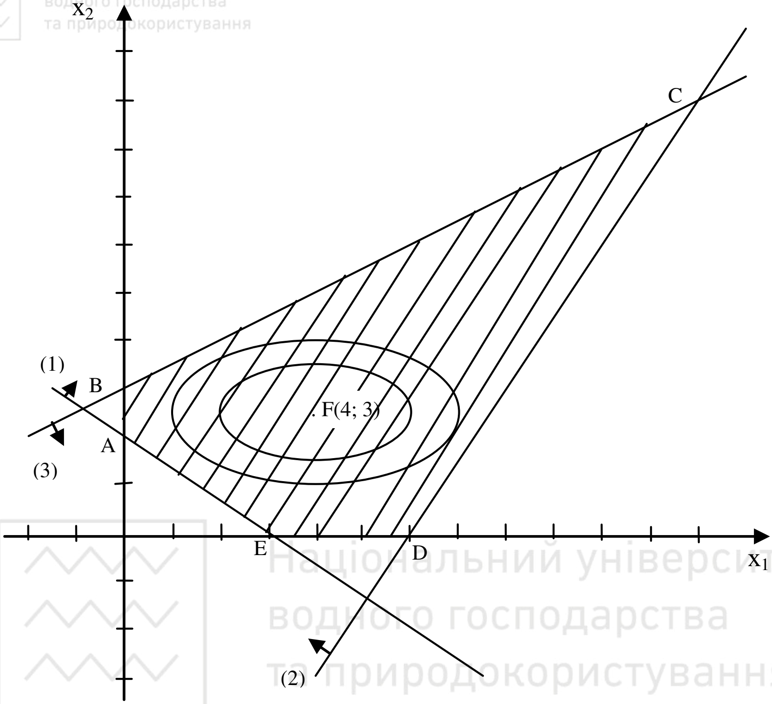

Рис. Л13.2. Область допустимих розв’язків та лінії рівня цільової функції

Завдання для самостійної роботи

Розв’язати задачу нелінійного програмування графічним методом.

1. $f(x_1, x_2) = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 + 1)^2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2. $f(x_1, x_2) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 16, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

3. $f(x_1, x_2) = 25(x_1 - 9)^2 + (x_2 - 7)^2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Національний університет водного господарства та природокористування

4. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

5. $f(x_1, x_2) = (x_1 + 5)^2 + 9(x_2 + 3)^2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_1 - 4x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 18, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

6. $f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 10)^2 \to \min(\max),$

$$\begin{cases} 2x_1 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \le 2, \\ x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

7. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

8. $f(x_1, x_2) = 8(x_1 + 2)^2 + 16(x_2 - 4)^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 20, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

9. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + x^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \le 5, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 8, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

10. $f(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 18x_1 + 9 + 16(x_2 - 12)^2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

11. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 10)^2 + x_2^2 - 12x_2 + 36 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 8, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 80, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Національний університет водного господарства та природокористування

12. $f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \ge 9, \\ (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \le 36, \\ x_1 + x_2 \ge 8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

13. $f(x_1, x_2) = 25(x_1 - 5)^2 + 9(x_2 - 5)^2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \ge 7, \\ -2x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 7x_1 + x_2 \ge 7, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \le 7, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

14. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + x_2^2 - 10x_2 + 25 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -3, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 42, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

15. $f(x_1, x_2) = 18(x_1 + 5)^2 + 8(x_2 - 3)^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

16. $f(x_1, x_2) = 72x_1^2 - 24x_1 + 2 + (x_2 - 10)^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

17 $f(x_1, x_2) = (x_1 - 7)^2 + (5x_2 - 1)^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 3x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + 5x_2 \ge 4, \\ 0 \le x_1 \le 3, \\ 0 \le x_2 \le 3. \end{cases}$$

18. $f(x_1, x_2) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 10)^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 + 7x_2 \le 21, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 1, \\ 0 \le x_2 \le 1. \end{cases}$$

19. $f(x_1, x_2) = 4(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 3x_1 + x_2 \ge 15, \\ x_1 \le 8, \\ x_2 \le 10. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

20. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -5x_1 + x_2 \le 0, \\ -x_1 + 5x_2 \ge 6, \\ x_1 + x_2 \le 6. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

21. $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + (x_2 - 3)^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 3x_1 + 3x_2 \ge 7, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

22. $f(x_1, x_2) = \frac{1}{9}(x_1 + 1)^2 + x_2^2 \to \min(\max),$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

23. $f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \ge 2, \\ x_1^2 + x_2^2 \le 16. \end{cases}$$

24. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 12)^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 10.$

25. $f(x_1, x_2) = 2(x_1 + 5)^2 + (x_2 - 10)^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

ТЕМА 12. МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА

12.1. Метод виключень

Розглянемо наступну задачу нелінійного програмування:

$$f(\mathbf{X}) \to \min(\max), \tag{12.1}$$

$$g_i(\mathbf{X}) = 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{12.2}$$

де $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $m < n$. Умови (12.2) досить часто називають рівняннями зв'язку.

> Точку $\overline{\mathbf{X}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ будемо називати допустимою, якщо вона задовольняє умови (12.2).

Розглянемо випадок, коли рівняння зв'язку (12.2) можна розв'язати відносно частини змінних. Нехай $g_i(\mathbf{X}) \in C^2$, $i = \overline{1,m}$. Не зменшуючи загальності, припустимо, що якобіан, складений із частинних похідних по перших m аргументах функцій $g_i(\mathbf{X})$, $i = \overline{1,m}$, в допустимій точці $\mathbf{X}$ відмінний від нуля. Тобто

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{12.3}$$

Тоді за теоремою про неявні функції в деякому околі допустимої точки $\overline{\mathbf{X}}$ систему рівнянь (12.2) можна розв'язати відносно $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$x_i = \varphi_i(x_{m+1}, \ldots, x_n), i = \overline{1,m}, \tag{12.4}$$

де $\varphi_j(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ - неперервно диференційовані в розглядуваному околі функції. Змінні $x_{m+1}, \ldots, x_n$ - незалежні, а $x_1, x_2, \ldots, x_m$ - залежні.

Підставляючи вирази (12.4) у функцію $f(\mathbf{X})$, отримуємо задачу відшукання безумовного екстремуму функції $(n-m)$ змінних:

$$f\left(\varphi_1(x_{m+1},\ldots,x_n),\ldots,\varphi_m(x_{m+1},\ldots,x_n),x_{m+1},\ldots,x_n\right)=$$
$$=\tilde{f}(x_{m+1},\ldots,x_n)\to\min(\max).$$

В цьому і полягає метод виключень. Але провести виключення частини компонент вектора $\mathbf{X}$ здебільшого практично буває неможливо. Тому потрібний інший підхід.

12.2. Метод множників Лагранжа

Згідно теореми 2.1 в точці безумовного екстремуму $\overline{\mathbf{X}}$ функції $f(\mathbf{X})$ її (функції) повний диференціал дорівнює нулю, тобто:

$$df(\overline{\mathbf{X}})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{\mathbf{X}})dx_j+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{\mathbf{X}})dx_k=0. \qquad (12.5)$$

Припустимо, що точка $\overline{\mathbf{X}}$ є допустимою для задачі (12.1), (12.2). Беручи повні диференціали від рівнянь зв'язку (12.2) в точці $\overline{\mathbf{X}}$, отримуємо:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\overline{\mathbf{X}})dx_j+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\overline{\mathbf{X}})dx_k=0,\ i=\overline{1,m}. \qquad (12.6)$$

Виключимо тепер диференціали залежних змінних $dx_i, i=\overline{1,m}$ з рівнянь (12.5) та (12.6). Для цього домножимо кожне із рівнянь системи (12.6) на довільні множники $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ і результати додамо до рівняння (12.5). Отримаємо:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{\mathbf{X}})+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(\overline{\mathbf{X}})+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x_j}(\overline{\mathbf{X}})+\ldots+\lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_j}(\overline{\mathbf{X}})\right)dx_j+$$
$$+\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{\mathbf{X}})+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_k}(\overline{\mathbf{X}})+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x_k}(\overline{\mathbf{X}})+\ldots+\lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_k}(\overline{\mathbf{X}})\right)dx_k=0. \qquad (12.7)$$

Виберемо множники $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ таким чином, щоб перетворились в нуль коефіцієнти при диференціалах залежних змінних, тобто

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{\mathbf{X}})+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(\overline{\mathbf{X}})+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x_j}(\overline{\mathbf{X}})+\ldots+\lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_j}(\overline{\mathbf{X}})=0,\ \ j=\overline{1,m}. \qquad (12.8)$$

Це можна зробити, оскільки рівняння (12.8) є системою лінійних алгебричних рівнянь відносно множників $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Дана СЛАР має єдиний розв'язок, тому що її визначник (12.3) за умовою відмінний від нуля. При вибраних таким чином значеннях множників $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ в рівності (12.7) залишаються лише члени, які містять диференціали незалежних змінних. Тому, щоб виконувалась рівність (12.7) потрібно, щоб коефіцієнти при даних диференціалах дорівнювали нулю. Тобто,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\bar{\mathbf{X}}\right) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_k}\left(\bar{\mathbf{X}}\right) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_k}\left(\bar{\mathbf{X}}\right) + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_k}\left(\bar{\mathbf{X}}\right) = 0, \quad k = \overline{m+1, n}. \tag{12.9}$$

Отже, ми отримали систему $(n+m)$ рівнянь (12.2), (12.8), (12.9) відносно $(n+m)$ невідомих $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m$. Отриманий результат являє собою основний зміст методу множників Лагранжа і дозволяє визначити множину «претендентів» на розв'язок в задачі на відносний екстремум (12.1), (12.2).

В методі множників Лагранжа можна виділити наступні етапи:

1. Складається функція $(n+m)$ змінних, яка називається функцією Лагранжа

$$L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}). \tag{12.10}$$

2. Обчислюються та прирівнюються до нуля її частинні похідні по $\mathbf{X}$ та λ:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0,\ j = \overline{1, n}, \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathbf{X}) = 0,\ i = \overline{1, m}. \end{aligned} \tag{12.11}$$

3. Розв'язується система (12.11) $(n+m)$ рівнянь відносно $(n+m)$ невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Система (12.11) являє собою необхідні умови першого порядку в задачі на відносний екстремум, а її розв'язки $x_1, x_2, \ldots, x_n$

називають умовно-стаціонарними точками задачі (12.1), (12.2). Як і у випадку задач на безумовний екстремум, необхідні умови першого порядку не визначають характеру умовно-стаціонарної точки (тобто, чи дійсно дана точка є точкою екстремуму). Для розв'язання даного питання потрібно використовувати похідні більш високих порядків функцій $f(X)$ та $g_i(X), i=\overline{1,m}$.

12.3. Достатні умови відносного екстремуму

Нехай пара $(\bar{X},\bar{\lambda})$ - розв'язок системи (12.11) і якобіан (12.3) відмінний від нуля. Надамо приросту ξ для точки $\bar{X}$. Визначимо, чим характеризується знак різниці $f(\bar{X}+\xi)-f(\bar{X})$, де точки $(\bar{X}+\xi)$ є достатньо близькими до $\bar{X}$ і допустимими. Якщо $\left(f(\bar{X}+\xi)-f(\bar{X})\right)>0$, то точка $\bar{X}$ - точка відносного локального мінімуму, якщо ж $\left(f(\bar{X}+\xi)-f(\bar{X})\right)<0$, то точка $\bar{X}$ - точка відносного локального максимуму.

Точки $\bar{X}$ та $(\bar{X}+\xi)$ - допустимі, тобто для них мають виконуватися рівняння зв'язку (12.2). Тоді:

$$f(\bar{X}+\xi)=L(\bar{X}+\xi,\bar{\lambda})=f(\bar{X}+\xi)+\sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}_i g_i(\bar{X}+\xi),$$

$$f(\bar{X})=L(\bar{X},\bar{\lambda})=f(\bar{X})+\sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}_i g_i(\bar{X}).$$

Розкладаючи функцію $L(\bar{X}+\xi,\bar{\lambda})$ в околі точки $\bar{X}$ в ряд Тейлора, отримуємо:

$$f(\bar{X}+\xi)-f(\bar{X})=L(\bar{X}+\xi,\bar{\lambda})-L(\bar{X},\bar{\lambda})=$$

$$=L(\bar{X},\bar{\lambda})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_i}(\bar{X},\bar{\lambda})\xi_i+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}(\bar{X},\bar{\lambda})\xi_i\xi_j+o\left(|\xi|^2\right)-$$

$$-L(\overline{X},\overline{\lambda}) = \left| \begin{matrix} \text{враховуючи,} \\ \text{що згідно (12.11)} \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} (\overline{X},\overline{\lambda}) \xi_i \xi_j + o(|\xi|^2).$$

Оскільки $g_k(\overline{X}+\xi) = 0, k = \overline{1,m}$, то розкладаючи функції $g_k(\overline{X}+\xi)$ в ряд Тейлора в околі точки $\overline{X}$, отримуємо:

$$g_k(\overline{X}+\xi) = g_k(\overline{X}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\overline{X})\xi_i + o(|\xi|^2) = 0, k = \overline{1,m}.$$

Тоді, нехтуючи нескінченно малими вищих порядків і враховуючи, що $g_k(\overline{X}) = 0, k = \overline{1,m}$, в лінійному наближенні маємо:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\overline{X})\xi_i = 0, k = \overline{1,m}. \qquad (12.12)$$

Отже, достатня умова відносного екстремуму другого порядку однозначно пов'язана із знаковизначеністю квадратичної форми:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} (\overline{X},\overline{\lambda}) \xi_i \xi_j \qquad (12.13)$$

для векторів $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, які задовольняють рівностям (12.12). Якщо квадратична форма (12.13) додатньо визначена, то точка $\overline{X}$ - точка локального відносного мінімуму, якщо від'ємно визначена, то точка $\overline{X}$ - точка локального відносного максимуму.

Зауважимо, що досліджувати знаковизначеність квадратичної форми (12.13) потрібно при умові, що не всі компоненти вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ одночасно дорівнюють нулю. Адже, якщо припустити, що всі компоненти вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ рівні нулю, то втрачає зміст проведене дослідження знаку різниці $(f(\overline{X}+\xi) - f(\overline{X}))$.

Вищенаведена квадратична форма буде обов'язково додатньо (від'ємно) визначена, якщо матриця Гессе других похідних функції $L(\overline{X},\overline{\lambda})$ в точці $(\overline{X},\overline{\lambda})$ буде додатньо (від'ємно) визначена. Але за даним критерієм не завжди вдається встановити знаковизначеність квадратичної форми, оскільки один або декілька головних мінорів матриці Гессе можуть дорівнювати нулю.

12.4. Узагальнена функція Лагранжа

Спочатку розглянемо наступну задачу умовної оптимізації:

$$f(\mathbf{X}) = x_2 \to \min(\max), \tag{12.14}$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2)^2 - 1 = 0, \tag{12.15}$$

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2)^2 - 1 = 0. \tag{12.16}$$

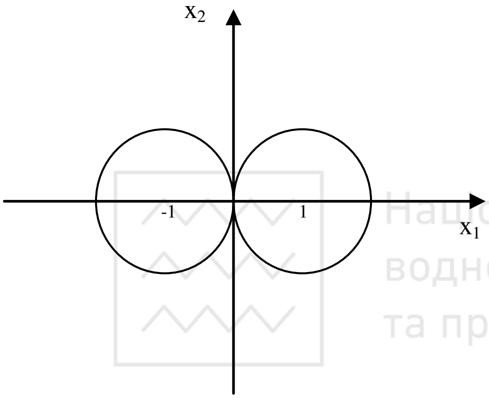

Рис. 12.1. Область допустимих розвязків

Спочатку задачу розв'яжемо графічно. Допустима точка має задовольняти умови (12.15) та (12.16). Побудуємо криві, що визначаються даними рівняннями (рис. 12.1). Отже, як видно з рис. 12.1 область допустимих розв'язків складається з однієї точки $x_1 = 0,\ x_2 = 0$. Тобто, $\mathbf{X}_{\min} = (0;0)$ і $f_{\min} = 0$. Будуємо функцію Лагранжа

$$L(\mathbf{X}, \lambda) = x_2 + \lambda_1 \left((x_1 - 1)^2 + (x_2)^2 - 1\right) + \lambda_2 \left((x_1 + 1)^2 + (x_2)^2 - 1\right).$$

Згідно (12.11), отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2\lambda_1 (x_1 - 1) + 2\lambda_2 (x_1 + 1) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = (x_1 - 1)^2 + (x_2)^2 - 1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = (x_1 + 1)^2 + (x_2)^2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{12.17}$$

Точка відносного мінімуму $\mathbf{X}_{\min} = (0;0)$, знайдена графічним методом, при будь-яких значеннях λ_1, λ_2 не задовольняє систему (12.17). Тобто, в даному випадку метод множників Лагранжа не спрацьовує. Чому?

Проблема полягає в тому, що визначник (12.3) в даному прикладі дорівнює нулю. У випадках, аналогічних вищенаведеному, метод множників Лагранжа застосовується для функції Лагранжа більш загального вигляду:

$$\bar{L}(\mathbf{X},\lambda) = \lambda_0 \cdot f(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}). \qquad (12.18)$$

Функція $\bar{L}(\mathbf{X},\lambda)$ називається узагальненою функцією Лагранжа. Для вищенаведеного прикладу відповідає система множників $\lambda_0 = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$. У випадку, коли виконується умова (12.3), ми отримуємо єдину систему множників Лагранжа з $\lambda_0 \neq 0$. Тому, всі множники можна розділити на λ_0 і користуватись функцією Лагранжа у вигляді (12.10).

Національний університет водного господарства та природокористування

Контрольні запитання

1. Яку точку називають допустимою?
2. В чому суть методу виключень розв'язання задачі умовної оптимізації?
3. Який вигляд функції Лагранжа?
4. Чим відрізняється узагальнена функція Лагранжа від звичайної?
5. В яких випадках застосовується узагальнена функція Лагранжа?
6. При яких умовах потрібно досліджувати знаковизначеність квадратичної форми для встановлення властивостей точки, підозрілої на екстремум?
7. Який знак квадратичної форми відповідає точці відносного локального мінімуму?
8. Які етапи включає в себе метод множників Лагранжа?

Лабораторна робота №14
Метод множників Лагранжа

Приклад Л14.1. Розв'язати задачу умовної оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3 \to \min(\max),$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. Складаємо функцію Лагранжа:

$$L(X, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3 + \lambda_1 (4 - x_1 - x_2 - x_3) + \lambda_2 (12 - 2x_1 + 3x_2).$$

Тоді знаходимо частинні похідні функції $L(X, \lambda)$ по всіх змінних і прирівнюємо їх до нуля. Отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 1 - \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 4 - x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Відразу знайшовши $\lambda_1 = 1$, отримуємо СЛАР з чотирьох рівнянь на чотири невідомі:

$$\begin{cases} 2x_1 & & & -2\lambda_2 & = & 1, \\ & 2x_2 & & +3\lambda_2 & = & 1, \\ x_1 & + x_2 & + x_3 & & = & 4, \\ 2x_1 & - 3x_2 & & & = & 12. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Гауса.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & | & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & | & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 7/2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & | & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 13/2 & | & 25/2 \end{pmatrix}$$

Отже, $\lambda_2 = 25/13$, $x_3 = \dfrac{103}{26}$, $x_2 = -\dfrac{31}{13}$, $x_1 = \dfrac{63}{26}$. Тобто,

$$\overline{\mathbf{X}} = \left(\frac{63}{26}; -\frac{31}{13}; \frac{103}{26}\right), \ \overline{\boldsymbol{\lambda}} = \left(1; \frac{25}{13}\right).$$

Щоб зрозуміти, чи досягає відносного екстремуму функція $f(\mathbf{X})$ в знайденій точці $\overline{\mathbf{X}}$, потрібно з'ясувати характер поведінки квадратичної форми:

$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{\mathbf{X}}, \overline{\lambda})\xi_i \xi_j$ для векторів $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, які задовольняють умовам (12.12).

У нашому випадку:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2, \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2, \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} = 0.$$

Тоді:

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{\mathbf{X}}, \overline{\boldsymbol{\lambda}})\xi_i \xi_j = 2(\xi_1)^2 + 2(\xi_2)^2. \quad (Л14.1)$$

Умови (12.12) в даному випадку набувають вигляду:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\overline{\mathbf{X}})\xi_i = -\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 0, \quad (Л14.2)$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial g_2}{\partial x_i}(\overline{\mathbf{X}})\xi_i = -2\xi_1 + 3\xi_2 = 0. \quad (Л14.3)$$

Квадратична форма (Л14.1)завжди додатньо визначена при $\xi_1 \neq 0$ і (або) $\xi_2 \neq 0$ та довільному ξ_3, але вона перетворюється в нуль при $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 \neq 0$. Припустимо, що $\xi_3 \neq 0$. Тоді з (Л14.3) отримуємо $\xi_1 = \frac{3}{2}\xi_2$ і, підставляючи знайдений вираз в (Л14.2), маємо $\xi_2 = \frac{2}{5}\xi_3$. Отже, при $\xi_3 \neq 0$ також $\xi_2 \neq 0$ і $\xi_1 \neq 0$. Тобто, вектори виду $\xi = (0;0;\xi_3)$, де $\xi_3 \neq 0$, не задовольняють умови (Л14.2), (Л14.3). Отже, квадратична форма (Л14.1) завжди додатньо визначена при умовах (Л14.2), (Л14.3). Тобто, точка $\overline{\mathbf{X}} = \left(\frac{63}{26}; -\frac{31}{13}; \frac{103}{26}\right)$ є точкою локального умовного мінімуму і $f_{\min}(\overline{\mathbf{X}}) = 15\frac{27}{52}$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти умовні екстремуми функції методом множників Лагранжа.

1. $f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1,$

   $x_1^2 + x_2^2 = 4.$

2. $f(x) = x_1 x_2,$

   $2x_1 + 3x_2 - 5 = 0.$

3. $f(x) = x_1 + x_2 + x_3,$

   $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1.$

4. $f(x) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2},$

   $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1.$

5. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 + 4,$
$x_1 + 2x_2 = 3.$

6. $f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 10,$
$2x_1 - 2x_2 = 7.$

7. $f(x) = -5x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 12,$
$x_1 - 2x_2 = 7.$

8. $f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 10,$
$x_1 + 2x_2 = 3.$

9. $f(x) = -2x_1^2 - 5x_1x_2 - 3x_2^2 - 2x_1 + x_2 + 4,$
$x_1 - x_2 = 5.$

10. $f(x) = -2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - 4x_2 + 17,$
$3x_1 + 2x_2 = 3.$

11. $f(x) = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 8.$

12. $f(x) = x_1^2 + x_2^2,$
$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{3} = 1.$

13. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 12.$

14. $f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3,$
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9.$

15. $f(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 4.$

16. $f(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 8. \end{cases}$$

17. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 11x_1 - 8x_2 + x_3$,

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

18. $f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + x_1 x_3$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}.$$

19. $f(x) = -16x_1 + 4x_1^2 - 72x_2 + 9x_2^2 - 10 - x_3^2$,

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 12.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

20. $f(x) = 8x_1 + 2x_2 + x_3 - x_1^2 - 2x_3^2$,

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 16.$$

21. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$,

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 10.$$

22. $f(x) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 5x_1 + 6x_2$,

$$3x_1 + 6x_2 + x_3 = 20.$$

23. $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2$,

$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 12.$$

24. $f(x) = x_3 - x_2^2 + x_2 - x_1^2$,

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 6.$$

25. $f(x) = 4x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 - 3x_2 x_3$,

$$-5x_1 - 4x_2 + x_3 = 20.$$

ТЕМА 13. МЕТОД ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ

13.1. Загальна схема методу штрафних функцій (МШФ)

Основна ідея МШФ полягає у наближеному зведенні задачі пошуку умовного екстремуму до задачі пошуку безумовного екстремуму.

Розглянемо задачу умовної мінімізації

$$f(\mathbf{X}) \to \min, \tag{13.1}$$

$$\mathbf{X} \in \Omega \neq E^n. \tag{13.2}$$

Під пошуком мінімуму розуміємо пошук точної нижньої межі функції $f(\mathbf{X})$ на множині Ω.

Задача (13.1), (13.2) формально еквівалентна задачі безумовної мінімізації суми:

$$f(\mathbf{X}) + \delta(\mathbf{X}, \Omega) \to \min,$$

де $\delta(\mathbf{X}, \Omega)$ – так звана індикаторна, або штрафна функція, визначена наступним чином:

$$\delta(\mathbf{X}, \Omega) = \begin{cases} 0, \mathbf{X} \in \Omega; \\ +\infty, \mathbf{X} \notin \Omega. \end{cases}$$

Побудувати функцію $\delta(\mathbf{X}, \Omega)$ для довільної області Ω непросто. Однак, коли множина Ω задана обмеженнями типу рівностей та нерівностей, то є можливість побудувати такі штрафні функції $\delta_k(\mathbf{X}, \Omega)$, $\mathbf{X} \in E^n$, $k = 1,2,3,\ldots$ що

$$\lim_{k \to \infty} \delta_k(\mathbf{X}, \Omega) = \delta(\mathbf{X}, \Omega). \tag{13.3}$$

Отже, еквівалентною задачі (13.1), (13.2) буде послідовність задач безумовної оптимізації:

$$F_k(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + \delta_k(\mathbf{X}, \Omega) \to \min, \mathbf{X} \in E^n,\ k = 1,2,3,\ldots. \tag{13.4}$$

Причому, при виконанні умови (13.3) маємо, що

$$\lim_{k \to \infty} \min F_k(\mathbf{X}) = \min f(\mathbf{X}).$$

Існує два підходи до побудови штрафів $\delta_k(\mathbf{X}, \Omega)$ і, відповідно, два методи штрафних функцій:

1. Методи внутрішньої точки або метод внутрішніх штрафних функцій.

2. Методи зовнішньої точки або метод зовнішніх штрафних функцій.

13.2. Метод внутрішніх штрафних функцій

Розглянемо наступну задачу умовної оптимізації:

$$f(\mathbf{X}) \to \min, \tag{13.5}$$

$$\varphi_i(\mathbf{X}) \ge 0, i = \overline{1,m}. \tag{13.6}$$

Будемо вважати, що існує принаймні одна точка $\mathbf{X} \in E^n$, в якій

$$\varphi_i(\mathbf{X}) > 0,\ i = \overline{1,m}. \tag{13.7}$$

В даному випадку процес пошуку мінімуму розпочинається з точки, в якій виконується умова (13.7). Тоді, при належній організації, ітераційний процес руху до точки мінімуму функції (13.4) ніколи не залишить множину $\Omega = \{\mathbf{X} : \varphi_i(\mathbf{X}) \ge 0, i = \overline{1,m}\}$.

Найчастіше в якості штрафів для задачі (13.5), (13.6) використовуються наступні функції:

$$\delta_k(\mathbf{X},\Omega) = -r_k \sum_{i=1}^{m} \ln \varphi_i(\mathbf{X}),$$

$$\delta_k(\mathbf{X},\Omega) = r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\varphi_i(\mathbf{X})}.$$

Тут $r_k > 0$ – параметр штрафу. Співвідношення (13.3) для вищенаведених штрафних функцій буде виконуватись, якщо $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$.

Схематичний алгоритм розв'язання задачі (13.5), (13.6) методом внутрішніх штрафних функцій наступний:

1. Задати початкову точку $\mathbf{X}_0$ всередині області Ω (тобто точку, для якої виконуються умови (13.7)); початкове значення параметра штрафу r_0; число $c > 1$ для зменшення параметра штрафу; мале число $\varepsilon > 0$ для зупинки алгоритму. Покласти $k = 0$.
2. Утворити допоміжну функцію:

$$F_k(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) - r_k \sum_{i=1}^{m} \ln \varphi_i(\mathbf{X}) \text{ або}$$

$$F_k(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\varphi_i(\mathbf{X})} \quad .$$

3. Знайти точку мінімуму (безумовного) $\mathbf{X}^*(r_k)$ функції $F_k(\mathbf{X})$ за допомогою будь-якого методу пошуку безумовного мінімуму. При цьому задати всі необхідні для вибраного методу параметри. В якості початкової точки у вибраному методі взяти $\mathbf{X}^{(k)}$.
4. Обчислити:

$$\delta_k(\mathbf{X},\Omega) = -r_k \sum_{i=1}^{m} \ln \varphi_i(\mathbf{X}^*(r_k)) \text{ або}$$

$$\delta_k(\mathbf{X},\Omega) = r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\varphi_i(\mathbf{X}^*(r_k))} \quad .$$

5. Перевірити умову завершення обчислень:
   а) якщо $|\delta_k| \le \varepsilon$, то процес пошуку завершити і покласти $\mathbf{X}_{\min} = \mathbf{X}^*(r_k)$;
   б) якщо $|\delta_k| > \varepsilon$, то покласти $r_{k+1} = \dfrac{r_k}{c}$; $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^*(r_k)$; $k = k+1$ і перейти до кроку 2.

Зауваження щодо практичної реалізації

1. Як правило вибирається $r_0 = 1;10;100$, а параметр $c = 10;12;16$.
2. Оскільки більшість методів пошуку безумовного екстремуму використовують дискретні кроки, то поблизу межі області Ω крок може привести в точку, яка не належить Ω (хоча теоретично це неможливо). Тому на кроці 3 алгоритму варто явно перевірити, чи точка не покинула допустиму область (тобто, чи виконуються умови (13.6)).
3. В якості критерію зупинки взято умову $|\delta_k| \le \varepsilon$. Але можна використати й інші, наприклад, $\left|\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}^{(k-1)}\right| \le \varepsilon$.

Розглянемо приклад, який показує збіжність методу внутрішніх штрафних функцій.

Приклад 13.1. Розв'язати наступну задачу мінімізації:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\varphi_1(x_1, x_2) = -(x_1)^2 + x_2 \geq 0,$$
$$\varphi_2(x_1, x_2) = x_1 \geq 0.$$

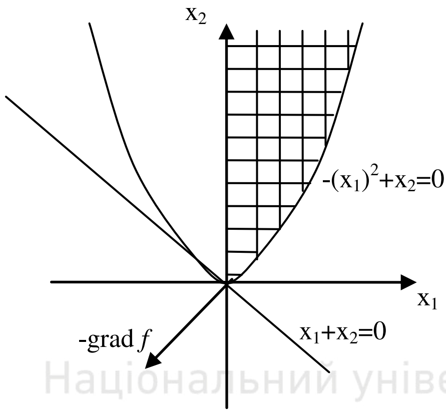

Рис.13.1. Область допустимих розв'язків задачі

Спочатку розв'яжемо задачу графічно. З рисунка 13.1 видно, що $\mathbf{X}_{\min} = (0;0)$, $f_{\min} = 0$.

Використовуючи логарифмічні штрафні функції, маємо:

$$F_k(\mathbf{X}, r_k) = x_1 + x_2 - r_k(\ln(-x_1{}^2 + x_2) + \ln x_1).$$

В точці $\mathbf{X}(r_k)$ безумовного мінімуму функції $F_k(\mathbf{X}, r_k)$ її частинні похідні по x_1 та x_2 мають дорівнювати нулю. Тобто,

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_1} = 1 + \frac{2r_k x_1}{-(x_1)^2 + x_2} - \frac{r_k}{x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_2} = 1 - \frac{r_k}{-(x_1)^2 + x_2} = 0.$$

Отже, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r_k} + \dfrac{2x_1}{-(x_1)^2 + x_2} - \dfrac{1}{x_1} = 0, \\ \dfrac{1}{r_k} - \dfrac{1}{-(x_1)^2 + x_2} = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння маємо:

$$\frac{1}{-(x_1)^2 + x_2} = \frac{1}{r_k}.$$

Використовуючи дану рівність, з першого рівняння отримуємо:

$$\frac{1}{r_k} + \frac{2x_1}{r_k} - \frac{1}{x_1} = 0,$$

$$2(x_1)^2 + x_1 - r_k = 0. \qquad (13.8)$$

Розв’язуючи квадратне рівняння (13.8) і враховуючи умови $\varphi_2(X) = x_1 \geq 0,\ r_k \geq 0$, отримуємо:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8r_k}}{4},$$

а з другого рівняння системи:

$$x_2 = r_k + (x_1)^2 = r_k + \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 8r_k}}{4}\right)^2.$$

Метод внутрішніх штрафних функцій збігається при $\lim\limits_{k \to \infty} r_k = 0$. Як бачимо, при виконанні цієї умови $x_1 \to 0$, $x_2 \to 0$. Отже, метод збіжний незважаючи на те, що область розв’язку задачі необмежена.

13.3. Метод зовнішніх штрафних функцій

В методі зовнішніх штрафних функцій штрафи $\delta_k(\mathbf{X}, \Omega)$, які при $k \to +\infty$ збігаються до індикаторної функції $\delta(\mathbf{X}, \Omega)$, будуються так, що при всіх k виконується $\delta_k(\mathbf{X}, \Omega) = 0,\ \mathbf{X} \in \Omega$, $\delta_k(\mathbf{X}, \Omega) > 0,\ \mathbf{X} \notin \Omega$. Як правило, покладають $\delta_k(\mathbf{X}, \Omega) = r_k \cdot \Phi(\mathbf{X})$. Але тепер $\lim\limits_{k \to \infty} r_k = +\infty$, на відміну від методу внутрішніх штрафних функцій, де $\lim\limits_{k \to \infty} r_k = 0$. Тут $\Phi(\mathbf{X})$ – деяка функція, яка рівна нулю на множині Ω і яка додатна за межами множини Ω.

Для задачі оптимізації вигляду:

$$f(\mathbf{X}) \to \min, \qquad (13.9)$$

$$\varphi_i(x) \leq \mathbf{0},\ i = \overline{1, m},\ \ \varphi_i(x) = \mathbf{0},\ i = \overline{m+1, l}, \qquad (13.10)$$

найбільшого розповсюдження набули наступні $\Phi(\mathbf{X})$:

$$\Phi(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} \left(\varphi_i^+(\mathbf{X})\right)^2 + \sum_{i=m+1}^{l} \left(\varphi_i(\mathbf{X})\right)^2, \tag{13.11}$$

$$\Phi(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} \left(\varphi_i^+(\mathbf{X})\right) + \sum_{i=m+1}^{l} \left|\varphi_i(\mathbf{X})\right|. \tag{13.12}$$

Тут $\varphi_i^+(\mathbf{X})$ – це зрізка функцій $\varphi_i(\mathbf{X})$, яка рівна нулю, якщо $\varphi_i(\mathbf{X}) \le \mathbf{0}$ і рівна $\varphi_i(\mathbf{X})$, якщо $\varphi_i(\mathbf{X}) > \mathbf{0}$. Тобто, $\varphi_i^+(\mathbf{X}) = \max\left(0; \varphi_i(\mathbf{X})\right)$.

Перевага функції (13.11) перед (13.12) полягає в тому, що якщо $\varphi_i(\mathbf{X})$, $i = \overline{1, l}$ є неперервно диференційованими, то $\Phi(\mathbf{X})$ визначена формулою (13.11), також неперервно диференційована. Тоді для пошуку мінімуму по $\mathbf{X}$ функції:

$$F_k(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + r_k \Phi(\mathbf{X}) \tag{13.13}$$

можна використати градієнтні методи. В той же час, не гладка функція (13.12) хороша тим, що вже при скінченному значенні r_k забезпечує співпадання точки безумовного мінімуму суми $\left(f(\mathbf{X}) + r_k \Phi(\mathbf{X})\right)$ із розв'язком вихідної задачі (13.9), (13.10).

Схематичний алгоритм розв'язання задачі (13.9), (13.10) методом зовнішніх штрафних функцій наступний:

1. Задати початкову точку $\mathbf{X}_0$; початкове значення параметра штрафу r_0; число $c > 1$ для збільшення параметра штрафу; мале число $\varepsilon > 0$ для зупинки алгоритму. Покласти $k = 0$.
2. Утворити допоміжну функцію:

$$F_k(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + r_k \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\varphi_i^+(\mathbf{X})\right)^2 + \sum_{i=m+1}^{l} \left(\varphi_i(\mathbf{X})\right)^2 \right).$$

3. Знайти точку мінімуму $\mathbf{X}^*(r_k)$ функції $F_k(\mathbf{X})$ за допомогою будь-якого методу (наприклад, градієнтного методу). При цьому задати всі необхідні для вибраного методу параметри. В якості початкової точки у вибраному методі взяти $\mathbf{X}^{(k)}$.
4. Обчислити:

$$\delta_k(\mathbf{X},\Omega) = r_k\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\varphi_i^+(\mathbf{X})\right)^2 + \sum_{i=m+1}^{l}\left(\varphi_i(\mathbf{X})\right)^2\right).$$

5. Перевірити умову завершення обчислень:

   а) якщо $\left|\delta_k\right| \le \varepsilon$, то процес пошуку завершити і покласти $\mathbf{X}_{\min} = \mathbf{X}^*(r_k)$;

   б) якщо $\left|\delta_k\right| > \varepsilon$, то покласти $r_{k+1} = c \cdot r_k$; $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^*(r_k)$; $k = k+1$ і перейти до кроку 2.

Зауваження щодо практичної реалізації

1. Як правило, вибирається $r_0 = 0{,}01; 0{,}1; 1$, а параметр $c \in [4;10]$. Інколи розпочинають з $r_0 = 0$, тобто із задачі пошуку безумовного мінімуму.
2. За критерій запинки алгоритму, окрім $\left|\delta_k\right| \le \varepsilon$, можна взяти й інші критерії.

13.4. Збіжність методу штрафних функцій

Лема 13.1. Нехай Ω - обмежена замкнута множина з непорожньою внутрішньою Ω_0. Нехай функція $f(\mathbf{X})$ неперервна в Ω_0 і необмежено зростає при наближенні до границі Ω. Тоді існує точка $\mathbf{X} \in \Omega_0$ така, що $f(\mathbf{X}) = \min\limits_{x \in \Omega_0} f(\mathbf{X})$.

Доведення. Позначимо через V точну нижню грань функції $f(\mathbf{X})$ на множині Ω_0. Тоді знайдеться послідовність точок, для яких:

$$\lim_{k \to \infty} f(\mathbf{X}_k) = V < +\infty .$$

Оскільки множина Ω замкнута та обмежена, то послідовність точок $\{\mathbf{X}_k\}$ збігається до деякої точки $\mathbf{X} \in \Omega$.

Зрозуміло, точка $\mathbf{X}$ не може лежати на границі множини Ω. В силу властивостей функцій $f(\mathbf{X})$ це означало б, що $\lim\limits_{k \to \infty} f(\mathbf{X}_k) = +\infty$.

Тобто, $\mathbf{X} \in \Omega_0$. Оскільки функція $f(\mathbf{X})$ за умовою неперервна на Ω_0, то $V = \lim\limits_{k \to \infty} f(\mathbf{X}_k) = f(\mathbf{X})$.

Лема доведена.

Розглянемо задачу (13.1), (13.2). Нехай $\delta_k(\mathbf{X},\Omega)$ – невід'ємні штрафні функції, неперервні в Ω_0 і необмежено зростаючі до $+\infty$ при наближенні до границі області Ω. Припустимо, що послідовність $\delta_k(\mathbf{X},\Omega)$ при $k\to\infty$ збігається до індикаторної функції $\delta(\mathbf{X},\Omega)$. Нехай $\{\mathbf{X}_k\}$ – це послідовність глобальних мінімумів функцій $F_k(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + \delta_k(\mathbf{X},\Omega)$ на Ω_0, $k = 1,2,3,\ldots$. Дані точки існують в силу леми 13.1.

Теорема 13.1. Будь-яка гранична точка $\overline{\mathbf{X}}$ послідовності $\{\mathbf{X}_k\}$ є розв'язком задачі (13.1), (13.2). Причому, якщо $\delta_{k+1}(\mathbf{X},\Omega) \le \delta_k(\mathbf{X},\Omega)$, $\mathbf{X} \in \Omega_0$, то виконується співвідношення $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(\mathbf{X}_k) = f(\overline{\mathbf{X}})$.

На основі даної теореми можна гарантувати збіжність описаного у параграфі 2 алгоритму розв'язку задачі (13.5), (13.6) у випадку, коли функції $f(\mathbf{X})$ та $\varphi_i(\mathbf{X})$, $i = \overline{1,m}$, неперервні і замикання множини $\{\mathbf{X} : \varphi_i(\mathbf{X}) > 0,\ i = \overline{1,m}\}$ співпадає з множиною $\Omega = \{\mathbf{X} : \varphi_i(\mathbf{X}) \ge 0,\ i = \overline{1,m}\}$, тобто, коли Ω замкнута.

Розглянемо задачу (13.1), (13.2) де $f(\mathbf{X})$ – неперервна функція, а Ω – замкнена множина. Нехай $\Phi(\mathbf{X})$ – неперервна функція, причому $\Phi(\mathbf{X}) = 0$, якщо $\mathbf{X} \in \Omega$, $\Phi(\mathbf{X}) > \mathbf{0}$, якщо $\mathbf{X} \notin \Omega$. Будемо вважати, що точки $\mathbf{X}(r)$ безумовного мінімуму по $\mathbf{X} \in E^n$ функцій $F(\mathbf{X}, r) = f(\mathbf{X}) + r \cdot \Phi(\mathbf{X})$ існують і належать, при довільних $r \ge 0$, деякій обмеженій множині Y. Тоді, для довільної послідовності чисел $r_k \to +\infty$ відповідна послідовність $\{\mathbf{X}(r_k)\}$ є обмеженою, $k = 1,2,3,\ldots$.

Нехай $\mathbf{X}$ – довільна гранична точка послідовності $\{\mathbf{X}(r_k)\}$. Тоді з обмеженої послідовності $\{\mathbf{X}(r_k)\}$ можна виділити збіжну підпослідовність $\{\mathbf{X}(r_s)\}$ до точки $\overline{\mathbf{X}}$. Надалі позначимо $\{\mathbf{X}(r_s)\}$ через

$\mathbf{X}(r)$, а замість границі при $s\to+\infty$ будемо розуміти границю при $r\to+\infty$.

Теорема 13.2. Точка $\overline{\mathbf{X}}$ є оптимальною для задачі (13.1), (13.2), причому $f(\overline{\mathbf{X}}) = \lim\limits_{r\to\infty}\min\limits_{x\in E^n} F(\mathbf{X}, r)$.

Доведення. Маємо

$$\min_{\mathbf{X}\in\Omega} f(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{X}\in E^n}\sup_{r\ge 0} F(\mathbf{X},r) = \\ = \lim_{r\to\infty}\min_{\mathbf{X}\in\Omega}F(\mathbf{X},r) \ge \lim_{r\to\infty}\min_{\mathbf{X}\in E^n}F(\mathbf{X},r). \qquad (13.14)$$

Нерівність в (13.14) очевидна, оскільки, якщо $\mathbf{X}_{\min}\in\Omega$, то $\min\limits_{\mathbf{X}\in\Omega} F(\mathbf{X},r) = \min\limits_{\mathbf{X}\in E^n} F(\mathbf{X},r)$. Якщо ж $\mathbf{X}_{\min}\in E^n\setminus\Omega$, то $\min\limits_{x\in\Omega} F(\mathbf{X},r) \ge \min\limits_{x\in E^n} F(\mathbf{X},r)$. Рівності в (13.14) випливають з того, що $\Phi(\mathbf{X})>0$ при $\mathbf{X}\notin\Omega$ і тому $\sup\limits_{r\ge 0}F(\mathbf{X},r) = \sup\limits_{r\ge 0}\left(f(\mathbf{X}) + r\cdot\Phi(\mathbf{X})\right) = +\infty$. А при $\mathbf{X}\in\Omega$ отримуємо, що $F(\mathbf{X},r) = f(\mathbf{X})$. Тому

$$\min_{\mathbf{X}\in E^n}\sup_{r\ge 0} F(\mathbf{X},r) = \min_{\mathbf{X}\in\Omega}\sup_{r\ge 0} F(\mathbf{X},r) = \\ = \min_{\mathbf{X}\in\Omega} F(\mathbf{X}) = \lim_{r\to\infty}\min_{\mathbf{X}\in\Omega} F(\mathbf{X}).$$

Доведемо, що $\overline{\mathbf{X}}\in\Omega$. Припустимо, що $\overline{\mathbf{X}}\notin\Omega$. Тоді $\Phi(\overline{\mathbf{X}})>0$ і знайдеться таке число $\varepsilon>0$ (в силу неперервності функції $\Phi(\mathbf{X})$), що при достатньо великих r буде $\Phi(\mathbf{X}(r))\ge\varepsilon>0$. При цьому, в силу обмеженості послідовності $\{f(\mathbf{X},r)\}$, отримаємо:

$$\lim_{r\to\infty}\min_{\mathbf{X}\in E^n} F(\mathbf{X},r) \ge \lim_{r\to\infty}\min_{\mathbf{X}\in E^n}\left(f(\mathbf{X}) + r\cdot\Phi(\mathbf{X})\right) \ge \\ \ge \lim_{r\to\infty}\min_{\mathbf{X}\in E^n}\left(f(\mathbf{X}) + r\varepsilon\right) = +\infty.$$

Ця нерівність суперечить (13.14), отже $\overline{\mathbf{X}}\in\Omega$.

Із невід'ємності $\Phi(\mathbf{X})$ та неперервності $f(\mathbf{X})$ випливає:

$$\lim_{r\to\infty}\min_{\mathbf{X}\in E^n} F(\mathbf{X},r) = \lim_{r\to\infty}\left(f(\mathbf{X}(r)) + r\cdot\Phi(\mathbf{X}(r))\right) \ge \lim_{r\to\infty} f(\mathbf{X}(r)) = f(\overline{\mathbf{X}}).$$

Звідси, та з (13.14), отримуємо, що

$$f(\overline{\mathbf{X}}) \le \lim_{r\to\infty}\min_{\mathbf{X}\in E^n} F(\mathbf{X},r) = \min_{\mathbf{X}\in\Omega} f(\mathbf{X}).$$

Оскільки $\overline{\mathbf{X}} \in \Omega$, то остання нерівність можлива лише тоді, коли

$$f(\overline{\mathbf{X}}) = \lim_{r\to\infty} \min_{\mathbf{X}\in E^n} F(\mathbf{X}, r) = \min_{\mathbf{X}\in\Omega} f(\mathbf{X}).$$

Теорема доведена.

13.5. Порівняльна характеристика методів штрафних функцій

Порівнюючи методи внутрішніх та зовнішніх штрафних функцій відмітимо:

1. Переваги методу внутрішніх штрафних функцій наступні:
   - Впродовж всього процесу розв'язку задачі гарантовано виконуються обмеження задачі. Це є важливим тоді, коли цільова функція не визначена за межами допустимої множини.
   - Є можливість припинити рахунок в будь-який час, отримавши при цьому допустимий наближений розв'язок.

2.Недоліки методу внутрішніх штрафних функцій наступні:
   - Внутрішні штрафні функції мають зміст лише в середині допустимої множини і це обумовлює необхідність перевірки виконання обмежень, оскільки для розв'язку задачі використовуються числові методи з дискретним кроком.
   - Вимагають задання допустимої початкової точки, знайти яку не завжди просто.

Контрольні запитання

1. Яку функцію називають індикаторною для області Ω ?
2. Які штрафи використовуються в методі зовнішніх штрафних функцій (внутрішніх штрафних функцій)?
3. Які умови щодо послідовності параметрів $\{r_k\}$ накладаються в методах штрафних функцій?
4. Які переваги методу внутрішніх штрафних функцій?
5. Чи потрібно перевіряти можливість виходу за межі області допустимих розв'язків при практичній реалізації методу внутрішніх штрафних функцій?
6. Які переваги методу зовнішніх штрафних функцій?
7. Чи можливе застосування градієнтних методів в методах штрафних функцій?

Лабораторна робота № 15
Метод внутрішніх штрафних функцій

Завдання для самостійної роботи

Розв’язати задачу мінімізації методом внутрішніх штрафних функцій.

1. $f(X) = x_2^2 - 2x_2 - x_1 \to \min,$

$$x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0.$$

2. $f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 + 3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2 \le 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2 \le 0. \end{cases}$$

3. $f(X) = -2x_1 + x_1^2 - x_2 + 2 \to \min,$

$$2x_1^2 + 3x_2^2 - 6 \le 0.$$

4. $f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2 + 3 \to \min,$

$$x_1^2 + x_2^2 - 8 \le 0.$$

5. $f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 + 1 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_2 \le 0, \\ -2x_1 + x_2 \le 0. \end{cases}$$

6. $f(X) = -x_1 - 5x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2^2 - 1 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 \le 0. \end{cases}$$

7. $f(X) = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 5)^2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 \le 0, \\ -x_1 + x_2 - 1 \le 0, \\ x_1 - x_2 \le 0. \end{cases}$$

8. $f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 30x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 13 \le 0, \\ 2x_1 + x_2 - 10 \le 0. \end{cases}$$

9. $f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 15x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 13x_2 - 51 \le 0, \\ 15x_1 + 7x_2^2 - 107 \le 0. \end{cases}$$

10. $f(X) = -x_1 + x_2^2 - 2x_2 \to \min,$

$$3x_1^2 + 2x_2^2 - 6 \le 0.$$

11. $f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2 \to \min,$

$$x_1^2 + x_2^2 - 9 \le 0.$$

12. $f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2^2 \le 0, \\ x_1 - 2x_2 \le 0. \end{cases}$$

13. $f(X) = -x_1 - 4x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2^2 - 1 \le 0, \\ -x_1 + x_2 \le 0. \end{cases}$$

14. $f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 10x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 9x_1 + 8x_2 - 5x_1 - 10x_2 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 - 10 \le 0. \end{cases}$$

15. $f(X) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 6 \le 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4 \le 0. \end{cases}$$

16. $f(X) = 4x_1^2 - 5x_1 x_2 + x_2^2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 + 2 \le 0, \\ x_1 + x_2 - 6 \le 0. \end{cases}$$

17. $f(X) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 - x_1 x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4. \end{cases}$$

18. $f(X) = e^{x_1} - x_1 x_2 + x_2^2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

19. $f(X) = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

20. $f(X) = 3x_1 + 4x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25, \\ x_1 x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

21. $f(X) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 6x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

22. $f(X) = -4x_1 - 3x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \le 0, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$$

23. $f(X) = -x_1x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Національний університет водного господарства та природокористування

24. $f(X) = 4x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 \le 0, \\ -x_1 + x_2 - 2 \le 0. \end{cases}$$

25. $f(X) = -x_1 - 2x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \\ -x_1 - x_2 \le 0. \end{cases}$$

Лабораторна робота №16
Метод зовнішніх штрафних функцій

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати задачу мінімізації методом зовнішніх штрафних функцій.

1. $f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 4x_2 \to \min,$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6.$

2. $f(\mathbf{X}) = x_2^2 - 2x_2 + 2x_1 + x_3 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6 = 0, \\ 3\ x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0. \end{cases}$$

3. $f(\mathbf{X}) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 \to \min,$
$x_1 + x_2^2 - 4 \le 0.$

4. $f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 + 3 \to \min,$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2 \le 0. \end{cases}$$

5. $f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 + 4x_2 \to \min,$
$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1.$

6. $f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 + 2 \to \min,$
$3x_1^2 + 2x_2^2 - 6 \le 0.$

7. $f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_2 + 1 \to \min,$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2^2 \le 0, \\ x_1 - 2x_2 \le 0. \end{cases}$$

8. $f(\mathbf{X}) = 3x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2 + 5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 4. \end{cases}$$

9. $f(\mathbf{X}) = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 13) - 2x_1 - x_2 \to \min,$

$$(x_1 + 2)^2 + x_2^2 \le 4.$$

10. $f(\mathbf{X}) = 4(x_1 - 5)^2 + 9(x_2 - 5)^2 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 1 \le 0, \\ x_1 - x_2 - 1 \le 0, \\ x_2 - x_1 \le 0. \end{cases}$$

11. $f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 30x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 13 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 - 10 \le 0. \end{cases}$$

12. $f(\mathbf{X}) = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 6x_2 + 26) - x_1 - x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 2. \end{cases}$$

13. $f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2 \to \min,$

$$x_1^2 + x_2^2 - 9 \le 0.$$

14. $f(\mathbf{X}) = -x_1 + x_2^2 - 2x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 6 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4 \le 0. \end{cases}$$

15. $f(\mathbf{X}) = -4x_1 - x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1^2 + x_1 - 1 \le 0, \\ x_1 - x_2 \le 0. \end{cases}$$

16. $f(\mathbf{X}) = e^{x_1} - x_1 x_2 + x_2^2 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 2. \end{cases}$$

17. $f(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 - 2x_3 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9, \\ x_1 - x_2^2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

18. $f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 12. \end{cases}$$

19. $f(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 8. \end{cases}$$

20. $f(\mathbf{X}) = -x_1 x_2 + x_2 x_3 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 + x_3 \ge 4. \end{cases}$$

21. $f(\mathbf{X}) = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_2 x_3 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 = 19, \\ x_1 + x_2 x_3 \le 11. \end{cases}$$

22. $f(\mathbf{X}) = -x_1^2 x_2^3 x_3^4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 18, \\ x_2^2 \le 40. \end{cases}$$

23. $f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 18x_1 - 6x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 16, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

24. $f(\mathbf{X}) = x_1^2 + 2x_1 - x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 30, \\ x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

25. $f(\mathbf{X}) = x_1 x_2 x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 \le 10. \end{cases}$$

ТЕМА 14. МЕТОД ПРОЕКЦІЇ ГРАДІЄНТА

14.1. Загальна схема методу проекції градієнта

Розглянемо задачу умовної оптимізації

$$f(\mathbf{X}) \to \min, \qquad (14.1)$$

$$\mathbf{X} \in U \subset E^n, \qquad (14.2)$$

де $f(\mathbf{X}) \in C^1(U)$. Застосування градієнтного методу за схемою $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \alpha_k f'(\mathbf{X}^{(k)})$, $\alpha_k > 0$, $k = 0,1,2,\ldots$ може призвести до виходу точки $\mathbf{X}^{(k+1)}$ на $(k+1)$-ій ітерації за межі області U. Однак, дану проблему можна вирішити, якщо отриману точку на кожному кроці проектувати на множину U.

> Проекцією точки $\mathbf{Y} \in E^n$ на множину U називається найближча до $\mathbf{Y}$ точка $\mathbf{X}$ із множини U, тобто точка $\mathbf{X} \in U$, яка задовольняє умову
>
> $$|\mathbf{Y} - \mathbf{X}| = \min_{Z \in U} |\mathbf{Y} - \mathbf{Z}|.$$

Проекцію точки $\mathbf{Y}$ на множину U будемо позначати $P_U(\mathbf{Y})$. Очевидно, якщо $\mathbf{Y} \in U$, то $P_U(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$. Тобто, якщо $\mathbf{X}^* \in U$ є розв'язком задачі (14.1), (14.2), то $P_U(\mathbf{X}^*) = \mathbf{X}^*$.

Таким чином, ми приходимо до ідеї методу проекції градієнта. Нехай $\mathbf{X}^{(0)} \in U$ – деяке початкове наближення. Релаксаційну послідовність точок $\mathbf{X}^{(k)}$ будемо будувати за правилом:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = P_U(\mathbf{X}^{(k)} - \alpha_k f'(\mathbf{X}^{(k)})),\ \alpha_k > 0,\ k = 0,1,2,\ldots \qquad (14.3)$$

Якщо в (14.3) на деякій ітерації виявилось, що $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)}$, то процес (14.3) припиняють. Для з'ясування того, чи дійсно $\mathbf{X}^{(k)}$ є розв'язком задачі (14.1), (14.2) потрібно провести додаткове дослідження поведінки функції $f(\mathbf{X})$ в околі точки $\mathbf{X}^{(k)}$.

Залежно від способу вибору α_k в (14.3) отримуються різні варіанти методу проекції градієнта. Розглянемо наступні:

- Введемо функцію однієї змінної:

$$\varphi_k(\alpha) = f\left(P_U\left(\mathbf{X}^{(k)} - \alpha f'(\mathbf{X}^{(k)})\right)\right).$$

Будемо знаходити крок α_k із умови:

$$\varphi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha \geq 0} \varphi_k(\alpha)\,,\ \alpha_k \geq 0\,. \tag{14.5}$$

При $U \equiv E^n$ метод (14.3), (14.5) перетворюється в метод найшвидшого спуску.

- Якщо $f(\mathbf{X}) \in C^1(U)$ і константа Ліпшиця L для градієнта $f'(\mathbf{X})$ відома, то в якості кроку α_k можна взяти довільне число, яке задовольняє умові:

$$0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_k \leq \frac{2}{L + 2\varepsilon}\,, \tag{14.6}$$

де $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ - деякі константи.

- крок α_k можна вибрати з умови

$$f\left(P_U\left(\mathbf{X}^{(k)} - \alpha_k f'(\mathbf{X}^{(k)})\right)\right) - f(\mathbf{X}^{(k)}) <$$
$$< -\varepsilon\alpha_k \left|\mathbf{X}^{(k)} - P_U\left(\mathbf{X}^{(k)} - \alpha_k f'(\mathbf{X}^{(k)})\right)\right|^2,$$

де $\varepsilon > 0$ - деяка константа.

- Можливе апріорне завдання $\alpha_k > 0, k = 1,2,3,\ldots$ з умов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty\,,\ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty\,.$$

На практиці для прискорення збіжності методу (14.3) використовують наступний модифікований варіант методу проекції градієнта:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \beta_k (P_U(\mathbf{X}^{(k)} - \alpha_k f'(\mathbf{X}^{(k)})) - \mathbf{X}^{(k)})\,, \tag{14.7}$$

$\alpha_k > 0,\ 0 < \beta_k \leq 1$.

14.2. Приклади проекції точки на множину

Задача знаходження проекції точки $\mathbf{Y} \in E^n$ на множину U сама є задачею мінімізації функції $g(\mathbf{X}) = |\mathbf{X} - \mathbf{Y}|$, або $g(\mathbf{X}) = |\mathbf{X} - \mathbf{Y}|^2$ на множині U, яка не завжди просто розв'язується. Але для деяких простіших множин U задача проектування розв'язується в явному вигляді. Розглянемо такі випадки:

- $U = \{\mathbf{X} \in E^n : |\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| \le R_0\}$ - куля радіуса R_0 з центром в точці $\mathbf{X}_0$. З геометричних міркувань

$$P_U(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}_0 + R_0 \vec{e}_{\mathbf{Y}},$$

де $\vec{e}_{\mathbf{Y}}$ - одиничний вектор, який виходить з точки $\mathbf{X}_0$ в точку $\mathbf{Y}$ (рис. 14.1). Наприклад, можна взяти $\vec{e}_Y = \dfrac{\mathbf{Y} - \mathbf{X}_0}{|\mathbf{Y} - \mathbf{X}_0|}$.

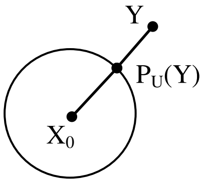

Рис. 14.1

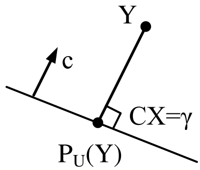

Рис. 14.2

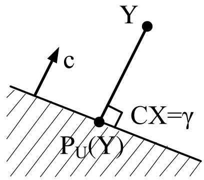

Рис. 14.3

- Нехай $U = \{\mathbf{X} \in E^n : \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = \gamma\}$ – гіперплощина, де $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \ldots C_n)$, $\gamma = const$. Зрозуміло, що вектор $\mathbf{C}$ є нормаллю до гіперплощини (рис. 14.2). Користуючись геометричною інтерпретацією, проекцію точки $\mathbf{Y}$ будемо шукати у вигляді $P_U(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + \alpha \mathbf{C}$. Число α знайдемо з умови $P_U(\mathbf{Y}) \in U$. Тоді маємо:

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{Y} + \alpha \mathbf{C}) = \gamma \Rightarrow \alpha = \frac{\gamma - \mathbf{C} \cdot Y}{|\mathbf{C}|^2}.$$

- $U = \{\mathbf{X} \in E^n : \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \le \gamma\}$ - півпростір, обмежений гіперплощиною (рис. 14.3). Аналогічно попередньому випадку, маємо

$$P_U = \mathbf{Y} + \alpha\, \mathbf{C},$$

де $\alpha = \dfrac{\gamma - \mathbf{C} \cdot Y}{|\mathbf{C}|^2}$.

- Нехай $U = \{\mathbf{X} \in E^n : \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{X} = b_i,\ i = \overline{1,m}\}$, де $\mathbf{A}_i \in E^n$, $b_i = const$. Тобто, множина U визначається СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Тут ми припустимо, що система векторів $\mathbf{A}_i, i = \overline{1,m}$ лінійно незалежна, причому $m < n$. Якщо $m = n$, то множина U вироджується в одну точку.

По аналогії з попереднім прикладом, проекцію точки $\mathbf{Y}$ на множину U будемо шукати у вигляді:

$$\mathbf{Z} = P_U(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{A}_j,$$

де α_j – деякі невідомі сталі. Їх визначимо з умови $\mathbf{Z} \in U$. Маємо:

$$\mathbf{A}_i \cdot \left(\mathbf{Y} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{A}_j \right) = b_i,\ i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j = b_i - \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{Y}, i = \overline{1,m}.$$

Отримали СЛАР розмірності $m \times m$ відносно невідомих α_j, $j = \overline{1,m}$. Розв'язавши її, знайдемо невідомі α_j, $j = \overline{1,m}$. Розв'язок даної СЛАР завжди існує, оскільки, за умовою, вектори $\mathbf{A}_i$, $i = \overline{1,m}$ є лінійно незалежними.

- $U = \{\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n : \alpha_i \le x_i \le \beta_i,\ i = \overline{1,n}\}$ - n-вимірний паралелепіпед, де α_i, β_i $(\alpha_i \le \beta_i)$ - задані числа.

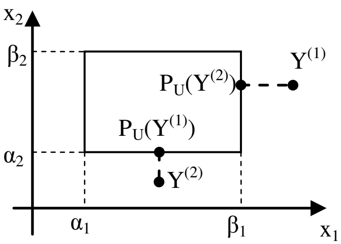

Рис. 14.4

Розглядаючи в якості графічної інтерпретації двовимірний випадок (рис. 14.4) бачимо, що $P_U(\mathbf{Y}^{(1)}) = (\beta_1, y_2^{(1)})$, $P_U(\mathbf{Y}^{(2)}) = (y_1^{(2)}, \alpha_2)$. Тут $\mathbf{Y}^{(1)} = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)})$, $\mathbf{Y}^{(2)} = (y_1^{(2)}, y_2^{(2)})$.

Тоді в n-вимірному випадку проекція точки $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ визначиться, як $P_U(\mathbf{Y}) = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, де

$$p_i = \begin{cases} \alpha_i, \text{ якщо } y_i < \alpha_i; \\ \beta_i, \text{ якщо } y_i > \beta_i; \\ y_i, \text{ якщо } \alpha_i \le y_i \le \beta_i, i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Контрольні запитання

1. Дайте означення проекції точки на множину.
2. Запишіть схему модифікованого методу проекції градієнта.
3. Які є способи вибору кроку в методі проекції градієнта?
4. Як обчислити проекцію точки на довільну множину?
5. Знайдіть проекцію точки на коло радіуса R з центром в точці (x_0, y_0).
6. Знайдіть проекцію точки на круг радіуса R з центром в точці (x_0, y_0).
7. Знайдіть проекцію точки на квадрат зі сторонами, паралельними осям координат і довжиною a одиниць.
8. Чому постає необхідність в знаходженні проекції точки на множину в градієнтному методі спуску?

Лабораторна робота №17
Метод проекції градієнта

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати задачу нелінійного програмування методом проекції градієнта. Обчислення завершувати при $|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}| \le \varepsilon$, де ε - точність обчислень.

1. $f(x) = x_1^2 + 9x_2^2 - 12x_1 - 36x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} -1 \le x_1 \le 4, \\ 1 \le x_2 \le 2. \end{cases}.$$

2. $f(x) = 2x_1 + x_2 \to \min,$
$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \le 1.$

3. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 3.$

4. $f(x) = 9x_1^2 + x_2^2 - 54x_1 + 4x_2 \to \min,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

5. $f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_2 - 1)^4 \to \min,$
$2x_1 + x_2 \le 2.$

6. $f(x) = x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 \to \min,$
$x_1^2 + (x_2 - 4)^2 \le 9.$

7. $f(x) = 2\sqrt{1 + x_1^2 + 2x_2^2} + x_1 + x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 5 \le x_1 \le 8, \\ 1 \le x_2 \le 10. \end{cases}$$

8. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 \to \min,$
$2x_1 + x_3 = 2.$

9. $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_1x_2 + 2x_1 + 16x_2 \to \min,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

10. $f(x) = x_1^2 + x_2 \to \min$

$2x_1 - 2x_2 \leq 1.$

11. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 - 2x_2 \to \min,$

$x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$

12. $f(x) = e^{(2x_1 - x_2)^2} + x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 \to \min,$

$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 1, \\ -2 \leq x_2 \leq 3. \end{cases}$

13. $f(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2) - x_1 - x_2 \to \min,$

$x_1 + x_2 = 4.$

14. $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 8x_2 \to \min,$

$\begin{cases} -2 \leq x_1 \leq 2, \\ 0 \leq x_2 \leq 3. \end{cases}$

15. $f(x) = \ln(2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_2) + e^{(x_1 - 3x_2)^2} \to \min,$

$x_1 \geq 3,\ x_2 \geq 0.$

16. $f(x) = 2x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 \to \min,$

$\begin{cases} -3 \leq x_1 \leq 3, \\ -4 \leq x_2 \leq 1. \end{cases}$

17. $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 32x_1 - 24x_2 \to \min,$

$3x_1 + x_2 \leq 30.$

18. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 32x_1 - 6x_2 + x_3 \to \min,$

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 15.$

19. $f(x) = x_1^2 - x_1 x_2 + 2x_2^2 \to \min,$

$$\begin{cases} -5 \le x_1 \le 3, \\ -1 \le x_2 \le 1. \end{cases}$$

20. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 \to \min,$

$$(x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2 \le 18.$$

21. $f(x) = e^{-x_1} + (x_1 - 5)^4 + (x_2 + 7)^2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 \ge 3, \\ x_2 \ge 4. \end{cases}$$

22. $f(x) = \sin(x_1^2 + x_2^2) - 3x_1^2 + 2x_3^3 \to \min,$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 \le 7.$$

23. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^3 - 4x_1 x_2 - 12x_1 x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 10, \\ 5 \le x_2 \le 7, \\ -1 \le x_3 \le 1. \end{cases}$$

24. $f(x) = e^{(x_1 - x_3)^2 + x_2} - x_3^2 \to \min,$

$$(x_1 - 5)^2 + (x_2 + 7)^2 + x_3^2 \le 16.$$

25. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2 - 2x_1 - 10 \to \min,$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 20.$$

ТЕМА 15. ОПУКЛІ МНОЖИНИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

15.1. Основні властивості опуклих множин

Спочатку введемо ряд означень.

Множина U називається опуклою, якщо для двох довільних елементів $u, v \in U$ і для довільного числа $\alpha \in [0;1]$, елемент

$$u_\alpha = u + \alpha(v - u) = \alpha \cdot v + (1 - \alpha)u$$

належить цій же множині. Іншими словами, множина U опукла, якщо відрізок $[u; v]$, який складається з елементів вигляду u_α, повністю належить цій множині.

Сумою множин $A_1, A_2, \ldots, A_m$ називається множина $A = \sum_{i=1}^{m} A_i$, яка складається з елементів вигляду $a = \sum_{i=1}^{m} a_i$, $a_i \in A_i$, $i = \overline{1,m}$.

Різницею двох множин A, B називається множина $C = A - B$, яка складається з елементів вигляду $c = a - b$, $a \in A$, $b \in B$.

Добутком множини A на дійсне число λ називається множина $B = \lambda A$, яка складається з елементів вигляду $b = \lambda a$, $a \in A$.

Теорема 15.1. Якщо множини A_i, $i = \overline{1,m}$, A, B є опуклими, то множини $C = \bigcap_{i=1}^{m} A_i$, $C = \sum_{i=1}^{m} A_i$, $C = A - B$, $C = \lambda A$ також опуклі.

Доведення. Проведемо доведення, наприклад, для різниці $C = A - B$. Покажемо, що для будь-яких елементів $c_1, c_2 \in C$ елемент $c_\alpha = \alpha \cdot c_2 + (1 - \alpha)c_1$ також належить множині C, $\forall \alpha \in [0;1]$.

Якщо $c_1, c_2 \in C$, то обов'язково існують $a_1, a_2 \in A$ та $b_1, b_2 \in B$, такі, що $c_1 = a_1 - b_1$ та $c_2 = a_2 - b_2$. Оскільки A, B –

опуклі множини, то $a_\alpha \in A$, $b_\alpha \in B$, де $a_\alpha = \alpha \cdot a_2 + (1-\alpha)a_1$, $b_\alpha = \alpha \cdot b_2 + (1-\alpha)b_1$, $\forall \alpha \in [0;1]$. Тоді маємо

$$c_\alpha = \alpha \cdot c_2 + (1-\alpha)c_1 = \alpha(a_2 - b_2) + (1-\alpha)(a_1 - b_1) =$$
$$= \alpha \cdot a_2 + (1-\alpha)a_1 - (\alpha \cdot b_2 + (1-\alpha)b_1) = a_\alpha - b_\alpha$$

Оскільки a_α, b_α належать множинам A, B відповідно, то $(a_\alpha - b_\alpha) \in C$ за означенням.

Теорема15.1. доведена.

Теорема 15.2. Якщо A є опуклою множиною, то її замикання $\overline{A}$ також є опуклою множиною.

Доведення. Оскільки A – опукла множина, то вона не містить ізольованих точок. Якщо припустимо, від супротивного, що A містить ізольовані точки, то вона не буде опуклою.

Нехай $a, b \in \overline{A}$. Тоді, згідно вищесказаного, A не містить ізольованих точок, і a, b будуть її граничними точками. Отже, будуть існувати послідовності $\{a_k\} \to a$ та $\{b_k\} \to b$, де $a_k, b_k \in A$. Тоді $c_k = (\alpha \cdot b_k + (1-\alpha)a_k) \in A$. Звідси при $k \to \infty$ маємо, що

$$c_\alpha = \lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty}(\alpha \cdot b_k + (1-\alpha)a_k) = \alpha \cdot b + (1-\alpha)a.$$

Отже, c_α є границею послідовності точок, які належать множині A. Тоді c_α є граничною точкою множини A. Оскільки $\overline{A}$ містить всі граничні точки множини A, то $c_\alpha \in \overline{A}$, $\forall \alpha \in [0;1]$. Тобто, $\overline{A}$ – опукла множина.

Теорема 15.2 доведена.

15.2. Теорема відокремлюваності та її наслідки

Наступна теорема та її наслідки є основним інструментом, за допомогою якого отримуються результати, що характеризують ті чи інші властивості опуклих множин.

Теорема 15.3 (Теорема відокремлюваності). Нехай $A \in E^n$ – опукла множина. Якщо точка X_0 не належить замиканню $\overline{A}$, то знайдеться такий вектор $a \in E^n$ та число $\varepsilon > 0$, що справедлива наступна нерівність:

$$(a, X) \le (a, X_0) - \varepsilon,\ \forall X \in A.$$

Доведення. Згідно теореми 15.2 замикання $\overline{A}$ – є опуклою множиною. Візьмемо точку $Y \in \overline{A}$, відстань від якої до точки $X_0 \notin \overline{A}$ є найменшою. Тобто,

$$\left|X - X_0\right| \ge \left|Y - X_0\right|,\ \forall X \in \overline{A}.$$

Оскільки замикання $\overline{A}$ – опукла множина, то для будь-якого $X \in \overline{A},\ 0 \le \lambda \le 1$, має виконуватися

$$\lambda X + (1 - \lambda)Y = (\lambda(X - Y) + Y) \in \overline{A}.$$

Тоді маємо

$$\left|\lambda X + (1 - \lambda)Y - X_0\right|^2 = \left|Y + \lambda(X - Y) - X_0\right|^2 =$$
$$= \left|Y - X_0 + \lambda(X - Y)\right|^2 = \left|Y - X_0\right|^2 + 2\lambda(Y - X_0, X - Y) +$$
$$+ \lambda^2\left|X - Y\right|^2 \ge \left|Y - X_0\right|^2.$$

Звідки

$$2\lambda(Y - X_0, X - Y) + \lambda^2\left|X - Y\right|^2 \ge 0.$$

Оскільки $\lambda \ge 0$, то з останньої нерівності маємо

$$2(Y - X_0, X - Y) \ge -\lambda\left|X - Y\right|^2.$$

Звідки, при $\lambda = 0$ отримаємо нерівність $(Y - X_0, X - Y) \ge 0.$

Покладемо $a = X_0 - Y$. Тоді маємо

$$-(a, X - Y) \ge 0,$$
$$(a, Y) \ge (a, X). \tag{15.1}$$

Далі можна записати

$$(a,Y)=(a,Y-X_0+X_0)=(a,Y-X_0)+(a,X_0)=$$
$$=-(a,a)+(a,X_0)=(a,X_0)-|a|^2.$$

Позначимо $\varepsilon=|a|^2$. Оскільки $X_0\notin\overline{A}$, а $Y\in\overline{A}$, то $\varepsilon>0$. Тоді з (15.1) маємо

$$(a,X_0)-\varepsilon\ge(a,X).$$

Теорема 15.3 доведена.

З даної теореми випливає кілька наслідків.

Наслідок 15.1. Нехай A - опукла множина і X_0 гранична точка множини A. Тоді знайдеться такий вектор $a\ne 0$, що $(a,X)\le(a,X_0)$, $\forall X\in A$.

Наслідок 15.2. Якщо A та B опуклі множини, що не перетинаються, то існує такий вектор $a\ne 0$, що $(a,X)\le(a,Y)$, $\forall X\in A$, $\forall Y\in B$.

Наслідок 15.3. Якщо A і B – опуклі замкнені множини, що не перетинаються, одна з яких обмежена, то існує такий вектор $a\ne 0$ та число $\varepsilon>0$, що виконується нерівність $(a,X)\le(a,Y)-\varepsilon$, $\forall X\in A$, $\forall Y\in B$.

ТЕМА 16. ОПУКЛІ ФУНКЦІЇ ТА ОПУКЛЕ ПРОГРАМУВАННЯ

16.1. Опуклі функції та їх властивості

Функція $f(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in E^n$ називається опуклою, якщо

$$f(\lambda_1 \mathbf{X}_1 + \lambda_2 \mathbf{X}_2) \le \lambda_1 f(\mathbf{X}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{X}_2) \qquad (16.1)$$

для будь-яких $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in E^n$ та для будь-яких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$, таких, що $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Якщо позначити λ_1 через λ, тоді $\lambda_2 = 1 - \lambda$ і (16.1) набуває вигляду:

$$f(\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) \le \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2), \qquad (16.2)$$

де $\lambda \in [0;1]$, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in E^n$.

Функція $f(\mathbf{X})$ називається строго опуклою, якщо $f(\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) < \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2)$, $\forall \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in E^n$, $\mathbf{X}_1 \ne \mathbf{X}_2$, $\lambda \in (0;1)$.

Функція $f(\mathbf{X})$ називається сильно опуклою, якщо при довільних $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in E^n$, $\mathbf{X}_1 \ne \mathbf{X}_2$

$$f\left(\frac{\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{X}_1) + f(\mathbf{X}_2)\right) - \gamma \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\|^2, \qquad (16.3)$$

де $\gamma > 0$ - деяка константа.

Сильно опукла функція є строго опуклою, але не навпаки.

Теорема 16.1. Нехай $f_1(\mathbf{X})$ та $f_2(\mathbf{X})$ - дві опуклі функції, а C_1, C_2 – невід'ємні константи. Тоді функція $f(\mathbf{X}) = C_1 f_1(\mathbf{X}) + C_2 f_2(\mathbf{X})$ також є опуклою.

Доведення. Проведемо простою перевіркою. Маємо

$$f(\lambda\mathbf{X}_1+(1-\lambda)\mathbf{X}_2)=C_1 f_1(\lambda\mathbf{X}_1+(1-\lambda)\mathbf{X}_2)+C_2 f_2(\lambda\mathbf{X}_1+(1-\lambda)\mathbf{X}_2)\le$$
$$\le C_1\left[\lambda f_1(\mathbf{X}_1)+(1-\lambda)f_1(\mathbf{X}_2)\right]+C_2\left[\lambda f_2(\mathbf{X}_1)+(1-\lambda)f_2(\mathbf{X}_2)\right]=$$
$$=\lambda\left[C_1 f_1(\mathbf{X}_1)+C_2 f_2(\mathbf{X}_1)\right]+(1-\lambda)\left[C_1 f_1(\mathbf{X}_2)+C_2 f_2(\mathbf{X}_2)\right]=$$
$$=\lambda f(\mathbf{X}_1)+(1-\lambda)f(\mathbf{X}_2).$$

Отже, $f(\lambda\mathbf{X}_1+(1-\lambda)\mathbf{X}_2)\le\lambda f(\mathbf{X}_1)+(1-\lambda)f(\mathbf{X}_2)$, $\lambda\in[0;1]$.

Теорема 16.1 доведена.

Теорема 16.2. Якщо $f(\mathbf{X})$ **-** опукла функція, то $f(\lambda_1\mathbf{X}_1+\lambda_2\mathbf{X}_2+\ldots+\lambda_m\mathbf{X}_m)\le\lambda_1 f_1(\mathbf{X}_1)+\lambda_2 f_2(\mathbf{X}_2)+\ldots+\lambda_m f_m(\mathbf{X}_m)$

де $\lambda_i,\ i=\overline{1,m}$ - довільні невід'ємні константи такі, що $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=1$.

Доведення даної теореми проводиться методом математичної індукції.

Теорема 16.3. Наступні твердження еквівалентні:

- $f(\mathbf{X})$ - опукла функція;
- $f(\mathbf{X}_1)-f(\mathbf{X}_2)\ge(f'(\mathbf{X}_2),\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2)$, $\forall\,\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2\in E^n$;
- матриця других похідних $f''(\mathbf{X})$ додатно визначена, тобто $(f''(\mathbf{X})\mathbf{P},\mathbf{P})\ge 0,\ \forall\mathbf{P}\in E^n$.

Доведення. Відразу зауважимо, що в першому та другому твердженнях потрібно вимагати існування першої та другої похідної від функції $f(\mathbf{X})$. Виведемо, наприклад, з першого твердження друге. Маємо, згідно означення опуклості:

$$f(\lambda\mathbf{X}_1+(1-\lambda)\mathbf{X}_2)\le\lambda f(\mathbf{X}_1)+(1-\lambda)f(\mathbf{X}_2),$$
$$f\left(\mathbf{X}_2+\lambda(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2)\right)-f(\mathbf{X}_2)\le\lambda\left(f(\mathbf{X}_1)-f(\mathbf{X}_2)\right),\lambda\in[0;1].$$

Розкладаючи функцію $f\left(\mathbf{X}_2+\lambda(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2)\right)$ в ряд Тейлора в околі точки $\mathbf{X}_2$, маємо

$$f(\mathbf{X}_2)+\lambda\left(f'(\mathbf{X}_2),\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2\right)+o(\lambda^2)-f(\mathbf{X}_2)\le\lambda\left(f(\mathbf{X}_1)-f(\mathbf{X}_2)\right),$$
$$\left(f'(\mathbf{X}_2),\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2\right)+o(\lambda)\le f(\mathbf{X}_1)-f(\mathbf{X}_2).$$

Переходячи до границі при $\lambda\to 0$, маємо:

$$f(\mathbf{X}_1)-f(\mathbf{X}_2)\ge\left(f'(\mathbf{X}_2),\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2\right).$$

Теорема 16.3 доведена.

Наслідок 16.1. Квадратична функція $f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\mathbf{AX}, \mathbf{X}) + (\mathbf{B}, \mathbf{X})$ є опуклою тоді і тільки тоді, коли матриця $\mathbf{A}$ – додатно визначена.

Теорема 16.4. Якщо $f(\mathbf{X})$ двічі неперервно диференційована функція, то умова сильної опуклості (16.3) еквівалентна умові:

$$(f''(\mathbf{X})\mathbf{P}, \mathbf{P}) \geq m|\mathbf{P}|^2, \text{ де } m > 0, \ \forall \, \mathbf{X}, \mathbf{P} \in E^n. \qquad (16.4)$$

Тут (u, v) – скалярний добуток двох векторів u та v в евклідовому просторі E^n.

16.2. Постановка задачі опуклого програмування та її основні властивості

Постановка задачі опуклого програмування полягає у відшуканні екстремуму опуклої функції на опуклій множині. Тобто

$$f(\mathbf{X}) \to \min, \qquad (16.5)$$

$$\mathbf{X} \in G, \qquad (16.6)$$

де $f(\mathbf{X})$ - опукла неперервна функція, визначена при всіх $\mathbf{X} \in E^n$, G – опукла множина.

Теорема 16.5. Опукла неперервна функція $f(\mathbf{X})$ досягає свого мінімум на компактній опуклій множині G.

Доведення. Теорема є частковим випадком відомої теореми Вейєрштрасса про те, що неперервна функція досягає свого мінімуму на компактній множині.

Теорема 16.5 доведена.

Теорема 16.6. Нехай множина G – замкнена, а $f(\mathbf{X})$ двічі неперервно диференційована сильно опукла функція. Тоді $f(\mathbf{X})$ досягає свого мінімуму на G.

Доведення. Нехай $\mathbf{X}_0 \in E^n$ деяка точка, така, що $\mathbf{X}_0 \in G$. Розглянемо множину $Y = \{\mathbf{X} : f(\mathbf{X}) \leq f(\mathbf{X}_0)\}$. Покажемо, що Y замкнена і обмежена. За формулою Тейлора в околі точки $\mathbf{X}_0$ справедливий наступний розклад:

$$f(\mathbf{X})=f(\mathbf{X}_0)+(f'(\mathbf{X}_0),\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)+\frac{1}{2}(f''(\xi)(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0),\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)+o\left(|\mathbf{X}-\mathbf{X}_0|^3\right),$$

де $\xi=\mathbf{X}_0+\theta(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0),\ \theta\in[0;1]$. Враховуючи (16.4), означення множини Y, та відкидаючи нескінченно малі вищих порядків, отримаємо

$$f(\mathbf{X}_0)\ge f(\mathbf{X})\ge f(\mathbf{X}_0)+(f'(\mathbf{X}_0),\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)+\frac{m}{2}|\mathbf{X}-\mathbf{X}_0|^2,\ \text{де } m>0.$$

Маємо

$$f(\mathbf{X}_0)\ge f(\mathbf{X}_0)+(f'(\mathbf{X}_0),\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)+\frac{m}{2}|\mathbf{X}-\mathbf{X}_0|^2,$$

або

$$\frac{m}{2}|\mathbf{X}-\mathbf{X}_0|^2\le-(f'(\mathbf{X}_0),\mathbf{X}-\mathbf{X}_0).$$

Тобто

$$\frac{m}{2}|\mathbf{X}-\mathbf{X}_0|^2\le\left|-(f'(\mathbf{X}_0),\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)\right|$$

або

$$|\mathbf{X}-\mathbf{X}_0|\le\frac{2}{m}|f'(\mathbf{X}_0)|,\ \forall\mathbf{X}\in Y.$$

Згідно з умовами $m>0$. Тоді отримана нерівність доводить обмеженість множини Y, оскільки відстань від точок $\mathbf{X}\in Y$ до деякої точки $\mathbf{X}_0$ не перевищує величини $\frac{2}{m}|f'(\mathbf{X}_0)|$.

Замкненість множини Y випливає з того, що $f(\mathbf{X})$ - неперервна.

Розглянемо множину $G\bigcap Y$. Очевидно, що якщо $\mathbf{X}^*$ є точкою мінімуму функції $f(\mathbf{X})$ на множині $G\bigcap Y$, то вона також буде точкою мінімуму на множині G (див. означення множини Y). Оскільки Y - обмежена і замкнена, то перетин $G\bigcap Y$ також є обмеженою і замкненою множиною, а тому – компактною. Тоді згідно теореми 16.5 на перетині $G\bigcap Y$ обов’язково функція $f(\mathbf{X})$ досягає свого мінімуму, а, отже, вона досягає мінімуму на множині G .

Теорема 16.6 доведена.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Теорема 16.7. Нехай G – опукла множина, а функція $f(\mathbf{X})$ - опукла на G. Тоді всяка точка локального мінімуму функції $f(\mathbf{X})$ одночасно є точкою її глобального мінімуму на G. Причому, множина G^* точок мінімуму $f(\mathbf{X})$ на G є опуклою.

Доведення. Нехай $\mathbf{X}^*$ – точка локального мінімуму функції $f(\mathbf{X})$ на множині G. Це означає, що існує окіл точки $\mathbf{X}^*$, такий, що $f(\mathbf{X}^*) \le f(\mathbf{X})$ для всіх $\mathbf{X} \in \{\mathbf{X} : |\mathbf{X} - \mathbf{X}^*| < \varepsilon\} \cap G$. Візьмемо довільну точку $\mathbf{X} \in G$ та число $\alpha > 0$ настільки мале, що $\alpha \cdot |\mathbf{X} - \mathbf{X}^*| < \varepsilon$. Тоді $\mathbf{X}^* + \alpha \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}^*) \in \{\mathbf{X} : |\mathbf{X} - \mathbf{X}^*| < \varepsilon\} \cap G$. Тоді враховуючи, що $\mathbf{X}^*$ – це точка локального мінімуму, а $f(\mathbf{X})$ – опукла функція, отримуємо:

$$f(\mathbf{X}^*) \le f(\mathbf{X}^* + \alpha \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)) =$$
$$= f((1-\alpha)\mathbf{X}^* + \alpha\mathbf{X}) \le (1-\alpha) f(\mathbf{X}^*) + \alpha \cdot f(\mathbf{X})$$

або $0 \le \alpha \cdot (f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}^*))$. Скорочуючи на $\alpha > 0$, отримуємо $f(\mathbf{X}) \ge f(\mathbf{X}^*)$ для $\forall \mathbf{X} \in G$. Звідси, $\mathbf{X}^*$ – точка глобального мінімуму функції $f(\mathbf{X})$ на множині G.

Нехай тепер $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in G^*$, тобто, $f(\mathbf{X}_1) = f(\mathbf{X}_2) = f^*$. Тоді

$$f^* \le f(\alpha\mathbf{X}_1 + (1-\alpha)\mathbf{X}_2) \le \alpha f(\mathbf{X}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{X}_2) =$$
$$= \alpha f^* + (1-\alpha) f^* = f^*.$$

Тобто, $f(\alpha\mathbf{X}_1 + (1-\alpha)\mathbf{X}_2) = f^*$ при всіх α, $0 \le \alpha \le 1$. Отже, $(\alpha\mathbf{X}_1 + (1-\alpha)\mathbf{X}_2) \in G^*$, $0 \le \alpha \le 1$. Звідси, G^* – опукла множина.

Теорема 16.7 доведена.

Теорема 16.8. Строго опукла функція досягає свого мінімуму на опуклій множині G в єдиній точці.

Доведення. Проведемо від супротивного. Нехай $\mathbf{X}_1$ та $\mathbf{X}_2$ - дві точки мінімуму функції $f(\mathbf{X})$ на множині G. Тобто, $\mathbf{X}_1 \in G$, $\mathbf{X}_2 \in G$ і

$\min f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}_1) = f(\mathbf{X}_2) = f^*$. Оскільки G - опукла, то точка $\left(\frac{1}{2}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{X}_2\right) \in G$. Згідно означення строгої опуклості маємо:

$$f\left(\frac{1}{2}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{X}_2\right) < \frac{1}{2} f(\mathbf{X}_1) + \frac{1}{2} f(\mathbf{X}_2) = \frac{1}{2} f^* + \frac{1}{2} f^* = f^*.$$

Тобто, існує точка на множині G, де функція досягає ще меншого значення за f^*. Це суперечить припущенню, що $\mathbf{X}_1$ та $\mathbf{X}_2$ - точки мінімуму. Дана суперечність означає, що $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$.

Теорема 16.8 доведена.

16.3. Критерій оптимальності для опуклих функцій

Теорема 16.9. Нехай G – опукла множина і функція $f(\mathbf{X}) \in C^1(G)$. Для того, щоб $f(\mathbf{X})$ була опуклою на G необхідно і достатньо виконання нерівності:

$$f(\mathbf{X}_1) \geq f(\mathbf{X}_2) + (f'(\mathbf{X}_2), \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2),\ \forall\, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in G. \quad (16.7)$$

Доведення. Необхідність. Нехай функція $f(\mathbf{X})$ - опукла на опуклій множині G. Тоді за означенням опуклої функції, отримуємо:

$$f(\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) \leq \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2), \forall\lambda \in [0;1],$$
$$\forall\, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in G.$$

Звідси

$$f(\mathbf{X}_2 + \lambda(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)) - f(\mathbf{X}_2) \leq \lambda(f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2)).$$

Застосовуючи до лівої частини отриманої нерівності розклад в ряд Тейлора в околі точки $\mathbf{X}_2$, отримаємо:

$$\lambda(f'(\mathbf{X}_2 + \Theta\lambda(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)), \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) \leq \lambda(f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2)),\ \Theta \in [0;1].$$

При $\lambda \to +0$, отримаємо:

$$(f'(\mathbf{X}_2), \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) \leq f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2).$$

Достатність. Нехай $f(\mathbf{X}) \in C^1(G)$, G - опукла множина і виконується нерівність (16.7). Покажемо, що $f(\mathbf{X})$ - опукла функція. Візьмемо довільні $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in G$ та число $0 \leq \lambda \leq 1$. Позначимо $\mathbf{X}_\lambda = \lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2$. Із (16.7) отримаємо:

$$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_\lambda) \ge (f'(\mathbf{X}_\lambda), \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_\lambda),$$
$$f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_\lambda) \ge (f'(\mathbf{X}_\lambda), \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_\lambda).$$

Домножимо першу нерівність на λ, а другу на $(1-\lambda)$ і додамо їх. Маємо:

$$\lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_\lambda) \ge$$
$$\ge (f'(\mathbf{X}_\lambda), \lambda\mathbf{X}_1 - \lambda\mathbf{X}_\lambda + (1-\lambda)\mathbf{X}_2 - (1-\lambda)\mathbf{X}_\lambda) =$$
$$= (f'(\mathbf{X}_\lambda), \mathbf{X}_\lambda - \mathbf{X}_\lambda) = 0.$$

Отже, з останньої нерівності отримаємо:

$$f(\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) \le \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2).$$

Тобто, $f(\mathbf{X})$ - опукла функція.

Теорема 16.9 доведена.

Теорема 16.10 (критерій оптимальності для опуклої функції). Нехай G опукла множина, а $f(\mathbf{X}) \in C^1(G)$. Нехай G^* - множина точок мінімуму функцій $f(\mathbf{X})$ на G. Тоді в будь-якій точці $\mathbf{X}^* \in G^*$ необхідно виконується нерівність:

$$(f'(\mathbf{X}^*), \mathbf{X} - \mathbf{X}^*) \ge 0, \ \forall \mathbf{X} \in G. \tag{16.8}$$

У випадку, коли $\mathbf{X}^*$ є внутрішньою точкою множини G, нерівність (16.8) перетворюється в рівність $f'(\mathbf{X}^*) = 0$. Якщо функція $f(\mathbf{X})$ - опукла на множині G, то умова (16.8) є достатньою для того, щоб $\mathbf{X}^*$ належала множині G^*.

Доведення. Необхідність. Нехай $\mathbf{X}^* \in G^*$. Як відомо $f(\mathbf{X}+\mathbf{h}) - f(\tilde{\mathbf{O}}) = (f'(\tilde{\mathbf{O}}), \mathbf{h}) + o(\mathbf{h})$, де $o(\mathbf{h})$ - нескінченно мала величина більш високого порядку, ніж $\mathbf{h}$. Тоді $\forall\ \mathbf{X} \in G$, та $0 \le \alpha \le 1$ отримаємо:

$$0 \le f(\mathbf{X}^* + \alpha(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)) - f(\mathbf{X}^*) = \alpha\left((f'(\mathbf{X}^*), \mathbf{X} - \mathbf{X}^*) + \frac{o(\alpha(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*))}{\alpha} \right).$$

При $\alpha \to +0$ отримаємо нерівність (16.8).

Нехай $\mathbf{X}^*$ є внутрішньою точкою множини G. Тоді $\forall\ e \in E^n$, де e- одиничний вектор, знайдеться $\varepsilon_0 > 0$, таке, що

$\mathbf{X} = (\mathbf{X}^* + \varepsilon e) \in G$, $\forall \varepsilon : |\varepsilon| \le \varepsilon_0$. Покладаючи в (16.8) $\mathbf{X} = \mathbf{X}^* + \varepsilon e$, отримаємо:

$$\varepsilon(f'(\mathbf{X}^*), e) \ge 0.$$

Остання нерівність справедлива при всіх ε, таких, що $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$. А це можливо лише у випадку, коли $f'(\mathbf{X}^*) = 0$.

Достатність. Нехай функція $f(\mathbf{X}) \in C^1(G)$ є опуклою на G і для деякої точки $\mathbf{X}^* \in G$ виконується нерівність (16.8). Тоді з (16.7) при $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}^*$ отримуємо:

$$f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}^*) \ge (f'(\mathbf{X}^*), \mathbf{X} - \mathbf{X}^*).$$

Із врахуванням умови (16.8) отримуємо, що $f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}^*) \ge 0$. Отже, $f(\mathbf{X}^*) \le f(\mathbf{X}), \forall \mathbf{X} \in G$. Тобто, $\mathbf{X}^* \in G^*$.

Теорема 16.10 доведена.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення опуклої функції.
2. Наведіть приклади строго опуклої функції (сильно опуклої функції).
3. В якому випадку квадратична функція буде опуклою?
4. В якому випадку точка локального мінімуму функції на деякій множині завжди буде точкою її глобального мінімуму?
5. Доведіть, що строго опукла функція досягає свого мінімуму на опуклій множині в єдиній точці.
6. В якому випадку класична необхідна умова екстремуму буде і достатньою умовою?
7. В чому полягає задача опуклого програмування?

ТЕМА 17. СПЕЦІАЛЬНІ ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

17.1. Постановка задачі дробово-лінійного програмування та метод її розв'язування

Задача дробово-лінійного програмування в загальному випадку формулюється наступним чином:

$$f(\mathbf{X}) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0} \to \min(\max), \tag{17.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ \ i = \overline{1,l}, \tag{17.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ \ i = \overline{l+1,m}, \tag{17.3}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,n}. \tag{17.4}$$

Будемо вважати, що на допустимій множині U розв'язків задачі, яка визначається обмеженнями (17.2)-(17.4), знаменник $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 > 0$.

Така умова не порушує загальності задачі, оскільки в тому випадку, коли дана величина від'ємна, знак «-» можна віднести до чисельника.

Введемо позначення

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0}.$$

Відповідно до вищевказаного припущення на знаменник функції $f(\mathbf{X})$, маємо $y_0 > 0$ при $\mathbf{X} \in U$. Тоді отримаємо:

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \frac{x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0} + c_0 \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0} = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j y_0 + c_0 y_0 .$$

Ввівши нові змінні $y_j = y_0 x_j, \ j = \overline{1,n}$, маємо:

$$f(\mathbf{Y})=\sum_{j=0}^{n} c_j y_j \to \min(\max). \qquad (17.5)$$

Домноживши обмеження (17.2) на y_0 (ми маємо право це робити, оскільки $y_0 \neq 0$) і використавши те, що $y_j = y_0 x_j, j=\overline{1,n}$, отримаємо:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, i=\overline{1,l}. \qquad (17.6)$$

Аналогічно, з (17.3) отримуємо:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 \leq 0, i=\overline{l+1,m}. \qquad (17.7)$$

З введенного позначення $y_0 = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0}$ маємо додаткове обмеження:

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j y_0 + d_0 y_0 = 1$$

або

$$\sum_{j=0}^{n} d_j y_j = 1. \qquad (17.8)$$

Очевидно, що з умов (17.4) випливає:

$$y_j \geq 0, j=\overline{0,n}. \qquad (17.9)$$

Отже, із задачі дробово-лінійного програмування (17.1)-(17.4) ми отримали задачу лінійного програмування (17.5)-(17.9).

Нехай $\mathbf{Y}^* = (y_0^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)$ оптимальний розв'язок ЗЛП (17.5)-(17.9) і $f^* = f(\mathbf{Y}^*)$. Тоді, використовуючи рівності $x_j = \dfrac{y_j}{y_0}$, знайдемо оптимальний розв'язок задачі (17.1)-(17.4):

$$x_j^* = \frac{y_j^*}{y_0^*}, \quad j=\overline{1,n}, \quad f_{opt}(\mathbf{X}) = f^*.$$

17.2. Теорема Куна-Таккера

Розглянемо наступну задачу опуклого програмування:

$$f(\mathbf{X}) \to \min, \ \mathbf{X} \in G, \tag{17.10}$$

де множина G визначається, як

$$G = \{\mathbf{X} : g_i(\mathbf{X}) \le 0, i = \overline{1,m}, \mathbf{X} \in G_0\}.$$

Тут G_0 - задана опукла множина із простору E^n. Функції $f(\mathbf{X})$, $g_i(\mathbf{X})$, $i = \overline{1,m}$, - визначені та опуклі на G_0.

Теорема Куна–Таккера дає необхідну та достатню умову оптимальності для задачі (17.10), тобто умову належності точки до множини $G^* = \{\mathbf{X} : f(\mathbf{X}) = \min\limits_{\mathbf{Y} \in G} f(\mathbf{Y}) = f^*\}$. Вона являє собою узагальнення правила множників Лагранжа на випадок задачі (17.10). Функція Лагранжа для задачі (17.10) має вигляд:

$$L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}), \tag{17.11}$$

де $\mathbf{X} \in G_0$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda_0 = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in E^m : \lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_m \ge 0\}$.

Точку $(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in G_0 \times \Lambda_0$ називають сідловою точкою функції Лагранжа (17.11) якщо:

$$L(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\lambda}) \le L(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \le L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}^*) \ \ \mathbf{X} \in G_0, \ \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_0. \tag{17.12}$$

Іншими словами, $(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ сідлова точка функції $L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda})$, якщо $\mathbf{X}^*$ є точкою мінімуму функції $L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}^*)$, а точка $\boldsymbol{\lambda}^*$ є точкою максимуму функції $L(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\lambda})$. Про важливість відшукання сідловин точок говорить наступна теорема.

Теорема 17.1. Нехай $(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ - сідлова точка функції Лагранжа. Тоді $\mathbf{X}^* \in G^*$, тобто точка $\mathbf{X}^*$ є розв'язком задачі (17.10).

Теорема 17.2. (Теорема Куна-Теккера). Нехай множина G^* точок мінімуму функцій $f(\mathbf{X})$ не множині G задачі (17.10) не порожня. Нехай існує точка $\overline{\mathbf{X}} \in R_i(G_0) \bigcap G$ така, що $g_i(\overline{\mathbf{X}}) < 0$, $i = \overline{1,m}$. Тоді для кожної точки $\mathbf{X}^* \in G^*$ необхідно існують множники Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*) \in \Lambda_0$, такі, що пара $(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ утворює сідлову точку функції Лагранжа (17.11) на множині $G_0 \times \Lambda_0$.

Тут $R_i(G_0)$ - внутрішність множини G_0. В зв'язку з громіздкістю, ми не наводимо доведень теорем 17.1 та 17.2.

Якщо припустити, що в задачі

$$f(\mathbf{X}) \to \min,$$

$$g_i(\mathbf{X}) \le 0,\ i = \overline{1,m},$$

$$\mathbf{X} \ge 0.$$

функції $f(\mathbf{X})$, $g_i(\mathbf{X})$, $i = \overline{1,m}$ неперервно диференційовані та опуклі, то теорема Куна-Теккера може бути доповнена наступними аналітичними виразами, які визначають необхідні та достатні умови того, що точка $(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$ є сідловою точкою функцій Лагранжа:

$$\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial x_i} \ge 0,\ i = \overline{1,n}, \qquad (17.13)$$

$$x_i^* \frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1,n}, \qquad (17.14)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \lambda_i} \le 0,\ j = \overline{1,m}, \qquad (17.15)$$

$$\lambda_j^* \frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \lambda_j} = 0,\ j = \overline{1,m}, \qquad (17.16)$$

$$x_i^* \ge 0,\ i = \overline{1,n},\ \lambda_j^* \ge 0,\ j = \overline{1,m}. \qquad (17.17)$$

17.3. Постановка задачі квадратичного програмування

Задача

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \to \min, \qquad (17.18)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \le 0,\ i = \overline{1,m}, \qquad (17.19)$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,n}, \qquad (17.20)$$

де матриця $\mathbf{C} = (c_{kj})$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ - додатньо визначена, називається задачею квадратичного програмування.

Задача (17.18)-(17.20) є задачею опуклого програмування. Тому для її розв'язання можемо використати теорему Куна-Таккера. Функція Лагранжа задачі (17.18)-(17.20) має вигляд

$$L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j - b_i \right).$$

Тоді сідлова точка $(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ функції $L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda})$ може бути знайдена з умов (17.13)-(17.17), які для задачі (17.18)-(17.20) набувають вигляду:

$$\sum_{k=1}^{n} c_{kj}^* x_{jk} + d_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \geq 0, \; j = \overline{1,n}, \qquad (17.21)$$

$$x_j \left(\sum_{k=1}^{n} c_{kj}^* x_k + d_j + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} \right) = 0, \; j = \overline{1,n}, \qquad (17.22)$$

$$\sum a_{ij} x_j - b_i \leq 0, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (17.23)$$

$$\lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, \; i = \overline{1,m}, \qquad (17.24)$$

$$\lambda_i \geq 0, \; x_j \geq 0, \; i = \overline{1,m}, \qquad (17.25)$$

тут $c_{kj}^* = \begin{cases} 2c_{kj}, \, k = j, \\ c_{kj}, \, k \neq j. \end{cases}$

Вводячи в обмеження (17.21), (17.23) нові невід'ємні змінні $\mu_j \geq 1$, $j = \overline{1,n}$, $x_{n+i} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, отримуємо наступні умови:

$$\sum_{k=1}^{n} c_{kj}^* x_k + d_j + \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} - \mu_j = 0, \; j = \overline{1,n}, \qquad (17.26)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i + x_{n+i} = 0, \; i = \overline{1,m}. \qquad (17.27)$$

Враховуючи, що $\mu_j = \left(\sum_{k=1}^{m} c_{kj}^{*} x_k d_j + \sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} \right)$ і $\left(-x_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j - b_i \right)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, з умов (17.22), (17.24) отримуємо:

$$x_j \mu_j = 0,\ \lambda_i x_{n+i} = 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, \qquad (17.28)$$

Причому:

$$\lambda_i \ge 0,\ \mu_j \ge 0,\ x_k \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,n+m}. \qquad (17.29)$$

Для розв'язання системи обмежень (17.26)-(17.29) можна використати метод штучного базису, який дозволяє знайти одну з кутових точок множини, заданої вказаними обмеженнями. При реалізації методу штучного базису потрібно враховувати умови (17.28). Тобто не включати одночасно в базис змінні λ_i та x_{n+i} з однаковим індексом i, а також змінні x_j та μ_j з однаковим індексом j.

Контрольні запитання

1. Які вимоги щодо знаменника цільової функції ставляться в задачі дробово-лінійного програмування?
2. Яка додаткова умова з'являється в ЗЛП, до якої зводиться задача дробово-лінійного програмування?
3. Яку заміну змінних вводять в задачі дробово-лінійного програмування?
4. Яку точку називають сідловою для функції Лагранжа $L(X, \lambda)$?
5. Узагальненням якого методу є теорема Куна-Таккера?
6. Чи є задача квадратичного програмування задачею опуклої оптимізації?
7. Яким методом шукають точку, яка задовольняє системі обмежень в задачі квадратичного програмування?

Лабораторна робота №18
Задача дробово-лінійного програмування

Приклад Л18.1.
Розв’язати наступну задачу дробово-лінійного програмування:

$$f=\frac{-2x_1+x_2}{x_1+2x_2+1}\to\min,$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2 \le 2, \\ 2x_1+x_2+x_3=6, \end{cases} \qquad (Л18.1)$$

$$x_i\ge 0,\quad i=\overline{1,3}.$$

Розв'язання. Оскільки $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$, то $(x_1+2x_2+1)>0$. Вводячи заміну змінних $y_0=\dfrac{1}{x_1+2x_2+1}$, $y_1=y_0\cdot x_1$, $y_2=y_0\cdot x_2$, $y_3=y_0\cdot x_3$, із (Л18.1) отримаємо наступну ЗЛП:

$$f(\mathbf{Y})=-2y_1+y_2\to\min,$$

$$\begin{cases} y_1-2y_2-2y_0\le 0, \\ 2y_1+y_2+y_3-6y_0=0, \\ y_1+2y_2+y_0=1, \end{cases} \qquad (Л18.2)$$

$$y_j\ge 0,\quad j=\overline{0,3}.$$

Зведемо ЗЛП (Л18.2) до канонічного вигляду і розв'яжемо її М-методом.

$$f(\mathbf{Y})=-2y_1+y_2\to\min,$$

$$\begin{cases} y_1-2y_2-2y_0+y_4=0, \\ 2y_1+y_2+y_3-6y_0=0, \\ y_1+2y_2+y_0=1, \end{cases}$$

$$y_j\ge 0,\quad j=\overline{0,4}.$$

Далі маємо М-задачу:

$$\tilde{f}(\mathbf{Y}) = -2y_1 + y_2 + M(y_5 + y_6 + y_7) \to \min,$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 \qquad\quad - 2y_0 + y_4 + y_5 = 0, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 - 6y_0 \qquad\quad + y_6 = 0, \\ y_1 + 2y_2 \qquad\quad + y_0 \qquad\quad + y_7 = 1, \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, \quad j = \overline{0{,}7}.$$

де M - як завгодно велике число. Розв’язання продовжуємо з використанням симплекс-таблиць.

Таблиця Л18.1

Симплекс-таблиці до прикладу Л18.1

	Б	$C_б$	X	$C_0=0$	$C_1=-2$	$C_2=1$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=M$	$C_6=M$	$C_7=M$	θ_i
				A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	$\to A_5$	M	0	-2	1	-2	0	1	1	0	0	0
	A_6	M	0	-6	2	1	1	0	0	1	0	0
	A_7	M	1	1	1	2	0	0	0	0	1	1
	$m+1$		0	0	2	-1	0	0	0	0	0	
	$m+2$		1	-7	4↑	1	1	1	0	0	0	

2	A_1	-2	0	-2	1	-2	0	1	1	0	0	-
	$\to A_6$	M	0	-2	0	5	1	-2	-2	1	0	0
	A_7	M	1	3	0	4	0	-1	-1	0	1	1/4
	$m+1$		0	-4	0	3	0	-2	-2	0	0	
	$m+2$		1	1	0	9↑	1	-3	-4	0	0	

3	A_1	-2	0	-14/5	1	0	2/5	1/5	1/5	2/5	0	-
	A_2	1	0	-2/5	0	1	1/5	-2/5	-2/5	1/5	0	-
	$\to A_7$	M	1	23/5	0	0	-4/5	3/5	3/5	-4/5	1	5/23
	$m+1$		0	26/5	0	0	-3/5	-4/5	-4/5	-3/5	0	
	$m+2$		1	23/5↑	0	0	-4/5	3/5	-2/5	-9/5	0	

4	A_1	-2	14/23	0	1	0	-2/23	13/23	-	-	-	-
	$\to A_2$	1	2/23	0	0	1	3/23	-8/23	-	-	-	2/3
	A_0	0	5/23	1	0	0	-4/23	3/23	-	-	-	-
	$m+1$		-26/23	0	0	0	7/23↑	-34/23	-	-	-	
	$m+2$		0	0	0	0	0	0	-	-	-	

5	A_1	-2	2/3	0	1	2/3	0	1/3
	A_3	0	2/3	0	0	23/3	1	-8/3
	A_0	0	1/3	1	0	4/3	0	-1/3
	$m+1$		-4/3	0	0	-7/3	0	-2/3

Отже:

$$\mathbf{Y}_{\min} = ({}^{1}\!/_{3};{}^{2}\!/_{3};0;{}^{2}\!/_{3}),\ f_{\min} = -{}^{4}\!/_{3}.$$

Тоді

$$x_1 = {}^{y_1}\!/_{y_0} = 2,\ x_2 = {}^{y_2}\!/_{y_0} = 0,\ x_3 = {}^{y_3}\!/_{y_0} = 2.$$

Тобто,

$$\mathbf{X}_{\min} = (2;\ 0;\ 2),\ \ f_{\min} = -{}^{4}\!/_{3}.$$

Зауважимо, що при зведенні задачі (Л18.2) до канонічного вигляду в обмеженнях виділяється два базисних одиничних вектори $\mathbf{A}_3$ та $\mathbf{A}_4$. Тому M -задачу можна відразу записати в простішому вигляді

$$\tilde{f}(\mathbf{Y}) = -2y_1 + y_2 + M \cdot y_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} y_1 - 2\,y_2 \qquad - 2y_0 + y_4 = 0, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 - 6y_0 \qquad = 0, \\ y_1 + 2y_2 \qquad + y_0 + y_5 = 1, \end{cases}$$

$$y_j \geq 0,\quad j = \overline{0,5}.$$

Тоді базис виродженого початкового опорного плану $\mathbf{Y}_0 = (0;0;0;0;1)$ даної M -задачі буде складатись із векторів $(\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_5)$ і містить лише один штучний вектор.

Завдання для самостійної роботи

Знайти оптимальний розв’язок задачі дробово-лінійного програмування.

1. $f(x) = \dfrac{-3x_2 + 2x_3}{x_2 + 3x_3} \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\quad j = \overline{1,4}.$$

2. $f(x) = \dfrac{3x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + 2} \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\quad j = \overline{1,5}.$$

3. $$f(x)=\frac{2x_1+x_2-x_3}{x_1+3x_2+5x_3}\to\max,$$
$$\begin{cases}6x_1-3x_2+x_3+x_4=12,\\7x_1-x_2+2x_3\le 12,\\-4x_1+2x_2-x_3-x_5=1,\end{cases}$$
$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,5}.$$

4. $$f(x)=\frac{x_1-x_2-3}{3x_1+2x_2+1}\to\min,$$
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6,\\3x_1-2x_2+x_4=9,\\-x_1+2x_2+x_5=10,\end{cases}$$
$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,5}.$$

5. $$f(x)=\frac{-2x_1+x_2}{x_1+3x_2+2}\to\min,$$
$$\begin{cases}4x_1-x_2\le 5,\\x_1+3x_2-x_3=7,\\-3x_1+4x_2+x_4=17,\end{cases}$$
$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$$

6. $$f(x)=\frac{3x_1-2x_2-1}{x_1+x_2+3}\to\max,$$
$$\begin{cases}-x_1+3x_2-x_4=10,\\2x_1+4x_2-x_3-x_4=20,\\5x_1+2x_2+x_5=35,\\-3x_1+2x_2+x_6=11,\end{cases}$$
$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,6}.$$

7. $$f(x)=\frac{x_1-2x_2+3}{x_2+2}\to\min,$$
$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=5,\\-x_1+2x_2\ge 1,\\-3x_1+x_2+x_4=1,\end{cases}$$
$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$$

8. $$f(x)=-\frac{x_2+3x_3}{x_2+x_3+2}\to\max,$$
$$\begin{cases}x_2+x_3+x_5=3,\\3x_2-x_3+x_4=6,\\-x_1+x_2+3x_3=4,\end{cases}$$
$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,5}.$$

9. $$f(x)=\frac{3x_1-2x_4-1}{x_1+x_4+3}\to\max,$$
$$\begin{cases}-x_1-x_2+3x_4=10,\\x_1-2x_2-x_3+7x_4=30,\\-3x_1+2x_4+x_6=11,\\5x_1+2x_4+x_5=35,\end{cases}$$
$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,6}.$$

10. $$f(x)=\frac{x_1-2x_2}{3x_1+x_2+2}\to\min,$$
$$\begin{cases}-x_1+4x_2\le 5,\\4x_1-3x_2+x_4=17,\\7x_1-2x_2-x_3+x_4=24,\end{cases}$$
$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$$

11. $f(x)=\dfrac{x_1-2x_3+3}{x_3+2}\to\min,$

$$\begin{cases}-3x_1+x_3+x_4=1,\\-x_1+2x_3\ge 1,\\4x_1-x_2-x_4=4,\end{cases}$$

$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$

12. $f(x)=\dfrac{2x_3-3x_4}{3x_3+x_4}\to\max,$

$$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3+2x_4=6,\\x_2+3x_3+x_4=10,\end{cases}$$

$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$

13. $f(x)=\dfrac{-x_1+x_2-3}{2x_1+3x_2+1}\to\min,$

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_5=10,\\-x_1+4x_2+x_3+x_4=15,\\-2x_1+3x_2+x_4=9,\end{cases}$$

$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,5}.$

14. $f(x)=\dfrac{-x_1+x_2+2x_3}{5x_1+3x_2+x_3}\to\max,$

$$\begin{cases}2x_1-x_2+7x_3\le 12,\\2x_1-5x_2+10x_3+x_4+x_5=11,\\-x_1+2x_2-4x_3-x_5=1,\end{cases}$$

$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,5}.$

15. $f(x)=\dfrac{3x_1+x_2}{x_1+x_2}\to\min,$

$$\begin{cases}8x_1+2x_2\le 26,\\x_1+x_2\le 4,\\3x_1+12x_2\le 39,\end{cases}$$

$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0.$

16. $f(x)=\dfrac{2x_1-5x_2}{4x_1+3x_2}\to\max,$

$$\begin{cases}4x_1+x_2+x_3=16,\\3x_1+2x_2-x_4=12,\\-2x_1+3x_2+x_5=18,\end{cases}$$

$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,5}.$

17. $f(x)=\dfrac{x_1-3x_2}{x_1+x_2}\to\min,$

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=5,\\3x_1-x_2+x_4=7,\\-x_1+3x_2+x_5=11,\end{cases}$$

$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,5}.$

18. $f(x)=\dfrac{2x_1-x_2}{x_1+2x_2+1}\to\max,$

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=2,\\2x_1+x_2+x_4=6,\end{cases}$$

$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$

19. $f(x) = \dfrac{x_1 - x_2 + x_3}{2x_1 + x_3 + 1} \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$

20. $f(x) = \dfrac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_1 - 4x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

21. $f(x) = \dfrac{x_1 + x_3}{x_1 + x_2} \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 14, \\ -5x_1 + 3x_3 \le 15, \\ 4x_1 + 6x_3 - x_4 = 24, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$

22. $f(x) = \dfrac{-2x_1 + x_2}{x_1 + 3x_2 + 1} \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_3 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

23. $f(x) = \dfrac{-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5}{x_1 + x_2 + 2x_3 + 1} \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$

24. $f(x) = -\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{x_5 + x_6 + 1} \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}.$

25.

$f(x) = \dfrac{-2x_1 + 6x_2 - 5x_5}{x_3 + x_4 + 2} \to \min,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}.$

Лабораторна робота №19
Задача квадратичного програмування

Приклад Л19.1

Розв’яжемо наступну задачу квадратичного програмування:

$$f(\mathbf{X}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 - 6x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \end{cases} \qquad (\text{Л19.1})$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв’язання. Матриця $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ є достатньо визначеною, отже, функція $f(\mathbf{X})$ є опуклою. Функція Лагранжа задачі (Л19.1) має вигляд:

$$L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 - 6x_2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(-x_1 + 2x_2 - 2).$$

Тоді умови (17.26)-(17.29) теореми Куна-Таккера записуються наступним чином:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 6 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_2 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 2 + x_4 = 0, \end{cases} \qquad (\text{Л19.2})$$

$$x_1 \ge 0,\ i = \overline{1,4},\ \mu_j \ge 0,\ \lambda_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

Будемо шукати кутову точку множини, яка визначається вищенаведеною системою (Л19.2) методом штучного базису. Оскільки третє та четверте рівняння системи (Л19.2) легко розв’язуються відносно змінних x_3, x_4, то для зменшення розміру симплекс-таблиці додаткові змінні x_5, x_6 вводимо лише в перші два рівняння. Вважаючи базисними змінними x_3, x_4, x_5, x_6, отримаємо наступну допоміжну задачу:

$$\tilde{f}(\mathbf{X}) = x_5 + x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_5 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1 = 2, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_6 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_2 = 6, \\ \mu_1 x_1 = \mu_2 x_2 = \lambda_1 x_3 = \lambda_2 x_4 = 0, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ i = \overline{1,6},\ \mu_j \geq 0,\ \lambda_j \geq 0,\ j = 1,2.$$

Далі розв'язок продовжуємо з використанням симплекс-таблиць (табл. Л19.1). Отже, $\mathbf{X}_{\min} = \left(\frac{4}{5}; \frac{6}{5}\right)$, $f_{\min} = -\frac{36}{5}$.

Зауважимо, якщо задача квадратичного програмування поряд з обмеженнями - нерівностями містить рівності виду:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = b_i\ ,$$

то для перетворення їх до вигляду нерівностей потрібно виразити із даних рівностей деякі базисні змінні і записати для них умову невід'ємності.

Наприклад, перетворимо обмеження:

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16,$$
$$-x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4,$$

до вигляду нерівностей. Розв'язавши їх, наприклад, відносно змінних x_3 та x_4, отримаємо:

$$x_3 = 6 - 2x_1 + x_2\ ,$$
$$x_4 = 10 - x_1 - 2x_2\ .$$

Отже, враховуючи умови $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, маємо:

$$6 - 2x_1 + x_2 \geq 0,$$
$$10 - x_1 - 2x_2 \geq 0\ .$$

Таблиця Л19.1

Симплекс-таблиці до прикладу Л19.1

Б	$С_Б$	Х	$C_1=0$	$C_2=0$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=0$	$C_\lambda^1=0$	$C_\lambda^2=0$	$C_\mu^1=0$	$C_\mu^2=0$	Θ_i
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_λ^1	A_λ^2	A_μ^1	A_μ^2	
A_3	0	2	1	**1**	1	0	0	0	0	0	0	0	2
→A_4	**0**	**2**	**-1**	**2**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
A_5	1	2	2	**-2**	0	0	1	0	1	-1	-1	0	-
A_6	1	6	-2	**4**	0	0	0	1	1	2	0	-1	1,5
		8	0	**2↑**	0	0	0	0	2	1	-1	-1	
→A_3	**0**	**1**	**1,5**	**0**	**1**	**-0,5**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**2/3**
A_2	0	1	**-0,5**	1	0	0,5	0	0	0	0	0	0	-
A_5	1	4	**1**	0	0	1	1	0	1	-1	-1	0	4
A_6	1	2	**0**	0	0	-2	0	1	1	2	0	1	∞
		6	**1↑**	0	0	-1	1	0	2	1	-1	-1	
A_1	0	2/3	1	0	2/3	-1/3	0	0	**0**	0	0	0	∞
A_2	0	4/3	0	1	1/3	1/3	0	0	**0**	0	0	0	∞
A_5	1	10/3	0	0	-2/3	4/3	1	0	**1**	-1	-1	0	5
→A_6	**1**	**2**	**0**	**0**	**0**	**-2**	**0**	**1**	**1**	**2**	**0**	**-1**	**2**
		16/3	0	0	-2/3	-2/3	0	0	**2↑**	1	-1	-1	
A_1	0	2/3	1	0	2/3	**-1/3**	0	0	0	0	0	0	-
A_2	0	4/3	0	1	1/3	**1/3**	0	0	0	0	0	0	4
→A_5	**1**	**4/3**	**0**	**0**	**-2/3**	**10/3**	**1**	**-1**	**0**	**-3**	**-1**	**1**	2/5
A_λ^1	0	2	0	0	0	**-2**	0	1	1	2	0	-1	
		4/3	0	0	-2/3	**10/3**	0	-1	0	-3	-1	1	
A_1	0	0,8	1	0	0,6	0	0,1	-0,1	0	-0,3	-0,1	0,1	
A_2	0	1,2	0	1	0,4	0	-0,1	0,1	0	0,3	0,1	-0,1	
A_4	0	0,4	0	0	-0,2	1	0,3	-0,3	0	-0,9	-0,3	0,3	
A_λ^1	0	2,8	0	0	-0,4	0	0,6	0,4	1	0,2	-0,6	-0,4	
		0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати задачу квадратичного програмування.

1. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 10x_1 + 15x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 13, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 30x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 13x_2 \le 51, \\ 15x_1 + 7x_2 \le 107, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

3. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

4. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 20x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 9x_1 + 8x_2 \le 72, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

5. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

6. $f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - 4x_2 - x_1 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

7. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 8x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ x_2 \le 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

8. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 8x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + x_2 \le -8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

9. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

10. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

11. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

12. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2 - 6x_2 + 5x_1 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 15, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

13. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 5x_1 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

14. $f(x) = x_1^2 + 2x_3^2 - 8x_1 - 2x_2 - 4x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \le 16, \\ 3x_2 + 4x_3 \le 20, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

15. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3 + x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 12, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

16. $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 \to \min,$

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 2, \\ 0 \le x_2 \le 4, \\ 0 \le x_3 \le 6. \end{cases}$$

17. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 2x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16, \\ x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

18. $f(x) = x_1^2 - 8x_1 - x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 + 5x_2 \le 20, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

19. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2 - 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \\ x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_3 \le 14. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

20. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_2 - 6x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ x_3 \le 3. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

21. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 - 8x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 20, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

22. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 10, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 6. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

23. $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 5x_1 + 6x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 20, \\ x_1 + x_2 \le 15, \\ x_2 + x_3 \le 10. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

24. $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + x_3 \le 1. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

25. $f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 - 2x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 10. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

РОЗДІЛ 4
БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ ТА ПОГАНО ОБУМОВЛЕНІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ

ТЕМА 18. ЗАДАЧІ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

18.1. Постановка задачі

Відразу відмітимо, що викладки тем даного розділу базуються на роботі [25].

У багатокритеріальних задачах оптимізації знайшов відображення випадок невизначеності цілі. В даному випадку вибір найкращих варіантів (або розв'язків) здійснюється не за допомогою єдиної цільової функції, а за цілою групою оцінок, які досить часто знаходяться в протиріччі між собою (в реальному житті найчастіше реалізується саме останній варіант). Наприклад, задача купівлі квартири є задачею вибору оптимального варіанту із множини допустимих. Якби у нас був лише один критерій і відображаюча його цільова функція (наприклад, вартість квартири), то в даному випадку проблем не виникало б. Але ситуація ускладнюється тим, що при купівлі нас починають цікавити й інші показники, такі як житлова площа, на якому поверсі розміщена квартира, в якому році збудований будинок, кількість кімнат і т.д. при цьому виникають і нечислові характеристики, як наприклад – чи цегляний, чи панельний будинок, окремі чи прохідні кімнати та ін.

Загальна багатокритеріальна задача умовної оптимізації формулюється наступним чином:

$$\{f_1(\mathbf{X}); f_2(\mathbf{X}); \ldots; f_s(\mathbf{X})\} \to \min,$$

$$\text{або } f_i(\mathbf{X}) \to \min, i = \overline{1, s}, \qquad (18.1)$$

$$g_j(\mathbf{X}) \le 0, \; j = \overline{1, l},$$

$$g_j(\mathbf{X}) = 0, \; j = \overline{l+1, m}, \qquad (18.2)$$

де $f_i(\mathbf{X}), i = \overline{1, s}$ - задані функції, які є критеріями оптимізації; $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$. В обмеження (18.2) можуть входити умови невід'ємності, або умови вигляду $a_k \le x_k \le b_k$. Обмеження (18.2) визначають множину допустимих розв'язків Ω.

18.2. Зведення багатокритеріальної задачі оптимізації до однокритеріальної

Через наявність векторного критерію оптимальності, задача (18.1), (18.2) не є стандартною з точки зору традиційних методів нелінійної оптимізації. Тому задачі такого типу намагаються звести до однокритеріальних задач оптимізації. Але таке зведення не буде однозначним і викликає певні ускладнення. Основне ускладнення виникає у зв'язку з тим, що деякі із критеріїв $f_i(X)$, $i=\overline{1,s}$, можуть бути суперечливими – покращення одного з них приводить до погіршення іншого. Фактор суперечливості:

1. значно ускладнює формальний підхід до формулювання однієї цільової функції і вимагає застосуванні різних неформальних (суб'єктивних) процедур;
2. призводить до погано обумовлених оптимізаційних задач, розв'язання яких викликає ускладнення при практичній реалізації тих чи інших методів.

Найбільш відомі наступні методи зведення до задачі з єдиною цільовою функцією:

1. Метод головного критерію. В якості цільової функції вибирається одна із $f_i(X)$, $i=\overline{1,s}$, яка, з точки зору дослідника, найбільш повно відображає цілі оптимізації. Інші критерії оптимізації враховуються за допомогою введення необхідних критеріальних обмежень, які визначають разом з обмеженнями (18.2) нову множину допустимих розв'язків Ω'. Основна проблема і полягає у визначенні таких критеріальних обмежень. Крім того, досить часто є кілька головних критеріїв, які знаходяться в протиріччі.

2. Метод лінійної згортки. Єдина цільова функція формулюється у вигляді:

$$F(X)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_i(X)\to \min, \tag{18.3}$$

де $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$, $\mathbf{X} \in \Omega$. Вагові коефіцієнти α_i, $i = \overline{1,s}$, тут можуть розглядатися, як показники відносної значущості окремих критеріїв $f_i(\mathbf{X})$, $i = \overline{1,s}$. На практиці проблемою даного методу є визначення набору коефіцієнтів α_i, $i = \overline{1,s}$, адже даний вибір є неформальним і носить суб’єктивний характер.

При умові $f_i(\mathbf{X}) > 0$, $i = \overline{1,s}$ інколи використовують мультиплікативний критерій:

$$F(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{s} f_i^{\alpha_i}(\mathbf{X}) \to \min, \mathbf{X} \in \Omega. \qquad (18.4)$$

Але логарифмуючи (18.4), отримаємо:

$$\ln F(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \ln f_i(\mathbf{X}),$$

що принципово не відрізняється від (18.3).

3. <u>Мінімаксний метод.</u> Вимагає задання контрольних показників t_i, $i = \overline{1,s}$, які фігурують в критеріальних обмеженнях:

$$f_i(\mathbf{X}) \le t_i, \; i = \overline{1,s}. \qquad (18.5)$$

В даному випадку в якості скалярного критерію можна використати умови вигляду:

$$F(\mathbf{X}) = \min_i \alpha_i (t_i - f_i(\mathbf{X})) \to \max, \; \mathbf{X} \in \Omega,$$

або

$$F(\mathbf{X}) = \max_i \alpha_i (f_i(\mathbf{X}) - t_i) \to \min, \; \mathbf{X} \in \Omega.$$

Для відшукання t_i, $i = \overline{1,s}$ використовується експертний аналіз або розв’язуються однокритеріальні задачі оптимізації:

$$t_i = \min_{\mathbf{X}\in\Omega} f_i(\mathbf{X}),\ i=\overline{1,s}.$$

18.3. Принцип Паретто

Розглянемо дві точки $\mathbf{X}^{'},\mathbf{X}^{''}\in\Omega$. Якщо виконуються нерівності:

$$f_i(\mathbf{X}^{'})\le f_i(\mathbf{X}^{''}),\ i=\overline{1,s}, \qquad (18.6)$$

причому, хоча б одна із нерівностей (18.6) строга, то кажуть, що точка $\mathbf{X}^{'}$ краща за точку $\mathbf{X}^{''}$. Якщо для деякої точки $\mathbf{X}^{*}\in\Omega$ не існує кращих за неї точок, то її називають ефективним або Паретто-оптимальним розв'язком багатокритеріальної задачі (18.1), 18.2). Множину, яка складається із всіх ефективних розв'язків, позначають через $P(\Omega)$ і називають множиною Паретто для векторного відображення $\mathbf{f}:\Omega\to R^s, \mathbf{f}=(f_1,f_2,\ldots,f_s)$. Очевидно, що $P(\Omega)\subset\Omega\subset R^n$. Образ множини $P(\Omega)$ в просторі критеріїв R^s позначається $P(\mathbf{f})=\mathbf{f}(P(\Omega))$ і називається множиною ефективних оцінок.

Принцип Паретто говорить, що оптимальний розв'язок багатокритеріальної задачі оптимізації потрібно шукати лише серед точок множини $P(\Omega)$. В іншому випадку завжди знайдеться краща точка $\mathbf{X}$.

Точка $\mathbf{X}^{'}\in\Omega$ називається слабоефективним розв'язком задачі (18.1), (18.2), якщо не існує такої точки $\mathbf{X}^{''}\in\Omega$, для якої виконуються строгі нерівності $f_i(\mathbf{X}^{''})<f_i(\mathbf{X}^{'}),\ i=\overline{1,s}$. Тобто, розв'язок називається слабо ефективним, якщо він не може бути покращеним відразу за всіма критеріями.

Можна довести, що розв'язки всіх однокритеріальних задач з параграфа 18.2, до яких зводиться задача багатокритеріальної оптимізації (18.1), (18.2), є або ефективними або слабоефективними. Однак, жоден із методів пункту 2 не дозволяє виділити єдиний оптимальний розв'язок, оскільки розв'язки, які відповідають різним наборам вагових коефіцієнтів, є рівноправними елементами множини (слабо) ефективних розв’язків. Принцип Паретто дозволяє лише звузити множину можливих претендентів на розв’язок і виключити з розгляду завідомо неперспективні варіанти.

Методи вибору єдиного розв’язку існують, але пов’язані вони з використанням моделей і процедур, призначених для структуризації та кількісного описання суб’єктивної думки експерта, який приймає рішення.

Контрольні запитання

1. Чим відрізняється задача багатокритеріальної оптимізації від однокритеріальної?
2. Чи є зведення багатокритеріальних задач оптимізації до однокритеріальних однозначними?
3. Які існують методи зведення багатокритеріальних задач оптимізації до однокритеріальних?
4. Чим відрізняється метод лінійної згортки від мультиплікативного методу?
5. Яку точку називають ефективним або Паретто-оптимальним розв’язком задачі багатокритеріальної оптимізації?
6. Чи дозволяє принцип Паретто знайти оптимальний розв’язок задачі багатокритеріальної оптимізації?

ТЕМА 19. ПРОБЛЕМА ПОГАНОЇ ОБУМОВЛЕНОСТІ В ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ

19.1. Явище яровості

Розглянемо наступну задачу безумовної оптимізації:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + c^2 \cdot x_2^2 \to \min, \qquad (19.1)$$

де $c \to \infty$. Лінії рівня даної цільової функції:

$$x_1^2 + c^2 \cdot x_2^2 = h^2,$$

$$\frac{x_1^2}{h^2} + \frac{x_1^2}{\left(\frac{h}{c}\right)^2} = 1.$$

Отже, лінії рівня – це еліпси, в яких перша піввісь $a = h$, а друга піввісь $b = \frac{h}{c}$. Якщо покласти $h = c$, то отримаємо $a = c$, $b = 1$. Тобто, лінії рівня є витягнутими вздовж осі Ox_1, якщо $c \to \infty$. Градієнт цільової функції (19.1) $grad\, f = (2x_1; 2c^2 x_2)$. Наприклад, в точці $(1;1)$: $grad\ f\big|_{(1;1)} = (2; 2c^2)$, тобто, він майже перпендикулярний до ліній рівня.

Очевидно, що при $c \to \infty$ значення функції $f(x_1, x_2)$ в кожній точці, де $x_2 \neq 0$, буде необмежено зростати. В той же час це значення буде обмеженим і рівним x_1^2 в усіх точках, де $x_2 = 0$. Тобто, при досить великих c мінімальне значення функції $f(x_1, x_2)$ потрібно шукати вздовж залежності $x_2 = 0$, яка визначає так зване дно яру.

Наведений приклад ярової ситуації є досить простим, але вже навіть він показує принципові труднощі, пов'язані із застосуванням методів спуску. З вищенаведених міркувань випливає, що напрямки спуску, які задаються антиградієнтом, є неефективними, оскільки антиградієнт є майже перпендикулярним до ліній рівня і до дна яру. Тобто, метод спуску досить швидко приведе в окіл дна яру, де антиградієнт починає осцилювати, залишаючись майже перпендикулярним напрямку в точку мінімуму.

Ще складніший приклад:

$$f(x_1,x_2)=g_0^2(x_1,x_2)+c^2\cdot g_1^2(x_1,x_2)\to\min,$$

де дно яру визначається залежністю $g_1(x_1,x_2)=0$.

В задачі ($\mathbf{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$, $n>2$)

$$f(\mathbf{X})=g_0^2(\mathbf{X})+c^2\cdot\sum_{i=1}^{m}g_i^2(\mathbf{X})\to\min,\ \ m<n,$$

дно яру є багатовимірним і визначається системою рівнянь:

$$g_i(\mathbf{X})=0,\ i=\overline{1,m}.$$

В будь-якому випадку для ярової ситуації визначальним фактором є спеціальна структура гіперповерхонь функції $f(\mathbf{X})$, яка сильно відрізняється від сферичної. Також є характерним наявність деякої області «притягування» $Q\subset R^n$ (дна яру), яка містить точку мінімуму $\mathbf{X}_{\min}$. При цьому норма вектора градієнта $grad f$ при $\mathbf{X}\in Q$, як правило, значно менша, аніж в іншій частині простору.

19.2. Означення яровості

Узагальнюючи досвід роботи з яровими функціями в методах оптимізації, сформулювали наступне означення:

> Функція $f(\mathbf{X})\in C^2(D)$, $D\subset R^n$ називається яровою на множині $Q\in D$, якщо знайдуться такі числа $\delta>0,\ \sigma>>1$ і множина $Q_\delta\subset D$, що:
>
> 1. $\forall\mathbf{X}\in Q_\delta$: $\lambda_1\left(f''(\mathbf{X})\right)\geq\sigma\cdot\left|\lambda_n\left(f''(\mathbf{X})\right)\right|$;
> 2. $\forall\mathbf{X}\in Q$: $\arg\min\limits_{\mathbf{X}'\in\mathbf{X}_\delta}f(\mathbf{X}')\subset Q$;
> 3. $\forall\mathbf{X}\in Q$: $L(\mathbf{X}_\delta\cap Q)\leq\dfrac{1}{\sigma}\cdot L(\mathbf{X}_\delta)$.

У вищенаведеному означенні:

1. $\lambda_i(\mathbf{A})$ - власні значення матриці $\mathbf{A}=f''(\mathbf{X})$, які впорядковані по спаданню $\lambda_1(\mathbf{A})\geq\lambda_2(\mathbf{A})\geq\ldots\geq\lambda_n(\mathbf{A})$;
2. $\mathbf{X}_\delta=\{\mathbf{X}'\in R^n:\|\mathbf{X}'-\mathbf{X}\|\leq\delta\}$ - δ - окіл точки $\mathbf{X}$;

3. $Q_\delta = \bigcup\limits_{\mathbf{X}\in Q} \mathbf{X}_\delta$;

4. $L(S)$ - константа Ліпшиця у співвідношенні:

$$\left\| f'(\mathbf{X}') - f'(\mathbf{X}) \right\| \le L(S) \cdot \left\| \mathbf{X}' - \mathbf{X} \right\|, \ \forall \mathbf{X}', \mathbf{X} \in S \subset R^n.$$

Множина Q називається дном яру.

Основною у вищенаведеному означенні є умова 1, яка вимагає різко несиметричне розміщення спектру матриці других похідних $f''(\mathbf{X})$ відносно початку координат: $\lambda_i \in [-m; M]$, де $M >> m > 0$. Умови 2 та 3 фактично вимагають, щоб всі траєкторії найшвидшого спуску, які розпочинаються в будь-якій точці $\mathbf{X} \in Q_\delta$, швидко попадали в достатньо малий окіл $Q_\varepsilon \, (\varepsilon << \delta)$ множини Q і залишались там до виходу із множини Q_ε. Дану властивість інколи називають властивістю стійкості множини Q.

Інколи умову 1 заміняють схожою, але іншою. Вимагається, що власні числа матриці других похідних можна розділити на дві групи, в одну з яких входять власні числа, які по модулю набагато більші за елементи другої групи. Тобто,

1. $\forall \mathbf{X} \in Q_\delta : \ \lambda_1(f''(\mathbf{X})) \ge \ldots \ge \lambda_{n-r}(f''(\mathbf{X})) \ge$

$$\ge \sigma \cdot \left| \lambda_{n-r+1}(f''(\mathbf{X})) \right| \ge \ldots \ge \sigma \cdot \left| \lambda_n(f''(\mathbf{X})) \right|.$$

Число r називається розмірністю яру (дна яру) Q.

Нехай $\forall \mathbf{X} \in Q : \ \det f''(\mathbf{X}) \ne 0$. Найменше із чисел σ, які задовольняють означенню яровості, називається ступенем яровості $f(\mathbf{X})$ в Q і позначається $\eta(Q)$.

Відношення $\eta(\mathbf{X}) = \dfrac{\lambda_1(f''(\mathbf{X}))}{\left| \min\limits_i \lambda_i(f''(\mathbf{X})) \right|}, \mathbf{X} \in Q,$ називається локальним ступенем яровості в точці $\mathbf{X}$. Для вироджених матриць $f''(\mathbf{X})$ величина $\eta(\mathbf{X})$ приймається рівною ∞.

Якщо матриця $f''(\mathbf{X})$ є додатно визначеною, то $\eta(\mathbf{X})$ дорівнює числу обумовленості $cond[f''(\mathbf{X})]$ даної матриці, тобто $\eta(\mathbf{X}) = \dfrac{\max\limits_i \lambda_i(f''(\mathbf{X}))}{\min\limits_i \lambda_i(f''(\mathbf{X}))}$. В загальному випадку $1 \le \eta(\mathbf{X}) \le cond[f''(\mathbf{X})]$. Тобто, із високого ступені яровості випливає погана обумовленість матриці других похідних, а протилежне твердження не завжди вірне.

Виникає питання: які значення $\eta(\mathbf{X})$ вважаються великими? В багатьох випадках все визначається точністю обчислень та типом використовуваного методу оптимізації. Традиційно прийнято класифікувати задачу як погано обумовлену, якщо:

$$\log_2 \eta > t,$$

де t - довжина розрядної сітки ЕОМ. Але і при менших значеннях η для цілого ряду алгоритмів можуть виникати значні обчислювальні ускладнення, особливо якщо яровість функції $f(\mathbf{X})$ доповнюється її не опуклістю.

19.3. Критерії яровості

Розглянемо практичні методи розпізнавання яровості функцій, які грають роль критеріїв яровості. При цьому найбільш суттєвою характеристикою є значення показника η.

Розглянемо метод градієнтного спуску із сталим кроком α:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \alpha \cdot f'(\mathbf{X}^{(k)}). \qquad (19.2)$$

Належність функції $f(\mathbf{X})$ до класу ярових в даному випадку проявляється в необхідності застосування відносно малих значень α. Спроба збільшити α призводить до втрати релаксаційності (монотонного спадання) послідовності $\{f(\mathbf{X}^{(k)})\}$, і значення $f(\mathbf{X}^{(k)})$ починають різко зростати.

Для оцінки η потрібно, для найбільшого із можливих значень α, заставити процес (19.2) протікати (працювати) без повної зупинки. Тоді процес (19.2) продовжується до тих пір, поки відношення

$\|f'(X^{k+1})\| / \|f'(X^{k})\|$ не стабілізується в околі деякого значення μ. Тоді справедлива рівність:

$$\eta \approx \frac{2}{|1-\mu|}. \qquad (19.3)$$

Тому на практиці рекомендують розпочинати процес оптимізації за допомогою методу спуску (19.2). Якщо задача проста і ступінь яровості невелика, то даний метод досить швидко приведе в малий окіл точки мінімуму. В протилежному випадку буде отримана оцінка η, що дозволить правильно оцінити ситуацію і вибрати найбільш раціональний алгоритм.

Інший прямий метод оцінки η зводиться до обчислення матриці Гессе функції $f(X)$ і розв'язання для неї повної задачі власних значень. Тоді, на основі безпосередньої перевірки першої умови означення яровості, робляться висновки про значення η. Головний недолік даного методу полягає в складності організації обчислювального процесу при визначенні малих власних значень.

Якісною ознакою поганої обумовленості задачі є суттєва відмінність в результатах оптимізації при спуску із різних початкових точок. При цьому отримані результуючі точки розміщені досить далеко одна від одної і не можуть інтерпретуватись, як наближення до одного розв'язку. Описана ситуація, як правило, означає наявність яру, а точки зупинки використовуваної пошукової процедури трактуються як елементи дна яру Q.

Контрольні запитання

1. В чому суть явища яровості цільової функції?
2. Чи є цільові функції задач безумовної оптимізації в методах внутрішніх та зовнішніх штрафних функцій яровими?
3. Дайте означення яровості.
4. Яку роль відіграють власні значення матриці других похідних цільової функції в означенні яровості?
5. Яка якісна ознака поганої обумовленості задачі оптимізації?
6. Які існують практичні методи розпізнавання яровості?
7. В чому полягає проблема застосування методів градієнтного спуску до ярових функцій?

ТЕМА 20. ГРАДІЄНТНІ МЕТОДИ В ПОГАНО ОБУМОВЛЕНИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ

20.1. Загальна схема градієнтних методів та функція релаксації

Розглянемо наступну задачу безумовної оптимізації:

$$f(\mathbf{X}) \to \min, \tag{20.1}$$

де $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $f(\mathbf{X}) \in C^2(R^n)$.

Розглянемо клас градієнтних методів вигляду:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - H_k(G_k, \alpha_k) f'(\mathbf{X}^{(k)}), \tag{20.2}$$

де $G_k = f''(\mathbf{X}^{(k)})$ - симетрична, не обов'язково додатньо визначена матриця; $\alpha_k \in R$ - деякий числовий параметр, як правило крок в напрямку спуску; H_k - матрична функція від G_k та α_k.

Припустимо, що в деякому δ_k-околі $\{\mathbf{X} \in R^n : \|\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k)}\| \le \delta_k\}$ в точці $\mathbf{X}^{(k)}$ функція $f(\mathbf{X})$ достатньо точно апроксимується параболоїдом:

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(G_k \mathbf{X}, \mathbf{X}) + (b_k, \mathbf{X}) + c_k. \tag{20.3}$$

Потрібно побудувати такі матричні функції H_k, щоб виконувались умови релаксаційності процесу $f(\mathbf{X}^{(k+1)}) < f(\mathbf{X}^{(k)})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, і щоб при цьому величина норми $\|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\|$ обмежувалась зверху лише параметром δ_k, який характеризує область справедливості локальної квадратичної моделі (20.3). При високому ступені яровості $\eta(\mathbf{X}^{(k)})$ для більшості класичних схем пошуку маємо $\|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\| \ll \delta_k$, що в результаті приводить до повільної збіжності.

Скалярна функція $R_\alpha(\lambda) = 1 - H(\lambda, \alpha)\lambda$, де $\lambda, \alpha \in R^1$, називається функцією релаксації методу (20.2), а її значення $R_\alpha(\lambda_i)$ на спектрі матриці G_k - множниками релаксації для точки $\mathbf{X}^{(k)}$.

В даному означенні $H(\lambda,\alpha)$ означає скалярну залежність, яка відповідає матричній функції $H(G,\alpha)$ в (20.2). Справедлива

Теорема 20.1. Для виконання умови $f\left(\mathbf{X}^{(k+1)}\right) \le f\left(\mathbf{X}^{(k)}\right)$, $\forall \mathbf{X}^{(k)} \in R^n$ необхідно і достатньо, щоб:

$$\left|R_\alpha(\lambda_i)\right| \ge 1 \text{ при } \lambda_i < 0; \ \left|R_\alpha(\lambda_i)\right| \le 1 \text{ при } \lambda_i > 0 \quad (20.4)$$

для всіх власних чисел λ_i, $i = \overline{1,n}$, матриці G_k.

20.2. Метод градієнтного спуску

Формула методу градієнтного спуску має вигляд:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \alpha_k \cdot f'\left(\mathbf{X}^{(k)}\right), \alpha_k \in R. \quad (20.5)$$

Відповідна функція релаксації лінійна $R_\alpha(\lambda) = 1 - \lambda\alpha_k$. Якщо $\lambda_i < 0$, то враховуючи, що $\alpha_k \ge 0$ перша з умов (20.4) буде виконуватись завжди.

Припустимо, що власні значення матриці G_k розміщені в інтервалі $[m; M]$, де $M >> m > 0$, так що $\eta = \dfrac{M}{m} >> 1$. Тоді при $\lambda_i > 0$ маємо вимогу $\left|1 - \lambda_i\alpha_k\right| \le 1,\ i = \overline{1,n}.$ Дана умова буде виконуватися, якщо $\alpha_k \le \dfrac{2}{M}$. Отже, при дуже великих M крок в напрямку спуску може виявитись занадто малим і рух до точки мінімуму буде дуже сповільнений.

20.3. Метод Ньютона

Як відомо, схема методу Ньютона

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \alpha_k G_k^{-1} \cdot f'\left(\mathbf{X}^{(k)}\right).$$

Тут

$$H_k(G_k,\alpha_k) \text{ і } H(\lambda,\alpha_k) = \frac{\alpha_k}{\lambda}.$$

Тоді функція релаксаційна набуває вигляду:

$$R_\alpha(\lambda) = 1 - H(\lambda,\alpha_k)\lambda = 1 - \frac{\alpha_k}{\lambda} \cdot \lambda = 1 - \alpha_k.$$

Отже, якщо $\alpha_k > 0$ то $R_\alpha(\lambda) < 1$. Отже, метод Ньютона застосовний лише у випадку опуклих функцій, тобто коли всі власні значення матриці других похідних додатні.

20.4. Метод Левенберга

Якщо відомо, що власні значення матриці G_k розміщені в інтервалі $[m; M]$, де $M \gg m > 0$, то Левенбергом запропонований метод, який має нелінійну функцію релаксації $R_\alpha(\lambda) = \dfrac{\alpha}{\alpha + \lambda}$, $\alpha > 0$. Дана функція задовольняє вимогам (20.4) при будь-якому $\lambda \in [m; M]$, при умові, що $\alpha > m$. Відповідний метод називається методом Левенберга або регуляризованим методом Ньютона. В даному методі $H_k(\lambda, \alpha_k) = \dfrac{1 - R_\alpha(\lambda)}{\lambda} = (\alpha_k + \lambda)^{-1}$ і згідно (20.2) маємо наступну схему:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - (\alpha_k E + G_k)^{-1} \cdot f'(\mathbf{X}^{(k)}). \qquad (20.6)$$

Крок α_k на кожній ітерації вибирається так, щоб матриця $(\alpha_k E + G_k)$ була додатно визначена, і щоб $\left\| \mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)} \right\| \le \delta_k$. Реалізація методу (20.6) зводиться до розв’язання на кожній ітерації СЛАР:

$$(\alpha_k E + G_k) \cdot (\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}) = -f'(\mathbf{X}^{(k)}).$$

Основний недолік методу полягає в необхідності досить точного задання кроку α_k. При невиконанні умови $\alpha_k > m$ вищеописана СЛАР може виявитися виродженою. У випадку $\alpha_k \gg m$ метод стає повільно збіжним, а при $\alpha_k < -m$ - розбіжним.

20.5. Метод з експоненціальною релаксацією

Умови (20.4) при будь-яких значеннях параметра α виконуються для функції:

$$R_\alpha(\lambda) = e^{-\alpha\lambda}, \alpha > 0. \qquad (20.7)$$

Функція (20.7) узагальнює функції релаксації раніше розглянутих методів. Дійсно, використовуючи розклад в ряд Тейлора:

$$e^{-\alpha\lambda} = \frac{1}{e^{\alpha\lambda}} \approx \frac{1}{1+\alpha\lambda} = \frac{\alpha'}{\alpha'+\lambda},$$

де $\alpha' = \dfrac{1}{\alpha}$ маємо функцію релаксації для методу Левенберга. Якщо використати розклад $e^{-\alpha\lambda} \approx (1-\alpha\lambda)$ – маємо функцію релаксації для методу градієнтного спуску.

За означенням маємо:

$$\lambda \cdot H_k(\lambda,\alpha_k) = 1 - R_\alpha(\lambda) = 1 - e^{-\alpha\lambda}.$$

Вимагаючи $\lambda \neq 0$, отримуємо:

$$H_k(\lambda,\alpha_k) = \frac{1-e^{-\alpha\lambda}}{\lambda} = \int_0^{\alpha_k} e^{-\lambda\tau} d\tau.$$

Довизначаючи $H_k(0,\alpha_k)$ з умов неперервності, отримаємо $H_k(0,\alpha_k) = \alpha_k$. В результаті маємо схему методу з експоненціальною релаксацією (EXP-метод):

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - H_k(G_k,\alpha_k) \cdot f'(\mathbf{X}^{(k)}),$$

$$H_k(G_k,\alpha_k) = \int_0^{\alpha_k} e^{-G_k\tau} d\tau.$$

Параметр α_k можна вибрати, як і в методі найшвидшого спуску.

Контрольні запитання

1. Дайте означення функції релаксації градієнтного методу.
2. Які умови накладаються на функцію релаксації для забезпечення збіжності методу градієнтного спуску?
3. Яка умова накладається на крок в методі градієнтного спуску для забезпечення його збіжності?
4. При яких цільових функціях метод Ньютона є збіжним?
5. Яка функція релаксації використовується в методі Левенберга?
6. Яка функція узагальнює функції релаксації методу градієнтвоного спуску та методу Левенберга?
7. Запишіть схему методу з експоненціальною релаксацією.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ашманов С. А.* Линейное программирование. – Москва: Наука, 1981. – 340с.
2. *Барвінський А. Ф., Олексів І. Я., Крупка З. І.* Математичне програмування. – Львів: Нац. ун-т «Львівська політехніка», 2004. – 448с.
3. *Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н.* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – Киев: Высш. школа, 1983. – 512с.
4. *Бех О. В., Городня Т. А., Щербак А. Ф.* Збірник задач з математичного програмування. – Львів: «Магнолія 2006», 2007. – 212с.
5. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. – Москва: Наука, 1980. – 518с.
6. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. – Москва: Наука, 1981. – 400с.
7. *Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. – Москва: Наука, 1969. – 384с.
8. *Дегтярев Ю. И.* Исследование операций. – Москва: Высш. школа, 1986. – 320с.
9. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. – Москва: Наука, 1981. – 384с.
10. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – Москва: Наука, 1982. – 432с.
11. *Еремин И. И., Астафьев Н. Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. – Москва: Наука, 1976. – 192с.
12. *Заславский Ю. Л.* Сборник задач по линейному программированию. – Москва: Наука, 1969. – 256с.
13. *Измаилов А. Ф., Солодов М. В.* Численные методы оптимизации. – Москва: Физматлит, 2005. – 304с.

14. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. – Москва: Наука, 1974. – 480с.

15. *Івченко І. Ю.* Математичне програмування. – Київ: Центр учбової літератури, 2007. – 232с.

16. *Катренко А. В*. Дослідження операцій. – Львів: Магнолія Плюс, 2004. – 549с.

17. *Михалевич В. С., Гупал А. М., Норкин В. И.* Методы невыпуклой оптимизации. – Москва: Наука, 1987. – 208с.

18. *Пантелеев А. В*., *Летова Т. А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. – Москва: Высш. школа, 2002. – 544с.

19. *Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М.* Численные методы в экстремальных задачах. – Москва: Наука, 1975. – 320с.

20. *Романовский И. В.* Алгоритмы решения экстремальных задач. – Москва: Наука, 1977. – 352с.

21. *Сухарев А. Г., Тимохов В. А., Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. – Москва: Физматлит, 2005. – 368с.

22. *Таха Х. А.* Введение в исследование операций. – Москва: Вильямс, 2005. – 912с.

23. *Фиакко А., Мак-Кормик Г.* Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. – Москва: Мир, 1972. – 240с.

24. *Цегелик Г. Г.* Лінійне програмування. – Львів: Світ, 1995. – 216 с.

25. *Черноруцкий И. Г.* Методы оптимизации в теории управления. – Спб: Питер, 2004. – 256с.

26. *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1979. – 200с.

27. *Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.* Линейное программирование (теория, методы и приложения). – Москва: Наука, 1969. – 424с.

Навчальне видання

Мартинюк Петро Миколайович
Мічута Ольга Романівна

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Навчальний посібник

Друкується в авторській редакції

Підписано до друку ??.??.2011. Формат 60×84 1/16.
Папір друкарський №1. Гарнітура Times. Друк різографічний.
Ум.-друк. арк. ??. Обл.-вид. фрк. ??.
Тираж 150 прим. Зам №.???.

Редакційно-видавничий центр
Національного університету водного господарства та природокористування
33028, Рівне, вул. Соборна, 11.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
РВ №31 від 26.04.2005 р.