Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки
Кафедра комп'ютерних технологій та економічної кібернетики

04-05-51М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних і самостійних робіт з навчальної дисципліни
«Математична логіка та теорія алгоритмів»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Цифрові технології дистанційної освіти» спеціальності 015.39 «Професійна освіта (цифрові технології)» денної та заочної форм навчання

Рекомендовано науково-методичною радою
з якості ННІАКОТ
Протокол №10 від 30.09.2021 р.

Рівне – 2021

Методичні вказівки до виконання практичних і самостійних робіт з навчальної дисципліни «Математична логіка та теорія алгоритмів» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Цифрові технології дистанційної освіти» спеціальності 015.39 «Професійна освіта (цифрові технології)» денної та заочної форм навчання [Електронне видання] / Карпович І. М., Гладка О. М., Шевченко І. М. – Рівне : НУВГП, 2021. – 28 с.

Укладачі:
Карпович І. М., к.ф.-м.н., доцент кафедри комп’ютерних технологій та економічної кібернетики;
Гладка О. М., к.т.н., доцент кафедри комп’ютерних технологій та економічної кібернетики;
Шевченко І. М., старший викладач кафедри комп’ютерних технологій та економічної кібернетики.

Відповідальний за випуск:
Грицюк П. М., д.е.н., професор, завідувач кафедри комп’ютерних технологій та економічної кібернетики.

Керівник групи забезпечення спеціальності:
Рощенюк А. М., к.п.н., доцент кафедри комп’ютерних наук та прикладної математики.

ЗМІСТ

Вступ

Методичні вказівки щодо виконання практичних робіт розроблені на основі силабусу з навчальної дисципліни «Математична логіка та теорія алгоритмів» для спеціальності «Професійна освіта (цифрові технології)».

Математична логіка є необхідним елементом кожної формальної дисципліни і складається з правил отримання обґрунтованого висновку. Апарат математичної логіки знайшов широке застосування в техніці, зокрема, в релейно-контактних схемах, які широко використовуються в електронній обчислювальній техніці і в техніці автоматизованого управління. З розвитком комп'ютерних технологій стала актуальною теорія алгоритмів як наука на межі математики та інформатики.

Серед головних причин активного поширення математичної логіки – застосування аксіоматичного методу в побудові різних математичних теорій. Важливим досягненням математичної логіки є формулювання поняття алгоритмічної обчислюваності, яке за своєю важливістю наближається до поняття натурального числа.

Сьогодні результати математичної логіки та теорії алгоритмів знаходять своє застосування в інших галузях математичного знання, а також у програмуванні, розробці проблем штучного інтелекту та інших науках. Проаналізовані в даному виданні властивості алгоритмів і розглянуті приклади дозволять студентам і всім зацікавленим особам оволодіти теоретичними знаннями і набути навичок у вирішенні прикладних задач.

Методичні вказівки містять лише основні теоретичні відомості, необхідні для виконання практичних робіт. Перед виконанням практичних завдань та під час підготовки до їх захисту студентові необхідно ознайомитись з конспектом лекцій та опрацювати необхідний матеріал, наведений у переліку рекомендованої літератури, використовуючи електронні джерела та актуальні наукові публікації з комп'ютерних технологій у періодичних виданнях.

Практична робота № 1

Тема: Арифметичні основи інформаційних систем

Мета роботи

Формування у студентів компетентностей щодо використання позиційних систем числення для підготовки і опрацювання даних та обміну інформацією у системі комп’ютер-користувач.

Основні відомості

В процесі опрацювання інформації сучасні комп'ютери оперують числами, які подані в деякій системі числення.

Система числення – це сукупність прийомів і правил для запису чисел цифровими знаками.

Позиційна система числення – це система, в якій значення цифри залежить від її числового еквівалента і від позиції, яку вона займає в числі. Ці позиції називають розрядами числа в даній позиційній системі числення. Найпоширенішою позиційною системою числення є *десяткова система числення.*

Двійкова система числення є наймолодшою з існуючих. Ця система має низку якостей, зручних для використання в комп'ютерах (цифрових автоматах). Будь-яка позиційна система числення характеризується *основою*.

У позиційній системі числення справджується рівність:

$$A_q = a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \ldots + a_0q^0 + a_{-1}q^{-1} + \ldots + a_{-m}q^{-m}$$

де A_q – довільне число, записане в системі числення з основою q; a_i – коефіцієнти ряду, тобто цифри системи числення; n, m – кількість цілих і дробових розрядів відповідно.

Завдання

1. Записати у вигляді многочлена числа, задані у цифровій формі:

а) 5607_8; б) 21021_3; в) 1000_2; г) $9F0A1_{16}$.

2. Записати у цифровій формі числа, подані у формі многочлена:

а) $3*4^5+4^2+3*4+2$, q=4; б) $7*9^5+3*9^1+1$, q=9.

3. Перевірити, чи правильні наступні рівності:

а) $12_3=101_2$; б) $57_8=142_5$; в) $132_7=66_{11}$.

4. Записати по два попередніх і по два наступних числа до заданих чисел: а) 222_3; б) 1000_5.

5. Знайти x і y: а) $23_x=32_y$ б) $51_x=15_y$.

6. Знайти основу системи числення з умов:

а) $103_x=19_{10}$; б) $1971_{10}=A0B_x$.

7. Дано число 2563_8. В цьому числі викреслили цифру 5 і замість неї записали цифру 0. Чи правда, що нове число на 320 десяткових одиниць менше від даного? Обґрунтуйте відповідь.

8. Довести, що число 144_q є повним квадратом. При якому q справедливе це твердження?

9. Обчислити і перевірити результат у десятковій системі числення:

а) 10011_2+1011_2; б) 101_2*11_2; в) 111_2*101_2;

г) $0{,}101111_2+0{,}011011_2$.

10. Перевести числа із системи числення з основою q у десяткову:

1. 1110001_2; 1100111_2; 451_8; 611_8; $7BA_{16}$; $5BF_{16}$;
2. 10101011_2; 10101111_2; 764_8; 516_8; $9AF4_{16}$; $AB4_{16}$;
3. 1100010_2; 1011001_2; 526_8; 677_8; $AD46_{16}$; $BA9_{16}$;
4. 1011111_2; 100001_2; 453_8; 356_8; $57FD_{16}$; $54CA_{16}$;
5. 1001110_2; 1000111_2; 376_8; 571_8; $7CAD_{16}$; $8D34_{16}$;
6. 11000011_2; 1111001_2; 554_8; 627_8; $346F_{16}$; $CD56_{16}$;
7. 110000101_2; 1011101_2; 642_8; 254_8; $345D_{16}$; 287_{16};
8. 111001010_2; 101010111_2; 452_8; 732_8; DAC_{16}; CEA_{16};
9. 10111100_2; 1000000_2; 265_8; 425_8; $98CB_{16}$; $DA32_{16}$;
10. 11011111_2; 101100101_2; 617_8; 516_8; $ACDB_{16}$; $DF72_{16}$;
11. 10101010_2; 1001101_2; 456_8; 607_8; $325D_{16}$; $72AE_{16}$;
12. 111010101_2; 1010011_2; 362_8; 427_8; $76FD_{16}$; $F72C_{16}$;
13. 10001110_2; 11000110_2; 264_8; 645_8; $986A_{16}$; $F29B_{16}$;
14. 11100011_2; 10001111_2; 153_8; 751_8; 8752_{16}; $DE77_{16}$.

Контрольні запитання

1. Поняття інформації, повідомлення.
2. Типи сигналів, що використовуються в комп’ютерах.
3. Означення системи числення.
4. Які є типи систем числення?
5. Що таке основа позиційної системи числення?
6. У чому полягає проблема вибору системи числення для подання чисел у пам'яті комп'ютера?
7. Переваги двійкової системи числення.
8. Як переводяться числа з десяткової системи в іншу систему числення?
9. За яким правилом переводяться числа в десяткову систему числення?

Практична робота № 2

Тема: Використання систем числення

Мета роботи

Формування у студентів компетентностей щодо використання систем числення для обробки інформації і обміну даними між комп’ютером і користувачем.

Основні відомості

Опрацювання інформації в комп'ютері зазвичай здійснюється у двійковій системі числення. Разом з тим, під час обміну інформацією між комп'ютером і користувачем для більшої наочності подання даних використовуються десяткова, двійково-десяткова, вісімкова або шістнадцяткова системи. Кожен розряд числа у вісімковому і шістнадцятковому коді еквівалентний трьом і чотирьом двійковим розрядам відповідно. Тому подання чисел у цих системах числення виходить компактним і наочним.

- Для переведення числа з вісімкової системи числення у двійкову досить кожну цифру вісімкового числа замінити відповідним 3-розрядним двійковим кодом.

- Переведення шістнадцяткового числа у двійкову систему числення досягається заміною цифр шістнадцяткового подання 4-розрядними двійковими числами.
- Для переведення числа із двійкової у вісімкову (або шістнадцяткову) систему числення необхідно цифри двійкового числа, відраховуючи від коми ліворуч і праворуч, розбити на групи по три (або чотири) розряди. Неповні крайні групи доповнюються до повних нулями. Потім кожна двійкова група подається цифрою тої системи числення, у яку переводиться число.

Завдання

1. Перевести десяткові числа у систему числення з основою q=2; 4; 8; 16. Виконати перевірку.

1. 1451; 54,21; 451;	8. 3461; 77,6; 6894;
2. 5761; 12,3; 191;	9. 7532; 26,5; 836;
3. 436; 14,2; 1893;	10. 1247; 36,3; 961;
4. 5754; 14,3; 673;	11. 8433; 21,45; 899;
5. 432; 17,4; 1856;	12. 7632; 32,4; 987;
6. 9560; 13,4; 583;	13. 3568; 35,2; 814;
7. 5684; 22,5; 972;	14. 4673; 33,7; 865.

2. Записати в системі з основою q=4, 8, 16 двійкові числа:

1) 111001111000110_2; 2) 1111001011101100_2;
3) 11100111010110_2; 4) 1000110101110_2.

3. Записати десяткові числа в нормалізованому вигляді:

1) $3426{,}5_{10}$; 2) $-0{,}004589_{10}$; 3) $-34{,}678*10^{-5}$;
4) $235{,}67*10^4$; 5) $0{,}34265*10^4$ 6) $-0{,}4589*10^{-2}$

Контрольні запитання

1. Переваги двійкової системи числення.
2. Як переводяться числа з вісімкової системи числення в двійкову?
3. За яким правилом переводяться числа з шістнадцяткової системи числення в двійкову?

4. Переведення чисел з двійкової системи числення у вісімкову і шістнадцяткову.
5. Форми подання чисел. Нормалізований вигляд числа.

Практична робота № 3

Тема: Використання прямого, оберненого і додаткового двійкових кодів

Мета роботи

Формування у студентів компетентностей щодо застосування двійкових кодів для оптимізації комп'ютерних операцій з даними.

Основні відомості

Запис числа в деякій системі числення часто називають кодом числа. Двійковому числу відповідає декілька видів кодів.

Прямий, обернений і додатковий код двійкового числа

Прямий, обернений і додатковий код двійкового числа – способи подання двійкових чисел з фіксованою комою в комп'ютерній (мікроконтролерній) арифметиці, призначені для запису від'ємних і додатних чисел.

Прямий, обернений чи додатковий двійкові коди *додатного числа* мають ***однаковий вигляд.***

Прямий код

Прямий код – спосіб подання двійкових чисел з фіксованою комою. Найчастіше він використовується для запису невід'ємних чисел. Прямий код використовується в двох варіантах. *В першому* (основному) – для запису лише невід'ємних чисел (див. таблицю нижче).

Десяткове число	Двійкове число в прямому коді (у 8-бітному поданні)
0	0000 0000
10	0000 1010
100	0110 0100
255	1111 1111

Другий варіант – для запису як додатних, так і від'ємних чисел. Тут старший біт (восьмий) вважається знаковим розрядом (знаковим бітом). При цьому, якщо:
- знаковий розряд дорівнює 0, то число додатне;
- знаковий розряд дорівнює 1, то число від'ємне.

Розряди 8-бітного двійкового числа							
7	6	5	4	3	2	1	0
Знаковий розряд	Значення числа						

В цьому випадку діапазон десяткових чисел, які можна записати в прямому коді, становить від - 127 до +127:

Десяткове число	Двійкове число в прямому коді (у 8-бітному поданні)
127	0111 1111
100	0110 0100
0	0000 0000
- 0	1000 0000
- 100	1110 0100
- 127	1111 1111

Обернений код

Обернений(зворотний) код – метод, який дозволяє відняти одне число від іншого, використовуючи лише операцію додавання.

Обернений двійковий код *додатного* числа складається з однорозрядного коду знака (бітового знака) – двійкової цифри 0, за яким слідує значення числа. Обернений двійковий код *від'ємного* числа складається з однорозрядного коду знака (бітового знака) – двійкової цифри 1, за яким слідує інвертоване значення додатного числа.

Для від'ємних чисел зворотний код отримуємо з невід'ємного числа в прямому коді, шляхом інвертування всіх бітів (1 міняємо на 0, а 0 міняємо на 1).

Для перетворення від'ємного числа, записаного в зворотному коді, в додатне – достатньо його проінвертувати.

Додатне десяткове число	Обернений код двійкового числа	Від’ємне десяткове число	Обернений код двійкового числа
0	0000 0000	- 0	1111 1111
10	0000 1010	- 10	1111 0101
100	0110 0100	- 100	1001 1011
127	0111 1111	- 127	1000 0000

Додавання чисел на двійковому суматорі зворотного коду

Двійковий суматор зворотного коду (ДСЗК) – суматор, що оперує зображеннями чисел у зворотному (оберненому) коді. Характерна особливість ДСДК – наявність ланцюга циклічного перенесення із знакового розряду в молодший розряд цифрової частини. Правило додавання чисел на ДСЗК таке: *сума зворотних кодів чисел є зворотний код результату*.

Приклад 1. Додати числа $A = 0{,}0101$ та $B = 0{,}0111$ на ДСЗК.

$$\begin{array}{r} [A]_{зв} = 0{,}0101 \\ + \\ [B]_{зв} = 0{,}0111 \\ \hline [C]_{зв} = 0{,}1100 \end{array}$$

Приклад 2. Додати числа $A = -0{,}0101$ та $B = 0{,}0111$ на ДСЗК.

$$\begin{array}{r} [A]_{зв} = 1{,}1010 \\ + \\ [B]_{зв} = 0{,}0111 \\ \hline 0{,}0001 \\ + \\ 1 \\ \hline [C]_{зв} = 0{,}0010 \end{array}$$

Приклад 3. Додати числа $A = 0{,}0101$ та $B = -0{,}0111$ на ДСЗК.

$$\begin{array}{r} [A]_{зв} = 0{,}0101 \\ + \\ [B]_{зв} = 1{,}1000 \\ \hline [C]_{зв} = 1{,}1101 \end{array}$$

Приклад 4. Додати числа $A = -0{,}0101$ та $B = -0{,}1000$ на ДСЗК.

$$\begin{array}{r} [A]_{зв} = 1{,}1010 \\ + \\ [B]_{зв} = 1{,}0111 \\ \hline 1{,}0001 \\ + \\ 1 \\ \hline [C]_{зв} = 1{,}0010 \end{array}$$

Додатковий код

Додатковий код – найпоширеніший спосіб подання від'ємних чисел. Він дозволяє замінити операцію віднімання операцією додавання і зробити операції додавання і віднімання однаковими для знакових і беззнакових чисел.

В додатковому коді (як і в прямому і оберненому) старший розряд відведений для знака числа (знаковий біт).

Додатковий код від'ємного числа можна отримати так:

- інвертуємо значення від'ємного числа, записаного в прямому коді (знаковий біт не змінюємо);

- до отриманої інверсії додаємо 1.

Приклад.

Дано десяткове число -10. Запишемо його прямий код:

10 = <u>0</u>000 1010 ----> -10 = <u>1</u>000 1010.

Інвертуємо значення (отримаємо обернений код):

1000 1010 ----> 1111 0101.

До отриманої інверсії додаємо 1:

1111 0101 + 1=1111 0110 – маємо додатковий код десяткового числа -10.

Отримання додаткового коду від'ємного числа

Двій-кове число	Прямий код двій-кового числа	Обернений код (інвер-товане значення)	Додаємо до обер-неного коду 1	Додатковий код двійкового числа
10	0000 1010			0000 1010
0	0000 0000			0000 0000
- 0	1000 0000	-----	-----	-----
- 5	1000 0101	1111 1010	+1	1111 1011
- 10	1000 1010	1111 0101	+1	1111 0110
- 127	1111 1111	1000 0000	+1	1000 0001
- 128	-----			1000 0000

Додавання чисел на двійковому суматорі додаткового коду

Двійковий суматор додаткового коду (ДСДК) – суматор, що оперує зображеннями чисел в додатковому коді. Характерна риса ДСДК – наявність ланцюга порозрядного перенесення із старшого розряду цифрової частини в знаковий розряд. Правило додавання чисел на ДСДК таке: *сума додаткових кодів чисел є додатковий код результату*. Правило справедливе для всіх випадків, в яких не виникає переповнення розрядної сітки, що дозволяє додавати автоматні зображення чисел за правилами двійкової арифметики, не розділюючи знакову та цифрову частину зображення.

Приклад 1. Додати числа $A = 0{,}1010$ та $B = 0{,}0100$ на ДСДК.

$$\begin{array}{l} [A]_{\partial} = 0{,}1010 \\ \quad + \\ [B]_{\partial} = 0{,}0100 \\ \hline [C]_{\partial} = 0{,}1110 \end{array}$$

Приклад 2. Додати числа $A = -0{,}1011$ та $B = 0{,}0100$ на ДСДК.

$$\begin{array}{l} [A]_{\partial} = 1{,}0101 \\ \quad + \\ [B]_{\partial} = 0{,}0100 \\ \hline [C]_{\partial} = 1{,}1001 \end{array}$$

Приклад 3. Додати числа $A = 0{,}1011$ та $B = -0{,}0100$ на ДСДК.

$$\begin{array}{l} [A]_{\partial} = 0{,}1011 \\ \quad + \\ [B]_{\partial} = \ 1{,}1100 \\ \hline [C]_{\partial} = 0{,}0111 \end{array}$$

Таким чином:

1. Для арифметичних операцій додавання і віднімання додатних двійкових чисел найкраще підходить використання прямого коду.
2. Для арифметичних операцій додавання і віднімання від'ємних двійкових чисел найкраще підходить використання додаткового коду.

Завдання.

1. Дано двійкові числа A= -0,101011$_2$, B=0,101011$_2$. Для кожного з цих чисел утворити спочатку прямий код, потім обернений і додатковий.
2. Виконати операцію N-7 (де N – номер варіанту студента), записавши числа у вигляді двійкових чисел в оберненому коді. Результат перевірити в десятковій системі числення.
3. Виконати операцію 5-N (де N – номер варіанту студента), записавши числа у вигляді двійкових чисел в додатковому коді. Результат перевірити в десятковій системі числення.

Контрольні запитання

1. Що являє собою числовий код?
2. Прямий, обернений і додатковий коди двійкового числа.
3. Правило додавання чисел на двійковому суматорі зворотного коду (ДСЗК).
4. Правило додавання чисел на двійковому суматорі додаткового коду (ДСДК).

Практична робота № 4

Тема: Спрощення формул логіки з допомогою рівносильних перетворень

Мета роботи

Формування у студентів компетентностей щодо оптимізації і спрощення формул логіки та подання формул логіки у вигляді ДНФ і КНФ з використанням основних рівносильностей і тавтологій.

Основні відомості

До початку виконання практичної работи необхідно повторити наступні поняття:

- рівносильні формули;
- основні рівносильності і основні тавтології алгебри висловлень;
- елементарні диз'юнкції і кон'юнкції;
- диз'юнктивна і кон'юнктивна нормальні форми

Основні рівносильності алгебри висловлень

1. $\neg\neg A \equiv A$
2. $A \vee \neg A \equiv 1$
3. $A \wedge \neg A \equiv 0$
4. $A \vee A \equiv A$
5. $A \wedge A \equiv A$
6. $A \vee 0 \equiv A$
7. $A \vee 1 \equiv 1$
8. $A \wedge 0 \equiv 0$
9. $A \wedge 1 \equiv A$
10. $A \wedge (B \vee A) \equiv A$
11. $A \vee (B \wedge A) \equiv A$
12. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
13. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
14. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
15. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

16. $\neg(A\vee B)\equiv\neg A\wedge\neg B$

17. $\neg(A\wedge B)\equiv\neg A\vee\neg B$

18. $A\to B\equiv\neg A\vee B$

19. $A\leftrightarrow B\equiv(A\to B)\wedge(B\to A)$

Приклад 1. З допомогою рівносильних перетворень спростити висловлення:

$$(((A\wedge(\neg C))\to(B\vee D))\vee((A\to(D\vee C))\to(\neg B)))$$

Розв'язування.

$((A\wedge(\neg C))\to(B\vee D))\vee((A\to(D\vee C))\to(\neg B))\equiv(\neg((A\wedge(\neg C))\vee(B\vee D))\vee$

$\vee((\neg A\vee(D\vee C))\to(\neg B))\equiv((\neg A\vee C)\vee(B\vee D))\vee(\neg(\neg A\vee(D\vee C)))\vee(\neg B))\equiv$

$\equiv(\neg A\vee C\vee B\vee D)\vee(A\wedge(\neg(D\vee C))\vee(\neg B))\equiv(\neg A\vee C\vee B\vee D)\vee(A\wedge(\neg D\wedge$

$\wedge(\neg C))\vee(\neg B))\equiv(\neg A\vee C\vee B\vee D)\vee(A\wedge(\neg D)\wedge(\neg C))\vee(\neg B))\equiv$

$\equiv(\neg A\vee C\vee B\vee D)\vee(A\wedge(\neg D)\wedge(\neg C)\vee(\neg B))$

Приклад 2. Рівносильними перетвореннями зведіть формулу $F(X,Y,Z)=X\wedge(\neg(Y\wedge Z))\vee X\vee Y$ до ДНФ.

Розв'язування.

1) $X\wedge(\neg(Y\wedge Z))\vee X\vee Y\equiv X\wedge(\neg Y\vee(\neg Z)))\vee X\vee Y$

2) $X\wedge(\neg Y\vee(\neg Z)))\vee X\vee Y\equiv(X\wedge(\neg Y))\vee(X\wedge(\neg Z))\vee X\vee Y$ - ДНФ

Завдання

Завдання 1. Спростити формули:

Варіант 1.

1) $F(A_1,A_2,A_3)=(A_1\to A_2)\wedge(A_2\to A_3)\to(A_3\to A_1)$

2) $F(P,Q,R)=(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)$

3) $F(P,Q,R,S,T)=\neg((P\vee Q)\wedge R)\wedge\neg((S\vee R)\wedge\neg(P\vee Q\vee R)\wedge T\wedge\neg T)$

Варіант 2.

1) $F(A_1,A_2,A_3)=(A_1\wedge A_3)\vee(A_1\to\neg A_3)\vee(A_2\wedge A_3)\vee(\neg A_1\wedge A_2\wedge A_3)$

2) $F(P,Q,R,S)=Q\vee(P\vee\neg P)\vee(P\vee\neg R)\vee S$

3) $F(P,Q,R)=\neg(P\to\neg(Q\wedge P))\to(P\vee R)$

Варіант 3.

1) $F(S,T,M) = S \vee (T \wedge S \wedge M)$

2) $F(P,Q) = (P \to Q) \vee (P \to (Q \wedge P))$

3) $F(Q,R,T) = R \vee \neg(Q \to (Q \vee T))$

Варіант 4.

1) $F(A_1, A_2) = \neg(A_1 \to A_2) \vee (A_2 \to \neg A_1)$

2) $F(P,Q) = Q \wedge (P \vee Q) \wedge P$

3) $F(P,Q) = P \wedge (Q \vee \neg P) \wedge ((\neg Q \to P) \vee Q)$

Завдання 2. Використовуючи основні еквівалентності алгебри висловлень, перевірити наступні рівносильності:

1)
$$\left(B \wedge D \vee A \wedge \overline{D} \vee A \wedge \overline{B} \wedge D\right) \wedge \left(A \vee \overline{A} \wedge \overline{D} \vee B \wedge D\right) = A \vee B \wedge D$$

2) $\left(B \wedge C \vee \overline{A \wedge B \wedge C} \vee \overline{A} \wedge C\right) \wedge \left(A \wedge B \vee \overline{C} \vee A \wedge C\right) = A \wedge C \vee \overline{C}$

Завдання 3. Записати формули в ДНФ:

Варіант 1.

1) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

2) $\neg(A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg A$

Варіант 2.

1) $((A \to B) \wedge C) \vee \neg A \wedge B$

2) $\neg(A \vee \neg B) \wedge \neg(A \wedge B)$

Варіант 3.

1) $A \wedge B \to (\neg B \wedge B \to C)$

2) $(A \wedge \neg B) \wedge \neg(A \vee B)$

Варіант 4.

1) $(A \wedge (A \vee B)) \wedge (\neg B \to A)$

2) $\neg((A \wedge B) \vee C)$

Завдання 4. Записати формули у зведеному вигляді (який містить лише операції $\neg$, $\wedge$, $\vee$ із змінними):

Варіант 1.

1) $\neg(\neg(A \wedge B) \wedge \neg(C \wedge D)) \wedge C$

2) $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge B$

Варіант 2.

1) $\neg(\neg(A \wedge B) \to \neg C)$

2) $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge D$

Варіант 3.

1) $\neg((A \wedge \neg B) \wedge \neg(C \wedge D))$

2) $(A \wedge B \wedge C) \to (\neg A \vee B) \to B \wedge \neg C$

Варіант 4.

1) $\neg(\neg(A \wedge B) \wedge \neg(C \wedge D))$

2) $\neg(A \to B) \vee (C \vee D)$

Завдання 5. Рівносильнимими перетвореннями звести формулу до ДНФ і КНФ:

Варіант 1. $F(X,Y,Z) = X \vee (\neg(X \wedge Z)) \wedge (X \vee Y)$

Варіант 2. $F(X,Y,Z) = X \vee Y \vee X \wedge Z \vee (\neg X \wedge Y)$

Варіант 3. $F(X,Y,Z) = X \wedge Y \vee (\neg(X \wedge Y \vee (\neg X))) \wedge Z \vee X$

Варіант 4. $F(X,Y,Z) = (X \vee Z) \wedge (\neg(X \wedge Y)) \vee X$

Контрольні запитання

1. Основні положення алгебри логіки.
2. Основні логічні операції.
3. Основні закони формальної логіки.
4. Аксіоми алгебри логіки.
5. Основні тотожності алгебри логіки.
6. Функції однієї змінної.
7. Функції двох змінних.
8. Елементарні функції алгебри логіки.
9. Поняття терму. Диз'юнктивний і кон'юнктивний терми. Ранг терму.
10. Диз'юнктивна і кон'юнктивна нормальні форми.

Практична робота № 5

Тема: Подання булевої функції у вигляді ДДНФ і ДКНФ

Мета роботи

Формування у студентів компетентностей щодо перевірки булевих функцій на еквівалентність, зведення булевих функцій до ДКНФ і ДДНФ.

Основні відомості

До початку виконання практичної роботи необхідно повторити такі поняття:

- логічні функції: тотожня, тотожній нуль, тотожня одиниця, інверсія;
- булева функція одієї змінної, двох змінних, *n* змінних;
- рівні булеві функції;
- вектор значень булевої функції;
- способи задання булевої функції;
- досконала диз'юнктивна нормальна форма;
- досконала кон'юнктивна нормальна форма;
- операція двійкового додавання.

Приклад 1. Перевірити, чи еквівалентні булеві функції F_1 і F_2:

$F_1 = x_1 \oplus (x_2 \rightarrow x_3)$, $F_2 = (x_1 \oplus x_2) \rightarrow (x_1 \oplus x_3)$

Розв'язування.

Побудуємо таблицю істинності для даних функцій:

x_1	x_2	x_3	$x_2 \rightarrow x_3$	F_1	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \oplus x_3$	F_2
1	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1

Висновок: булеві функції F_1 і F_2 не еквівалентні.

<u>*Приклад 2.*</u> Рівносильними перетвореннями звести булеву функцію до досконалої нормальної форми (ДКНФ і ДДНФ):

$$F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \overline{x_2} \vee x_3} \to x_1 \cdot \overline{x_3}$$

Розв'язування.

$$F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \overline{x_2} \vee x_3} \to x_1 \overline{x_3} = \overline{\overline{x_1 \overline{x_2} \vee x_3}} \vee x_1 \overline{x_3} = x_1 \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1 \overline{x_3}$$

\- диз'юнктивна нормальна форма.

Зведемо одержану функцію до ДДНФ:

$$x_1 \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1 \overline{x_3} = (x_1 \overline{x_2} \cdot 1) \vee (1 \cdot 1 \cdot x_3) \vee (x_1 \cdot 1 \cdot \overline{x_3}) = (x_1 \overline{x_2} \cdot (x_3 \vee \overline{x_3})) \vee ((x_1 \vee \overline{x_1}) \cdot (x_2 \vee \overline{x_2}) \cdot x_3) \vee$$

$$\vee (x_1 \cdot (x_2 \vee \overline{x_2}) \cdot \overline{x_3}) = (x_1 \overline{x_2} x_3) \vee (x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}) \vee ((x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) \cdot x_3) \vee (x_1 x_2 \overline{x_3}) \vee (x_1 \overline{x_2} x_3) =$$

$$= (x_1 \overline{x_2} x_3) \vee (x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}) \vee (x_1 x_2 x_3) \vee (x_1 \overline{x_2} x_3) \vee (\overline{x_1} x_2 x_3) \vee (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} x_3) \vee (x_1 x_2 \overline{x_3}) \vee (x_1 \overline{x_2} x_3) =$$

$$= (x_1 \overline{x_2} x_3) \vee (x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}) \vee (x_1 x_2 x_3) \vee (\overline{x_1} x_2 x_3) \vee (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} x_3) \vee (x_1 x_2 \overline{x_3})$$

Зведемо спрощену функцію до ДКНФ:

$$x_1 \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1 \overline{x_3} = (x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3) \vee x_1 \overline{x_3} = (x_1 \vee x_3 \vee x_1)(\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1)(x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_3}) \cdot$$

$$\cdot (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_3}) = (x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1) \cdot 1 \cdot 1 = (x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1)$$

$$(x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1) = (x_1 \vee 0 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1) = (x_1 \vee (x_2 \overline{x_2}) \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) =$$

$$= (x_1 \vee x_3 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_2})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$

Приклад 3. Побудувати ДДНФ і ДКНФ для булевих функцій, заданих таблично:

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Розв'язування.

1) Побудуємо ДДНФ. Набори, для котрих функція приймає значення 1: *F(0,1,0)=F(1,0,0)=F(1,0,1)=F(1,1,0)=F(1,1,1)=1*

$K_1 = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$

$K_2 = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$

$K_3 = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$

$K_4 = x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$

$K_5 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

$F = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ - ДДНФ.

2) Побудуємо ДКНФ. Набори, для котрих функція приймає значення 0:

F(0,0,0)=F(0,0,1)=F(0,1,1)=0

$D_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$

$D_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$D_3 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$

$F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$ - ДКНФ.

Завдання

Завдання 1. Перевірити, чи еквівалентні булеві функції F_1 і F_2:

Варіант 1. $F_1 = x_1 \to (x_2 \equiv x_3)$, $F_2 = (x_1 \to x_2) \equiv (x_1 \to x_3)$

Варіант 2. $F_1 = x_1 \cdot (x_2 \equiv x_3)$, $F_2 = (x_1 x_2) \equiv (x_1 x_3)$

Варіант 3. $F_1 = x_1 \to (x_2 \vee x_3)$, $F_2 = (x_1 \to x_2) \vee (x_1 \to x_3)$

Варіант 4. $F_1 = \overline{x_1 x_3} \vee x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_3}$, $F_2 = x_1 \overline{x_2 x_3} \vee \overline{x_1} x_3$

Варіант 5. $F_1 = x_1 \equiv x_3$, $F_2 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \to (x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)$

Завдання 2. Рівносильними перетвореннями звести булеву функцію до досконалої нормальної форми (ДКНФ і ДДНФ):

Варіант 1. $F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2 \overline{x_3} x_3} \vee (x_1 \cdot \overline{x_2} \to x_3)$

Варіант 2. $F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \overline{x_2} \to x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3$

Варіант 3. $F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \cdot (\overline{x_2} \vee x_1 x_3)} \to x_1 x_2 \overline{x_3}$

Варіант 4. $F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \overline{x_3} \vee x_3} \to x_1 \cdot \overline{x_2}$

Варіант 5. $F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2 \overline{x_3} \to x_3} \vee \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$

*Завдання 3***.** Побудувати ДДНФ і ДКНФ для булевих функцій, заданих таблично:

Варіант 1

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Варіант 2

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Варіант 3

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Варіант 4

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Варіант 5

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Контрольні запитання

1. Які булеві функції називають еквівалентними?
2. Яку формулу називають елементарною кон'юнкцією (елементарною диз'юнкцією)?
3. Формування ДКНФ (ДДНФ) на основі таблиці істинності.
4. Сформувати алгоритм перетворення ДНФ у ДДНФ.
5. Алгоритм перетворення КНФ у ДКНФ.

Практична робота № 6

Тема: Застосування алгебри логіки в електронній техніці

Мета роботи

Формування у студентів компетентностей щодо застосування основних положень алгебри логіки в цифрових автоматах, пристроях автоматизації тощо.

Основні відомості

Серед технічних засобів автоматизації значне місце займають пристрої релейно-контактної дії, перемикальні схеми, які широко використовуються в техніці автоматизованого управління, в електронній обчислювальній техніці тощо. Такі пристрої називають релейно-контактними схемами (РКС).

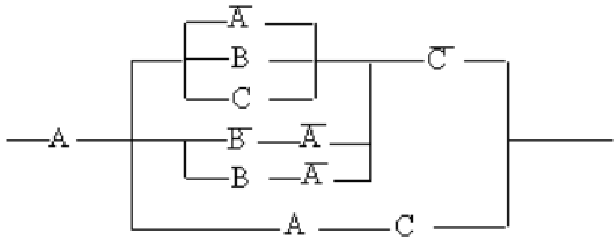
Використання алгебри логіки в конструюванні РКС дозволяє кожній схемі поставити у відповідність деяку формулу, і кожна формула алгебри логіки реалізується за допомогою певної схеми. Дослідження відповідної формули дозволяє виявити можливості заданої схеми, а спрощення схеми звести до спрощення формули.

Під перемикальною схемою будемо розуміти схематичне зображення деякого пристрою, що складається з перемикачів, якими можуть бути механічні діючі пристрої (вимикачі, ключі перемикання, кнопки тощо), електромагнітні реле, електронні і напівпровідникові елементи, з'єднувальні провідники, входи і виходи схеми (клеми або полюси, на які подається електрична напруга). Перемикальною схемою беруться до уваги тільки два стани кожного перемикача, які називають «замкненим» і «розімкненим».

Кон'юнкції двох висловлень PΛQ відповідає схема з *послідовним* з'єднанням двох перемикачів P і Q. Ця схема пропускає струм тоді і тільки тоді, коли істинні обидва висловлювання P і Q, тобто істинна кон'юнкція PΛQ. Диз'юнкція двох висловлювань P та Q подається схемою з *паралельним* з'єднанням двох перемикачів P і Q. Ця схема пропускає струм тоді і тільки тоді, коли істинно хоча б одне із висловлювань P або Q, тобто істинна диз'юнкція PVQ.

З елементарних схем шляхом їх послідовного і паралельного з'єднання можуть бути побудовані інші перемикальні схеми. Оскільки будь-яку формулу алгебри логіки за допомогою рівносильних перетворень можна подати у вигляді формули, що містить тільки операції диз'юнкція, кон'юнкція і заперечення, то будь-яку формулу можна подати у вигляді схеми, і навпаки, для будь-якої схеми можна поставити у відповідність формулу. Для спрощення початкової схеми необхідно записати відповідну їй формулу алгебри логіки, спростити цю формулу, використовуючи основні тотожності, і за спрощеною формулою накреслити нову схему.

Приклад: Для заданої схеми записати відповідну формулу і, спростивши її, побудувати простішу схему.



Розв'язування

Формула, що відповідає даній схемі:

$$A\wedge(((\overline{A} \vee B \vee C)\wedge\overline{C})\vee(((B \wedge A)\vee(B \wedge A)) \wedge \overline{C})\vee(A \wedge C))$$

Спростимо формулу з допомогою основних тотожностей:

1. Розглянемо першу (верхню) вітку схеми:

$$(\overline{A} \vee B \vee C)\wedge\overline{C} = (\overline{A} \wedge \overline{C})\vee(B \wedge \overline{C})\vee(C\wedge \overline{C}) =$$
$$(\overline{A} \wedge \overline{C})\vee(B \wedge \overline{C}) \vee 0 = (\overline{A} \wedge \overline{C})\vee(B \wedge \overline{C})$$

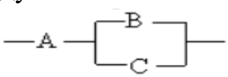
2. Розглянемо другу (середню) вітку схеми:

$$((\overline{B} \wedge \overline{A})\vee(B \wedge \overline{A}))\wedge\overline{C} = (\overline{B} \vee B)\wedge \overline{A} \wedge \overline{C} = \overline{A} \wedge \overline{C}$$

3. Тоді остаточна формула матиме вигляд:

$$A \wedge ((\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee (B\wedge\overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{C})\vee (A\wedge C)) = A\wedge((B\wedge\overline{C}) \vee$$
$$(\overline{A} \wedge\overline{C}) \vee (A\wedge C)) = (B\wedge\overline{C} \wedge A) \vee (\overline{A} \wedge\overline{C} \wedge A) \vee (A\wedge C\wedge A)=$$
$$((A \wedge \overline{C})\wedge B) \vee (A\wedge C) = ((A\wedge\overline{C}) \vee (A\wedge C)) \wedge ((A\wedge C) \vee B) =$$
$$A\wedge ((A\wedge C) \vee B) = (A\wedge A\wedge C) \vee (A\wedge B)=(A\wedge C) \vee (A\wedge B)=A\wedge (B \vee C)$$

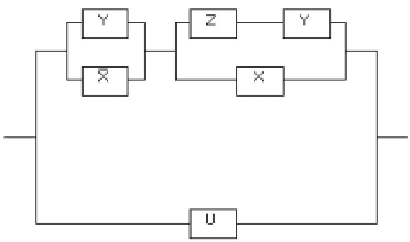
Таким чином, початкова схема еквівалентна схемі такого вигляду:



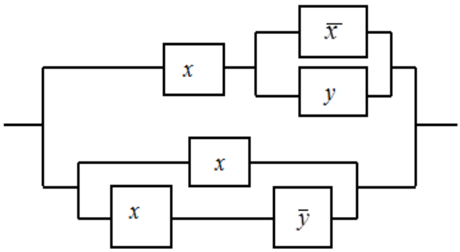
Розглянутий приклад показує, що для деяких РКС шляхом рівносильних перетворень формули алгебри логіки можна отримати РКС, яка містить меншу кількість перемикачів. Проблема розв’язування такої задачі має назву проблеми *мінімізації*.

Завдання

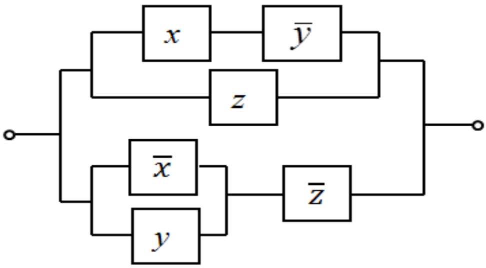
1. Знайти функцію провідності для такої РКС:



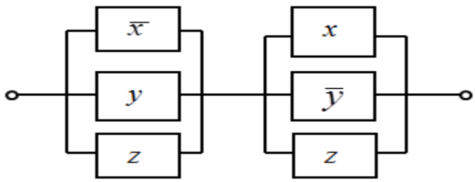
1.1)



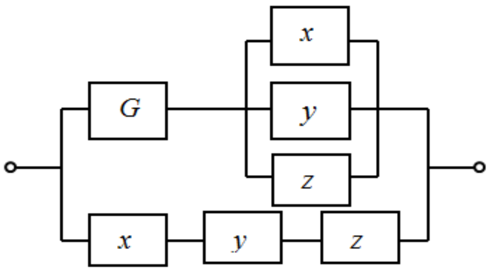
1.2)



1.3)



1.4)



1.5)

2. Побудувати релейно-контактну схему для формули:

2.1) $F = x \vee \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge u \vee \overline{x} \wedge \overline{z}$
2.2) $F=A \vee B \vee C \wedge (A \vee B \wedge C)$
2.3) $F=(A \vee C \wedge A \vee A \wedge B \wedge C) \wedge B$
2.4) $F = (x \wedge \overline{y}) \vee z \vee (\overline{x} \vee y \wedge \overline{z})$
2.5) $F = G \wedge x \vee G \wedge y \vee G \wedge z \vee x \wedge y \wedge z$
2.6) $F = ((X \vee Y) \wedge Z \vee \overline{Y} \wedge Z) \vee (\overline{X} \wedge Z \vee (X \vee Y) \vee Z)$

3. Побудувати схему голосуваня ради, яка складається з 4-х осіб – трьох членів ради і голови. Вихід (булева функція F) вважається позитивним (F=1), якщо за рішення проголосувала більшість учасників голосування. У випадку рівності голосів голос голови є вирішальним.

Примітка. Скласти таблицю істинності булевої функції *F(H,x,y,z)*, подати її аналітично у вигляді диз'юнкції скінченної кількості мінтермів, на кожному з яких ця функція дорівнює одиниці. Спростити функцію, наприклад, за допомогою карти Карно і побудувати релейно-контактну схему для спрощеної формули.

Контрольні запитання

1. Що називають перемикальною схемою?
2. Як на перемикальній схемі відображається кон'юнкція двох висловлень?
3. Як на перемикальній схемі відобразити диз'юнкцію двох висловлень?
4. В базисі з яких булевих функцій повинна бути задана двійкова функція F, щоб її можна було реалізувати перемикальною схемою?

Література

1. Нікітченко М. С. Математична логіка та теорія алгоритмів. Київ : ВПЦ “Київський університет”, 2008. 528 с.
2. Клакович Л. М., Левицька С. М, Костів О. М. Теорія алгоритмів. Львів : Вид. Львів. ун-ту, 2008. 154 с.
3. Алгоритмы: построение и анализ / Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Л. Ривест, Клиффорд Штайн. Пер. с англ. М. : ООО “И.Д. Вильямс”, 2013. 1328 с.
4. Левитин А. В. Алгоритмы: введение в разработку и анализ. Пер. с англ. М. : ООО “И.Д. Вильямс”, 2006. 576 с.
5. Ахо А. В., Хопкрофт Д. Э., Ульман Д. Д.. Структуры данных и алгоритмы. Пер. с англ.: уч. пос. М. : ООО “И.Д. Вильямс”, 2007. 400 с.
6. Кнут Д. Э. Искусство программирования. Том 1. Основные алгоритмы; Том 3. Сортировка и поиск. М.: Вильямс, 2012.832 с.
7. Кормен, Т. Х. Алгоритмы. Вводный курс. М. : Вильямс, 2014. 208 с.
8. Kleinberg, J. Algorithm Design. Boston: Pearson, 2005. 864 p.
9. Mehlhorn, K., Sanders, P. Algorithms and Data Structures. Berlin: Springer, 2008. 300 p.