

Стрілець О. Р., к.т.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ КЕРУВАННЯ ШВИДКІСТЮ У ПРИСТРОЇ З БАГАТОСТУПІНЧАСТИМ ЗУБЧАСТИМ ДИФЕРЕНЦІАЛОМ І ЗАМКНУТИМИ ГІДРОСИСТЕМАМИ ЧЕРЕЗ СОНЯЧНІ ЗУБЧАСТІ КОЛЕСА

Приведено дослідження динаміки у пристрої для керування змінами швидкості з багатовступінчастим зубчастим диференціалом і замкнутими гідросистемами через сонячні зубчасті колеса, коли ведучою ланкою є водило першого ступеня, а веденою – епіцикл останнього ступеня. Розглянуто складені та розв'язані рівняння динаміки таких пристроїв залежно від умов їх роботи за методом Лагранжа. Отримані результати є підґрунтям для подальшого комп'ютерного моделювання на ПК та проведення кількісного аналізу з метою оцінки роботи таких пристроїв та вибору необхідних замкнутих гідросистеми для керування змінами швидкості.

Ключові слова: динаміка; пристрій для керування змінами швидкості; багатовступінчастий зубчастий диференціал; замкнута гідросистема; сонячне зубчасте колесо; епіцикл; водило; сателіт.

Постановка проблеми. Технологічні процеси машин у різних галузях промисловості, наприклад, у машинобудуванні, гірництві, енергетиці, цивільному, промисловому і дорожньому будівництві, сільському господарстві залежать від швидкості їх виконавчих механізмів. Для керування змінами швидкості у сучасній техніці використовуються пристрої у вигляді ступінчастих і безступінчастих коробок швидкостей, які мають прості та складні зубчасті передачі, або ланцюгові, пасові та фрикційні варіатори. Основними недоліками існуючого ступінчастого керування швидкістю є складність конструкції пристроїв, велика матеріаломісткість, виникнення значних динамічних навантажень під час переходів з однієї швидкості на іншу, а традиційного безступінчастого – інтенсивне спрацювання деталей внаслідок використання фрикційних зв'язків стрічкових, колодкових або дискових гальм та блокувальних фрикційних муфт. Це істотно впливає на зменшення довговічності і надійності деталей приводів і машин в цілому. Тому актуальною науково-технічною задачею є розробка нових пристроїв для керування процесом зміни швидкості з за-

стосуванням зубчастих диференціалів з замкнутими гідросистемами, як більш перспективним при усуненні недоліків існуючих пристроїв, про що частково сказано в [1], обґрунтовані кінематичні [2] і енергетичні [3] можливості. Проектування, виготовлення та експлуатація таких пристроїв вимагають знань про силові процеси, які виникають у них. Дослідження силових динамічних процесів у пристроях зміни швидкості із зубчастими диференціалами, де керування швидкістю здійснюється за допомогою замкнутої гідросистеми через сонячні зубчасті колеса, є актуальною задачею.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. До уваги взяті роботи, у яких виконано дослідження, присвячені пристроям з зубчастими диференціальним передачами [4–18].

В [4] проаналізовано вплив зміни форми профілю зуба планетарної передачі на динаміку без врахування енергозатрат.

В [5] запропоновано і досліджено нелінійну динамічну модель двоступінчастого планетарного механізму на підставі аналітичного рішення динамічних рівнянь у програмі MATLAB, але при цьому не враховані втрати, які виражаються ККД.

В [6] проведено спільний аналіз діапазонів ефективності та коефіцієнта передачі планетарних передач, який можна досягти усіма можливими конструктивними рішеннями.

В [7] представлено результати перевірки динамічної моделі приводу з редуктором, які проводилися на реальному об'єкті в різних умовах експлуатації і стимуляційні дослідження, щоб визначити придатність моделі, але без врахування енергетичної ефективності.

В [8] запропоновано новий метод розрахунку кінематичних і силових параметрів на основі гіперграфу і матричної операції. Розрахунок ККД здійснюється, слідуючи потоку потужності, а рівняння втрат потужності на кожному вузлі виводяться через підхід, заснований на відносній силі само обертання.

В [9] отримано формули теоретичної ефективності для двоступінчастої диференціальної передачі та перевірено експериментальними дослідженнями.

В [10] досліджується ККД складних зубчастих передач на основі графічних та гвинтових теорій, що дозволяють отримувати наближені значення.

В [11] обґрунтовується зменшення вартості конструкції багатозубчастих планетарних передач на основі системного синтезу з врахуванням таких вимог, як ступінь співвідношення, ефективність, планарність механізму та один перехідний зсув, для важких вантажних транспортних засобів.

В [12] представлено конструкцію двопланетарного редуктора з розрахунком кінематики, статичної та ефективності зачеплення зубчастих коліс. Розрахунки геометрії і міцності зубчастих коліс, валів і підшипників кочення опускаються, оскільки вони визнані типовими розрахунками конструкції.

В [13], на основі обертального моменту, рівнянь силового балансу і силового аналізу основних елементів, проаналізовано розподіл потужностей багатоступінчастого мікро планетарного редуктора 2К-Н.

В [14] автори пропонують алгоритм для вирішення завдання з виявлення виродженої планетарної зубчастої передачі, автоматизований за допомогою інтерактивної комп'ютерної програми. Алгоритм застосовується для передач з будь-якою кількістю ступенів свободи.

В [15] звертається увага на повне розуміння базової механіки планетарних передач та оцінки їх механічної ефективності та робиться висновок, що для тих самих вхідних та вихідних ланок втрата потужності має для кожної дійсної послідовності кутових швидкостей своєрідне математичне вираження.

В [16] наведено причини, які стримують застосування плавно регульованої планетарної передачі, через конструктивну складність механізму регулювання передатного відношення та описані варіанти його спрощення.

В [17] звернуто увагу, що планетарні передачі використовуються в промисловості за багатьма перевагами, які мають підвищену ефективність і дуже компактний привод, складений з зубчастих коліс, і вихід з ладу однієї ланки впливає на всю передачу, тому необхідно знати причини цього.

В [18] запропоновано динамічну модель керування швидкості через епіцикл привода із зубчастою диференціальною передачею і замкнутою гідросистемою, отримано систему диференціальних рівнянь.

В [19] запропоновано динамічну модель керування швидкості через сонячне зубчасте колесо привода із зубчастою одноступінчастою диференціальною передачею і замкнутою гідросистемою – отримано і розв'язано систему диференціальних рівнянь.

В [20] запропоновано динамічну модель керування швидкості через водило привода із зубчастою одноступінчастою диференціальною передачею і замкнутою гідросистемою – отримано і розв'язано систему диференціальних рівнянь.

В [21] приводиться визначення зведених обертальних моментів до ведучої ланки пристрою зміни швидкості через зубчастий дифе-

ренціал, якою може бути епіцикл, або водило, або сонячне зубчасте колесо.

Із аналізу останніх публікацій видно, що питанням динаміки нових пристроїв керування змінами швидкості з багатоступінчастими зубчастими диференціалами за допомогою замкнутих гідросистем приділено мало уваги. Ці питання динаміки таких пристроїв чекають свого розв'язку. Вивчення динаміки таких пристроїв дозволить розробити методи зменшення впливу динамічних навантажень на їх ланки.

Мета даної роботи. Розробити математичну модель динамічних процесів у пристроях зміни швидкості за допомогою багатоступінчастих зубчастих диференціальних передач з замкнутими гідросистемами у випадку, коли ланками керування є сонячні зубчасті колеса, а ведучим валом є водило першої ступені, а веденим валом є епіцикл останнього ступеня.

Основна частина. На рис. 1 показано багатоступінчастий зубчастий диференціал із замкнутими гідросистемами і керуванням швидкістю через сонячні зубчасті колеса.

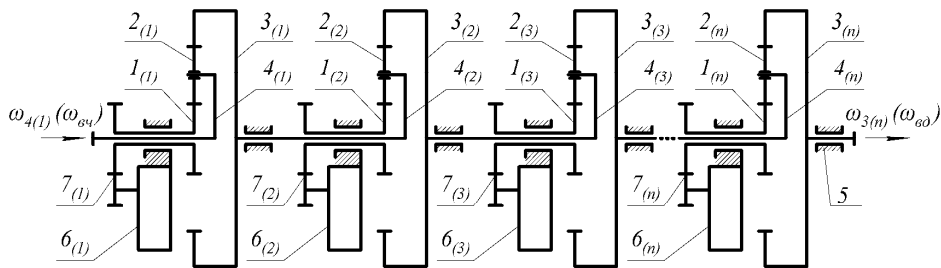


Рис. 1. Схема багатоступінчастого зубчастого диференціала з замкнутими гідросистемами і керуванням швидкістю через сонячні зубчасті колеса

У цьому зубчастому диференціалі епіцикл $3_{(1)}$ першого ступеня з'єднаний з водилом $4_{(2)}$ другого ступеня, зубчасте колесо – епіцикл $3_{(2)}$ другого ступеня з'єднаний з водилом $4_{(3)}$ третього ступеня, ..., зубчасте колесо – епіцикл $3_{(n-1)}$ $(n-1)$ -го ступеня з'єднаний з водилом $4_{(n)}$ n -го ступеня, а керування швидкістю здійснюється за рахунок сонячних зубчастих коліс першого $1_{(1)}$, другого $1_{(2)}$, третього $1_{(3)}$, ..., n -го $1_{(n)}$ ступенів за допомогою встановлених на них замкнутих гідросистем $6_{(1)}$, $6_{(2)}$, $6_{(3)}$, ..., $6_{(n)}$. Ведучою ланкою такого n -ступінчастого зубчастого диференціала є водило $4_{(1)}$ першого ступеня, а веденою ланкою – зубчасте колесо – епіцикл $3_{(n)}$ n -го ступеня. Замкнуті гідросистеми $6_{(1)}$,

$\delta_{(2)}, \delta_{(3)}, \dots, \delta_{(n)}$ однакові за будовою, розміщені на корпусі 5 і з'єднані з сонячним зубчастим колесом передачами $7_{(1)}, 7_{(2)}, 7_{(3)}, \dots, 7_{(n)}$. Керування зміною швидкості здійснюється за рахунок рідини, яка рухається в замкнених гідросистемах. Будова і принцип роботи замкнутої гідросистеми широко описаний в [22].

Динамічну модель руху багатоступінчастого зубчастого диференціала з керуванням швидкістю через сонячні зубчасті колеса у формалізованому вигляді запишемо, застосувавши рівняння Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega} \right) = M_{3(n)}. \quad (1)$$

Вираз кінетичної енергії T механічної системи, у вигляді багатоступінчастого зубчастого диференціала з керуванням швидкістю через сонячні зубчасті колеса, відповідно до рис. 1, має вигляд:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \{ [J_{4(1)} \omega_{4(1)}^2 + z_{c(1)} J_{2(1)} \omega_{2(1)}^2 + z_{c(1)} m_{2(1)} v_{o2(1)}^2 + \\ & + J_{3(1)} \omega_{3(1)}^2 + (J_{1(1)} + J_{7(1)}) \omega_{1(1)}^2 + (J'_{7(1)} + J_{6(1)}) \omega_{6(1)}^2] + \\ & + [J_{4(2)} \omega_{4(2)}^2 + z_{c(2)} J_{2(2)} \omega_{2(2)}^2 + z_{c(2)} m_{2(2)} v_{o2(2)}^2 + \\ & + J_{3(2)} \omega_{3(2)}^2 + (J_{1(2)} + J_{7(2)}) \omega_{1(2)}^2 + (J'_{7(2)} + J_{6(2)}) \omega_{6(2)}^2] + \\ & + [J_{4(3)} \omega_{4(3)}^2 + z_{c(3)} J_{2(3)} \omega_{2(3)}^2 + z_{c(3)} m_{2(3)} v_{o2(3)}^2 + \\ & + J_{3(3)} \omega_{3(3)}^2 + (J_{1(3)} + J_{7(3)}) \omega_{1(3)}^2 + (J'_{7(3)} + J_{6(3)}) \omega_{6(3)}^2] + \\ & + \dots + [J_{4(n)} \omega_{4(n)}^2 + z_{c(n)} J_{2(n)} \omega_{2(n)}^2 + z_{c(n)} m_{2(n)} v_{o2(n)}^2 + \\ & + J_{3(n)} \omega_{3(n)}^2 + (J_{1(n)} + J_{7(n)}) \omega_{1(n)}^2 + (J'_{7(n)} + J_{6(n)}) \omega_{6(n)}^2] \}. \end{aligned} \quad (2)$$

У вираз (2) для кінетичної енергії системи входять кінетичні енергії таких ланок: $T_{1(1)}, T_{1(2)}, \dots, T_{1(n)}$ – сонячних зубчастих коліс з спареними зубчастими колесами зубчастих передач 7, відповідно $7_{(1)}, 7_{(2)}, \dots, 7_{(n)}$, $T_{2(1)}, T_{2(2)}, \dots, T_{2(n)}$ – блоків сателітів; $T_{3(1)}, T_{3(2)}, \dots, T_{3(n)}$ – епіциклів $T_{4(1)}, T_{4(2)}, \dots, T_{4(n)}$ – водил $\delta_{(1)}, \delta_{(2)}, \dots, \delta_{(n)}$ – замкнутих гідросистем з приводними зубчастими колесами $7'$, відповідно $7'_{(1)}, 7'_{(2)}, \dots, 7'_{(n)}$, де: $\omega_{1(i)}, \omega_{2(i)}, \omega_{3(i)}, \omega_{4(i)}, \omega_{5(i)}$ – відповідно кутові швидкості ланок системи; $J_{1(i)}, J_{2(i)}, J_{3(i)}, J_{4(i)}, J_{5(i)}$ – відповідно динамічні моменти інерції ланок відносно центрів мас; $m_{2(i)}$ – маса блока сателітів; $k_{(i)}$ – кількість сателітів; $v_{o2(i)} = \omega_{4(i)} r_{4(i)}$ – колова швидкість осі обертання са-

телітів; $r_{4(i)}$ – радіус обертання водила. Цей радіус дорівнює сумі початкових радіусів сонячного зубчастого колеса і сателіта $r_{4(i)} = 0,5(d_{w1(i)} + d_{w2(i)})$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Кутові швидкості виразимо через кутові швидкості ведучих і ведених ланок [2]:

$$\begin{aligned} & \omega_{4(1)} - \text{ведуча ланка (водило)}; \omega_{4(2)}; \omega_{4(3)}; \dots, \omega_{4(n)}; \\ \omega_{2(1)} &= \frac{\omega_{3(1)} - \omega_{4(1)}(u_{34(1)}^{(1)} - u_{24(1)}^{(1)}u_{31(1)}^{(4)}u_{21(1)}^{(4)})}{u_{31(1)}^{(4)}u_{21(1)}^{(4)}}; \omega_{2(2)}; \omega_{2(3)}; \dots, \omega_{2(n)}; \\ \omega_{1(1)} &= \frac{\omega_{3(1)} - \omega_{4(1)}u_{34(1)}^{(1)}}{u_{31(1)}^{(4)}}; \omega_{1(2)}; \omega_{1(3)}; \dots, \omega_{1(n)} \\ & \omega_{3(1)}; \omega_{3(2)}; \omega_{3(3)}; \dots, \omega_{3(n)} - \text{ведена ланка (епіцикл)}; \\ \omega_{6(1)} &= \frac{\omega_{1(1)}}{u_{77(1)}}; \omega_{6(2)}; \omega_{6(3)}; \dots, \omega_{6(n)}. \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} u_{21(1)}^{(4)} &= -\frac{z_{1(1)}}{z_{2(1)}}; u_{21(2)}^{(4)} = -\frac{z_{1(2)}}{z_{2(2)}}; u_{21(3)}^{(4)} = -\frac{z_{1(3)}}{z_{2(3)}}; \dots, u_{21(n)}^{(4)} = -\frac{z_{1(n)}}{z_{2(n)}}; \\ u_{31(1)}^{(4)} &= -\frac{z_{1(1)}}{z_{3(1)}}; u_{31(2)}^{(4)} = -\frac{z_{1(2)}}{z_{3(2)}}; u_{31(3)}^{(4)} = -\frac{z_{1(3)}}{z_{3(3)}}; \dots, u_{31(n)}^{(4)} = -\frac{z_{1(n)}}{z_{3(n)}}; \\ u_{24(1)}^{(1)} &= 1 - u_{21(1)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(1)}}{z_{2(1)}}; u_{24(2)}^{(1)} = 1 - u_{21(2)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(2)}}{z_{2(2)}}; \\ u_{24(3)}^{(1)} &= 1 - u_{21(3)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(3)}}{z_{2(3)}}; \dots, u_{24(n)}^{(1)} = 1 - u_{21(n)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(n)}}{z_{2(n)}}; \\ u_{34(1)}^{(1)} &= 1 - u_{31(1)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(1)}}{z_{3(1)}}; u_{34(2)}^{(1)} = 1 - u_{31(2)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(2)}}{z_{3(2)}}; \\ u_{34(3)}^{(1)} &= 1 - u_{31(3)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(3)}}{z_{3(3)}}; \dots, u_{34(n)}^{(1)} = 1 - u_{31(n)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(n)}}{z_{3(n)}}; \\ u_{77(1)}^{(4)} &= -\frac{z_{7'(1)}}{z_{7(1)}}; u_{77(2)}^{(4)} = -\frac{z_{7'(2)}}{z_{7(2)}}; u_{77(3)}^{(4)} = -\frac{z_{7'(3)}}{z_{7(3)}}; \dots, u_{77(n)}^{(4)} = -\frac{z_{7'(n)}}{z_{7(n)}}. \end{aligned}$$

Підставимо значення $\omega_4, \omega_2, \omega_3, \omega_1$ і V_{C_2} в (2), зведемо і спростимо та запишемо у вигляді:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n (J_{44(n)} \omega_{4(n)}^2 - 2J_{43(n)} \omega_{4(n)} \omega_{3(n)} + J_{33(n)} \omega_{3(n)}^2), \quad (3)$$

де введені такі позначення

$$\begin{aligned} J_{44(n)} &= J_{4(n)} + \frac{J_{1(n)} + J_{7(n)}}{(u_{31(n)}^{(4)})^2} (u_{34(n)}^{(1)})^2 + \frac{k_{(n)} J_{2(n)}}{(u_{31(n)}^{(4)} u_{21(n)}^{(4)})^2} (u_{34(n)}^{(1)} - \\ &- u_{24(n)}^{(1)} u_{31(n)}^{(4)} u_{21(n)}^{(4)})^2 + k_{(n)} m_{2(n)} r_{C(n)}^2 + \frac{J_{7'(n)}}{(u_{31(n)}^{(4)} u_{77(n)}^{(4)})^2} (u_{34(n)}^{(1)})^2; \\ J_{43(n)} &= \frac{J_{1(n)} + J_{7(n)}}{(u_{31(n)}^{(4)})^2} u_{34(n)}^{(1)} + \frac{k_{(n)} J_{2(n)}}{(u_{31(n)}^{(4)} u_{21(n)}^{(4)})^2} (u_{34(n)}^{(1)} - \\ &u_{24(n)}^{(1)} u_{31(n)}^{(4)} u_{21(n)}^{(4)}) + \frac{J_{7'(n)}}{(u_{31(n)}^{(4)} u_{77(n)}^{(4)})^2} u_{34(n)}^{(1)}; \\ J_{33(n)} &= J_{3(n)} + \frac{J_{1(n)} + J_{7(n)}}{(u_{31(n)}^{(4)})^2} + \frac{k_{(n)} J_{2(n)}}{(u_{31(n)}^{(4)} u_{21(n)}^{(4)})^2} + \frac{J_{7'(n)}}{(u_{31(n)}^{(4)} u_{77(n)}^{(4)})^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Підставляючи вираз для кінетичної енергії (3) у рівняння Лагранжа II роду (1) і беручи часткові похідні за кутовими швидкостями ω_4 і ω_3 , отримуємо систему двох диференціальних рівнянь кожного ступеня

$$\begin{cases} J_{44(n)} \dot{\omega}_{4(n)} + J_{43(n)} \dot{\omega}_{3(n)} = M_{364(n)}; \\ J_{43(n)} \dot{\omega}_{4(n)} + J_{33(n)} \dot{\omega}_{3(n)} = M_{363(n)}, \end{cases} \quad (5)$$

де $M_{364(n)} = M_{4(n)} + M_{7(n)} u_{71(n)}^{(4)}$, $M_{363(n)} = -M_{3(n)} + M_{4(n)} u_{74(n)}^{(1)}$,

де $M_{364(n)}$ і $M_{363(n)}$ – зведені обертальні моменти відповідно ведучих ланок (водил) і ведених ланок (епіциклів) ступенів зубчастого диференціала; $M_{3(n)}$; $M_{4(n)}$ і $M_{7(n)}$ – обертальні моменти відповідно епіциклів, водил і замкнутих гідросистем ступенів зубчастого диференціала.

Розглянемо приклад, коли пристрій керування швидкістю буде з двоступінчастим зубчастим диференціалом і замкнутими гідросистемами (на рис. 2).

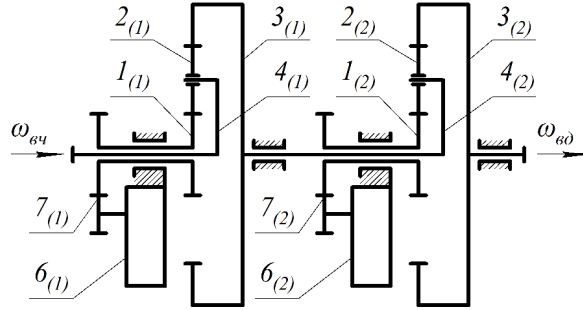


Рис. 2. Схема пристрою з двоступінчастим зубчастим диференціалом з замкнутими гідросистемами зі зміною швидкості через сонячні зубчасті колеса

Використовуючи (5) і (6), маємо диференціальні рівняння динаміки, відповідно для першого і другого ступенів

$$\begin{cases} J_{44(1)}\dot{\omega}_{4(1)} + J_{43(1)}\dot{\omega}_{3(1)} = M_{364(1)}; \\ J_{43(1)}\dot{\omega}_{4(1)} + J_{33(1)}\dot{\omega}_{3(1)} = M_{363(1)}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} J_{44(2)}\dot{\omega}_{4(2)} + J_{43(2)}\dot{\omega}_{3(2)} = M_{364(2)}; \\ J_{43(2)}\dot{\omega}_{4(2)} + J_{33(2)}\dot{\omega}_{3(2)} = M_{363(2)}. \end{cases} \quad (9)$$

Розв'язання системи рівнянь окремо для кожного ступеня наступне. Приведемо рівняння (7) і (8) до виду

$$\begin{cases} a_{1(1)}\dot{\omega}_{4(1)} + b_{1(1)}\dot{\omega}_{3(1)} = c_{1(1)}; \\ a_{2(1)}\dot{\omega}_{4(1)} + b_{2(1)}\dot{\omega}_{3(1)} = c_{2(1)}, \end{cases} \quad (11)$$

де для $n = 1$: $a_{1(1)} = J_{44(1)}$; $a_{2(1)} = b_{1(1)} = J_{43(1)}$; $b_{2(1)} = J_{33(1)}$; $c_{1(1)} = M_{364(1)}$; $c_{2(1)} = M_{363(1)}$.

Розв'яжемо систему рівнянь (10) і (11) для першого ступеня так. Перемножимо рівняння (11) на a_2 / a_1 , отримаємо

$$a_{2(1)}\dot{\omega}_{4(1)} + \frac{b_{1(1)}a_{2(1)}}{a_{1(1)}}\dot{\omega}_{3(1)} = \frac{c_{1(1)}a_{2(1)}}{a_{1(1)}}. \quad (13)$$

Віднімемо від рівняння (11) рівняння (13), отримаємо

$$b_{2(1)}\dot{\omega}_{3(1)} - \frac{b_{1(1)}a_{2(1)}}{a_{1(1)}}\dot{\omega}_{3(1)} = c_{2(1)} - \frac{c_{1(1)}a_{2(1)}}{a_{1(1)}}. \quad (14)$$

У виразі (14) зведемо подібні і визначимо $\dot{\omega}_{3(1)}$

$$\dot{\omega}_{3(1)} = \frac{c_{2(1)}a_{1(1)} - c_{1(1)}a_{2(1)}}{b_{2(1)}a_{1(1)} - b_{1(1)}a_{2(1)}}. \quad (15)$$

Подібно визначимо $\dot{\omega}_{4(1)}$. Для цього перемножимо рівняння (11) на b_2/b_1

$$\frac{a_{1(1)}b_{2(1)}}{b_{1(1)}}\dot{\omega}_{4(1)} + b_{2(1)}\dot{\omega}_{3(1)} = \frac{c_{1(1)}b_{2(1)}}{b_{1(1)}}. \quad (16)$$

Далі від рівняння (16) віднімемо рівняння (12), отримаємо

$$a_{2(1)}\dot{\omega}_{1(4)} - \frac{a_{1(1)}b_{2(1)}}{b_{1(1)}}\dot{\omega}_{1(4)} = c_{2(1)} - \frac{c_{1(1)}b_{2(1)}}{b_{1(1)}}. \quad (17)$$

Потім зведемо подібні і визначимо $\dot{\omega}_{4(1)}$.

$$\dot{\omega}_{4(1)} = \frac{c_{2(1)}b_{1(1)} - c_{1(1)}b_{2(1)}}{b_{1(1)}a_{2(1)} - b_{2(1)}a_{1(1)}}. \quad (18)$$

Тоді для першого ступеня маємо

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{4(1)} &= \frac{d\omega_{4(1)}}{dt} = \frac{c_{2(1)}b_{1(1)} - c_{1(1)}b_{2(1)}}{b_{1(1)}a_{2(1)} - b_{2(1)}a_{1(1)}}; \\ \dot{\omega}_{3(1)} &= \frac{d\omega_{3(1)}}{dt} = \frac{c_{2(1)}a_{1(1)} - c_{1(1)}a_{2(1)}}{b_{2(1)}a_{1(1)} - b_{1(1)}a_{2(1)}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Подібно визначимо похідні швидкостей другого ступеня. За аналогією маємо: для $n=2$: $a_{1(2)} = J_{44(2)}$; $a_{2(2)} = b_{1(2)} = J_{43(2)}$; $b_{2(2)} = J_{33(2)}$; $c_{1(2)} = M_{384(2)}$; $c_{2(2)} = M_{383(2)}$, а

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{4(2)} &= \frac{d\omega_{4(2)}}{dt} = \frac{c_{2(2)}b_{1(2)} - c_{1(2)}b_{2(2)}}{b_{1(2)}a_{2(2)} - b_{2(2)}a_{1(2)}}; \\ \dot{\omega}_{3(2)} &= \frac{d\omega_{3(2)}}{dt} = \frac{c_{2(2)}a_{1(2)} - c_{1(2)}a_{2(2)}}{b_{2(2)}a_{1(2)} - b_{1(2)}a_{2(2)}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким чином, приведена математична модель руху зубчастого диференціала з керуванням змінами швидкості через сонячні зубчасті колеса і замкнуті гідросистеми з метою забезпечення необхідного закону зміни навантаження на веденій ланці – епіциклі, а результати можуть бути підґрунтям для проведення кількісного аналізу силових залежностей механічного приводу з гідросистемним керуванням.

Висновки

1. Побудовано динамічну модель пристрою зміни швидкості у механічних приводах машин з врахуванням коливних і ударних явищ у зубчастій диференціальній передачі, що дозволяє проводити вибір необхідної замкнutoї гідросистеми для керування швидкістю руху веденої його ланки.

2. Отримані результати можуть бути підґрунтям для проведення кількісного аналізу силових залежностей механічного приводу з гідросистемним керуванням через сонячне зубчасте колесо, коли навантаження змінюється періодично протягом тривалого часу; або величина ударного навантаження після різкого збільшення залишається незмінною протягом тривалого часу; або величина ударного навантаження після різкого збільшення зберігається протягом малого часу; або виконавчий механізм миттєво зупиняється внаслідок значного перевантаження.

1. Malashchenko V., Strilets O., Strilets V. Fundamentals of Creation of New Devices for Speed Change Management. *Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science*. Lviv : NULP, 2015. V. 1. № 2. P. 11–20.
2. Малащенко В. О., Стрілець О. Р., Стрілець В. М. Керування змінами швидкості за допомогою багатосходинкової зубчастої диференціальної передачі через сонячне зубчасте колесо. *Вісник Національного університету НТУ «ХПІ». Проблеми механічного приводу*. Харків : НТУ «ХПІ», 2016. № 23(1195). С. 87–92.
3. Strilets O. R., Malashchenko V. O., Strilets V. M. Energy effectiveness of the differential of a device for speed change through the sun gear. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. Dnipro : NHU, 2019. № 6. P. 52–57.
4. Bahk C.-J., Parker R. G. (2013). Analytical investigation of tooth profile modification effects on planetary gear dynamics. *Mechanism and Machine Theory, Elsevier*. 2013. No. 70. P. 298–319.
5. Qilin Huang, Yong Wang, Zhipu Huo, Yudong Xie (2013). Nonlinear Dynamic Analysis and Optimization of Closed-Form Planetary Gear System. *Mathematical Problems in Engineering*. Vol. 2013. 12 p. doi: 10.1155/2013/149046.
6. Salgado D. R., Castillo J. M. (2014). Analysis of the transmission ratio and efficiency ranges of the four-, five-, and six-link planetary gear trains. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 73. 218–243. doi: 10.1016 / j.mechmachtheory.2013.11.001.
7. Grzegorz Peruń (2014). Verification Of Gear Dynamic Model In Different Operating Conditions. *Scientific Journal of Silesian University of Technology. Series Transport*. 84. 99–104.
8. Fuchun Yang, Jianxiong Feng, Hongcai Zhang (2015). Power flow and efficiency analysis of multi-flow planetary gear trains. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 92. 86–99. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2015.05.003.
9. Pawar 1, P. V., Kulkarni, P. R. (2015). Design of two stage planetary gear train for high reduction ratio. *International Journal of Research in Engineering and Technology*. ESAT Publishing House, Bangalore, India. Vol. 4, Iss. 6. 150–157. doi: 10.15623/ijret.2015.0406025.
10. Chao Chen, Jiabin Chen (2015). Efficiency analysis of two degrees of freedom epicyclic gear transmission and experimental. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 87. 115–130. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2014.12.017.
11. Tianli Xie, Jibin Hu, Zengxiong Peng, Chunwang Liu (2015). Synthesis of seven-speed planetary gear trains for heavy-duty commercial vehicle. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 90.

230–239. doi: 10.1016/j. mechmachtheory. 2014.12.012. **12.** Drewniak, J., Garlicka, P., Kolber, A. (2016). Design for the bi-planetary gear train. *Scientific Journal of Silesian University of Technology. Series Transport*. 91. 5–17. doi: 10.20858/sjsutst.2016.91.1. **13.** Li Jianying, Hu Qingchun, Zong Changfu, Zhu Tianjun (2017). Power Analysis and Efficiency Calculation of Multistage Micro-planetary Transmission. *Energy Procedia*. 141. 654–659. doi: 10.1016/j.egypro.2017.11.088. **14.** Wenjian Yang, Huafeng Ding (2018). Automatic detection of degenerate planetary gear trains with different degree of freedoms. *Applied Mathematical Modelling*. 64. 320–332. doi: 10.1016/j.apm.2018.07.038. **15.** Esmail, E. L., Pennestrì, E., Hussein Juber A. (2018). Power losses in two-degrees-of-freedom planetary gear trains: A critical analysis of Radzimovsky's formulas. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 128. 191–204. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2018.05.015. **16.** Dankov, A. M. (2018). Planetary Continuously Adjustable Gear Train With Force Closure Of Planet Gear And Central Gear: From Idea To Design. *Science & Technique*. 17(3). 228–237. doi: 10.21122/2227-1031-2018-17-3-228-237. **17.** Dobariya Mahesh (2018). Design of Compound Planetary Gear Train. *International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology*. Vol. 6. Iss. 4. 3179–3184. doi: 10.22214/ijraset.2018.452. **18.** Стрілець О. Р., Малащенко В. О., Пасіка В. Р., Стрілець В. М. Динамічна модель керування швидкості через епіцикл привода із зубчатою диференціальною передачею. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Динаміка, міцність та проектування машин і приладів*. Львів : НУЛП, 2019. № 911. С. 63–67. **19.** Стрілець О. Р., Малащенко В. О., Стрілець В. М. Динаміка пристрою для керування змінами швидкості з зубчатою диференціальною передачею і замкнутою гідросистемою через сонячне зубчасте колесо. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Сер. машинознавство та САПР*. Харків : НТУ «ХПІ», 2020. № 1' 2020. С. 93–98. **20.** Стрілець О. Р., Малащенко В. О., Стрілець В. М. Динаміка пристрою для керування змінами швидкості з зубчатою диференціальною передачею і замкнутою гідросистемою через водило. *Науковий вісник ХДМУ*. 2020. Херсон : ХДМУ, 2020. № 2 (7). С. 176–182. **21.** Стрілець О. Р., Малащенко В. О., Стрілець В. М. Визначення зведених обертальних моментів рівнянь динаміки пристроїв зміни швидкості через зубчасті диференціали з замкнутими гідросистемами. *Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки : науковий журнал*. Хмельницький : ХНУ, 2020. Вип. 4. С. 18–23. **22.** Strilets O., Malashchenko V., Strilets V. (2020). Dynamic model of a closed-loop hydraulic system for speed control through gear differential. *Scientific Journal of TNTU*. Tern. : TNTU, 2020. Vol. 98. No 2. P. 91–98.

REFERENCES:

1. Malashchenko V., Strilets O., Strilets V. Fundamentals of Creation of New Devices for Speed Change Management. *Ukrainian Journal of Mechanical*

Engineering and Materials Science. Lviv : NULP, 2015. V. 1. № 2. P. 11–20.

2. Malashchenko V. O., Strilets O. R., Strilets V. M. Keruvannia zminamy shvydkosti za dopomohoiu bahatoskhodynkovoi zubchastoi dyferentsialnoi peredachi cherez soniachne zubchaste koleso. *Visnyk Natsionalnoho universytetu NTU «KhPI»*. *Problemy mekhanichnoho pryvodu*. Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. № 23(1195). S. 87–92.

3. Strilets O. R., Malashchenko V. O., Strilets V. M. Energy effectiveness of the differential of a device for speed change through the sun gear. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. Dnipro : NHU, 2019. № 6. P. 52–57.

4. Bahk C.-J., Parker R. G. (2013). Analytical investigation of tooth profile modification effects on planetary gear dynamics. *Mechanism and Machine Theory, Elsevier*. 2013. No. 70. P. 298–319.

5. Qilin Huang, Yong Wang, Zhipu Huo, Yudong Xie (2013). Nonlinear Dynamic Analysis and Optimization of Closed-Form Planetary Gear System. *Mathematical Problems in Engineering*. Vol. 2013. 12 p. doi: 10.1155/2013/149046.

6. Salgado D. R., Castillo J. M. (2014). Analysis of the transmission ratio and efficiency ranges of the four-, five-, and six-link planetary gear trains. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 73. 218–243. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2013.11.001.

7. Grzegorz Peruń (2014). Verification Of Gear Dynamic Model In Different Operating Conditions. *Scientific Journal of Silesian University of Technology. Series Transport*. 84. 99–104.

8. Fuchun Yang, Jianxiang Feng, Hongcai Zhang (2015). Power flow and efficiency analysis of multi-flow planetary gear trains. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 92. 86–99. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2015.05.003.

9. Pawar 1, P. V., Kulkarni, P. R. (2015). Design of two stage planetary gear train for high reduction ratio. *International Journal of Research in Engineering and Technology*. ESAT Publishing House, Bangalore, India. Vol. 4, Iss. 6. 150–157. doi: 10.15623/ijret.2015.0406025.

10. Chao Chen, Jiabin Chen (2015). Efficiency analysis of two degrees of freedom epicyclic gear transmission and experimental. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 87. 115–130. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2014.12.017.

11. Tianli Xie, Jibin Hu, Zengxiang Peng, Chunwang Liu (2015). Synthesis of seven-speed planetary gear trains for heavy-duty commercial vehicle. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 90. 230–239. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2014.12.012.

12. Drewniak, J., Garlicka, P., Kolber, A. (2016). Design for the bi-planetary gear train. *Scientific Journal of Silesian University of Technology. Series Transport*. 91. 5–17. doi: 10.20858/sjsutst.2016.91.1.

13. Li Jianying, Hu Qingchun, Zong Changfu, Zhu Tianjun (2017). Power Analysis and Efficiency Calculation of Multistage Micro-planetary Transmission. *Energy Procedia*. 141. 654–659. doi: 10.1016/j.egypro.2017.11.088.

14. Wenjian Yang, Huafeng Ding (2018). Automatic detection of degenerate planetary gear trains with different degree of freedoms. *Applied Mathematical Modelling*. 64. 320–332. doi: 10.1016/j.apm.2018.07.038.

15. Esmail, E. L., Pennestrì, E., Hussein Juber A. (2018). Power losses in two-degrees-of-freedom planetary gear trains: A critical analysis of Radzimovsky's formulas. *Mechanism and Machine Theory*.

- Vol. 128. 191–204. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2018.05.015.
- 16.** Dankov, A. M. (2018). Planetary Continuously Adjustable Gear Train With Force Closure Of Planet Gear And Central Gear: From Idea To Design. *Science & Technique*. 17(3). 228–237. doi: 10.21122/2227-1031-2018-17-3-228-237.
- 17.** Dobariya Mahesh (2018). Design of Compound Planetary Gear Train. *International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology*. Vol. 6. Iss. 4. 3179–3184. doi: 10.22214/ijraset.2018.452.
- 18.** Strilets O. R., Malashchenko V. O., Pasika V. R., Strilets V. M. Dynamichna model keruvannia shvydkosti cherez epitsykl pryvoda iz zubchastoiu dyferentsialnoiu peredacheiu. *Visnyk Natsionalnoho universytetu «Lvivska politekhnika»*. *Dynamika, mitsnist ta proektuvannia mashyn i pryladiv*. Lviv : NULP, 2019. № 911. S. 63–67.
- 19.** Strilets O. R., Malashchenko V. O., Strilets V. M. Dynamika prystroiu dlia keruvannia zminamy shvydkosti z zubchastoiu dyferentsialnoiu peredacheiu i za-mknotoiu hidrosystemoiu cherez soniachne zubchaste koleso. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI»*. *Ser. Mashynoznavstvo ta SAPR*. Kharkiv : NTU «KhPI», 2020. № 1 2020. S. 93–98.
- 20.** Strilets O. R., Malashchenko V. O., Strilets V. M. Dynamika prystroiu dlia keruvannia zminamy shvydkosti z zubchastoiu dyferentsialnoiu peredacheiu i zamknotoiu hidrosystemoiu cherez vodylo. *Naukovyi visnyk KhDMU*. 2020. Kherson : KhDMU, 2020. № 2 (7). S. 176–182.
- 21.** Strilets O. R., Malashchenko V. O., Strilets V. M. Vyznachennia zvedenykh obertalnykh momentiv rivnian dynamiky prystroiv zminy shvydkosti cherez zubchasti dyferentsialy z zamknutymy hidrosystemamy. *Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu*. *Tekhnichni nauky : naukovyi zhurnal*. Khmelnytskyi : KhNU, 2020. Vyp. 4. S. 18–23.
- 22.** Strilets O., Malashchenko V., Strilets V. (2020). Dynamic model of a closed-loop hydraulic system for speed control through gear differential. *Scientific Journal of TNTU*. Tern. : TNTU, 2020. Vol. 98. No 2. P. 91–98.

Strilets O. R., Candidate of Engineering (Ph.D), Associate Professor
(National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

**DYNAMIC MODEL OF SPEED CONTROL IN A DEVICE WITH A
MULTISTAGE GEAR DIFFERENTIAL AND CLOSED-LOOP HYDRAULIC
SYSTEMS THROUGH SUN GEARS**

The aim of the research is to study the dynamic processes in speed change devices using a multistage gear differential with a closed-loop hydraulic system, where the driving link is a carrier driven by an electric motor, and a closed-loop hydraulic system is connected to a sun gear and is used to obtain the required law of motion of the driven link – ring gear. An analysis of recent publications has shown that

little attention has been paid to the dynamics of new speed control devices with multistage gear differentials with closed-loop hydraulic systems and that they are awaiting resolution. The study of the dynamics of such devices will allow to develop methods to reduce the impact of dynamic loads on them. The article proposes a mathematical model of the motion of a mechanical system by the Lagrange method for new devices for changing the speed. The obtained results are the basis for further computer simulation on a PC and quantitative analysis to assess the performance of such devices and select the necessary closed hydraulic systems to control changes in speed.

Keywords: dynamic model; speed change control device; multistage gear differential; closed-loop hydraulic system; sun gear; ring gear; carrier; planet.

Стрилец О. Р., к.т.н., доцент (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ СКОРОСТЬЮ В УСТРОЙСТВАХ С МНОГОСТУПЕНЧАТЫМ ЗУБЧАТЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛОМ И ЗАМКНУТЫМИ ГИДРОСИСТЕМАМИ ПОСРЕДСТВОМ СОЛНЕЧНЫХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

Приведены исследования динамики в устройстве для управления изменениями скорости с многоступенчатым зубчатым дифференциалом и замкнутыми гидросистемами посредством солнечного зубчатого колеса, когда ведущим звеном является водило первой ступени, а ведомым есть эпицикл последней ступени. Рассмотрены составленные и решенные уравнения динамики таких устройств в зависимости от условий их работы методом Лагранжа. Полученные результаты являются подспорьем для дальнейшего компьютерного моделирования на ПК и проведения количественного анализа с целью оценки работы таких устройств и выбору необходимых замкнутых гидросистем для управления скоростью.

Ключевые слова: динамическая модель; устройство для управления изменениями скорости; многоступенчатый зубчатый дифференциал; замкнутая гидросистема; солнечное зубчатое колесо; эпицикл; водило; саттелит.
