

## МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО

УДК 539.4

<https://doi.org/10.31713/vt3202013>

**Кундрат М. М., д.т.н., професор** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, e-mail: m.m.kundrat@nuwm.edu.ua)

### **ОСЬОВІ ЗУСИЛЛЯ ТА КРИТИЧНА ДОВЖИНА ВКЛЮЧЕННЯ ЗМІНИ ХАРАКТЕРУ РУЙНУВАННЯ**

**За умов плоскої задачі досліджується гранична рівновага в тілі з лінійним включенням при розтягу заданими напруженнями на безмежності. Вздовж межі включення від його торців до центральної частини розвиваються локалізовані зони передруйнування, які моделюються тонкими прошарками матеріалу зі заданими напруженнями на берегах. Досліджено вплив навантаження на розподіл осьових зусиль у включенні, можливий характер руйнування композиції. При довжині включення більшій за критичну довжину зміни характеру локального руйнування відбуватиметься його розрив на частини, а при меншій – його відшарування. Показана можливість одночасного множинного поперечного розриву армувального елемента у серединній зоні.**

**Ключові слова:** включення; зона передруйнування; осьові зусилля; критична довжина включення.

Проблема поглибленого вивчення процесів деформування та руйнування структурно неоднорідних тіл, зокрема композитів, постійно користується підвищеною увагою спеціалістів у галузі механіки деформівного твердого тіла. Одним з важливих завдань на шляху до успішного вирішення цієї проблеми є з'ясування умов зародження й розвитку локального руйнування поблизу дефектів та неоднорідностей природного, технологічного чи експлуатаційного походження. Визначення полів напружень і деформацій з додатковим урахуванням явищ розпушення матеріалів, нелінійного та пластичного їх деформування дає можливість більш точно прогнозувати і раціонально використати несучу здатність елементів конструкцій.

**Огляд досліджень.** Поля напружень і переміщень біля вершин включень та їх асимптотичні подання досліджувалися в широкому

колі працює, найбільш повний їх огляд подано в монографії Г. Т. Сулима [1]. В працях [2; 3] запропоновано нову модельну постановку деформування тіла з включенням, яка передбачає двофазну зону передруйнування, що складається із спричиненого високою концентрацією пружних напружень ділянки розпушення та області пластичного зсуву чи адгезії. Це дало змогу отримати більш високий рівень фізичної адекватності моделі та уникнути внаслідок цього сингулярності напружень в околах вершин включення, отримавши природним чином в усіх точках композиції механічно коректні обмежені напруження. Розрахункова модель описується крім пружних сталих складових композиції ще трьома характеристиками: зсувною міцністю (порогом текучості) контактної межі матриця-включення, граничним значенням зсувів та міцністю включення на розрив. Прийнята модель і результати її застосування добре узгоджуються як з експериментальними даними [4; 5], так і числовим експериментом [6; 7] на основі методу скінченних елементів. Вивчено також [8] розвиток локалізованих в тонких областях зон передруйнування в тілі з тонкими пружними включеннями. У цій праці розвиваємо дослідження можливих варіантів розвитку локального руйнування в композиції з лінійним включенням та урахуванням зон передруйнування.

**Постановка задачі.** Приймаємо, що однорідне ізотропне тіло в умовах плоскої задачі містить лінійне, наділене кінцевою міцністю на розрив  $P_{ut}$  жорстке включення завдовжки  $2a$ . Віднесемо композицію до декартової системи координат  $xOy$  із початком у геометричному центрі згідно з рис. 1. За навантаження на нескінченності

$$\sigma_{xx}^{\infty} = q \quad (1)$$

в околах точок максимальної концентрації напружень (вершин включення) розвиваються зони передруйнування, поширюючись у вигляді тонких прошарків вздовж межі між матрицею та включенням. При цьому виконуються такі крайові умови: на ділянках розпушення (ослабленого, неідеального контакту) дотичні напруження лінійно зростають від нуля до свого гра-

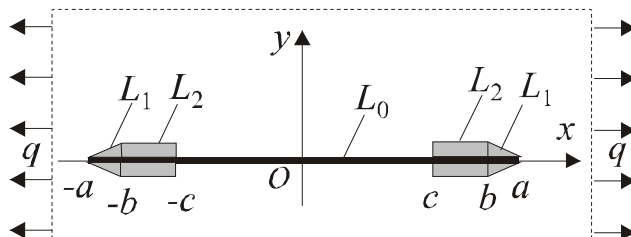


Рис. 1. Схема задачі

ничного значення  $\tau_s^*$

$$\sigma_{xy}^+ = -\sigma_{xy}^- = \tau_s^* \left( 1 - \frac{|x| - b}{a - b} \right) \text{sign}(x) \quad (x \in L_1), \quad (2)$$

а на ділянках пластичного деформування вони сталі

$$\sigma_{xy}^+ = -\sigma_{xy}^- = \tau_s^* \text{sign}(x) \quad (x \in L_2). \quad (3)$$

Величину  $\tau_s^*$  трактуємо як технічну зсувну міцність межі поділу. Компоненти тензора напружень та вектора деформацій через функцію напружень  $\Phi(z)$  подаємо так [9]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4\text{Re}\Phi(z), \quad \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) - \kappa\Phi(\bar{z}) + A_1 + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2G(u' + iv') &= 2\kappa\text{Re}\Phi(z) - A_1 - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad A_1 = q(\kappa - 1)/4. \end{aligned} \quad (4)$$

Після підстановки виразів (4) у крайові умови (1)–(3) і нескладних громіздких перетворень знаходимо комплексний потенціал задачі

$$\Phi(z) = \frac{q(\kappa - 1)}{8\kappa} + \frac{B_1 z}{\sqrt{z^2 - c^2}} + \frac{\tau_s^*}{\pi(\kappa + 1)} f_3(z, a, b, c), \quad (5)$$

де  $B_1 = q(\kappa - 1)/(8\kappa) - 2\tau_s^* f_4(a, b, c)/(\pi(\kappa + 1))$ ,

$$f_3(z, a, b, c) = \frac{1}{a - b} [b\Gamma_1(z, b, c) - a\Gamma_1(z, a, c) + z(\Gamma_2(z, b, c) - \Gamma_2(z, a, c))],$$

$$f_4(a, b, c) = \frac{1}{a - b} \left[ b \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{c} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{c} + \sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{b^2 - c^2} \right],$$

$$\Gamma_1(z, \omega, c) = \ln \left( \frac{\left( \omega \sqrt{z^2 - c^2} - z \sqrt{\omega^2 - c^2} \right)}{\left( \omega \sqrt{z^2 - c^2} + z \sqrt{\omega^2 - c^2} \right)} \right),$$

$$\Gamma_2(z, \omega, c) = \ln \left( \frac{\left( \sqrt{\omega^2 - c^2} - \sqrt{z^2 - c^2} \right)}{\left( \sqrt{\omega^2 - c^2} + \sqrt{z^2 - c^2} \right)} \right), \quad \omega = a, b.$$

Довжину зон передруйнування визначаємо з розв'язку рівняння

$$(\kappa + 1)q + 16\kappa\tau_s^* f_4(a, b, c)/(\pi(\kappa + 1)) = 0. \quad (6)$$

Тут  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  за умов плоского напруженого стану;  $\nu, G$  – коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву матеріалу матриці.

**Осьові зусилля.** Дотичні напруження уздовж поверхні зчеплення включення з тілом спричиняють появу у поперечному перерізі останнього осьового зусилля

$$P(x) = 2 \int_x^a \tau_{xy}(x) dx + P_1(a). \quad (7)$$

Оскільки площа перерізу включення прийнята малою порівняно з боковою поверхнею, то зусиллями  $P_1(a)$  на торець нехтуємо. При такому допущенні на різних ділянках:

$$P(x) = \begin{cases} \tau_s^* (a-x)^2 / (a-b), & (b \leq |x| \leq a), \\ \tau_s^* (a+b-2x), & (c \leq |x| \leq b), \\ (2\tau_s^* / \pi) f_s(x, a, b, c), & (0 \leq |x| \leq c), \end{cases} \quad (8)$$

де  $f_s(x, a, b, c) = 0,5\pi(a+b) + \frac{1}{a-b} \left[ \sqrt{c^2 - x^2} (\sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2}) + (b^2 + x^2) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}} - (a^2 + x^2) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} + 2x \left( b \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{b^2 - c^2}}{b\sqrt{c^2 - x^2}} - a \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{a^2 - c^2}}{a\sqrt{c^2 - x^2}} \right) \right]$ .

Силове навантаження композиції сюди входять опосередковано через значення параметрів  $b, c$ , які визначаються з розв'язку рівняння (6). На рис. 2 подано розподіл знерозмірених осьових зусиль  $\tilde{P}(x) \equiv P(x)/(2\tau_s^* a)$  уздовж правої половини включення ( $0 \leq x \leq a$ ) за  $\gamma = (a-b)/a = 10^{-6}$ : для лінії 1-  $\tilde{q} = q/(2\tau_s^*) = 0,25$  (при цьому згідно рівняння (6) довжина зони переддруйнування  $\varepsilon = (a-c)/a = 0,096034$ ); для лінії 2-  $\tilde{q} = 0,3$

( $\varepsilon = 0,1335$ ). Помітне існування області у центральній частині включення, де розривні зусилля змінюються незначно. Наприклад, якщо не зважати на різницю між найбільшим та найменшим значенням зусиль у межах 5% (скажімо похибки ви-

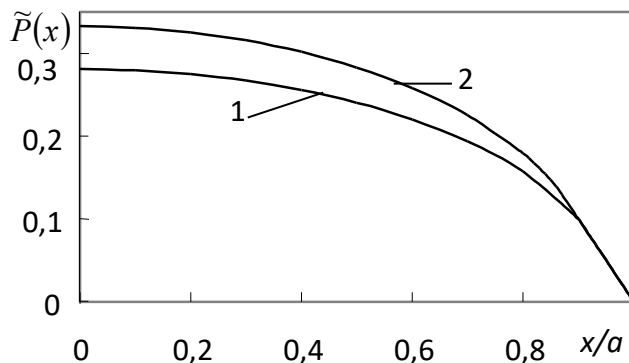


Рис. 2. Осьові зусилля по довжині включення

значення сталих, обчислень, математичної моделі тощо), то така область складає за розглядуваного навантаження не менше третини довжини включення. Це свідчить про можливість одночасного множинного поперечного розриву армувального елемента у даній зоні.

Максимальне значення розривних осьових зусиль досягається на середині включення ( $x = 0$ ) і їх величину обчислюємо за формулою

$$P_{\max}^{(1)} = P(0) = (2\tau_s^* / \pi) f_6(a, b, c), \quad (9)$$

$$\text{де } f_6(a, b, c) = \frac{1}{a-b} \left[ b^2 \operatorname{arctg} \left( c / \sqrt{b^2 - c^2} \right) - a^2 \operatorname{arctg} \left( c / \sqrt{a^2 - c^2} \right) + \right. \\ \left. + 0,5\pi (a^2 - b^2) + c \left( \sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2} \right) \right].$$

Зміна довжини ділянки розпушення слабо впливає на розподіл осьових розривних зусиль у включенні та на їхні максимальні значення. На рис. 3 відображено залежність найбільших зусиль у включенні  $\tilde{P}(0)$  від параметра навантаження за результатами розв'язку системи рівнянь (6), (9). Номери біля

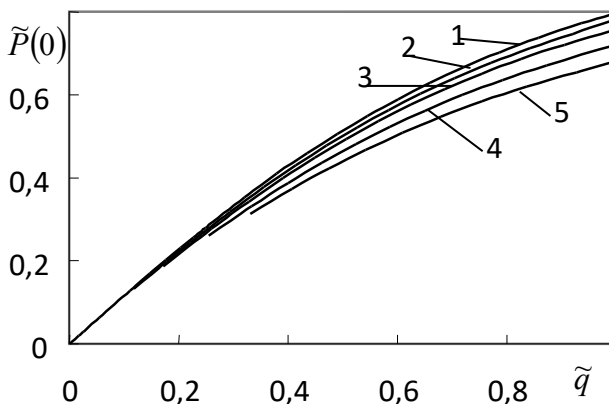


Рис. 3. Найбільші зусилля у включенні

ліній відповідають таким довжинам зони розпушення: 1 –  $\gamma = 10^{-6}$  (зона розпушення практично відсутня); 2 –  $\gamma = 0,05$ ; 3 –  $\gamma = 0,10$ ; 4 –  $\gamma = 0,20$ ; 4 –  $\gamma = 0,30$  ( $\kappa = 2,2$ ). Зі збільшенням довжини ділянки розпушення значення розривних зусиль дещо зменшується.

Зі збільшенням навантаження та розвитком зон передруйнування осьові зусилля також зростають. Їхнє збільшення у включенні відбуватиметься лише до граничного стану можливої втрати зв'язку між включенням та матрицею чи, що те саме, до досягнення розривами переміщень  $u(a)$  граничного значення  $\delta_{2c}$ . Тому враховуючи деформаційний критерій

$$u(a) = \delta_{2c} \quad (10)$$

та формули (6), (9) можна розрахувати максимальні осьові зусилля,

що можуть виникнути у включенні. На рис. 4 (лінія 1) подані значення можливих максимальних зусиль  $\tilde{P}_{\max}^{(1)} \equiv P_{\max}^{(1)} / (a\tau_s^*)$ , отримані з розв'язку системи рівнянь (6), (9), (10), на які необхідно орієнтуватися при проектуванні такого типу композицій ( $\gamma = 10^{-6}$ ,  $\kappa = 2,2$ ,  $\tilde{\delta}_{2c} = G\delta_{2c} / (\tau_s^* a)$ ).

Приймаючи, що допустимі розриви переміщень  $\delta_{2c}$  значно менші від розмірів включення  $2a$ , значення можливих максимальних розривних зусиль у першому наближенні можна записати безпосередньо через параметр  $\delta_{2c}$ , розвинувши формули (9), (6) у ряд за степенями  $\delta_{2c}/a$ :

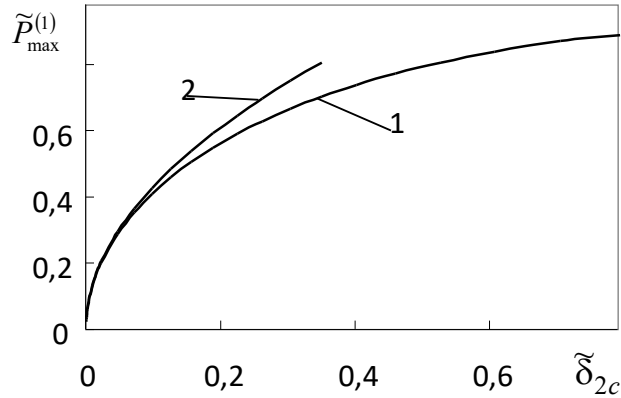


Рис. 4. Максимально можливі зусилля

$$P_{\max}^{(1)} = 4\sqrt{(\kappa+1)Gat_s^*\delta_{2c}/(\pi\kappa)}. \quad (11)$$

Лінія 2 на рис. 3 ілюструє межі можливого використання наближеної формули (11) для розрахунку максимальних можливих осьових зусиль у включенні. З іншого боку, для того, щоб включення залишилося цілим максимальні осьові зусилля в ньому не повинні перевищувати граничного значення  $P_{ut}$ , що відповідає міцності включення на розрив, тобто

$$P_{\max}^{(1)} \leq P_{ut}. \quad (12)$$

Приймаючи умову (12) за критеріальну та розв'язуючи систему двох нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} \pi P_{ut} - 2\tau_s^* f_6(a, b, c) &= 0, \\ \pi(\kappa+1)^2 q^{**} - 16\kappa\tau_s^* f_4(a, b, c) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

обчислюємо значення граничного навантаження  $q = q^{**}$  розриву включення. Просту наближену формулу отримаємо після розвинення в ряд Тейлора за степенями  $(a-c)/a$ , врахувавши лише перші члени ряду

$$q^{**} = 4\kappa P_{ut} / [(\kappa+1)^2 a]. \quad (14)$$

**Критична довжина включення** зміни характеру руйнування. Отже, характер локального руйнування в композиції буде визначатися: з одного боку міцністю включення  $P_{ut}$ , з іншого – міцнісними параметрами межі розділу матриця-включення  $\delta_{2c}$ ,  $\tau_s^*$  (або  $4\gamma_\tau^* = \delta_{2c}\tau_s^*$ ) і за фіксованої довжини включення або розривається, або відшаровується від матриці залежно від того, яка з рівностей у критеріальних умовах (10) чи (12) досягається раніше. На рис. 5 подано схематичну залежність навантаження розриву включення  $q^{**} = c_2/a$  (лінія 1) та навантаження відшарування включення  $q^* = c_3/\sqrt{a}$  (лінія 2) від його півдовжини. При цьому прийнято

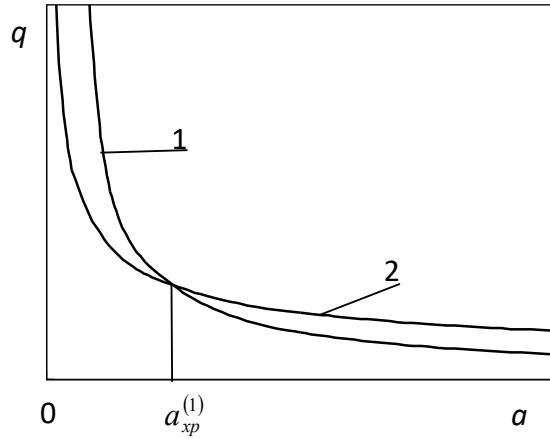


Рис. 5. Критична довжина включення

розриву включення  $q^{**} = c_2/a$  (лінія 1) та навантаження відшарування включення  $q^* = c_3/\sqrt{a}$  (лінія 2) від його півдовжини. При цьому прийнято

$$c_2 = 4\kappa P_{ut} / [(\kappa + 1)^2] = 1,$$

$$c_3 = 16\sqrt{G\kappa\tau_s^*\delta_{2c}} / [(\kappa + 1)\sqrt{\pi(\kappa + 1)}] = 1.$$

Точка перетину ліній 1 та 2 визначає критичну довжину включення  $a = a_{xp}^{(1)}$  зміни характеру руйнування в композиції. При довжині включення більшій за довжину зміни характеру руйнування  $a_{xp}^{(1)}$ , руйнування проходить методом його розриву, при меншій – методом відшарування. Зміна значень  $c_2$  та  $c_3$  призводить лише до переміщення точки перетину ліній 1 та 2 на координатній площині  $aOq$ , але якісна картина залишається такою ж.

У першому наближенні критична довжина включення обчислюється за формулою

$$a_{xp}^{(1)} = \frac{\pi\kappa P_{ut}^2}{16G(\kappa + 1)\tau_s^*\delta_{2c}},$$

і при  $a > a_{xp}^{(1)}$  зі збільшенням навантаження воно розірветься. Відповідне граничне навантаження обчислюємо з розв'язку системи рівнянь (13) або в першому наближенні за формулою (14). При довжині

включення меншій за довжину зміни характеру руйнування, розвиток руйнування відбуватиметься внаслідок його відшарування. Граничне навантаження при цьому обчислюємо з розв'язку системи рівнянь за деформаційним критерієм (10).

**Висновки.** Отримано розв'язок двовимірної модельної задачі для армованого лінійним включенням тіла, що природним чином не містять особливостей у напруженнях. За відомою довжиною зони передруйнування та граничним навантаженням можна оцінити критичну довжину включення зміни характеру руйнування, граничні навантаження для розриву включення чи його відшарування. Зі збільшенням навантаження осьові зусилля також зростають. Їхнє збільшення у включенні відбуватиметься лише до граничного стану можливої втрати зв'язку між включенням та матрицею чи, що те саме, до досягнення розривами переміщень граничного значення. Показана можливість одночасного множинного поперечного розриву армувального елемента у серединній зоні.

1. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформі-  
вних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів : Дослідно-видавничий  
центр НТШ, 2007. 716 с. 2. Кундрат М. М. Гранична рівновага композиції з  
жорсткими лінійними включеннями. *Застосування обчислювальної техніки,  
математичного моделювання у наукових дослідженнях* : шоста Всеукраїнська  
наукова конф. Львів, 1999. С. 61–62. 3. Kundrat M. M. Working Length of a  
High-Modulus Linear Inclusion Under the Action of Concentrated Cyclic Forces  
Within the Framework of Plane Problem. *Materials Science*. 2016. Vol. 52. № 1.  
P. 72–82. 4. Шапи К. Механизм передачи нагрузки через поверхность  
раздела. *Композиционные материалы. Поверхности раздела в полимерных  
композитах*. М. : Мир, 1978. Т. 6. С. 42–87. 5. Эберт Л. Дж., Райт П. К. Механи-  
ческие поверхности раздела. *Композиционные материалы. Поверхности  
раздела в металлических композитах* / редактор А. Меткалф. М. : Мир, 1978.  
Т. 1. С. 42–76. 6. Сулим Г. Т., Рокач И. В. Метод конечных элементов в зада-  
че о тонкостенном включении. *Секц. физ.-хим. мех. материалов* : материалы  
10 конф. мол. ученых физ.-мех. ин-та АН УССР. Львов, 12–16 окт., 1981.  
Львов, 1983. 3 с. Деп. в ВИНТИ 12 апр. 1983 г. № 1948-  
83. 7. Gdoutos E. E., Giannakopoulou A. Stress and failure analysis of brittle  
matrix composites.: *Stress analysis. Int. J. of Fracture*. 1999. Part 1. V. 98.  
P. 263–277. 8. Кундрат М. М., Сулим Г. Т. Зони передруйнування в компози-  
ції з пружним високомодульним стрічковим включенням за симетричного  
та антисиметричного навантажень. *Машинознавство*. 2003. № 11. С. 3–8.  
9. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической тео-  
рии упругости. М. : Наука, 1966. 707 с.



## REFERENCES:

1. Sulym H. T. Osnovy matematychnoi teorii termopruznoi rivnovahy deformivnykh tverdykh til z tonkymy vkluchenniamy. Lviv : Doslidno-vydavnychiy tsentr NTSh, 2007. 716 s.
2. Kundrat M. M. Hranychna rivnovaha kompozytsii z zhorstkymy liniinymy vkluchenniamy. *Zastosuvannia obchysliuvalnoi tekhniki, matematychnoho modeliuvannia u naukovykh doslidzhenniakh* : shosta Vseukrainska naukova konf. Lviv, 1999. S. 61–62.
3. Kundrat M. M. Working Length of a High-Modulus Linear Inclusion Under the Action of Concentrated Cyclic Forces Within the Framework of Plane Problem. *Materials Science*. 2016. Vol. 52. № 1. P. 72–82.
4. Shami K. Mehanizm peredachi nagruzki cherez poverhnost razdela. *Kompozitsionnyie materialyi. Poverhnosti razdela v polimernyih kompozitah*. M. : Mir, 1978. T. 6. S. 42–87.
5. Ebert L. Dj., Rayt P. K. Mehanicheskie poverhnosti razdela. *Kompozitsionnyie materialyi. Poverhnosti razdela v metallicheskih kompozitah* / redaktor A. Metkalf. M. : Mir, 1978. T. 1. S. 42–76.
6. Sulim G. T., Rokach I. V. Metod konechnykh elementov v zadache o tonkostennom vklyuchenii. *Sekts. fiz.-him. meh. materialov* : materialyi 10 konf. mol. uchenykh fiz.-meh. in-ta AN USSR. Lvov, 12–16 okt., 1981. Lvov, 1983. 3 s. Dep. v VINITI 12 apr. 1983 g. № 1948-83.
7. Gdoutos E. E., Giannakopoulou A. Stress and failure analysis of brittle matrix composites.: *Stress analysis. Int. J. of Fracture*. 1999. Part 1. V. 98. P. 263–277.
8. Kundrat M. M., Sulym H. T. Zony peredruinuvannia v kompozytsii z pruzhnym vysokomodulnym strichkovym vkluchenniam za symmetrychnoho ta antysymmetrychnoho navantazhen. *Mashynoznavstvo*. 2003. № 11. S. 3–8.
9. Mushelishvili N. I. Nekotoryie osnovnyie zadachi matematicheskoy teorii uprugosti. M. : Nauka, 1966. 707 s.

---

**Kundrat M. M., Doctor of Engineering, Professor** (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

### **AXIAL FORCES AND CRITICAL LENGTH OF A INCLUSION OF CHANGING THE CHARACTER OF FRACTURE**

**Local fracture of the composition with line inclusion in conditions of plane problem is research by tension on infinity. Localized zones of prefracture are developed along the plate-inclusion boundary from its ends to central part. On area outside of zones of prefracture the perfect mechanical contact is remaining. Analytical decision of the problem by means of complex potentials is received. Influence of load on character of fracture in composition is research. Physically correct**

limited stresses and deformations are received in all points of a composition. Tangents stresses also satisfy to relationship of pair law. Length of the inclusion, which together with physical and mechanical parameters determines the mechanism of fracture in composition, is identification. If length of inclusion is greater from critical length change of fracture character there is his rupture, if lesser – removing the separation. For each of fracture method the values of the limiting load are definite. As the load increases and the prefracture zones develop, the axial forces also increase. The possibility of simultaneous multiple transverse rupture of the reinforcing element in the middle zone is shown.

**Keywords:** inclusion; prefracture zone; axial forces; critical inclusion length.

---

**Кундрат Н. М., д.т.н., профессор** (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

### **ОСЕВЫЕ УСИЛИЯ И КРИТИЧЕСКАЯ ДЛИНА ВКЛЮЧЕНИЯ СМЕНЫ ХАРАКТЕРА РАЗРУШЕНИЯ**

В условиях плоской задачи исследуется локальное разрушение в теле с линейным включением при растяжении напряжениями на бесконечности. Локализованные зоны предразрушения развиваются вдоль границы включения от его торцов к центральной части. Исследовано влияние нагрузки на развитие зон, характер разрушения в композиции. Аналитическое решение задачи получено с использованием комплексных потенциалов путем сведения к задаче сопряжения. Установлена длина включения, которая вместе с физико-механическими характеристиками определяет механизм разрушения в композиции. При длине включения большей от критической длины смены характера разрушения происходит его разрыв, а при меньшей – отслоение. Показана возможность одновременного множественного поперечного разрыва армирующего элемента в срединной зоне.

**Ключевые слова:** включение; зона предразрушения; осевые усилия; критическая длина включения.

---