

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
ІНФОРМАТИКА ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

УДК 519.6

<https://doi.org/10.31713/vt3202015>

Бойчура М. В., к.т.н. (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

**ЧИСЛОВІ МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ МОДЕЛЮВАННЯ
КВАЗІІДЕАЛЬНИХ ПОЛІВ ЗА УМОВИ НАЯВНОСТІ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНЬ**

Методику математичного моделювання квазіідеального руху частинок (зарядів, рідини) у середовищі, обмеженому лініями течії та екіпотенціальними лініями, поширено на випадок наявності тонких включень. Останні вважаються тонкими у порівнянні з дискретним розбиттям електро- чи гідродинамічної сітки. Відповідний алгоритм передбачає почергову параметризацію граничних та внутрішніх вузлів сіткових областей і квазіконформних інваріантів з використанням ідей методу блочної ітерації. Проведено числові експерименти та здійснено їх оцінку. Зокрема встановлено, що похибки, спричинені наявністю тонких включень, чинять лише локалізований вплив на шуканий розв'язок.

Ключові слова: математичне моделювання; квазіконформні відображення; тонкі включення; нелінійні задачі; числові методи.

Вступ. Часто дослідження різних фізичних явищ та процесів є надто дорогавартісним або, взагалі, неможливим. Тому значного поширення набули методи математичного моделювання. Проте через низку спрощень і узагальнень отримувані розрахункові параметри часто суттєво відрізняються від реальних. Наприклад, у роботі [1] нехтується вплив поляризаційного ефекту, імпедансу, дослідження проводяться лише при низьких частотах тощо. Це суттєво обмежує клас задач, щодо яких можливо здійснювати моделювання числовими методами квазіконформних відображень [2], який застосовується у наведеній роботі. Проте один із найбільш суттєвих тут є поляризаційний ефект, який виникає при переміщенні зарядів через тонкі стінки за рахунок великих «стрибків» значень потенціалу, течії, коефіцієнта провідності (пористості) тощо.

У низці випадків застосовувати лише засоби математичного моделювання виявляється замало, через що часто приходять до методів ідентифікації структури середовищ. Наприклад, при розв'язанні задач електричної томографії [1] щодо людського тіла, шкіру можна вважати тонким прошарком з невеликим значенням коефіцієнта провідності. Тому тут також постає питання врахування поширення зарядів через тонку стінку.

Метою даної роботи є поширення відомої методики квазіконформних відображень моделювання руху частинок у середовищі, обмеженому лініями течії та екіпотенціальними лініями [2] на випадки наявності тонких включень [3] із «стрибками» значень квазіпотенціалу.

Постановка задачі. Моделювання руху частинок (рідини, зарядів) здійснюватимемо на основі закону руху (Дарсі, Ома тощо) $\vec{v} = \kappa \text{grad} \varphi$ та рівняння нерозривності $\text{div} \vec{v} = 0$ [2]. Вважатимемо, що границя досліджуваної області ∂G_z ($z = x + iy$) (рис. 1, а) є В-сплайновою, а саме:

$$\partial G_z = ABCD = \left\{ (x, y) : \tilde{x}(\tau) = \sum_{\xi=0}^{\tilde{m}-4} \tilde{x}_\xi b_{\xi,3}(\tau), \tilde{y}(\tau) = \sum_{\xi=0}^{\tilde{m}-4} \tilde{y}_\xi b_{\xi,3}(\tau), \right.$$

$$\left. \text{де } \tilde{x}(1) = \tilde{x}(0), \tilde{y}(1) = \tilde{y}(0), b_{\xi,0}(\tau) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \tau \in [\tau_\xi, \tau_{\xi+1}), \\ 0, \text{ якщо } \tau \notin [\tau_\xi, \tau_{\xi+1}), \end{cases} \right.$$

$$\left. b_{\xi,3}(\tau) = \frac{\tau - \tau_\xi}{\tau_{\xi+3} - \tau_\xi} b_{\xi,2}(\tau) + \frac{\tau_{\xi+4} - \tau}{\tau_{\xi+4} - \tau_{\xi+1}} b_{\xi+1,2}(\tau) \right\},$$

із формою, що визначається контрольними точками $(\tilde{x}_\xi, \tilde{y}_\xi)$ ($\xi = \overline{0, \tilde{m}-3}$) [4]. Аналогічно до [2], приходимо до висновку, що в кожній точці G_z повинні виконуватись узагальнення умов Коші–Рімана

$$\kappa \varphi'_x = \psi'_y, \kappa \varphi'_y = -\psi'_x \quad (1)$$

при заданих крайових умовах

$$\varphi|_{AB} = \varphi^*, \varphi|_{CD} = \varphi^*, \psi|_{AD} = 0, \psi|_{BC} = Q \quad (\int_{AB} \kappa \varphi'_n dl = Q). \quad (2)$$

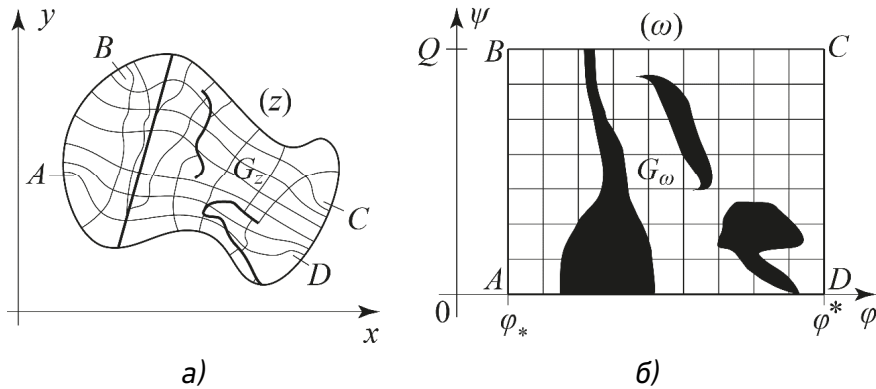


Рис. 1. Типова фізична область G_z (а) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу G_ω (б); товсті лінії на (а) та зафарбовані підобласті на (б) відповідають «стрибкам» значень квазіпотенціалів

Тут AD і BC – непроникні граничні лінії течії; n – одиничний вектор нормалі; Q – повна витрата; $\varphi = \varphi(x, y)$ і $\psi = \psi(x, y)$ – комплексно спряжені функції квазіпотенціалу і течії, відповідно; $\kappa = \kappa(x, y)$ – коефіцієнт провідності (фільтрації); $A = (\tilde{x}(\tau_A), \tilde{y}(\tau_A))$, $B = (\tilde{x}(\tau_B), \tilde{y}(\tau_B))$, $C = (\tilde{x}(\tau_C), \tilde{y}(\tau_C))$, $D = (\tilde{x}(\tau_D), \tilde{y}(\tau_D))$ – відмічені точки на ∂G_z ; $\tau_A, \tau_B, \tau_C, \tau_D$ – параметри задання кутових точок; φ_* та φ^* – задані потенціали ($-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$); $\vec{v} = \vec{v}(x, y)$ – швидкість. Не зменшуючи загальності, вважатимемо далі, що, аналогічно до [1], коефіцієнт провідності (фільтрації) задається у вигляді:

$$\kappa(x, y, a_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, \dots, a_{s,0}, a_{s-1,1}, \dots, a_{0,s}) = \sum_{k=0}^{\tilde{s}} \sum_{r=0}^k a_{k-r,r} x^{k-r} y^r, \quad (3)$$

де $a_{k-r,r}$ ($k = 0, \dots, \tilde{s}$, $r = 0, \dots, k$) та \tilde{s} – задані параметри.

Нехай у середовищі, впоперек ліній течії, наявними є низка тонких включень [3], через які мають місце «стрибки» значень квазіпотенціалу (рис. 1). Їх можливо охарактеризувати наступним чином

$$[\varphi] \Big|_{L_\zeta} = g_\zeta(x, y), \quad [\psi] \Big|_{L_\zeta} = 0 \quad (\zeta = \overline{1, s}), \quad (4)$$

де $g_\zeta(x, y) > 0$ – розподіл приросту квазіпотенціалу на кривій L_ζ . У такому випадку, задача моделювання руху частинок в області G_z

полягає у розрахунку функцій $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$ (у побудові електро- чи гідродинамічної сітки) при заданому коефіцієнті провідності (фільтрації) (3) та виконанні умов (1), (2), (4).

Враховуючи, в першу чергу, складність здійснення відображення криволінійної області G_z (рис. 1, а) на прямокутну G_ω ($\omega = \varphi + i\psi$) (рис. 1, б), доцільно [2] перейти до відповідного оберненого квазіконформного відображення. Останнє зводиться до розв'язання в G_ω узагальнень рівнянь Лапласа

$$\left(x'_\varphi / \kappa\right)'_\varphi + \left(\kappa x'_\psi\right)'_\psi = 0, \left(y'_\varphi / \kappa\right)'_\varphi + \left(\kappa y'_\psi\right)'_\psi = 0 \quad (5)$$

стосовно функцій $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ при заданому коефіцієнті провідності (фільтрації) (3), крайових умовах, умовах ортогональності на границі та умовах-аналогах (4)

$$\begin{aligned} x(\varphi_*, \psi) &= \tilde{x}(\tau_*(\psi)), \quad y(\varphi_*, \psi) = \tilde{y}(\tau_*(\psi)), \quad x(\varphi, Q) = \tilde{x}(\bar{\tau}(\varphi)), \\ y(\varphi, Q) &= \tilde{y}(\bar{\tau}(\varphi)), \quad x(\varphi^*, \psi) = \tilde{x}(\tau^*(\psi)), \quad y(\varphi^*, \psi) = \tilde{y}(\tau^*(\psi)), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} x(\varphi, 0) &= \tilde{x}(\underline{\tau}(\varphi)), \quad y(\varphi, 0) = \tilde{y}(\underline{\tau}(\varphi)), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad 0 \leq \psi \leq Q; \\ \tilde{x}'(\tau) y'_\varphi(\varphi_*, \psi) + \tilde{y}'(\tau) x'_\varphi(\varphi_*, \psi) &= 0, \quad \tilde{x}'(\tau) y'_\varphi(\varphi^*, \psi) + \\ + \tilde{y}'(\tau) x'_\varphi(\varphi^*, \psi) &= 0, \quad \tilde{x}'(\tau) y'_\psi(\varphi, 0) + \tilde{y}'(\tau) x'_\psi(\varphi, 0) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(\tau) y'_\psi(\varphi, Q) + \tilde{y}'(\tau) x'_\psi(\varphi, Q) &= 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad 0 \leq \psi \leq Q; \\ x(\tilde{\varphi}, \psi) &= x(\tilde{\varphi} + g_\zeta(x(\tilde{\varphi}, \psi), y(\tilde{\varphi}, \psi)), y(\tilde{\varphi}, \psi)), \\ y(\tilde{\varphi}, \psi) &= y(\tilde{\varphi} + g_\zeta(x(\tilde{\varphi}, \psi), y(\tilde{\varphi}, \psi)), y(\tilde{\varphi}, \psi)), \end{aligned} \quad (8)$$

де $\tau = \tau_*(\psi)$, $\tau = \tau^*(\psi)$, $\tau = \underline{\tau}(\varphi)$, $\tau = \bar{\tau}(\varphi)$ – функції, що отримуються аналогічно до [1], в результаті інтерполяції, $\tilde{\varphi}$ – одностороннє значення квазіпотенціалу на тонкому розрізі.

Різницевий аналог та розв'язання задачі (5)–(8). Здійснимо розбиття області G_ω наступним чином [2]:

$$\begin{aligned} G_\omega^\gamma &= \left\{ \omega_{i,j} = \varphi_i + i\psi_j : \varphi_i = i\Delta\varphi, \quad i = \overline{0, m+1}, \quad \Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*) / (m+1); \right. \\ &\left. \psi_j = j\Delta\psi, \quad j = \overline{0, n+1}, \quad \Delta\psi = Q / (n+1); \quad \gamma = \Delta\varphi / \Delta\psi; \quad m, n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

У такому випадку, різкі «стрибки» квазіпотенціалу в тонких включеннях (8) можливо змоделювати кількома екіпотенціальними лініями, розміщеними нескінченно близько (у порівнянні з розбиттям сітки) одна до одної. У відповідних вузлах покладемо $b_{i,j}^s = 1$, а в усіх інших – $b_{i,j}^s = 0$. Тоді, застосувавши однорідні консервативні різницевої схеми зі змінним кроком [5] до узагальнень рівнянь Лапласа (5), отримаємо [2]:

$$\begin{aligned}
 x_{i,j} &= \left(\frac{x_{i,j}^r \kappa_{i,j}^l \Delta \varphi_i^l + x_{i,j}^l \kappa_{i,j}^r \Delta \varphi_i^r}{\kappa_{i,j}^l \kappa_{i,j}^r \Delta \varphi_i^l \Delta \varphi_i^c \Delta \varphi_i^r} + \frac{\kappa_{i,j+1/2} x_{i,j+1} + \kappa_{i,j-1/2} x_{i,j-1}}{2\Delta\psi^2} \right) / \\
 &\quad / \left(\frac{\kappa_{i,j}^l \Delta \varphi_i^l + \kappa_{i,j}^r \Delta \varphi_i^r}{\kappa_{i,j}^l \kappa_{i,j}^r \Delta \varphi_i^l \Delta \varphi_i^c \Delta \varphi_i^r} + \frac{\kappa_{i,j+1/2} + \kappa_{i,j-1/2}}{2\Delta\psi^2} \right), \\
 y_{i,j} &= \left(\frac{y_{i,j}^r \kappa_{i,j}^l \Delta \varphi_i^l + y_{i,j}^l \kappa_{i,j}^r \Delta \varphi_i^r}{\kappa_{i,j}^l \kappa_{i,j}^r \Delta \varphi_i^l \Delta \varphi_i^c \Delta \varphi_i^r} + \frac{\kappa_{i,j+1/2} y_{i,j+1} + \kappa_{i,j-1/2} y_{i,j-1}}{2\Delta\psi^2} \right) / \\
 &\quad / \left(\frac{\kappa_{i,j}^l \Delta \varphi_i^l + \kappa_{i,j}^r \Delta \varphi_i^r}{\kappa_{i,j}^l \kappa_{i,j}^r \Delta \varphi_i^l \Delta \varphi_i^c \Delta \varphi_i^r} + \frac{\kappa_{i,j+1/2} + \kappa_{i,j-1/2}}{2\Delta\psi^2} \right) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Тут параметри формули (9) визначаються згідно табл. 1;

$$\begin{aligned}
 \kappa_{i\pm 1/2,j} &= \kappa \left((x_{i,j} + x_{i\pm 1,j}) / 2, (y_{i,j} + y_{i\pm 1,j}) / 2 \right), \\
 \kappa_{i,j\pm 1/2} &= \kappa \left((x_{i,j} + x_{i,j\pm 1}) / 2, (y_{i,j} + y_{i,j\pm 1}) / 2 \right), \\
 \tilde{\kappa}_{i-1/2,j}^l &= \kappa \left(0.5 \left(x_{i-[\Delta\varphi_i^l / \Delta\varphi],j} + x_{i,j} \right), 0.5 \left(y_{i-[\Delta\varphi_i^l / \Delta\varphi],j} + y_{i,j} \right) \right), \\
 \tilde{\kappa}_{i+1/2,j}^r &= \kappa \left(0.5 \left(x_{i,j} + x_{i+[\Delta\varphi_i^r / \Delta\varphi],j} \right), 0.5 \left(y_{i,j} + y_{i+[\Delta\varphi_i^r / \Delta\varphi],j} \right) \right); \\
 x_{i,j} &= x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \quad z_{i,j} = x_{i,j} + iy_{i,j}, \quad \kappa_{i,j} = \kappa(x_{i,j}, y_{i,j}); \\
 \gamma &= \sum_{\substack{i,j=0 \\ (b_{i,j}=0, b_{i+1,j}=0)}}^{m,n} \frac{\kappa_{i,j}^{-1} (d(z_{i,j+1}, z_{i+1,j+1}) + d(z_{i,j}, z_{i+1,j}))}{(m+1)(n+1)(d(z_{i,j}, z_{i,j+1}) + d(z_{i+1,j}, z_{i+1,j+1}))}; \tag{10}
 \end{aligned}$$

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Таблиця 1

Параметри формули (9)

$b_{i,j}^{\zeta} = 0$	$b_{i,j}^{\zeta} = 0, b_{i+1,j}^{\zeta} = 1$	$b_{i-1,j}^{\zeta} = 1, b_{i,j}^{\zeta} = 0$
$x_{i,j}^l = x_{i-1,j}$	$x_{i,j}^l = x_{i-1,j}$	$x_{i,j}^l = x_{i-[\Delta\varphi_i^l / \Delta\varphi],j}$
$x_{i,j}^r = x_{i+1,j}$	$x_{i,j}^r = x_{i+[\Delta\varphi_i^r / \Delta\varphi],j}$	$x_{i,j}^r = x_{i+1,j}$
$y_{i,j}^l = y_{i-1,j}$	$y_{i,j}^l = y_{i-1,j}$	$y_{i,j}^l = y_{i-[\Delta\varphi_i^l / \Delta\varphi],j}$
$y_{i,j}^r = y_{i+1,j}$	$y_{i,j}^r = y_{i+[\Delta\varphi_i^r / \Delta\varphi],j}$	$y_{i,j}^r = y_{i+1,j}$
$\kappa_{i,j}^l = \kappa_{i-1/2,j}$	$\kappa_{i,j}^l = \kappa_{i-1/2,j}$	$\kappa_{i,j}^l = \tilde{\kappa}_{i-1/2,j}^l$
$\kappa_{i,j}^r = \kappa_{i+1/2,j}$	$\kappa_{i,j}^r = \tilde{\kappa}_{i+1/2,j}^r$	$\kappa_{i,j}^r = \kappa_{i+1/2,j}$
$\Delta\varphi_i^l = \Delta\varphi$	$\Delta\varphi_i^l = \Delta\varphi$	$\Delta\varphi_i^l = \sum_{i_2=i}^{i_2+i_2} b_{2i-i_2,j} \Delta\varphi$
$\Delta\varphi_i^r = \Delta\varphi$	$\Delta\varphi_i^r = \sum_{i_2=i}^{i_2+b_{i_2,j}} \Delta\varphi$	$\Delta\varphi_i^r = \Delta\varphi$
$\Delta\varphi_i^{\zeta} = 2\Delta\varphi$	$\Delta\varphi_i^{\zeta} = \Delta\varphi_i^l + \Delta\varphi_i^r$	$\Delta\varphi_i^{\zeta} = \Delta\varphi_i^l + \Delta\varphi_i^r$

Умови (6) та (7) наблизимо таким чином [2; 5]:

$$\begin{aligned} x_{0,j} &= \tilde{x}(\tau_*(\psi_j)), \quad y_{0,j} = \tilde{y}(\tau_*(\psi_j)), \quad x_{i,n+1} = \tilde{x}(\bar{\tau}(\varphi_i)), \quad y_{i,n+1} = \\ &= \tilde{y}(\bar{\tau}(\varphi_i)), \quad x_{m+1,j} = \tilde{x}(\tau^*(\psi_j)), \quad y_{m+1,j} = \tilde{y}(\tau^*(\psi_j)), \quad x_{i,0} = \\ &= \tilde{x}(\underline{\tau}(\varphi_i)), \quad y_{i,0} = \tilde{y}(\underline{\tau}(\varphi_i)) \quad (b_{i,j} = 0, \quad 0 \leq i \leq m+1, \quad 0 \leq j \leq n+1); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(\tau)(y_{1,j} - y_{0,j}) + \tilde{y}'(\tau)(x_{1,j} - x_{0,j}) &= 0, \quad \tau \in [\tau_B, \tau_A], \\ \tilde{x}'(\tau)(y_{m,j} - x_{m+1,j}) + \tilde{y}'(\tau)(x_{m,j} - x_{m+1,j}) &= 0, \quad \tau \in [\tau_D, \tau_C], \\ \tilde{x}'(\tau)(y_{i,n} - x_{i,n+1}) + \tilde{y}'(\tau)(x_{i,n} - x_{i,n+1}) &= 0, \quad \tau \in [\tau_C, \tau_B], \\ \tilde{x}'(\tau)(y_{i,1} - y_{i,0}) + \tilde{y}'(\tau)(x_{i,1} - x_{i,0}) &= 0, \quad \tau \in [\tau_A, \tau_D] \\ &(b_{i,j} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n). \end{aligned} \quad (12)$$

Вузли, для яких $b_{i,j}^{\zeta} = 1$, розміщуються вздовж тонких включень у точках $(x_{i,j}^{\zeta}, y_{i,j}^{\zeta})$ перетину кривих L_{ζ} ($\zeta = \overline{1, s}$) і ліній течії. Відповідні координати визначаються так:

$$x_{i_2, j} = x_{i, j}^{\zeta}, \quad y_{i_2, j} = y_{i, j}^{\zeta} \quad (i_2 = \overline{i+1, f_{i, j} - 1}), \quad (13)$$

де $(x_{i, j}, y_{i, j})$ і $(x_{f_{i, j}, j}, y_{f_{i, j}, j})$ – вузли перед включенням і після нього,

$$f_{i, j} = i + \left[d(z_{i, j}, z_{i+1, j}) / d(z_{i, j}, z_{i-1, j}) + g_{\zeta}(x_{i, j}^{\zeta}, y_{i, j}^{\zeta}) / \Delta\varphi \right] + 1.$$

Алгоритм розв'язання різницевої задачі (8)–(13) при заданому коефіцієнті провідності (фільтрації) (3) передбачає почергову параметризацію граничних та внутрішніх вузлів сіткових областей і квазіконформних інваріантів з використанням ідей методу блочної ітерації [1; 2; 6]. Спершу задаємо границю області G_z (функціями $x = \tilde{x}(\tau)$, $y = \tilde{y}(\tau)$), параметри m , n розбиття області G_{ω}^y , точності ε та задання кутових точок τ_A , τ_B , τ_C , τ_D , квазіпотенціали φ_* , φ^* , номер кроку ітерації $\rho = 0$, криві L_{ζ} та функції $g_{\zeta}(x, y)$. Після чого обчислюємо крок $\Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*) / (m+1)$ та координати кутових точок на ∂G_z

$$C_p = (x_{m+1, n+1}, y_{m+1, n+1}) = (\tilde{x}(\tau_C), \tilde{y}(\tau_C)),$$

$$D_p = (x_{m+1, 0}, y_{m+1, 0}) = (\tilde{x}(\tau_D), \tilde{y}(\tau_D)),$$

$$A_p = (x_{0, 0}, y_{0, 0}) = (\tilde{x}(\tau_A), \tilde{y}(\tau_A)),$$

$$B_p = (x_{0, n+1}, y_{0, n+1}) = (\tilde{x}(\tau_B), \tilde{y}(\tau_B)).$$

Задаємо початкові наближення координат внутрішніх $(x_{i, j}^{(0)}, y_{i, j}^{(0)})$ і частини граничних $(x_{i, 0}^{(0)}, y_{i, 0}^{(0)})$, $(x_{i, n+1}^{(0)}, y_{i, n+1}^{(0)})$, $(x_{0, j}^{(0)}, y_{0, j}^{(0)})$, $(x_{m+1, j}^{(0)}, y_{m+1, j}^{(0)})$ вузлів ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$), $\gamma^{(0)}$ (за формулою (10)) та крок $\Delta\psi^{(0)} = \Delta\varphi / \gamma^{(0)}$.

Знаходимо точки $(x_{i, j}^{\zeta(\rho)}, y_{i, j}^{\zeta(\rho)})$ перетину кривих L_{ζ} ($\zeta = \overline{1, s}$) і

ліній течії. Помічаємо через $b_{i,j}^{\zeta(\rho+1)} = 1$ вузли, які на даній ітерації мають квазіпотенціали в межах

$$0 \leq \varphi_{i,j}^{(\rho)} - \left(i + d \left(z_{i,j}^{(\rho)}, z_{i+1,j}^{(\rho)} \right) / d \left(z_{i,j}^{(\rho)}, z_{i-1,j}^{(\rho)} \right) \right) \Delta \varphi \leq g_{\zeta} \left(x_{i,j}^{\zeta(\rho)}, y_{i,j}^{\zeta(\rho)} \right).$$

Застосовуємо формулу (13). Непоміченим попередньо вузлам надаємо значення $b_{i,j}^{\zeta(\rho+1)} = 0$.

При $\rho + 1$ уточнюємо квазіконформний інваріант за формулою (10), внутрішні за формулою (9) і граничні вузли за системами рівнянь, сформованими з (11), (12). Знаходимо $\Delta \psi^{(\rho+1)} = \Delta \varphi / \gamma^{(\rho+1)}$.

В ітераційному процесі швидкість (густина струму) на приграничних вузлах тонкого включення може набувати неприродних значень. У таких випадках, за одночасного виконання умов

$$d \left(z_{i-1,j}^{(\rho+1)}, z_{i,j}^{(\rho+1)} \right) / d \left(z_{i-1,j+1}^{(\rho+1)}, z_{i,j+1}^{(\rho+1)} \right) < 0.99, \quad b_{i,j}^{\zeta(\rho+1)} = 1,$$

деякі вузли доцільно перемістити, наприклад, використовуючи вирази: $x_{i,j+1}^{(\rho+2)} = 0.99 \left(x_{i-1,j+1}^{(\rho+1)} + x_{i,j+1}^{(\rho+1)} \right)$, $y_{i,j+1}^{(\rho+2)} = 0.99 \left(y_{i-1,j+1}^{(\rho+1)} + y_{i,j+1}^{(\rho+1)} \right)$.

Завершення ітераційного процесу відбувається за умов [2]. У випадку їх виконання, виводимо гідродинамічну (електродинамічну) сітку, область комплексного квазіпотенціалу, поверхню швидкостей (густин струму), повну витрату, значення нев'язки квазіконформності тощо [1; 2]. Інакше – знову збільшуємо ρ і повертаємось до знаходження точок перетину кривих L_{ζ} та ліній течії.

Провівши розрахунки за наведеним алгоритмом в області G_z , межа якої задається В-сплайновою функцією [4] з $\tilde{m} = 11$ контрольними точками (90, 196), (132, 143), (37, 7), (203, 79), (280, 22), (295, 104), (358, 168), (276, 221), (170, 257), (33, 269), (90, 196), а також при $\kappa(x, y) = 2 + 0.003x + 0.004y + 10^{-5}x^2 - 3 \cdot 10^{-5}xy - 10^{-5}y^2$, $L_0 = \partial G_z$, $L_1 = \{(x, y) : x = 200, y \leq 120\}$, $g_0(x, y) = 0$, $g_1(x, y) = 0.02$, $s = 1$, $m = 160$, $n = 103$, $\tilde{s} = 2$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\tau_A = 0.99$, $\tau_B = 0.92$, $\tau_C = 0.49$, $\tau_D = 0.44$, отримано сітку руху (рис. 2, а) та відповідну область комплексного квазіпотенціалу (рис. 2, б). Крім того, при похибці $Q^{(\rho+1)} - Q^{(\rho)} = 4.573134 \cdot 10^{-8}$, роз-

раховано повну витрату $Q = 0.643107$ і усереднену нев'язку квазіконформності $\varepsilon_* = 4.651402$ [1; 2]. Для порівняння, при відсутності тонкого включення $\varepsilon_* = 4.59568$. Варто зазначити, що найсуттєвіший вклад в отримані значення ε_* внесений вузлами, що знаходяться на малих за розміром ділянках навколо кутових точок A, B, C, D , де неможливо уникнути великих похибок квазіконформності при заданій формі ∂G_z .

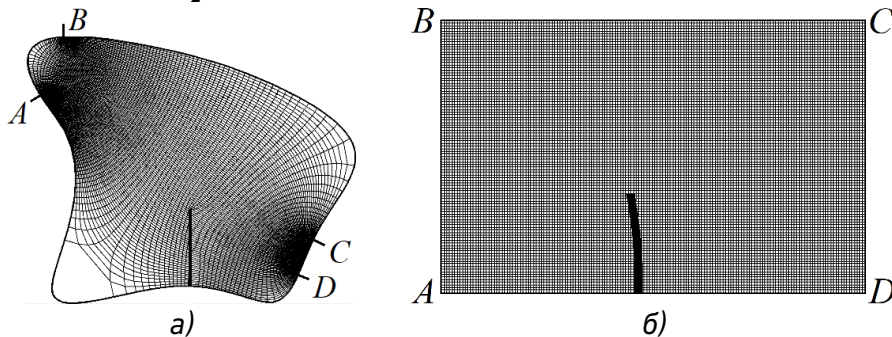


Рис. 2. Розрахована гідродинамічна (електродинамічна) сітка (а) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу (б)

Висновки. Методику математичного моделювання квазіідеальної течії в областях, обмежених лініями течії та екіпотенціальними лініями, перенесено на випадок наявності тонких включень, в яких мають місце «стрибки» значень квазіпотенціалів. Відповідний алгоритм наближеного розв'язання задачі побудований з міркувань поетапної параметризації граничних і внутрішніх вузлів областей, а також квазіконформних інваріантів з використанням ідей методу блочної ітерації. Тут припускається, що розбиття відповідної сітки є таким, що шириною тонких включень можна знехтувати. Наближені розв'язки здійснювались в області, границя якої задана за допомогою В-сплайнової функції при наявності одного тонкого включення. У результаті побудовано гідродинамічну (електродинамічну) сітку та відповідну область комплексного квазіпотенціалу. Розрахована нев'язка квазіконформності не є суттєво більшою, у порівнянні з випадком відсутності тонких включень, що свідчить про локалізований вплив похибок, спричинених «стрибками» значень квазіпотенціалів. Окрім того, розраховано повну витрату.

У перспективі: перенесення алгоритму на складніші випадки тонких включень, зокрема, що передбачають «стрибки» функцій те-

чії; адаптація підходу до задач електричної томографії та нафтогазової динаміки.

1. Бомба А. Я., Бойчура М. В. Методи комплексного аналізу в задачах ідентифікації : монографія. Рівне : НУВГП, 2020. 188 с. **2.** Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярощак С. В. Методи комплексного аналізу : монографія. Рівне : НУВГП, 2013. 415 с. **3.** Ulyanchuk-Martyniuk O., Michuta O., Ivanchuk N. Biocolmation and the finite element modeling of its influence on changes in the head drop in a geobarrier. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 4 (10). P. 18–26. **4.** Cox M. G. The numerical evaluation of B-splines. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*. 1972. Vol. 10. P. 134–149. **5.** Самарский А. А. Теория разностных схем. Москва : Наука, 1977. 656 с. **6.** Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва : Мир, 1975. 558 с.

REFERENCES:

1. Bomba A. Ya., Boichura M. V. Metody kompleksnoho analizu v zadachakh identyfikatsii : monohrafiia. Rivne : NUVHP, 2020. 188 s. **2.** Bomba A. Ya., Kashtan S. S., Pryhorneytskyi D. O., Yaroshchak S. V. Metody kompleksnoho analizu : monohrafiia. Rivne : NUVHP, 2013. 415 s. **3.** Ulyanchuk-Martyniuk O., Michuta O., Ivanchuk N. Biocolmation and the finite element modeling of its influence on changes in the head drop in a geobarrier. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 4 (10). P. 18–26. **4.** Cox M. G. The numerical evaluation of B-splines. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*. 1972. Vol. 10. P. 134–149. **5.** Samarskiy A. A. Teoriya raznostnyih shem. Moskva : Nauka, 1977. 656 s. **6.** Ortega Dj., Reynboldt V. Iteratsionnyie metodyi resheniya nelineynyih sistem uravneniy so mnogimi neizvestnyimi. Moskva : Mir, 1975. 558 s.

Boichura M. V., Candidate of Engineering (Ph.D.) (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

NUMERICAL COMPLEX ANALYSIS METHODS FOR MODELING OF QUASIIDEAL FIELDS IN THE PRESENCE OF THIN INCLUSIONS

The methodic of mathematical modeling of quasiideal flow in domains bounded by streamlines and equipotential lines is transferred to the case of the presence of thin inclusions with “jumps” of quasipotential

values. The differential formulation of the problem consists of generalizations of Laplace equations under given boundary conditions. The corresponding solving involves the implementation of a quasiconformal mapping of the canonical complex quasipotential domain to a curvilinear physical domain. Since the analytical solution of such problems can be obtained only in a very limited class of cases, the construction of a quasiideal field is carried out approximately, namely, using numerical methods of complex analysis (quasiconformal mappings). Difference analogues of generalizations of Laplace equations due to the discontinuity of the grid (caused by the presence of thin inclusions), constructed using homogeneous conservative second-order difference schemes with variable steps. Orthogonality conditions at the boundary are formed using the right and left first order difference schemes. The corresponding algorithm for the approximate solving the problem is built on the basis of step-by-step parameterization of boundary and internal nodes of domains, and quasiconformal invariants using the ideas of block iteration method. Here it is assumed that the partition of the corresponding mesh is such that the width of the thin inclusions can be neglected. Approximate solutions were performed in the domain with the boundary given by the B-spline function in the presence of one thin inclusion. As a result, a hydrodynamic (electrodynamics) mesh and a corresponding complex quasipotential domain are constructed; calculated full discharge. The resulting discrepancy of quasiconformity is insignificant in comparison with the case of the absence of thin inclusions; this indicates the localized influence of errors.

Keywords: mathematical modeling; quasiconformal mappings; thin inclusions; nonlinear problems; numerical methods.

Бойчура М. В., к.т.н. (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

ЧИСЛОВЫЕ МЕТОДЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА МОДЕЛИРОВАНИЯ КВАЗИИДЕАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ УСЛОВИИ НАЛИЧИЯ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Методика математического моделирования квазиидеального движения частиц (зарядов, жидкости) в среде, ограниченной линиями течения и эквипотенциальными линиями, распространена на случай наличия тонких включений. Последние считаются тонкими по сравнению с дискретным разбиением электро- или гидродинамической сетки. Соответствующий алгоритм предусматривает последовательную параметризацию граничных и внутренних узлов сеточных областей и квазиконформных инвариантов с использованием идей метода блочной итерации. Проведены численные эксперименты и осуществлено их оценку. В частности, установлено, что погрешности, вызванные наличием тонких включений, оказывают только локализованное влияние на искомое решение.

***Ключевые слова:* математическое моделирование; квазиконформные отображения; тонкие включения; нелинейные задачи; численные методы.**
