

Жуковська Н. А., к.т.н., доцент, Жуковський В. В., к.т.н., доцент
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БАГАТОШАРОВОГО ҐРУНТОВОГО МАСИВУ З ВРАХУВАННЯМ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗАБРУДНЕНИХ РЕЧОВИН У НЕІЗОТЕРМІЧНИХ УМОВАХ

В статті здійснено математичне моделювання просторового напружено-деформованого стану фільтруючого багат шарового ґрунтового масиву з вільною поверхнею. Знайдено зміщення, нормальні та дотичні деформації і напруження в досліджуваній області. Проведено аналіз отриманих результатів.

Ключові слова: просторовий напружено-деформований стан; вільна поверхня; масотеплоперенесення; фільтруючий багат шаровий ґрунтовий масив.

Дослідження напружено-деформованого стану ґрунтових масивів та основ є актуальним питанням загалом у світі. Внаслідок неправильно вибраних територій під будівництво, недотримання експлуатаційних вимог до побудованих будівель і споруд, внаслідок природних стихій та катаклізмів може змінитись стан ґрунтового покриття, що відповідно – призвести до осідань основ будівель, руйнування прилеглих забудованих територій, порушення екологічної стійкості родючого шару ґрунту, зрештою, це може призвести нерідко і до людських жертв. Дослідженням в даній області присвячені роботи [1–11].

Тому **метою даної статті** є математичне моделювання деформаційних процесів, що відбуваються в багат шарових фільтруючих ґрунтах.

Розглянемо багат шаровий ґрунтовий масив в просторових координатах, що займає область $X \in \Omega$, де $\Omega = \Omega_{i^*} \cup \Omega_{i^*}$, $\Omega_{i^*} = \bigcup_{i=1}^k \Omega_i$,

$\Omega_{i^*} = \bigcup_{i=k+1}^n \Omega_i$ (рис. 1). Вважається, що ґрунтовий масив має форму кри-

волінійного чотирикутника з нерухомою вільною поверхнею Γ_v в одній з його водонасичених підобластей.

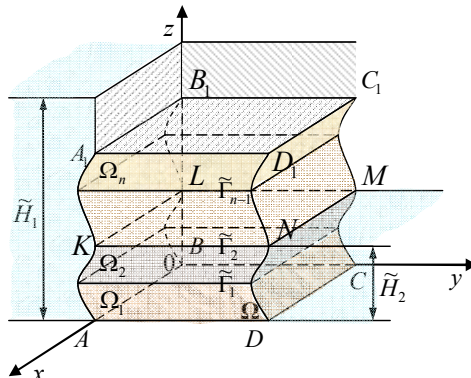


Рис. 1. Схема багатшарового ґрунтового масиву з вільною поверхнею у тривимірному випадку

Загальна кількість підобластей у ґрунтовому масиві дорівнює n , нумерація яких – знизу вверху. Підобласті ґрунтового масиву Ω_i , $i = \overline{1, n}$, що розміщені вище вільної поверхні (Ω_i^*), знаходяться в природному стані, а нижче вільної поверхні – водонасичені (Ω_i) відповідно.

Просторовий напружено-деформований стан фільтруючого ґрунтового масиву розглядається в межах лінійної теорії пружності. Кожна з підобластей Ω_i , $i = \overline{1, n}$ характеризується різними пружними коефіцієнтами λ_i , μ_i , які залежать від концентрації забруднюючих речовин та температури $\lambda_i = \lambda_i(c_i, T_i)$, $\mu_i = \mu_i(c_i, T_i)$ у підобластях Ω_i та залежать від температури $\lambda_i = \lambda_i(T_i)$, $\mu_i = \mu_i(T_i)$ в Ω_i^* , що знаходяться у природному стані. На просторовий ґрунтовий масив діють сила тяжіння, а у випадку водонасичених підобластей – враховуються також архімедова та фільтраційні сили.

Бічні площини на рис. 1 позначимо відповідно наступним чином: $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ – Γ_1 і Γ_2 , ABA_1B_1 і CDC_1D_1 – Γ_3 і Γ_4 , BCB_1C_1 та ADA_1D_1 – Γ_5 та Γ_6 , $AKLB$ та KA_1B_1L – Γ_3^{i*} та Γ_3^{i*} , причому $\Gamma_3 = \Gamma_3^{i*} \cup \Gamma_3^{i*}$, $DNMC$ та ND_1C_1M – Γ_4^{i*} та Γ_4^{i*} , причому $\Gamma_4 = \Gamma_4^{i*} \cup \Gamma_4^{i*}$, $BCML$, LMC_1D_1 та $ADNK$, KND_1A_1 – Γ_5^{i*} , Γ_5^{i*} та Γ_6^{i*} , Γ_6^{i*} , причому $\Gamma_5 = \Gamma_5^{i*} \cup \Gamma_5^{i*}$ та $\Gamma_6 = \Gamma_6^{i*} \cup \Gamma_6^{i*}$.

Вважаємо, що Γ_1 та Γ_2 – теплоізолювані та непроникні, а також на даних площинах відсутні зміщення, площини $\Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ – дренавані.

Задані значення п'єзометричних напорів \tilde{H}_1, \tilde{H}_2 , температур \tilde{T}_1 та \tilde{T}_2 у водних басейнах $\Gamma_3^{i_a}, \Gamma_5^{i_a}$ та $\Gamma_4^{i_a}, \Gamma_6^{i_a}$ відповідно, причому $\tilde{H}_1 > \tilde{H}_2$, $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_2$. У лівому басейні (площини $\Gamma_3^{i_a}$ та $\Gamma_5^{i_a}$) задано значення концентрації солей \tilde{C}_1 , а у правому ($\Gamma_4^{i_a}$ та $\Gamma_6^{i_a}$) – умову швидкого виносу солей. В результаті різниці напорів відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процеси фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є.

Математична модель поставленої просторової крайової задачі при фільтрації забруднюючих речовин у неізотермічних умовах та наявності вільної поверхні в загальноприйнятих позначеннях має наступний вигляд:

система рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту з урахуванням масотеплоперенесення

$$\begin{aligned}
 & \mu_i(c_i, T_i) \Delta U_i + (\lambda_i(c_i, T_i) + \mu_i(c_i, T_i)) \frac{\partial \varepsilon_\theta^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial x} \varepsilon_\theta^{(i)} + \\
 & + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial y} \left(\frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial z} \left(\frac{\partial U_i}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial x} \right) - \\
 & - \left(\left(3 \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial x} \right) T_i + (3 \lambda_i(c_i, T_i) + 2 \mu_i(c_i, T_i)) \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \alpha_T^{(i)} + X_i = 0, \\
 & \mu_i(c_i, T_i) \Delta V_i + (\lambda_i(c_i, T_i) + \mu_i(c_i, T_i)) \frac{\partial \varepsilon_\theta^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial y} \varepsilon_\theta^{(i)} + \\
 & + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial y} \frac{\partial V_i}{\partial y} + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial x} \left(\frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial z} \left(\frac{\partial V_i}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \right) - \\
 & - \left(\left(3 \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial y} \right) T_i + (3 \lambda_i(c_i, T_i) + 2 \mu_i(c_i, T_i)) \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) \alpha_T^{(i)} + Y_i = 0, \\
 & \mu_i(c_i, T_i) \Delta W_i + (\lambda_i(c_i, T_i) + \mu_i(c_i, T_i)) \frac{\partial \varepsilon_\theta^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial z} \varepsilon_\theta^{(i)} + \\
 & + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial z} \frac{\partial W_i}{\partial z} + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial x} \left(\frac{\partial U_i}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial y} \left(\frac{\partial V_i}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \right) - \\
 & - \left(\left(3 \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial z} + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial z} \right) T_i + (3 \lambda_i(c_i, T_i) + 2 \mu_i(c_i, T_i)) \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) \alpha_T^{(i)} + Z_i = 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

де компоненти масових сил обчислюються за формулами

$$X_i = \begin{cases} \frac{dp_1^{(i)}}{dx}, \mathbf{X} \in \Omega_{i^*}, i = \overline{1, k}, \\ 0, \mathbf{X} \in \Omega_{i^*}, i = \overline{k+1, n}, \end{cases} \quad Y_i = \begin{cases} \frac{dp_2^{(i)}}{dy}, \mathbf{X} \in \Omega_{i^*}, i = \overline{1, k}, \\ 0, \mathbf{X} \in \Omega_{i^*}, i = \overline{k+1, n}, \end{cases}$$

$$Z_i = \begin{cases} \gamma_{zg}^{(i^*)} + \frac{dp_3^{(i)}}{dy}, \mathbf{X} \in \Omega_{i^*}, i = \overline{1, k}, \\ \gamma_{np}^{(i^*)}, \mathbf{X} \in \Omega_{i^*}, i = \overline{k+1, n}, \end{cases} \quad (2)$$

нормальні та дотичні деформації на підставі співвідношень Коші

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U_i}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^{(i)} = \frac{\partial V_i}{\partial y}, \quad \varepsilon_z^{(i)} = \frac{\partial W_i}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{xy}^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz}^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz}^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \right), \quad (3)$$

нормальні та дотичні напруження на основі узагальненого закону Гука в оберненій формі

$$\sigma_x^{(i)} = \lambda_i(c_i, T_i) \varepsilon_\theta^{(i)} + 2\mu_i(c_i, T_i) \varepsilon_x^{(i)} - (3\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i)) \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i,$$

$$\sigma_y^{(i)} = \lambda_i(c_i, T_i) \varepsilon_\theta^{(i)} + 2\mu_i(c_i, T_i) \varepsilon_y^{(i)} - (3\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i)) \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i,$$

$$\sigma_z^{(i)} = \lambda_i(c_i, T_i) \varepsilon_\theta^{(i)} + 2\mu_i(c_i, T_i) \varepsilon_z^{(i)} - (3\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i)) \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i,$$

$$\tau_{xy}^{(i)} = 2\mu_i(c_i, T_i) \varepsilon_{xy}^{(i)}, \quad \tau_{xz}^{(i)} = 2\mu_i(c_i, T_i) \varepsilon_{xz}^{(i)}, \quad \tau_{yz}^{(i)} = 2\mu_i(c_i, T_i) \varepsilon_{yz}^{(i)}, \quad (4)$$

де $\varepsilon_\theta^{(i)} = \varepsilon_x^{(i)} + \varepsilon_y^{(i)} + \varepsilon_z^{(i)}$, $\mathbf{X} \in \Omega$, $t > 0$, $i = \overline{1, n}$, $i^* = \overline{1, k}$, $i^* = \overline{k+1, n}$;

рівняння конвективної дифузії при наявності масотеплоперенесення у водонасичених областях ґрунтового масиву

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}_{i^*}(c_i, T_{i^*}) \nabla c_{i^*}) - \mathbf{v}_{i^*} \nabla c_{i^*} - \gamma(c_{i^*} - C_m) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T^{(i^*)} \nabla T_{i^*}) = n_p^{(i^*)} \frac{\partial c_{i^*}}{\partial t},$$

$$\mathbf{X} \in \Omega_{i^*}, t > 0; \quad (5)$$

рівняння конвективного теплоперенесення у всій області дослідження

$$\nabla \cdot (\lambda_T^{(i)} \nabla T_i) - \rho c_p \bar{\mathbf{v}}_i \nabla T_i = c_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (6)$$

де $\bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i$ при $\mathbf{X} \in \Omega_{i^*}$, $i = \overline{1, k}$ та $\bar{\mathbf{v}}_i = 0$ при $\mathbf{X} \in \Omega_{i^*}$, $i = \overline{k+1, n}$;

узагальнені рівняння фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та рівняння нерозривності процесу у водонасичених областях

$$\mathbf{v}_{i^*} = -\mathbf{K}_{i^*}(c_{i^*}, T_{i^*}) \nabla h_{i^*} + \mathbf{v}_c^{(i^*)}(c_{i^*}) \nabla c_{i^*} + \mathbf{v}_T^{(i^*)} \nabla T_{i^*}, \quad \text{div} \mathbf{v}_{i^*} + \frac{\partial n_p^{(i^*)}}{\partial t} = 0,$$

$$\mathbf{X} \in \Omega_{i^*}, t > 0, \quad (7)$$

питомий потік розчинених солей на випадок неізотермічних умов

$$\mathbf{q}_c^{(i^*)} = \mathbf{v}_{i^*} c_{i^*} - \mathbf{D}_{i^*}(c_{i^*}, T_{i^*}) \nabla c_{i^*} - \mathbf{D}_T^{(i^*)} \nabla T_{i^*}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_{i^*}, t > 0, \quad (8)$$

узагальнений закон Фур'є на випадок конвективного масотеплоперенесення

$$\mathbf{q}_T^{(0)} = \rho_i c_p^{(i)} \bar{\mathbf{v}}_i T_i - \lambda_T^{(0)} \nabla T_i, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0. \quad (9)$$

На вільній поверхні Γ_v (депресійній кривій) функція $h_k(\mathbf{X}, t)$ задовольняє наступним умовам:

$$h_k(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_v} = z, \quad (\mathbf{v}_k, \mathbf{n})|_{\Gamma_v} = n_p^{(k)} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \varphi(\mathbf{X}, t) = (z - h_k(\mathbf{X}, t))|_{\Gamma_v} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_v, \quad t > 0, \quad (10)$$

де $\varphi(\mathbf{X}, t)$ співвідношення, описує вільну поверхню Γ_v ; \mathbf{n} – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі Γ .

Для концентрації сольових розчинів в неізотермічних умовах на кривій депресії виконується наступна гранична умова:

$$(\mathbf{D}_k(c_k, T_k) \nabla c_k + \mathbf{D}_T^{(k)} \nabla T_k, \mathbf{n})|_{\Gamma_v} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_v, \quad t > 0. \quad (11)$$

Крайові умови на границях областей ґрунтового масиву та умови спряження ідеального контакту між областями для зміщень, напружень, концентрації сольового розчину, п'єзометричного напору та температури мають вигляд

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{n})|_{\Gamma_1} = 0, \quad h_{i_*}(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_3^{i_*} \cup \Gamma_5^{i_*}} = \tilde{H}_1(\mathbf{X}, t), \quad h_{i_*}(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_4^{i_*} \cup \Gamma_6^{i_*}} = \tilde{H}_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Omega_{i_*}, \quad t > 0, \quad (12)$$

$$(\mathbf{q}_c^{(i)}, \mathbf{n})|_{\Gamma_1} = 0, \quad c_{i_*}(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_3^{i_*} \cup \Gamma_5^{i_*}} = \tilde{C}_1(\mathbf{X}, t), \quad (\mathbf{D}_{i_*} \nabla c_{i_*} + \mathbf{D}_T^{(i_*)} \nabla T_{i_*}, \mathbf{n})|_{\Gamma_4^{i_*} \cup \Gamma_6^{i_*}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega_{i_*}, \quad t > 0, \quad (13)$$

$$(\mathbf{q}_T^{(0)}, \mathbf{n})|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \quad T_i(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_5} = \tilde{T}_1(\mathbf{X}, t), \quad T_i(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_4 \cup \Gamma_6} = \tilde{T}_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad i = \overline{1, n}, \quad t > 0, \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{X}) = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1, \quad \mathbf{u}_n(\mathbf{X}) = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2, \quad (15)$$

$$\sigma_n^{(i)} = 0, \quad \tau_s^{(i)} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6, \quad (16)$$

$$[T_i(\mathbf{X}, t)]|_{\tilde{\Gamma}_i} = 0, \quad [\mathbf{q}_T^{(0)}]|_{\tilde{\Gamma}_i} = 0, \quad \mathbf{X} \in \tilde{\Gamma}_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad t > 0, \quad (17)$$

$$[u_n^{(i)}]|_{\tilde{\Gamma}_i} = [u_s^{(i)}]|_{\tilde{\Gamma}_i} = 0, \quad [\sigma_n^{(i)}]|_{\tilde{\Gamma}_i} = [\tau_s^{(i)}]|_{\tilde{\Gamma}_i} = 0, \quad \mathbf{X} \in \tilde{\Gamma}_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (18)$$

$$[h_{i_*}(\mathbf{X})]|_{\tilde{\Gamma}_{i_*}} = 0, \quad [v_{i_*}]|_{\tilde{\Gamma}_{i_*}} = 0, \quad [c_{i_*}(\mathbf{X}, t)]|_{\tilde{\Gamma}_{i_*}} = 0, \quad [q_c^{(i_*)}]|_{\tilde{\Gamma}_{i_*}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \tilde{\Gamma}_{i_*}, \quad i_* = \overline{1, k-1}, \quad (19)$$

$$h_{i_*}(\mathbf{X}, 0) = \tilde{H}_0^{(i_*)}(\mathbf{X}), \quad c_{i_*}(\mathbf{X}, 0) = \tilde{C}_0^{(i_*)}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega_{i_*}, \quad T_i(\mathbf{X}, 0) = \tilde{T}_0^{(i)}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (20)$$

де $\tilde{C}_0^{(i_*)}(\mathbf{X})$, $\tilde{H}_0^{(i_*)}(\mathbf{X})$, $\tilde{T}_0^{(i)}(\mathbf{X})$, $\tilde{H}_1(\mathbf{X})$, $\tilde{H}_2(\mathbf{X})$, $\tilde{C}_1(\mathbf{X}, t)$, $\tilde{T}_1(\mathbf{X}, t)$, $\tilde{T}_2(\mathbf{X}, t)$ – деякі задані функції; $[\]$ – стрибок функції.

В математичній моделі (1)–(20) використано наступні позначення: $\mathbf{X} = (x, y, z)$ – точка області Ω , $\mathbf{X} \in \Omega$; Γ – границя області Ω ; t – час, $t > 0$; $\mathbf{u}_i = (U_i, V_i, W_i)$, $i = \overline{1, n}$ – зміщення, м; X_i, Y_i, Z_i , $i = \overline{1, n}$ – компо-

ненти масової сили, H ; $\varepsilon_x^{(i)}$, $\varepsilon_y^{(i)}$, $\varepsilon_z^{(i)}$ та $\varepsilon_{xy}^{(i)}$, $\varepsilon_{xz}^{(i)}$, $\varepsilon_{yz}^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$ – нормальні та дотичні деформації; $\sigma_x^{(i)}$, $\sigma_y^{(i)}$, $\sigma_z^{(i)}$ та $\tau_{xy}^{(i)}$, $\tau_{xz}^{(i)}$, $\tau_{yz}^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$ – нормальні та дотичні напруження, Па; $\varepsilon_\theta^{(i)} = \varepsilon_x^{(i)} + \varepsilon_y^{(i)} + \varepsilon_z^{(i)}$; $p_1^{(i_*)}$, $p_2^{(i_*)}$, $p_3^{(i_*)}$, $i_* = \overline{1, k}$ – фільтраційні тиски сольового розчину, Па, $p_1^{(i_*)} = \gamma_p^{(i_*)}(h_{i_*}(\mathbf{X}, t) - x)$, $p_2^{(i_*)} = \gamma_p^{(i_*)}(h_{i_*}(\mathbf{X}, t) - y)$, $p_3^{(i_*)} = \gamma_p^{(i_*)}(h_{i_*}(\mathbf{X}, t) - z)$; $c_{i_*}(\mathbf{X}, t)$, $i_* = \overline{1, k}$ – концентрація сольового розчину у водонасичених підобластях ґрунтового масиву, г/л; $T_i(\mathbf{X}, t)$, $i = \overline{1, n}$ – температура, °С; $h_{i_*}(\mathbf{X}, t)$, $i_* = \overline{1, k}$ – п'єзометричний напір у водонасичених підобластях ґрунтового масиву, м; $\lambda_i(c_{i_*}, T_i)$ і $\mu_i(c_{i_*}, T_i)$ – коефіцієнти Ламе, Па; $\gamma_{zg}^{(i_*)}$, $i_* = \overline{1, k}$ – питомі ваги для підобластей ґрунту, що знаходиться у зваженому стані, Па/м; $\gamma_{np}^{(i_*)}$ – питомі ваги для підобластей ґрунту, що знаходиться у природному стані, Па/м; $\mathbf{K}_{i_*}(c_{i_*}, T_{i_*})$ – тензор фільтрації; $\mathbf{v}_c^{(i_*)}$, $i_* = \overline{1, k}$ – тензор хімічного осмосу, $\mathbf{v}_T^{(i_*)}$, $i_* = \overline{1, k}$ – тензор термічного осмосу; $\alpha_T^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$ – середній коефіцієнт лінійного теплового розширення в інтервалі температур (T_0, T) .

Для чисельного розв'язування крайової задачі (1)–(20) використано метод скінченних різниць. Зокрема, для знаходження зміщень з системи рівнянь (1) використано ітераційний метод Гауса–Зейделя, а для рівнянь (4) та (5) – монотонну різницеву схему [12].

Як приклад, розглянуто просторові зміщення, нормальні та дотичні деформації та напруження у ґрунтовому масиві, що складається з трьох підобластей (глинистий водо насичений, піщаний водонасичений та ґрунту в природному стані (сухий)) в області $\Omega = \{\mathbf{X} = (x, y, z): 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2, 0 \leq z \leq l_3\}$. Область Ω було взято у формі прямокутного паралелепіпеда довжиною $l_1 = 10$ м, товщиною $l_2 = 10$ м та висотою $l_3 = 10$ м. Вільна поверхня знаходиться на рівні $l_3^{(2)} = 7$ м, а під область глинистого ґрунту має висоту $l_3^{(1)} = 3$ м при наступних вихідних даних:

$$\tilde{T}_1(\mathbf{X}, t) = 30^\circ \text{ C}, \quad \tilde{T}_2(\mathbf{X}, t) = 15^\circ \text{ C}, \quad \tilde{H}_1(\mathbf{X}) = 10 \text{ м}, \quad \tilde{H}_2(\mathbf{X}) = 1 \text{ м},$$

$$\tilde{C}_1(\mathbf{X}, t) = C_m = 350 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \tilde{C}_2(\mathbf{X}, t) = 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \tilde{C}_0(\mathbf{X}, 0) = 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \tilde{T}_0(\mathbf{X}, 0) = 5^\circ \text{ C}.$$

Наступні графіки наведено при $t = 1080$ діб.

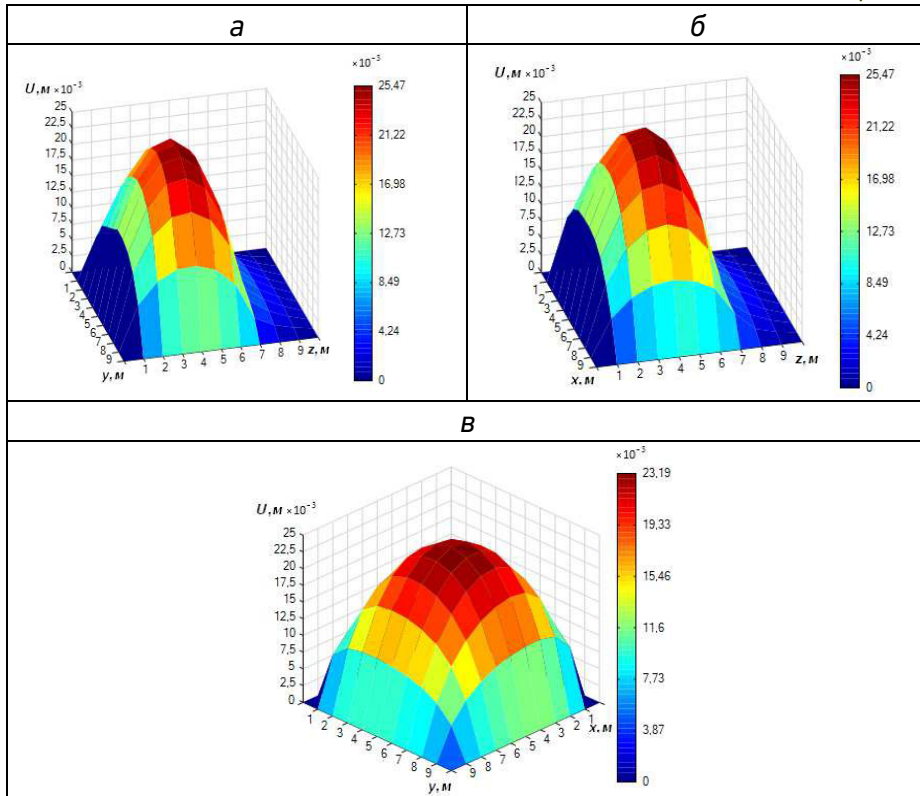


Рис. 2. Розподіли зміщень $U(\mathbf{X})$ у перерізі площиною yOz при $x = 5 \text{ м}$ (а), у перерізі площиною xOz при $y = 5 \text{ м}$ (б) та у перерізі площиною xOy при $z = 5 \text{ м}$ (в)

Аналогічні графіки отримано для просторових зміщень $V(\mathbf{X})$ та $W(\mathbf{X})$, а також для нормальних та дотичних деформацій і напружень.

Таким чином, при аналізі отриманих результатів, показано, що найбільших значень просторові зміщення досягаються в підобластях водонасиченого піщаного ґрунту. В підобластях глинистого ґрунту зміщення приймають менші значення, ніж у піщаному водонасиченому у зв'язку з повільним проходженням фільтрації забруднень та масотеплоперенесення. У підобластях ґрунтового масиву, що знаходились у природному стані, отримали досить незначні зміщення, що можна пояснити відсутністю в них процесів фільтрації.

Висновки. В статті сформульовано фізичну постановку задачі дослідження просторових деформаційних процесів у багат шаровому фільтруючому ґрунтовому масиві та побудовано її математичну

модель. В результаті чисельного розв'язування та комп'ютерного моделювання шуканих функцій, отримано зміщення, нормальні та дотичні деформації і напруження, що дало можливість оцінити їх значення в різних підобластях ґрунтового масиву.

1. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. К. : Наукова думка, 1991. 432 с.
2. Encyclopedia of Thermal Stresses. Editor R. B. Hetnarski. Springer Dordrecht Heidelberg New York London, 2014.
3. Anatoliy Vlasyuk, Nataliia Zhukovska, Viktor Zhukovskyy, Rajab Hesham. Mathematical Modelling of Spatial Deformation Process of Soil Massif with Free Surface. *Advances in Intelligent Systems and Computing IV*. Vol. 1080. Pp. 107–120.
4. Кузло М. Т. Інженерне ґрунтознавство та механіка ґрунтів : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2011. 252 с.
5. Duncan J. M., Wright S. G., Brandon T. L. Soil strength and slope stability. 2nd Edition. Wiley, 2014. 333 p.
6. Кузло М. Т., Жуковська Н. А., Бойко М. В. Експериментальні дослідження фільтрації сольових розчинів у залежності від їх концентрації та температури. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво*. 2019. № 106. С. 110–116.
7. Vlasyuk, A. P., Zhukovska, N. A., Zhukovskyy, V. V. Mathematical and computer modeling of cohesion effect forces on spatial deformation processes of soil massif. *Mathematical Modeling and Computing*. 2020. Vol. 7. Number 1. Pp. 196–205.
8. Власюк А. П., Жуковська Н. А., Жуковський В. В. Математичне і комп'ютерне моделювання впливу тепломасоперенесення при фільтрації сольових розчинів на деформаційні процеси ґрунтових масивів : монографія. Рівне : НУВГП, 2019. 267 с.
9. Vlasyuk A. P., Zhukovska N. A., Zhukovskyy V. V. About Mathematical Modelling of Spatial Deformation Problem of Soil Massif with Free Surface. *IEEE 14th International Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT)*. 2019.
10. Коваленко А. Д. Термоупругость. К. : Вища школа, 1975. 216 с.
11. Vlasyuk A. P., Zhukovskaya N. A. Mathematical simulation of the stressed-strained state of the foundation of earth dams with an open surface under the influence of heat and mass transfer in two-dimensional case. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2015. Vol. 88, Issue 2. Pp. 329–341.
12. Власюк А. П., Остапчук О. П., Степанченко О. М. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну. *Вісник Київського університету. Сер. Фізико-математичні науки*. К., 2005. Вип. 2. С. 188–197.

REFERENCES:

1. Sergienko I. V., Skopetskiy V. V., Deyneka V. S. Matematicheskoe modelirovanie i issledovanie protsessov v neodnorodnyih sredah. K. : Naukova dumka, 1991. 432 s.
 2. Encyclopedia of Thermal Stresses. Editor R. B. Hetnarski. Springer Dordrecht Heidelberg New York London, 2014.
 3. Anatoliy Vlasyuk, Nataliia Zhukovska, Viktor Zhukovskyy, Rajab Hesham. Mathematical Modelling of Spatial Deformation Process of Soil Massif with Free Surface. *Advances in Intelligent Systems and Computing IV*. Vol. 1080. Pp. 107–120.
 4. Kuzlo M. T. Inzhenerne gruntoznavstvo ta mekhanika gruntiv : navch. posib. Rivne : NUVHP, 2011. 252 s.
 5. Duncan J. M., Wright S. G., Brandon T. L. Soil strength and slope stability. 2nd Edition. Wiley, 2014. 333 p.
 6. Kuzlo M. T., Zhukovska N. A., Boiko M. V. Eksperymentalni doslidzhennia filtratsii solovykh rozchyniv u zalezhnosti vid yikh kontsentratsii ta temperatury. *Avtomobilni dorohy i dorozhnie budivnytstvo*. 2019. № 106. S. 110–116.
 7. Vlasyuk, A. P., Zhukovska, N. A., Zhukovskyy, V. V. Mathematical and computer modeling of cohesion effect forces on spatial deformation processes of soil massif. *Mathematical Modeling and Computing*. 2020. Vol. 7. Number 1. Pp. 196–205.
 8. Vlasiuk A. P., Zhukovska N. A., Zhukovskyy V. V. Matematychni i kompiuterne modeliuvannia vplyvu teplomasoperenesennia pry filtratsii solovykh rozchyniv na deformatsiini protsesy gruntovykh masyviv : monohrafiia. Rivne : NUVHP, 2019. 267 s.
 9. Vlasyuk A. P., Zhukovska N. A., Zhukovskyy V. V. About Mathematical Modelling of Spatial Deformation Problem of Soil Massif with Free Surface. *IEEE 14th International Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT)*. 2019.
 10. Kovalenko A. D. Termoupruhost. K. : Vyshcha shkola, 1975. 216 s.
 11. Vlasyuk A. P., Zhukovskaya N. A. Mathematical simulation of the stressed-strained state of the foundation of earth dams with an open surface under the influence of heat and mass transfer in two-dimensional case. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2015. Vol. 88, Issue 2. Pp. 329–341.
 12. Vlasiuk A. P., Ostapchuk O. P., Stepanchenko O. M. Monotonna riznytseva skhema dlia neliniinoho odnovymirnoho rivniannia parabolichnoho typu, shcho mistyt pershu pokhidnu. *Visnyk Kyivskoho universytetu. Ser. Fyzyko-matematychni nauky*. K., 2005. Vyp. 2. S. 188–197.
-

Zhukovska N. A., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor, Zhukovskiy V. V., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

MATHEMATICAL MODELING OF MULTILAYER SOIL MASSIF STRESS-STRAIN STATE UNDER POLLUTANTS FILTRATION IN NON-ISOTHERMAL CONDITIONS

The article presents a mathematical modeling of the spatial stress-strain state of a filtering multilayer soil massif with a free surface. The mathematical model includes the following equations: the system of Lamé equations describing stress-strain state for displacements, equations of mass forces components, the equation of convective diffusion in the presence of mass and heat transfer for a water-saturated area of a soil massif, the equation of convective heat transfer, the generalized equation of filtration of salt solutions in non-isothermal conditions and the equation of continuity of a process in a water-saturated area of a soil massif, the specific flow of dissolved salts in the case of non-isothermal conditions in a water-saturated soil massif, the generalized Fourier law in the case of convective mass and heat transfer, the normal and shear strains, the normal and shear stresses. The basic equations are supplemented by boundary conditions for temperature, concentration of pollutants, pressures, displacements and stresses. For the numerical solution of the set boundary value problem is used the method of finite differences. Displacements, normal and tangential deformations and stresses, temperature, concentration of pollutants, pressures in the study area were found. The analysis of the obtained results is carried out. As an example, the soil mass is considered, consisting of three subregions (clay water is saturated, sandy water is saturated and the soil is in its natural state (dry)). It is shown that the largest values of spatial displacements are achieved in the subregions of water-saturated sandy soil. In the sub-areas of clay soil, the displacements are smaller than in sandy water-saturated ones due to the slow passage of pollution filtration and mass and heat transfer.

Keywords: spatial stress-strain state; free surface; mass and heat transfer; filtering multilayer soil mass.

Жуковская Н. А., к.т.н., доцент, Жуковский В. В., к.т.н., доцент
(Национальный университет водного хозяйства и
природопользования, г. Ровно)

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-
ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНОГО ГРУНТОВОГО
МАССИВА С УЧЕТОМ ФИЛЬТРАЦИИ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В
НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ**

В статье осуществлено математическое моделирование пространственного напряженно-деформированного состояния фильтрующего многослойного грунтового массива со свободной поверхностью. Найдено смещения, нормальные и касательные деформации и напряжения в исследуемой области. Проведен анализ полученных результатов.

Ключевые слова: пространственный напряженно-деформированное состояние; свободная поверхность; массотеплоперенос; фильтрующий многослойный грунтовой массив.
