УДК 539.3

ДЕЯКА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ РІВНЯНЬ МЕТОДУ ПОЧАТКОВИХ ПАРАМЕТРІВ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙ БАЛОК ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ

С. О. Оліферук
студент 2 курсу, група БЦІ-21, навчально-науковий інститут будівництва і архітектури
Науковий керівник – к.т.н., доцент В. І. Андрушков

Національний університет водного господарства та природокористування,
м. Рівне, Україна

Показано, завдяки яким змінам у традиційних формулах методу початкових параметрів можна досягти можливості використовувати їх для визначення деформацій балок, що складаються з окремих ділянок різної жорсткості. Наведений числовий приклад наглядно демонструє використання запропонованої методики.
Ключові слова: балка, деформація, початкові параметри, жорсткість, прогин.

Показано, благодаря каким изменениям в традиционных формулах метода начальных параметров можно достичь возможности использовать их для определения деформаций балок, состоящих из отдельных участков разной жесткости. Приведенный числовой пример наглядно демонстрирует использование предложенной методики.
Ключевые слова: балка, деформация, начальные параметры, жесткость, прогиб.

It is shown, due to which changes in the traditional formulas of the initial parameter method, it is possible to achieve the possibility of using them to determine beam deformations, consisting of separate sections of different stiffness. The given numerical example clearly demonstrates the use of the proposed methodology.
Keywords: beam, deformation, initial parameters, stiffness, deflection.

Для визначення прогинів та кутів повороту поперечних перерізів балки використовують метод початкових параметрів [1]. Формули цього методу мають вигляд:

$$EI_{\text{н.л.}}\theta_{(x)} = EI_{\text{н.л.}}\theta_0 + \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{(x-a_M)^1}{1!} + \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{(x-a_F)^2}{2!} + \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{(x-a_q)^3}{3!};$$
$$EI_{\text{н.л.}}y_{(x)} = EI_{\text{н.л.}}y_0 + EI_{\text{н.л.}}\theta_0 \cdot x + \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{(x-a_M)^2}{2!} + \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{(x-a_F)^3}{3!} + \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{(x-a_q)^4}{4!}. \quad (1)$$

Важливо зауважити, що дані формули застосовуються тільки у випадку, коли жорсткість балки по всій довжині однакова ($EI_{н.л.}$ = const).

Мета даної роботи – внести такі зміни в формули методу початкових параметрів, які б дали можливість вести розрахунок балок, що складаються з окремих ділянок різної жорсткості.

Розглядається задача визначення величин прогину та кута повороту поперечного перерізу балки (рис. 1), що знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження.

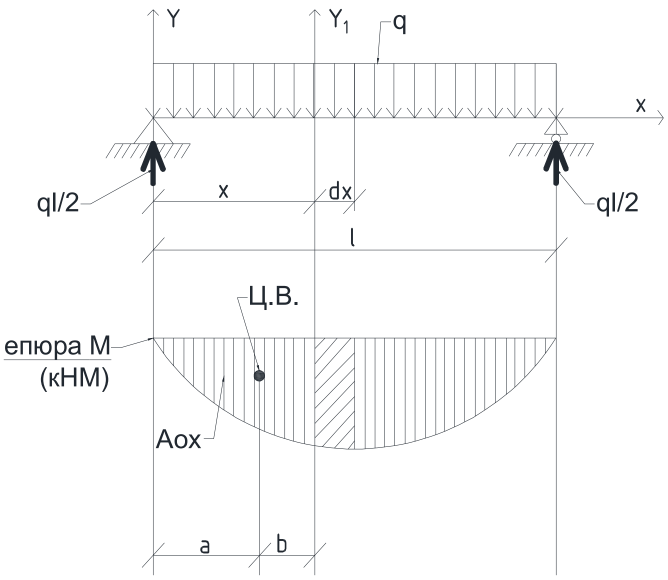

Рис. 1. Схема балки та епюра згинальних моментів

Скористаємось наближеним диференціальним рівнянням зігнутої осі балки :

$$\frac{d^2\,y_{(x)}}{dx^2} = \frac{M_{(x)}}{EI_{\text{н.л.}}} \quad . \tag{2}$$

Враховуючи, що
$$\frac{dy_{(x)}}{dx} = \theta_{(x)} \; , \tag{3}$$

рівняння (2) набуває вигляду:
$$\frac{d\theta_{(x)}}{dx} = \frac{M_{(x)}}{EI_{\text{н.л.}}} \; , \tag{4}$$

або
$$EI_{\text{н.л.}} d\theta_{(x)} = M_{(x)} dx \; . \tag{5}$$

Будемо вважати, що на ділянці балки від 0 до x (рис. 1) жорсткість $EI_{н.л.}$= const.

Інтегруючи (5) , отримаємо:

$$EI_{\text{н.л.}} \int_{\theta_0}^{\theta(x)} d\theta_{(x)} = \int_0^x M_{(x)} dx, \tag{6}$$

і в результаті
$$EI_{\text{н.л.}}\theta_{(x)} - EI_{\text{н.л.}}\theta_0 = \int_0^x M_{(x)} dx \, . \tag{7}$$

Інтеграл $\int_0^x M_{(x)} dx = A_{ox}$ в (7) представляє собою площу епюри згинальних моментів, яка розташована між початком координат і перерізом балки, що розглядається. Тоді (7) можна представити, як:

$$EI_{\text{н.л.}}\theta_{(x)} = EI_{\text{н.л.}}\theta_0 + A_{ox} \; . \tag{8}$$

Враховуючи залежність (3), запишемо:

$$EI_{\text{н.л.}} \frac{dy_{(x)}}{dx} = EI_{\text{н.л.}}\theta_0 + A_{ox} \; . \tag{9}$$

Інтегруючи (9), одержимо:

$$EI_{\text{н.л.}}\int_{y_0}^{y(x)} dy_{(x)} = EI_{\text{н.л.}}\theta_0\int_0^x dx + \int_{A_0}^{A(x)} A_{ox}dx\,. \tag{10}$$

Скористаємось способом інтегрування частинами, а саме:

$$\int UdV = UV - \int VdU\,. \tag{11}$$

Визначимо інтеграл $\int_{A_0}^{A(x)} A_{ox}dx = A_{ox}\cdot x - \int_{A_0}^{A(x)} x\cdot dA_{ox}\,.$ (12)

Інтеграл $\int_{A_0}^{A(x)} x\cdot dA_{ox}$ в (12) представляє собою статичний момент частини площі епюри згинальних моментів, яка розташована між початком координат і заданим перерізом балки, відносно осі *y*. Цей інтеграл можна представити, як :

$$S_y = A_{ox}\cdot a\,. \tag{13}$$

Тоді (12) набуває вигляду:

$$\int_{A_0}^{A(x)} x\cdot dA_{ox} = A_{ox}\cdot x - A_{ox}\cdot a = A_{ox}(x-a) = A_{ox}\cdot b = S_{0x}^{y_1}\,, \tag{14}$$

де $S_{0x}^{y_1}$ – статичний момент частини площі епюри згинальних моментів, яка розташована між початком координат та заданим перерізом, відносно осі y_1

З урахуванням (14), формула (10) набуває вигляду:

$$EI\int_{y_0}^{y(x)} dy_{(x)} = EI\theta_0\int_0^x dx + S_{0x}^{y_1}\,, \tag{15}$$

або

$$EIy_{(x)} = EIy_0 + EI\theta_0\cdot x + S_{0x}^{y_1}\,. \tag{16}$$

Враховуючи геометричні поняття величин A_{ox} та $S_{0x}^{y_1}$, отримані формули (8) та (16) легко застосовувати при розрахунку балок з ділянками різної жорсткості. Для цього достатньо жорсткість цих ділянок звести до однакової величини.

Порядок розрахунку покажемо на прикладі балки довжиною 4 м, яка спирається на дві опори (рис. 2). Жорсткість правої половини балки вдвічі більша ніж лівої. Завантажена балка зосередженим моментом M=20 кНм та рівномірно розподіленим навантаженням q=10 кН/м. Потрібно визначити величину прогину перерізу балки посередині її прогону.

На рис. 2, а і рис. 2, б показано епюри згинальних моментів від окремої дії навантажень *M* та *q*. Якщо прийняти, що жорсткість обох ділянок балки однакова і дорівнює *EI*, то ординати цих епюр на правій ділянці балки потрібно зменшити вдвічі. Зведені епюри згинальних моментів від дії заданих навантажень представлені на рис. 2, в і рис. 2, г.

Тоді прогин, зважаючи на вищезгадану формулу (16), знайдемо як

$$EIy_{(x=2)} = 0 + EI\theta_0\cdot 2 + 10\cdot 2\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot 20\cdot 2\cdot\frac{3}{8}\cdot 2,$$

$$EIy_{(x=2)} = EI\theta_0\cdot 2 + 53{,}333.$$

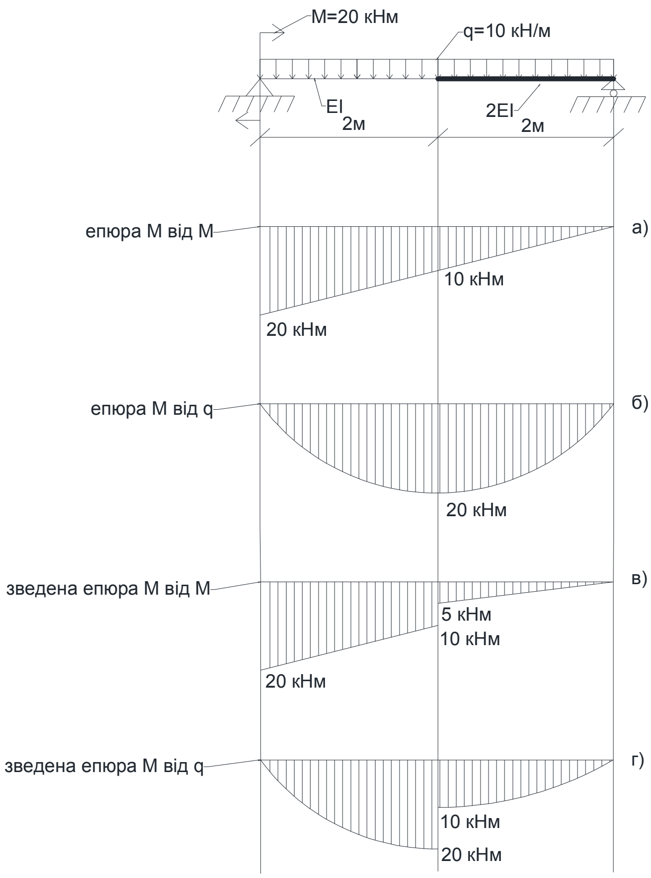

Рис. 2. Схема балки та епюри згинальних моментів від заданих навантажень

Величину $EI\theta_0$ визначимо з умови, що при $x = 4$ м, $y_{(x=4)} = 0$:

$$EIy_{(x=4)} = 0 + EI\theta_0 \cdot 4 + 10 \cdot 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + 2\right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 +$$

$$+ \frac{2}{3} \cdot 20 \cdot 2 \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot 2 + 2\right) + \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 2 \cdot \left(\frac{5}{8} \cdot 2\right) = 0,$$

звідки $$EI\theta_0 = -47{,}5 \text{кНм}^2,$$

$$EIy_{(x=2)} = -47{,}5 \cdot 2 + 53{,}333.$$

Тоді прогин перерізу балки посередині прогону дорівнює: $y_{(x=2)} = \frac{41{,}667}{EI}$ (м).

Наведений приклад показує зручність та простоту використання отриманих формул в задачах визначення деформацій балок змінної жорсткості.

1. Шваб'юк В. І. Опір матеріалів : підручник. К. : Знання, 2016. 407 с.