



Національний університет  
водного господарства  
та природокористування

Л.Й. Дворкін

Заслужений діяч науки і техніки України  
професор, доктор технічних наук

# **ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО- СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ПРОЕКТУВАННІ СКЛАДІВ БЕТОНІВ**

**Навчальний посібник**



**Київ, 2020**



Національний університет  
водного господарства  
та природокористування

**УДК 666.97**  
**Д 24**

Рекомендовано вченою радою Національного університету  
водного господарства та природокористування  
(протокол № від 2020 р.)

**Рецензенти:**

**Кровяков С.О.**, доктор техн. наук, професор, Одеська академія будівництва та архітектури,

**Толмачов С М.**, доктор технічних наук, професор, Харківський автомобільно-дорожний університет

**Дворкін Л.Й.**

**Д 24** “Експериментально-статистичне моделювання при проектуванні складів бетонів”: Навчальний посібник/Дворкін Л.Й. – К.: Видавничий дім «Кондор», 2020. – 205 с.

**ISBN**

У посібнику викладені методологічні основи застосування математичного планування експериментів і системного аналізу при розв’язанні задач оптимальних складів бетонів. Наведені характерні приклади вирішення задач проектування оптимальних складів бетонів різних видів з застосуванням експериментально-статистичного моделювання.

Посібник призначено для студентів і аспірантів будівельних спеціальностей вищих навчальних закладів.

**УДК 666.97**

**ISBN**

© Дворкін Л.Й., 2020

© Видавничий дім «Кондор», 2020



## ПЕРЕДМОВА

Проектування складів бетонів – одна з основних задач, що виникає при технологічній підготовці його виробництва. З нею пов'язані як забезпечення необхідних експлуатаційних властивостей бетону так і техніко-економічна ефективність його виробництва і застосування.

Сучасна методологія проектування складів бетону ґрунтується на фундаментальних закономірностях бетонознавства, що дозволяють прогнозувати властивості бетону залежно від особливостей вихідних матеріалів, їх співвідношення, технологічних режимів його виробництва та умов експлуатації в конструкціях та спорудах. Ця методологія є результатом багаторічних досліджень великого колективу науковців різних країн, вона успішно розвивається і в наш час.

З робіт, що присвячені математичній теорії експериментів і експлуатаційно-статистичному моделюванню при розв'язанні будівельно-технологічних задач, провідне місце займають роботи, що виконані видатним вченим матеріалознавцем професором В.А. Вознесенським і його науковою школою.

Складність та багатofакторність залежностей, що дозволяють прогнозувати властивості бетону з достатньою точністю, їх взаємозв'язки обумовлюють актуальність і доцільність застосування системного аналізу і математичного моделювання при проектуванні оптимальних складів бетонів різних видів. Для бетонів як матеріальних об'єктів ефективно для отримання математичних моделей застосування експериментально-статистичних методів і особливо методів, що основані на математичному плануванні експериментів.

Автор в цьому навчальному посібнику висвітлює методичні основи математичного планування експериментів і розв'язання з його допомогою основних типів задач проектування складів бетонів, а також приводить відповідні приклади, користуючись результатами виконаних ним багаторічних досліджень.

Посібник призначений студентам і аспірантам будівельних спеціальностей вищих навчальних закладів. Він



Національний університет  
водного господарства  
та природокористування

буде також корисним інженерно-технічним працівникам будівельних організацій та підприємств з виготовлення та застосування бетонів, виробів та конструкцій на його основі.

Автор вдячний рецензентам посібника, колегам, які працювали з ним при розв'язанні задач, що приведені в книзі.

Автор вдячний також інженерам Л.І. Ніхаєвій, Л.А. Мацько та Г.В. Киц за допомогу при технічній підготовці книги до друку.



Національний університет  
водного господарства  
та природокористування



# 1. ЗАДАЧІ ПРОЕКТУВАННЯ СКЛАДІВ БЕТОНІВ І МЕТОДОЛОГІЯ ЇХ ВИРІШЕННЯ

## 1.1. Основні задачі проектування складів бетону

Проектування складів бетону – ключова технологічна задача, рішення якої визначає рівень експлуатаційної надійності конструкцій та споруд і ступінь раціонального використання ресурсів, витрачених на їх виготовлення і зведення.

Засновником практичної методології проектування складів бетону є Д. Абрамс. Він, узагальнивши результати значних експериментальних досліджень у Чикагській лабораторії Portlandcement Association, сформулював основні задачі проектування складів бетону і методи їх вирішення. За Абрамсом проектування складів бетону полягає у *"виборі водоцементного фактору, що відповідає заданій міцності й умовам роботи споруд, і знаходженні такої комбінації заповнювачів, що могла б дати бетон необхідної якості і придатної консистенції"*. При цьому повинна бути забезпечена найменша витрата ресурсів на виготовлення бетону і його укладання.

Сформульовані на початку розвитку технології бетону задачі проектування складів залишаються актуальними і в даний час.

В сучасній технології під проектуванням складів бетону розуміють обґрунтування, вибір виду вихідних матеріалів і їх співвідношень, що забезпечують при заданому критерії оптимальності нормовані проектні вимоги до бетонної суміші і бетону. При використанні методології системного підходу проектування складів бетону може включати ряд додаткових задач, пов'язаних з оптимізацією технологічних параметрів виробництва і проектних вимог.

Д. Абрамс уперше запропонував два методи проектування складів бетону: т.зв. "пробний метод" або експериментальний підбір і метод попередніх розрахунків. Як показала практика, обидва методи мають право на існування і розвиток.



Розвиток бетонознавства, комп'ютеризація технологічних і техніко-економічних розрахунків надали нові можливості для розвитку розрахункового методу проектування складів бетонів. Розрахункові склади бетонних сумішей вимагають експериментального уточнення до їх виробничого використання, проте застосування розрахункового методу виявляється доцільним особливо при необхідності оперативного обґрунтування потреби ресурсів і ефективності вихідних матеріалів, зниження трудомісткості лабораторних робіт. Два зазначених методи проектування складів, як вважав Д.Абрамс, повинні бути засновані на (законі) *правилі водоцементного відношення*. Багато наступних досліджень показали, що твердження Абрамса про те, що *"міцність бетону при даних матеріалах і умовах їх обробки визначається лише відношенням об'єму використаної для суміші води до об'єму цементу"* є деяким перебільшенням і слово "лише" краще замінити на сполучення "в основному". В ряді робіт зокрема, показаний істотний вплив на міцність важкого бетону при даних вихідних матеріалах поряд з В/Ц, що характеризує якість цементного клею, його об'ємної концентрації та інших факторів.

В даний час у технологічній практиці проектування складів бетону здійснюється на базі досить великої кількості методів, що ґрунтуються на різних теоретичних і технологічних передумовах. Усі ці методи можуть успішно застосовуватися на практиці, якщо вони вирішують поставлені задачі. Як показав час, прагнення зробити універсальною методологію проектування складів і дискусія про переваги одних підходів над іншими виявилися не конструктивними.

Актуальними напрямками розвитку методології проектування складів бетону є:

- збільшення "прогнозуючої здатності" розрахункових методик, тобто можливості більш повного врахування технологічних факторів і проектних вимог до бетону;
- підвищення ефективності алгоритмів розрахункових методик, їх точності і швидкодії.

Розвиток цих напрямків можливий за рахунок реалізації сучасних уявлень бетонознавства про формування будівельно-



технічних властивостей бетону в сполученні із системним аналізом.

Найбільш загальний підхід до проектування складів бетону, що базується на кількісному врахуванні взаємозв'язків типу “властивість – структура – склад” бетону шляхом аналізу і спільного рішення рівнянь, що зв'язують показники властивостей бетону з параметрами його структури.

Основними передумовами такого підходу можна вважати наступні положення бетонознавства:

1. Більшість властивостей бетону є функціями його структури. У залежності від характеру тих або інших властивостей їх можуть формувати переважно макро- або мікроструктурні особливості бетону. Вплив на властивості бетону його структури визначає взаємозалежність різних властивостей.

2. Кожна з властивостей бетону однозначно пов'язана з відповідними параметрами або критеріями структури, що враховують якісні і кількісні особливості його твердої фази і порового простору. Як для типового композиційного матеріалу структурні параметри бетону враховують особливості його матриці (цементного каменю) і заповнювачів, їх взаємодію.

3. Напрямки зміни різних властивостей бетону при зміні параметрів структури і факторів складу можуть як збігатися, так і бути різними. Проектування складу бетону з заданими властивостями вимагає врахування їх спрямованості і, у багатьох випадках, є задачею компромісною.

*Оптимальна структура бетону* – це структура, що забезпечує комплекс необхідних властивостей при виконанні заданих умов оптимальності (мінімальна витрата цементу, мінімальна вартість бетонної суміші та ін.). Відповідно до цієї умови складу бетону можуть істотно відрізнятися при різних умовах оптимальності.

У будівельно-технологічній практиці найбільше поширення одержали методи проектування складів бетону з необхідною міцністю при стиску. Це обумовлено, по-перше, тим, що при конструктивних розрахунках міцність бетону є основним його параметром, і, по-друге, припущенням, що з



міцністю однозначно зв'язані й інші необхідні властивості бетону. Останнє припущення, однак, не є досить загальним. Дійсно, з міцністю бетону при стиску однозначно зв'язані багато з його властивостей: міцність при згині, розтягу, зносостійкість, кавітаційна стійкість та ін. Однак, не є однозначною залежність міцності і морозостійкості, міцності і повзучості і т.д, а їх розрахункове визначення повинне ґрунтуватися на використанні комплексу спеціальних кількісних залежностей.

Проектування складів бетону може розглядатися як ізольована система (*перший тип задач*) і як підсистема більш загальних технологічних систем, наприклад проектування бетонних і залізобетонних конструкцій і технології їх виробництва (*другий тип задач*). У першому випадку задача полягає лише в оптимальному рецептурному забезпеченні заданих параметрів, а в другому – вирішується додатково і задача оптимізації самих параметрів, що задаються, (легкоукладальності суміші, міцності бетону та ін.).

Існуюча практика припускає, в основному, рішення задач першого типу, що не завжди може виявитися достатнім. Наприклад, прагнення технологів домогтися максимальної економії цементу при проектуванні бетону заданої міцності не є продуктивним, якщо сам показник міцності неоптимальний з позицій вартості конструкцій. Зокрема, застосування бетону підвищеної міцності може дозволити зменшити переріз конструкцій і, таким чином, з позицій витрати цементу на одиницю виробів (конструкцій) а не на кубометр бетону, може виявитися більш вигідним. Аналогічно, не завжди економічно обґрунтованими є показники легкоукладальності бетонних сумішей, від яких істотно залежать склади. Наприклад, якщо критерієм оптимізації складів є вартість конструкції, застосування жорсткої бетонної суміші може виявитися менш вигідним, з огляду на трудовитрати на укладання бетону, чим застосування литої суміші, хоча остання містить більшу кількість цементу. У зв'язку з цим представляється раціональним, там де це можливо, поєднувати зусилля конструкторів, технологів і економістів для комплексного





рішення задач конструктивного і технологічного проектування бетону.

При проектуванні складів бетону в задачах другого типу передбачається їх багатоваріантність. Вибір того або іншого складу визначають в конкретних умовах, виходячи з прийнятого критерію оптимальності. Такими критеріями найчастіше можуть бути мінімальна витрата цементу, мінімальна середня густина бетону, мінімальна вартість бетону. Може бути обраний більш складний критерій, наприклад, вартість конструкцій або навіть усієї споруди в цілому з врахуванням не тільки вартості бетону але і трудомісткості, вартості виготовлення, перевезення і монтажу конструкцій.

В задачах другого типу в якості факторів складу бетонної суміші, що оптимізуються, розглядаються не тільки рецептурні (співвідношення заповнювачів, витрата добавки), але технологічні і конструктивні параметри.

Одним з підходів, що пов'язують склад бетонної суміші з технологічним процесом, є теоретичний підхід, розроблений Ю.Сторком. Він запропонував розглядати енергію ущільнення бетонної суміші при вібрації як один з основних параметрів складу суміші, що забезпечує в комплексі з іншими факторами, необхідну міцність бетону. Виходячи з цієї передумови, Ю.Сторк вивів ряд рівнянь, що встановлюють залежність між режимом вібрації, складом і фізико-механічними властивостями бетонних сумішей і бетонів.

В ряді робіт отримані рівняння, що зв'язують склад бетону з режимом теплової обробки, і розглянуті їх рішення при різних критеріях оптимальності.

Задачі першого типу можна розділити на групи: однопараметричні, дво- і багатопараметричні. В основу такої класифікації покладена загальна кількість нормованих параметрів для бетонної суміші і затверділого бетону.

Для *однопараметричних задач* не нормується звичайно в строго визначених кількісних границях показник легкоукладальності суміші. Вказується лише його якісна характеристика (суміш напівсуха, жорстка, рухома, літа). Якісно можуть характеризуватися й окремі показники



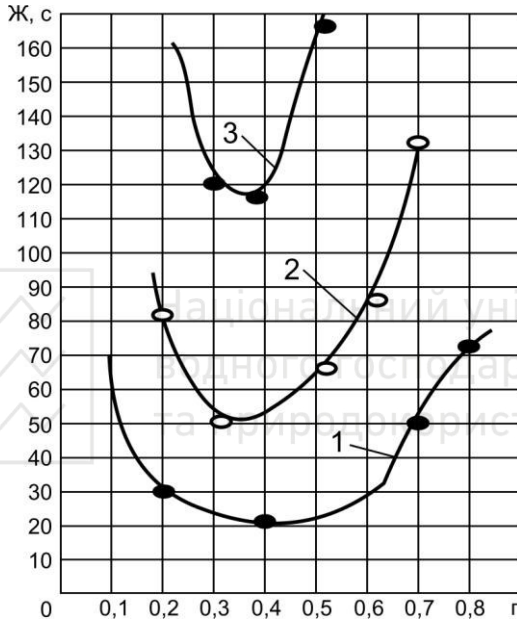
затверділого бетону (бетон морозостійкий, водонепроникний, сульфатостійкий та ін.). В ряді випадків вказується спосіб виготовлення виробів або виконання бетонних робіт. Можуть вказуватися також умови експлуатації конструкцій. В тих випадках, коли це виявляється можливим, технолог вводить в умову задачі проектування складів кількісні показники, адекватні якісним оцінкам і однопараметрична задача проектування складу трансформується в двох- або багатопараметричну. В інших випадках доводиться, проектуючи склад, що забезпечує нормовані властивості, вводити необхідні обмеження по витраті води, В/Ц, крупності і виду заповнювачів, вмісту добавки.

Найбільш розробленими і реалізованими на практиці є *двопараметричні задачі*, коли нормованою властивістю бетону є його міцність при стиску ( $R_{cm}$ ), а бетонної суміші – показник легкоукладальності (рухомість ОК або жорсткість Ж). Для рішення задач цього типу широко застосовуються розрахунково-експериментальні методи, що використовують ряд відомих технологічних залежностей: міцності бетону від цементно-водного відношення, правило сталості водопотреби бетонних сумішей, правило оптимального вмісту піску та ін.

При рішенні таких задач для важких бетонів послідовно визначають значення цементно-водного відношення, витрату води з урахуванням необхідної рухомості або жорсткості бетонної суміші і витрату заповнювачів, використовуючи припущення про те, що бетонна суміш складається з абсолютних об'ємів всіх її складових. В найпростішому випадку для чотирьохкомпонентної суміші, необхідне знання трьох параметрів: цементно-водного відношення (Ц/В), витрати води (В) і фактору, що характеризує співвідношення заповнювачів (частки піску в суміші заповнювачів ( $g$ ) або коефіцієнта розсунення зерен крупного заповнювача цементно-піщаним розчином ( $\alpha$ )). Останній фактор можна розглядати як оптимізуючий, тому що лише при деякому оптимальному його значенні, в умовах Ц/В=const, можливе досягнення мінімальної витрати цементу (рис.1.1). Найчастіше під оптимальним приймають співвідношення заповнювачів, що забезпечує їх



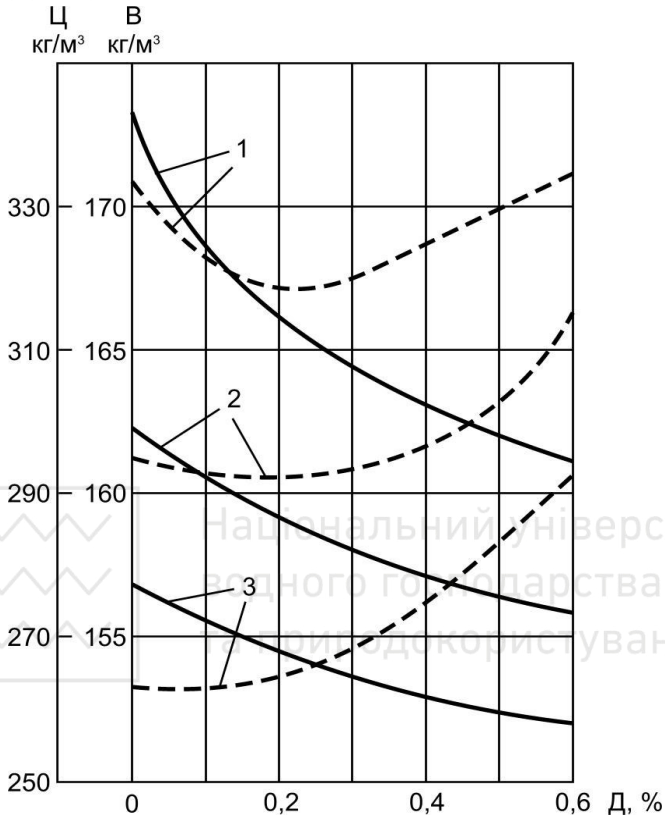
найкращу легкоукладальність або мінімальну водопотребу. Для бетонної суміші з великою кількістю компонентів строгий аналітичний пошук оптимального співвідношення заповнювачів стає досить складною задачею, що вимагає застосування методів нелінійного програмування й ін. В деяких випадках задача може бути спрощена при використанні емпіричних залежностей.



**Рис. 1.1.** Вплив частки піску в суміші заповнювачів на легкоукладальність бетонної суміші (за О.А.Гершбергом):

1. Номінальний склад 1:1 (цемент : суміш дрібного і крупного заповнювача).
2. Те ж, 1:1.5.
3. Те ж, 1:2

Оптимізуючим фактором може служити також витрата добавки. Зокрема добавки-пластифікатори дозволяють досягти мінімальної витрати цементу при оптимальній їх витраті (рис.1.2), що залежить від необхідної рухомості суміші, міцності бетону.



**Рис. 1.2.** Вплив витрати ЛСТ на водопотребу бетонної суміші і втрату цементу:

————— водопотреба;  
----- втрата цементу.

1 – Ж=13 с; 2 – Ж=20 с; 3 – Ж=27с

В тих випадках, коли, крім міцності при стиску, виникає необхідність нормування ряду інших його будівельно-технічних властивостей, задача проектування складу істотно ускладнюється.



При проектуванні складів різних, і особливо, спеціальних видів бетону (гідротехнічного, дорожнього, корозійностійкого і т.д.) виникають *багатопараметричні задачі*. Їх можна розділити на три підгрупи:

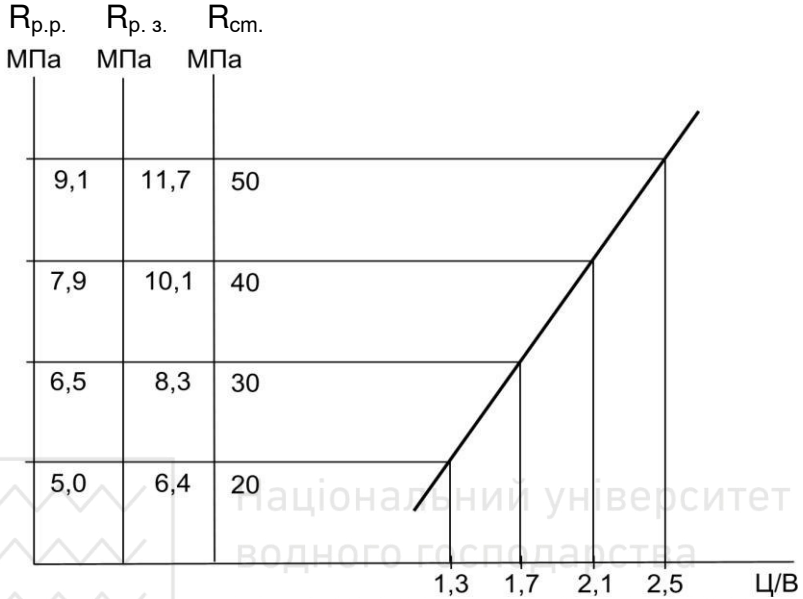
- з нормованими параметрами, однозначно зв'язаними з міцністю бетону при стиску;
- з нормованими параметрами, неоднозначно зв'язаними з міцністю при стиску;
- з нормованими параметрами, не зв'язаними з міцністю при стиску.

У першу підгрупу входять, наприклад, задачі з різними нормованими показниками міцності бетону. При розрахунку складів таких бетонів спочатку знаходиться визначальний параметр із нормованих властивостей бетону, відповідна йому міцність при стиску і встановлюється мінімально можливе Ц/В, що забезпечує весь набір властивостей. Під "*визначальним параметром*" розуміється такий нормований параметр, досягнення якого припускає одночасно досягнення й всіх інших параметрів, зазначених в умові задачі.

Наприклад, з рис. 1.3 випливає, що якщо нормуються: міцність при стиску  $R_{cm} \geq 20$  МПа, розтягу при згині  $R_{p,z} \geq 8,3$  МПа і розтягу при розколюванні  $R_{p,p} \geq 7,9$  МПа, то, очевидно, що визначальним параметром є  $R_{p,p}$  і необхідне Ц/В, що забезпечує всі три показники властивостей, дорівнює 2.1.

Принциповою особливістю таких задач є існування області Ц/В, в межах якої знаходиться Ц/В, що забезпечує всі нормовані показники. Чим вужча ця область (для розглянутого прикладу область Ц/В – 1,3...2,1) (рис. 1.3), тим ближче є склад до оптимального і  $C \rightarrow \min$ . Для досягнення цієї умови можуть використовуватися різні технологічні прийоми: введення добавок-регуляторів властивостей, зміна умов твердіння, підбір вихідних матеріалів та ін.

Нормованими параметрами в задачах другої підгрупи, поряд з міцністю при стиску, можуть бути повзучість, морозостійкість, тепловиділення і т.д.



**Рис. 1.3.** Вплив Ц/В на міцність при стиску ( $R_{cm.}$ ), розтяг при згині ( $R_{p.з.}$ ) і розтяг при розколюванні ( $R_{p.p.}$ )

На рис. 1.4 показаний приклад взаємозв'язку повзучості і вмісту цементного каменю в бетоні при  $R_{ct} = \text{const}$ . Міру повзучості бетону розраховували за формулою, запропонованою Європейським Комітетом з бетону:

$$C_{m(28)} = \frac{k \cdot B / \text{Ц} (B + 0.33\text{Ц})}{\sqrt{10R_{cm}}}, \quad (1.1)$$

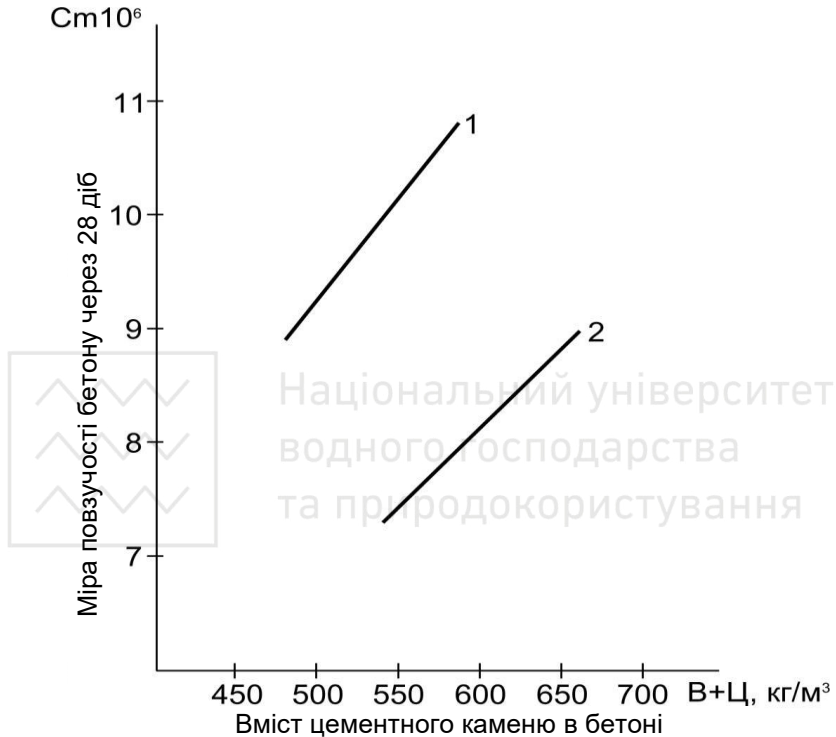
де  $k$  – коефіцієнт, що залежить від розмірів перерізу елемента ( $r$ ) і вологості навколишнього середовища ( $\theta$ );

$B$  і  $\text{Ц}$  – відповідно витрата води і цементу,  $\text{кг/м}^3$ . Наприклад, при  $r = 2.5$  см,  $\theta = 70\%$ , коефіцієнт  $k = 0.92 \cdot 10^{-6}$ .

З формули (1.1) і рис. 1.4 випливає, що при постійному В/Ц і отже міцності бетону, повзучість його може істотно відрізнятись в залежності від вмісту цементного каменю в



бетоні. Аналогічно, можна показати неоднозначність залежності міцності бетону з групою властивостей, обумовлених в основному, капілярною пористістю (водопоглинання, морозостійкість і ін.).



**Рис. 1.4.** Вплив вмісту цементного каменю в бетоні на міру повзучості:  
1 –  $R_{cm} = 20$  МПа; 2 –  $R_{cm} = 30$  МПа

Капілярну пористість можна розраховувати за формулою:

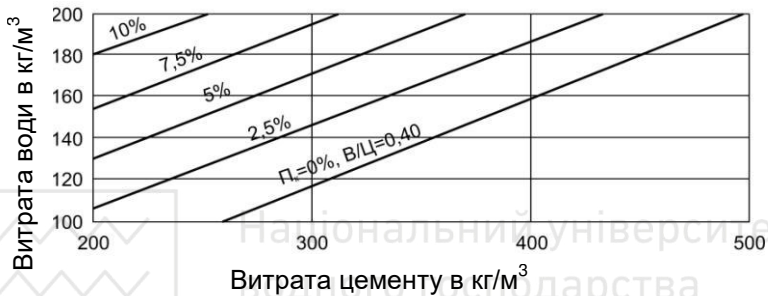
$$П_{\kappa} = \frac{B - w_t \alpha C}{1000}, \quad (1.2)$$

де  $w_t$  – кількість хімічно зв'язаної води (0,47...0,52);  
 $\alpha$  – ступінь гідратації цементу.



Зменшення В/Ц і зростання кількості зв'язаної води знижує капілярну пористість, але при цьому підвищення витрати цементу приводить до збільшення об'єму цементного каменю в бетоні і дещо підвищує пористість.

На рис. 1.5 приведена за даними Г.І. Горчакова номограма капілярної пористості бетону. Лінії номограми однакової пористості при  $P_k > 0$  не відповідають постійному В/Ц, а отже і постійній міцності бетону.



**Рис. 1.5.** Номограма капілярної пористості бетону

Параметри, нормовані в багатопараметричних задачах, можуть формуватися під впливом як тих самих, так і істотно інших технологічних факторів. У вищевказаному прикладі міцність при стиску і повзучість визначаються насамперед водоцементним відношенням. Аналогічно водоцементне відношення є основним фактором впливу у випадку, якщо нормуються міцність і морозостійкість (особливо при невикористанні повітрявтягувальної добавки). Однак, на відміну від задач першої підгрупи, в даному випадку нормовані параметри зв'язані менш жорстко.

Для рішення задач даної підгрупи, так само як і попередньої, встановлюється область В/Ц або Ц/В, що забезпечує нормовані параметри, розглядаються технологічні шляхи її звуження й остаточно необхідне значення нормованого В/Ц. Регулювання нормованого В/Ц в цих задачах можливо,



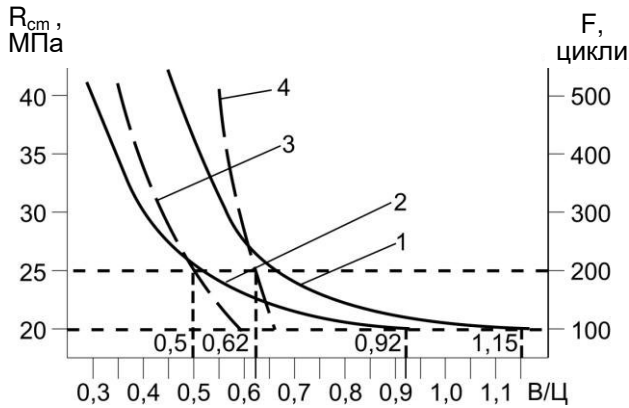


однак, за рахунок зміни інших факторів складу, зокрема кількості цементного тіста, об'єму втягнутого повітря та ін.

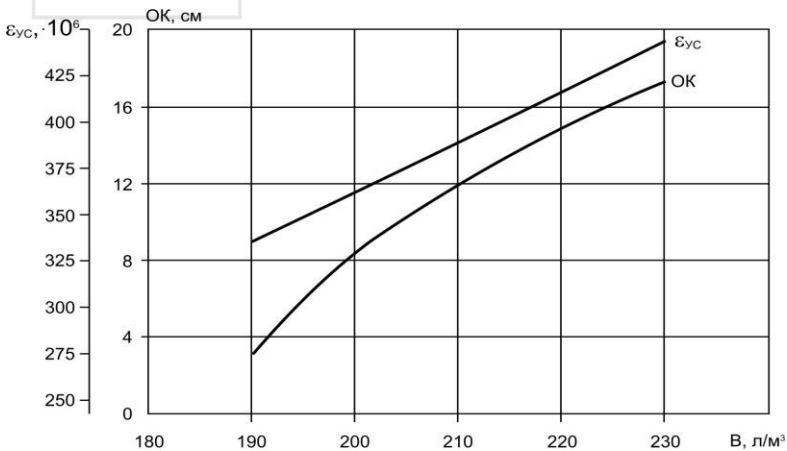
Наприклад, нормуються середня міцність бетону  $R_{cm}=65\text{МПа}$  (B50) і повзучість  $C_m \times 10^6=3,5$ . Рухомість бетонної суміші на гранітному щебені і середньозернистому кварцовому піску прийнята  $OK=2$  см. Активність цементу  $R_d=50\text{МПа}$ . По розрахунковій формулі міцності бетону  $R_{cm}=AR_d(\frac{C}{V} - 0,5)$  при  $A=0,6$   $V/C=0,38$ . При витраті води  $V=175$  л/м<sup>3</sup> і відповідно витраті цементу  $C=460$  кг/м<sup>3</sup>, міра повзучості не забезпечується ( $C_m \times 10^6=4,5$ ). Для досягнення нормованого значення  $C_m \times 10^6$  необхідно зменшити значення  $V/C$ . Практичний збіг  $V/C$  з умов міцності і повзучості можна досягти переходом на більш жорстку суміш.

Потужним засобом зменшення "ножиців" по  $V/C$  в морозостійких бетонах є залучення повітря. Характерно при цьому, що значно збільшуючи  $V/C$  для досягнення заданої морозостійкості, втягнуте повітря в той же час зменшує  $V/C$  з умови міцності. При цьому загальний позитивний ефект зменшення витрати цементу може бути досить значним особливо в бетонах з високими значеннями морозостійкості при помірному нормованому значенні міцності. З рис. 1.6, зокрема впливає, що  $R_{cm}=20$  МПа і F200 забезпечуються без добавки втягнутого повітря при  $V/C=0,5$ , із введенням втягнутого повітря  $V/C=0,62$ . При цьому величина "ножиців" по  $V/C$  в першому випадку складає 0,31, а в другому 0,1.

Аналогічно, "ножиці" по витраті води утворюють, наприклад, показники легкоукладальності бетонної суміші й усадка бетону (рис. 1.7), за обсягом повітря, що втягується – міцність і морозостійкість. Це вимагає включення в алгоритми задач багатопараметричного проектування складів бетону спеціальних обчислень, зв'язаних з визначенням таких значень параметрів суміші, що забезпечують весь комплекс нормованих властивостей.



**Рис. 1.6.** Зміна В/Ц в залежності від заданих значень міцності і морозостійкості бетону:  
1 – крива  $R_{ст}$  без втягнутого повітря;  
2 – з 20 л втягнутого повітря (міцність розрахована для  $R_{ц} = 50$  МПа);  
3 – крива морозостійкості бетону без втягнутого повітря;  
4 – з 20 л втягнутого повітря



**Рис. 1.7.** Вплив вдовмісту на рухомість бетонної суміші і усадку:

Примітка. Залежність ОК від В прийнята для рядових матеріалів; усадка бетону  $\epsilon_{yc}$  розрахована по формулі  $\epsilon_{yc} \cdot 10^6 = 0,125В \sqrt{B}$



Зменшення інтервалів необхідних параметрів суміші і зрушення їх в бік, що забезпечує мінімально можливу витрату цементу, є задачею оптимізації складів бетону.

Для ряду задач проектування складів бетону (наприклад, легких бетонів) В/Ц не є визначальним чинником, що забезпечує комплекс нормованих властивостей. Для таких задач варто знаходити інший, істотний для всіх нормованих властивостей фактор. Визначення необхідного значення цього фактора стає головною задачею розрахунку складів.

Розробка досить загального і доступного розрахунково-експериментального методу проектування складів бетонних сумішей із заданою легкоукладальністю і міцністю бетону стала можливою завдяки використанню ряду допущень, зроблених на основі фізичних закономірностей, обумовлених впливом структури бетону на його властивості. Такими закономірностями є закон (правило) водоцементного відношення, правило сталості водопотреби бетонних сумішей, правило оптимального вмісту піску та ін. Дані закономірності можуть бути використані і при багатопараметричному проектуванні складів бетону. При цьому загальна схема методу наступна:

1. З урахуванням проектних вимог до бетону, технологічних умов і техніко-економічного аналізу вибираються вихідні компоненти бетонної суміші та її легкоукладальність.

2. У тих випадках, коли нормуються властивості бетону, однозначно зв'язані з міцністю бетону при стиску  $R_{cm}$  (міцність при розтягу, згині, модуль пружності, умовна розтяжність та ін.), визначається значення останньої, що забезпечує задані властивості.

3. З урахуванням активності цементу, якісних особливостей заповнювачів, умов твердіння й інших факторів визначається Ц/В, що забезпечує задані властивості.

4. Для досягнення необхідного показника легкоукладальності і при необхідності інших властивостей бетонної суміші і бетону (наприклад, усадки) при використанні даних вихідних матеріалів і добавок визначається витрата води (В). При цьому у випадку виходу за межі правила сталості водопотреби витрата води коректується з врахуванням Ц/В.



5. При нормуванні морозостійкості бетону розраховується необхідний обсяг емульгованого повітря й уточнюється необхідне Ц/В.

6. При знайдених значеннях В і Ц/В перевіряється можливість досягнення нормованих властивостей, що визначаються цими двома технологічними параметрами. У випадку недосягнення нормованих параметрів здійснюється додаткове коректування В і Ц/В з використанням при необхідності спеціальних технологічних прийомів (введення добавок та ін.).

7. Розраховується на основі остаточно знайдених Ц/В і В витрата цементу і перевіряється виконання обмежень, зв'язаних з витратою цементу (тепловиділення, стійкість до корозії й ін.).

8. Розраховується склад дрібного і крупного заповнювача при введенні декількох фракцій, а потім їх витрати. При виборі співвідношення заповнювачів поряд з досягненням найкращої легкоукладальності і міцності приймаються до уваги й інші умови (підвищена водонепроникність, товщина конструкції, ступінь армування та ін.).

9. Розглядається можливість використання різних технологічних рішень, спрямованих на економію цементу, зниження енерговитрат, зменшення вартості бетонної суміші.

## **1.2. Системний аналіз – сучасна методологія вирішення технологічних задач проектування складів**

Розрахунок проектування складу бетону базується на комплексі залежностей, що дозволяє прогнозувати його властивості. Розробка наукових основ прогнозування властивостей бетону є однією із центральних проблем бетонознавства протягом всієї історії його розвитку. У вирішенні цієї проблеми наприкінці минулого сторіччя намітилися два підходи: структурний і факторний. При першому підході показники властивостей бетону прямо зв'язуються з параметрами його структури (щільністю, пористістю тощо), при другому – з окремими найбільш важливими технологічними факторами (водоцементним відношенням, витратою води тощо). На практиці більший розвиток одержав другий підхід, що було обумовлено порівняною легкістю



вимірювання окремих технологічних факторів, можливість переходу безпосередньо від прогнозування властивостей до розрахунку складів бетонної суміші.

В міру нагромадження в технології бетону експериментального й теоретичного матеріалу чітко проявляється необхідність урахування великої кількості факторів, що впливають на властивості бетону. Вона обумовлена прагненням не тільки підвищити точність прогнозу, але й одержати досить повні математичні моделі властивостей бетону, які могли б бути використані при вирішенні задач аналізу ефективності і керування технологічними процесами. Традиційні технологічні залежності, що включають не більше двох-трьох змінних, не дозволяють перебороти «факторний» бар'єр при прогнозуванні властивостей бетону. Уже перші аналітичні залежності (Р. Фере, 1982 р.) були засновані на зв'язках між властивостями бетону і його структурою, що певною мірою дозволяють подолати факторний бар'єр.

Можна виділити ряд напрямків у теоретичних дослідженнях взаємозв'язків "структура – властивості бетону", заснованих на закономірностях фізики твердого тіла, фізико-хімічної механіки дисперсних систем, атомно-молекулярної теорії, теорії штучних конгломератів. Кожен з них є досить плідним. Так, у результаті розвитку основних положень реології стало можливим описати структурно-механічні властивості бетонних сумішей. Розгляд бетону як пружного-в'язкого матеріалу дозволив запропонувати структурні моделі і гіпотези механізму деформування і руйнування, а також вирази для відповідних характеристик. Принципи фізико-хімічної механіки дисперсних систем лягли в основу теорій твердіння і керованого структуроутворення, а також багатьох теоретичних розрахункових формул. Теорія штучних конгломератів відкриває шляхи формування бетонів оптимальних структур і прогнозу їх властивостей.

Базовими при вивченні впливу структури на властивості бетону є уявлення про бетон, як про капілярно-пористий композиційний матеріал. Вони стали фундаментом, на якому побудовані відомі й розвиваються нові структурні теорії бетону. Вивчення структури порового простору і його взаємозв'язків з міцністю, морозостійкістю, проникністю тощо, а також усього комплексу особливостей фізичного механізму синтезу властивостей



бетону – найбільш реальні й перспективні шляхи створення системи розрахункових аналітичних залежностей у технології бетону.

Структурування і синтез властивостей – комплекс дуже складних процесів, що відбуваються в бетоні, починаючи від атомно-молекулярного рівня і закінчуючи його макроструктурою. На сучасному етапі досліджень, незважаючи на те, що ця проблема є центральною в теорії бетону, неминучі деякі допущення і наближення, виправдані з технологічних міркувань, але які вносять певні похибки у розрахунки. Структурний метод прогнозу деяких властивостей бетону на даний момент є неприйнятним внаслідок впливу великої кількості різних факторів на склад і режими його виробництва. У цих умовах, коли конкретизується сукупність керованих факторів і область їх можливої зміни, ефективно застосування кібернетичного методу прогнозу і керування властивостями бетону.

Відомо, що кібернетику можна розглядати як науку про керування складними системами. До таких систем можна віднести технологію бетону та залізобетонних виробів. Завдання цієї системи полягають у тім, щоб, регулюючи фактори на “вході”, оптимально забезпечити якість матеріалу і виробів на “виході”.

Кібернетичний метод можна розглядати як сучасну модифікацію факторного підходу до одержання кількісних залежностей для вирішення завдань прогнозування і керування властивостями бетону. Головним і практично найціннішим у кібернетичному підході є можливість з його допомогою прогнозувати поведінку об'єкта керування, абстрагуючись у певній мері від його матеріально-енергетичних і структурних характеристик, тобто на основі функціональної подібності. Обсяг наявної інформації при кібернетичному дослідженні бетону завдяки попереднім дослідженням дозволяє, як правило, перейти від принципів “чорного” до “сірого” ящика, коли в розпорядженні дослідника вже перебувають попередні дані, що мають в основному, якісний характер. Завдання при цьому зводиться до того, щоб одержати адекватний математичний опис досліджуваних залежностей, або лише в стаціонарних, або як у стаціонарних, так й у нестаціонарних умовах.

Кібернетичним інструментарієм є математичні моделі, що розкривають зовнішні функціональні залежності системи без



аналізу внутрішніх причинних зв'язків. Разом з тим можливість одержання конкретної інформації про поведінку системи у значній мірі сприяє і теоретичним дослідженням з її внутрішньої організації.

Широке впровадження в науку і практику ЕОМ та математичних методів сприяло в останні десятиліття бурхливому розвитку досліджень у різних галузях техніки, у тому числі і в технології бетону, в результаті яких розроблені багаточисленні математичні моделі і отримані важливі практичні висновки.

Накопичений до теперішнього часу досить значний досвід застосування математичного моделювання в технології бетону показує його ефективність, головним чином, у складних оптимізаційних завданнях, де інші методи дослідження або неможливі, або вимагають більших витрат часу й праці.

При кібернетичному підході одержання математичних моделей здійснюється в результаті формалізації статистичної інформації про поведінку системи при зміні певних технологічних факторів. Одержання такої інформації можливе як на основі пасивного, так і активного експерименту. При активному експерименті, здійснюваному з застосуванням математичних методів планування, отримання моделей можливе при мінімальному обсязі робіт відповідно до передумов регресивного аналізу. При плануванні експерименту математичним методом приділяється активна роль на всіх етапах дослідження: при формалізації апріорних відомостей до виконання дослідів, при їх проведенні, обробці результатів і прийнятті рішення.

Поліноміальні факторні моделі на відміну від структурно-критеріальних дозволяють прямо оцінити вплив факторів, що враховуються, і одержати кількісні показники ефективності їх взаємодії. Разом з тим одержання моделей у строго визначених умовах ще не є достатньою умовою кібернетичного методу. Побудову моделей можна розглядати як перший його етап. Необхідною додатковою умовою є періодична адаптація моделей, тобто їхнє коректування на основі поточної інформації. Застосування моделей, що адаптуються особливо доцільно при вирішенні завдань прогнозування і керування властивостями бетону у виробничих умовах, для яких неминучі неконтрольовані вхідні збурювання. Кібернетичний метод у технології бетону з використанням



зворотного зв'язку і коректуванням математичних моделей починає знаходити практичне застосування і є перспективним.

Багатофакторне прогнозування властивостей бетону отримує найбільшу практичну значимість у тому випадку, якщо воно спрямоване на вибір ефективного поєднання технологічних факторів при досягненні необхідних якісних показників бетону.

Системний аналіз служить для вирішення складних переважно слабоструктурованих проблем зі змішаними кількісними і якісними оцінками шляхом вивчення властивостей систем і взаємозв'язків між цілями й засобами їх досягнення. До таких проблем можна віднести й оптимальне забезпечення властивостей бетону. Воно включає призначення технічних характеристик бетонної суміші і бетону, обґрунтування виду й активності цементу, якісних показників піску і щебенів, виду добавки, визначення режимних параметрів твердіння, встановлення вмісту вихідних компонентів в  $1 \text{ м}^3$  бетонної суміші. Всі ці елементи комплексу спрямовані на досягнення загальної мети – одержання бетону, що забезпечує необхідні вимоги до конструкцій найбільш ефективно і при мінімальних витратах. Їх можна розглядати як підсистему оптимального забезпечення властивостей бетону, а останню – як підсистему більш загальних систем – проектування бетонних і залізобетонних конструкцій та технології їх виробництва. Системний аналіз, розвиваючи традиційні методи наукового аналізу, ефективний при вирішенні різноманітних проблем в умовах наявності невизначеностей і безмежної кількості можливих альтернатив. Невизначеності при керуванні властивостями бетону обумовлені його складністю як об'єкта дослідження внаслідок недостатньої вивченості процесів твердіння, деформування і руйнування, неоднорідної і багатокомпонентної структури, нестабільної в часі, постійної взаємодії з навколишнім середовищем. Шляхом простих розрахунків можна показати, що при проектуванні технології залізобетонних конструкцій навіть за досить спрощеною схемою з оцінкою всього лише трьох варіантів на кожному з 14 етапів можливо  $3^{14}$ , або 4782969 розв'язків. Аналогічно не важко довести, що практично безмежна кількість альтернатив можлива і у задачах забезпечення властивостей бетону.

Любий системний об'єкт характеризується входом, виходом, процесами функціонування, зворотним зв'язком і обмеженнями. Входом у бетон як систему є сукупність факторів: технологічних,

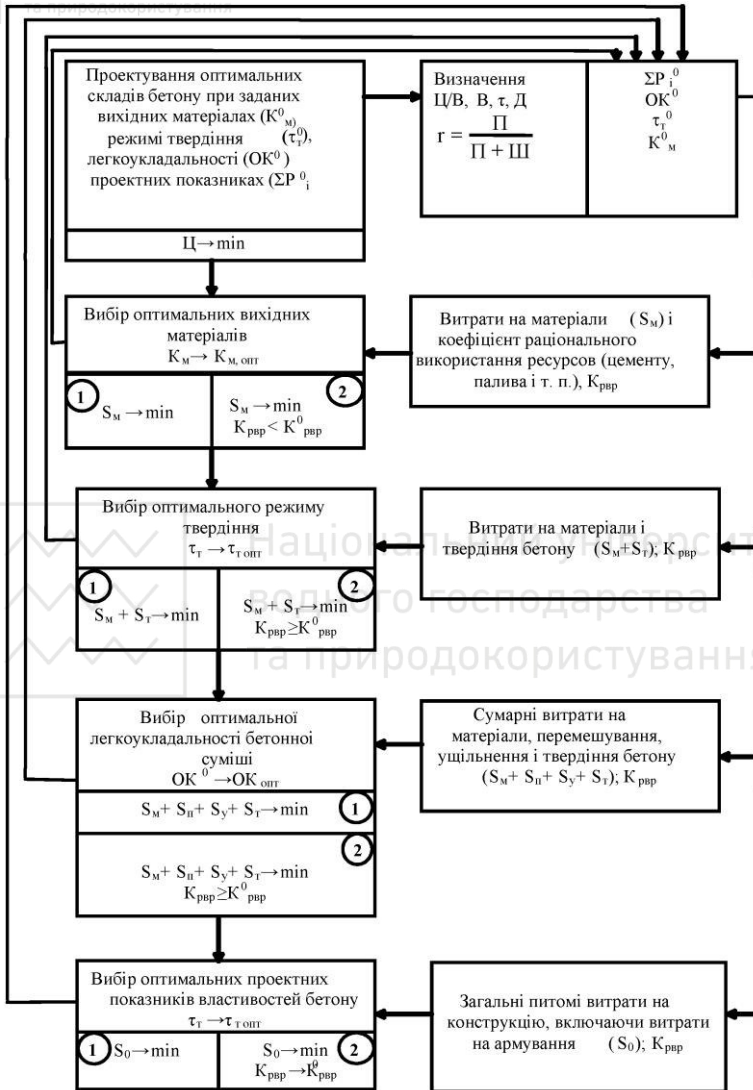




обумовлених впливом зовнішнього середовища, техніко-економічних тощо; виходом виступає сукупність властивостей і економічних параметрів, що визначають ефективність його функціонування в конструкціях і спорудах. Структуроутворюючою основою бетону як системи виступає комплекс процесів, результатом яких є перетворення вхідних факторів у вихідні параметри. За допомогою зворотного зв'язку інформація про властивості бетону і його ефективність надходить на вхід, що дозволяє регулювати значення факторів, які впливають. Для оцінки функціональних характеристик системи необхідна побудова математичних моделей, що адекватно відбивають взаємозв'язки між окремими елементами об'єкта дослідження. Вплив технологічних факторів у моделях властивостей бетону може враховуватися як безпосередньо в поліноміальних моделях, так і побічно, через інтегральні критерії в критеріальних рівняннях.

Побудова математичних моделей може здійснюватися із застосуванням апарата регресійного аналізу результатів традиційного або активного алгоритмізованого експерименту. Останній реалізується із застосуванням методів математичного планування експериментів, які в цей час достатньо добре розроблені стосовно до різних галузей науки і техніки, у тому числі і до технології бетону та залізобетону. Методи математичного планування експерименту найбільш близькі за вихідними передумовами до системного підходу. Вони розглядають досліджуваний об'єкт з урахуванням можливої взаємодії факторів, дозволяючи побудувати модель, яка досить повно розкриває прямі і зворотні зв'язки в системі.

Загальна схема при оптимальному забезпеченні властивостей бетону показана на рис. 1.8. На першому етапі вона допускає визначення оптимальних складів бетону, що забезпечують комплекс необхідних властивостей бетону при деяких заданих проектних параметрах, а на наступних - оптимізацію вихідних компонентів, технологічних режимів і, при необхідності, самих проектних параметрів, що викликає доцільність відповідного коректування складів.



Умовні позначення: Ц/В, В,  $\tau$ , Д – відповідно цементно-водне відношення, водопотреба, тривалість теплової обробки, вміст добавки.

**Рис.1.8.** Блок-схема системного аналізу при оптимальному забезпеченні властивостей бетону



Задачі оптимізації при системному підході вирішуються поетапно і завершуються загальною оптимізацією системи. Залежно від постановки задач у конкретних умовах окремі блоки цієї схеми можна не включати в аналіз ефективності і вибір оптимальних рішень.

Для кожної задачі формулюються критерії оптимальності і обмежень. В міру поглиблення задач системного аналізу ускладнюються і критерії оптимальності. При оптимальному забезпеченні властивостей бетону найпростішим критерієм оптимальності є мінімальна витрата цементу, найбільш складним - мінімальні питомі витрати на конструкцію «у роботі», тобто сумарні витрати, що включають витрати на її виготовлення і, при необхідності, транспортування та монтаж, а також ремонтні роботи під час експлуатації.

Критерій мінімуму витрат в задачах вибору оптимальних технологічних рішень у реальних умовах може застосовуватись з урахуванням обмежень наявних ресурсів (цементу, палива, робочої сили тощо), а також рівня необхідної продуктивності. Прийняті рішення при цьому часто мають компромісний характер. В міру обмеження кількості розглянутих альтернатив при аналізі ефективності забезпечення необхідних властивостей бетону, пов'язаних з вибором цементу, добавок і заповнювачів, умов і тривалості твердіння, легковкладальності суміші, критерії мінімумальних витрат, раціонального використання цементу та палива спрощуються. У цьому випадку рішення задачі оптимізації набувають характеру пошуку єдиного варіанта, при якому цей критерій має екстремальне (мінімальне) значення.



## 2. МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНОГО ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

### 2.1. Загальні відомості. Попереднє вивчення об'єкта

Під математичним плануванням експерименту (МПЕ) розуміють постановку дослідів за заздалегідь складеною схемою, що характеризується оптимальними властивостями за обсягом експериментальних робіт і статистичними вимогами. В основу теорії планування експерименту покладені ймовірнісно-статистичні методи, що дозволяють теоретично обґрунтовано встановити мінімально необхідну кількість і склад експериментів, а також порядок їх проведення для одержання кількісних залежностей між досліджуваним параметром і факторами, що впливають на нього.

Побудова математичної моделі об'єкта дослідження є основною задачею МПЕ. Завдання одержання математичної моделі полягає в одержанні залежності, що характеризує зв'язок між параметром оптимізації  $\eta$  і незалежними змінними.

У самому загальному вигляді:

$$\eta = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (2.1)$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_k$  – незалежні змінні (фактори), які можна варіювати при проведенні експериментів.

У випадку використання МПЕ параметр  $\eta$  (функції відгуку) апроксимують поліномом:

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (2.2)$$

де  $\beta_0, \beta_i, \beta_{ij}, \beta_{ii}$  – теоретичні коефіцієнти регресії.

У результаті експериментів визначають коефіцієнти регресії  $b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii}$ , що являються оцінками теоретичних коефіцієнтів. Після цього рівняння (2.2) приймає вид:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (2.3)$$

де  $y$  – розрахункове значення параметра оптимізації.



За величиною коефіцієнтів регресії можна судити про ефекти – ступені впливу відповідних факторів. Значимість коефіцієнтів регресії свідчить про значимість відповідних ефектів.

Рівняння (2.3) може бути інтерпретоване як рівняння деякої поверхні в  $k$ -мірному просторі (рис. 2.1).

Успішне застосування (МПЕ) залежить, у першу чергу, від правильної постановки завдання. При цьому експериментатор повинен уміти чітко визначити об'єм і зміст інформації, яку необхідно добути з експериментів, а також доцільність і можливість застосування МПЕ для конкретних умов.

При постановці найпростіших завдань або на першій стадії дослідження часто мають на меті одержання рівнянь регресії першого ступеня або неповних квадратичних рівнянь. Розв'язання більшості оптимізаційних задач зв'язане, звичайно, з використанням поліномів другого порядку. Поліноміальні залежності третього порядку в практиці вирішення задач технології будівельних матеріалів практично не застосовуються.

Планування експерименту проводиться в кілька етапів: спочатку – попереднє вивчення об'єкта дослідження, потім – побудова відповідної математичної моделі і її інтерпретація. В кінці, при необхідності, здійснюється технічна реалізація отриманих результатів.

Попереднє вивчення об'єкта дослідження включає: постановку завдання; збір і обробку апріорної інформації, висування робочої гіпотези; вибір параметрів оптимізації, незалежних перемінних і обмежень; попередній експеримент.

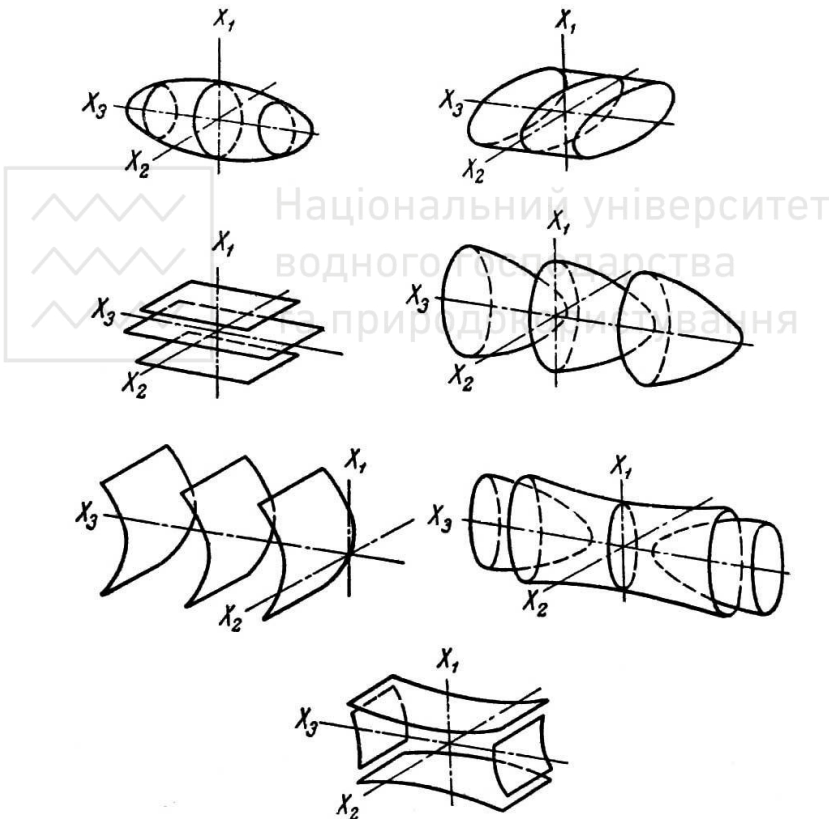
Для оптимізаційних задач повинні бути чітко сформульовані критерії оптимізації.

Практика допускає застосування різноманітних простих і комплексних, технічних, економічних і техніко-економічних критеріїв оптимізації (табл. 2.1). Критерії оптимізації в будівельно-технологічних задачах можуть прямувати до деякого абсолютного або умовного екстремуму, а в багатокритеріальних задачах знаходяться в компромісній області.

Прагнення до екстремального значення критерію оптимізації складу характерно особливо для задач, коли критерій представлений відношенням, наприклад, показника властивості бетону до його вартості або витрати цементу або енергетичного

ресурсу. На рис. 2.2 для прикладу приведена залежність коефіцієнта ефективності ( $k_e$ ) - відношення показника міцності бетону ( $R_b$ ) до питомої витрати цементу ( $\Pi$ ) від показника щільності, що враховує ступінь гідратації цементу ( $\alpha$ ) і водоцементне відношення ( $V/\Pi$ ).

Характерними при оптимізації складів бетону є задачі, що допускають досягнення умовного екстремуму, тобто максимально (мінімально) можливого значення критерію при заданих обмеженнях (наприклад, мінімально можливої об'ємної концентрації цементного каменю при заданих значеннях міцності бетону, легковкладальності бетонної суміші тощо).



**Рис.2.1.** Деякі тривимірні контурні поверхні, що характеризують майже стаціонарну область, яка описується рівнянням другого порядку, при  $k=3$



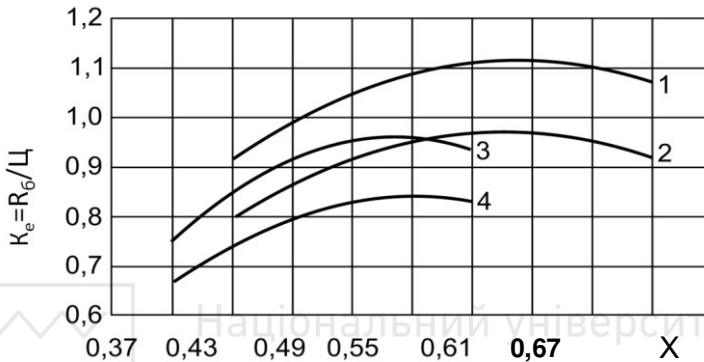
Основні критерії оптимізації при проектуванні складів бетону

|  |
|--|
| Питома витрата ресурсу (на 1 м <sup>3</sup> бетонної суміші, конструкції, споруди):<br>$X \rightarrow \min.$   |
| Відношення питомої витрати ресурсу до показника властивості бетону (P <sub>i</sub> ): $X/P_i \rightarrow \min.$  |
| Питомий вартісної показник*:<br>$C \rightarrow \min,$<br>де С – вартість 1 м <sup>3</sup> бетону, конструкції, споруди; вартість ресурсів; приведені витрати тощо.   |
| Відношення питомих вартісних показників для даного бетону і бетону еталонного складу (C)*: $C/C_o \rightarrow \min.$   |
| Відношення питомих вартісних показників і показників властивостей (або навпаки)*:<br>$C/P_i \rightarrow \min$ (або $P_i/C \rightarrow \max$ ).   |
| Відношення показників властивості бетону (P <sub>i</sub> ) до питомої витрати матеріального або енергетичного ресурсу, необхідного для його виготовлення (X):<br>$P_i/X \rightarrow \max,$<br>де X – витрата цементу, заповнювачів, добавок, теплової, електричної енергії тощо. |
| Відношення показників властивості для даного бетону (P <sub>i</sub> ) і бетону еталонного складу (P <sub>o</sub> ): $P_i/P_o \rightarrow \max(\min).$  |
| Показник властивості (комплексу, співвідношення властивостей) бетонної суміші або бетону (P <sub>i</sub> ):<br>$P_i \rightarrow \max(\min),$<br>де P <sub>i</sub> – рухливість бетонної суміші, міцність, морозостійкість, усадка бетону й ін.                                   |

Примітка: \* – Критерій оптимізації розглядається при обов'язковому забезпеченні заданих показників властивостей бетону.



Оптимальний склад бетону також як і його структура знаходиться в компромісній області, коли він визначається двома чи більшою кількістю критеріїв оптимальності. З рис. 2.3, наприклад, випливає, що для розглянутого бетону міцність при стиску  $R_{ст} \geq 40$  МПа і морозостійкість (кількість циклів)  $F \geq 400$  забезпечуються при вмісті втягнутого повітря  $V_{пов} = 2,7\%$ . При більшому вмісті  $V_{пов}$  збільшується  $F$ , однак знижується  $R_{ст}$ .



**Рис. 2.2.** Залежність коефіцієнта ефективності використання цементу різних марок від параметра щільності бетону,  $X = 0,647\alpha / (0,319\alpha + V/Ц)$

де  $\alpha$  – ступінь гідратації цементу;

$V/Ц$  – водоцементне відношення:

- 1 –  $R_{ц} = 50$  МПа ( $Ж = 11 \dots 20$  с.); 2 –  $R_{ц} = 50$  МПа ( $OK = 1 \dots 4$  см);
- 3 –  $R_{ц} = 40$  МПа ( $Ж = 11 \dots 20$  с.); 4 –  $R_{ц} = 50$  МПа ( $OK = 1 \dots 4$  см).

При постановці оптимізаційних задач необхідно враховувати взаємозв'язки різних критеріїв оптимізації. Коли критеріями оптимізації виступають показники властивостей бетону, то залежності між ними обумовлені взаємозв'язками відповідних структурних параметрів, що обумовлюють розглянуті властивості. Збіг векторів зміни властивостей і їх оптимальних значень можливий при пропорційній зміні відповідних структурних параметрів. Відношення, наприклад, щільності цементного каменю в бетоні ( $X$ ) до об'ємної концентрації цементного каменю ( $C$ ) є деякою функцією витрати цементу ( $Ц$ ) і  $V/Ц$ :

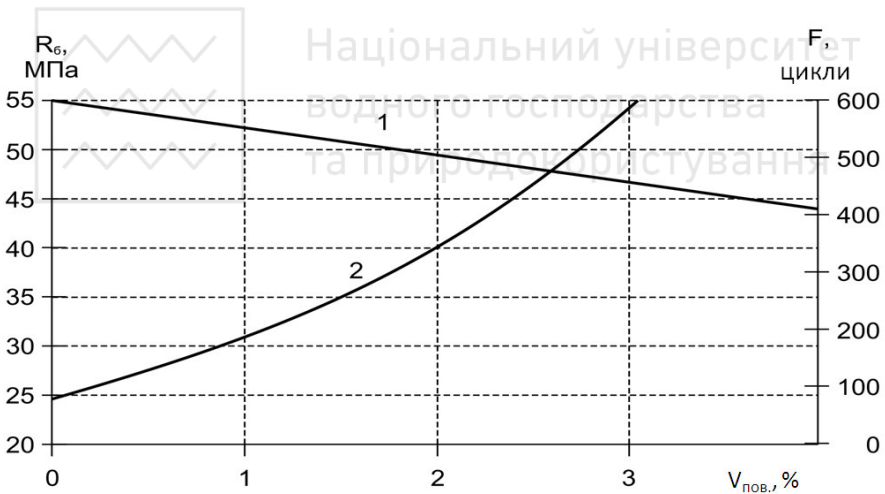
$$X/C = f(ц, V/Ц).$$





Критерії оптимізації, представлені у вигляді відношень показників властивостей і питомих витрат тих або інших ресурсів, питомих вартісних показників, показників властивостей бетону тощо (табл. 2.1), є більш загальними ніж відповідні критерії, що характеризують безпосередньо витрати того чи іншого ресурсу. Вони легко приводяться до останніх при необхідних обмеженнях у відповідних розрахункових виразах.

На стадії попереднього вивчення об'єкта дослідження для формалізації апріорних відомостей у деяких випадках корисне проведення *психологічного експерименту*, який полягає в об'єктивній обробці даних, отриманих у результаті опитування фахівців або з досліджень, опублікованих у літературі. Це дозволяє більш правильно сформулювати задачі досліджень, скоротивши об'єм передбачуваної експериментальної роботи, прийняти або відкинути деякі попередні гіпотези.



**Рис. 2.3.** Залежності між міцністю (1) і морозостійкістю бетону, (2) від об'єму втягнутого повітря

Найчастіше психологічний експеримент проводять з метою порівняльної оцінки впливу різних факторів на параметри оптимізації. Тим самим стають можливими правильний добір



факторів для наступного активного експерименту, обґрунтоване виключення деяких з них з подальшого розгляду. Так можна вибирати самі фактори, інтервали їх варіювання, основний рівень тощо.

При вирішенні подібних завдань можливе використання апріорного ранжирування факторів, заснованого на методах рангової кореляції.

Апріорне ранжування факторів базується на тому, що фактори, котрі відповідно до апріорної інформації можуть мати істотний вплив, ранжуються в порядку зменшення їх внеску. Внесок кожного фактора оцінюється за величиною рангу – місця, яке відведено дослідником (фахівцем при опитуванні, автором статті тощо) даному фактору при ранжуванні всіх факторів з урахуванням їх передбачуваного впливу на параметри оптимізації.

Результати опитування фахівців (або ранжування за літературними даними) обробляють у такий спосіб. Спочатку визначають суму рангів за факторами  $\sum_{j=1}^m a_{i,j}$ , а потім різницю між сумою рангів кожного фактора і середньою сумою рангів:

$$\Delta i = \sum_{l=1}^m a_{ij} - \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m a_{ij}}{k} = \sum_{j=1}^m a_{ij} - T, \quad (2.4)$$

де  $a_{ij}$  – ранг кожного і-го фактора в j-го дослідника;

$m$  – число дослідників;

$k$  – число факторів.

Ці дані дозволяють побудувати середню апріорну діаграму рангів, за умови попередньої оцінки степеня узгодженості думок дослідників з допомогою коефіцієнта конкордації:

$$W = \frac{S}{\frac{1}{12} m^2 (k^3 - k) - m \sum_{j=1}^m T_j}, \quad (2.5)$$

де  $S$  – сума квадратів відхилень  $(\sum_{j=1}^m \Delta i^2)$ ,

$$T_i = \frac{1}{12} \sum_{t_j} (t_j^3 - t_j), \quad (2.6)$$

$t_j$  – число однакових рангів у j-м ранжирування.



**Приклад 2.1.1.** Вибрати фактори, що впливають на міцність бетону в умовах тепловологісної обробки при прийнятих обмеженнях: застосуванні портландцементу одного заводу; кварцового піску і гранітного щебеню з практично незмінними характеристиками; постійних умовах виготовлення, збереження і випробування зразків бетону.

На основі апріорної інформації було спочатку відібрано 15 факторів, що чинять певний вплив на міцність бетону. Для ранжування факторів застосували метод формалізації результатів анкетного опитування фахівців. В анкеті (табл.2.2) зазначені фактори і пропоновані межі їх зміни.

Фахівцям потрібно було розташувати фактори в порядку зменшення їх впливу на міцність бетону. Матриця рангів після анкетного опитування була доведена до такого вигляду, щоб для кожного дослідника загальна сума рангів становила  $\frac{k(k+1)}{2}$ . За

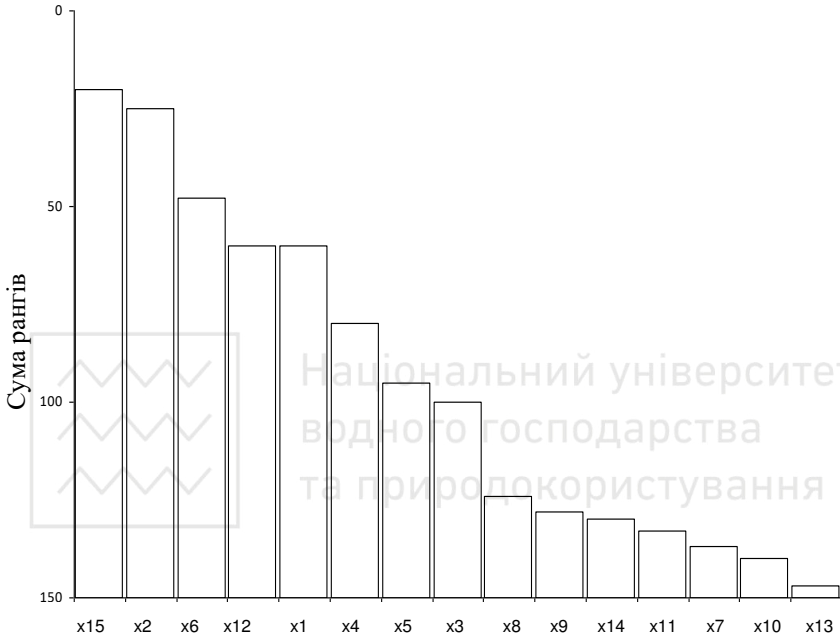
результатами опитування (табл. 2.2) визначалася сума рангів  $\sum_{j=1}^m a_{ij}$

по кожному  $i$ -му фактору, присвоєна  $j$ -им дослідником при  $m$  - кількості дослідників. Потім знаходили середню суму рангів  $T_i$  при  $k$  – факторах і відхиленні  $\Delta_i$  між сумою рангів кожного фактора і середньою сумою рангів. Ступінь узгодженості думок дослідників оцінювали за допомогою коефіцієнта конкордації і наступною оцінкою його значимості за  $\chi^2$ -розподілом. Коефіцієнт конкордації становив  $W=0,654$ ;  $\chi^2=109,83$ . Для 1,0% рівня значимості при кількості степеней свободи  $f=k-1=14$  таблична величина –  $\chi^2_{\text{табл.}}=29,141$ , тобто менша за розрахункову. Це дозволяє з імовірністю більш ніж 99% прийняти гіпотезу про наявність певного узгодження між дослідниками і побудувати на основі даних анкетного опитування середню апріорну діаграму рангів впливу розглянутих факторів на міцність бетону при обраних межах їх зміни (рис.2.4).

Аналіз діаграми рангів показує, що розподіл факторів є нерівномірним і близьким до експоненціального. Це дозволяє виділити безперечно основні фактори, а частину віднести до т.зв. "шумового поля". До таких найбільш суттєвих факторів, що впливають на міцність бетону, підданого тепловологісній обробці, можна віднести: активність цементу ( $R_{\text{ц}}$ ), водоцементне відношення ( $B/C$ ), температуру ( $T_{\text{в}}$ ) і



тривалість ( $t_{із}$ ), ізоермічного прогріву, а також швидкість підйому температури ( $V_{п}$ ). Найбільш слабким фактором за даними анкетного опитування став вміст лещадних зерен ( $m_{л,з}$ ) від 10 до 30%.



**Рис. 2.4.** Діаграма апіорного ранжування факторів  $x_i$

Важливою вимогою до факторів при плануванні експериментів є їх некорельованість. Це не означає, що між факторами не повинно бути ніякого зв'язку. Необхідно і достатньо, щоб зв'язок не був прямий. Наприклад, при дослідженні бетонної суміші без введення пластифікуючих добавок і зміни якості вихідних матеріалів не можна одночасно планувати осадку конуса і витрату води, тому що за інших рівних умов для кожного значення осадки конуса витрата води – величина постійна.

Таблиця 2.2

## Результати анкетного опитування фахівців

| № п/п | Фактори, що впливають на міцність бетону                       | Межі зміни факторів | Номера фахівців |    |    |    |   |    |    |    |    |    |    |    | Сума рангів | Відхилення суми рангів від загального середнього $\Delta i$ | $\Delta i^2$ | Загальний ранг |
|-------|--|---------------------|-----------------|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|-------------|---|--------------|----------------|
|       |  |                     | 1               | 2  | 3  | 4  | 5 | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |             |   |              |                |
| 1     | 2  | 3                   | 4               | 5  | 6  | 7  | 8 | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16          | 17  | 18           | 19             |
| 1     | Витрата цементу (Ц) при В/Ц=const, кг/м <sup>3</sup>           | 250-400             | 6               | 4  | 3  | 4  | 4 | 8  | 6  | 6  | 7  | 5  | 4  | 5  | 62          | -34   | 1156         | 5              |
| 2     | Водоцементне відношення (В/Ц)                                  | 0,5 – 0,7           | 3               | 4  | 1  | 2  | 3 | 1  | 2  | 4  | 1  | 2  | 2  | 2  | 27          | -69   | 4761         | 2              |
| 3     | Вміст піску в суміші заповнювачів (р)                          | 0,3 – 0,5           | 7               | 8  | 10 | 9  | 8 | 8  | 7  | 9  | 6  | 9  | 8  | 11 | 100         | 4   | 16           | 8              |
| 4     | Швидкість підйому температури ( $V_{п}$ ), град/год            | 10 - 30             | 6               | 4  | 8  | 10 | 7 | 10 | 7  | 6  | 5  | 6  | 9  | 5  | 83          | -13   | 169          | 6              |
| 5     | Тривалість витримки перед пропарюванням, ( $\tau_{п}$ ) години | 1 - 5               | 8               | 10 | 6  | 7  | 6 | 8  | 7  | 8  | 11 | 9  | 8  | 7  | 95          | -1  | 1            | 7              |
| 6     | Температура ізотермічного прогріву, ( $T_{і}$ ) <sup>0</sup> С | 70-100              | 4               | 5  | 2  | 3  | 5 | 3  | 4  | 7  | 5  | 4  | 4  | 3  | 49          | -47   | 2209         | 3              |
| 7     | Модуль крупності піску ( $M_{кр}$ )                            | 1,6 – 2,7           | 13              | 12 | 12 | 10 | 8 | 11 | 10 | 9  | 12 | 14 | 12 | 14 | 137         | 41  | 1681         | 13             |

Продовження табл.2.2

| 1  | 2  | 3       | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16  | 17  | 18   | 19 |
|----|--|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|------|----|
| 8  | Крупність<br>щебня, ( $D_{\max}$ ) мм                                    | 10 - 40 | 8  | 10 | 11 | 12 | 10 | 9  | 10 | 9  | 11 | 12 | 10 | 12 | 124 | 28  | 784  | 9  |
| 9  | Швидкість<br>охолодження,<br>( $V_o$ ), град/год                         | 10 - 30 | 10 | 11 | 12 | 11 | 13 | 12 | 13 | 10 | 10 | 8  | 10 | 11 | 131 | 35  | 1225 | 10 |
| 10 | Час<br>перемішування<br>суміші, ( $\tau_{\text{пер}}$ ) хв.              | 1 - 3   | 13 | 12 | 13 | 13 | 12 | 11 | 12 | 11 | 10 | 11 | 12 | 12 | 142 | 46  | 2116 | 14 |
| 11 | Міцність<br>щебеню, ( $R_{\text{щ}}$ ),<br>МПа                           | 100-170 | 12 | 11 | 9  | 12 | 13 | 10 | 11 | 11 | 8  | 12 | 13 | 11 | 133 | 37  | 1369 | 12 |
| 12 | Тривалість<br>ізотермічного<br>прогріву, ( $\tau_{\text{із}}$ ),<br>год. | 3 - 6   | 5  | 3  | 6  | 5  | 7  | 4  | 7  | 5  | 6  | 5  | 4  | 5  | 62  | -34 | 1156 | 4  |
| 13 | Вміст лещадних<br>зерен, ( $m_{\text{л.з.}}$ ), %                        | 10 - 30 | 11 | 12 | 13 | 12 | 11 | 12 | 13 | 12 | 13 | 11 | 12 | 11 | 143 | 47  | 2209 | 15 |
| 14 | Степінь<br>відкритої<br>поверхні зразків,<br>( $S_o$ ), %                | 0 - 50  | 12 | 11 | 13 | 9  | 12 | 11 | 10 | 11 | 12 | 11 | 10 | 10 | 132 | 36  | 1296 | 11 |
| 15 | Активність<br>цементу, ( $R_{\text{ц}}$ ),<br>МПа                        | 40-60   | 2  | 3  | 1  | 1  | 1  | 2  | 1  | 2  | 3  | 1  | 2  | 1  | 20  | -76 | 5776 | 1  |



При виборі факторів слід враховувати ступінь їх керованості і можливість забезпечення заданого рівня варіювання. Планування важкокерованих факторів слід проводити за допомогою спеціальних прийомів. Краще щоб досліджувані фактори мали кількісну оцінку. Однак фактори можна планувати і за їх якісними показниками.

При будь-якому значенні факторів рівні варіювання повинні забезпечувати можливість проведення експерименту і вимірювання вихідного параметра. Наприклад, якщо вихідним параметром є рухомість бетонної суміші, то частка піску в суміші заповнювачів, вміст води, кількість добавки повинні забезпечити одержання однорідної бетонної суміші з осадкою конуса більше нуля. Якщо цього недостатньо, то необхідно звузити інтервали варіювання.

Сукупність усіх значень, які може приймати фактор у межах експерименту, називають його областю варіювання. У матриці планування (таблиці планованих експериментів) фактори даються в кодованому вигляді. При цьому за *основний* рівень варіювання приймають центральну, так названу нульову точку і позначають її  $X_{i0}$ , а *інтервал варіювання* -  $\Delta X_i$ . Шляхом додавання або віднімання значення інтервалу варіювання від значення фактора, що знаходиться на основному рівні, одержують відповідно *верхній*, що позначається (+1) або (+), або *нижній*, що позначається (-1) або (-), рівень фактора.

Взаємозв'язок між натуральними  $X_i$  і кодованими значеннями факторів  $x_i$  визначають за формулою:

$$x_i = \frac{x_i - x_{i0}}{\Delta x_i}, \quad (2.7)$$

Вибір інтервалів варіювання залежить від цілей і можливостей дослідження, а також від конкретних умов виробництва. Інтервали варіювання для лінійних і неповних квадратичних залежностей приймають звичайно менші, ніж для повних квадратичних. Чим ширший діапазон досліджуваного фактора, тим менш ймовірний лінійний характер залежності вихідного параметра від даного фактора.

Орієнтовні інтервали варіювання основних технологічних факторів для лінійних і квадратичних рівнянь, наведені в табл. 2.3.



Для побудови лінійних залежностей застосовуються дворівневі, а для квадратичних – тривірневі плани і плани з більшою кількістю рівнів.

Таблиця 2.3

## Фактори та інтервали варіювання

| Фактори   | Інтервали варіювання, % від основного рівня, для залежностей |              |
|---|--|--------------|
|   | лінійних і неповних квадратичних                             | квадратичних |
| Цементно-водне відношення Ц/В   | 15 - 20  | 25 - 40      |
| Витрата води $V$ , л/м <sup>3</sup>   | 5 - 8  | 5 - 20       |
| Витрата добавки $D$ , кг/м <sup>3</sup>   | 20 - 50  | 20 - 100     |
| Частка піску в суміші заповнювачів, г   | 5 - 10   | 5 - 15       |
| Найбільша крупність щебеню (гравію) $D_{\max}$ , мм   | 20 - 40  | 20 - 80      |
| Модуль крупності піску $M_{\text{кр}}$  | 20 - 25  | 30 - 50      |
| Тривалість попереднього витримування $\tau_v$ , хв.   | 30 - 50  | 30 - 100     |
| Тривалість ізотермічного прогріву $\tau_{\text{із}}$ , год.                                       | 20 - 40  | 20 - 100     |
| Загальна тривалість теплової обробки при оптимальній структурі режимних параметрів $\tau_o$ , год | 20 - 30  | 20 - 50      |
| Температура ізотермічного прогріву $T$ , °C   | 8 - 10   | 8 - 25       |
| Швидкість підйому температури $V$ , °C/год  | 20 - 30  | 20 - 50      |
| Активність цементу $R_c$ , МПа  | 15 - 25  | 15 - 25      |

Щоб уникнути систематичних помилок і для рівномірного розподілу або усунення небажаних впливів на весь експеримент (коливання вологості і температури повітря, незначні зміни зернового складу заповнювача тощо) досліди проводять не в





порядку, зазначеному в матриці, а в деякій випадковій (рандомізованій) послідовності. Послідовність проведення дослідів можна встановлювати за таблицями випадкових чисел або залежно від конкретних умов.

## 2.2. Побудова лінійних і неповних квадратичних моделей

При вивченні лінійних і неповних квадратичних залежностей найчастіше застосовують повний факторний експеримент (ПФЕ) і дробові репліки.

При проведенні ПФЕ планування експериментів здійснюють на двох рівнях – верхньому (+1) і нижньому (-1). Плани експериментів, що застосовуються дозволяють реалізувати всі неповторювані варіанти дослідів на зазначених рівнях для різної кількості факторів. При цьому кількість дослідів  $N$  залежить від кількості факторів  $k$  і дорівнює  $2^k$ : наприклад, для двох факторів –  $2^2 = 4$ , для трьох –  $2^3 = 8$ , для чотирьох –  $2^4 = 16$ , для п'яти –  $2^5 = 32$  і т.д. Припустимо, що потрібно знайти рівняння регресії, що описує залежність показника властивостей бетону ( $y$ ) від факторів  $x_1$  і  $x_2$  при використанні гіпотези про лінійний характер їх впливу. У цьому випадку матриця ПФЕ має вигляд табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Матриця ПФЕ плану  $2^2$ 

| Точки плану<br>$u$ | Фактори |       | Взаємодія | Вихідний параметр |
|--------------------|---------|-------|-----------|-------------------|
|                    | $x_1$   | $x_2$ | $x_1x_2$  | $y$               |
| 1                  | +1      | +1    | +1        | $y_1$             |
| 2                  | +1      | -1    | -1        | $y_2$             |
| 3                  | -1      | +1    | -1        | $y_3$             |
| 4                  | -1      | -1    | +1        | $y_4$             |

Схема побудовування матриць ПФЕ при числі факторів  $k$  від 2 до 5 наведена в табл.2.5.

Результати дослідів обробляють за допомогою методів математичної статистики, одержуючи залежності між вихідними



водного господарства та природокористування

параметрами і факторами, що на них впливають, у вигляді лінійних або неповних квадратичних рівнянь регресії.

Таблиця 2.5

Приклад добудовування матриць ПФЕ для  $k=2\dots 5$

| Точки плану $u$ | Фактори |       |       |       |       |
|-----------------|---------|-------|-------|-------|-------|
|                 | $x_1$   | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| 1               | +1      | +1    | +1    | +1    | +1    |
| 2               | +1      | -1    | +1    | +1    | +1    |
| 3               | -1      | +1    | +1    | +1    | +1    |
| 4               | -1      | -1    | +1    | +1    | +1    |
| 5               | +1      | +1    | -1    | +1    | +1    |
| 6               | +1      | -1    | -1    | +1    | +1    |
| 7               | -1      | +1    | -1    | +1    | +1    |
| 8               | -1      | -1    | -1    | +1    | +1    |
| 9               | +1      | +1    | +1    | -1    | +1    |
| 10              | +1      | -1    | +1    | -1    | +1    |
| 11              | -1      | +1    | +1    | -1    | +1    |
| 12              | -1      | -1    | +1    | -1    | +1    |
| 13              | +1      | +1    | -1    | -1    | +1    |
| 14              | +1      | -1    | -1    | -1    | +1    |
| 15              | -1      | +1    | -1    | -1    | +1    |
| 16              | -1      | -1    | -1    | -1    | +1    |
| 17              | +1      | +1    | +1    | +1    | -1    |
| 18              | +1      | -1    | +1    | +1    | -1    |
| 19              | -1      | +1    | +1    | +1    | -1    |
| 20              | -1      | -1    | +1    | +1    | -1    |
| 21              | +1      | +1    | -1    | +1    | -1    |
| 22              | +1      | -1    | -1    | +1    | -1    |
| 23              | -1      | +1    | -1    | +1    | -1    |
| 24              | -1      | -1    | -1    | +1    | -1    |
| 25              | +1      | +1    | +1    | -1    | -1    |
| 26              | +1      | -1    | +1    | -1    | -1    |
| 27              | -1      | +1    | +1    | -1    | -1    |
| 28              | -1      | -1    | +1    | -1    | -1    |
| 29              | +1      | +1    | -1    | -1    | -1    |
| 30              | +1      | -1    | -1    | -1    | -1    |
| 31              | -1      | +1    | -1    | -1    | -1    |
| 32              | -1      | -1    | -1    | -1    | -1    |



У загальному вигляді для  $k$  факторів:

$$y_i = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i \neq j} b_{ij} x_i x_j. \quad (2.8)$$

Наприклад,

- для двофакторного експерименту:

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2, \quad (2.9)$$

- для п'ятифакторного експерименту:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i = & b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5 + \\ & + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{14} x_1 x_4 + b_{15} x_1 x_5 + b_{23} x_2 x_3 + \\ & + b_{24} x_2 x_4 + b_{25} x_2 x_5 + b_{34} x_3 x_4 + b_{35} x_3 x_5 + b_{45} x_4 x_5. \end{aligned} \quad (2.10)$$

При проведенні ПФЕ зі збільшенням кількості факторів різко зростає і кількість дослідів. У деяких випадках, наприклад, на першій стадії дослідження, тобто при попередній оцінці ступеня впливу факторів, точністю кінцевої інформації можна трохи поступитися, що дозволить значно скоротити число дослідів. Для цього використовуються дробові репліки (1/2, 1/4, 1/8 і т.д.), які одержують діленням кількості дослідів ПФЕ відповідно на 2, 4, 8.

Матриці дробових реплік при проведенні ПФЕ одержують заміною взаємодій вищого порядку (починаючи з потрійних –  $x_1, x_2, x_3$  і т.д.) новими змінними. Ці взаємодії, як правило, незначимі. Кількість дослідів у дробових репліках відповідає  $2^{k-p}$ , де  $p$  – дрібність репліки. Так, наприклад, ПФЕ для семи факторів включає  $2^7=128$ , а 1/2 репліки  $2^{7-1}=64$ , 1/4 репліки  $2^{7-2}=32$ , 1/8 репліки  $2^{7-3}=16$  дослідів і т.д. Припустимо, потрібно вивчити вплив п'яти факторів:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ . Для складання напіврепліки  $2^{5-1}$  можна взяти ПФЕ  $2^4$ , а взаємодію факторів  $x_1, x_2, x_3, x_4$  замінити на фактор  $x_5$  (табл. 2.6). У цьому випадку кількість дослідів зменшується в два рази в порівнянні з ПФЕ  $2^5$  (табл. 2.6).

Вільний член рівняння  $b_0$  визначають за формулами:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_u}{N} \quad (2.11) \quad \text{або} \quad b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}_u}{N}, \quad (2.12)$$



де  $N_1$  – кількість точок плану,  $y_u$  – експериментальне значення вихідного параметра в точках  $u_1 \dots u_n$  плану,  $\bar{y}_u$  – середнє значення

вихідного параметра в точці (u) для випадку, якщо  $y_u = \frac{\sum_{i=1}^r y_{ui}}{r}$ , тобто при повторенні дослідів (r – кількість дубльованих дослідів за рядками матриці).

Таблиця 2.6  
Матриця дробового факторного плану  $2^{5-1}$

| Точки плану u | Фактори |       |       |       |       |
|---------------|---------|-------|-------|-------|-------|
|               | $x_1$   | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| 1             | +1      | +1    | +1    | +1    | +1    |
| 2             | +1      | +1    | +1    | -1    | -1    |
| 3             | +1      | +1    | -1    | +1    | -1    |
| 4             | +1      | +1    | -1    | -1    | +1    |
| 5             | +1      | -1    | +1    | +1    | -1    |
| 6             | +1      | -1    | +1    | -1    | +1    |
| 7             | +1      | -1    | -1    | +1    | +1    |
| 8             | +1      | -1    | -1    | -1    | -1    |
| 9             | -1      | +1    | +1    | +1    | -1    |
| 10            | -1      | +1    | +1    | -1    | +1    |
| 11            | -1      | +1    | -1    | +1    | +1    |
| 12            | -1      | +1    | -1    | -1    | -1    |
| 13            | -1      | -1    | +1    | +1    | +1    |
| 14            | -1      | -1    | +1    | -1    | -1    |
| 15            | -1      | -1    | -1    | +1    | -1    |
| 16            | -1      | -1    | -1    | -1    | +1    |

Коефіцієнти для лінійних членів рівнянь визначають за формулами:

$$b_i = \frac{\sum_{i=1}^N x_{iu} y_u}{N} \quad (2.13) \quad \text{або} \quad b_i = \frac{\sum_{i=1}^N x_{iu} \bar{y}_u}{N}, \quad (2.14)$$

де  $x_{iu}$  – значення і-го фактора в рядку матриці в u-ому досліді.

Коефіцієнти парних взаємодій визначають за формулою:



$$b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} y_u}{N} \quad (2.15) \quad \text{або} \quad b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ij} \bar{y}_u}{N}, \quad (2.16)$$

де  $x_{ij}$  – значення  $j$ -го фактора в  $u$ -ому досліді.

Побудову моделі можна вважати закінченою, а саму модель використовувати для прийняття технологічних рішень тільки після того, як алгебраїчний розрахунок оцінок коефіцієнтів буде доповнений статистичним (регресійним) аналізом.

На першому етапі регресійного аналізу визначають *середньоквадратичні помилки*  $S\{b_i\}$  оцінок коефіцієнтів моделей. Коефіцієнти вважаються значимими, якщо розрахункове значення  $t$  – критерію Стьюдента виявиться більше табличного, встановлюваного в залежності від заданого рівня значимості і кількості степенів свободи. Визначають те критичне значення оцінки коефіцієнта, нижче якого розрахункові оцінки  $b_i$  доцільно з ризиком  $\alpha$  вважати незначущими, тобто рівними нулю.

На другому етапі перевіряється гіпотеза про адекватність (відповідність експериментальним даним) поліноміальної моделі з усіма значимими коефіцієнтами регресії. Для перевірки адекватності формулюється нуль-гіпотеза, і якщо вона за критерієм Фішера ( $F$ ) буде визнана правдоподібною, то модель описує процес адекватно експерименту.

Статистичний аналіз рівнянь здійснюють:

- при дублюванні дослідів за рядками матриці – за середнім значенням вихідних параметрів;
- без дублювання – за додаткових дослідів на основному рівні.

*Середнє арифметичне* значення вихідного параметра  $\bar{y}_u$  визначають:

- а) при дублюванні дослідів за рядками матриці за формулою -

$$\bar{y}_u = \frac{\sum_{i=1}^r y_{ui}}{r} = \frac{y_{u1} + y_{u2} + \dots + y_{ur}}{r}, \quad (2.17)$$

де  $r$  – кількість повторних дослідів у рядку матриці;

- б) при проведенні дослідів у нульових точках за формулою -



$$\bar{y}_0 = \frac{\sum_i^{n_0} y_{0i}}{n_0}, \quad (2.18)$$

де  $n_0$  – кількість нульових точок.

Дисперсію відтворюваності вихідного параметра  $S^2_{\{y\}}$  знаходять:

а) при дублюванні дослідів по рядках матриці за формулою –

$$S^2_{\{y_u\}} = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^r (y_{ui} - \bar{y}_u)^2}{N(r-1)}, \quad (2.19)$$

де  $\sum_{i=1}^r$  – сума за рядками матриці,  $\sum_{u=1}^N$  – те ж, за стовпцями;

$N$  – загальна кількість точок плану.

б) при проведенні дослідів у нульових точках за формулою –

$$S^2_{\{y_u\}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} (y_{0i} - \bar{y}_0)^2}{(n_0 - 1)}. \quad (2.20)$$

Середнє квадратичне відхилення вихідного параметра обчислюють:

а) при дублюванні дослідів за формулою –

$$S_{\{y_u\}} = \sqrt{\frac{\sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^r (y_{0i} - \bar{y}_u)^2}{N(r-1)}}, \quad (2.21)$$

б) при проведенні дослідів у нульових точках – за формулою

$$S_{\{y_u\}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_0} (y_{0i} - \bar{y}_u)^2}{n_0 - 1}} \quad (2.22)$$

Середньоквадратичну помилку при визначенні коефіцієнтів знаходять:

а) для лінійних і неповних квадратичних рівнянь при дублюванні дослідів за формулою:



$$S_{\{b_0\}} = S_{\{b_i\}} = S_{\{b_{ij}\}} = \frac{S_{\{y_u\}}}{\sqrt{N}}, \quad (2.23)$$

б) при проведенні дослідів у нульових точках у формулу замість  $S_{\{y_u\}}$  підставляють  $S_{\{y_0\}}$ , де  $y_0$  - вихідний параметр при значеннях факторів на нульовому (основному) рівні.

Розрахункове значення *t*-критерію Стюдента ( $t_p$ ) для кожного коефіцієнта рівнянь регресії знаходять за формулами:

$$t_{p\{b_0\}} = \frac{|b_0|}{S_{\{b_0\}}}, \quad (2.24)$$

$$t_{p\{b_i\}} = \frac{|b_i|}{S_{\{b_i\}}}, \quad (2.25)$$

$$t_{p\{b_{ij}\}} = \frac{|b_{ij}|}{S_{\{b_{ij}\}}}. \quad (2.26)$$

Коефіцієнти вважаються значимими, якщо розрахункове значення *t*-критерію Стюдента  $t_p$  виявиться більше табличного  $t_{\alpha}$ , що встановлюється за табл.1(Додатки) у залежності від заданого рівня значимості і кількості степенів свободи  $f_{\{y\}}$ . У технологічних дослідженнях рівень значимості приймають звичайно таким, що дорівнює 0,05 або 0,1, а кількість степенів свободи визначають:

- при повторенні дослідів за рядками матриці з умови

$$f_{\{y\}} = N(r - 1);$$

- при проведенні дослідів у нульовій точці з умови

$$f_{\{y\}} = n_0 - 1$$

Якщо коефіцієнт незначний, то він може бути відкинтий без перерахунку інших.

Оцінивши значимість коефіцієнтів, проводять перевірку адекватності рівнянь визначаючи послідовно дисперсію адекватності, розрахункове значення критерію Фішера і порівнюючи останнє з табличним у зазначеній нижче послідовності.

Дисперсію адекватності  $S_{ад}^2$  визначають:



а) для лінійних і неповних квадратичних рівнянь за формулою:

$$S_{a\hat{o}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N \left( \hat{y}_u - y_u \right)^2}{N - m}, \quad (2.27)$$

б) при дублюванні дослідів за рядками матриці за формулою

$$S_{a\hat{o}}^2 = \frac{r}{N - m} \sum_{u=1}^N \left( \hat{y}_u - \bar{y}_u \right)^2, \quad (2.28)$$

де  $m$  – число значимих коефіцієнтів.

Для оцінки адекватності рівнянь регресії використовують F-критерій (критерій Фішера), розрахункове значення  $F_p$  якого визначають:

– при  $S_{a\hat{o}}^2 < S_{\{y\}}^2$  – за формулою –

$$F_p = \frac{S_{a\hat{o}}^2}{S_{\{y\}}^2}, \quad (2.29)$$

при  $S_{a\hat{o}}^2 < S_{\{y\}}^2$  – за формулою

$$F_p = \frac{S_{\{y\}}^2}{S_{a\hat{o}}^2}. \quad (2.30)$$

У формулі  $S_{\{y\}}^2$  – дисперсія відтворюваності вихідного параметра.

Табличне значення F - критерію ( $F_T$ ) знаходять у залежності від прийнятої довірчої імовірності (рівня значимості) і кількості ступенів свободи за табл. 1 (Додатки). У технології бетону довірчу імовірність приймають звичайно рівною 95%. Кількість ступенів свободи дисперсії адекватності  $f_{a\hat{o}}$  визначають для лінійних і неповних квадратичних рівнянь за формулою:

$$f_{a\hat{o}} = N - m. \quad (2.31)$$

Кількість ступенів свободи при визначенні табличного значення F-критерію для повних квадратичних рівнянь при відсутності або наявності нульових точок у плані знаходять за формулами відповідно:

$$f_{a\hat{o}} = N - m \quad (2.32)$$





$$f_{ad} = N - m - (n_0 - 1) \quad (2.33)$$

$F$  – критерій ( $F_T$ ) визначається з урахуванням числа ступенів свободи  $f_{ad}$  і  $f_{(y)}$ .

Рівняння вважається адекватним для прийнятого рівня довірчої імовірності, якщо  $F_p > F_T$ . Якщо виявилось, що дане рівняння неадекватне при проведенні дослідів були допущені грубі помилки або обраний поліном недостатньо повно відображає досліджувану залежність. У цих випадках необхідно або повторити досліди, або змінити інтервали варіювання, або застосувати інший план.

**Приклад 2.2.1.** Побудувати математичну модель міцності на стиск бетону у віці 28 діб з метою коректування Ц/В бетону ( $x_1$ ) класів за міцністю В15...В30 з осадкою конуса ОК – 3...5 см залежно від активності цементу  $R_c$  ( $x_2$ ), модуля крупності  $M_{кр}$  ( $x_3$ ) і вмісту відмулюваних домішок,  $Q_{відм}$  ( $x_4$ ) у заповнювачі.

У якості вихідних матеріалів прийнятий портландцемент із мінеральними добавками, кварцовий пісок і гранітний щебінь фракції 5...20 мм.

Досліди виконували відповідно до плану ПФЕ  $2^4$  (табл. 2.7).  
Умови планування експерименту наведені в табл. 2.7.

Таблиця 2.7

Умови планування експериментіву

| Фактори         |               | Рівень варіювання |      |      | Інтервал варіювання |
|-----------------|---------------|-------------------|------|------|---------------------|
| натуральний вид | кодований вид | -1                | 0    | +1   |                     |
| Ц/В             | $x_1$         | 1,4               | 2,0  | 2,6  | 0,6                 |
| $R_c$ , МПа     | $x_2$         | 38,8              | 45,3 | 51,8 | 6,5                 |
| $M_{кр}$        | $x_3$         | 1,4               | 2,2  | 3    | 0,8                 |
| $Q_{відм}$ , %  | $x_4$         | 1                 | 3    | 5    | 2                   |

У кожній точці плану виготовляли три зразки бетону і проводили їх випробування на міцність при стиску.

Матриця планування дослідів і експериментальні значення міцності бетону наведені в табл. 2.8.



Матриця планування і експериментальні значення міцності бетону

| Точка плану | Фактори        |                |                |                | R <sub>6</sub> <sup>c</sup> , МПа |                |                | Середнє арифметичне значення міцності, МПа |
|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------------------------|----------------|----------------|--|
|             | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | x <sub>3</sub> | x <sub>4</sub> | y <sub>1</sub>                    | y <sub>2</sub> | y <sub>3</sub> |  |
| 1           | +1             | +1             | +1             | +1             | 44,2                              | 43             | 43,6           | 43,6                                       |
| 2           | +1             | +1             | +1             | -1             | 49                                | 49,6           | 47,5           | 48,7                                       |
| 3           | +1             | +1             | -1             | +1             | 42                                | 39,6           | 41,1           | 40,9                                       |
| 4           | +1             | +1             | -1             | -1             | 45                                | 44             | 44,2           | 44,4                                       |
| 5           | +1             | -1             | +1             | +1             | 31,8                              | 32             | 32,8           | 32,2                                       |
| 6           | +1             | -1             | +1             | -1             | 35                                | 34             | 35,4           | 34,8                                       |
| 7           | +1             | -1             | -1             | +1             | 29,6                              | 31             | 30,6           | 30,4                                       |
| 8           | +1             | -1             | -1             | -1             | 32                                | 33             | 31,9           | 32,3                                       |
| 9           | -1             | +1             | +1             | +1             | 20,6                              | 22             | 20,7           | 21,2                                       |
| 10          | -1             | +1             | +1             | -1             | 22,5                              | 21             | 21,9           | 21,8                                       |
| 11          | -1             | +1             | -1             | +1             | 20,8                              | 19,6           | 18,4           | 19,6                                       |
| 12          | -1             | +1             | -1             | -1             | 21,2                              | 19             | 20,7           | 20,3                                       |
| 13          | -1             | -1             | +1             | +1             | 12,9                              | 11             | 11,8           | 11,9                                       |
| 14          | -1             | -1             | +1             | -1             | 13,7                              | 13             | 11,1           | 12,6                                       |
| 15          | -1             | -1             | -1             | +1             | 11                                | 10,4           | 9,8            | 10,4                                       |
| 16          | -1             | -1             | -1             | -1             | 12                                | 11             | 10,3           | 11,1                                       |
| Сума        | -              | -              | -              | -              | -                                 | -              | -              | 436,1                                      |
|             |                |                |                |                |                                   |                |                | b <sub>0</sub> = 27,3                      |

Коефіцієнти рівнянь регресії визначаємо відповідно за формулами (2.11-2.16):

$$b_0 = \frac{436,1}{16} = 27,3; \quad b_1 = \frac{178,5}{16} = 11,2; \quad b_{23} = \frac{2,7}{16} = 0,2,$$

де – 436,1; 178,5 і 2,7 – дані з табл. 2.9;

16 – кількість дослідів за рядками матриці.

Так само визначаємо значення інших коефіцієнтів рівнянь регресії і вносимо в табл. 2.9.



Коефіцієнти рівнянь регресії

| Розрахункові параметри для визначення коефіцієнтів |              |              |              |                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|--|--------------|--------------|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| при лінійних членах                                |              |              |              | при взаємодіях  |                 |                 |                 |                 |                 |
| $\bar{y}x_1$                                       | $\bar{y}x_2$ | $\bar{y}x_3$ | $\bar{y}x_4$ | $\bar{y}x_1x_2$ | $\bar{y}x_1x_3$ | $\bar{y}x_1x_4$ | $\bar{y}x_2x_3$ | $\bar{y}x_2x_4$ | $\bar{y}x_3x_4$ |
| +43,6  | +43,6        | +43,6        | +43,6        | +43,6           | +43,6           | +43,6           | +43,6           | +43,6           | +43,6           |
| +48,7  | +48,7        | +48,7        | -48,7        | +48,7           | +48,7           | -48,7           | +48,7           | -48,7           | -48,7           |
| +40,9  | +40,9        | -40,9        | +40,9        | +40,9           | -40,9           | +40,9           | -40,9           | +40,9           | -40,9           |
| +44,4  | +44,4        | -44,4        | -44,4        | +44,4           | -44,4           | -44,4           | -44,4           | -44,4           | -44,4           |
| +32,2  | -32,2        | +32,2        | +32,2        | -32,2           | +32,2           | +32,2           | -32,2           | -32,2           | +32,2           |
| +34,8  | -34,8        | +34,8        | -34,8        | -34,8           | +34,8           | -34,8           | -34,8           | +34,8           | -34,8           |
| +30,4  | -30,4        | -30,4        | +30,4        | -30,4           | -30,4           | +30,4           | +30,4           | -30,4           | -30,4           |
| +32,3  | -32,3        | -32,3        | -32,3        | -32,3           | -32,3           | -32,3           | +32,3           | +32,3           | +32,3           |
| -21,1  | +21,1        | +21,1        | +21,1        | -21,1           | -21,1           | -21,1           | +21,1           | +21,1           | +21,1           |
| -21,8  | +21,8        | +21,8        | -21,8        | -21,8           | -21,8           | +21,8           | +21,8           | -21,8           | -21,8           |
| -19,6  | +19,6        | -19,6        | +19,6        | -19,6           | +19,6           | -19,6           | -19,6           | +19,6           | +19,6           |
| -20,3  | +20,3        | -20,3        | -20,3        | -20,3           | +20,3           | +20,3           | -20,3           | -20,3           | +20,3           |
| -11,9  | -11,9        | +11,9        | +11,9        | +11,9           | -11,9           | -11,9           | -11,9           | -11,9           | +11,9           |
| -12,6  | -12,6        | +12,6        | -12,6        | +12,6           | -12,6           | +12,6           | -12,6           | +12,6           | -12,6           |
| -10,4  | -10,4        | -10,4        | +10,4        | +10,4           | +10,4           | -10,4           | +10,4           | -10,4           | -10,4           |
| -11,1  | -11,1        | -11,1        | -11,1        | +11,1           | +11,1           | +11,1           | +11,1           | +11,1           | +11,1           |
| $\Sigma=$  | $\Sigma=$    | $\Sigma=$    | $\Sigma=$    | $\Sigma=$       | $\Sigma=$       | $\Sigma=$       | $\Sigma=$       | $\Sigma=$       | $\Sigma=$       |
| +178,5   | +84,7        | +17,3        | -15,9        | +11,1           | +7,8            | -10,3           | +2,7            | -4,1            | -2,3            |
| $b_1=11,2$   | $b_2=5,3$    | $b_3=1,1$    | $b_4=-1$     | $b_{12}=0,9$    | $b_{13}=0,5$    | $b_{14}=-0,6$   | $b_{23}=0,2$    | $b_{24}=-0,3$   | $b_{34}=-0,1$   |

Визначаємо статистичні характеристики:

а) дисперсію відтворюваності  $S_{\{y\}}^2$  за формулою (2.19);  
результати розрахунку вносимо до табл. 2.10 -

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{30,16}{16(3-1)} = 0,943;$$

б) середньоквадратичне відхилення  $S_{\{y\}}$  за формулою (2.21):

$$S_{\{y\}} = \sqrt{0,943} = 0,97;$$

в) середньоквадратичну помилку  $S_{\{b\}}$  при визначенні коефіцієнтів рівнянь регресії за формулою (2.23):

$$S_{\{b_{0j}\}} = S_{\{b_{ij}\}} = S_{\{b_{ij}\}} = \frac{0,97}{\sqrt{16}} = \frac{0,97}{4} = 0,24;$$



г)  $t$  – критерій Стьюдента

Знаходимо табличне значення  $t$  за табл. 1 (Додатки) при рівні значимості  $\alpha=0,05$  ( $P = 5\%$ ). Для даного прикладу  $t=2,04$  при  $f_y=N(r-1) = 16(3-1) = 32$ .

Вибираємо з табл. 2.10 найменші коефіцієнти. Розрахункові значення  $t_p$  за формулами 2.24,2.26:

$$t_{34} = \frac{0,1}{0,24} = 0,42; \quad t_{13} = \frac{0,5}{0,24} = 2,08; \quad t_{23} = \frac{0,2}{0,24} = 0,83;$$

$$t_{14} = \frac{0,6}{0,24} = 2,5; \quad t_{24} = \frac{0,3}{0,24} = 1,25.$$

Таблиця 2.10.

Розрахунок дисперсії відтворюваності за рядками матриці

| Точки плану | $(y_1 - \bar{y}_n)^2$ | $(y_2 - \bar{y}_n)^2$ | $(y_3 - \bar{y}_n)^2$ | $\sum S_{(y)}^2$ |
|-------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| 1           | $(45,2-43,6)^2=2,56$  | $(43,0-43,6)^2=0,36$  | $(42,6-43,6)^2=1$     | 2,9              |
| 2           | $(49-48,7)^2=0,09$    | $(49,6-48,7)^2=0,81$  | $(47,5-48,7)^2=1,44$  | 2,34             |
| 3           | $(42,0-40,9)^2=1,21$  | $(39,6-40,9)^2=1,69$  | $(41,1-40,9)^2=0,04$  | 2,94             |
| 4           | $(45,0-44,4)^2=0,36$  | $(44 - 44,4)^2=0,16$  | $(44,2- 44,4)^2=0,04$ | 0,56             |
| 5           | $(31,3-32,2)^2=0,81$  | $(32-32,2)^2=0,04$    | $(33,3-32,2)^2=1,21$  | 2,06             |
| 6           | $(35-34,8)^2=0,04$    | $(34-34,8)^2=0,64$    | $(35,4-34,8)^2=0,36$  | 1,04             |
| 7           | $(29,6-30,4)^2=0,64$  | $(31-30,4)^2=0,36$    | $(30,6-30,4)^2=0,04$  | 1,04             |
| 8           | $(32-32,3)^2=0,09$    | $(33-32,3)^2=0,49$    | $(31,9-32,3)^2=0,16$  | 0,74             |
| 9           | $(20,6-21,1)^2=0,25$  | $(22-21,1)^2=0,81$    | $(20,7-21,1)^2=0,16$  | 1,22             |
| 10          | $(22,5-21,8)^2=0,49$  | $(21-21,8)^2=0,64$    | $(21,9-21,8)^2=0,01$  | 1,14             |
| 11          | $20,8-19,6)^2=1,44$   | $(19,6-19,6)^2=0$     | $(18,4-19,6)^2=1,44$  | 2,88             |
| 12          | $(21,2-20,3)^2=0,81$  | $(19-20,3)^2=1,69$    | $(20,7-20,3)^2=0,16$  | 2,66             |
| 13          | $(12,9-11,9)^2=1$     | $(11-11,9)^2=0,81$    | $(11,8-11,8)^2=0,01$  | 1,82             |
| 14          | $(13,7-12,6)^2=1,21$  | $(13-12,6)^2=0,16$    | $(11,1-12,6)^2=2,25$  | 3,62             |
| 15          | $(11-10,4)^2=0,36$    | $(10,4-10,4)^2=0$     | $(9,8-10,4)^2=0,36$   | 0,72             |
| 16          | $(12-11,1)^2=0,81$    | $(11-11,1)^2=0,01$    | $(10,3-11,1)^2=0,64$  | 1,46             |
| Сума        |                       |                       |                       | 30,16            |

Оскільки  $t_{23}, t_{24}, t_{34} < t_r$ , то коефіцієнти  $b_{23}, b_{24}, b_{34}$  незначимі (у табл. 2.10 вони підкреслені). З урахуванням значимості коефіцієнтів



математична модель міцності бетону (у кодованому виразі змінних) буде мати вигляд:

$$\hat{y} = 27,3 + 11,2x_1 + 5,3x_2 + 1,1x_3 - x_4 + 0,7x_1x_2 + 0,5x_1x_3 - 0,6x_1x_4$$

Для перевірки адекватності отриманого рівняння регресії за табл. 2.9 визначаємо розрахункове значення  $\hat{y}$  у кожному рядку матриці.

Наприклад, для першого рядка:

$$\hat{y} = 27,3 + 11,2(+1) + 5,3(+1) + 1,1(+1) - 1,0(+1) + 0,7(+1)(+1) + 0,5(+1)(+1) - 0,6(+1)(+1) = 44,5 \text{ МПа}$$

Для всіх інших рядків обчислення робимо аналогічно, результати вносимо в табл. 2.11 і знаходимо суму квадратів відхилень розрахункових даних.

Визначаємо дисперсію адекватності за формулою ( 2.27):

$$S_{ad}^2 = \frac{3 \cdot 5,6}{16 - 8} = 2,1,$$

де 5,6 – сума з табл. 2.11;

3 – кількість дослідів за рядками матриці;

8 – кількість прийнятих значимих коефіцієнтів (табл. 2.9).

Знаходимо розрахункове значення критерію Фішера:

$$F_p = \frac{2,1}{0,943} = 2,13,$$

де 0,943 – значення дисперсії відтворюваності.

Табличне  $F_T$  шляхом інтерполяції за табл. 2 (Додатки) при  $f_1=16(3-1)=32$  і  $f_2=16-8=8$  складає 2,29.

Оскільки  $F_p < F_T$ , дане рівняння регресії є адекватним.

Отримане рівняння регресії можна використовувати для побудови номограм (рис. 2.5).

При побудові номограми визначаємо розрахункові значення Ц/В при різних значеннях досліджуваних факторів.

Рівняння вирішуємо відносно  $x_1$ :

$$0,6x_1x_4 - 0,7x_1x_2 - 0,5x_1x_3 - 11,2x_1 = 27,3 + 5,3x_2 - 1,1x_3 - x_4 - \hat{y}$$

$$x_1 = \frac{27,3 + 5,3x_2 - 1,1x_3 - x_4 - \hat{y}}{0,6x_4 - 0,7x_2 - 0,5x_3 - 11,2}.$$



Перед обчисленнями необхідного значення  $x_1$  слід знайти кодовані значення варійованих факторів. Наприклад, при  $R_c=50$  МПа,  $M_{кр}=1,8$  і  $Q_{відм}=2\%$  отримуємо:

$$x_2 = \frac{R_c - 45,3}{6,5} = \frac{50 - 45,3}{6,5} = 0,72,$$

$$x_3 = \frac{M_{кр} - 2,2}{0,8} = \frac{1,8 - 2,2}{0,8} = -0,5,$$

$$x_4 = \frac{Q_{отм} - 3}{2} = \frac{2 - 3}{2} = -0,5,$$

де 6,5; 0,8 і 2 – інтервали варіювання (табл. 2.8).

Тоді для бетону з  $u = 40$  МПа

$$x_1 = \frac{27,3 + 5,3 \cdot 0,72 - 1,1(-0,5) - (-0,5) - 40}{0,6(-0,5) - 0,7 \cdot 0,72 - 0,5(-0,5) - 11,2} = 0,67.$$

Натуральне значення Ц/В знаходимо з відношення:

$$x_1 = \frac{Ц/В - 2}{0,6}, \quad Ц/В = 0,6x_1 + 2 = 0,6 \cdot 0,67 + 2 = 2,4,$$

де 2 і 0,6 – відповідно основний рівень і інтервал варіювання Ц/В (табл. 2.7).

Так само визначаємо Ц/В для інших значень  $R_c$ ,  $M_{кр}$ ,  $Q_{відм}$  і  $R_b$ . На основі отриманих даних будуємо номограму, за якою можна розрахувати значення Ц/В при визначених значеннях міцності бетону і варійованих факторів (рис. 2.5).

Наприклад, для бетону з  $R_b=40$  МПа при  $R_c=50$  МПа (точка а),  $M_{кр}=1,8$  (точка б) і  $Q_{відм}=2\%$  (точка с) Ц/В=2,4 (точка d).

Таблиця 2.11

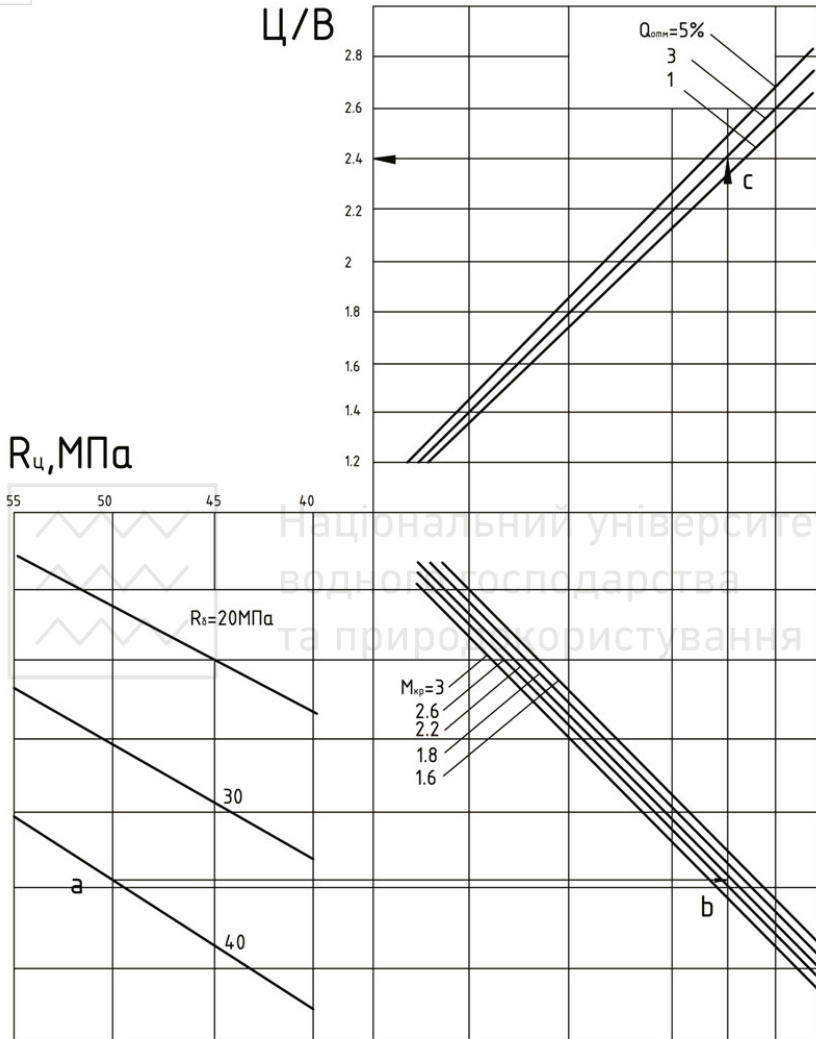
## Розрахунок дисперсії адекватності

| Точки плану | $x_0$ | $x_1$            | $x_2$            | $x_3$            | $x_4$          | $x_1x_2$         | $x_1x_3$         | $x_1x_4$         | $x_2x_3$      | $x_2x_4$      | $x_3x_4$      | $y_u$ | $\bar{y}_u$ | $y_u - \bar{y}_u$ | $(y_u - \bar{y}_u)^2$ |
|-------------|-------|------------------|------------------|------------------|----------------|------------------|------------------|------------------|---------------|---------------|---------------|-------|-------------|-------------------|-----------------------|
| 1           | 27,3  | $\frac{+}{11,2}$ | $\frac{+}{5,3}$  | $\frac{+}{1,1}$  | $\frac{+}{-1}$ | $\frac{+}{0,7}$  | $\frac{+}{0,5}$  | $\frac{+}{-0,6}$ | $\frac{+}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | 44,5  | 43,6        | -0,9              | 0,81                  |
| 2           | 27,3  | $\frac{+}{11,2}$ | $\frac{+}{5,3}$  | $\frac{+}{1,1}$  | $\frac{-}{+1}$ | $\frac{+}{0,7}$  | $\frac{+}{0,5}$  | $\frac{-}{0,6}$  | $\frac{+}{0}$ | $\frac{-}{0}$ | $\frac{-}{0}$ | 47,7  | 48,7        | 1                 | 1                     |
| 3           | 27,3  | $\frac{+}{11,2}$ | $\frac{+}{5,3}$  | $\frac{-}{-1,1}$ | $\frac{+}{-1}$ | $\frac{+}{0,7}$  | $\frac{-}{-0,5}$ | $\frac{+}{-0,6}$ | $\frac{-}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | $\frac{-}{0}$ | 41,3  | 40,9        | -0,4              | 0,16                  |
| 4           | 27,3  | $\frac{+}{11,2}$ | $\frac{+}{5,3}$  | $\frac{-}{-1,1}$ | $\frac{-}{+1}$ | $\frac{+}{0,7}$  | $\frac{-}{-0,5}$ | $\frac{-}{0,6}$  | $\frac{-}{0}$ | $\frac{-}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | 44,5  | 44,4        | -0,1              | 0,01                  |
| 5           | 27,3  | $\frac{+}{11,2}$ | $\frac{-}{-5,3}$ | $\frac{+}{1,1}$  | $\frac{+}{-1}$ | $\frac{-}{-0,7}$ | $\frac{+}{0,5}$  | $\frac{+}{-0,6}$ | $\frac{-}{0}$ | $\frac{-}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | 32,05 | 32,2        | 0,3               | 0,09                  |
| 6           | 27,3  | $\frac{+}{11,2}$ | $\frac{-}{-5,3}$ | $\frac{+}{1,1}$  | $\frac{-}{+1}$ | $\frac{-}{-0,7}$ | $\frac{+}{0,5}$  | $\frac{-}{0,6}$  | $\frac{-}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | $\frac{-}{0}$ | 35,6  | 34,8        | -0,8              | 0,64                  |
| 7           | 27,3  | $\frac{+}{11,2}$ | $\frac{-}{-5,3}$ | $\frac{-}{-1,1}$ | $\frac{+}{-1}$ | $\frac{-}{-0,7}$ | $\frac{-}{0,5}$  | $\frac{+}{-0,6}$ | $\frac{+}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | 29,3  | 30,4        | 1,1               | 1,21                  |
| 8           | 27,3  | $\frac{+}{11,2}$ | $\frac{-}{-5,3}$ | $\frac{-}{-1,1}$ | $\frac{-}{+1}$ | $\frac{-}{-0,7}$ | $\frac{-}{0,5}$  | $\frac{-}{0,6}$  | $\frac{+}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | 32,5  | 32,3        | 0,2               | 0,04                  |

Продовження табл. 2.11

| Точки плану | $x_0$ | $x_1$             | $x_2$            | $x_3$            | $x_4$          | $x_1x_2$         | $x_1x_3$         | $x_1x_4$         | $x_2x_3$      | $x_2x_4$      | $x_3x_4$      | $y_u$ | $\bar{y}_u$ | $y_u - \bar{y}_u$ | $(y_u - \bar{y}_u)^2$ |
|-------------|-------|-------------------|------------------|------------------|----------------|------------------|------------------|------------------|---------------|---------------|---------------|-------|-------------|-------------------|-----------------------|
| 9           | 27,3  | $\frac{-}{-11,2}$ | $\frac{+}{5,3}$  | $\frac{+}{1,1}$  | $\frac{+}{-1}$ | $\frac{-}{-0,7}$ | $\frac{-}{-0,5}$ | $\frac{-}{0,6}$  | $\frac{+}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | 20,9  | 21,1        | 0,2               | 0,04                  |
| 10          | 27,3  | $\frac{-}{-11,2}$ | $\frac{+}{5,3}$  | $\frac{+}{1,1}$  | $\frac{-}{+1}$ | $\frac{-}{-0,7}$ | $\frac{-}{-0,5}$ | $\frac{+}{-0,6}$ | $\frac{+}{0}$ | $\frac{-}{0}$ | $\frac{-}{0}$ | 21,7  | 21,9        | 0,1               | 0,01                  |
| 11          | 27,3  | $\frac{-}{-11,2}$ | $\frac{+}{5,3}$  | $\frac{-}{-1,1}$ | $\frac{+}{-1}$ | $\frac{-}{-0,7}$ | $\frac{+}{0,5}$  | $\frac{-}{0,6}$  | $\frac{-}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | $\frac{-}{0}$ | 18,5  | 19,6        | 1,1               | 1,21                  |
| 12          | 27,3  | $\frac{-}{-11,2}$ | $\frac{+}{5,3}$  | $\frac{-}{-1,1}$ | $\frac{-}{+1}$ | $\frac{-}{-0,7}$ | $\frac{+}{0,5}$  | $\frac{+}{-0,6}$ | $\frac{-}{0}$ | $\frac{-}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | 20,5  | 20,7        | -0,2              | 0,04                  |
| 13          | 27,3  | $\frac{-}{-11,2}$ | $\frac{-}{-5,3}$ | $\frac{+}{1,1}$  | $\frac{+}{-1}$ | $\frac{+}{0,7}$  | $\frac{-}{-0,5}$ | $\frac{-}{0,6}$  | $\frac{-}{0}$ | $\frac{-}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | 11,7  | 11,9        | 0,2               | 0,04                  |
| 14          | 27,3  | $\frac{-}{-11,2}$ | $\frac{-}{-5,3}$ | $\frac{+}{1,1}$  | $\frac{-}{+1}$ | $\frac{+}{0,7}$  | $\frac{-}{-0,5}$ | $\frac{+}{-0,6}$ | $\frac{-}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | $\frac{-}{0}$ | 12,1  | 12,6        | 0,5               | 0,25                  |
| 15          | 27,3  | $\frac{-}{-11,2}$ | $\frac{-}{-5,3}$ | $\frac{-}{-1,1}$ | $\frac{+}{-1}$ | $\frac{+}{0,7}$  | $\frac{+}{0,5}$  | $\frac{-}{0,6}$  | $\frac{+}{0}$ | $\frac{-}{0}$ | $\frac{-}{0}$ | 10,5  | 10,4        | 0,1               | 0,01                  |
| 16          | 27,3  | $\frac{-}{-11,2}$ | $\frac{-}{-5,3}$ | $\frac{-}{-1,1}$ | $\frac{-}{+1}$ | $\frac{+}{0,7}$  | $\frac{+}{0,5}$  | $\frac{+}{-0,6}$ | $\frac{+}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | $\frac{+}{0}$ | 11,3  | 11,1        | -0,2              | 0,04                  |
| Сума        |       |                   |                  |                  |                |                  |                  |                  |               |               |               |       |             | 5,6               |                       |





**Рис. 2.5.** Номограма для визначення Ц/В різних марок бетону залежно від досліджуваних факторів



## 2.3. Планування другого порядку і отримання квадратичних моделей

При вирішенні будівельно-технологічних задач більшість залежностей адекватно описуються поліноміальними рівняннями другого порядку. Такі рівняння можуть бути використані як математичні моделі також для опису поверхні відгуку поблизу оптимуму або т.зв. стаціонарної області.

Математична модель другого порядку має вигляд:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2, \quad (2.34)$$

де  $k$  – число факторів.

Завдання полягає у визначенні оцінок коефіцієнтів цієї моделі за результатами спланованого експерименту.

Основна вимога, що ставиться до плану другого порядку, полягає в тому, що план повинен допускати одержання окремих, не змішаних оцінок коефіцієнтів регресії. Для цього необхідно, щоб кількість дослідів ( $N$ ) була не менше кількості коефіцієнтів у моделі. Крім того, потрібно, щоб кожен фактор варіювався не менше ніж на трьох рівнях. Екстремальне значення  $x_{i,екст}$  знаходиться за формулою:

$$\frac{dy}{dx_i} = b_i + 2b_{ij} \cdot x_j + \sum_{i \neq j} b_{ij} = 0 \quad (2.35)$$

Плани повних квадратичних залежностей одержують шляхом додавання до ядра (тобто до ПФЕ чи дробової репліки) додаткових експериментів так званих «зоряних точок», а в деяких випадках і нульових, з відповідним інтервалом (плечем) варіювання, що позначається  $\alpha$ .

У практиці досліджень у технології бетону і залізобетону найбільше часто застосовують ротатабельні плани, плани Бокса-Бенкена, а також дво-, три-, чотири- і п'ятифакторні плани, близькі за властивостями до Д-оптимальних.

Планування є оптимальним, якщо пов'язане з проведенням порівняно нескладних обчислень і дозволяє отримувати такі оцінки коефіцієнтів регресії, які незалежні одна від іншої і визначаються з однаковою і мінімальною дисперсією. Важливо також, щоб дисперсія параметра оптимізації, передбаченого рівнянням регресії, не залежала від обертання системи координат у центрі плану.



Перерахованим умовам відповідає планування, що має властивості ортогональності і ротатабельності.

Планування називається *ортогональним*, якщо скалярний добуток усіх векторів-стовпців у матриці планування дорівнює нулю. Ортогональність плану дозволяє одержувати оцінки для коефіцієнтів регресії незалежно одна від одної.

Один з суттєвих недоліків ортогональних планів полягає в тому, що модель, отримана на основі ортогонального плану, з різною точністю передбачає значення відгуку на різних напрямках факторного простору.

Планування називається *ротатабельним*, якщо воно інваріантне до обертання системи координат. Це означає, що інформація, яка міститься у рівнянні регресії, повинна бути рівномірно розподілена (“розмазана”) по гіперсфері (по сфері при  $k=3$ , по колу при  $k=2$ ) з радіусом  $\rho$  ( $\rho^2 = \sum x_i^2$ ). Якщо планування є ротатабельним, то значення параметра оптимізації мають мінімальні дисперсії в різних точках факторного простору. Крім того, ці дисперсії рівні на рівній відстані від центра експерименту (початку координат) у будь-якому напрямку.

У табл.2.12 приведена як приклад матриця ротатабельного плану для трьох факторів ( $k=3$ ).

Ротатабельні плани для  $k=4$   $k=5$  наведені в додатку (табл. 3, 4, Додатки).

Коефіцієнти рівнянь регресії для ротатабельних планів визначають у такий спосіб:

$$b_0 = T_1(O_y) - T_2 \sum_{i=1}^k (i\bar{y}), \quad (2.36)$$

$$b_i = T_3(i\bar{y}), \quad (2.37)$$

$$b_{ii} = T_4(i\bar{y}) + T_5 \sum_{i=1}^k (i\bar{y}) - T_2(O_y), \quad (2.38)$$

$$b_{ij} = T_6(i\bar{y}). \quad (2.39)$$

У формулах (2.36...2.39):

$$(O_y) = \sum_{u=1}^N y_u; (i\bar{y}) = \sum_{u=1}^N x_{iu} y_u; \quad (2.40)$$

$$(i\bar{y}) = \sum_{u=1}^N x_{iy} x_{ju} y_u; (i\bar{y}) = \sum_{u=1}^N (x_{iy})^2 y_u; \quad (2.41)$$



$T_1-T_6$ -параметри для розрахунку коефіцієнтів рівнянь регресії  
(табл. 2.13).

Таблиця 2.12

Матриця ротатбельного плану для  $k = 3$

| Точки<br>плану<br>u | Матриця<br>планування |        |        | Квадрати змінних |         |         | Взаємодії<br>факторів |          |          | Вихід-<br>ний<br>пара-<br>метр $y_i$ |          |
|---------------------|-----------------------|--------|--------|------------------|---------|---------|-----------------------|----------|----------|--------------------------------------|----------|
|                     | $x_1$                 | $x_2$  | $x_3$  | $x_1^2$          | $x_2^2$ | $x_3^2$ | $x_1x_2$              | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ |                                      |          |
| $N_1$               | 1                     | +1     | +1     | +1               | +1      | +1      | +1                    | +1       | +1       | +1                                   | $y_1$    |
|                     | 2                     | +1     | +1     | -1               | +1      | +1      | +1                    | +1       | -1       | -1                                   | $y_2$    |
|                     | 3                     | +1     | -1     | +1               | +1      | +1      | +1                    | -1       | +1       | -1                                   | $y_3$    |
|                     | 4                     | +1     | -1     | -1               | +1      | +1      | +1                    | -1       | -1       | +1                                   | $y_4$    |
|                     | 5                     | -1     | +1     | +1               | +1      | +1      | +1                    | -1       | -1       | +1                                   | $y_5$    |
|                     | 6                     | -1     | +1     | -1               | +1      | +1      | +1                    | -1       | +1       | -1                                   | $y_6$    |
|                     | 7                     | -1     | -1     | +1               | +1      | +1      | +1                    | +1       | -1       | -1                                   | $y_7$    |
|                     | 8                     | -1     | -1     | -1               | +1      | +1      | +                     | +1       | +1       | +1                                   | $y_8$    |
| $N_{\alpha}$        | 9                     | +1,682 | 0      | 0                | +2,828  | 0       | 0                     | 0        | 0        | 0                                    | $y_9$    |
|                     | 10                    | -1,682 | 0      | 0                | +2,828  | 0       | 0                     | 0        | 0        | 0                                    | $y_{10}$ |
|                     | 11                    | 0      | +1,682 | 0                | 0       | +2,828  | 0                     | 0        | 0        | 0                                    | $y_{11}$ |
|                     | 12                    | 0      | -1,682 | 0                | 0       | +2,828  | 0                     | 0        | 0        | 0                                    | $y_{12}$ |
|                     | 13                    | 0      | 0      | +1,682           | 0       | 0       | +2,828                | 0        | 0        | 0                                    | $y_{13}$ |
|                     | 14                    | 0      | 0      | -1,682           | 0       | 0       | +2,828                | 0        | 0        | 0                                    | $y_{14}$ |
| $p_0$               | 15                    | 0      | 0      | 0                | 0       | 0       | 0                     | 0        | 0        | 0                                    | $y_{15}$ |
|                     | 16                    | 0      | 0      | 0                | 0       | 0       | 0                     | 0        | 0        | 0                                    | $y_{16}$ |
|                     | 17                    | 0      | 0      | 0                | 0       | 0       | 0                     | 0        | 0        | 0                                    | $y_{17}$ |
|                     | 18                    | 0      | 0      | 0                | 0       | 0       | 0                     | 0        | 0        | 0                                    | $y_{18}$ |
|                     | 19                    | 0      | 0      | 0                | 0       | 0       | 0                     | 0        | 0        | 0                                    | $y_{19}$ |
|                     | 20                    | 0      | 0      | 0                | 0       | 0       | 0                     | 0        | 0        | 0                                    | $y_{20}$ |

При дослідженні впливу двох факторів і при необхідності більш повного вивчення впливу одного з них застосовують так звані ротатбельні плани на шестикутнику, особливість яких полягає в тому, що перший фактор варіюється на п'ятьох рівнях, а другий – на трьох (табл. 2.12).



Таблиця 2.13

Значення параметрів T

| К-сть факторів k | Ядро плану N <sub>1</sub> | К-сть нульових точок n <sub>0</sub> | T <sub>1</sub> | T <sub>2</sub> | T <sub>3</sub> | T <sub>4</sub> | T <sub>5</sub> | T <sub>6</sub> |
|------------------|---------------------------|-------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 2                | 2 <sup>2</sup>            | 5                                   | 0,2            | 0,1            | 0,125          | 0,125          | 0,0187         | 0,25           |
| 3                | 2 <sup>3</sup>            | 6                                   | 0,1663         | 0,0568         | 0,0732         | 0,0625         | 0,0069         | 0,125          |
| 4                | 2 <sup>4</sup>            | 7                                   | 0,1428         | 0,0357         | 0,0417         | 0,0312         | 0,0037         | 0,0625         |
| 5                | 2 <sup>5-1</sup>          | 6                                   | 0,1591         | 0,0341         | 0,0417         | 0,0312         | 0,0028         | 0,0625         |

Таблиця 2.14

Ротатабельний план на шестикутнику

| Точка плану u | Матриця планування |                | Квадрати змінних            |                             | Взаємодія                     | Вихідний параметр |
|---------------|--------------------|----------------|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------|
|               | x <sub>1</sub>     | x <sub>2</sub> | x <sub>1</sub> <sup>2</sup> | x <sub>2</sub> <sup>2</sup> | x <sub>1</sub> x <sub>2</sub> | y <sub>i</sub>    |
| 1             | -1                 | 0              | +1                          | 0                           | 0                             | y <sub>1</sub>    |
| 2             | +1                 | 0              | +1                          | 0                           | 0                             | y <sub>2</sub>    |
| 3             | 0,5                | 0,865          | 0,25                        | 0,75                        | 0,43                          | y <sub>3</sub>    |
| 4             | 0,5                | -0,865         | 0,25                        | 0,75                        | -0,43                         | y <sub>4</sub>    |
| 5             | -0,5               | 0,865          | 0,25                        | 0,75                        | -0,43                         | y <sub>5</sub>    |
| 6             | -0,5               | -0,865         | 0,25                        | 0,75                        | 0,43                          | y <sub>6</sub>    |
| 7             | 0                  | 0              | 0                           | 0                           | 0                             | y <sub>7</sub>    |

Відповідні коефіцієнти визначають за формулами:

$$b_0 = (O_y) - \sum_{u=1}^k (i\ddot{y}), \quad (2.42)$$

$$b_i = 0,333(i\dot{y}), \quad (2.43)$$

$$b_{ii} = 0,667(i\ddot{y}) + 0,833 \sum_{u=1}^k (i\ddot{y}) - (O_y), \quad (2.44)$$

$$b_{ij} = 1,333(ij\dot{y}). \quad (2.45)$$

Близькими до ротатабельних є трирівневі плани Бокса-Бенкена(Додатки, табл. 5,6,7). Відповідні коефіцієнти рівнянь регресії визначають за формулами:



$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} y_0}{n_0}, \quad (2.46)$$

$$b_i = T_3(iy), \quad (2.47)$$

$$b_{ii} = T_4(iiy) + T_5 \sum_{i=1}^k (i^2y) - T_2(O_y), \quad (2.48)$$

$$b_{ij} = T_6(iiy). \quad (2.49)$$

Розрахункові значення параметрів  $T_2 - T_6$  наведені в табл. 2.15.

Таблиця 2.15  
Значення параметрів  $T$  в плані Бокса-Бенкена

| Число факторів $k$ | Загальна кількість точок $N$ | Кількість нульових точок $n_0$ | $T_2$  | $T_3$  | $T_4$  | $T_5$  | $T_6$ |
|--------------------|------------------------------|--------------------------------|--------|--------|--------|--------|-------|
| 3                  | 15                           | 3                              | 0,1667 | 0,125  | 0,25   | 0,625  | 0,25  |
| 4                  | 27                           | 3                              | 0,5    | 0,0833 | 0,125  | 0,0208 | 0,25  |
| 5                  | 46                           | 6                              | 0,5    | 0,0625 | 0,0833 | 0,0104 | 0,625 |

Плани Бокса-Бенкена ефективно застосовувати для вирішення таких задач, коли доцільно стабілізувати ряд  $x_i$  в багатofакторній ситуації протягом деякої групи дослідів.

Якщо мета експерименту полягає у знаходженні квадратичної моделі з найбільш точними оцінками параметрів, то доцільно скористатися D-оптимальним планом.

Для дво- і трифакторних експериментів застосовуються трирівневі плани (табл. 2.16, 2.17, 2.18). Коефіцієнти  $b_0$ ,  $b_i$ ,  $b_{ii}$ ,  $b_{ij}$  рівнянь регресії розраховують за формулами. Розрахункові значення параметрів  $T_1 - T_6$  наведені в табл. 2.17.

Для чотири- і п'ятифакторних експериментів більш доцільні близькі за властивостями до D-оптимальних трирівневі композиційні плани типу  $V_4$  і  $V_5$ , які одержують шляхом додавання до ПФЕ або до дробової репліки "зоряних" точок при  $\alpha = \pm 1$ . Для одержання плану  $Na_5$  додають ще одну нульову точку (табл. 8-10, Додатки).



Таблиця 2.16

Матриця тривірневого плану для  $k = 2$

| Точки плану<br>$u$ |    | Матриця<br>планування |       | Квадрати<br>перемінних |         | Взаємодія<br>факторів<br>$x_1x_2$ | Вихідний<br>параметр<br>$y_i$ |
|--------------------|----|-----------------------|-------|------------------------|---------|-----------------------------------|-------------------------------|
|                    |    | $x_1$                 | $x_2$ | $x_1^2$                | $x_2^2$ |                                   |                               |
| $N_1$              | 1  | +1                    | +1    | +1                     | +1      | +1                                | $y_1$                         |
|                    | 2  | +1                    | -1    | +1                     | +1      | -1                                | $y_2$                         |
|                    | 3  | -1                    | +1    | +1                     | +1      | -1                                | $y_3$                         |
|                    | 4  | -1                    | -1    | +1                     | +1      | +1                                | $y_4$                         |
| $N_\alpha$         | 5  | +1                    | 0     | +1                     | 0       | 0                                 | $y_5$                         |
|                    | 6  | -1                    | 0     | +1                     | 0       | 0                                 | $y_6$                         |
|                    | 7  | 0                     | +1    | 0                      | +1      | 0                                 | $y_7$                         |
|                    | 8  | 0                     | -1    | 0                      | +1      | 0                                 | $y_8$                         |
| $n_0$              | 9  | 0                     | 0     | 0                      | 0       | 0                                 | $y_9$                         |
|                    | 10 | 0                     | 0     | 0                      | 0       | 0                                 | $y_{10}$                      |
|                    | 11 | 0                     | 0     | 0                      | 0       | 0                                 | $y_{11}$                      |

Таблиця 2.17

Розрахункові параметри  $T$  в тривірневих планах при  $k=2...3$

| Число<br>факторів<br>$k$ | Тип плану    | $T_1$  | $T_2$  | $T_3$  | $T_4$ | $T_5$   | $T_6$ |
|--------------------------|--------------|--------|--------|--------|-------|---------|-------|
| 2                        | Двофакторний | 0,2632 | 0,1579 | 0,1667 | 0,5   | -0,1053 | 0,25  |
| 3                        | Трифакторний | 0,1832 | 0,0704 | 0,1    | 0,5   | -0,1268 | 0,125 |

Рівняння регресії, отримані за Д-оптимальними планами, забезпечують однакову точність прогнозування вихідного параметра в області, яка описується радіусом, що дорівнює 1 (рахуючи від нульової точки). Коефіцієнти рівнянь регресії такого типу також розраховують за формулами (2.38-2.41). Розрахункові значення параметрів  $T_1 - T_6$  для планів  $B_4, B_5$  і  $Na_5$  наведені в табл. 2.19.



Таблиця 2.18

Матриця трирівневого плану для  $k = 3$

| Точки плану<br>$u$ | Матриця планування |       |       | Квадрати перемінних |         |         | Взаємодія факторів |          |          | Вихідний параметр<br>$y_i$ |          |
|--------------------|--------------------|-------|-------|---------------------|---------|---------|--------------------|----------|----------|----------------------------|----------|
|                    | $x_1$              | $x_2$ | $x_3$ | $x_1^2$             | $x_2^2$ | $x_3^2$ | $x_1x_2$           | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ |                            |          |
| $N_1$              | 1                  | +1    | +1    | +1                  | +1      | +1      | +1                 | +1       | +1       | +1                         | $y_1$    |
|                    | 2                  | +1    | +1    | -1                  | +1      | +1      | +1                 | +1       | -1       | -1                         | $y_2$    |
|                    | 3                  | +1    | -1    | +1                  | +1      | +1      | +1                 | -1       | +1       | -1                         | $y_3$    |
|                    | 4                  | +1    | -1    | -1                  | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | +1                         | $y_4$    |
|                    | 5                  | -1    | +1    | +1                  | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | +1                         | $y_5$    |
|                    | 6                  | -1    | +1    | -1                  | +1      | +1      | +1                 | -1       | +1       | -1                         | $y_6$    |
|                    | 7                  | -1    | -1    | +1                  | +1      | +1      | +1                 | +1       | -1       | -1                         | $y_7$    |
|                    | 8                  | -1    | -1    | -1                  | +1      | +1      | +1                 | +1       | +1       | +1                         | $y_8$    |
| $N_\alpha$         | 9                  | +1    | 0     | 0                   | +1      | 0       | 0                  | 0        | 0        | 0                          | $y_9$    |
|                    | 10                 | -1    | 0     | 0                   | +1      | 0       | 0                  | 0        | 0        | 0                          | $y_{10}$ |
|                    | 11                 | 0     | +1    | 0                   | 0       | +1      | 0                  | 0        | 0        | 0                          | $y_{11}$ |
|                    | 12                 | 0     | -1    | 0                   | 0       | +1      | 0                  | 0        | 0        | 0                          | $y_{12}$ |
|                    | 13                 | 0     | 0     | +1                  | 0       | 0       | +1                 | 0        | 0        | 0                          | $y_{13}$ |
|                    | 14                 | 0     | 0     | -1                  | 0       | 0       | +1                 | 0        | 0        | 0                          | $y_{14}$ |
| $n_0$              | 15                 | 0     | 0     | 0                   | 0       | 0       | 0                  | 0        | 0        | 0                          | $y_{15}$ |
|                    | 16                 | 0     | 0     | 0                   | 0       | 0       | 0                  | 0        | 0        | 0                          | $y_{16}$ |
|                    | 17                 | 0     | 0     | 0                   | 0       | 0       | 0                  | 0        | 0        | 0                          | $y_{17}$ |

Таблиця 2.19

Розрахункові значення параметрів  $T$  для планів  $B_4, B_5, Na_5$

| Кількість факторів $k$ | Тип плану | $T_1$  | $T_2$  | $T_3$  | $T_4$ | $T_5$   | $T_6$  |
|------------------------|-----------|--------|--------|--------|-------|---------|--------|
| 4                      | $B_4$     | 0,2292 | 0,0625 | 0,0556 | 0,5   | -0,1042 | 0,0625 |
| 5                      | $B_5$     | 0,1588 | 0,0332 | 0,0294 | 0,5   | -0,0918 | 0,0312 |
| 5                      | $Na_5$    | 0,138  | 0,0303 | 0,0556 | 0,5   | -0,0909 | 0,0625 |

Вибір плану залежить від характеру поставленої задачі і можливостей варіювання факторів на прийнятих рівнях. Для задач, у яких є хоча б один важкокерований фактор, тобто фактор, для якого забезпечення натурального значення на всіх рівнях варіювання викликає складність (активність цементу, нормальна





густота цементного тіста тощо), рекомендується застосовувати плани з мінімальною кількістю рівнів варіювання: дво- і трифакторні на трьох рівнях, а також плани типу  $B_4$ ,  $B_5$  і  $Na_5$ . При вільному варіюванні факторів (витрата добавок, тривалість твердіння тощо) можна застосовувати ротатабельні плани.

Застосування ротатабельного плану найбільше доцільно в тих випадках, коли бажано отримати значення вихідних параметрів за межами  $+1 \dots -1$ .

При проведенні експериментів із застосуванням трихрівневих планів особливу увагу слід звернути на старанність проведення дослідів у зоряних точках.

Якщо квадратичні залежності неадекватно описують процес, домогтися адекватності можна шляхом заміни значення одного або декількох факторів на їх логарифм, зворотну функцію, вираз у вигляді степеня або якимось іншим способом.

Для прямих розрахунків і при побудові графіків і номограм отримані рівняння регресії доцільно перетворити в поліноми з натуральними значеннями факторів за формулою (2.7).

Проведення експерименту неминує пов'язане з помилками внаслідок того, що досліджувані залежності і процеси носять імовірнісний характер, а отримані рівняння відображають їх з певним ступенем імовірності. Тому обов'язковим етапом є статистичний аналіз, основною метою якого є оцінка значимості коефіцієнтів рівнянь і перевірка адекватності рівнянь.

Загальний порядок статистичного аналізу рівнянь регресії другого і першого порядку однакові.

Оцінка значимості коефіцієнтів рівнянь регресії другого порядку проводиться так само як і лінійних (ф-ли 2.12...2.28)

Для повних квадратичних рівнянь при дублюванні дослідів за рядками матриці середньоквадратичні помилки при визначенні коефіцієнтів обчислюють за формулами:

$$S_{\{b_o\}} = T_7 S_{\{y_u\}}, \quad (2.50)$$

$$S_{\{b_i\}} = T_8 S_{\{y_u\}}, \quad (2.51)$$

$$S_{\{b_{ii}\}} = T_9 S_{\{y_u\}}, \quad (2.52)$$

$$S_{\{b_{ij}\}} = T_{10} S_{\{y_u\}}. \quad (2.53)$$



Таблиця 2.20

Розрахункові параметри для визначення середньоквадратичних помилок і коефіцієнтів рівнянь регресії другого порядку

| Тип плану                | К-сть факторів k | Загальна к-сть точок N | К-сть нульових точок $n_{00}$ | $T_7$  | $T_8$  | $T_9$  | $T_{10}$ |
|--------------------------|------------------|------------------------|-------------------------------|--------|--------|--------|----------|
| Ротатбельний             | 2                | 13                     | 5                             | 0,4472 | 0,3536 | 0,3793 | 0,5      |
|                          | 3                | 20                     | 6                             | 0,4078 | 0,2706 | 0,2634 | 0,3536   |
|                          | 4                | 31                     | 7                             | 0,378  | 0,2041 | 0,187  | 0,25     |
|                          | 5                | 32                     | 6                             | 0,3989 | 0,2041 | 0,1846 | 0,25     |
| Те ж, на шестикутнику    | 2                | 7                      | 1                             | 1      | 0,5774 | 1,2247 | 1,1547   |
| Бокса-Бенкена            | 3                | 15                     | 3                             | 0,5774 | 0,3536 | 0,5204 | 0,5      |
|                          | 4                | 27                     | 3                             | 0,5774 | 0,2887 | 0,433  | 0,5      |
|                          | 5                | 46                     | 6                             | 0,4082 | 0,25   | 0,3385 | 0,5      |
| Двофакторний трирівневий | 2                | 11                     | 3                             | 0,513  | 0,4083 | 0,6282 | 0,5      |
| Трифакторний трирівневий | 3                | 17                     | 3                             | 0,4279 | 0,3162 | 0,6109 | 0,3536   |
| $B_4$                    | 4                | 24                     | 0                             | 0,4787 | 0,2357 | 0,6212 | 0,25     |
| $B_5$                    | 5                | 42                     | 0                             | 0,3985 | 0,1715 | 0,639  | 0,1768   |
| $Na_5$                   | 5                | 27                     | 1                             | 0,3716 | 0,2357 | 0,6396 | 0,25     |

Для повних квадратичних рівнянь розрахункові значення t-критерію Стьюдента  $t_p$  для коефіцієнтів  $b_0$ ,  $b_i$  і  $b_{ij}$  знаходять за формулами відповідно (2.24...2.26), а для коефіцієнтів  $b_{ii}$  - за формулою:



$$t_{p\{b_{ii}\}} = \frac{|b_{ii}|}{S_{\{b_{ii}\}}}. \quad (2.54)$$

Визначення  $t_p$  слід починати з найменших за абсолютним значенням коефіцієнтів.

У планах другого порядку коефіцієнти квадратичних членів залишають зазвичай в рівнянні навіть, якщо вони незначимі.

Для повних квадратичних рівнянь дисперсію адекватності знаходять за формулами:

$$S_{a0}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N (\hat{y}_u - y_u)^2}{N - m - (n_{ou} - 1)}, \quad (2.55)$$

$$S_{a0}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N (\hat{y}_u - y_u)^2}{N - m}. \quad (2.56)$$

При дублюванні дослідів за рядках матриці за формулою:

$$S_{a0}^2 = \frac{r}{N - m(n_{ou} - 1)} \sum_{u=1}^N (\hat{y}_u - \bar{y}_u)^2, \quad (2.57)$$

$$S_{ад}^2 = \frac{r}{N - m} \sum_{u=1}^N (\hat{y}_u - \bar{y}_u)^2. \quad (2.58)$$

У формулах:  $m$  – число значимих коефіцієнтів, у тому числі коефіцієнтів  $b_0$ ;  $n_{ou}$  – число нульових точок матриці;  $\hat{y}_u$  – розрахункове значення вихідного параметра в  $u$ -му рядку.

При наявності в плані нульових точок дисперсію  $S_{ад}^2$  визначають за формулами 2.55, 2.57), а при їх відсутності (2.56, 2.58).

**Приклад 2.3.1.** Потрібно побудувати номограму для регулювання Ц/В ( $x_2$ ) бетонної суміші в залежності від її водопотреби  $B$  ( $x_1$ ), витрати пластифікуючої добавки ЛСТД ( $x_4$ ) і активності цементу  $R_c$  ( $x_3$ ). В дослідях використовували портландцемент марок 500, 550 і 600 з мінеральними добавками.



Відповідно до поставленої задачі встановлюємо області варіювання зазначених технологічних факторів (табл. 2.21).

Для розробки номограми необхідно побудувати математичну модель залежності міцності бетону  $R_6$ , МПа, від досліджуваних факторів. Як видно з табл. 2.21 для прийнятих рівнів варіювання досліджувана залежність, мабуть, буде носити нелінійний характер. Для проведення експериментів приймаємо план  $B_4$ .

Таблиця 2.21

Умови планування експерименту

| Фактори   |               | Рівні варіювання |       |      | Інтервал варіювання |
|---|---------------|------------------|-------|------|---------------------|
| натуральний вид   | кодований вид | -1               | 0     | +1   |                     |
| $B, \text{кг/м}^3$  | $x_1$         | 160              | 190   | 220  | 30                  |
| $\Pi/B$   | $x_2$         | 1,5              | 2,5   | 3,5  | 1                   |
| $R_{п}, \text{МПа}$                                       | $x_3$         | 49,4             | 58,75 | 68,1 | 9,35                |
| $D, \%$ від маси цементу (у перерахунку на суху речовину) | $x_4$         | 0                | 0,25  | 0,5  | 0,25                |

Матриця планування, результати експериментів і розрахункові параметри для обчислення коефіцієнтів рівнянь регресії приведені в табл. 2.22.

1. Визначаємо коефіцієнти рівнянь регресії:

а) Вільний член  $b_0$  обчислюємо за формулою (2.36):

$$b_0 = 0,2292 \cdot 1282 - 0,0625 \cdot (947,9 + 945,5 + 947,8 + 943,1) = 57,28$$

де 0,2292 і 0,0625 - коефіцієнти з табл.2.19; 1282; 947,9; 945,5; 947,8 і 943-1 - суми з табл. 2.22;

б) Коефіцієнти для лінійних членів обчислюємо за формулою (2.37)

$$b_3 = 0,0556 \cdot 130,4 = 7,24$$

де 130,4 - сума з табл. 2.22; 0,0556 - коефіцієнт із табл. 2.19.

Аналогічно знаходимо значення коефіцієнтів  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_4$ ;

в) Коефіцієнти для квадратичних членів обчислюємо за формулою (2.38)

$$b_{22} = 0,5 \cdot 945,5 - 0,1042 (947,9 + 945,5 + 947,8 + 943) - 0,0625 \cdot 1282 = -1,66,$$



де 945,5; 947,8; 947,9 і 943,1 - суми з табл. 2.24; 0,5; 0,1042 і 0,0625 - коефіцієнти з табл. 2.19.

Таблиця 2.22  
Матриця планування, експериментальні і розрахункові точки плану

| Точки плану<br>u | Фактори        |                |                |                | Експериментальні<br>значення<br>y | Розрахункові параметри для визначення коефіцієнтів при лінійних членах |                          |                         |                          |
|------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------------------------|--|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
|                  | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | x <sub>3</sub> | x <sub>4</sub> |                                   | yx <sub>1</sub>  | yx <sub>2</sub>          | yx <sub>3</sub>         | yx <sub>4</sub>          |
|                  | 1              | +1             | +1             | +1             |                                   | +1   | 78,3                     | +78,3                   | +78,3                    |
| 2                | +1             | +1             | +1             | -1             | 84,1                              | +84,1  | +84,1                    | +84,1                   | -84,1                    |
| 3                | +1             | +1             | -1             | +1             | 60,8                              | +60,8  | +60,8                    | -60,8                   | +60,8                    |
| 4                | +1             | +1             | -1             | -1             | 65,3                              | +65,3  | +65,3                    | -65,3                   | -65,3                    |
| 5                | +1             | -1             | +1             | +1             | 32,4                              | +32,4  | -32,4                    | +32,4                   | +32,4                    |
| 6                | +1             | -1             | +1             | -1             | 34,6                              | +34,6  | -34,6                    | +34,6                   | -34,6                    |
| 7                | +1             | -1             | -1             | +1             | 22,8                              | +22,8  | -22,8                    | -22,8                   | +22,8                    |
| 8                | +1             | -1             | -1             | -1             | 26,1                              | +26,1  | -26,1                    | -26,1                   | -26,1                    |
| 9                | -1             | +1             | +1             | +1             | 86,2                              | -86,2  | +86,2                    | +86,2                   | +86,2                    |
| 10               | -1             | +1             | +1             | -1             | 89,9                              | -89,9  | +89,9                    | +89,9                   | -89,9                    |
| 11               | -1             | +1             | -1             | +1             | 66,4                              | -66,4  | +66,4                    | -66,4                   | +66,4                    |
| 12               | -1             | +1             | -1             | -1             | 69,7                              | -69,7  | +69,7                    | -69,7                   | -69,7                    |
| 13               | -1             | -1             | +1             | +1             | 33,6                              | -33,6  | -33,6                    | +33,6                   | +33,6                    |
| 14               | -1             | -1             | +1             | -1             | 34,3                              | -34,3  | -34,3                    | +34,3                   | -34,3                    |
| 15               | -1             | -1             | -1             | +1             | 23,8                              | -23,8  | -23,8                    | -23,8                   | +23,8                    |
| 16               | -1             | -1             | -1             | -1             | 25,8                              | -25,8  | -25,8                    | -25,8                   | -25,8                    |
| 17               | +1             | 0              | 0              | 0              | 55,6                              | +55,6  | 0                        | 0                       | 0                        |
| 18               | -1             | 0              | 0              | 0              | 58,2                              | -58,2  | 0                        | 0                       | 0                        |
| 19               | 0              | +1             | 0              | 0              | 77,8                              | 0  | +77,8                    | 0                       | 0                        |
| 20               | 0              | -1             | 0              | 0              | 33,6                              | 0  | -33,6                    | 0                       | 0                        |
| 21               | 0              | 0              | +1             | 0              | 65,7                              | 0  | 0                        | +65,7                   | 0                        |
| 22               | 0              | 0              | -1             | 0              | 48                                | 0  | 0                        | -48,                    | 0                        |
| 23               | 0              | 0              | 0              | +1             | 52,8                              | 0  | 0                        | 0                       | +52,8                    |
| 24               | 0              | 0              | 0              | -1             | 56,2                              | 0  | 0                        | 0                       | -56,2                    |
| Сума             |                |                |                |                | 1282                              | -27,9  | +411,5                   | +130,4                  | -28,9                    |
| Коефіцієнти      |                |                |                |                | b <sub>0</sub> =<br>57,3          | b <sub>1</sub> =<br>-1,6   | b <sub>2</sub> =<br>22,9 | b <sub>3</sub> =<br>7,2 | b <sub>4</sub> =<br>-1,6 |



Аналогічно знаходимо значення коефіцієнтів  $b_{11}, b_{33}, b_{44}$ ;

г) Коефіцієнти при взаємодіях обчислюємо за формулою (2.39)

$$b_1 b_2 = 0.0625(-22.1) = -1.38$$

де  $(-22,1)$  - сума з табл. 2.24;  $0,0625$  - коефіцієнт із табл. 2.19.

Так само визначасмо коефіцієнти  $b_{13}, b_{14}, b_{23}, b_{24}, b_{34}$  (табл. 2.24).

Для перевірки значимості коефіцієнтів і наступного визначення адекватності рівняння необхідно знайти дисперсію відтворюваності. З цією метою додатково виконуємо 4 досліди (табл.2.23), фіксуючи фактори на основному рівні.

Таблиця 2.23

Результати експериментів і розрахунків у нульових точках

| Точки плану $u$ | Фактори |       |       |       | $y_{ou}$ | $\bar{y}_o$ | $y_{ou} - \bar{y}_o$ | $(y_{ou} - \bar{y}_o)^2$ |
|-----------------|---------|-------|-------|-------|----------|-------------|----------------------|--------------------------|
|                 | $x_1$   | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |          |             |                      |                          |
| 1               | 0       | 0     | 0     | 0     | 56,1     | 57,25       | -1,14                | 1,31                     |
| 2               | 0       | 0     | 0     | 0     | 56,45    |             | -0,8                 | 0,64                     |
| 3               | 0       | 0     | 0     | 0     | 58,1     |             | 0,85                 | 0,72                     |
| 4               | 0       | 0     | 0     | 0     | 58,35    |             | 1,1                  | 1,21                     |
| Сума            |         |       |       |       | 229      |             |                      | 3,9                      |

Таблиця 2.24

Розрахункові параметри для визначення коефіцієнтів рівняння регресії

| Точки плану $u$ | Розрахункові параметри для визначення коефіцієнтів при |          |          |          |            |           |           |           |           |           |
|-----------------|--|----------|----------|----------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|                 | квадратичних членах                                    |          |          |          | взаємодіях |           |           |           |           |           |
|                 | $ux_1^2$   | $ux_2^2$ | $ux_3^2$ | $ux_4^2$ | $ux_1x_2$  | $ux_1x_3$ | $ux_1x_4$ | $ux_2x_3$ | $ux_2x_4$ | $ux_3x_4$ |
| 1               | 78,3   | 78,3     | 78,3     | 78,3     | +78,3      | +78,3     | +78,3     | +78,3     | +78,3     | +78,3     |
| 2               | 84,1   | 84,1     | 84,1     | 84,1     | +84,1      | +84,1     | -84,1     | +84,1     | -84,1     | -84,1     |
| 3               | 60,8   | 60,8     | 60,8     | 60,8     | +60,8      | -60,8     | +60,8     | -60,8     | +60,8     | -20,8     |
| 4               | 65,3   | 65,3     | 65,3     | 65,3     | +65,3      | -65,3     | -65,3     | -65,3     | -65,3     | +65,3     |
| 5               | 32,4   | 32,4     | 32,4     | 32,4     | -32,4      | +32,4     | +32,4     | -32,4     | -32,4     | +32,4     |
| 6               | 34,6   | 34,6     | 34,6     | 34,6     | -34,6      | +34,6     | -34,6     | -34,6     | +34,6     | -34,6     |
| 7               | 22,8   | 22,8     | 22,8     | 22,8     | -22,8      | -22,8     | +22,8     | +22,8     | -22,8     | -22,8     |
| 8               | 26,1   | 26,1     | 26,1     | 26,1     | -26,1      | -26,1     | -26,1     | +26,1     | +26,1     | +26,1     |
| 9               | 86,2   | 86,2     | 86,2     | 86,2     | -86,2      | -86,2     | -86,2     | +86,2     | +86,2     | +86,2     |



| Точки<br>плану $u$ | Розрахункові параметри для визначення коефіцієнтів при |                    |                    |                    |                    |                    |                    |                   |                    |                     |
|--------------------|--|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|---------------------|
|                    | квадратичних членах                                    |                    |                    |                    | взаємодіях         |                    |                    |                   |                    |                     |
|                    | $ux_1^2$   | $ux_2^2$           | $ux_3^2$           | $ux_4^2$           | $ux_1x_2$          | $ux_1x_3$          | $ux_1x_4$          | $ux_2x_3$         | $ux_2x_4$          | $ux_3x_4$           |
| 10                 | 89,9   | 89,9               | 89,9               | 89,9               | -89,9              | -89,9              | +89,9              | +89,9             | -89,9              | -89,9               |
| II                 | 66,4   | 66,4               | 66,4               | 66,4               | -66,4              | +66,4              | -66,4              | -66,4             | +66,4              | -66,4               |
| 12                 | 69,7   | 69,7               | 69,7               | 69,7               | -69,7              | +69,7              | +69,7              | -69,7             | -69,7              | +69,7               |
| 13                 | 33,6   | 33,6               | 33,6               | 33,6               | +33,6              | -33,6              | +33,6              | -33,6             | -33,6              | +33,6               |
| 14                 | 34,3   | 34,3               | 34,3               | 34,3               | +34,3              | -34,3              | +34,3              | -34,3             | +34,3              | -34,3               |
| 15                 | 23,8   | 23,8               | 23,8               | 23,8               | +23,8              | +23,8              | -23,8              | +23,8             | -23,8              | -23,8               |
| 16                 | 25,8   | 25,8               | 25,8               | 25,8               | +25,8              | +25,8              | +25,8              | +25,8             | +25,8              | +25,8               |
| 17                 | 55,6   | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  | 0                 | 0                  | 0                   |
| 18                 | 58,2   | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  | 0                 | 0                  | 0                   |
| 19                 | 0  | 77,8               | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  | 0                 | 0                  | 0                   |
| 20                 | 0  | 33,6               | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  | 0                 | 0                  | 0                   |
| 21                 | 0  | 0                  | 65,7               | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  | 0                 | 0                  | 0                   |
| 22                 | 0  | 0                  | 48                 | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  | 0                 | 0                  | 0                   |
| 23                 | 0  | 0                  | 0                  | 52,8               | 0                  | 0                  | 0                  | 0                 | 0                  | 0                   |
| 24                 | 0  | 0                  | 0                  | 56,2               | 0                  | 0                  | 0                  | 0                 | 0                  | 0                   |
| Сума               | 947,9  | 945,5              | 947,8              | 943,1              | -22,1              | -3,9               | -6,1               | +39,9             | -9,1               | +0,7                |
| Коефі-<br>цієнти   | $b_{11} =$<br>-0,4                                     | $b_{22} =$<br>-1,6 | $b_{33} =$<br>-0,4 | $b_{44} =$<br>-2,8 | $b_{12} =$<br>-1,4 | $b_{13} =$<br>-0,3 | $b_{14} =$<br>-0,4 | $b_{23} =$<br>2,5 | $b_{24} =$<br>-0,6 | $b_{34} =$<br>-0,04 |

2. Перевіряємо значимість коефіцієнтів рівнянь регресії.

а) Середнє арифметичне значення міцності в МПа в нульовій точці знаходимо за формулою (2.18):

$$\bar{y}_0 = \frac{56,1 + 56,45 + 58,1 + 58,35}{4} = \frac{229}{4} = 57,25.$$

б) Для перевірки значимості коефіцієнтів і наступного визначення адекватності рівняння необхідно знайти дисперсію відтворюваності. Дисперсію відтворюваності  $S_{\{\bar{y}_0\}}^2$  в нульовій точці розраховуємо за формулою (2.20):



$$S_{\{\bar{y}_o\}}^2 = \frac{(57,25 - 56,10)^2 - (57,25 - 56,45)^2 + (57,25 - 58,1)^2 + (57,25 - 58,35)^2}{(4 - 1)} = \frac{3,9}{3} = 1,3$$

в) Середньоквадратичне відхилення  $S_{\{\bar{y}_o\}}$  знаходимо за формулою (2.22):

$$S_{\{\bar{y}_o\}} = \sqrt{1,3} = 1,14.$$

г) Середньоквадратична помилка  $S_{\{b\}}$  при визначенні коефіцієнтів регресії за формулами (2.50...2.53) складе:

$$S_{\{b_0\}} = 0,4787 \cdot 1,14 = 0,55,$$

$$S_{\{b_1\}} = 0,2357 \cdot 1,14 = 0,27,$$

$$S_{\{b_{ii}\}} = 0,6212 \cdot 1,14 = 0,71,$$

$$S_{\{b_{ij}\}} = 0,25 \cdot 1,14 = 0,29,$$

де 0,4787; 0,2357; 0,6212 і 0,25 - приймаємо за табл. 2.20.

д) Знаходимо  $t$ - критерій Стьюдента.

Табличне значення  $t_T$  - (Додатки, табл. 1) при  $\alpha=0,05$  і

$$f_{y_o} = 4 - 1 = 3 \text{ дорівнює } t_T = 3,18.$$

Розрахункові значення  $t_p$  - визначаємо за формулами (2.24... 2.26, 2.54), починаючи з найменших за абсолютним значенням коефіцієнтів рівнянь регресії:

$$t_1 = \frac{1,6}{0,27} = 5,92; \quad t_{13} = \frac{0,3}{0,29} = 1,03;$$

$$t_{11} = \frac{0,4}{0,71} = 0,56; \quad t_{14} = \frac{0,4}{0,29} = 1,38$$

$$t_{22} = \frac{1,6}{0,71} = 2,25; \quad t_{24} = \frac{0,6}{0,29} = 2,07;$$

$$t_{44} = \frac{2,8}{0,71} = 3,94; \quad t_{12} = \frac{1,4}{0,29} = 4,83;$$





Оскільки  $t_{13}$ ,  $t_{14}$ ,  $t_{14}$  і  $t_{34} < t_t$ , то коефіцієнти  $b_{13}$ ,  $b_{14}$ ,  $b_{24}$  і  $b_{34}$  незначимі (у табл. 2.24 вони підкреслені). Квадратичні коефіцієнти  $b_{11}$ ,  $b_{22}$ ,  $b_{33}$  також незначимі, однак їх не слід видаляти з моделі, тому що всі квадратичні коефіцієнти зв'язані не тільки між собою, але і з вільним членом.

Рівняння регресії міцності бетону має вигляд

$$y = 57,3 - 1,6x_1 + 22,9x_2 + 7,2x_3 - 1,6x_4 - 0,4x_1^2 - 1,6x_2^2 - 0,4x_3^2 - 2,8x_4^2 - 1,4x_1x_2 + 2,5x_2x_3. \quad (2.59)$$

### 3. Визначаємо адекватність рівняння регресії.

а) Знаходимо залишкову суму квадратів відхилень, попередньо обчисливши них для кожного рядка матриці. Для цього визначаємо розрахункове значення  $y$  за формулою (2.59) за рядками матриці.

Так, наприклад, для першого рядка отримаємо:

$$y = 57,3 - 1,6(+1) + 22,9(+1) + 7,2(+1) - 1,6(+1) - 0,4(+1)^2 - 1,6(+1)^2 - 0,4(+1)^2 - 2,8(+1)^2 - 1,4(+1)(+1) + 2,5(+1)(+1) = 80,1.$$

Аналогічно проводимо обчислення для всіх рядків матриці. Результати розрахунків наведені в табл. 2.25.

б) Визначаємо дисперсію адекватності  $S_{ад}^2$  за формулою (2.28):

$$S_{ад}^2 = \frac{21,9}{24 - 11} = 1,68.$$

де 21,9 - сума з табл.2.26;

24 - кількість дослідів ( $N_1 + N_a$ );

11 - кількість значимих коефіцієнтів у рівнянні регресії (2.59).

в) Знаходимо значення  $F$  - критерію Фішера:

розрахункове  $F_p$  визначаємо за формулою (2.29); для даного прикладу

$$F_p = \frac{1,68}{1,3} = 1,3.$$

де 1,3 - дисперсія відтворюваності  $S_{\{\bar{y}_o\}}^2$  (див. п.2 б);  
1,68 - дисперсія адекватності  $S_{ад}^2$  (див. п.3 б);



Табличне –  $F_T$  - знаходимо по табл.2 (Додатки). При довірчій імовірності 95%,  $f_{y_0} = 4 - 1 = 3$  і  $f_{\alpha g} = 24 - 11 = 13$   $F_T = 8,7$

$$S_{\{\bar{y}_0\}}^2 < S_{ад}^2.$$

Так як  $F_p < F_T$ , наведене рівняння регресії є адекватним і його можна вважати математичною моделлю міцності бетону для даної області зміни досліджуваних факторів.

#### 4. Побудова номограм.

При побудові номограми для регулювання складів бетону необхідно визначити розрахункові значення Ц/В ( $x_2$ ) при зміні досліджуваних факторів ( $x_1, x_3, x_4$ ). З цією метою поліном виду:

$$\begin{aligned} \hat{y} = & b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \\ & + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + \\ & + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 + b_{34}x_3x_4. \end{aligned} \quad (2.60)$$

розв'язуємо відносно  $x_2$  і приводимо його до квадратного рівняння:

$$Bx_2^2 + Lx_2 + C = 0 \quad (2.61)$$

Коефіцієнти  $B$  і  $L$ , а також вільний член  $C$  знаходимо шляхом перетворення рівняння (2.60)

$$\begin{aligned} y = & b_{22}x_2^2 + (b_2 + b_{12}x_1 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4)x_2 + b_0 + \\ & b_1x_1 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{11}x_1^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 + b_{13}x_1x_3 + \\ & + b_{14}x_1x_4 + b_{34}x_3x_4 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Таблиця 2.25

## Розрахунок дисперсії адекватності

| Точки плану $u$ | $x_0$ | $x_1$     | $x_2$      | $x_3$     | $x_4$     | $x_1^2$   | $x_2^2$   | $x_3^2$   | $x_4^2$   | $x_1x_2$  | $x_1x_3$ | $x_1x_4$ | $x_2x_3$  | $x_2x_4$ | $x_3x_4$ | $y$  | $\hat{y}$ | $y - \hat{y}$ | $(y - \hat{y})^2$ |
|-----------------|-------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|-----------|----------|----------|------|-----------|---------------|-------------------|
| 1               | 2     | 3         | 4          | 5         | 6         | 7         | 8         | 9         | 10        | 11        | 12       | 13       | 14        | 15       | 16       | 17   | 18        | 19            | 20                |
| 1               | 57.3  | $\pm 1.6$ | $\pm 22.9$ | $\pm 7.2$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 2.8$ | $\pm 1.4$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | $\pm 2.5$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | 78.3 | 80.1      | -1.8          | 3.24              |
| 2               | 57.3  | $\pm 1.6$ | $\pm 22.9$ | $\pm 7.2$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 2.8$ | $\pm 1.4$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | $\pm 2.5$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | 84.1 | 83.3      | 0.8           | 0.64              |
| 3               | 57.3  | $\pm 1.6$ | $\pm 22.9$ | $\pm 7.2$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 2.8$ | $\pm 1.4$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | $\pm 2.5$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | 60.8 | 60.7      | 0.1           | 0.01              |
| 4               | 57.3  | $\pm 1.6$ | $\pm 22.9$ | $\pm 7.2$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 2.8$ | $\pm 1.4$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | $\pm 2.5$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | 65.3 | 63.9      | 1.4           | 1.96              |
| 5               | 57.3  | $\pm 1.6$ | $\pm 22.9$ | $\pm 7.2$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 2.8$ | $\pm 1.4$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | $\pm 2.5$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | 32.4 | 32.1      | 0.3           | 0.09              |
| 6               | 57.3  | $\pm 1.6$ | $\pm 22.9$ | $\pm 7.2$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 2.8$ | $\pm 1.4$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | $\pm 2.5$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | 34.6 | 35.3      | -6.7          | 0.49              |
| 7               | 57.3  | $\pm 1.6$ | $\pm 22.9$ | $\pm 7.2$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 2.8$ | $\pm 1.4$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | $\pm 2.5$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | 22.8 | 22.7      | 0.1           | 0.01              |
| 8               | 57.3  | $\pm 1.6$ | $\pm 22.9$ | $\pm 7.2$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 2.8$ | $\pm 1.4$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | $\pm 2.5$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | 26.1 | 25.9      | 0.2           | 0.04              |
| 9               | 57.3  | $\pm 1.6$ | $\pm 22.9$ | $\pm 7.2$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 1.6$ | $\pm 0.4$ | $\pm 2.8$ | $\pm 1.4$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | $\pm 2.5$ | $\pm 0$  | $\pm 0$  | 86.2 | 86.1      | 0.1           | 0.01              |

Продолжение табл. 2.25

| Точки<br>плану<br><i>и</i> | $x_0$ | $x_1$     | $x_2$      | $x_3$     | $x_4$     | $x_1^2$   | $x_2^2$   | $x_3^2$   | $x_4^2$   | $x_1x_2$  | $x_1x_3$ | $x_1x_4$ | $x_2x_3$  | $x_2x_4$ | $x_3x_4$ | $y$  | $\hat{y}$ | $\bar{y}-\hat{y}$ | $(\bar{y}-\hat{y})^2$ |
|----------------------------|-------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|-----------|----------|----------|------|-----------|-------------------|-----------------------|
| 1                          | 2     | 3         | 4          | 5         | 6         | 7         | 8         | 9         | 10        | 11        | 12       | 13       | 14        | 15       | 16       | 17   | 18        | 19                | 20                    |
| 10                         | 57,3  | =<br>1.6  | ±<br>22,9  | ±<br>7.2  | =<br>1.6  | ±<br>-0.4 | ±<br>-1.6 | ±<br>-0.4 | ±<br>-2.8 | ±<br>-1.4 | =<br>0   | ±<br>0   | =<br>-2.5 | ±<br>0   | ±<br>0   | 89.9 | 89.3      | 0.6               | 0.36                  |
| 11                         | 57.3  | =<br>1.6  | ±<br>22,9  | =<br>-7.2 | ±<br>-1.6 | ±<br>-0.4 | ±<br>-1.6 | ±<br>-0.4 | ±<br>-2.8 | ±<br>-1.4 | =<br>0   | ±<br>0   | =<br>-2.5 | ±<br>0   | ±<br>0   | 66.4 | 68.1      | -1.7              | 2.89                  |
| 12                         | 57.3  | =<br>1.6  | ±<br>22,9  | =<br>-7.2 | =<br>1.6  | ±<br>-0.4 | ±<br>-1.6 | ±<br>-0.4 | ±<br>-2.8 | ±<br>-1.4 | =<br>0   | =<br>0   | =<br>-2.5 | ±<br>0   | ±<br>0   | 69.7 | 69.9      | -0.2              | 0.04                  |
| 13                         | 57.3  | =<br>1.6  | =<br>-22,9 | =<br>-7.2 | =<br>-1.6 | ±<br>-0.4 | ±<br>-1.6 | ±<br>-0.4 | ±<br>-2.8 | ±<br>-1.4 | =<br>0   | =<br>0   | =<br>-2.5 | =<br>0   | ±<br>0   | 33.6 | 32.5      | 1.1               | 1.21                  |
| 14                         | 57.3  | =<br>1.6  | =<br>-22,9 | ±<br>7.2  | =<br>1.6  | ±<br>-0.4 | ±<br>-1.6 | ±<br>-0.4 | ±<br>-2.8 | ±<br>-1.4 | =<br>0   | ±<br>0   | =<br>-2.5 | ±<br>0   | =<br>0   | 34.3 | 32.5      | 1.8               | 3.24                  |
| 15                         | 57.3  | =<br>1.6  | =<br>-22,9 | =<br>-7.2 | ±<br>-1.6 | ±<br>-0.4 | ±<br>-1.6 | ±<br>-0.4 | ±<br>-2.8 | ±<br>-1.4 | ±<br>0   | =<br>0   | ±<br>2.5  | =<br>0   | =<br>0   | 23.8 | 23.1      | -6.7              | 0.49                  |
| 16                         | 57.3  | =<br>1.6  |            | =<br>-7.2 | =<br>-1.6 | ±<br>-0.4 | ±<br>-1.6 | ±<br>-0.4 | ±<br>-2.8 | ±<br>-1.4 | ±<br>0   | ±<br>0   | ±<br>2.5  | ±<br>0   | ±<br>0   | 25.8 | 26.3      | -0.5              | 0.25                  |
| 17                         | 57.3  | ±<br>-1.6 | 0          | 0         | 0         | ±<br>-0.4 | 0         | 0         | 0         | 0         | 0        | 0        | 0         | 0        | 0        | 55.6 | 55.3      | 0.3               | 0.09                  |
| 18                         | 57.3  | =<br>1.6  | 0          | 0         | 0         | ±<br>-0.4 | 0         | 0         | 0         | 0         | 0        | 0        | 0         | 0        | 0        | 58.2 | 58.5      | -0.3              | 0.09                  |

Продолжение табл. 2.25

| Точки<br>плану<br><i>и</i> | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$         | $x_3$         | $x_4$         | $x_1^2$ | $x_2^2$       | $x_3^2$       | $x_4^2$       | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_1x_4$ | $x_2x_3$ | $x_2x_4$ | $x_3x_4$ | $y$      | $\hat{y}$ | $\bar{y} - \hat{y}$ | $(y - \hat{y})^2$ |
|----------------------------|-------|-------|---------------|---------------|---------------|---------|---------------|---------------|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|---------------------|-------------------|
| 1                          | 2     | 3     | 4             | 5             | 6             | 7       | 8             | 9             | 10            | 11       | 12       | 13       | 14       | 15       | 16       | 17       | 18        | 19                  | 20                |
| 19                         | 53.7  | 0     | $\pm$<br>22,9 | 0             | 0             | 0       | $\pm$<br>-1.6 | 0             | 0             | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 77.<br>8 | 78.<br>6  | -0.8                | 0.64              |
| 20                         | 53.7  | 0     | $=$<br>-22,9  | 0             | 0             | 0       | $\pm$<br>-1.6 | 0             | 0             | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 33.<br>6 | 32.<br>8  | 0.8                 | 0.64              |
| 21                         | 53.7  | 0     | 0             | $\pm$<br>7..2 | 0             | 0       | 0             | $\pm$<br>-0.4 | 0             | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 65.<br>7 | 64.<br>1  | 1.6                 | 2.56              |
| 22                         | 53.7  | 0     | 0             | $=$<br>-7..2  | 0             | 0       | 0             | $\pm$<br>-0.4 | 0             | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 48.<br>0 | 49.<br>7  | -1.7                | 2.89              |
| 23                         | 53.7  | 0     | 0             | 0             | $\pm$<br>-1.6 | 0       | 0             | 0             | $\pm$<br>-2.8 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 52.<br>8 | 52.<br>9  | -0.1                | 0.01              |
| 24                         | 53.7  | 0     | 0             | 0             | $=$<br>1.6    | 0       | 0             | 0             | $\pm$<br>-2.8 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 56.<br>2 | 56.<br>1  | 0.1                 | 0.01              |



$$\text{Позначивши} \quad b_2 + b_{12}x_1 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = L$$

$$b_0 + b_1x_1 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{11}x_1^2 + b_{33}x_3^2 + \\ + b_{44}x_4^2 + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{34}x_3x_4 - y = C$$

рівняння (2.62) вирішуємо відносно  $x_2$ :

$$x_2 = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 + 4b_{22} \cdot C}}{2b_{22}} \quad (2.63)$$

Для обчислення  $x_2$  за формулою (2.63) використовуємо кодовані значення  $x_1, x_3$  і  $x_4$ :

$$x_1 = \frac{B - 190}{30}; \quad x_3 = \frac{R_u - 58,75}{9,35}; \quad x_4 = \frac{D - 0,25}{0,25}.$$

Потім переходимо до натуральних значень Ц/В:

$$Ц / В = 2,5 + x_2 \quad (2.64)$$

Наприклад, для бетону міцністю  $R_6 = 40$  МПа ( $B = 180$  кг/м<sup>3</sup>;  $R_u = 50$  МПа;  $D = 0$ )  $x_1, x_3$  і  $x_4$  будуть становити:

$$x_1 = \frac{180 - 190}{30} = -0,33; \quad x_3 = \frac{50 - 58,75}{9,35} = -0,94;$$

$$x_4 = \frac{0 - 0,25}{0,25} = -1.$$

Знаходимо:

$$L = 22,9 + (-1,4)(-0,33) + 2,5(-0,94) + 0(1) = \\ = 22,9 + 0,46 - 2,35 + 0 = 21,01$$

$$C = 57,3 + (-1,6)(-0,33) + 7,2(-0,94) + (-1,6)(-1) + 0(-0,33)^2 + \\ + 0(-0,94)^2 + (-2,8)(-1)^2 + 0(-0,33)(-0,94) + 0(-0,33)(-1) + \\ + 0(-0,94)(-1) - 40 = 57,3 + 0,53 - 6,77 + 1,6 - 2,8 - 40 = 9,86$$

Коефіцієнт  $b_{22} = -1,6$  для  $x_2^2$  приймаємо з табл. 2.24:



$$x_2 = \frac{-21,01 + \sqrt{(21,02)^2 - 4(-1,6)9,86}}{2(-1,6)} = \frac{-21,01 \pm \sqrt{441,42 + 63,1}}{-3,2}$$
$$= \frac{-21,01 \pm \sqrt{504,52}}{-3,2} = \frac{-21,01 \pm 22,46}{-3,2};$$
$$x_2' = \frac{-21,01 - 22,46}{-3,2} = \frac{-43,47}{-3,2} = 13,59;$$

$$x_2'' = \frac{-21,01 + 22,46}{-3,2} = \frac{1,45}{-3,2} = -0,453.$$

Вибираємо  $x_2'' = -0,453$ , (при  $x_2' = 13,59$   $\ddot{O} / \hat{A} \geq 4$ ).

Ц/В визначаємо за формулою (2.64):

$$Ц / В = 2,5 - 0,453 \cdot 1 = 2,047.$$

При  $V=180 \text{ кг/м}^3$  витрата цементу складе:

$$Ц = B \cdot V / Ц = 180 \cdot 2,047 = 368 \text{ кг/м}^3$$

Аналогічно знаходимо Ц/В при інших поєднаннях технологічних факторів. Так, наприклад:

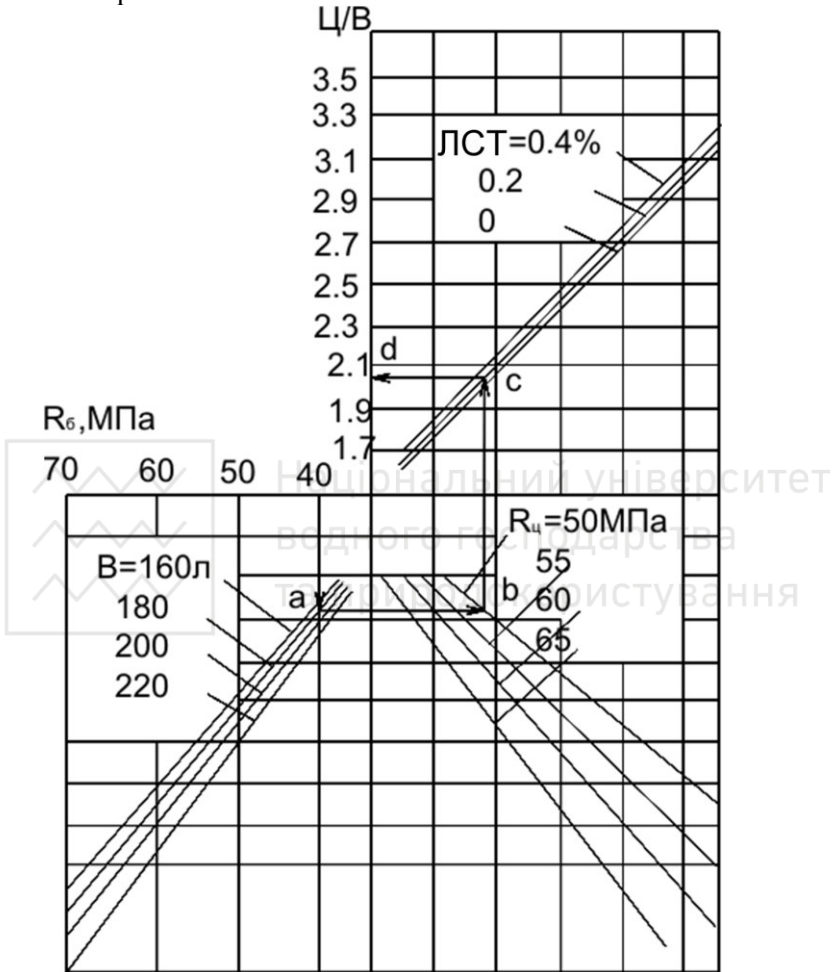
при  $R_6=40 \text{ МПа}$ ;  $V=165 \text{ кг/м}^3$ ;  $R_{ц}=50 \text{ МПа}$ ;  $D=0,25 \%$ ;  
 $Ц/В=1,972$ ;

при  $R_6=60 \text{ МПа}$ ;  $V=190 \text{ кг/м}^3$ ;  $R_{ц}=55 \text{ МПа}$ ;  $D=0$ ;  $Ц/В=2,81$  і т.д.

На основі отриманих даних будуємо номограму (рис. 2.6), за допомогою якої в процесі виробництва при зміні технологічних факторів можна уточнювати значення Ц/В і коректувати склад бетону. Наприклад, для бетону марки М400 при  $V = 180 \text{ кг/м}^3$  (точка а)  $R_{ц} = 50 \text{ МПа}$  (точка b),  $D = 0,2 \%$  (точка с)  $Ц/В = 2,05$  (точка d). Для побудови даної номограми необхідно зробити досить багато розрахунків. Тому всі



розрахунки рекомендується проводити за допомогою комп'ютера.



**Рис. 2.6.** Номограма визначення цементно-водного відношення для бетону різних марок у залежності від активності цементу, витрати води і якості добавки ЛСТ





## 2.4. Планування експериментів на діаграмах "склад-властивість"

При плануванні експерименту на діаграмах "склад-властивість" враховується, що компоненти не є незалежними змінними ( $\sum_i^n x_i = 1$ ). Тому використовуються спеціальні канонізовані (приведені) поліноми :

$$y = \sum_i^m b_i x_i + \sum_{i < k} b_{ik} x_i x_k . \quad (2.65)$$

Кількість  $b_i$ -коефіцієнтів такого полінома дорівнює  $C_{m+1}^n$ .

Діаграми "склад-властивість", як і діаграми стану, наприклад, силікатних систем, прийнято представляти в координатах симплекса, тобто опуклої фігури, утвореної множиною  $(m+1)$  незалежних точок в  $m$ -мірному просторі, що має мінімальну кількість вершин. На площині це - трикутник, в 3-мірному просторі - тетраедр і т.д. Задача планування експерименту зводиться до того, щоб оптимально розташувати експериментальні точки на симплексі.

Шеффе запропонував плани, у яких рівномірно по симплексу розташовується задана кількість точок (симплексні решітки) (рис. 2.7). Координати експериментальних точок являють собою комбінації

$$x_i = 0, 1/n, 2/n, \dots, 1 \dots$$

Нижче наведені формули для розрахунку коефіцієнтів поліномів степеня  $r$   $q$ -компонентних матеріалів.

а) поліном другого порядку:

$$y = \sum_{1 \leq i \leq q} b_i x_i + \sum_{1 \leq i < k \leq q} b_{ik} x_i x_k \quad \text{при } r=2 \quad (2.66)$$

$$b_i = y_i; \quad b_{ik} = 4y_{ik} - 2y_i - 2y_k;$$

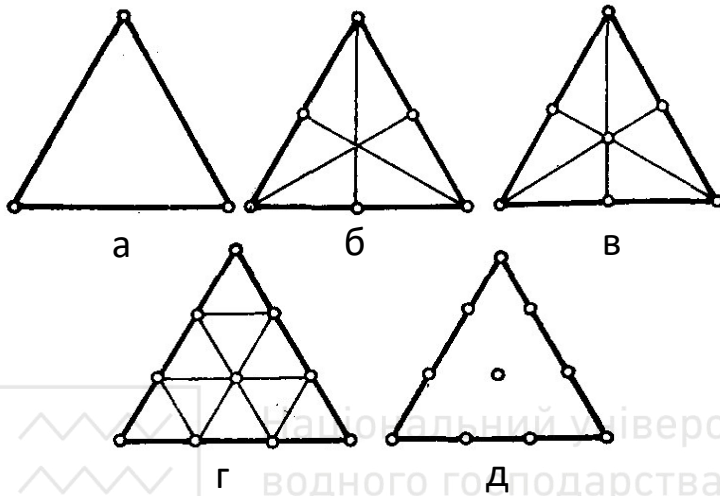
б) поліном неповного третього порядку:

$$y = \sum_{1 \leq i \leq q} b_i x_i + \sum_{1 \leq i < k \leq q} b_{ik} x_i x_k + \sum_{1 \leq i < k < l \leq q} b_{ikl} x_i x_k x_l \quad \text{при } r=3^* ; \quad (2.67)$$

$$b_i = y_i; \quad b_{ik} = 4y_{ik} - 2y_i - 2y_k;$$



$$b_{ikl} = 27y_{ikl} - 12(y_i + y_{il} + y_{kl}) + 3(y_i + y_k + y_l);$$



**Рис. 2.7.** Симплекс-решітчаті плани різних порядків (а- першого; б- другого; в- неповного третього; г- третього; д- третього (D-оптимальний))

б) поліном третього порядку:

$$y = \sum_{1 \leq i \leq q} b_i x_i + \sum_{1 \leq i < k \leq q} b_{ik} x_i x_k + \sum_{1 \leq i < k \leq q} c_{ik} x_i x_k (x_i - x_k) + \sum_{1 \leq l < k < i \leq q} b_{ikl} x_i x_k x_l$$

при  $q=3$ ;

(2.68)

$$b_i = y_i; \quad b_{ik} = \frac{9}{4} (y_{iik} + y_{ikk} y_i - y_k);$$

$$c_{ik} = \frac{9}{4} (3y_{iik} - 3y_{ikk} y_i - y_k);$$

$$b_{ikl} = 27y_{ikl} - \frac{27}{4} (y_{ikl} + y_{ikk} + y_{iil} + y_{ill} + y_{kkl} + y_{yll}) + \frac{9}{2} (y_i + y_j + y_k);$$



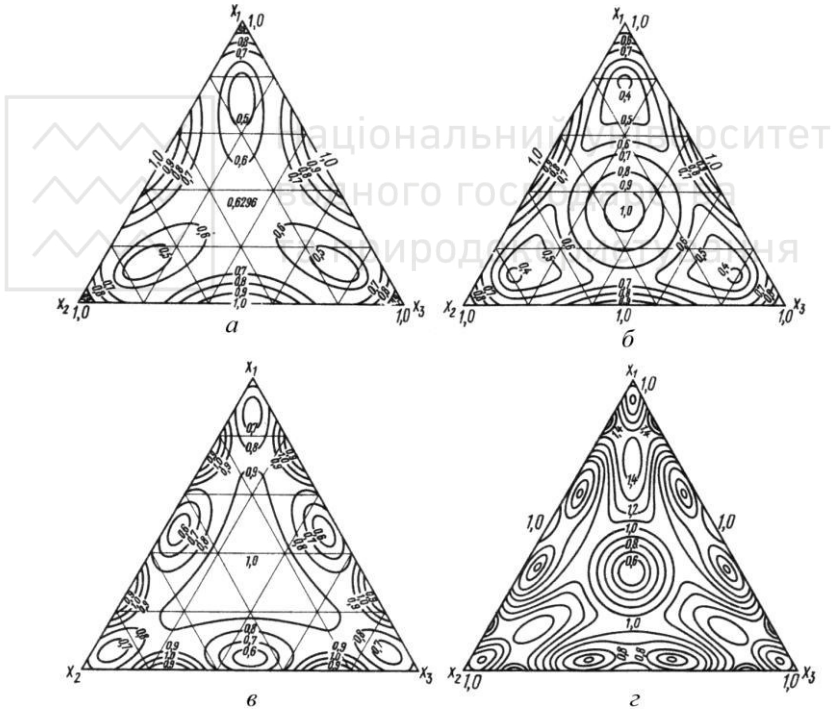
Позначення:  $Y_i$ ,  $Y_{ikl}$ ,  $Y_{ik}$  – значення досліджуваної властивості для складу, що відповідає вершині симплекса, центру симплекса, середині ребра симплекса відповідно.

Адекватність рівняння перевіряється за t-критерієм в контрольній точці:

$$t = \frac{(y - \bar{y})\sqrt{n}}{s\sqrt{n + \xi}}, \quad (2.69)$$

де  $\bar{y}$  – середнє значення властивості за  $n$  дослідями у контрольній точці з дисперсією  $S^2$ ;

$\xi$  – константа (рис. 2.8)



**Рис.2.8.** Проекції  $\xi$  для поліномів планів Шеффе  
а - 2-го порядку; б - неповного 3-го порядку;  
в - 3-го порядку -; г - 4-го порядку.



Для поліномів другого порядку:

$$S_{\{y\}}^2 = S^2 \left[ \sum_{1 \leq i \leq q} \frac{a_i^2}{n_i} + \sum_{1 \leq i < k \leq q} \frac{a_{ik}^2}{n_{ik}} \right] \text{ при } r = 2; \quad (2.70)$$

$$a_i = x_i (2x_i - 1); a_{ik} = 4x_i x_k.$$

Для поліномів неповного третього порядку:

$$S_{\{y\}}^2 = S^2 \left[ \sum_{1 \leq i \leq q} \frac{b_i^2}{n_i} + \sum_{1 \leq i < k \leq q} \frac{b_{ik}^2}{n_{ik}} + \sum_{1 \leq i < k < l \leq q} \frac{b_{ikl}^2}{n_{ikl}} \right] \text{ при } r = 3; \quad (2.71)$$

$$b_i = \frac{1}{2} x_i (6x_i^2 - 2x_i + 1 - 3 \sum_{k=1}^q x_k^2);$$

$$b_{ik} = 4x_i x_k (3x_i + 3x_k - 2); b_{ikl} = 27x_i x_k x_l.$$

Для поліномів третього порядку:

$$S_{\{y\}}^2 = S^2 \left[ \sum_{1 \leq i \leq q} \frac{c_i^2}{n_i} + \sum_{1 \leq i < k \leq q} \frac{c_{iik}^2}{n_{iik}} + \sum_{1 \leq i < k \leq q} \frac{c_{ikk}^2}{n_{ikk}} + \sum_{1 \leq i < k < l \leq q} \frac{c_{ikl}^2}{n_{ikl}} \right] \text{ при } r=3; \quad (2.72)$$

$$c_i = \frac{1}{2} x_i (3x_i - 1)(3x_i - 2); c_{iik} = \frac{9}{2} x_i x_k (3x_i - 1);$$

$$c_{ikk} = \frac{9}{2} x_i x_k (3x_k - 1); c_{ikl} = 27x_i x_k x_l.$$

Плани Шеффе 2-го і неповного 3-го порядку є D-оптимальними. Координати точок D-оптимального плану 3-го порядку, розташованих у центрі і у вершинах симплекса, ті ж, що й у плані Шеффе. Точки, що лежать на сторонах симплекса, мають координати  $x_g=0.2764$  й  $x_{g+1}=1-x_g=0.7236$  (для плану Шеффе  $x_i=0,3333$ ;  $x_k=0,6667$  (рис. 2.7).

Для D-оптимального плану 4-го порядку точки на сторонах симплекса  $x_g=0.1727$ ,  $x_{g+1}=0,5$ ,  $x_{g+2}=0.8246$ . Точки в центрі



симплекса  $x_{g+3}=x_{g+4}=0,2165$ ,  $x_{g+5}=1-x_{g+3}-x_{g+4}=0,567$ .

Коефіцієнти канонізованого полінома для D-оптимальних планів при  $r = 3$  розраховують за формулами :

$$b_i = y_i; \quad b_{ik} = \frac{5}{2}(-y_i - y_k + y_{iik} + y_{ikk}); \quad (2.73)$$

$$c_{i,k} = \frac{5}{2}[-y_i + y_k + 5(y_{iik} - y_{ikk})]; \quad (2.74)$$

$$b_{ikl} = 27y_{ikl} + 6(y_i + y_k + y_l) - \frac{15}{2}(y_{iik} + y_{iil} + y_{ill} + y_{kkl} + y_{kll}). \quad (2.75)$$

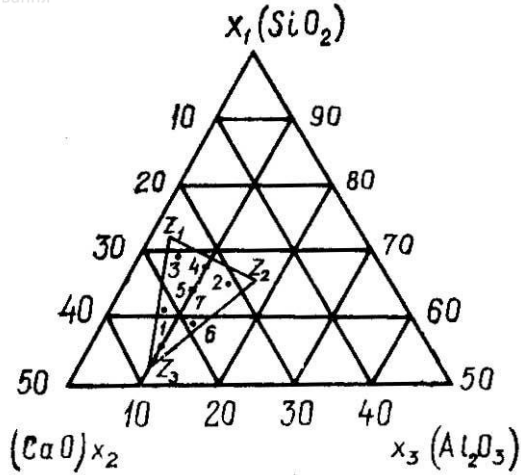
Дисперсія в точках плану максимальна і дорівнює дисперсії відтворюваності. В інших точках плану помилки менше  $S^2_{\{y\}} = S^2\xi$ .

Загальним недоліком розглянутих вище планів є те, що більшість експериментальних точок розташовується по периферії симплексу, і інформація, таким чином, нерівномірно розподіляється в досліджуваній області. Цього недоліку позбавлені плани з мінімізацією систематичного зсуву (плани Дреппера-Лоуренса).

Якщо необхідно досліджувати локальну ділянку діаграми склад- властивості, її поміщають всередину локального симплекса (рис. 2.9). Щоб перейти до вихідних компонентів ( $x_1, x_2, x_3 \dots$ ) від псевдокомпонентів ( $z_1, z_2, z_3, \dots$ ) для складу (M), користуються формулою:

$$x_i = x_{il} + p_2(x_{i2} - x_{i1}) + p_3((x_{i3} - x_{i1}) + \dots + p_q((x_{iq} - x_{i1})),$$

де  $x_{ik}$  – вміст і-го компонента у вершині  $z_k$ ,  $p_2, \dots, p_q$  – вміст псевдокомпонентів.



**Рис. 2.9.** Планування експерименту при дослідженні локальної ділянки діаграми "склад-властивість"

Спільну дію на властивості матеріалів сумішевих (взаємозалежних) факторів і технологічних (взаємонезалежних) факторів можна оцінити побудовою діаграм "склад-технологія-властивість". Для опису систем "склад-технологія-властивість" використовуються моделі-добутки (добуток приведеного полінома сумішевих факторів на поліном від технологічного фактора).

З цією метою в кожній точці плану на симплексі реалізується додатково, наприклад, трирівневий план (чи навпаки). Якщо, наприклад, модель представлена добутком приведеного полінома другого порядку від трьох сумішевих факторів "v" і технологічного фактора "x" її можна записати у вигляді:

$$y = (b_{0A_1} + b_{1A_1}x + b_{11A_1}x^2)v_1 + (b_{0A_2} + b_{1A_2}x + b_{11A_2}x^2)v_2 + \dots + (b_{0A_{23}} + b_{1A_{23}}x + b_{11A_{23}}x^2)v_2v_3, \quad (2.76)$$

Фіксуючи "x" в моделі можна отримати для різних значень технологічного фактора набір моделей "склад-властивість".



Зафіксувавши фактори  $v_i$  можна отримати звичайний поліном від варійованого технологічного фактора.

**Приклад 2.4.1.** *Визначити вплив зернового складу наповнювача (часток менше 0,315 мм) на міцність вібропресованого бетону при стиску ( $R_{cm}$ ).*

Дослідження проводили з використанням симплекс-решітчастого плану Шеффе “суміш-властивість” для побудови поліноміальної моделі неповного третього порядку (Додатки, табл. 11). Наповнювач був розділений на три фракції:  $v_1 - 0,315...0,16$  мм;  $v_2 - 0,16...0,08$  мм;  $v_3 - <0,08$  мм. Результати експериментів наведені в табл. 2.26. Склад бетону: Ц (цемент) = 300 кг/м<sup>3</sup>; З (заповнювач) = 1750 кг/м<sup>3</sup>; В/Ц=0,52...0,55 Вміст наповнювача – 40% від маси заповнювача. Параметри вібропресування: тиск – 0,1 МПа, амплітуда – 0,5 мм, частота – 50 Гц, тривалість – 15 с.

Таблиця 2.26  
Вплив зернового складу наповнювача на міцність  
вібропресованого бетону

| Точки плану | Зерновий склад наповнювача |       |       | $Y_n$     | $R_{ст},$<br>МПа |
|-------------|----------------------------|-------|-------|-----------|------------------|
|             | $v_1$                      | $v_2$ | $v_3$ |           |                  |
| 1.          | 1                          | 0     | 0     | $y_1$     | 28,9             |
| 2.          | 0                          | 1     | 0     | $y_2$     | 36,9             |
| 3.          | 0                          | 0     | 1     | $y_3$     | 39,2             |
| 4.          | 0,5                        | 0,5   | 0     | $y_{12}$  | 32,9             |
| 5.          | 0,5                        | 0     | 0,5   | $y_{13}$  | 36,4             |
| 6.          | 0                          | 0,5   | 0,5   | $y_{23}$  | 37,1             |
| 7.          | 0,333                      | 0,333 | 0,333 | $y_{123}$ | 36,0             |

Використовуючи експериментальні дані розрахуємо коефіцієнти полінома неповного третього порядку за формулами (2.68):

$$b_1 = 28,9;$$

$$b_2 = 36,9;$$

$$b_i = 39,2.$$



$$b_{12} = 4y_{12} - 2y_1 - 2y_2 = 4 \cdot 32,9 - 2 \cdot 28,9 - 2 \cdot 36,9 = 0;$$

$$b_{13} = 4y_{13} - 2y_1 - 2y_3 = 4 \cdot 36,4 - 2 \cdot 28,9 - 2 \cdot 39,2 = 9,4;$$

$$b_{23} = 4y_{23} - 2y_2 - 2y_3 = 4 \cdot 37,1 - 2 \cdot 36,9 - 2 \cdot 39,2 = -3,8.$$

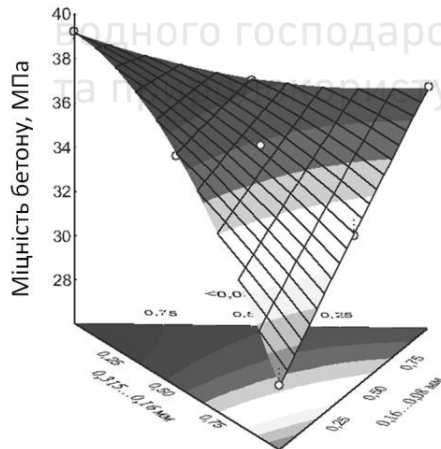
$$\begin{aligned} b_{123} &= 27y_{123} - 12(y_1 + y_{13} + y_{23}) + 3(y_1 + y_2 + y_3) = \\ &= 27 \cdot 36,0 - 12 \cdot (28,9 + 36,4 + 37,1) + 3(28,9 + 36,9 + 39,2) = 10,2. \end{aligned}$$

У результаті розрахунку отримуємо рівняння регресії:

$$\begin{aligned} R_{cm} &= 28,9v_1 + 36,9v_2 + 39,2v_3 + \\ &+ 9,4v_1v_3 - 3,8v_2v_3 + 10,2v_1v_2v_3 \end{aligned} \quad (2.77)$$

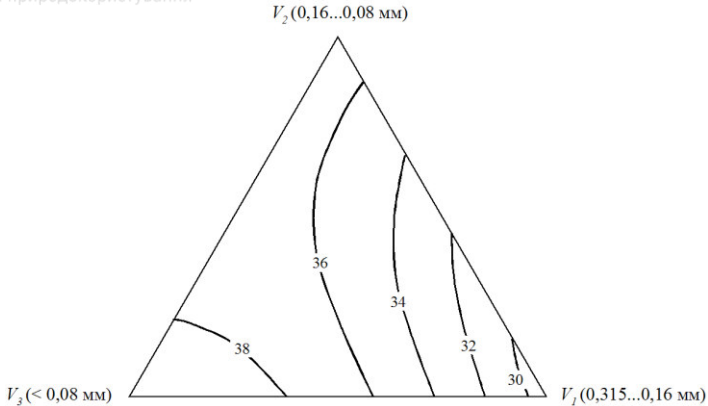
Перевірку адекватності отриманого рівняння проводимо за допомогою реалізації експерименту в додаткових точках.

На основі рівняння, за допомогою комп'ютерних програм будемо поверхню відгуку “зерновий склад–міцність” (рис. 2.10) і ізолінії міцності на сумішевому трикутнику (рис. 2.11).



**Рис.2.10.** Поверхня відгуку вихідного параметра (міцності при стиску вібропресованого бетону ( $R_{cm}$ , МПа)).





**Рис. 2.11.** Ізолінії міцності при стиску вібропресованого бетону ( $R_{ст}$ , МПа) залежно від вмісту фракцій наповнювача

Таким чином, зростання міцності вібропресованого бетону спостерігається зі збільшенням вмісту фракції  $<0,08$  мм разом із фракцією  $0,16...0,08$  мм у наповнювачі.

**Приклад 2.4.2.** Побудувати модель міцності на стиск у віці  $I$  доба гіпсошлакоцементної суміші з добавками суперпластифікатора й редиспергованого полімеру, для визначення оптимального складу сухої будівельної суміші.

Для розв'язання задачі використаємо план “суміш-технологія-властивість”.

Приймаємо наступні фактори:

а) сумішеві (взаємозалежні):

- $v_1$  – вміст гіпсу (55%...75%);
- $v_2$  – вміст меленого доменного шлаку (10%...30%);
- $v_3$  – вміст портландцементу (15%...35%);

б) незалежні:

- $x_1$  – вміст суперпластифікатора С-3 (0...1,2%);
- $x_2$  – вміст редиспергованого полімеру полівінілацетату Mowillith (0...2%)

Використаємо план “суміш-технологія властивість” для 5-ти факторів.

Результати експерименту наведені в табл. 2.27.



Таблиця 2.27

Матриця планування і результати експериментів

| №  | Кодовані значення факторів |                |                |                |                | Натуральні значення факторів |         |           |      |        | R <sub>ср</sub> , МПа |
|----|----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|------------------------------|---------|-----------|------|--------|-----------------------|
|    | v <sub>1</sub>             | v <sub>2</sub> | v <sub>3</sub> | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | Гіпс, %                      | Шлак, % | Цемент, % | τ, % | C-3, % |                       |
| 1  | 1                          | 0              | 0              | -1             | -1             | 75                           | 10      | 15        | 0    | 0      | 4,2                   |
| 2  | 1                          | 0              | 0              | +1             | +1             | 75                           | 10      | 15        | 1,2  | 2      | 5,1                   |
| 3  | 0                          | 1              | 0              | -1             | -1             | 55                           | 30      | 15        | 0    | 0      | 4,9                   |
| 4  | 0                          | 1              | 0              | +1             | -1             | 55                           | 30      | 15        | 1,2  | 0      | 4,8                   |
| 5  | 0                          | 1              | 0              | +1             | +1             | 55                           | 30      | 15        | 1,2  | 2      | 3,6                   |
| 6  | 0                          | 1              | 0              | -1             | +1             | 55                           | 30      | 15        | 0    | 2      | 4,1                   |
| 7  | 0                          | 0              | 1              | -1             | -1             | 55                           | 10      | 35        | 0    | 0      | 4,6                   |
| 8  | 0                          | 0              | 1              | +1             | 0              | 55                           | 10      | 35        | 1,2  | 1      | 4,4                   |
| 9  | 0                          | 0              | 1              | -1             | +1             | 55                           | 10      | 35        | 0    | 2      | 4,0                   |
| 10 | 0,5                        | 0,5            | 0              | 0              | -1             | 65                           | 20      | 15        | 0,6  | 0      | 5,1                   |
| 11 | 0,8                        | 0,2            | 0              | -1             | +1             | 71                           | 14      | 15        | 0    | 2      | 3,9                   |
| 12 | 0,3                        | 0              | 0,7            | +1             | +1             | 61                           | 10      | 29        | 1,2  | 2      | 5,4                   |
| 13 | 0,5                        | 0              | 0,5            | +1             | -1             | 65                           | 10      | 25        | 1,2  | 0      | 6,3                   |
| 14 | 0,6                        | 0              | 0,4            | 0              | 0              | 67                           | 10      | 23        | 0,6  | 1      | 4,3                   |
| 15 | 0                          | 0,4            | 0,6            | 0              | -1             | 55                           | 18      | 27        | 0,6  | 0      | 5,3                   |
| 16 | 0                          | 0,5            | 0,5            | -1             | 0              | 55                           | 20      | 25        | 0    | 1      | 4,4                   |

Форма рівняння регресії при використанні даного плану має вигляд:

$$\begin{aligned}
 y = & A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 + A_{12} v_1 v_2 + A_{13} v_1 v_3 + A_{23} v_2 v_3 + \\
 & (Ab)_{11} v_1 x_1 + (Ab)_{12} v_1 x_2 + (Ab)_{21} v_2 x_1 + (Ab)_{22} v_2 x_2 + \\
 & (Ab)_{31} v_3 x_1 + (Ab)_{32} v_3 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 \quad (2.78)
 \end{aligned}$$

Розрахунок коефіцієнтів рівняння проводиться на основі обробки отриманих даних (табл. 2.27), методом найменших квадратів. Значення коефіцієнта дорівнює сумі добутоків значень вихідних параметрів. Останні розраховуються за формулою 2.68 залежно від степеня полінома.

$$\begin{aligned}
 A_1 = & 4,2 \cdot 0,36 + 5,1 \cdot 0,55 + 4,9 \cdot (-0,129) + 4,8 \cdot 0,062 + 3,6 \cdot (-0,11) + \\
 & + 4,1 \cdot 0,17 + 4,6 \cdot (-0,227) + 4,4 \cdot 0,337 + 4,0 \cdot 0,093 + 5,1 \cdot 0,095 + \\
 & + 3,9 \cdot (-0,148) + 5,4 \cdot 0,554 + 6,3 \cdot (+0,285) + 4,3 \cdot 0,782 + 5,3 \cdot 0,124 + \\
 & + 4,4 \cdot (-0,118) = 3,09
 \end{aligned}$$



Таблиця 2.28

Матриця параметрів  $A_i$  і  $A_{ij}$  для розрахунку коефіцієнтів моделі “суміш-технологія-властивість”

| $A_1$  | $A_2$  | $A_3$  | $A_{12}$ | $A_{13}$ | $A_{23}$ |
|--------|--------|--------|----------|----------|----------|
| 0,36   | -0,051 | -0,054 | -1,439   | -0,807   | 0,221    |
| 0,55   | -0,059 | 0,049  | -0,932   | -1,456   | -0,094   |
| -0,129 | 0,197  | -0,061 | -0,392   | 0,409    | -0,783   |
| 0,062  | 0,219  | -0,045 | -0,903   | -0,064   | -0,372   |
| -0,11  | 0,225  | -0,04  | 0,456    | 0,328    | 0,106    |
| 0,17   | 0,335  | 0,144  | -1,132   | -0,65    | -0,788   |
| -0,227 | -0,122 | 0,145  | 0,663    | 0,334    | -1,027   |
| 0,337  | 0,3    | 0,655  | -0,16    | -1,937   | -1,107   |
| 0,093  | -0,019 | 0,282  | -0,675   | -0,712   | -0,413   |
| 0,095  | 0,142  | 0,127  | 3,127    | -0,445   | -0,194   |
| -0,148 | -0,222 | -0,198 | 1,365    | 0,695    | 0,302    |
| 0,554  | -0,382 | -0,237 | 0,918    | 1,795    | 0,887    |
| -0,285 | -0,425 | -0,381 | 0,62     | 1,334    | 0,58     |
| 0,782  | 0,773  | -0,604 | -1,45    | 1,206    | -1,381   |
| 0,124  | 0,081  | 0,269  | -1,677   | -0,761   | 1,575    |
| -0,118 | -0,078 | -0,258 | 1,61     | 0,731    | 2,488    |

Таблиця 2.28 а)

Матриця параметрів  $(Ab)_{ii}$  для розрахунку коефіцієнтів моделі “суміш-технологія-властивість”

| $(Ab)_{11}$ | $(Ab)_{12}$ | $(Ab)_{21}$ | $(Ab)_{22}$ | $(Ab)_{31}$ | $(Ab)_{32}$ |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| -0,202      | -0,294      | 0           | -0,001      | 0,037       | 0,087       |
| 0,397       | 0,104       | 0           | 0           | -0,01       | 0,011       |
| -0,08       | 0,062       | -0,249      | -0,245      | -0,008      | 0,007       |
| -0,025      | 0,045       | 0,249       | -0,254      | -0,015      | -0,03       |
| -0,011      | -0,005      | 0,251       | 0,254       | -0,019      | 0,026       |
| 0,084       | -0,047      | -0,251      | 0,246       | 0,059       | -0,02       |
| -0,059      | 0,07        | -0,001      | -0,003      | -0,233      | -0,354      |
| 0,028       | -0,032      | 0           | 0,001       | 0,354       | -0,051      |
| 0,066       | -0,078      | 0,001       | 0,003       | -0,199      | 0,345       |



Продовження табл.. 2.28 а)

|             |             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $(Ab)_{11}$ | $(Ab)_{12}$ | $(Ab)_{21}$ | $(Ab)_{22}$ | $(Ab)_{31}$ | $(Ab)_{32}$ |
| 0,256       | -0,252      | 0           | -0,001      | -0,015      | 0,065       |
| -0,401      | 0,393       | 0,001       | 0,002       | 0,023       | -0,102      |

Таблиця 2.28 б)

Матриця параметрів  $b_{ii}$  для розрахунку коефіцієнтів  
моделі “суміш-технологія-властивість”

| $b_{12}$ | $b_{11}$ | $b_{22}$ |
|----------|----------|----------|
| 0,04     | 0,026    | 0,066    |
| 0,007    | -0,037   | -0,022   |
| 0,104    | 0,036    | 0,014    |
| -0,118   | 0,09     | -0,057   |
| 0,115    | 0,029    | -0,01    |
| -0,111   | -0,173   | 0,091    |
| 0,028    | 0,107    | 0,017    |
| -0,031   | -0,016   | -0,285   |
| -0,094   | -0,104   | 0,121    |
| 0,039    | -0,103   | -0,038   |
| -0,001   | 0,162    | 0,059    |
| 0,144    | 0,124    | 0,261    |
| -0,118   | 0,31     | 0,113    |
| -0,004   | -0,431   | -0,349   |
| -0,036   | -0,466   | 0,384    |
| 0,034    | 0,447    | -0,368   |

Таким чином, отримуємо математичну модель міцності розчину:

$$\begin{aligned} R_{cm} = & 3,09v_1 + 1,96v_2 + 2,4v_3 - 4,67v_1v_2 + 0,16v_1v_3 + \\ & + 3,74v_2v_3 + 0,1v_1x_1 - 0,28v_1x_2 + 0,3v_2x_1 - 0,47v_2x_2 + \\ & + 0,52v_3x_1 - 0,58v_3x_2 - 0,56x_1x_2 + 0,05x_1^2 + 1,7x_2^2 \end{aligned} \quad (2.79)$$

Для аналізу отриманої моделі будується діаграма, що поєднує “сумішеві” (взаємозалежні) і “технологічні” (незалежні)



фактори. Діаграма може являти собою факторний квадрат, у вершинах і центрі якого розміщені відповідні сумішеві трикутники. Діаграма може також будуватися як сумішевий трикутник, з розміщеними в кожній його базовій точці відповідними факторними квадратами.

Для побудови факторного квадратного рівняння (2.79) приводимо до виду моделі від факторів  $x_1$  і  $x_2$  задаючись значеннями  $v_1, v_2$  і  $v_3$ .

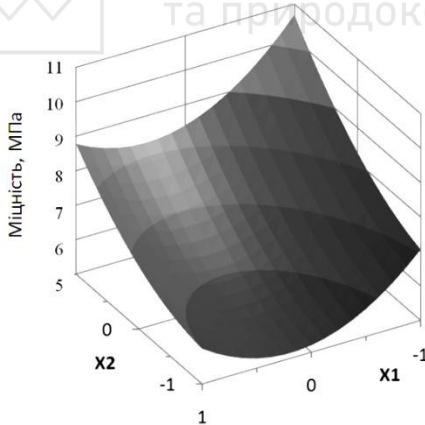
При  $v_1=v_2=v_3=0,333$  рівняння (2.79) приймає вид:

$$R_{cm} = 6,1 + 0,8x_1 - 0,37x_2 + 0,3x_1^2 + 0,67x_2^2 - 0,11x_1x_2 \quad (2.80)$$

Зображення функції відгуку за рівнянням (2.80) наведено на рис. 2.12.

Для побудови трикутних діаграм, задаючись значеннями  $x_1$  і  $x_2$  у відповідних точках факторного квадрата, приводимо рівняння (2.79) до виду:

$$y = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + b_{12}v_1v_2 + b_{13}v_1v_3 + b_{23}v_2v_3 + b_0 \quad (2.81)$$



**Рис. 2.12.** Поверхня відгуку міцності за рівнянням (2.80).

Розрахункові значення коефіцієнтів у відповідних точках наведені в табл.2.29.



Таблиця 2.29

Коефіцієнти приведених рівнянь для побудови  
трикутних діаграм

| Кое-<br>фіці-<br>єнти | Значення коефіцієнтів при значенні факторів |                      |                       |                      |                     |                      |                       |                      |                       |
|-----------------------|---|----------------------|-----------------------|----------------------|---------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
|                       | $x_1=-1;$<br>$x_2=-1$                       | $x_1=0;$<br>$x_2=-1$ | $x_1=+1;$<br>$x_2=-1$ | $x_1=-1;$<br>$x_2=0$ | $x_1=0;$<br>$x_2=0$ | $x_1=+1;$<br>$x_2=0$ | $x_1=-1;$<br>$x_2=+1$ | $x_1=0;$<br>$x_2=+1$ | $x_1=+1;$<br>$x_2=+1$ |
| $b_1$                 | 7,92  | 10,09                | 12,26                 | 7,53                 | 9,70                | 11,87                | 7,13                  | 9,30                 | 11,48                 |
| $b_2$                 | 3,54  | 3,39                 | 3,25                  | 3,04                 | 2,90                | 2,75                 | 2,55                  | 2,40                 | 2,25                  |
| $b_3$                 | 3,57  | 3,96                 | 4,34                  | 3,33                 | 3,71                | 4,10                 | 3,09                  | 3,47                 | 3,86                  |
| $b_{12}$              | 1,69  | 1,69                 | 1,69                  | 1,69                 | 1,69                | 1,69                 | 1,69                  | 1,69                 | 1,69                  |
| $b_{13}$              | 2,47  | 2,47                 | 2,47                  | 2,47                 | 2,47                | 2,47                 | 2,47                  | 2,47                 | 2,47                  |
| $b_{23}$              | 2,72  | 2,72                 | 2,72                  | 2,72                 | 2,72                | 2,72                 | 2,72                  | 2,72                 | 2,72                  |
| $b_0$                 | 0,61  | 0,72                 | 0,82                  | 0,04                 | 0,04                | 0,04                 | 0,82                  | 0,72                 | 0,61                  |

Загальний вид діаграми типу “суміш-технологія-властивість” показаний на рис. 2.13.

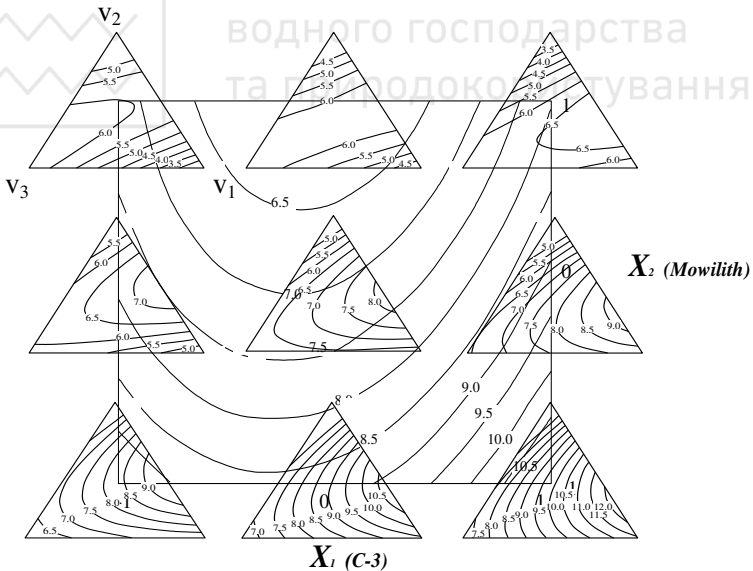


Рис.2.13. Діаграма міцності від взаємозалежних  
та незалежних змінних



Таким чином, досягти міцності композиції 10 МПа і більше можна при максимальній кількості суперпластифікатора (0,6...1,2%), мінімумі добавки Mowillith, а також наступному вмісті компонентів: гіпс - 60...70%; шлак - 15...20%; цемент - 20...25%.

## 2.5. Аналіз рівнянь регресії й пошук оптимальних рішень. Загальна схема аналізу рівнянь

Найбільше легко піддаються аналізу лінійні моделі. Знак при коефіцієнті показує характер впливу відповідного фактору: знак "+" свідчить про те, що зі збільшенням значення фактора величина відповідного вихідного параметра збільшується, а знак "-" – про те, що вона спадає. Чим більше значення коефіцієнта, тим сильніший вплив фактора. Якщо необхідно отримати максимальне значення вихідного параметра, значення всіх факторів, коефіцієнти  $b_i$  яких мають знак "+" слід приймати максимальними, а значення факторів, коефіцієнти  $b_i$  яких мають знак "-" – мінімальними. Абсолютні значення коефіцієнтів рівнянь регресії збільшують зі збільшенням інтервалів варіювання.

У неповних квадратичних рівняннях регресії знак перед коефіцієнтом лінійного члена відповідає напрямку зміни вихідного параметра за умови, що інші фактори прийняті на основному рівні. Знак "+" перед коефіцієнтом взаємодії свідчить про те, що збільшення вихідного параметра можливе тільки, якщо взаємодіючі фактори перебувають одночасно на верхньому або нижньому рівні, а знак "-" – про те, що один фактор є бажаним на верхньому, а інший – на нижньому рівні.

У квадратичних рівняннях, прийнявши значення всіх факторів (за винятком одного) на основному рівні, рівняння регресії можна перетворити в параболу наступного виду:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + (b_1x_1)^2 \quad (2.82)$$

з екстремумом (максимумом або мінімумом) у точці  $x_{\text{ext}} = b_{12}b_{11}$ . Абсолютне значення коефіцієнта  $b_1$  відповідає швидкості зміни досліджуваного фактора  $x_i$ .

Двофакторна квадратична (повна) модель



$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{12} x_1 x_2 \quad (2.83)$$

залежно від значення коефіцієнтів  $b_i$ ,  $b_{ii}$ ,  $b_{ij}$  являє собою одну з поверхонь другого порядку – площина, параболічний циліндр, еліптичний або гіперболічний параболоїд.

Проектування поверхні  $\hat{y}$  на площину факторів  $x_1$  і  $x_2$  дозволяє отримати лінії рівного виходу (ізолінії), у всіх точках яких вихід  $\hat{y}$  має постійне значення, незалежне від координат  $x_1$  і  $x_2$ .

Для побудови ізоліній двовимірних моделей (або перерізів багатомірних моделей) на факторній площині  $\{x_1, x_2\}$  можна використати наступний прийом:

вибираються кілька перерізів факторного простору (звичайно досить шести перерізів при  $x_j$  ( $j=1,2$ ), що послідовно прирівнюються до  $\pm 1$  або 0;

розраховується (після підстановки одного  $x_j=0, \pm 1$  і зведення подібних) рівняння кожного перерізу у вигляді:

$$\hat{y} = b_0 + b_i x_i + b_{ii} x_i^2. \quad (2.84)$$

В.А. Вознесенський сформулював і методично розробив 10 типів задач, що можуть бути розв'язані індивідуально чи спільно на основі однієї поліноміальної моделі і дозволяють визначити :

1. Значення вихідного параметра ( $y$ ) для розташованої всередині області вивченого факторного простору точки з координатами, які відрізняються від точок плану експерименту (інтерполяційна задача) ;

2. Значення  $y$  для точки, розташованої поза область вивченого факторного простору (екстраполяційна задача);

3. Геометричну фігуру (поверхню відгуку), що описується моделлю (аналітико-геометрична задача);

4. Мінімально можливе значення  $y$  в зоні експерименту (мінімізація виходу  $y$ );

5. Максимально можливе значення  $y$  в зоні експерименту (максимізація виходу  $y$ );





6. Можливі співвідношення між значеннями факторів у зоні експерименту для необхідного рівня  $y$  (управління при фіксованому  $y$ );

7. Мінімальні значення факторів, що характеризують витрату ресурсів при заданому рівні якості об'єкта (мінімізація ресурсів  $x_i$  при фіксованому  $y$ );

8. Дані для побудови регульовальних діаграм для  $y$  при двох змінних і одному фіксованому факторах (управління  $y$  при двох змінних факторах);

9. Дані для побудови однофакторних моделей, що описують вплив кожного фактору на  $y$  (управління  $y$  при одному змінному факторі);

10. Ефект впливу кожного фактору на величину  $y$  (оцінка ролі факторів  $x_i$ ).

**Приклад 2.5.1.** Розв'язати основні типи задач, що виникають в процесі аналізу поліноміальної моделі міцності бетону.

$$y = 57,3 - 1,6x_1 + 22,9x_2 + 7,2x_3 - 1,6x_4 - 0,4x_1^2 - 1,6x_2^2 - 0,4x_3^2 - 2,8x_4^2 - 1,4x_1x_2 + 2,5x_2x_3. \quad (2.85)$$

Умови планування наведені в табл. 2.30.

Таблиця 2.30

Умови планування експерименту

| Фактори  |                | Рівні варіювання |       |      | Інтервал варіювання |
|--|----------------|------------------|-------|------|---------------------|
| натуральний вигляд   | Кодовий вигляд | -1               | 0     | +1   |                     |
| Вода (В), кг/м <sup>3</sup>                                      | $x_1$          | 160              | 190   | 220  | 30                  |
| Ц/В  | $x_2$          | 1,5              | 2,5   | 3,5  | 1                   |
| Активність цементу ( $R_c$ ), МПа                                | $x_3$          | 49,4             | 58,75 | 68,1 | 9,35                |
| Добавка (Д), % від маси цементу (у перерахунку на суху речовину) | $x_4$          | 0                | 0,25  | 0,5  | 0,25                |



1. *Інтерполяційна задача.* Розв'язання інтерполяційних задач дозволяє знайти значення вихідного параметра в межах області варіювання факторів від +1 до -1. Підставляючи в отримане рівняння регресії кодовані значення кожного фактора (наприклад, 0,25;0,5; 0,75; -0,3; -0,6; -0,75) одержуємо значення вихідного параметра при будь-яких проміжних поєднаннях факторів.

*Наприклад, розрахуємо значення вихідного параметра при зміні фактора  $x_2$  – цементно-водного відношення (табл. 2.31).* Інші фактори прийняті на нульовому рівні:  $V=190 \text{ кг/м}^3$ ,  $R_c=58,75 \text{ МПа}$ ,  $D=0,25\%$ .

Рівняння регресії (2.85) прийме вигляд:

$$y = 57,3 + 22,9x_2 - 1,6x_2^2 \quad (2.86)$$

Таблиця 2.31

Результати інтерполяції за рівнянням (2.86)

|                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Ц/В<br>(кодований<br>вигляд)   | -0,8 | -0,6 | -0,5 | -0,4 | -0,2 | 0,2  | 0,4  | 0,5  | 0,6  | 0,8  |
| Ц/В<br>(натуральний<br>вигляд) | 1,7  | 1,9  | 2,0  | 2,1  | 2,3  | 2,7  | 2,9  | 3,0  | 3,1  | 3,3  |
| R, МПа                         | 38,0 | 43,0 | 45,5 | 47,9 | 52,7 | 61,8 | 66,2 | 68,4 | 70,5 | 74,6 |

2. *Екстраполяційна задача.* Розв'язання екстраполяційних задач дозволяє прогнозувати значення вихідного параметра за межами області варіювання факторів, наприклад, при  $x_j=1,1; 1,2; 1,3$ . Однак необхідно мати на увазі, що екстраполяція пов'язана з певними помилками в передбаченні, і ці помилки більш помітніші, ніж далі вихід за межі області варіювання. Екстраполяція можлива, якщо в дослідника немає сумнівів, що за межами області варіювання факторів характер функції залишається без змін.

Розв'язок екстраполяційної задачі за рівнянням (2.86) наведений у табл. 2.32.

3. *Аналітико-геометрична задача.* Розв'язання аналітико-геометричних задач дозволяє на основі рівнянь регресії побудувати графіки і номограми для визначення вихідного



параметра в межах області варіювання факторів, що, у свою чергу, дозволяє оперативно встановити значення вихідного параметра при зміні кожного фактору.

Таблиця 2.32

Результати екстраполяції за рівнянням (2.86)

|                          |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------|------|------|------|------|------|------|
| Ц/В (кодований вигляд)   | -1,3 | -1,2 | -1,1 | 1,1  | 1,2  | 1,3  |
| Ц/В (натуральний вигляд) | 1,2  | 1,3  | 1,4  | 3,6  | 3,7  | 3,8  |
| R, МПа                   | 24,8 | 27,5 | 30,2 | 80,6 | 82,5 | 84,4 |

Поверхня відгуку міцності залежно від факторів Ц/В ( $x_2$ ) і  $R_{ц}$  ( $x_3$ ) наведена на рис. 2.14. Інші фактори прийняті на нульовому рівні:  $V=190 \text{ кг/м}^3$ ,  $D=0,25\%$ . Рівняння регресії (2.85) набуде вигляду:

$$y = 57,3 + 22,9x_2 + 7,2x_3 - 1,6x_2^2 - 0,4x_3^2 + 2,5x_2x_3. \quad (2.87)$$

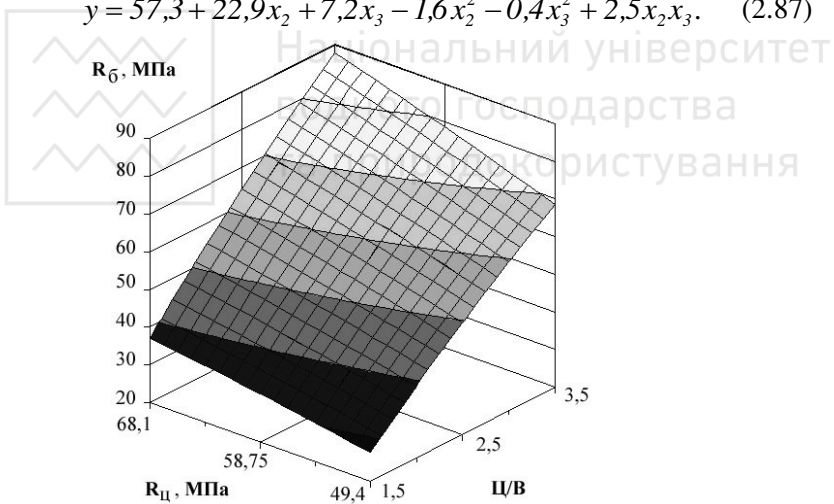


Рис. 2.14. Поверхня відгуку міцності, побудована за рівнянням (2.87)

4. Оптимізаційні задачі полягають в знаходженні такого поєднання факторів, яке забезпечує максимальне (мінімальне) значення вихідного параметра – критерію ефективності при заданих обмеженнях. У цьому випадку екстремум знаходять



шляхом диференціювання рівняння послідовно за  $x_1, x_2, \dots, x_j$ . Отримана система лінійних рівнянь прирівнюється до нуля. Шляхом її розв'язання знаходять значення  $x_j$ , що забезпечують екстремальне значення  $\hat{y}$ . Підставляючи знайдені значення  $x_j$  у вихідне рівняння, визначають екстремальне значення вихідного параметра. Наприклад, для визначення поєднання факторів, що забезпечують екстремальне значення  $\hat{y}$ , рівняння регресії диференціюємо по черзі по  $x_1, x_2, x_3$ ,

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 \quad (2.88)$$

Отримуємо:

$$\frac{dy}{dx_1} = b_1 + 2b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = 0 \quad (2.89)$$

$$\frac{dy}{dx_2} = b_2 + 2b_{22}x_2 + b_{12}x_1 + b_{23}x_3 = 0 \quad (2.90)$$

$$\frac{dy}{dx_3} = b_3 + 2b_{33}x_3 + b_{13}x_1 + b_{23}x_2 = 0 \quad (2.91)$$

Шляхом відповідних перетворень із рівнянь (2.89-2.91) отримуємо систему трьох лінійних рівнянь, які можна вирішити способом підстановки або іншими методами.

*Наприклад, необхідно визначити мінімально й максимально можливі значення міцності бетону за рівнянням (2.85).*

Знаходимо, диференціюючи рівняння регресії (2.85) і прирівнюючи часткові похідні до нуля, а також аналізуючи значення вихідного параметру на межі області варіювання факторів.

$$\frac{dy}{dx_1} = -1,6 - 0,8x_1 - 1,4x_2 = 0$$



$$\frac{dy}{dx_2} = 22,9 - 3,2x_2 - 1,4x_1 + 2,5x_3 = 0 \quad (2.92)$$

$$\frac{dy}{dx_3} = 7,2 - 0,8x_3 + 2,5x_2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx_4} = -1,6 - 5,6x_4 = 0$$

Розв'язавши отриману систему (2.92), наприклад, методом Гауса, отримаємо  $x_1=9,94$ ,  $x_2=-6,82$ ,  $x_3=-12,33$ ,  $x_4=-0,29$ , тобто точка екстремуму лежить за межами області варіювання. Тому доцільно визначити значення функції на границі області варіювання.

Нескладний аналіз рівняння регресії (2.85) дозволяє зробити висновок про те, що його максимум буде досягтися при  $x_1=-1$ ,  $x_2=x_3=1$ ,  $x_4$  – близько до 0, а мінімум – при  $x_1=x_4=1$ ,  $x_2=x_3=-1$ . Розрахуємо значення міцності бетону в деяких характерних точках (у загальному випадку потрібен перебір всіх значень на межі області) (табл. 2.33).

Таблиця 2.33  
Результати розрахунку значень міцності бетону  
у характерних точках

| Фактори (кодований вигляд) |       |       |       | Міцність бетону ( у ),<br>МПа |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------------------------------|
| $x_1$                      | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |                               |
| -1                         | 1     | 1     | 1     | 86,1                          |
| -1                         | 1     | 1     | 0     | 90,5                          |
| -1                         | 1     | 1     | -0,29 | 90,7                          |
| -1                         | 1     | 1     | 1     | 86,1                          |
| 1                          | -1    | -1    | -1    | 25,9                          |
| 1                          | -1    | -1    | 0     | 27,1                          |
| 1                          | -1    | -1    | 1     | 22,7                          |

Таким чином, найбільше значення міцності, що становить 90,7 МПа, досягається при  $x_1=-1$ ,  $x_2=x_3=1$ ,  $x_4=0,29$ , а найменше (22,7 МПа) – при  $x_1=x_4=1$ ,  $x_2=x_3=-1$ .

5. *Задачі управління вихідним параметром.* Задачі управління полягають у визначенні такого поєднання факторів,



що забезпечує задані показники вихідних параметрів. Для цього з отриманого рівняння регресії (наприклад, міцності бетону) вибирають найбільш значимий фактор (звичайно Ц/В).

Розв'язуючи рівняння регресії щодо цього фактора, визначають необхідне його значення, яке забезпечує при зміні інших прийнятих факторів значення вихідного параметра.

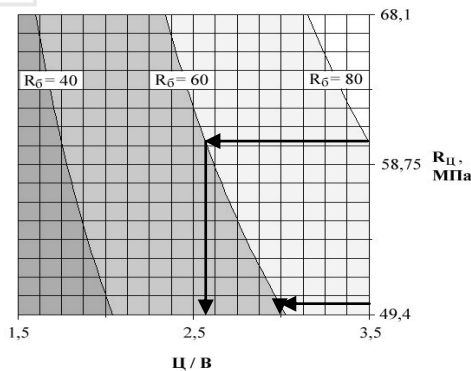
Управління при фіксованому  $y$  виконується шляхом побудови ізоліній (для двох незалежних факторів  $x_1$ ) або номограм – для всіх факторів.

Наприклад, для побудови ізоліній від факторів  $x_2$  і  $x_3$  у рівнянні (2.85) задамо  $x_1=x_4=0$ , отримаємо рівняння

$$y = 57,3 + 22,9x_2 + 7,2x_3 - 1,6x_2^2 - 0,4x_3^2 + 2,5x_2x_3. \quad (2.93)$$

Задаючись можливими значеннями  $\hat{y}$  і приводячи рівняння до вигляду  $x_3=f(x_2)$ , побудуємо шукані ізолінії.

З рис. 2.15 випливає, що для досягнення міцності бетону 60 МПа на цементі марки М500 ( $R_{II}=50$  МПа) слід прийняти Ц/В=3,0, а на цементі марки М600 – Ц/В=2,58 при інших однакових факторах ( $B=190$  кг/м<sup>3</sup>,  $D=0,25\%$ ).



**Рис. 2.15.** Ізолінії міцності за рівнянням (2.93)

6. *Задачі мінімізації* полягають у визначенні такого співвідношення прийнятих факторів, яке дозволяє одержати



задані значення вихідних параметрів при мінімальному значенні одного з факторів, наприклад, витрати цементу  $C$ .

В даній моделі (2.85) основним ресурсом, що визначає вартість бетону, є витрата цементу, що прямо пропорційна  $C/V$ . Тому мінімальне  $C/V$  буде відповідати мінімальній витраті ресурсів. Наприклад, для бетону міцністю 40 МПа мінімальна витрата цементу досягається при  $C/V=1,6$ . При цьому  $R_d=68,1$  МПа,  $V=190 \text{ кг/м}^3$ ,  $D=0,25\%$ .

7. *Наочне уявлення про геометричний образ досліджуваної функції відгуку* можна отримати побудовою відповідної геометричної поверхні у дво- або тривимірному просторі. Із цією метою рівняння другого порядку перетвориться в типову канонічну форму.

Процес приведення моделі другого порядку до канонічної форми розбивається на два етапи: 1) поворот координатних осей і сполучення їх з напрямками власних векторів (нові координатні осі називають канонічними); 2) перенесення початку координат в особливу точку.

Перший етап дозволяє виключити з рівняння взаємодії, другий - звести до мінімуму число лінійних членів. Такі перетворення широко описані в настановах з аналітичної геометрії.

Поверхні другого порядку, приведені до канонічного виду, можна класифікувати залежно від математичної структури рівняння.

8. *Компромісні екстремальні задачі.* При розв'язанні екстремальних задач, що ставляться до вивчення технології і властивостей бетону, у більшості випадків виникає необхідність в одночасному розгляді декількох параметрів оптимізації. У цих умовах вирішують компромісні задачі: ведеться пошук компромісу між декількома параметрами оптимізації, так як на умовний екстремум для однієї поверхні відгуку накладають обмеження однією або декількома іншими поверхнями відгуку.

У процесі оптимізації складів бетону звичайно необхідно вирішувати екстремальні задачі з урахуванням одночасно декількох критеріїв оптимізації (механічні, деформаційні, спеціальні властивості матеріалу). Дуже часто при пошуку



умовного екстремуму поверхні відгуку потрібне врахування обмежень економічного характеру.

У даний час при розв'язанні компромісних екстремальних задач застосовують графічний або аналітичний спосіб.

Графічний спосіб розв'язання компромісних задач заснований на тому, що розглядають суміщені двомірні перерізи поверхонь відгуку і візуально вибирають відповідні умовні екстремуми.

При аналітичному способі розв'язання компромісних задач можна використати метод невизначених множників Лагранжа. Метод заснований на застосуванні невизначених множників для пошуку екстремальних значень функцій, підпорядкованих зв'язками, які накладаються деякими співвідношеннями. При цьому для двох критеріїв оптимізації вирішується система рівнянь за допомогою відомих комп'ютерних програм. Недолік методу невизначених множників Лагранжа полягає в тім, що він ефективний тільки при спільному розгляді двох критеріїв оптимізації і є досить складним.

9. *Ефект впливу окремих факторів.* Для графічної інтерпретації впливу окремих факторів і оцінки степеня їх впливу побудуємо однофакторні моделі і графіки, визначимо ступінь впливу кожного з факторів (табл. 2.34, рис. 2.16).

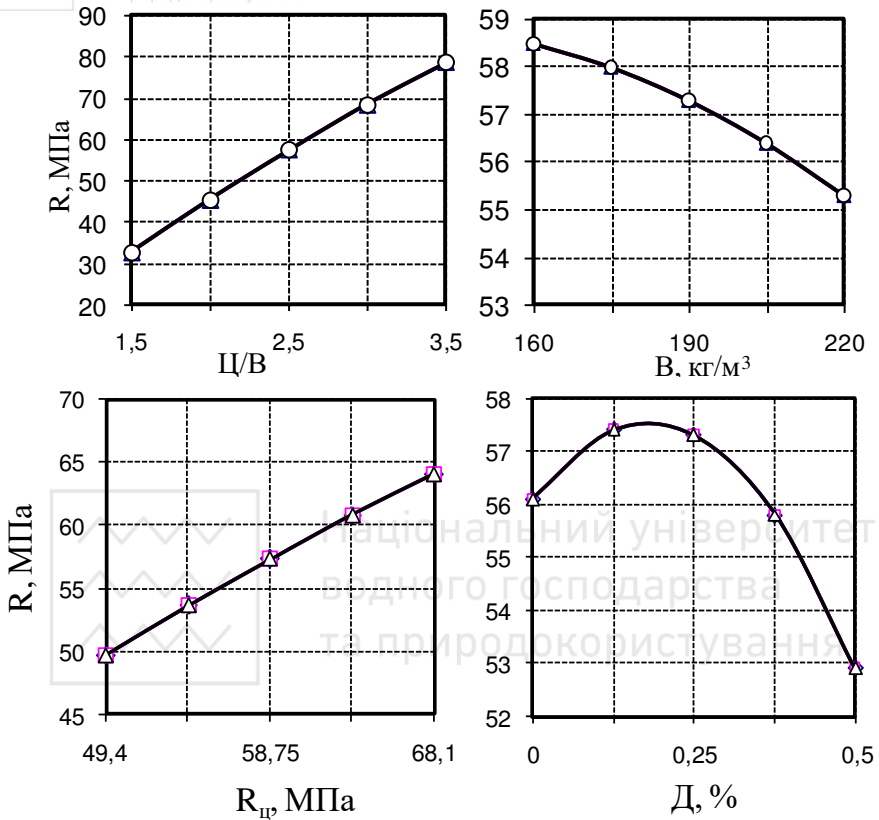
Таблиця 2.34

Результати розрахунку рівнянь  
екстремальних значень за рівнянням (2.85)

| Досліджуваний фактор  |             | Однофакторна модель*            | Значення $y$ , МПа |             | $\Delta y$ |
|-----------------------|-------------|---------------------------------|--------------------|-------------|------------|
| натуральний вид       | кодовий вид |                                 | мінімальне         | максимальне |            |
| $B, \text{кг/м}^3$    | $x_1$       | $y = 57,3 - 1,6x_1 - 0,4x_1^2$  | 55,3               | 58,5        | 3,2        |
| Ц/В                   | $x_2$       | $y = 57,3 + 22,9x_2 - 1,6x_2^2$ | 32,8               | 78,6        | 45,8       |
| $R_{ц}, \text{МПа}$   | $x_3$       | $y = 57,3 + 7,2x_3 - 0,4x_3^2$  | 49,7               | 64,1        | 14,4       |
| Д, % від маси цементу | $x_4$       | $y = 57,3 - 1,6x_4 - 2,8x_4^2$  | 52,9               | 57,5        | 4,6        |

\* - інші фактори прийняті на нульовому рівні





**Рис. 2.16.** Приклади побудови однофакторних залежностей за моделлю (2.86)

Аналіз отриманих даних показує, що за ступенем значимості фактори можна розташувати в ряд  $x_2 > x_3 > x_4 > x_1$ .

При цьому збільшення факторів  $x_2$  і  $x_3$  призводить до зростання  $y$ , а фактора  $x_1$  – до зменшення  $y$ . Збільшення фактору  $x_4$  у межах від 0 до 0,18% призводить до росту міцності, подальше збільшення  $x_4$  – до зменшення міцності за інших рівних умов.

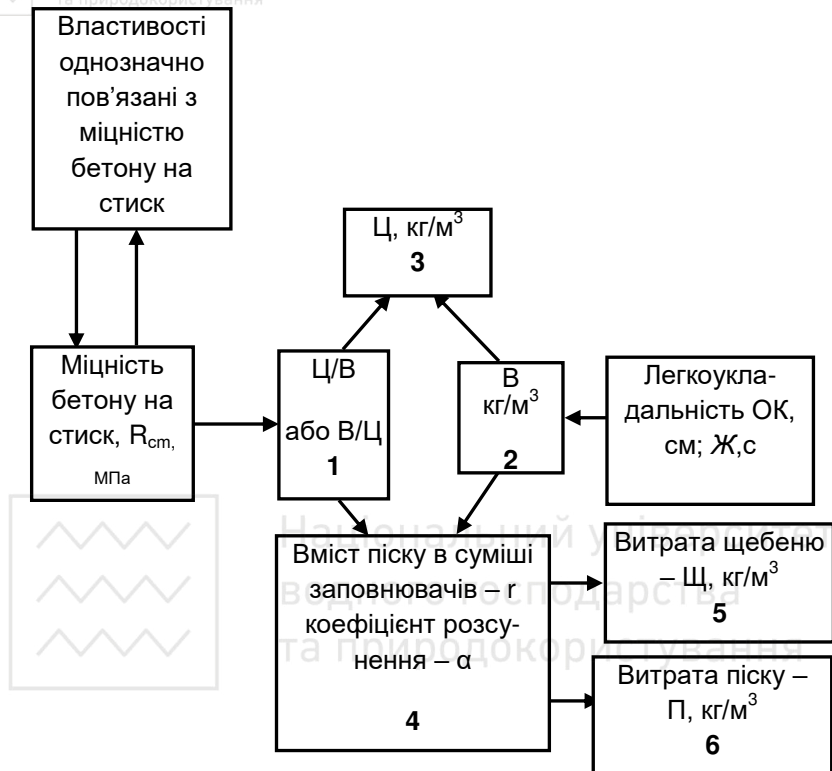


### 3. ПРОЕКТУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ СКЛАДІВ ВАЖКОГО БЕТОНУ

#### 3.1. Основні задачі проектування складів бетону

Найбільш розробленими і реалізованими на практиці є двопараметричні задачі, коли нормованою властивістю бетону є його міцність при стиску ( $R_{ст}$ ), а бетонної суміші – показник легкоукладальності (рухомість ОК або жорсткість Ж). Для розв'язання задач цього типу широко застосовуються розрахунково-експериментальні методи, що використовують ряд відомих технологічних залежностей: міцності бетону від цементно-водного відношення, правило сталості водопотреби бетонних сумішей, правило оптимального вмісту піску та ін.

При розв'язанні таких задач для важких бетонів послідовно визначають (рис. 3.1) значення цементно-водного відношення, витрату води з урахуванням необхідної рухомості або жорсткості бетонної суміші і витрату заповнювачів, використовуючи припущення про те, що бетонна суміш складається з абсолютних об'ємів всіх її складових. В найпростішому випадку для чотирьохкомпонентної суміші, необхідне знання трьох параметрів: цементно-водного відношення ( $\Pi/B$ ), витрати води ( $B$ ) і фактору, що характеризує співвідношення заповнювачів (частки піску в суміші заповнювачів ( $r$ ) або коефіцієнта розсунення зерен крупного заповнювача цементно-піщаним розчином ( $\alpha$ )). Останній фактор можна розглядати як оптимізуєчий, тому що лише при деякому оптимальному його значенні, в умовах  $\Pi/B = \text{const}$ , можливе досягнення мінімальної витрати цементу. Найчастіше під оптимальним приймають співвідношення заповнювачів, що забезпечує їх найкращу легкоукладальність або мінімальну водопотребу. Для бетонної суміші з великою кількістю компонентів строгий аналітичний пошук оптимального співвідношення заповнювачів стає досить складною задачею, що вимагає застосування методів нелінійного програмування й ін. В деяких випадках задача може бути спрощена при використанні емпіричних залежностей.



**Рис. 3.1.** Схема розрахунку номінальних складів важкого бетону

Оптимізуючим фактором може служити також витрата добавки. Зокрема добавки-пластифікатори дозволяють досягти мінімальної витрати цементу при оптимальній їх витраті, що залежить від необхідної рухливості суміші, міцності бетону.

### **3.2. Якісна структура залежностей властивість-режим-склад бетону**

Вирішення задач проектування складів бетону з використанням математичного планування експерименту



передбачає встановлення залежностей, які відображають зв'язок основних властивостей бетонної суміші і бетону з факторами, що на них впливають.

При апріорному вивченні якісної структури зв'язків, що визначають властивості бетону, для наступного математичного моделювання й оптимізації важливо вибрати головні керовані фактори, а також оцінити можливу кривизну поверхні відгуку в даній області варіювання. Порівняно високий рівень інформації про вплив факторів складу і режимів твердіння на основні властивості бетону дозволяє в більшості задач проводити якісний аналіз і моделювання відразу в майже стаціонарній області, що істотно полегшує пошук оптимуму.

На основі численних досліджень можна визначити три основні групи факторів, що беруть участь у формуванні властивостей бетону: 1) якісні параметри вихідних компонентів; 2) кількісні параметри суміші; 3) режимні параметри процесів твердіння.

Повністю врахувати всі фактори не можна як при традиційному, так і при системному підході до оптимізації, хоча в останньому випадку набагато більше таких можливостей. Завдання полягає в тому, щоб залежно від поставленої мети правильно вибрати регульовані фактори, з них відібрати найбільш суттєві для даного комплексу вихідних параметрів і зафіксувати інші, а також врахувати нерегульовані, але впливові фактори. Окремі технологічні фактори можуть бути зкорельовані між собою, і тоді аналіз їх спільного впливу на вихідні параметри системи недоцільний.

При оптимізації складів сумішей, що забезпечують комплекс характерних для бетону вихідних параметрів, найбільш важливі фактори першої групи - хіміко-мінералогічний і речовинний склад цементу й добавок, їх дисперсність, структурно-мінералогічні особливості і крупність заповнювачів; другої - витрата води і цементно-водне відношення, співвідношення заповнювачів, а також вміст добавок; третьої - тривалість і температура твердіння.

Хіміко-мінералогічний і речовинний склад цементу, його тонкість помелу проявляються в інтегральних показниках якості



цементу – активності й нормальній густоті. Однак строгих загальних кількісних залежностей між цими параметрами немає внаслідок надзвичайно складного механізму формування структури цементного тіста й каменю. Залежності статистичного характеру можна встановити лише для цементів кожного конкретного заводу. При постійній активності цементу різного хіміко-мінералогічного складу по-різному впливають на властивості бетону і особливо на міцність після теплової обробки, морозостійкість, корозійну стійкість тощо. Відповідно до сучасних уявлень особливо суттєво на зазначені властивості впливають вміст у цементі трикальцієвого алюмінату, а також співвідношення алюмінатної і алітової фаз. За нашим даними, у загальному вигляді залежність міцності бетону від активності цементу має ступеневий характер, при цьому показник ступеня зменшується і наближається до одиниці в міру збільшення загальної тривалості твердіння.

Вплив нормальної густоти цементу позначається насамперед на водопотребі бетонної суміші і, як наслідок, на всіх основних властивостях бетону. При моделюванні варто враховувати її вплив на критичне Ц/В, вище якого порушується правило постійної водопотреби. З нормальною густотою тісно пов'язаний вміст у цементі активних мінеральних добавок. Роль нормальної густоти в процесах структуроутворення цементного каменю глибоко розкрита Й. М. Ахвердовим.

У технології бетону часто застосовують добавки пластифікуючих і повітрявтягуючих ПАР. Їх вплив на властивості бетону досить добре вивчено. При пошуку оптимальних складів бетонних сумішей важливо врахувати екстремальний характер впливу ПАР на властивості бетону при постійній легковкладальності. Розміщення і величина екстремуму в координатах властивість-концентрація ПАР залежить від виду добавки, рівнів, на яких знаходяться інші фактори складу, а також значення заданої легковкладальності. Так, ефект підвищення морозостійкості при введенні повітрявтягувальних добавок (типу СНП), мабуть, більш високий для рухомих відносно “пісних” бетонних сумішей. Ефект пластифікуючих добавок типу технічних



лігносульфонатів, дія яких в основному обумовлено не додатковим повітрявтягуванням, а пептизацією цементного тіста, краще помітний у помірно “жирних” сумішах. Більш універсальні добавки комплексних ПАР.

При тепловій обробці вплив добавок ПАР залежить від природи, повітрявтягувальної здатності, складу суміші і поєднання режимних параметрів. Більшість дослідників сходяться на тому, що дія ПАР при оптимальній концентрації може бути ефективною при помірних і подовжених режимах, які включають попереднє витримування. Ефективність ПАР при тепловій обробці збільшується при додатковому введенні в цемент або бетонну суміш прискорювачів твердіння.

З факторів другої групи найбільш важливі водовміст бетонної суміші і цементно-водне відношення. Витрата води і цементно-водне відношення характеризують як якість, так і кількість цементного тіста і відповідно цементного каменю в бетоні. Властивості бетонної суміші і бетону по-різному пов'язані із цими двома факторами. Якщо для легкоукладальності сумішей домінуючою є витрата води і вплив Ц/В помітно відчувається лише з деякої межі, то для міцнісних властивостей бетону у всьому діапазоні вирішальний вплив чинить цементно-водне відношення.

На морозостійкості і водонепроникності бетону поряд із цементно-водним відношенням суттєво позначається і початковий водовміст суміші. У зв'язку з розвитком деструктивних процесів вплив водовмісту на міцність та інші властивості бетону стає вагомим при форсованих режимах теплової обробки.

Вплив якісних і кількісних параметрів системи цемент - вода на бетонну суміш і бетон необхідно розглядати спільно. Відомо, наприклад, чим менша густина цементного каменю, тим більшим повинен бути його вміст для забезпечення необхідних значень міцності, морозостійкості й водонепроникності бетону. Разом з тим існує певна оптимальна кількість цементного каменю при постійних параметрах якості і перевищення його не дає відчутного ефекту як з позицій міцності, так і стійкості



бетону. Це положення тісно пов'язане із сучасними уявленнями структурної теорії бетону.

Крім розглянутих вище, існує багато інших технологічних факторів складу, що чинять значний вплив на властивості бетону. Це насамперед більшість параметрів якості заповнювачів (мінералогія, крупність, форма, зерновий склад, вміст окремих включень, міцність, водопоглинання, адгезійні властивості) і їх співвідношення. Особливий інтерес при оптимізації складу представляють добре регульовані фактори, такі як крупність, зерновий склад і співвідношення заповнювачів.

Роль зернового складу й співвідношення заповнювачів у формуванні властивостей бетону не можна вважати достатньо вивченою. Установлено екстремальний характер впливу частки піску в суміші заповнювачів на легковкладальність бетонної суміші при постійному водовмісті. У загальному випадку оптимальним вважається таке співвідношення заповнювачів, що забезпечує мінімальну водопотребу і, як наслідок, мінімальну витрату цементу для забезпечення необхідних властивостей за умови запобігання процесу розшарування суміші. Значення оптимальної частки піску змінюється при зміні вмісту цементного тіста в суміші, водоцементного відношення та вмісту втягнутого повітря.

З технологічних факторів третьої групи вирішальний вплив на властивості бетону чинить тривалість твердіння. При тепловій обробці, крім загальної тривалості процесу, істотне значення мають температура і структура режимних параметрів, тобто співвідношення часу попередньої витримки, тривалості ізотермічного прогріву, швидкості підйому температури та охолодження. Вплив режимних параметрів твердіння на властивості бетону тісно пов'язаний з особливостями вихідних матеріалів і складом суміші. Відповідно до сучасних уявлень, необхідна загальна тривалість і співвідношення режимних параметрів пропарювання, а також питома витрата в'язучих для одержання бетонів однакової міцності залежать від виду й хіміко-мінералогічного складу цементу. Основні деструктивні процеси в бетоні виникають у період підйому і зниження



температури, а набір міцності – у період ізотермічного прогріву. Звідси впливає важливість правильного призначення окремих режимних параметрів процесу. Відомо, що оптимальна тривалість попереднього витримування може коливатися від 2 до 8 год. і більше. Її рекомендується скорочувати з підвищенням марки цементу і температури середовища, зниження В/Ц, зменшення швидкості підйому температури, введення прискорювачів, пропарювання виробів складного профілю і т.д. Аналогічно необхідність врахування складних взаємодій з іншими технологічними факторами виникає при виборі оптимальної швидкості нагрівання, тривалості та температури ізотермічної витримки.

Таким чином, короткий аналіз апріорної інформації про закономірності "властивість – режим твердіння – склад бетону" дозволяє зробити висновки, важливі для математичного моделювання: 1) технологічні фактори впливають на властивості бетону комплексно, взаємодіючи один з одним; 2) характер впливу більшості факторів у досить широкому діапазоні є нелінійним, тому для математичного опису основних властивостей бетонної суміші і бетону доцільно для більшості задач застосовувати поліноміальні рівняння другого порядку.

### **3.3. Аналіз основних робіт з застосуванням математичного планування експериментів для проектування складів бетону**

Уже перші роботи із застосування математичного моделювання в технології бетону з використанням факторного планування експерименту були спрямовані на вирішення задач проектування складів бетону. Спочатку методами лінійного програмування, а потім за допомогою ротатбельного планування другого порядку була вирішена задача оптимізації зернового складу сухої суміші заповнювачів. Пізніше для оптимізації складу суміші зерен різних фракцій і вивчення залежності міцності бетону від зернового складу заповнювачів запропоновані симплексно-решітчаті плани, які надалі використовували і для інших окремих задач, наприклад, встановлення оптимальної





композиції добавок, прогнозування морозостійкості тощо. Симплексне планування застосовували також при проектуванні складів деяких видів бетону та інших багатокомпонентних композицій. Однак у цих роботах задача оптимізації зводилося до пошуку співвідношення компонентів, що забезпечують сполучення необхідних властивостей матеріалів. При цьому не ставилася мета мінімізувати витрату одного з компонентів, зокрема цементу, не враховувалися фактори якості компонентів.

Першу спробу застосування математичного планування експерименту для вирішення задачі вибору співвідношення компонентів, що забезпечують необхідну міцність бетону і легковкладальність бетонної суміші при мінімальній витраті цементу, зробив Э. Г. Соркин. Він отримав математичні моделі жорсткості бетонної суміші залежно від витрати води, водоцементного відношення, співвідношення піску та щебеню, нормальної густоти цементного тіста, а також моделі міцності бетону при стиску з урахуванням впливу факторів складу та активності цементу.

Спільний розгляд рівнянь жорсткості суміші і міцності бетону дозволив запропонувати новий метод проектування складів бетону. Суть його зводиться до встановлення за аналітичними і графічними залежностями, впливаючими з моделі міцності, значення В/Ц, з огляду на проектну марку бетону і активність цементу, а потім співвідношення між заповнювачами, яке забезпечує мінімальну витрату води для заданих значень жорсткості, нормальної густоти і водоцементного відношення. Однак вирішення задачі цим методом неоднозначне за умови суттєвого впливу на міцність водовмісту суміші. У роботі розглянуте також вирішення задачі оптимізації складу бетонної суміші за вартістю матеріалів і питомою вартістю. Для цього, варіюючи "фактори складу", знайдені відповідні рівняння регресії й графічним шляхом вирішені компромісні задачі при обмеженнях за міцністю бетону і жорсткістю суміші.

Цей метод проектування складів бетону розглядався й в інших роботах. Так, Г. В. Михайленко отримав квадратичні моделі жорсткості бетонної суміші в широкому діапазоні значень (від 5 до 600 с). Для усунення неадекватності моделі, викликаною



неоднорідністю дисперсії в такому великому інтервалі жорсткості, введене логарифмічне перетворення функції відгуку. Оптимізацію складу бетону запропоновано здійснювати при наступній послідовності дій:

1. Експериментальна оцінка констант у формулі Боломея-Скрамтаева.

2. Визначення мінімального Ц/В, що забезпечує задану міцність бетону по залежності  $R_g = f(\text{Ц/В})$ ;

3. Побудова моделі жорсткості і ізоліній однакової легкоукладальності в координатах "частка піску в суміші заповнювачів  $r$  — водовміст В" для необхідних значень Ц/В.

4. Відшукування оптимального значення  $r$ , що забезпечує при заданому Ц/В необхідну жорсткість або осадку конуса з мінімальною витратою води.

Цей підхід відрізняється від запропонованого Е. Г. Соркіним лише трохи іншим визначенням Ц/В. Обидва методи виходять із припущення, що водовміст і об'ємна концентрація цементного каменю не впливають при постійному Ц/В на міцність, і це дозволяє суттєво спростити задачу оптимізації. Однак таке допущення не є строгим для високорухомих й особливо жорстких сумішей, а для бетонів, що твердіють при форсованих режимах теплової обробки, взагалі не прийнятне.

Таку задачу можна вирішувати графоаналітичним способом з урахуванням можливого впливу на міцність бетону поряд із цементно-водним відношенням і водовмісту. Суть його полягає в наступному:

1. Визначаємо квадратичну модель легкоукладальності бетонної суміші, яку вирішуємо щодо витрати води. Це дозволяє при різних витратах цементу визначити значення  $r$ , що забезпечують мінімальну водопотребу суміші для одержання заданої легкоукладальності.

2. Із застосуванням двофакторного плану реалізуємо досліди і знаходимо залежність міцності бетону від витрати води і цементу у вигляді полінома другої ( $\text{Ц/В} \geq 2,5$ ) або першої степені ( $\text{Ц/В} < 2,5$ ). При призначенні складу суміші в кожній точці матриці вибираємо оптимальне значення  $r$  на основі попередніх розрахунків з моделі легкоукладальності.



### 3. Витрату цементу ( $\mathcal{C}$ ) для одержання певної міцності ( $R_6$ )

визначаємо із кривої  $R_6 = f(\mathcal{C}/B)$  при заданій легкоукладальності. Водовміст і  $r_{\text{опт}}$  бетонної суміші можна знайти при необхідній витраті цементу з відповідних кривих, отриманих шляхом сполучення екстремальних значень  $B = f(r)$  при різних витратах цементу.

Розглянутий метод дозволяє виконати оптимізацію складу. При цьому, однак, використовується неоптимальний алгоритм, що вимагає для побудови графіків значної кількості обчислень.

Надалі запропоновано більш досконале аналітичне вирішення задачі оптимізації складів бетону. Воно полягає в тому, що знаходять квадратичні моделі легкоукладальності бетонної суміші  $\mathcal{K}$  і міцності бетону  $R_6$  залежно від витрати води  $B$ , цементу  $\mathcal{C}$  і частки піску в суміші заповнювачів  $r$ :

$$\mathcal{K} = f(B, \mathcal{C}, r), \quad (3.1)$$

$$R_6 = \varphi(B, \mathcal{C}, r). \quad (3.2)$$

Через те, що фактором, який визначає мінімальну витрату води, а отже, і цементу при заданій його активності і нормальній густоті, є частка піску в суміші заповнювачів, фактор  $r$  розглядаємо як параметр оптимізації. В області варіювання цей параметр приймає ряд значень, якому відповідає така ж кількість поверхонь відгуку. Розглядаючи вираз:

$$f_1 = (B, \mathcal{C}, r, \mathcal{K}) = 0 \quad (3.3)$$

як однопараметричне сімейство поверхонь, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f_1(B, \mathcal{C}, r, \mathcal{K}) = 0 \\ \partial f_1 / \partial r = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Спільне розв'язання системи (3.4) з рівнянням міцності дозволяє знайти оптимальні значення витрати води й цементу, а також частки піску в суміші заповнювачів і отримати бетонну суміш заданої рухливості або жорсткості, а бетон необхідної міцності.

Цикл досліджень по оптимізації складів бетону із застосуванням поліноміальних моделей, що враховують



структурні характеристики, виконаний у роботах Ю. М. Баженова, Г. И. Горчакова, Л. А. Алімова, В. В. Вороніна. Оптимальний склад бетону пропонується визначати розв'язанням системи рівнянь регресії, у яких враховується водопотреба заповнювача в бетоні, істинне В/Ц цементного каменю і його об'ємна концентрація. Можливість однозначного розв'язання при цьому досягається за умови, що кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих. Оптимальне значення  $r$  рекомендується знаходити традиційним розрахунковим методом з урахуванням коефіцієнта розсуву.

Виконано ряд розробок з оптимізації складів не тільки звичайних важких, але також легких і спеціальних видів бетону. Вони, як правило, зводяться до побудови інтерполяційних рівнянь, що зв'язують вихідні параметри з факторами складу, і наступному дослідженню поверхонь відгуку звичайно за допомогою канонічного аналізу або ізоліній. Запропонований також метод проектування оптимальних складів легкого бетону із застосуванням елементів граничного аналізу.

Математичне моделювання дозволяє вирішувати задачі проектування складів з більшою різноманітністю вихідних умов і факторів. Однак у більшості робіт з пошуку оптимальних складів воно застосовується ще у відриві від інших принципів системного аналізу. У ряді завдань моделюванню не передують аналіз якісної структури процесу, немає об'єктивного обґрунтування відбору факторів, вибору показників і критерія ефективності, чіткого формулювання мети оптимізації, не враховуються всі необхідні обмеження, що істотно знижує цінність і строгість оптимізаційних рішень.

Оптимізацію при проектуванні складу бетону із застосуванням математичних моделей у більшості робіт передбачається виконувати за допомогою графічних побудов. Не заперечуючи доречність графічних рішень, особливо в складних задачах оптимізації, у багатьох випадках все-таки варто віддати перевагу аналітичним і графоаналітичним методам.

Графічна інтерпретація особливо цінна при номографуванні результатів, знайдених за допомогою аналітичного розв'язання системи математичних моделей. У ряді робіт побудова



поліноміальних моделей не обумовлена технологічною постановкою задачі і може бути цілком замінено традиційним підходом.

Стосовно до бетону, проєктованому за декількома вихідними параметрами, наприклад гідротехнічного, задачі оптимізації складів особливо складні і строго можуть бути вирішені лише на основі системи математичних моделей. Перша спроба вирішення задачі визначення складу, що забезпечує жорсткість бетонної суміші, міцність і морозостійкість бетону із застосуванням найпростіших поліноміальних моделей, зроблена в роботі. В якості факторів у цих моделях обрані структурні характеристики - концентрація цементного каменю і його В/Ц у бетоні.

Є певний досвід з моделювання окремих властивостей гідротехнічного бетону багатофакторними поліноміальними моделями. Так, у роботі І.І. Гранковського побудовані шестифакторні моделі легковкладальності і міцності гідротехнічного бетону в 28- і 180-добовому віці залежно від витрати цементу, цементно-водного відношення, частки піску і суміші заповнювачів, вмісту домішок пилу в заповнювачах, гравію фракції 40-80 мм та сульфітно-спиртової барди. Певний інтерес із погляду технології бетону представляють кількісні залежності, отримані при математичному моделюванні водонепроникності, модуля пружності, міри повзучості, граничної розтяжності та інших фізико-механічних характеристик.

Незважаючи на порівняно високий рівень апріорної інформації, без математичного моделювання неможливо досить повно якісно, а тим більше кількісно, оцінити сукупність взаємозв'язків між технологічними факторами, що визначають ефективність складів бетону при різних режимах твердіння. Комплекс моделей, використаних для дослідження режимів теплової обробки, вперше отриманий в роботі І.І.Кірієнко. Дана задача вирішувалася в різних аспектах багатьма дослідниками, у тому числі і нами.

Суттєвий внесок у розробку основ моделювання в технології бетону і залізобетону з застосування методології математичного планування експериментів внесли Ю. М. Баженов,



В. А. Вознесенський, И. Г. Зедгінідзе, Т.В. Ляшенко, П.Мчедлов-Петросян, Е. М. Реп'єв та ін..

В даному посібнику на основі результатів досліджень виконаних на кафедрі технології будівельних виробів і матеріалознавства Національного університету водного господарства та природокористування приведені приклади розв'язання характерних задач проектування складів бетонів з застосуванням методології математичного планування експериментів.

**Приклад 3.1.** Запроектувати оптимальні склади бетону класів В20-В30 при легкоукладальності суміші в діапазоні 30...90 с на портландцементі марок 400 і 500. Щебінь фракції 5...20 мм, кварцовий пісок із  $M_{кр}=2,04$ .

Для побудови моделей жорсткості суміші і міцності бетону при стиску використали план експериментів типу В<sub>4</sub>. Умови планування експериментів наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1.

Умови планування експериментів

| Фактори                            |                | Рівні варіювання |      |      | Інтервал варіювання |
|------------------------------------|----------------|------------------|------|------|---------------------|
| натуральні                         | кодова<br>ні   | -1               | 0    | +1   |                     |
| Витрата води, кг/м <sup>3</sup>    | x <sub>1</sub> | 155              | 165  | 175  | 10                  |
| Витрата цементу, кг/м <sup>3</sup> | x <sub>2</sub> | 270              | 340  | 410  | 70                  |
| Частка піску в суміші заповнювачів | x <sub>3</sub> | 0,35             | 0,40 | 0,45 | 0,05                |
| Активність цементу, МПа            | x <sub>4</sub> | 37,0             | 45,0 | 53,0 | 8,0                 |

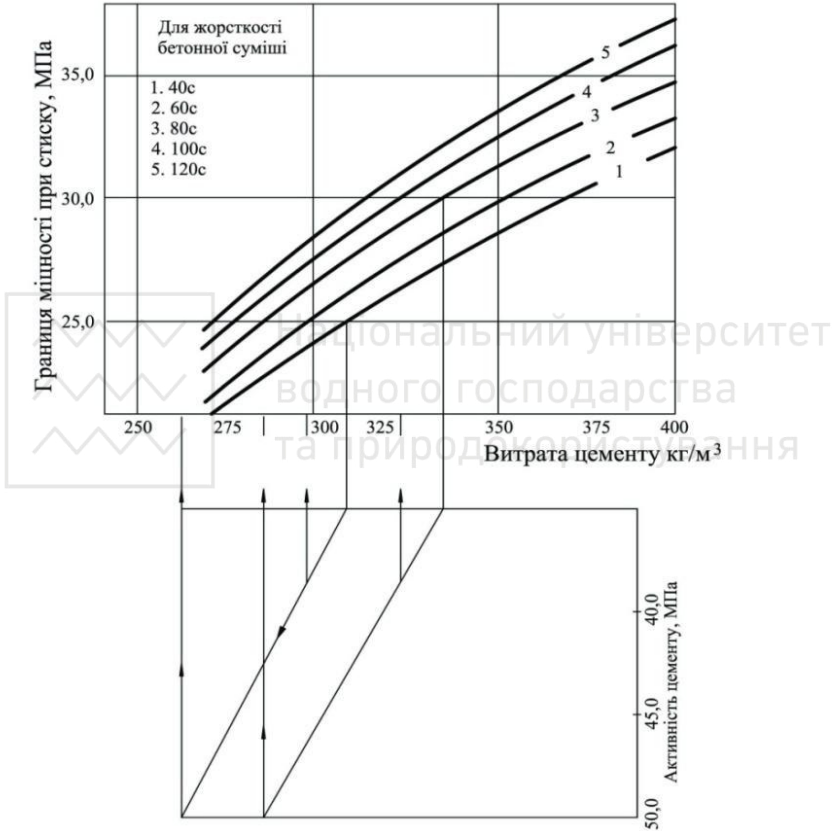
Після реалізації дослідів, обробки експериментальних даних методами статистичного аналізу отримали математичні моделі жорсткості бетонної суміші ( $\hat{y}_1$ ) і міцності бетону при стиску ( $\hat{y}_2$ ) адекватні з 95% довірчою ймовірністю:

$$\hat{y}_1 = 40,3 - 29,9 x_1 + 11,7 x_2 + 14,2 x_3 - 9,4 x_1 x_3 + 8,8 x_2 x_3 + 8,5 x_1^2 + 3,0 x_2^2 + 15,4 x_3^2; \quad (3.5)$$



Національний університет  
водного господарства  
та природокористування

$$\hat{y}_2 = 30,90 - 1,76 x_1 + 5,01 x_2 - 1,44 x_3 + 2,19 x_4 + \quad (3.6)$$
$$+ 0,95 x_1 x_2 - 0,88 x_2 x_3 + 0,97 x_2 x_4 - 0,92 x_2^2 - 1,47 x_3^2 .$$



**Рис. 3.2.** Номограма витрати цементу в залежності від  $R_b$  і  $R_c$ .

**Примітка:** Жорсткість бетонної суміші за технічним віскозиметром

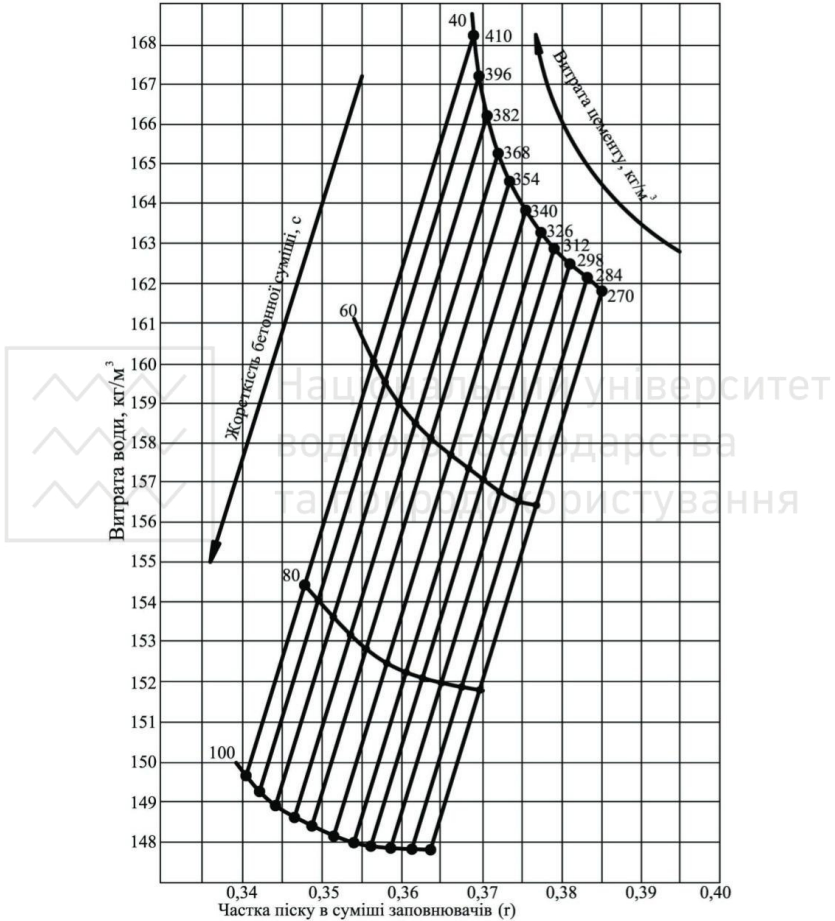


Рис. 3.3. Номограма визначення частки піску в суміші заповнювачів





Диференціюємо модель жорсткості  $\hat{y}_1$  по  $x_3$

$$x_3 = \frac{9.4x_1 - 8.8x_2 - 14.2}{30.8}. \quad (3.7)$$

Спільним розв'язанням рівнянь (3.5-3.7) знаходимо суміші з мінімальними витратами води і цементу при оптимальних частках піску в суміші заповнювачів, які забезпечують необхідні легкоукладальність бетонної суміші і міцність бетону.

На основі розв'язання моделей були отримані номограми, які дозволяють призначати оптимальні склади бетону відповідно до заданих умов. Наприклад, потрібно визначити склад, що забезпечує  $R_6 = 30$  МПа при  $J=80$  с і  $R_d=40$  МПа. З рис. 3.2. знаходимо, що необхідна витрата цементу повинна становити  $328 \text{ кг/м}^3$ , а води –  $152 \text{ кг/м}^3$ ,  $r=0,36$  (рис. 3.3).

За методом абсолютних об'ємів визначаємо витрати піску і щебеню.

**Приклад 3.2.** *Запроектувати склади бетону класів В10...В40 при легкоукладальності суміші 30, 60, 90, 120 с на портландцементі з мінеральними добавками марок 300...600 при нормальній густоті 25...29%. Дрібний заповнювач представлений сумішшю піску і щебеню фракції 5...40 мм.*

Умови планування експериментів наведені у табл.3.2.

Таблиця 3.2

Умови планування експериментів

| Фактори                              |          | Рівні варіювання |       |      | Інтервал варіювання |
|--------------------------------------|----------|------------------|-------|------|---------------------|
| натуральні                           | кодовані | -1               | 0     | +1   |                     |
| Витрата води, $\text{кг/м}^3$        | $x_1$    | 148              | 160   | 172  | 12                  |
| Витрата цементу, $\text{кг/м}^3$     | $x_2$    | 200              | 300   | 400  | 100                 |
| Частка піску в суміші заповнювачів   | $x_3$    | 0,30             | 0,36  | 0,42 | 0,06                |
| Частка фракції 0,63...5,0 мм у піску | $x_4$    | 0                | 0,25  | 0,50 | 0,25                |
| Активність цементу, МПа              | $x_5$    | 418              | 490,5 | 563  | 72,5                |
| Нормальна густота цементу, %         | $x_6$    | 25,2             | 27,2  | 29,2 | 2,0                 |

**Примітка:** При побудові моделі легкоукладальності  $\hat{y}_1$  використані фактори  $x_1 \dots x_5$ , моделі міцності –  $x_1 \dots x_4, x_6$ .



Експерименти виконували згідно плану На<sub>5</sub>.

Адекватні математичні моделі міцності бетону при стиску  $\hat{y}_2$  і легкоукладальності (жорсткості) суміші  $\hat{y}_1$  наведені нижче:

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 = & 50,5 - 29,6 x_1 + 14,4 x_2 + 14,1 x_3 - 11,3 x_4 + \\ & + 7,5 x_6 + 5,3 x_1^2 + 4,3 x_2^2 + 9,3 x_3^2 + 9,3 x_4^2 + \\ & + 4,3 x_6^2 - 5,0 x_1 x_2 - 4,8 x_1 x_3 + 5,9 x_1 x_4 + \\ & + 11,8 x_2 x_3 + 4,0 x_2 x_4 + 3,8 x_3 x_4; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_2 = & 29,89 - 2,47 x_1 + 10,61 x_2 - 0,73 x_3 + 3,39 x_5 - \\ & - 0,53 x_3^2 - 0,73 x_4^2 - 0,66 x_1 x_2 + x_1 x_3 - \\ & - 0,56 x_1 x_5 - 0,74 x_2 x_3 + 1,04 x_2 x_5. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Факторами, що визначають мінімум витрати цементу заданої якості, тобто певної активності і нормальної густоти, є в даному прикладі співвідношення дрібного і крупного заповнювача  $x_3$  і фракції дрібного заповнювача  $x_4$ .

Виразивши оптимізуючі фактори  $x_3$  і  $x_4$  через  $x_1$  та  $x_2$ , знайдемо рівняння міцності і жорсткості при оптимальних поєднаннях факторів:

$$x_3 = -0,892 + 0,247 x_1 - 0,607 x_2; \quad x_4 = 0,739 - 0,329 x_1 - 0,076 x_2;$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 = & 39,5 - 20,5 x_1 + 7,1 x_2 + 7,5 x_5 + \\ & + 3,5 x_1^2 + 0,6 x_2^2 + 4,3 x_6^2 - 2,5 x_1 x_2; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_2 = & 29,72 - 2,68 x_1 + 12,38 x_2 + 3,39 x_5 + 0,06 x_1^2 + \\ & + 0,25 x_2^2 - 1,15 x_1 x_2 - 0,56 x_1 x_5 + 1,04 x_2 x_5. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Вирішуючи отриману систему двох квадратичних рівнянь, при заданих значеннях активності  $x_5$  і нормальної густоти цементу  $x_6$ , для необхідних значень властивостей  $\hat{y}_1$  і  $\hat{y}_2$  знаходимо сукупність значень  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  і  $x_4$ , які визначають оптимальні склади бетону.



## 4. ПРОЕКТУВАННЯ СКЛАДІВ БЕТОНІВ РІЗНИХ ВИДІВ

### 4.1. Бетони для виробів, що піддають тепловологісній обробці

Розповсюджені розрахунково-експериментальні методи проектування складів не стосуються зазвичай бетонів, що тверднуть при пропарюванні та використовуються у виробництві збірних залізобетонних конструкцій. Підбір складів таких бетонів зазвичай рекомендується емпіричним методом «пробних замішувань» при 3-4 значеннях Ц/В і пропарюванні за прийнятим на підприємстві режимом. На основі отриманих міцнісних показників ( $R_{cm}$ ) будується залежність  $R_{cm}=f(\text{Ц/В})$  і графічно визначається необхідне значення Ц/В.

Труднощі розрахункового визначення Ц/В, що забезпечує необхідну міцність бетону після пропарювання, полягають у тому, що на останню разом з хіміко-мінералогічним і речовинним складом цементу, що використовується, суттєво впливають режимні параметри прискореного тверднення. Запропонована значна кількість рівнянь регресії міцнісних показників пропарювального бетону. Вони, однак, справедливі лише для конкретних умов і не можуть бути покладені в основу розрахунково-експериментального методу з широким діапазоном можливого застосування.

На даний час багатьма науковими колективами виконані широкі дослідження впливу різних технологічних факторів на міцність пропареного бетону, в результаті яких створена емпірична база для розробки розрахункових залежностей.

При проектуванні складів пропареного бетону на відміну від бетону нормального тверднення крім проектною чи марочною міцності через 28 діб ( $R_{cm}^{28}$ ) необхідно забезпечити відпускну (розпалубочну, передавальну) міцність після теплової обробки ( $R_{cm}^{tp}$ ). Нормовані міцнісні параметри можуть досягатися як за однакового, так і за різних Ц/В. В останньому випадку можна встановити визначальний міцнісний параметр, для досягнення якого необхідне більше значення Ц/В. Останній може



змінюватися залежно від величини і співвідношення  $R_{cm}^{28}$  і, режиму пропарювання, терміну подальшого тверднення.

В міру скорочення режиму пропарювання і терміну наступного витримування, збільшення чисельного значення  $R_{cm}^{np}$  створюються передумови, щоб остання стала визначальним міцністним параметром і навпаки. Звуженню інтервалу необхідних Ц/В аж до їх співпадання при зсуві в бік менших значень сприяє застосування швидкотверднучих цементів, добавок-прискорювачів тверднення, оптимізація режимів теплової обробки.

Міцність пропареного бетону у 28 діб може відхилитися від відповідної міцності бетону нормального тверднення в менший або більший бік. Дослідження і практичний досвід показують, що при оптимальному режимі пропарювання можна звести до мінімуму або взагалі усунути зниження 28-добової міцності.

**Приклад 4.1.1.** Розрахувати із застосуванням математичних моделей (4.1 ... 4.3) склади пропарених бетонів із міцністю на стиск в 28 діб  $R_{cm}^{28} = 24$  МПа і відпускну міцністю ( $R_{cm}^0$ ) 70 і 85% від  $R_{cm}^{28}$ . Рухомість бетонних сумішей: а) ОК=3 см; б) ОК=8 см. Оцінити можливу економію цементу при збільшенні  $R_{ц}$  до 51 МПа, зменшенні НГ до 24,6% і  $V_{п}$  до 6,5%, збільшенні  $\tau_{т0}$  до 18 год. і  $T_{в}$  до 80°C.

Характеристика вихідних матеріалів: активність цементу  $R_{ц} = 43$  МПа, нормальна густина НГ=26,8%, пісок із  $V_{п} = 9,5\%$ ,  $\rho_{п} = 2,65$  кг/л; щебінь із  $\rho_{щ} = 2,7$  кг/л;  $V_{щ} = 2\%$ . Тривалість теплової обробки  $\tau_{т0} = 12$  год. при температурі ізотермічного прогріву  $T_{в} = 70^\circ\text{C}$ .

1. Знаходимо шляхом розв'язання рівнянь (4.1 та 4.2) табл.4.1 необхідне Ц/В для досягнення заданих значень  $R_{cm}^0$  і  $R_{cm}^{28}$  при вихідних умовах і умовах, заданих для економії цементу.

2. За допомогою рівняння (4.3) розрахуємо витрати води (В).

3. З умови Ц=В Ц/В знайдемо витрати цементу і значення  $\Delta Ц$ .

4. Витрату щебеню знаходимо за формулою:



$$\rho_{щ} = \frac{1000}{\frac{1}{\rho_{щ}} + \frac{\alpha P_{щ}}{\rho_{н.щ}}}$$

де  $P_{щ}$  – пустотність крупного заповнювача;

$\rho_{н.щ}$  – його насипна густина, кг/л;

$\rho_{щ}$  – густина крупного заповнювачів, кг/л;

$\alpha$  – коефіцієнт розсушення зерен щебеню (гравію) цементно-піщаним розчином.

Таблиця 4.1

Рівняння регресії для розрахунку пропарених бетонів

| Вид бетону і вихідні матеріали  | Вихідний параметр                               | Рівняння регресії   | Фактори  |
|---|---|---|--|
| Бетон важкий із використанням портландцементу, кварцового піску і гранітного щебеню | $R_{см}^0$ , МПа (4 год. після пропарювання)    | $y_1 = 24,73 - 1,58x_1 + 12,0x_2 - 0,62x_5 + 3,66x_6 + 3,2x_7 + 2,06x_8 - 0,4x_1^2 - 0,6x_2^2 - 0,4x_5^2 + 0,15x_6^2 - 1,15x_7^2 - 0,68x_8^2 - 1,2x_1x_2 - 0,65x_1x_5 + 0,67x_1x_7 + 2,79x_2x_6 + 1,15x_2x_7 \quad (4.1)$   | $x_1 = (Л-1)/1$<br>$x_2 = (Ц/В-2,1)/0,8$<br>$x_5 = (НГ-27,2)/2,6$  |
| Бетон важкий із використанням портландцементу, кварцового піску і гранітного щебеню | $R_{см}^{28}$ , МПа (28 діб після пропарювання) | $y_2 = 31,96 - 1,63x_1 + 12,21x_2 - 0,69x_5 + 4,0x_6 + 2,13x_7 - 0,74x_8 - 0,3x_1^2 - 1,25x_2^2 - 0,4x_5^2 + 0,05x_6^2 - 0,15x_7^2 - 1,45x_8^2 - 0,98x_1x_2 - 1,68x_1x_6 + 1,01x_2x_7 + 0,99x_2x_8 + 6,4x_2x_6 \quad (4.2)$ | $x_6 = (R_{ц}-43,2)/8,7$<br>$x_7 = (\tau_{м.о}-14)/4$<br>$x'_7 = (lg \tau_{н.м} - 1,85)/0,4$<br>$x_8 = (T_{із}-80)/15$<br>$x_9 = (\tau_{н.м} - 1,85)/0,40$ |
| Важкий із використанням портландцементу, варцового піску і гранітного щебеню        | Водопотреба (В), л/м <sup>3</sup>               | $y_3 = 186,0 + 28,9x_1 + 10,3x_2 + 21,5x_3 + 14,1x_4 + 9,1x_5 - 2,7x_{12} + 6,8x_{22} + 11,3x_{32} + 7,8x_{42} + 5,3x_{52} + 1,6x_1x_4 + 2,1x_1x_5 + 2,1x_3x_4 - 2,4x_3x_5 \quad (4.3)$                                     | $x_1 = (Л-1)/1$<br>$x_2 = (Ц/В-2,1)/0,8$<br>$x_3 = (В_{щ} - 4)/3$<br>$x_4 = (В_{п} - 9)/15$<br>$x_5 = (НГ - 27,2)/2,6$                                     |

**Примітки:** Л - умовний показник легкоукладальності бетонної суміші, який знаходять за шкалою:

|                  |      |      |      |                   |       |       |
|------------------|------|------|------|-------------------|-------|-------|
| умовний показник | 0    | 0,6  | 1    | 1,4               | 1,8   | 2     |
|                  |      |      |      | осадка конуса, см |       |       |
| жорсткість, с    | 40 с | 2 см | 5 см | 8 см              | 11 см | 13 см |



$C/B$  – цементно-водне і водоцементне відношення;  
 $НГ$  – нормальна густина цементу, %;  
 $R_u$  – активність цементу, МПа;  
 $\tau_{т.о}$  і  $\tau_{н.т}$  – тривалість теплової обробки і тривалість нормального твердіння, дб;  
 $T_{із}$  – температура ізотермічного прогріву;  
 $B$  – водовміст бетонної суміші, л/м<sup>3</sup>;  
 $B_{щ}, B_{п}, B_{шл}$  – відповідно водопотреба щебеню, піску і шлаку, визначені за методикою Ю.М. Баженова, в %.  
 Коефіцієнт розсунення визначають по довідковим даним (табл.4.2).

Таблица 4.2

Коефіцієнт розсунення

| Витрата цементу, кг/м <sup>3</sup> | Значення $\alpha$ при В/Ц |      |      |      |      |      |
|------------------------------------|---------------------------|------|------|------|------|------|
|                                    | 0,3                       | 0,4  | 0,5  | 0,6  | 0,7  | 0,8  |
| 250                                | –                         | –    | –    | 1,26 | 1,32 | 1,38 |
| 300                                | –                         | –    | 1,3  | 1,36 | 1,42 | –    |
| 350                                | –                         | 1,32 | 1,38 | 1,44 | –    | –    |
| 400                                | 1,31                      | 1,4  | 1,45 | –    | –    | –    |
| 500                                | 1,44                      | 1,52 | –    | –    | –    | –    |
| 600                                | 1,52                      | 1,56 | –    | –    | –    | –    |

**Примітки:** 1. Таблиця складена для пісків з водопотребою  $Вп=7\%$ .

При збільшенні  $Вп$  на кожен відсоток  $\alpha$  зменшується на 0,03, а при зменшенні  $Вп$  - зростає відповідно на 0,03. 2. Для жорстких бетонних сумішей ( $Ц < 400$  кг/м<sup>3</sup>)  $\alpha = 1,05...1,15$ .

5. Витрату піску розраховуємо з рівняння:

$$П = (1000 - Ц / \rho_u - B / \rho_e - Щ / \rho_{щ}) \rho_n \cdot$$

Для орієнтованих розрахунків по моделях можуть бути використані номограми (рис. 4.1...4.3). Розрахункові склади бетонів наведені в табл. 4.3.

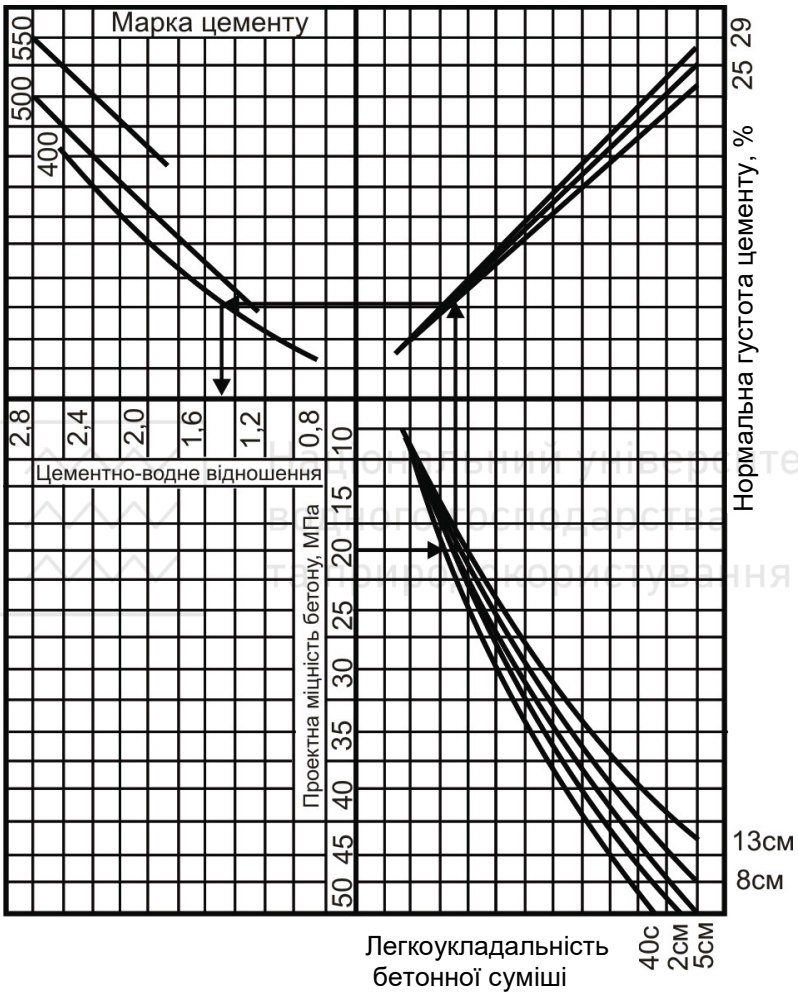
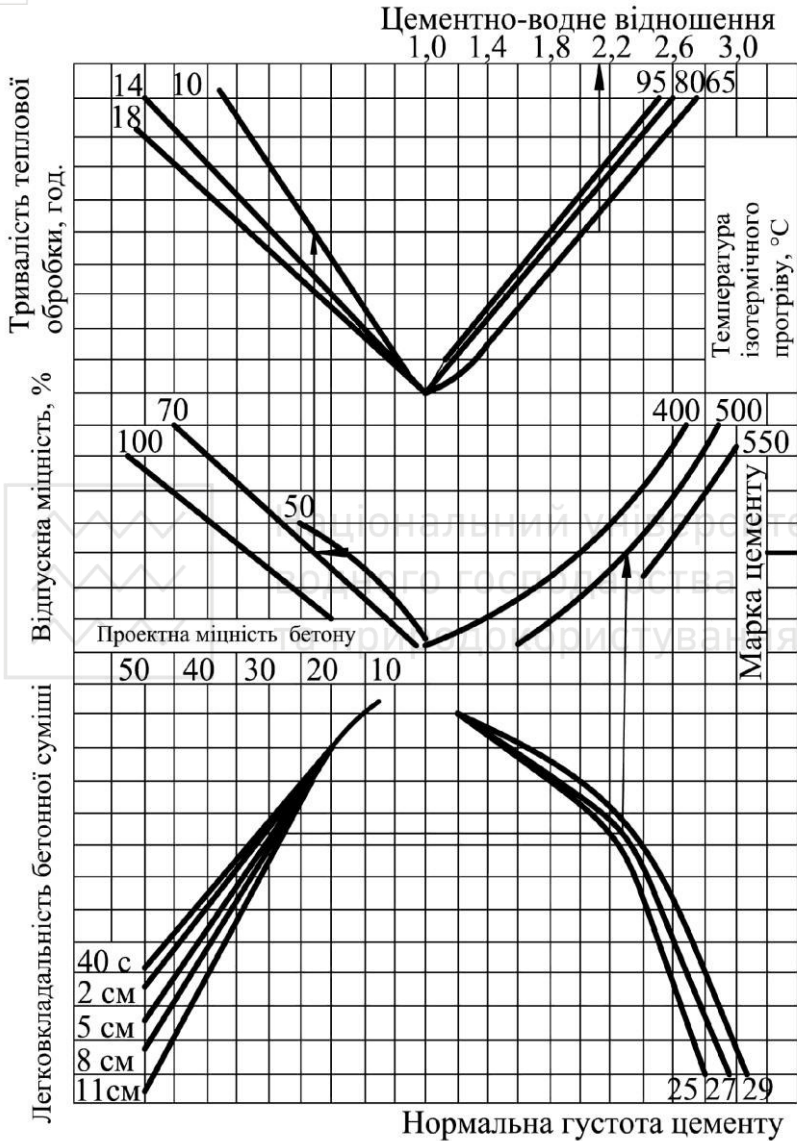


Рис. 4.1. Номограма визначення цементно-водного відношення



**Рис. 4.2.** Номограма визначення цементно-водного відношення бетону, що піддається тепловолігнійній обробці(ТВО)



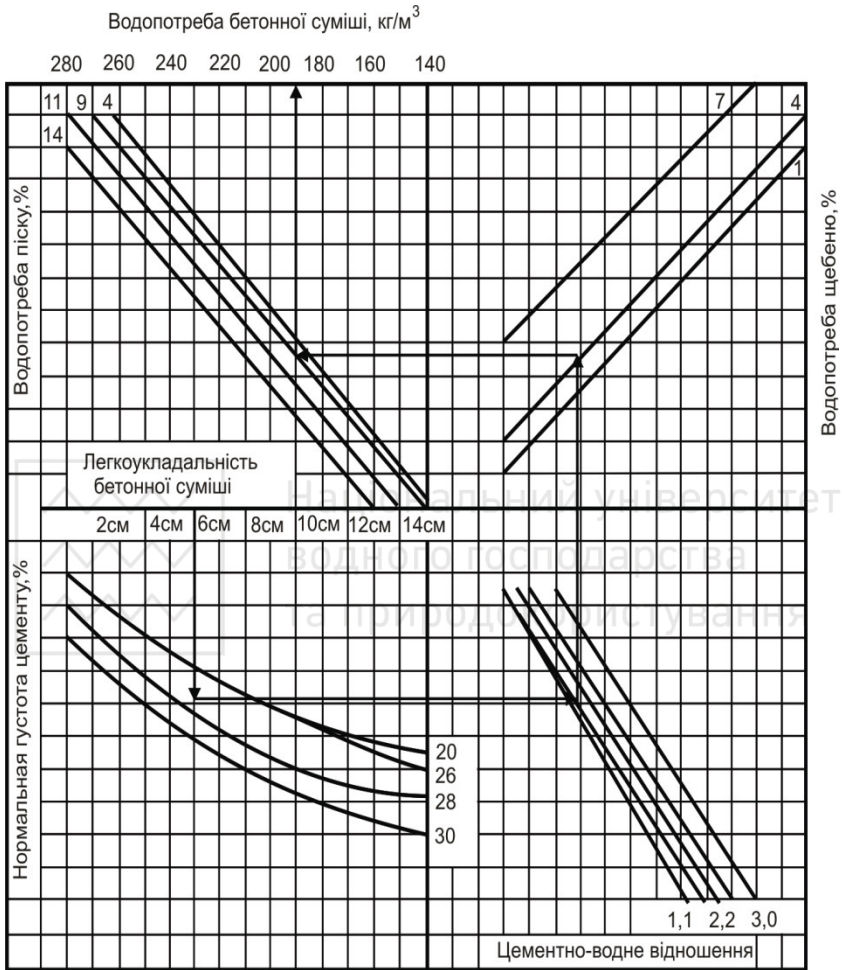


Рис. 4.3. Номограма визначення водопотреби бетонної суміші



Таблиця 4.3

Розрахункові склади бетону

| № | Нормовані параметри                  |       | Вихідні умови                      |                                 |                                       | Витрата компонентів, кг/м <sup>3</sup> |     |     |      |
|---|--------------------------------------|-------|------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|--|-----|-----|------|
|   | $\frac{R_{cm}^{28}}{R_{cm}^0}$ , МПа | ОК см | $\frac{R_{цл.}}{НГ}$ , МПа<br>%, % | $\frac{B_n}{B_{ш}}$ , %<br>%, % | $\tau_{т.о.}$ , год.<br>$T_{із}$ , °C | $\frac{Ц}{\Delta Ц}$                   | В   | П   | Щ    |
| 1 | $\frac{24}{17}$                      | 3     | $\frac{43}{26,8}$                  | $\frac{9,5}{2}$                 | $\frac{12}{70}$                       | 304                                    | 170 | 621 | 1330 |
| 2 | $\frac{24}{17}$                      | 8     | $\frac{43}{26,8}$                  | $\frac{9,5}{2}$                 | $\frac{12}{70}$                       | 355                                    | 192 | 597 | 1251 |
| 3 | $\frac{24}{17}$                      | 3     | $\frac{51}{24,6}$                  | $\frac{6,5}{2}$                 | $\frac{18}{80}$                       | $\frac{224}{26,3}$                     | 150 | 751 | 1323 |
| 4 | $\frac{24}{17}$                      | 8     | $\frac{51}{24,6}$                  | $\frac{6,5}{2}$                 | $\frac{18}{80}$                       | $\frac{276}{22,2}$                     | 167 | 707 | 1278 |
| 5 | $\frac{24}{21}$                      | 3     | $\frac{43}{26,8}$                  | $\frac{9,5}{2}$                 | $\frac{12}{70}$                       | 365                                    | 178 | 572 | 1305 |
| 6 | $\frac{24}{21}$                      | 8     | $\frac{43}{26,8}$                  | $\frac{9,5}{2}$                 | $\frac{12}{70}$                       | 417                                    | 194 | 559 | 1233 |
| 7 | $\frac{24}{21}$                      | 3     | $\frac{51}{24,6}$                  | $\frac{6,5}{2}$                 | $\frac{18}{80}$                       | $\frac{249}{31,8}$                     | 148 | 750 | 1309 |
| 8 | $\frac{24}{21}$                      | 8     | $\frac{51}{24,6}$                  | $\frac{6,5}{2}$                 | $\frac{18}{80}$                       | $\frac{290}{30,5}$                     | 165 | 711 | 1267 |

**Приклад 4.1.2.** Запроектувати склад литого шлаковміщуючого бетону класів В10...В30 прискореного твердіння при забезпеченні максимального значення коефіцієнта ефективності цементу ( $R_0/C$ ).

Для розв'язання цієї задачі був отриманий комплекс математичних моделей властивостей литого шлаковміщуючого бетону (табл. 4.4, 4.5).

При розрахунку складу литого шлаковміщуючого бетону спочатку розраховується цементно-водне відношення з умови забезпечення проектної ( $y_3$ ) і відпускнуї ( $y_2$ ) міцності бетону (рис. 4.4).



Таблиця 4.4

Умови планування експериментів

| Фактори  |             | Рівні варіювання |      |      | Інтервал варіювання |
|--|-------------|------------------|------|------|---------------------|
| Натуральний вид                                | Кодовий вид | -1               | 0    | +1   |                     |
| Частка щебеню у суміші заповнювачів<br>$r_{щ}$ | $x_1$       | 0                | 0,33 | 0,66 | 0,33                |
| Частка шлаку у дрібному заповнювачі<br>$r_{ш}$ | $x_2$       | 0                | 0,5  | 1,0  | 0,5                 |
| Водопотреба щебеню, %                          | $x_3$       | 1,5              | 2,5  | 3,5  | 1,0                 |
| Водопотреба шлаку, %                           | $x_4$       | 7,0              | 9,0  | 11,0 | 2,0                 |
| Водопотреба піску, %                           | $x_5$       | 5,0              | 10,0 | 15,0 | 5,0                 |
| Цементно-водне відношення                      | $x_6$       | 1,3              | 1,9  | 2,5  | 0,6                 |

Значення частки щебеню і шлаку розраховують за формулами, отриманими спільним розв'язанням моделей  $u_4$ ,  $u_5$  за умови забезпечення максимального значення коефіцієнта ефективності цементу залежно від значення відпускнуї міцності бетону ( $\partial u / \partial x_1 = 0$ ) і  $\partial u / \partial x_2 = 0$ ).

при 70 і 100% відпускнуї міцності :

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,456 - 0,036x_3 + 0,027x_4 - 0,082x_5 + 0,05x_6; \\ x_2 &= 0,006 + 0,028x_3 + 0,024x_4 + 0,048x_5 + 0,027x_6; \end{aligned} \quad (4.4)$$

при 50% відпускнуї міцності:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,470 - 0,081x_3 - 0,020x_4 - 0,105x_5 + 0,154x_6; \\ x_2 &= 0,088 - 0,015x_3 - 0,035x_4 - 0,011x_5 + 0,144x_6. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Витрата води для досягнення литої суміші знаходиться за моделлю  $u_1$  або з номограми (рис. 4.5), побудованої в результаті обробки результатів розрахунку за цією моделлю.

Визначення витрати піску, щебеню і шлаку здійснюється в такій послідовності:

$$r_{щ} = r'_{щ} \cdot r; \quad r_{п} = r - r_{щ}; \quad (4.5)$$

$$\text{де } r = 1 - r_{ш}; \quad (4.6)$$



Таблиця 4.5

Властивості литого шлаковміщуючого бетону

| Властивості  | Вид рівняння  |
|--|---|
| Водопотреба бетонної суміші, кг/м <sup>3</sup>                     | $y_1 = 208,6 - 7,7x_1 - 3,4x_2 - 5,5x_3 + 8,4x_4 + 2,5x_5 + 10,0x_6 + 17,0x_1^2 + 26,5x_2^2 + 1,5x_3^2 - 1,0x_4^2 + 12,1x_1x_2 + 5,6x_1x_3 - 5,1x_1x_5 + 8,5x_2x_4 - 10x_2x_5$  |
| Міцність бетону при стиску через 4 год. після ТВО, МПа             | $y_2 = 18,9 + 2,1x_1 + 1,0x_2 + 0,4x_3 + 0,5x_4 + 0,5x_5 + 8,9x_6 - 0,8x_1^2 - 2,0x_2^2 + 0,3x_3^2 - 0,7x_4^2 + 1,1x_5^2 + 1,5x_6^2 - 1,3x_1x_3 - 0,3x_1x_5 + 0,7x_1x_6 - 0,3x_2x_3 + 0,3x_2x_4 - 0,2x_2x_5 + 0,7x_2x_6 - 0,9x_3x_4 - 0,3x_3x_5 - 0,8x_4x_5$  |
| Міцність бетону при стиску через 28 доби після ТВО, МПа            | $y_3 = 30,9 + 2,6x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 1,8x_4 + 1,8x_5 + 13x_6 + 0,4x_1^2 - 1,5x_2^2 + 1,3x_3^2 - 1,0x_4^2 + 0,9x_5^2 - 0,8x_6^2 - 1,4x_1x_2 - 0,6x_1x_3 - 0,8x_1x_4 - 0,8x_1x_5 + 2,0x_1x_6 + 1,1x_2x_3 - 1,3x_2x_5 + 2,4x_2x_6 - 0,3x_3x_4 - 0,4x_3x_5 - 0,3x_4x_5$   |
| Коефіцієнт ефективності цементу для бетону через 4 год. після ТВО  | $y_4 = 0,415 + 0,065x_1 + 0,016x_2 + 0,005x_3 + 0,069x_4 - 0,071x_1^2 - 0,080x_2^2 + 0,009x_3^2 - 0,010x_4^2 + 0,02x_5^2 - 0,009x_6^2 - 0,033x_1x_2 - 0,02x_1x_3 - 0,010x_1x_5 + 0,008x_1x_6 + 0,009x_2x_3 + 0,005x_2x_5 + 0,006x_2x_6 - 0,010x_3x_4 - 0,015x_3x_5 - 0,007x_3x_6 - 0,010x_4x_5 - 0,008x_4x_6 - 0,005x_5x_6$ |
| Коефіцієнт ефективності цементу для бетону через 28 доби після ТВО | $y_5 = 0,772 + 0,082x_1 - 0,015x_2 + 0,008x_3 + 0,006x_5 + 0,095x_6 - 0,028x_1^2 - 0,118x_2^2 - 0,021x_3^2 + 0,026x_4^2 - 0,043x_5^2 - 0,003x_6^2 - 0,050x_1x_2 + 0,013x_1x_4 - 0,021x_1x_5 - 0,005x_2x_5 + 0,009x_2x_6 + 0,010x_3x_4 - 0,015x_3x_5 - 0,021x_3x_6 + 0,008x_4x_5 - 0,009x_4x_6 - 0,029x_5x_6$                |



$$\text{Щ} = r_{\text{щ}} \cdot K; \quad \text{Ш} = r_{\text{ш}} \cdot K; \quad \text{П} = r_{\text{п}} \cdot K; \quad (4.7)$$

$$\text{де } K = (1000 - \text{Щ}/\rho_{\text{щ}} - \text{В}/\rho_{\text{в}}) / (r_{\text{щ}}/\rho_{\text{щ}} + r_{\text{ш}}/\rho_{\text{ш}} + r_{\text{п}}/\rho_{\text{п}}) \quad (4.8)$$

Наприклад, необхідно визначити склад литого шлаковмішуючого бетону класу В22,5 ( $R_b = 25,0$  МПа) з відпускною міцністю 50 % при використанні портландцементу марки 400 ( $\rho_{\text{ц}} = 3,1$  кг/л, НГ = 27%), кварцового піску ( $V_{\text{п}} = 10$  %,  $\rho_{\text{п}} = 2,69$  кг/л), гранітного щебеню ( $V_{\text{щ}} = 2,5$  %,  $\rho_{\text{щ}} = 2,61$  кг/л), паливного шлаку ( $V_{\text{ш}} = 9$  %,  $\rho_{\text{ш}} = 2,45$  кг/л), суперпластифікатора С-3 у кількості 0,7 % від маси цементу.

За рис. 4.4 встановлюємо необхідне Ц/В = 1,72. За формулою (4.5) визначаємо оптимальну частку щебеню у суміші заповнювачів і частку шлаку в дрібному заповнювачі:

$$x_1 = 0,470 - 0,081 \cdot 0 - 0,020 \cdot 0 - 0,015 \cdot 0 + 0,154 \cdot (-0,33) = 0,419;$$

$$x_2 = 0,088 - 0,015 \cdot 0 - 0,035 \cdot 0 - 0,011 \cdot 0 + 0,144 \cdot (-0,33) = 0,040.$$

У натуральних одиницях:

$$r_{\text{щ}} = 0,33 \cdot 0,419 + 0,33 = 0,47;$$

$$r_{\text{ш}} = 0,5 \cdot 0,040 + 0,5 = 0,52.$$

Визначаємо витрату води за рис. 4.5:  $V = 208$  кг/м<sup>3</sup>

Витрата цементу складе:  $\text{Ц} = 208 \cdot 1,72 = 358$  кг/м<sup>3</sup>.

Витрата добавки С-3:  $\text{Д} = 358 \cdot 0,007 = 2,51$  кг/м<sup>3</sup>

Знаходимо розрахункові значення оптимальної частки шлаку  $r_{\text{ш}}$  і піску  $r_{\text{п}}$  у суміші заповнювачів за формулами (4.5, 4.6):

$$r = 1 - 0,47 = 0,53; \quad r_{\text{ш}} = 0,53 \cdot 0,52 = 0,28; \quad r_{\text{п}} = 0,53 - 0,28 = 0,25$$

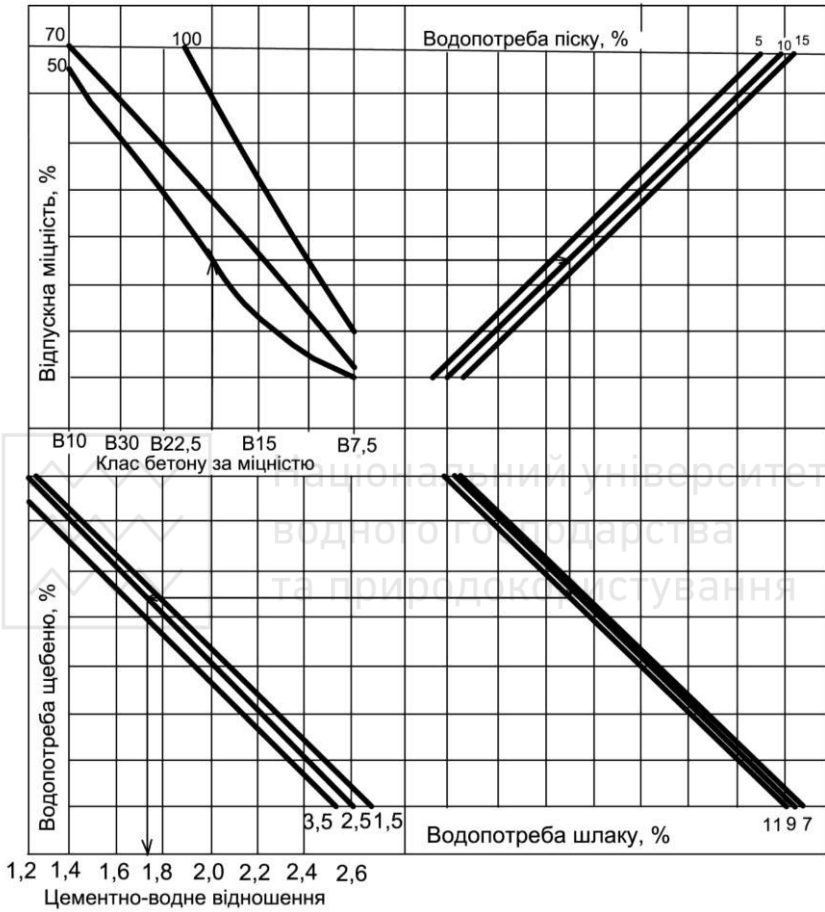
За формулами (4.7, 4.8) визначаємо витрату щебеню, шлаку і піску:

$$K = (1000 - 358/3,1 - 208/1) / (0,47/2,61 + 0,25/2,69 + 0,28/2,45) = 1746;$$

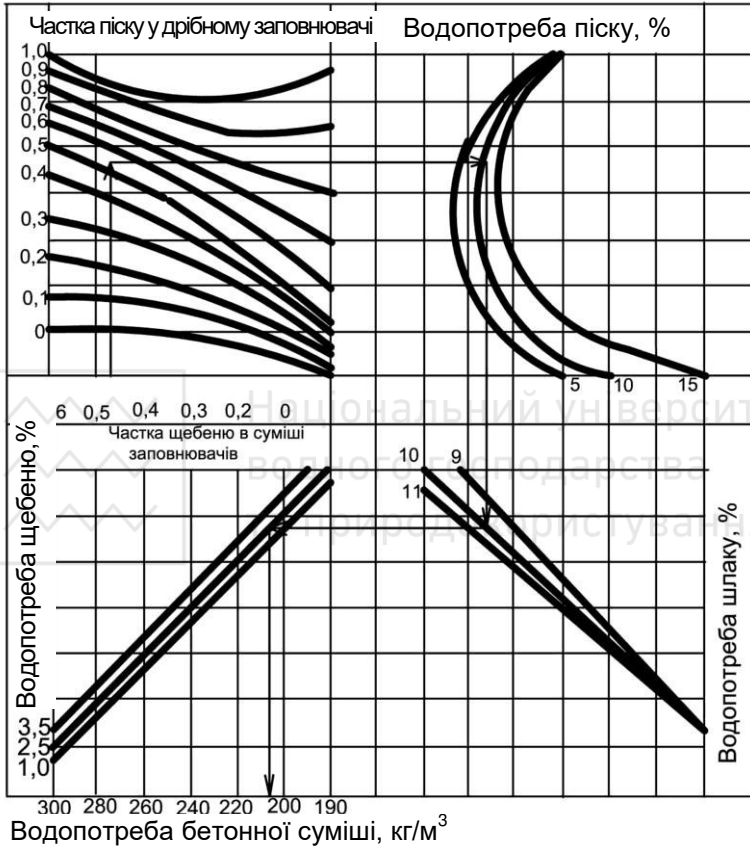
$$\text{Щ} = 1746 \cdot 0,47 = 820 \text{ кг/м}^3;$$

$$\text{Ш} = 1746 \cdot 0,28 = 489 \text{ кг/м}^3;$$

$$\text{П} = 1746 \cdot 0,25 = 436 \text{ кг/м}^3.$$



**Рис. 4.4.** Номограма визначення цементно-водного відношення



**Рис. 4.5.** Номограма визначення водопотреби бетонної суміші



## 4.2. Гідротехнічні бетони

Гідротехнічні бетони призначені для виготовлення конструкцій і зведення споруд, які постійно чи періодично знаходяться у воді. Конструкції із застосуванням гідротехнічного бетону поділяють на *масивні* та *немасивні*. Масивні конструкції вимагають спеціальних заходів для регулювання температурних напружень, які виникають при виділенні теплоти в бетоні.

Вимоги до гідротехнічного бетону пред'являються диференційовано з врахуванням його зонального розподілу в конструкціях (табл. 4.6).

Таблиця 4.6

Вимоги до гідротехнічного бетону по зонах

| Вимоги до бетону       | Масивні споруди          |                        |          |                |                        |          | Немасивні споруди |                        |          |
|------------------------|--------------------------|------------------------|----------|----------------|------------------------|----------|-------------------|------------------------|----------|
|                        | Зовнішня зона            |                        |          | Внутрішня зона |                        |          |                   |                        |          |
|                        | Зони відносно рівня води |                        |          |                |                        |          |                   |                        |          |
|                        | Підводна                 | Перемінного рівня води | Надводна | Підводна       | Перемінного рівня води | Надводна | Підводна          | Перемінного рівня води | Надводна |
| Водостійкість          | +                        | +                      | +        | +              | +                      | -        | +                 | +                      | +        |
| Водонепроникність      | +                        | +                      | +        | +              | +                      | -        | +                 | +                      | +        |
| Морозостійкість        | -                        | +                      | +        | -              | -                      | -        | -                 | +                      | +        |
| Низьке тепло-виділення | +                        | +                      | +        | +              | +                      | +        | -                 | -                      | -        |

**Примітка.** Знак "+" означає, що вимога пред'являється.





Комплекс проектних вимог до гідротехнічних бетонів забезпечується вибором вихідних матеріалів і добавок, проектуванням складів бетонних сумішей відповідно до умов експлуатації з урахуванням рекомендованих обмежень (табл. 4.7).

Таблиця 4.7  
Рекомендовані гранично допустимі величини В/Ц для  
гідротехнічного бетону

| Зона й умови експлуатації  | Немасивні залізобетонні конструкції у воді |         | Зовнішня зона конструкцій масивних споруд у воді |         |
|--|--|---------|--|---------|
|  | морський                                   | прісний | морській   | прісний |
| Зона змінного рівня в кліматичних умовах:<br>особливо суворих<br>суворих<br>помірних | 0,42                                       | 0,47    | 0,45   | 0,48    |
|  | 0,45                                       | 0,50    | 0,47   | 0,52    |
|  | 0,50                                       | 0,55    | 0,55   | 0,58    |
| Підводна зона:   |  |         |  |         |
| напірна  | 0,55                                       | 0,58    | 0,56   | 0,58    |
| безнапірна   | 0,60                                       | 0,62    | 0,62   | 0,62    |
| Надводна зона,<br>частково омивана водою   | 0,55                                       | 0,60    | 0,65   | 0,65    |

Як і для інших видів важких бетонів для гідротехнічних бетонів міцність у проектному віці нормується згідно ДСТУ БВ.2.7-43-96 за класами міцності на стиск, осьовий розтяг і розтяг при згині.

Для бетону конструкцій, що піддаються в процесі експлуатації поперемінному заморожуванню та відтаванню, призначають наступні марки за морозостійкістю (F): 50, 75, 100, 150, 200, 300, 400, 500, 600, 800, 1000. При обмеженні проникності, підвищеній щільності і корозійній стійкості призначають марки за водонепроникністю (W): 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20.



Крім проектних вимог за міцністю, морозостійкістю і водонепроникністю для гідротехнічного бетону у відповідності до умов роботи та норм проектування можливе пред'явлення ряду додаткових вимог. Проектний вік, у якому повинні бути забезпечені технічні вимоги, вказують у документації на конструкції. Він призначається згідно норм проектування залежно від умов, вимог до бетону, способів зведення та термінів фактичного завантаження конструкцій. Якщо проектний вік не зазначений, технічні вимоги до бетону повинні бути забезпечені в 28 діб.

Вибір виду і марки (чи класу) *цементу*, його мінералогічного і речовинного складу обумовлені як необхідними міцнісними властивостями бетону і кінетикою наростання міцності в часі, так і рядом інших властивостей, що визначають його довговічність у конструкціях і спорудах при заданих умовах їх експлуатації. Для гідротехнічного бетону масивних споруд поширене застосування помірно- та низькотермічних цементів з нормованим хіміко-мінералогічним складом і підвищеним вмістом активних мінеральних добавок. Для бетону, що працює в умовах поперемінного заморожування і відтавання при впливі мінералізованого водного середовища застосовують сульфатостійкі низькоалюмінатні цементи.

Ефективне застосування пластифікованих і гідрофобних портландцементів з добавками ПАР, що дають можливість покращити весь комплекс будівельно-технічних властивостей бетону, знизити витрату в'язучих, енерго- і трудомісткість бетонних робіт. При необхідності швидкого забезпечення достатньої міцності бетону, особливо при виготовленні збірних залізобетонних елементів застосовують також швидкотверднучі цементи.

**Приклад 4.2.1** *Запроектувати оптимальні склади гідротехнічного бетону із заданими значеннями міцності, морозостійкості й водонепроникності в умовах нормального твердіння і теплової обробки.*

В якості вихідних матеріалів виступають: середньоалюмінатний портландцемент ( $C_3S = 55...59\%$ ,  $C_2S = 16...20\%$ ,  $C_3A = 6...8\%$ ) із вмістом доменного гранульованого



шлаку - 10 %; гранітний щебінь фракцій 5...10 мм, 10...20 мм, 20...40 мм і 40...70 мм; кварцовий пісок з модулем крупності 2,1 і водопотребою 7,5 %. В якості повітрявтягувальної добавки застосовують добавку СНП.

При пропарюванні зразків температура ізотермічного витримування становить 80°C. У межах загальної тривалості тепловологісної обробки (14...18 год.) попереднє витримування – 5 год., при загальній тривалості 10 год. – 3 год. Швидкість підйому температури в камері становить 15°C за годину.

Умови планування експериментів наведені в табл. 4.8.

Таблиця 4.8

Умови планування експериментів

| Фактори                                 |                 | Рівні варіювання |       |        | Інтервал варіювання |
|---|-----------------|------------------|-------|--------|---------------------|
| Натуральний вид                         | Кодований вид   | -1               | 0     | +1     |                     |
| Початковий водовміст, кг/м <sup>3</sup> | x <sub>1</sub>  | 150              | 180   | 210    | 30                  |
| Цементно-водне відношення               | x <sub>2</sub>  | 1,3              | 2,1   | 2,9    | 0,8                 |
| Максимальна крупність щебеню, мм        | x <sub>3</sub>  | 10               | 40    | 70     | 30                  |
| Витрата добавки СНП, кг/м <sup>3</sup>  | x <sub>4</sub>  | 0                | 0,06  | 0,12   | 0,06                |
| Нормальна густина цементу, %            | x <sub>5</sub>  | 24,6             | 27,2  | 29,8   | 2,6                 |
| Активність цементу, МПа                 | x <sub>6</sub>  | 34,5             | 41,2  | 47,9   | 6,7                 |
| Тривалість ТВО, год.                    | x <sub>7</sub>  | 10               | 14    | 18     | 4                   |
| Умовна легкоукладальність               | x <sub>8</sub>  | 0                | 1     | 2      | 1                   |
| Тривалість нормального твердіння, доба  | x <sub>9</sub>  | lg 28            | lg 71 | lg 180 | lg 2.54             |
| Витрата цементу, кг/м <sup>3</sup>      | x <sub>10</sub> | 234              | 378   | 522    | 144                 |



Мінімізація витрати цементу в проєктованих складах бетону досягається при оптимальній частці піску в суміші заповнювачів ( $r$ ), при якій забезпечується мінімальна водопотреба бетонних сумішей. Для знаходження  $r_{opt}$  у результаті обробки результатів експериментів, виконаних за планом  $Na_5$ , побудована спеціальна квадратична модель (табл. 4.9).

Таблиця 4.9

Властивості бетонної суміші

| Властивості                                   | Вид рівняння  |
|---|---|
| Об'єм емульгованого повітря, %                | $y_1 = 2,27 + 0,72x_1 - 0,63x_{10} - 0,47x_3 + 2,14x_4 - 0,18x_5 - 0,20x_1^2 + 0,24x_{10}^2 + 0,17x_3^2 - 0,22x_4^2 - 0,09x_5^2 - 0,13x_1x_2 + 0,71x_1x_4 - 0,61x_{10}x_4 - 0,46x_3x_4 - 0,13x_3x_5 - 0,19x_4x_5$ |
| Водопотреба суміші, кг/м <sup>3</sup>         | $y_2 = 169,2 + 26,4x_8 + 13,4x_2 - 20x_3 - 8,3x_4 + 9,3x_5 - 5,2x_8^2 + 5,8x_2^2 + 8,8x_3^2 + 2,8x_4^2 + 3,8x_5^2 + 1,0x_8x_3 + 2,6x_8x_5 - 1,0x_2x_3 + 3,1x_2x_4 + 2,25x_2x_5 - 1,1x_3x_5 + 1,0x_4x_5$           |
| Оптимальна частка піску в суміші заповнювачів | $y_3 = 0,284 + 0,03x_1 - 0,039x_2 - 0,02x_3 + 0,009x_4 + 0,007x_1^2 + 0,016x_2^2 + 0,008x_3^2 + 0,006x_4^2 - 0,005x_1x_2 + 0,01x_1x_3 + 0,009x_2x_4 - 0,004x_3x_4 + 0,007x_4x_5$                                  |

Крім того, отримані квадратичні моделі водопотреби бетонної суміші й об'єму емульгованого повітря (табл. 4.9). При отриманні моделі водопотреби планували (табл. 4.9) значення умовної легкоукладальності ( $x_8$ )(табл..4.10) :

Таблиця 4.10

Планування значень умовної легкоукладальності

| Рівень варіювання           | -1            | -0,4 | 0                 | +0,4 | +1 |
|-----------------------------|---------------|------|-------------------|------|----|
| Показник легкоукладальності | жорсткість, с |      | осадка конуса, см |      |    |
|                             | 20            | 8    | 2                 | 5    | 13 |

При отриманні моделі об'єму емульгованого повітря замість Ц/В ( $x_2$ ), варіювали (табл. 4.8) витрати цементу Ц ( $x_{10}$ ).

Для бетонів нормального твердіння і пропарених бетонів отримані шестифакторні моделі міцності, морозостійкості й



водонепроникності бетону, що враховують вплив легкоукладальності бетонної суміші ( $x_8$ ), Ц/В ( $x_2$ ), витрати добавки СНП ( $x_4$ ), нормальної густоти й активності цементу ( $x_5$  і  $x_6$ ), а також тривалості нормального ( $x_9$ ) або прискороного твердіння ( $x_7$ ).

Таблиця 4.11

Властивості бетону нормального твердіння

| Властивості              | Вид рівняння  |
|--------------------------|---|
| Міцність при стиску, МПа | $y_4 = 36,93 - 1,88x_8 + 14,73x_2 - 3,62x_4 - 0,86x_5 + 4,97x_6 + 6,08x_9 - 0,05x_8^2 - 1,85x_2^2 - 0,2x_4^2 - 0,3x_5^2 + 0,05x_6^2 - 0,8x_9^2 - 0,61x_8x_4 - 0,45x_8x_5 + 1,23x_8x_6 + 0,97x_2x_4 - 0,63x_2x_5 + 2,12x_2x_6 + 2,14x_2x_9 + 0,99x_4x_6 - 0,46x_5x_6 + 0,88x_6x_7$ |
| Морозостійкість, цикли   | $y_5 = 378,9 - 67,8x_8 + 162,3x_2 + 147,7x_4 - 27,4x_5 + 21,8x_6 + 63,2x_9 + 9,7x_8^2 - 38,8x_2^2 + 6,7x_4^2 - 9,8x_5^2 + 11,7x_6^2 + 2,2x_9^2 + 29,4x_8x_2 - 8,7x_8x_5 - 16,6x_8x_9 + 26,6x_2x_4 - 15,8x_2x_5 + 18,7x_2x_9 + 7,1x_4x_6 + 23,7x_4x_9 + 13,8x_6x_9$                |
| Водонепроникність, МПа   | $y_6 = 0,92 + 0,04x_8 + 0,56x_2 + 0,02x_4 + 0,01x_5 + 0,06x_6 + 0,25x_9 - 0,05x_8^2 + 0,08x_2^2 - 0,01x_4^2 + 0,004x_5^2 + 0,03x_6^2 - 0,02x_8x_2 + 0,01x_8x_4 - 0,02x_8x_5 + 0,04x_2x_6 + 0,14x_2x_9$  |

Таблиця 4.12

Властивості пропареного бетону

| Властивості  | Вид рівняння   |
|--|--|
| Границя міцності при стиску через 4 год. після ТВО, МПа  | $y_7 = 21,98 - 0,93x_8 + 10,5x_2 - 1,03x_4 - 1,61x_5 + 2,32x_6 + 2,65x_7 - 0,49x_8^2 - 0,81x_2^2 - 0,09x_5^2 - 0,06x_6^2 - 0,96x_7^2 - 2,00x_8x_2 - 0,88x_8x_4 - 1,36x_8x_5 - 1,43x_8x_6 + 2,68x_2x_6 + 2,60x_2x_7 - 0,91x_4x_5 - 0,82x_4x_6 - 1,01x_4x_7 + 1,18x_5x_7 + 1,22x_6x_7$ |
| Границя міцності при стиску через 28 доби після ТВО, МПа | $y_8 = 30,6 - 2,24x_8 + 13,03x_2 - 2,86x_4 - 0,99x_5 + 3,97x_6 + 1,94x_7 - 0,05x_8^2 - 1,75x_2^2 - 0,5x_4^2 - 0,35x_5^2 + 0,1x_6^2 - 0,2x_7^2 - 1,29x_8x_2 + 1,18x_2x_4 - 0,63x_2x_5 + 2,71x_2x_6 + 0,97x_2x_7$  |



| Властивості            | Вид рівняння   |
|------------------------|--|
| Морозостійкість, цикли | $y_9 = 281,9 - 38,3x_8 + 145,4x_2 + 89,2x_4 - 16x_5 + 17,7x_7 + 8,3x_8^2 - 15,7x_2^2 - 12,2x_4^2 - 5,2x_5^2 + 9,3x_6^2 - 2,2x_7^2 - 13,3x_8x_2 + 14,8x_8x_4 + 7,3x_2x_4 + 21,2x_6x_7$  |
| Водонепроникність, МПа | $y_{10} = 0,57 + 0,07x_8 + 0,43x_2 + 0,03x_5 + 0,06x_6 + 0,05x_7 - 0,02x_8^2 + 0,08x_2^2 + 0,02x_4^2 - 0,06x_7^2 + 0,07x_8x_2 + 0,03x_8x_4 - 0,04x_2x_4 + 0,03x_2x_5 + 0,06x_2x_6 - 0,02x_4x_6 - 0,02x_4x_7 + 0,01x_5x_6 + 0,02x_6x_7$ |

Комплекс поліноміальних моделей дозволяє порівняно просто за допомогою ЕОМ вирішувати задачі оптимізації складів бетону у широкому діапазоні проектних властивостей. Суть методу полягає в тому, що моделі  $y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}$  вирішують відносно Ц/В, фіксуючи інші фактори на необхідних рівнях і задаючись певною міцністю, морозостійкістю й водонепроникністю. Далі підраховують витрату води за рівнянням  $y_2$  й оптимальну частку піску в суміші заповнювачів  $y_3$ , а потім за звичайних формулах – витрату цементу, піску й щебенів на  $1 \text{ м}^3$  бетонної суміші.

Розглянемо характерні приклади проектування оптимальних складів бетону, що вирішуються із застосуванням отриманих моделей.

*Наприклад необхідно визначити склади гідротехнічного бетону у віці 28 і 180 діб при нормальному твердінні (повітрятягувальні добавки не застосовуються).*

На першому етапі встановлюємо значення Ц/В необхідні для досягнення різних марок бетону за міцності на стиск з рівняння  $y_4$ . Визначивши значення  $x_2$  при прийнятих значеннях інших факторів, з рівнянь  $y_5$  і  $y_6$ , знаходимо морозостійкість і водонепроникність бетону, що відповідають маркам бетону за міцністю при стиску. Потім підраховуємо витрату води з рівняння  $y_2$  й оптимальну частку піску в суміші заповнювачів з рівняння  $y_3$ . Витрату цементу, піску та щебеню знаходимо за формулами методу абсолютних об'ємів.

За даними розрахунків, виконаних за допомогою математичних моделей (табл. 4.8, 4.11, 4.12), побудовані



номограми (рис.4.6, 4.7), використовуючи які можна визначити витрату води, Ц/В і  $g$  при заданих вихідних умовах. При цьому використовується встановлене орієнтовне співвідношення показників властивостей бетону нормального твердіння (табл. 4.11) і значення поправочних коефіцієнтів для коректування Ц/В для бетону у віці 180 діб (табл. 4.13).

Таблиця 4.13

Значення поправочних коефіцієнтів для уточнення Ц/В  
у віці 180 діб

| Марка за міцністю |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| 150               | 200  | 250  | 300  | 350  | 400  | 450  | 500  |
| 0,96              | 0,81 | 0,76 | 0,73 | 0,71 | 0,70 | 0,68 | 0,67 |

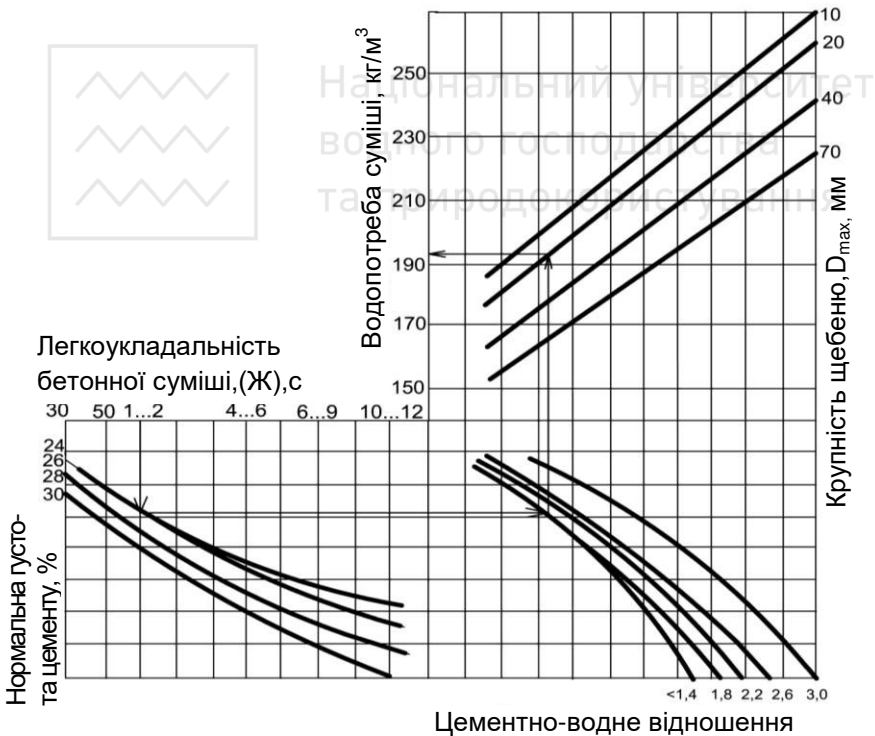
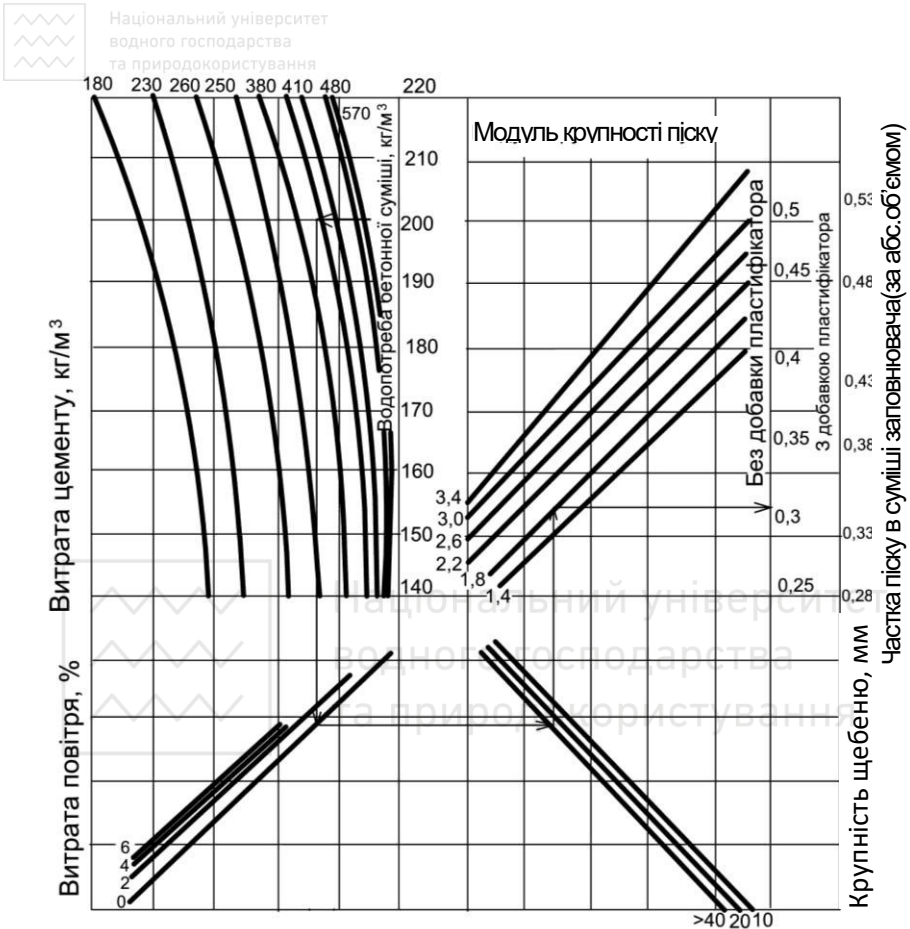


Рис. 4.6. Номограма визначення водопотреби бетонної суміші



**Рис. 4.7.** Номограма визначення частки піску в суміші заповнювачів

Наприклад, якщо для одержання бетону з маркою за міцністю не менше 200, за морозостійкістю F150 і водонепроникності W2 у віці 28 доби використовуються портландцемент марки 400 ( $\rho_{\text{ц}} = 3,1 \text{ кг/л}$ , НГ = 27 %), кварцовий пісок ( $B_{\text{п}} = 11 \%$ ,  $\rho_{\text{п}} = 2,6 \text{ кг/л}$ ); гранітний щебінь фракції 5...20 мм ( $B_{\text{щ}} = 4 \%$ ;  $\rho_{\text{щ}} = 2,65 \text{ кг/л}$ ) і добавка ЛСТ у кількості 0,25 % від маси цементу, то рухомість бетонної суміші повинна становити 1...4 см.





За табл. 4.14 встановлюємо, що клас бетону за міцністю, що забезпечує необхідну морозостійкість і водонепроникність, повинен становити В25 ( $R_6 = 30,0$  МПа).

За рис. 4.3 встановлюємо необхідне цементно-водне відношення:  $Ц/В = 1,96$ .

Витрата води (рис. 4.4) складе  $190 \text{ кг/м}^3$ , а з урахуванням застосування добавки ЛСТ (табл. 4.15)  $В = 190 \cdot 0,92 = 175 \text{ кг/м}^3$ .

Витрата цементу:  $Ц = 175 \cdot 1,96 = 343 \text{ кг/м}^3$ .

Таблиця 4.14

Орієнтовне співвідношення показників властивостей бетону нормального твердіння без повітрявтягувальних добавок

| Рухомість суміші, см | Марки бетону у віці, діб |                     |                       |              |                     |                       |
|----------------------|--------------------------|---------------------|-----------------------|--------------|---------------------|-----------------------|
|                      | 28                       |                     |                       | 180          |                     |                       |
|                      | Міцність (М)             | Морозостійкість (F) | Водонепроникність (W) | Міцність (М) | Морозостійкість (F) | Водонепроникність (W) |
| 1...4                | 20                       | 50...75             | 2                     | 20           | 50...75             | 2...4                 |
| 5...9                | 20                       | 50...75             | 2                     | 20           | 50...75             | 2...4                 |
| 10...15              | 20                       | 50                  | 2                     | 20           | 50                  | 2...4                 |
| 1...4                | 30                       | 100...150           | 2...4                 | 30           | 150...200           | 4...6                 |
| 5...9                | 30                       | 100                 | 2...4                 | 30           | 100...150           | 4...6                 |
| 10...15              | 30                       | 75...100            | 2...4                 | 30           | 75...100            | 4...6                 |
| 1...4                | 40                       | 200...250           | 6...8                 | 40           | 250                 | 8...10                |
| 5...9                | 40                       | 200...250           | 6...8                 | 40           | 200...250           | 8...10                |
| 10...15              | 40                       | 100...150           | 6...8                 | 40           | 150...200           | 8...10                |

Оптимальну частку піску в суміші заповнювачів знаходимо за рис. 4.7:  $r = 0,345$ .



Таблиця 4.15

Значення поправочних коефіцієнтів до водовмісту  
бетонних сумішей при застосування пластифікуючих добавок

| Легкоукладальність суміші |               | Цементно-водне відношення |      |      |      |      |
|---------------------------|---------------|---------------------------|------|------|------|------|
| Рухомість, см             | Жорсткість, с | 1,40                      | 1,80 | 2,20 | 2,60 | 3,0  |
| -                         | 30...50       | 0,96                      | 0,95 | 0,94 | 0,93 | 0,92 |
|                           |               | 0,88                      | 0,85 | 0,83 | 0,81 | 0,80 |
| 1...4                     | -             | 0,93                      | 0,92 | 0,92 | 0,92 | 0,91 |
|                           |               | 0,86                      | 0,84 | 0,82 | 0,80 | 0,79 |
| 5...9                     | -             | 0,91                      | 0,91 | 0,90 | 0,90 | 0,89 |
|                           |               | 0,82                      | 0,80 | 0,79 | 0,78 | 0,77 |
| 10...15                   | -             | 0,90                      | 0,89 | 0,88 | 0,87 | 0,87 |
|                           |               | 0,80                      | 0,78 | 0,77 | 0,76 | 0,75 |

**Примітка.** Над рискою наведені значення при застосуванні добавки ЛСТ у кількості 0,25% від маси цементу, під рискою - суперпластифікатор С-3 у кількості 0,7% від маси цементу.

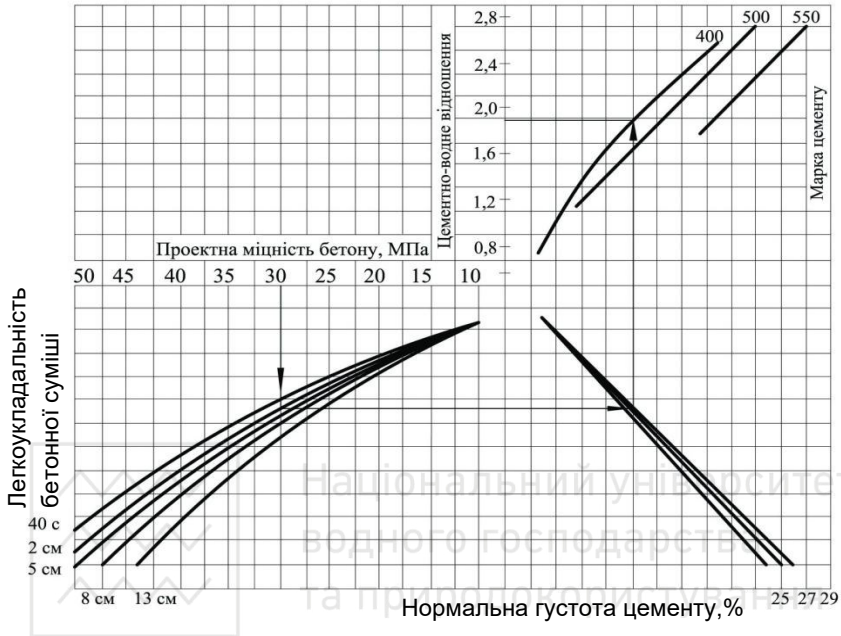
Витрата піску й щебеню:

$$П = \left[ 1000 - \left( \frac{343}{3,1} + \frac{175}{1,0} \right) \right] \cdot 0,345 \cdot 2,6 = 641 \text{ кг/м}^3$$

$$Щ = \left[ 1000 - \left( \frac{343}{3,1} + \frac{175}{1,0} + \frac{641}{2,6} \right) \right] \cdot 2,65 = 1240 \text{ кг/м}^3$$

Якщо ж дані проектні вимоги до бетону необхідно забезпечити у віці 180 доби, то за табл. 4.12 встановлюємо, що клас за міцністю повинна бути також В25. Установлене значення Ц/В (рис. 4.8) коректуємо з урахуванням поправочного коефіцієнта (табл. 4.13);

$$Ц/В = 1,96 \cdot 0,73 = 1,43.$$



**Рис. 4.8.** Номограма визначення цементно-водного відношенням для бетону нормального твердіння

Витрата води складе  $190 \text{ кг/м}^3$  (рис. 4.7) і з урахуванням застосування добавки ЛСТ (див. табл. 3.3)  $V = 190 \cdot 0,92 = 175 \text{ кг/м}^3$ .

Витрата цементу:  $\text{Ц} = 175 \cdot 1,43 = 250 \text{ кг/м}^3$ .

Оптимальну частку піску в суміші заповнювачів знаходимо за рис 4.7:

$$r = 0,38$$

Витрата піску й щебеню:



$$П = \left[ 1000 - \left( \frac{250}{3,1} + \frac{175}{1,0} \right) \right] \cdot 0,38 \cdot 2,6 = 735 \text{ кг/м}^3$$

$$Щ = \left[ 1000 - \left( \frac{250}{3,1} + \frac{175}{1,0} + \frac{735}{2,6} \right) \right] \cdot 2,65 = 1223 \text{ кг/м}^3$$

Комплекс математичних моделей (табл. 4.12) дозволяє розв'язати ці задачі, задаючись будь-яким рівнем відпускної міцності, змінюючи в широкому діапазоні загальну тривалість процесу теплової обробки, легкоукладальність сумішей, активність і нормальну густоту цементу.

*Наприклад, необхідно запроєктувати склади гідротехнічного бетону споруд, що піддається тепловологісній обробці, при різних значеннях відпускної міцності (повітрявтягувальні добавки не застосовуються).*

Алгоритм розв'язання даної задачі відрізняється від попередніх лише тим, що відносно Ц/В розв'язується модель не тільки проектної  $у_8$ , але й відпускної міцності  $у_7$ . Для визначення витрати цементу вибирається більше із двох знайдених значень цементно-водного відношення. На рис. 4.2 представлена номограма для пошуку Ц/В, яке забезпечує проектну міцність і легкоукладальність бетону при заданому рівні відпускної міцності. Орієнтовне співвідношення показників властивостей пропареного бетону наведено в табл. 4.16.

Наприклад, для бетону класу В15 з вимогою за міцністю при стиску 20,0 МПа і морозостійкістю F150, що піддається тепловологісній обробці протягом 18 год., відпускна міцність повинна становити 70 % від проектної, рухомість бетонної суміші -1...4 см.

Застосовуються портландцемент з мінеральними добавками марки 400 ( $НГ = 27 \%$ ,  $\rho_{ц} = 3,1 \text{ кг/л}$ ), кварцовий пісок з модулем крупності  $М_{кр} = 2,3$  ( $\rho_{п} = 2,6 \text{ кг/л}$ ), гранітний щебінь фракцій 5...20 мм ( $\rho_{щ} = 2,65 \text{ кг/л}$ ).



Таблиця 4.16

Орієнтовне співвідношення показників властивостей бетону, підданого тепловій обробці, без повітрявтягувальних добавок (тривалість (ТВО) 14...18 год.)

| Міцність бетону при стиску в 28-добовому віці, МПа | Відпускна міцність, % | Морозостійкість, цикли | Водонепроникність, МПа |
|--|-----------------------|------------------------|------------------------|
| 15,0   | 70                    | до 50                  | 0,2                    |
|  | 100                   | 50...100               | 0,2                    |
| 20,0   | 50                    | 0...50                 | 0,2                    |
|  | 70                    | 50.....100             | 0,2...0,4              |
|  | 100                   | 100... 150             | 0,4...0,6              |
| 25,0   | 50                    | 50... 100              | 0,2...0,4              |
|  | 70                    | 100... 150             | 0,4...0,6              |
|  | 100                   | 200...250              | 0,6                    |
| 30,0   | 50                    | 75... 100              | 0,2...0,4              |
|  | 70                    | 150... 200             | 0,4...0,6              |
|  | 100                   | 200... 250             | 0,6...0,8              |
| 35,0   | 50                    | 100... 200 150...      | 0,4...0,6              |
|  | 70                    | 250 200... 300         | 0,6...0,8              |
|  | 100                   |                        | 0,8...1,0              |
| 40,0   | 50                    | 150...250              | 0,6...0,8              |
|  | 70                    | 200...300              | 0,8...1,0              |
|  | 100                   | 300                    | 1,0...1,2              |

**Примітка.** Мінімальні значення морозостійкості й водонепроникності наведені для рухомих сумішей (10...15 см), а максимальні - для малорухомих (1...4 см).

За табл. 4.16. встановлюємо, що для забезпечення необхідної морозостійкості F150 марка бетону за міцністю при стиску повинна бути 25 МПа. За рис. 4.2 встановлюємо, що необхідне Ц/В = 1,7. Витрата води (рис. 4.6) складе  $180 \text{ кг/м}^3$ . Необхідна витрата цементу:

$$\text{Ц} = 180 \cdot 1,7 = 305 \text{ кг/м}^3$$



Оптимальну частку піску в суміші заповнювачів знаходимо за рис. 4.7:  $r = 0,38$ .

Витрата піску й щебеню складе:

$$П = \left[ 1000 - \left( \frac{305}{3,1} + \frac{180}{1} \right) \right] \cdot 0,38 \cdot 2,6 = 713 \text{ кг/м}^3$$

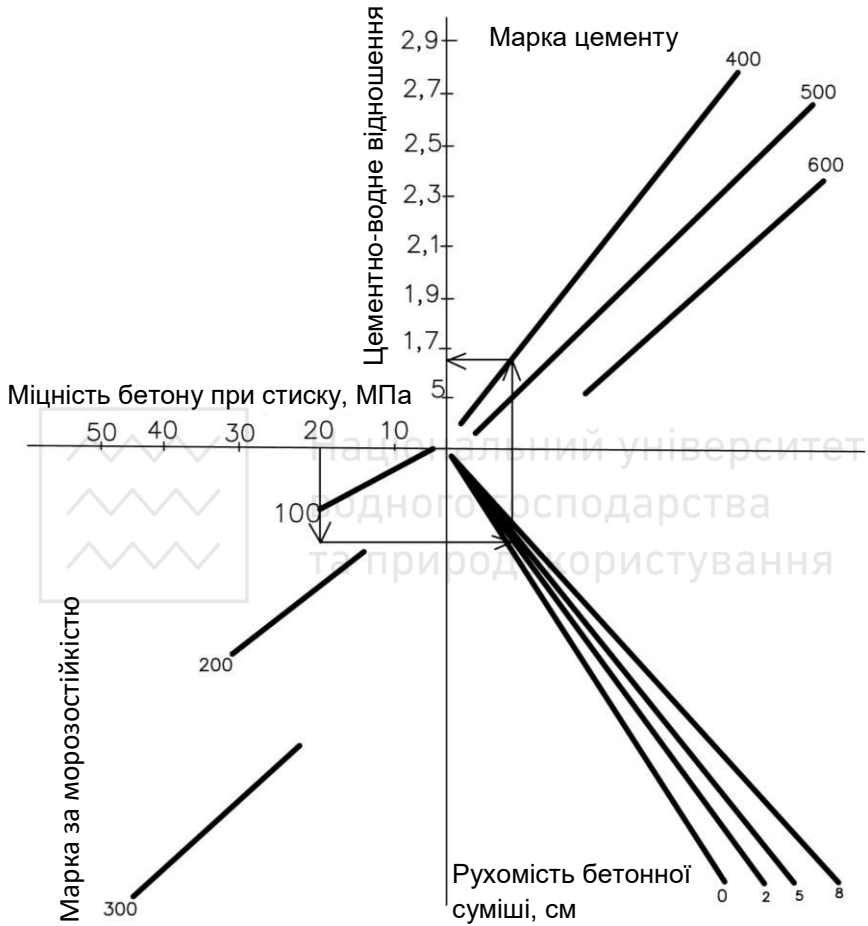
$$Щ = \left[ 1000 - \left( \frac{305}{3,1} + \frac{180}{1} + \frac{713}{2,6} \right) \right] \cdot 2,65 = 1190 \text{ кг/м}^3$$

Отримані поліноміальні моделі дозволяють розрахувати склади гідротехнічного бетону при введенні повітрявтягувальних добавок.

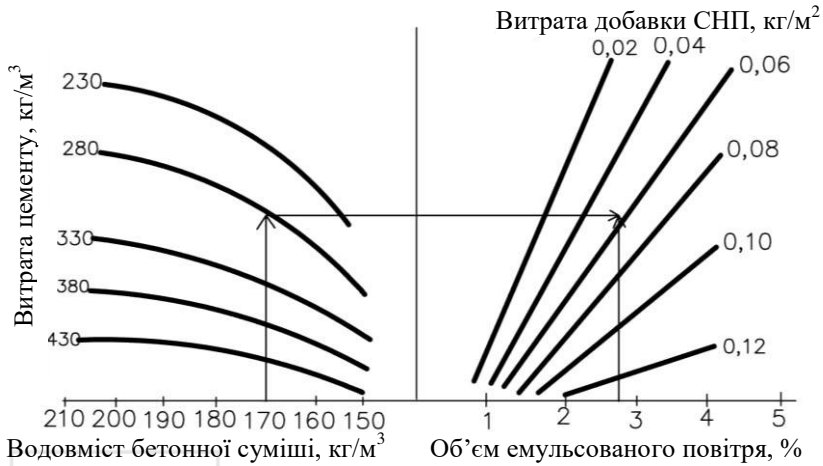
*Наприклад, необхідно* запроєктувати склади бетону при введенні повітрявтягувальної добавки СНП (смола нейтралізована повітрявтягувальна).

Алгоритм розв'язання задачі припускає на першому етапі визначення такого вмісту повітрявтягувальної добавки, при якому властивості бетону забезпечувалися б при мінімально можливому Ц/В. Для цього при фіксуванні інших факторів послідовно змінюється вміст добавки; ЕОМ видає на друк Ц/В для кожного набору вихідних параметрів, а потім послідовно – витрату води, цементу, оптимальний об'єм емульгованого повітря, витрату піску й щебеню.

На рис. 4.9, 4.10 представлені номограми, за якими можна проводити розрахунки Ц/В і кількості повітрявтягувальної добавки для забезпечення заданого комплексу властивостей, а в табл. 4.17 наведений оптимальний вміст емульгованого повітря і значення поправочних коефіцієнтів для уточнення Ц/В бетону нормального твердіння у віці 180 діб (табл. 4.18). Витрату води, встановлену за рис. 4.9, уточнюють із урахуванням об'єму втягнутого повітря.



**Рис. 4.9.** Номограма визначення Ц/В для бетонів при оптимальному вмісті емульсованого повітря



**Рис. 4.10.** Номограма визначення витрати добавки СНП

Таблиця 4.17  
Орієнтовний вміст емульсованого повітря для бетону з різними проектними вимогами

| Властивості бетону                      |                        |                        | Необхідний об'єм емульгованого повітря, % |
|---|------------------------|------------------------|---|
| Міцність при стиску у віці 28 доби, МПа | Морозостійкість, цикли | Водонепроникність, МПа |   |
| 20,0                                    | 100                    | 0,4                    | 1,5...2,0                                 |
|   | 150                    | 0,4...0,6              | 2,5...3,0                                 |
|   | 200                    | 0,4...0,6              | 3,0...3,5                                 |
|   | 300                    | 0,4...0,6              | 3,5...4,0                                 |
| 30,0                                    | 200                    | 0,6                    | 1,5...2,0                                 |
|   | 300                    | 0,6...0,8              | 2,5...3,0                                 |
|   | 400                    | 0,6...0,8              | 3,5...4,0                                 |
| 40,0                                    | 300                    | 0,8...1,0              | 3,0...3,5                                 |
|   | 400                    | 0,8...1,0              | 3,5...4,0                                 |
|   | 500                    | 1,0...1,2              | 4,5...5,0                                 |

**Примітка.** Мінімальні значення об'єму емульгованого повітря наведені для малорухомих сумішей (1...4 см), максимальні - для рухомих сумішей (10...15 см).





Таблиця 4.18

Значення поправочних коефіцієнтів для уточнення цементно-водного відношення бетонів нормального твердіння у віці 180 діб (при застосуванні провітрявляювальних добавок)

| Марка бетону за міцністю | Марка бетону за морозостійкістю | Поправочний коефіцієнт |
|--------------------------|---------------------------------|------------------------|
| 100                      | 100                             | 0,87                   |
| 100                      | 200                             | 0,77                   |
| 150                      | 100                             | 0,80                   |
| 150                      | 200                             | 0,77                   |
| 200                      | 100                             | 0,81                   |
| 200                      | 200... 300                      | 0,77                   |
| 250                      | 200                             | 0,76                   |
| 250                      | 300... 400                      | 0,74                   |
| 300                      | 200                             | 0,76                   |
| 300                      | 300                             | 0,73                   |
| 300                      | 400                             | 0,75                   |
| 350                      | 300... 500                      | 0,72                   |
| 400                      | 400... 500                      | 0,70                   |
| 450                      | 500... 600                      | 0,67                   |
| 500                      | 500... 600                      | 0,67                   |

За табл. 4.17 встановлюємо, що необхідний об'єм емульгованого повітря для заданих проектних вимог до бетону становить 2,5 %. Необхідне Ц/В для забезпечення міцності при стиску 20,0 МПа за рис. 4.2 становить 1,5. Значення Ц/В при оптимальному вмісті повітря для заданих проектних властивостей за рис. 4.6 становить 1,65. Для подальших розрахунків приймаємо Ц/В = 1,65.

Витрату води, встановлену за рис. 4.6, уточнюємо з урахуванням об'єму втягнутого повітря:

$$V = 180 - (4 \cdot 2,5) = 170 \text{ л/м}^3.$$

Необхідна витрата цементу:

$$Ц = 170 \cdot 1,65 = 280 \text{ кг/м}^3.$$



Оптимальну частку піску в суміші заповнювачів встановлюємо за рис. 4.7:

$$r = 0,36.$$

Витрату піску й щебеню визначаємо з урахуванням об'єму емульгованого повітря:

$$Щ = \left[ 1000 - \left( \frac{280}{3,1} + \frac{170}{1} + 25 + \frac{680}{2,6} \right) \right] \cdot 2,65 = 1200 \text{ кг/м}^3$$

$$П = \left[ 1000 - \left( \frac{280}{3,1} + \frac{170}{1} + 25 \right) \right] \cdot 0,36 \cdot 2,6 = 680 \text{ кг/м}^3$$

### 4.3. Високоміцні швидкотверднучі бетони

Застосування поліноміальних експериментально-статистичних моделей для розрахунків складів високоміцних бетонів становиться доцільним, коли поряд з 28-добовою міцністю необхідно забезпечення міцності в більш ранні строки.

Для практики при розрахунках складів бетону в т. ч. і високоміцних найбільш зручними залишаються формули виду:

$$R_{cm} = AR_u (Ц/В - b), \quad (4.9)$$

де  $R_{cm}$  – необхідна міцність бетону;

$R_u$  – стандартна активність цементу;

$Ц/В$  – цементно-водне відношення;

$A$ ,  $b$  – коефіцієнти, що враховують особливості вихідних матеріалів, вік бетону та інші технологічні фактори.

Б.Г. Скрамтаєвим і Ю.М. Баженовим було показано, що в широкому діапазоні  $Ц/В$  залежність  $R_{cm} = f(Ц/В)$  можна уявити як кусочно-лінійну функцію з точкою перелому при  $Ц/В = 2,5$  ( $В/Ц = 0,4$ ). Як показано дослідженнями виконаними за останні десятиліття, введення в бетонні суміші добавок-суперпластифікаторів дозволяє забезпечити лінійність залежності  $R_{cm} = f(Ц/В)$  в діапазоні  $Ц/В$  від 1 до 4. При цьому формула 4.9 набуває вид:

$$R_{cm} = kAR_u^\tau (Ц/В - b), \quad (4.10)$$



де  $R_{ц}^{\tau}$  – міцність цементу на стиск у відповідному віці ( $\tau \leq 1$ ). При  $\tau=28$  діб,  $R_{ц}^{\tau} = R_{ц}$ .

Згідно наших експериментальних даних при введенні в бетонні суміші суперпластифікатора полікарбоксилатного типу значення  $k$  для бетону у віці 12 год – 1.7; 1 доба – 1.4; 2 доби – 1.25; 28 діб – 1.

**Приклад 4.3.1.** Розробити формули для розрахунків цементно-водного відношення необхідного для забезпечення міцності високоміцних швидкотверднучих бетонів у віці 12 год, 1, 2 і 28 діб.

Використовується портландцемент марок 500 і 600. У бетонну суміш вводиться полікарбоксилатний суперпластифікатор “Melflux”.

Умови планування експериментів наведені в табл.4.19, отримані поліноміальні моделі в табл.4.20.

Таблиця 4.19

Умови планування експериментів

| Фактори                           |                | Рівні варіювання факторів |     |      | Інтервал варіювання |
|-----------------------------------|----------------|---------------------------|-----|------|---------------------|
|                                   |                | -1                        | 0   | +1   |                     |
| Натуральний вид                   | Кодованний вид |                           |     |      |                     |
| Водоцементне відношення, $B/C$    | $x_1$          | 0,25                      | 0,3 | 0,35 | 0,05                |
| Витрата цементу, $C$ , $кг/м^3$   | $x_2$          | 500                       | 550 | 600  | 50                  |
| Активність цементу, $R_{ц}$ , МПа | $x_3$          | 53                        | 59  | 65   | 6                   |

Таблиця 4.20

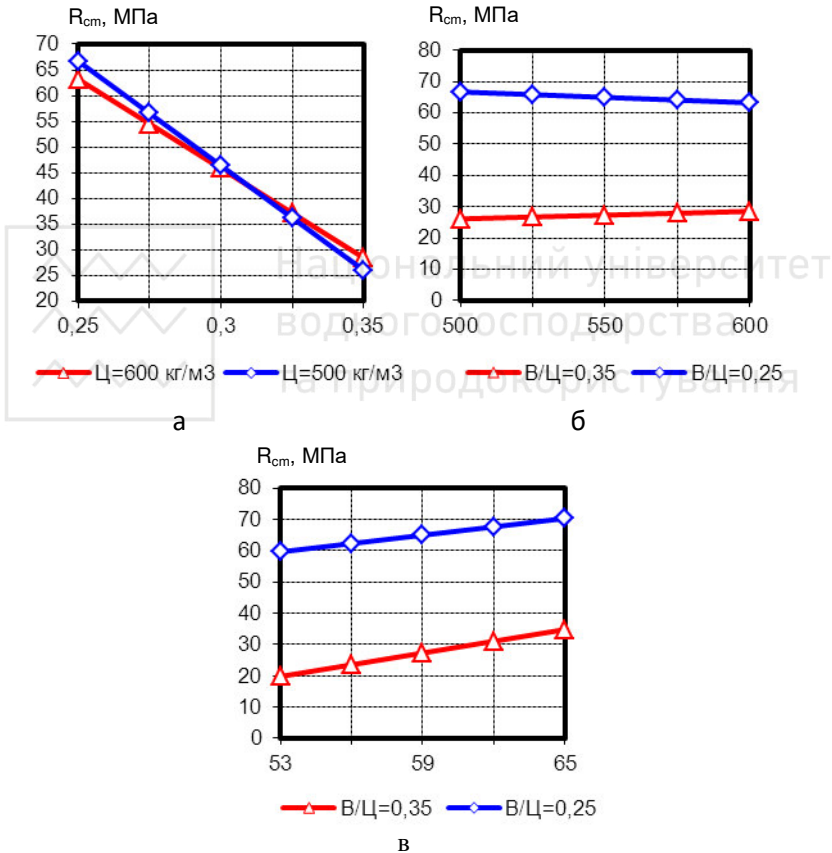
Розрахункові рівняння міцності бетону

| Рівняння регресії   |        |
|---|--------|
| $R_{cm}^{12 год.} = 46,1 - 18,8x_1 - 0,3x_2 + 6,4x_3 + 1,5x_1x_2 + 1,1x_1x_3 + 1,2x_2x_3$ | (4.11) |
| $R_{cm}^{1доба} = 60 - 18,8x_1 + 0,4x_2 + 4,4x_3 + 0,2x_1x_2 + 0,8x_1x_3 - 0,9x_2x_3$     | (4.12) |
| $R_{cm}^{2доби} = 73,9 - 17,5x_1 + 0,5x_2 + 1,8x_3 + 0,1x_1x_2 - 1x_1x_3 - 0,4x_2x_3$     | (4.13) |

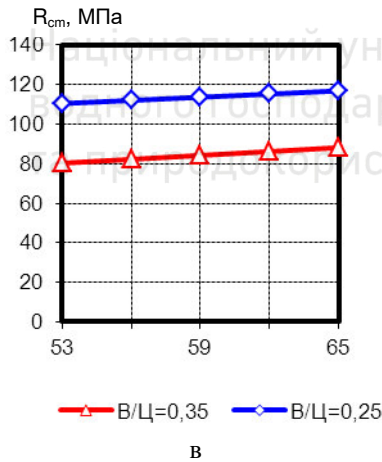
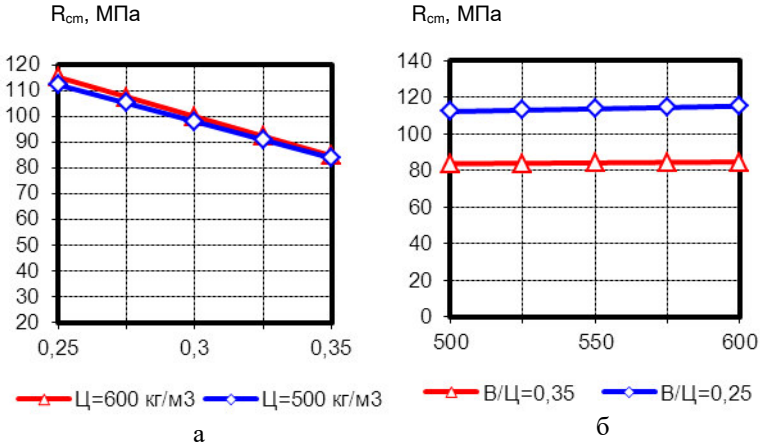


| Рівняння регресії  |        |
|--|--------|
| $R_{cm}^{28днів} = 99 - 14,7x_1 + x_2 + 3,6x_3 - 0,5x_1x_2 + 0,4x_1x_3 - x_2x_3$ | (4.14) |

Отримані моделі дозволяють проаналізувати вплив на міцність бетону у різному віці досліджених факторів (рис. 4.11, 4.12, 4.13).



**Рис. 4.11.** Графіки залежності міцності бетону при стиску у віці 12 год від: а, б – водоцементного відношення та витрати цементу, кг/м<sup>3</sup>; в – активності цементу, МПа та водоцементного відношення



**Рис. 4.12.** Графіки залежності міцності бетону при стиску у віці 28 днів від: а, б – водоцементного відношення та витрати цементу; в – активності цементу, МПа та водоцементного відношення

Для розрахунків необхідного  $V/C$  або  $C/V$  можна використовувати як безпосередньо поліноміальні моделі (табл. 4.19) так і формули (4.15 - 4.18), що отримані на їх основі.

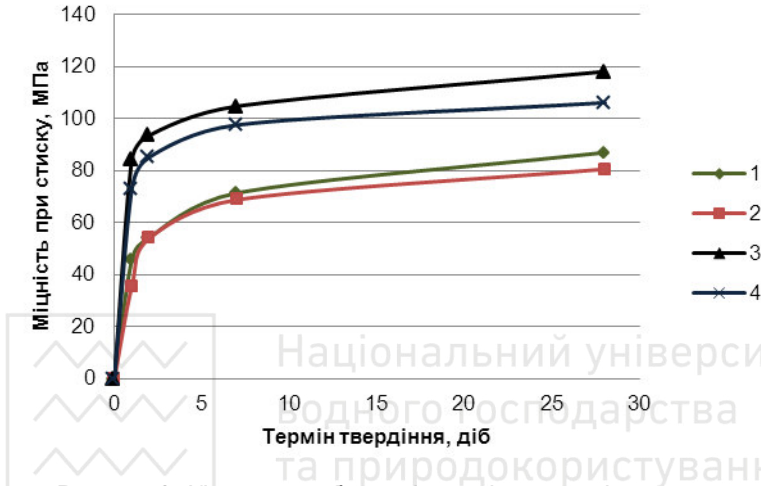
$$R_{cm}^{12 год} = 0,59R_y^{\tau} (C/V - 1,92); \quad (4.15)$$



$$R_{cm}^{1доби} = 0,6 R_{yt} (\frac{C}{B} - 1,6); \quad (4.16)$$

$$R_{cm}^{2доби} = 0,62 R_{yt} (\frac{C}{B} - 1,35); \quad (4.17)$$

$$R_{cm}^{28дiб} = 0,48 R_{yt} (\frac{C}{B} + 0,22). \quad (4.18)$$



**Рис. 4.13.** Кінетика набору міцності високоміцного швидкотверднучого бетону:

- 1 –  $V/C=0,35$ ,  $R_{yt}=50$  МПа; 2 –  $V/C=0,35$ ,  $R_{yt}=60$  МПа;  
3 –  $V/C=0,25$ ,  $R_{yt}=50$  МПа; 4 –  $V/C=0,35$ ,  $R_{yt}=60$  МПа

Нижче наводиться приклад розрахунку  $C/B$  для отримання високоміцного швидкотверднучого бетону за допомогою отриманих залежностей.

**Приклад 4.3.2.** *Визначити необхідні значення  $C/B$  для отримання бетону з міцністю при стиску у віці 28 дiб  $R_{cm}^{28дiб} \geq 100$  МПа з досягненням через 12 год міцності  $R_{cm}^{12год} = 50$  МПа, 2 доби –  $R_{cm}^{2дiб} \geq 80$  МПа. Прийняти  $R_{yt}^{12год} = 15$  МПа,  $R_{yt}^{2дiб} = 35$  МПа,  $R_{yt}^{28дiб} = 60$  МПа.*

Попередньо орієнтовно за допомогою формули (4.10) при  $A=0,65$  і наведених вище значеннях  $k$  знаходимо послідовно значення  $C/B$  і встановлюємо весь набір необхідних властивостей при  $R_{yt}=60$  МПа.



Для забезпечення необхідної міцності бетону через 12 годин:

$$C/B_1 = \frac{50}{1,7 \cdot 0,65 \cdot 15} + 0,5 = 3,52;$$

- через 2 доби:

$$C/B_2 = \frac{80}{1,26 \cdot 0,65 \cdot 35} + 0,5 = 3,29;$$

- через 28 діб:

$$C/B_3 = \frac{100}{1 \cdot 0,65 \cdot 60} + 0,5 = 3,06.$$

Весь набір заданих міцнісних показників бетону забезпечується при використанні формули (4.9) при  $C/B=3,52$ .

Знайдемо для порівняння необхідні значення  $C/B$  рішенням відповідних рівнянь (4.11-4.14), при  $R_c=60$  МПа і  $C=550$  кг/м<sup>3</sup>.

Розв'язуючи рівняння (4.11-4.14) як рівняння з одним невідомим ( $B/C$ ), знаходимо значення  $C/B$  для забезпечення необхідних значень міцності: через 12 год –  $B/C_1=0,31$ , 2 доби –  $B/C_2=0,29$  і 28 діб  $B/C_3=0,32$ . Відповідно значення  $C/B_1=3,23$ ,  $C/B_2=3,5$ ,  $C/B_3=3,13$ . Комплекс необхідних міцних показників бетону забезпечується при  $C/B_2=3,5$ .

З використанням формул (4.15-4.18) при  $R_c=60$  МПа отримуємо:  $C/B_1=3,33$ ,  $C/B_2=3,5$ ,  $C/B_3=3,25$ . Вибираємо  $C/B=3,5$ .

Значення  $C/B$ , необхідних для забезпечення заданих міцнісних показників високоміцного бетону у різному віці, що знайдені при використанні запропонованих формул, достатньо близькі.

**Приклад 4.3.3.** Розрахувати склад дрібнозернистого високоміцного бетону при введенні в бетонну суміш добавок суперпластифікатора "Melflux" і метакаоліну.

В якості заповнювача використані гранітні відсівки. Для отримання бетонної суміші застосовується портландцемент ПЦ-I М500.

Після проведення факторного експерименту отримані математичні моделі міцності бетону і водоцементного

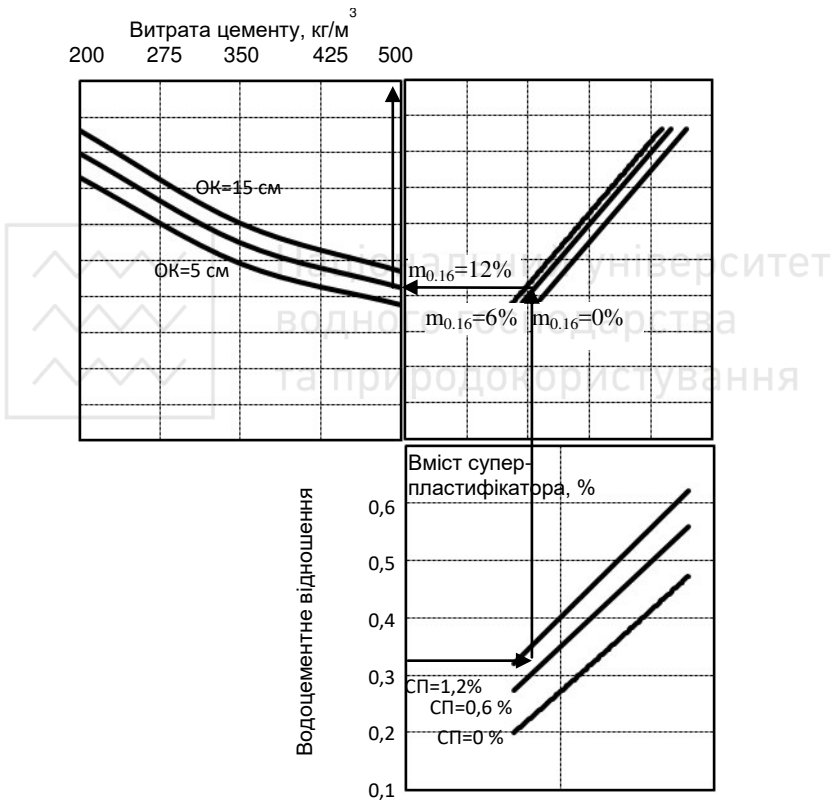


відношення з врахуванням витрати суперпластифікатору, вмісту частинок менше 0.16 мм у відсівах і вмісту мета каоліну.

Після додаткових розрахунків модель міцності бетону на стиск була приведена до формули:

$$R_{cm}^{28} = AR_{ц}(\Pi/B - b).$$

На основі моделі водоцементного відношення була побудована номограма (рис. 4.14).



**Рис.4.14.** Номограма для визначення витрати цементу

Методика розрахунку полягає в наступному:





1. Задаючись активністю цементу та необхідним значенням міцності бетону у віці 28 діб, вибравши відповідні коефіцієнти з табл. 4.21, знаходимо потрібне  $C/B$ :

$$R_{cm}^{28} = A \cdot R_u (C/B - b). \quad (4.19)$$

Таблиця 4.21

Коефіцієнти рівняння по визначенню міцності

| Вміст частинок розміром $<0,16$ мм у відсіві, $m_{0,16}$ % | $A$  | $b$   |
|--|------|-------|
| 0  | 0,27 | -0,79 |
| 12   | 0,38 | 0,07  |
| 24   | 0,51 | 0,11  |

2. Переходимо до  $B/C$ :

$$B/C = 1 / (C/B). \quad (4.20)$$

3. За номограмою (рис. 4.14), враховуючи рухомість суміші, кількість частинок  $<0,16$  мм у відсіві знаходимо витрати цементу та суперпластифікатора.

4. За формулою (4.21), знаючи витрату цементу та водоцементне відношення, знаходимо витрату води:

$$B = C \cdot (B/C). \quad (4.21)$$

5. За формулами (4.22-4.24), знаючи витрату та густину цементу і витрату води, знаходимо об'єм цементного тіста, об'єм та витрату заповнювача:

$$V_{ц.м} = \frac{C}{\rho_ц} + B; \quad (4.22)$$

$$V_з = 1000 - V_{ц.м}; \quad (4.23)$$

$$M_з = V_з \rho_з. \quad (4.24)$$

*Наприклад, необхідно розрахувати склад дрібнозернистого бетону з 28-добовою міцністю на стиск 60 МПа. Рухомість бетонної суміші 10 см.*

В якості пластифікуючої добавки використовується суперпластифікатор Melflux в кількості 0,6% від витрати цементу. Активність цементу – 50 МПа. Вміст у відсіві пилуватих частинок  $<0,16$  мм – 12%, густина відсівів – 2,7 кг/л.



1. За заданою активністю цементу та необхідним значенням міцності бетону у віці 28 днів (формула 4.10), знаходимо  $C/B$ :

$$R_{cm}^{28} = 0,38 R_c (C/B - 0,07);$$

$$C/B = (R_{cm}^{28} / 0,38 R_c) + 0,07 = (60 / 0,38 \cdot 50) + 0,07 = 3,23.$$

2. Знаходимо  $B/C$ :

$$B/C = 1/3,23 = 0,31.$$

3. За номограмою (рис. 4.14) знаходимо витрату цементу, яка становить  $495 \text{ кг/м}^3$ .

4. За формулою (4.21) знаходимо витрату води:

$$B = 495 \cdot 0,31 = 153 \text{ л/м}^3.$$

5. За формулами 4.22-4.24 знаходимо об'єм цементного тіста, об'єм та масу заповнювача:



$$V_{c,m} = \frac{C}{\rho_c} + B = \frac{495}{3,1} + 153 = 313 \text{ л};$$

$$V_s = 1000 - 313 = 687 \text{ л};$$

$$M_s = 687 \cdot 2,7 = 1854 \text{ кг/м}^3.$$

Отриманий за розрахунками бетон має наступний склад:

- цемент –  $495 \text{ кг/м}^3$ ;
- відсів –  $1854 \text{ кг/м}^3$ ;
- вода –  $153 \text{ л/м}^3$ ;
- суперпластифікатор Melflux –  $2,9 \text{ кг/м}^3$ .

**Приклад 4.3.4.** Розрахувати склад бетону на активованому малоклінкерному шлакопортландцементі (МШПЦ).

Склад цементу : клінкер – 12%, шлак – 88%, фосфогіпс – 75%, ( $\text{SO}_3$ –4.5%). Для забезпечення сульфатно-фторидно-лужної активації до складу в'язучого додатково вводили негашене вапно в кількості 3% та кремнійфторид натрію ( $\text{Na}_2\text{SiF}_6$ ) – 2% за масою.

Активність в'язучого з питомою поверхнею  $453 \text{ м}^2/\text{кг}$  складає 46 МПа. Пластифікуюча добавка – суперпластифікатор на полікарбоксилатній основі – Sika VC 225. В якості



заповнювачів застосовуються гранітний щебінь фракції 5...20 мм, та кварцовий пісок з  $M_k = 1,9$ .

Експерименти виконані у відповідності до трьохрівневого плану при варіюванні витратою цементу  $x_1$  (300...400 кг/м<sup>3</sup>) і вмістом суперпластифікатора  $X_2$  (0...3%). Рухомість бетонної суміші у всіх точках плану складала 5...9 см. На основі отриманих експериментальних даних побудовані моделі водопотреби (В), міцності на стиск у віці 7 діб ( $R_{cm}^7$ ) та 28 діб ( $R_{cm}^{28}$ ) при нормальному твердінні і після пропарювання ( $R_{cm}^{TBO}$ ,  $R_{cm}^{TBO28}$ ) (табл.4.22).

Таблиця 4.22

Експериментально-статистичні моделі водопотреби та міцності бетонів на активованому МШПЦ

| Вид пластифікатора   | Статистичні моделі  |
|--|---|
| Водопотреба бетону, л/м <sup>3</sup>                             |   |
| SikaVC 225   | $B = 145,3 + 1,667x_1 - 32,507x_2 + 5,894x_1^2 + 11,894x_2^2 - 7,0x_1x_2$ (4.25)                  |
| Міцність на стиск у віці 7 діб, МПа                              |   |
| SikaVC 225   | $R_{cm}^7 = 17,656 + 7,552x_1 + 6,651x_2 + 6,969x_1^2 + 1,369x_2^2 + 1,2x_1x_2$ (4.26)            |
| Міцність на стиск у віці 28 діб, МПа                             |   |
| SikaVC 225   | $R_{cm}^{28} = 42,659 + 12,036x_1 + 12,736x_2 + 1,275x_1^2 - 4,625x_2^2 + 1,2x_1x_2$ ; (4.27)     |
|  | $R_{cm}^{28} = 31,953 - 21,844x_1 - 0,016(x_1')^2 - 0,016(x_2')^2$ ; (4.28)                       |
| Міцність на стиск після ТВО, МПа                                 |   |
| SikaVC 225   | $R_{cm}^{TBO} = 36,076 + 7,451x_1 + 7,968x_2 - 4,123x_1^2 - 2,473x_2^2 - 2,45x_1x_2$ ; (4.29)     |
|  | $R_{cm}^{TBO} = 26,9 - 12,5x_1' + 0,1(x_1')^2 + 0,01(x_2')^2$ (4.30)                              |
| Міцність на стиск після ТВО та 28 діб нормального твердіння, МПа |   |
| SikaVC 225   | $R_{cm}^{TBO28} = 54,041 + 14,236x_1 + 15,636x_2 - 2,576x_1^2 - 5,736x_2^2 + 2,55x_1x_2$ ; (4.31) |
|  | $R_{cm}^{TBO28} = 38,5 - 31,9x_1' + 0,1x_2' + 8,3(x_1')^2 + 1,89(x_2')^2 - 0,1x_1'x_2'$ (4.32)    |

\*Тепловологісна обробка бетонів (ТВО) здійснювалась шляхом пропарювання при температурі 80° С. Швидкість підйому температури та охолодження складала 30° С за годину. Тривалість ізотермічної витримки – 6 год.



Математичні моделі міцності бетону на стиск у віці 28 днів, в яких в якості варійованих факторів були обрані водоцементне відношення ( $x_1$ ) та витрата пластифікуючої добавки ( $x_2$ ) (табл. 4.22), дозволяють розраховувати склади важкого бетону виготовленого на МШПЦ із заданою міцністю та рухомістю. При цьому методика розрахунку полягає в наступному:

1. Обираємо вид та кількість суперпластифікатора для забезпечення необхідної рухомості бетонної суміші.

2. За спеціально побудованими еспериментальними графіками наведеними на рис. 4.17, при заданому значенні рухомості бетонної суміші та визначеному виді та кількості пластифікатора, визначаємо витрату води.

3. Для визначення водоцементного відношення бетонної суміші використовуємо математичні моделі міцності бетону на стиск, в яких в якості варійованих факторів були обрані водоцементне відношення ( $x_1$ ) та витрата пластифікуючої добавки ( $x_2$ ), попередньо перевірши вміст пластифікуючої добавки в кодований вигляд за формулою:

$$x_2 = \frac{(СП - 0,3)}{0,3}. \quad (4.33)$$

4. Отримане значення водоцементного відношення переводимо в натуральний вид враховуючи що:

$$x_1 = \frac{(B / Ц - 0,45)}{0,2}. \quad (4.34)$$

5. Знаючи витрату води та водоцементне відношення, знаходимо витрату цементу:

$$Ц = \frac{B}{B / Ц}. \quad (4.35)$$

6. Витрати заповнювачів знаходимо за відомими рівняннями:

$$Щ = \frac{1000}{\alpha \frac{v_{щ}^n}{\rho_{щ}} + \frac{1}{\rho_{ц}}}; \quad (4.36)$$



$$P = (1000 - (\frac{Ц}{\rho_{ц}} + B + \frac{ШЦ}{\rho_{шц}})) \rho_n, \quad (4.37)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт розсунення зерен,  $\rho_{нц}$  – насипна густина щебеню,  $\rho_{ц}$  – дійсна густина щебеню,  $\rho_n$  – дійсна густина піску,  $V_n^{ш}$  – міжзернова пустотність щебеню.

*Наприклад, необхідно розрахувати склад важкого бетону, виготовленого на малоклінкерному шлакопортландцементі, що характеризується міцністю при стиску 35 МПа після проходження тепловологісної обробки та 70 МПа через 28 діб подальшого нормального твердіння.*

Рухомість бетонної суміші рівна 15 см. В якості пластифікуючої добавки використовується суперпластифікатор Sika VC 225 в кількості 0,6% від маси цементу.

1. За графіком наведеним на рис. 4.15, при заданому значенні рухомості бетонної суміші (15 см), визначеному виді (Sika VC 225) та кількості суперпластифікатора (0,6% від маси цементу) визначаємо витрату води (135 л) на м<sup>3</sup>.

2. Преводимо вміст пластифікуючої добавки в кодований вигляд:

$$x_2' = \frac{(0,6 - 0,3)}{0,3} = 1.$$

3. З рівнянь 4.30 та 4.32 (табл.4.22) визначаємо В/Ц ( $x_1'$ ), яке забезпечить необхідну міцність бетону:

- після проходження тепловологісної обробки ( $R_{cm}^{TBO} \geq 40 \text{ МПа}$ ):

$$35 = 26,9 - 12,5x_1' + 0,1(x_1')^2 + 0,01(1)^2 - 0,1(x_1')^2 - 12,55x_1' - 8,1 = 0$$

Розв'язавши квадратне рівняння отримуємо:  $x_1' = -0,64$ .

- після проходження тепловологісної обробки та 28 діб нормального твердіння ( $R_{cm}^{TBO28} \geq 70 \text{ МПа}$ ):

$$70 = 38,5 - 31,9x_1' + 0,1 \cdot 1 + 1,89(x_1')^2 - 8,3(x_1')^2 + 31,8x_1' + 33,29 = 0$$

Розв'язавши квадратне рівняння отримуємо:  $x_1' = 0,86$ .

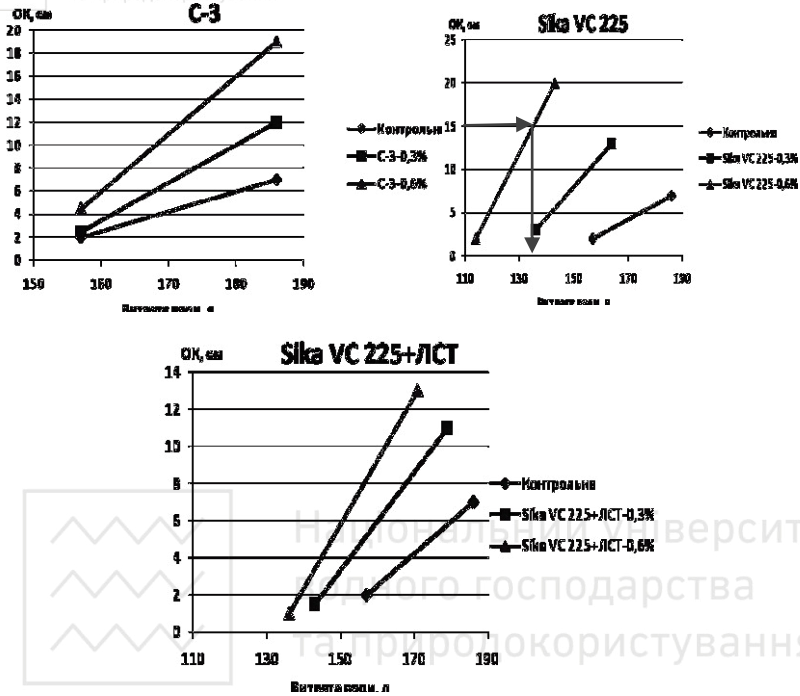


Рис. 4.15. Графіки залежності рухомості бетонної суміші виготовленої на малоклінкерному ШПЦ в залежності від витрати води на м<sup>3</sup>

4.Переводимо отримані значення водоцементного відношення в натуральний вид:

$$B/C = x'_1 \cdot 0.2 + 0.45 = -0.64 \cdot 0.2 + 0.45 = 0.32$$

$$B/C = x'_1 \cdot 0.2 + 0.45 = -0.86 \cdot 0.2 + 0.45 = 0,28$$

Для забезпечення необхідних міцнісних характеристик бетону приймаємо мінімальне значення водоцементного відношення, яке використовуємо для подальших розрахунків.

5. Визначаємо необхідну витрату цементу:



$$Ц = \frac{135}{0,28} = 482 \text{ кг} / \text{м}^3.$$

6. Знаходимо витрати заповнювачів при коефіцієнті розсунення зерен  $\alpha=1,46$  (насіпна густина щебеню  $\rho_{\text{нш}}=1,65 \text{ г/см}^3$ , дійсна густина щебеню  $\rho_{\text{щ}}=2,85 \text{ г/см}^3$ , дійсна густина піску  $\rho_{\text{п}}=2,65 \text{ г/см}^3$ , розрахункове значення між зернової пористості щебеню 0,42).

$$Щ = \frac{1000}{1,46 \frac{0,42}{1,65} + \frac{1}{2,85}} = 1388 \text{ кг} / \text{м}^3;$$

$$П = (1000 - (\frac{482}{3,1} + 135 + \frac{1388}{2,85})) \times 2,65 = 590 \text{ кг} / \text{м}^3.$$

Отриманий за розрахунками бетон має наступний склад: цемент – 482 кг/м<sup>3</sup>; вода – 135 л/м<sup>3</sup>; щебінь – 1388 кг/м<sup>3</sup>; пісок – 590 кг/м<sup>3</sup>. Витрата суперпластифікатора Sika VC 225 складає 2,91 кг/м<sup>3</sup>.

#### 4.4. Бетони з активними мінеральними добавками

В технології бетону для економії портландцементу і покращення ряду властивостей бетону широко застосовують дисперсні мінеральні добавки – *наповнювачі* (мікронаповнювачі). Їх вводять звичайно в кількості більше 5% для покращення або надання бетонам спеціальних властивостей. За походженням добавки цього типу бувають як природними, так і техногенними. Мінеральні добавки прийнято розділяти в залежності від їхньої пуцоланової активності на інертні й активні. У групу активних добавок або пуцолан, входять матеріали, здатні вступати при нормальній температурі в хімічну реакцію з гідроксидом кальцію з утворенням речовин, що володіють в'язучими властивостями.

На даний час розроблено ряд методик проектування оптимальних складів наповнених бетонів, які основані, в основному, на сумісному рішенні комплексу поліноміальних факторних моделей. Прийнятні результати можуть бути



отримані також при розрахунках складів наповнених бетонів за допомогою методу "приведеного В/Ц".

"Приведене Ц/В" – цементно-водне відношення, що враховує часткову заміну цементу активним наповнювачем, тобто його "цементуючу здатність". В загальному виді значення  $(\text{Ц/В})_{\text{пр}}$  можна знайти за формулою (4.38).

Без врахування втягнутого повітря  $(\text{Ц/В})_{\text{пр}}$  можна знайти з рівняння:

$$(\text{Ц} / \text{В})_{\text{пр}} = \frac{\text{Ц} + K_{\text{ц.е}} \text{Н}}{\text{В}}. \quad (4.38)$$

де  $\text{Ц}$  і  $\text{Н}$  – відповідно витрати цементу і наповнювача за масою;

$\text{В}$  – витрата води;

$K_{\text{ц.е}}$  – коефіцієнт "цементуючої ефективності", який характеризує кількість цементу, що заміщає в бетонах 1 кг активного наповнювача без погіршення його міцності.

При розрахунках складів бетону значення  $K_{\text{ц.е}}$  приймаються усередненими за наявними дослідними даними.

Перехід від "приведеного Ц/В" до фактичного Ц/В можна здійснити за формулою:

$$\text{Ц} / \text{В} = \frac{(\text{Ц} + K_{\text{ц.е}} \text{Н}) - K_{\text{ц.е}} \text{Н}}{\text{В}}. \quad (4.39)$$

**Приклад 4.4.1.** Розрахувати склади важких золівмісних бетонів з заданою легкоукладальністю та міцністю, на основі експериментально-статистичних моделей.

На основі експериментів, виконаних відповідно заданих умов (табл. 4.23) при введенні в бетонні суміші золи Бурштинської ТЕС за допомогою факторних планів отримали комплекс експериментально-статистичних моделей (табл. 4.24) і побудували розрахункові номограми (рис. 4.16 і 4.17).





Таблиця 4.23

Умови планування експериментів

| Фактори  |                | Рівні варіювання          |                           |                             | Інтервал варіювання |
|--|----------------|---------------------------|---------------------------|-----------------------------|---------------------|
| Натуральний вид                                | Кодовий вид    | -I                        | 0                         | +I                          |                     |
| Водопотреба бетонної суміші, кг/м <sup>3</sup> | x <sub>1</sub> | 160                       | 190                       | 220                         | 30                  |
| Цементно-водне відношення                      | x <sub>2</sub> | 1,3                       | 2,1                       | 2,9                         | 0,8                 |
| Водопотреба щебеню, %                          | x <sub>3</sub> | 1                         | 4                         | 7                           | 3                   |
| Водопотреба піску, %                           | x <sub>4</sub> | 4                         | 9                         | 14                          | 5                   |
| Витрата золи, кг/м <sup>3</sup>                | x <sub>5</sub> | 170                       | 190                       | 210                         | 20                  |
| Активність цементу, МПа                        | x <sub>6</sub> | 40,0                      | 45,0                      | 50,0                        | 5,0                 |
| Тривалість ТВО, год                            | x <sub>7</sub> | 10                        | 14                        | 18                          | 4                   |
| Рухомість суміші, см                           | x <sub>8</sub> | P <sub>1</sub><br>(1...4) | P <sub>2</sub><br>(5...9) | P <sub>3</sub><br>(10...15) | 4...5               |

Таблиця 4.24

Експериментально-статистичні моделі властивостей  
золівмісної бетонної суміші і бетону

| Властивості  | Вид рівняння   |
|--|--|
| Границя міцності при стиску через 4 год після ТВО, МПа | $\hat{y}_1 = 23,6 + 2,1x_2 + 4,5x_6 + 2,9x_7 - 2,6x_8 - 1,1x_2^2 + 1,2x_6^2 + 1,2x_7^2 + 2,9x_8^2 - 1,9x_2x_6 - 4,7x_2x_7 + 2,2x_2x_8 + 1,7x_6x_8 - 4,7x_7x_8$ |



| Властивості   | Вид рівняння  |
|---|---|
| Границя міцності при стиску через 28 діб після ТВО, МПа | $\hat{y}_2 = 37,2 + 5,9x_2 + 4,9x_6 - 1,4x_7 - 4,4x_8 - 1,3x_2^2 + 0,7x_6^2 + 2,2x_7^2 - 2,3x_8^2 - 1,3x_2x_6 + 1,7x_2x_8 - 2,5x_7x_8$  |
| Оптимальна частка піску в суміші заповнювачів           | $\hat{y}_3 = 0,310 + 0,012x_1 - 0,019x_2 - 0,002x_3 + 0,017x_4 - 0,036x_5 + 0,001x_1^2 + 0,001x_2^2 - 0,001x_3^2 - 0,001x_4^2 + 0,001x_5^2 - 0,004x_1x_5 + 0,005x_2x_5 + 0,005x_3x_5$ |

В основу методики розрахунку золівмісного бетону покладені результати попередніх експериментальних досліджень, згідно яким для бетонів певної міцності і легкоукладальності мінімальному значенню Ц/В, що забезпечує проектні вимоги до виробів, відповідає певне значення золоцементного відношення З/Ц. Зі збільшенням рухомості бетонної суміші і міцності бетону Ц/В зростає, а З/Ц відповідно знижується. Витрата золи при сталій водопотребі бетонної суміші приблизно постійна і може бути прийнята за табл .4.25 залежно від проектних вимог до бетону і якості в'язучого.

Таблиця 4.25

Рекомендовані значення витрати золи

| Рухомість бетонної суміші, см | Клас бетону | Витрата золи, кг/м <sup>3</sup> |                              |
|-------------------------------|-------------|---------------------------------|------------------------------|
|                               |             | пропарений бетон                | бетон нормального тверднення |
| 1...4                         | B30         | 170                             | 150                          |
|                               | B40         | 180                             | 150                          |
| 5...9                         | B30         | 190                             | 170                          |
|                               | B40         | 200                             | 180                          |
| 10...14                       | B30         | 210                             | 190                          |
|                               | B40         | 215                             | 200                          |



За номограмою (рис. 4.16.) визначаємо Ц/В. Витрату води  $V_0$  вибираємо згідно існуючим рекомендаціям і корегуємо з урахуванням поправки  $V_1$  на водопотребу золи (табл. 4.26).

$$V = V_0 + V_1. \quad (4.40)$$

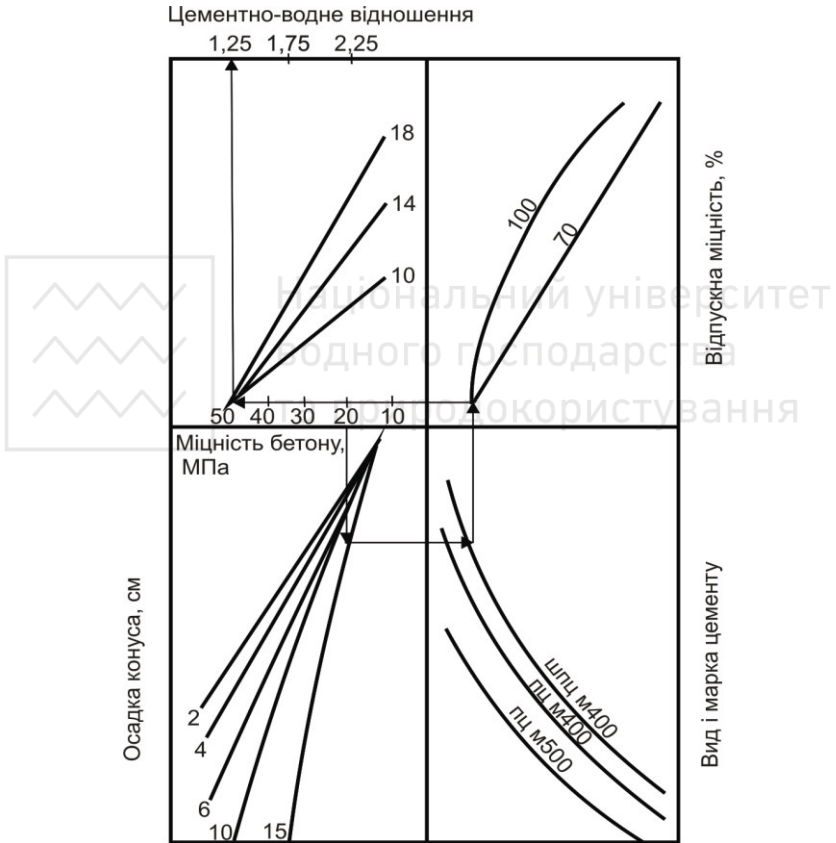


Рис. 4.16. Номограма для визначення цементно-водного відношення



Таблиця 4.26

Значення  $V_1$  для золи Бурштинської ТЕС

| Ц/В       | Витрата золи, кг/м <sup>3</sup> | $V_1$ , л/м <sup>3</sup> |
|-----------|---------------------------------|--------------------------|
| 1,2...1,5 | 100...150<br>150...215          | 8...10<br>13...24        |
| 1,5...2,0 | 100...150<br>150...215          | 8...16<br>10...32        |
| 2,0...2,5 | 100...150<br>150...215          | 10...30<br>18...44       |

За номограмою (рис. 4.17) визначаємо частку піску в суміші заповнювачів, а потім, використовуючи метод абсолютних об'ємів, розраховуємо витрату піску та щебеню:

$$\Pi = \left[ 1000 - \left( \frac{Ц}{\rho_{ц}} + \frac{В}{\rho_{в}} + \frac{3}{\rho_{з}} \right) \right] r \cdot \rho_n, \quad (4.41)$$

$$\Pi_{ц} = \left[ 1000 - \left( \frac{Ц}{\rho_{ц}} + \frac{В}{\rho_{в}} + \frac{3}{\rho_{з}} + \frac{\Pi}{\rho_n} \right) \right] \rho_{ц}, \quad (4.42)$$

де  $\rho_3$  – густина золи, кг/л.

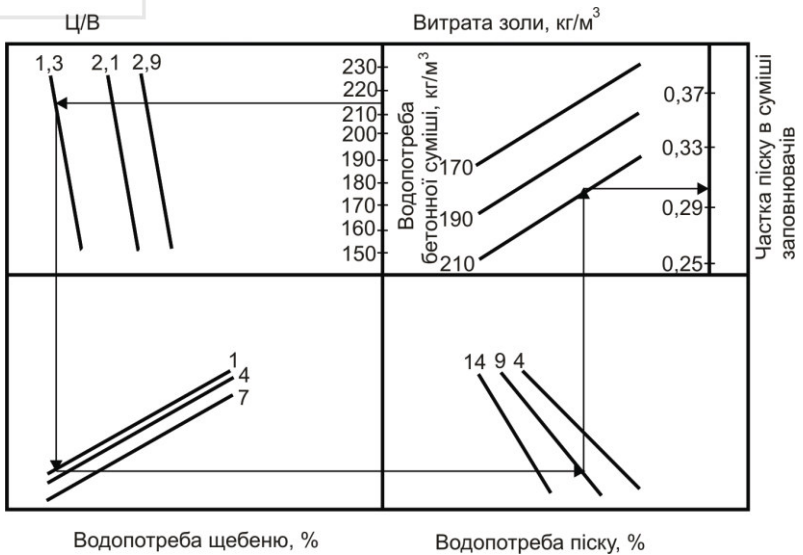


Рис. 4.17. Номограма для визначення частки піску в суміші заповнювачів



*Наприклад, розрахувати склад золовмісного бетону з проектною міцністю  $R_{cm}=20$  МПа та забезпеченням 70%-ої відпускну міцності після тепловологісної обробки протягом 14 год і рухомості суміші 14 см.*

Застосовуються: шлакопортландцемент марки 400 ( $НГ = 26,2\%$ ,  $\rho_{ц} = 3,1$  кг/л), кварцовий пісок ( $B_{п} = 9\%$ ,  $\rho_{п} = 2,6$  кг/л), гранітний щебінь ( $B_{щ} = 4\%$ ,  $\rho_{щ} = 2,75$  кг/л), зола-виносу Бурштинської ТЕС (з питомою поверхнею  $S_s = 3000$  см<sup>2</sup>/г,  $\rho_s = 2,35$  кг/л), пластифікуюча добавка ЛСТ в кількості 0,25% від маси цементу.

За табл.4.25 знаходимо витрату золи:  $Z = 210$  кг/м<sup>3</sup>, а за рис. 4.16 –  $Ц/В = 1,25$ . Знаходимо за довідковими даними витрату води  $B_0 = 215$  кг/м<sup>3</sup>, з урахуванням застосування добавки ЛСТ вона складає  $215 \times 0,9 = 193$  л/м<sup>3</sup>. Поправку  $B_1$  приймаємо рівною 20 л/м<sup>3</sup> (табл. 4.26). Загальна витрата води складає:  $B = 193 + 20 = 213$  л/м<sup>3</sup>.

Витрата цементу –  $Ц = 213 \times 1,25 = 266$  кг/м<sup>3</sup>.

Оптимальну частку піску в суміші заповнювачів знаходимо за рис. 4.17:  $r = 0,315$ .

Витрати піску і щебеню складають:

$$П = \left[ 1000 - \left( \frac{266}{3,1} + \frac{213}{1,0} + \frac{210}{2,35} \right) \right] 0,315 \cdot 2,6 = 501 \text{ кг / м}^3,$$

$$Щ = \left[ 1000 - \left( \frac{266}{3,1} + \frac{213}{1,0} + \frac{210}{2,35} + \frac{501}{2,6} \right) \right] 2,75 = 1153 \text{ кг / м}^3.$$

**Приклад 4.4.2.** *Розрахувати склади золовмісних дрібнозернистих бетонів (ДЗБ) з заданими значеннями міцності, морозостійкості та водонепроникності.*

В результаті проведення експериментів з застосуванням методу математичного планування отримані експериментально-статистичні моделі міцнісних показників, морозостійкості, водонепроникності та водопотреби бетонної суміші і на їх основі побудовані номограми (рис. 4.18, 4.19), а також визначені співвідношення при заданих умовах класів бетону за міцністю, і марок за морозостійкістю та водонепроникністю (табл. 4.26).



Знання цих співвідношень дозволяє знайти визначальний параметр і відповідний йому клас бетону за міцністю.

Наприклад, необхідно підібрати склад золовмісного ДЗБ класу В20, F100, W4 з осадкою конуса суміші 5...7 см. Застосовується портландцемент марки 400,  $НГ = 25\%$ ; зола – виносу Буришинської ТЕС з питомою поверхнею  $4000 \text{ см}^2/\text{г}$  і  $\rho_0 = 2,3 \text{ кг/л}$ ; пісок з  $M_{кр} = 2,2$  і  $\rho_n = 2,6 \text{ кг/л}$ , водопотребою  $V_n = 6\%$ .

Таблиця 4.27

Орієнтовні співвідношення властивостей бетону з  
добавкою золи-виносу

| Клас бетону за міцністю на стиск (В) | Морозостійкість (F) | Водонепроникність (W) |
|--------------------------------------|---------------------|-----------------------|
| В15                                  | 75...100            | 2                     |
| В20                                  | 100...150           | 2...4                 |
| В25                                  | 150...200           | 4                     |
| В30                                  | 250...300           | 6...8                 |
| В40                                  | 350...400           | 8...10                |

Послідовність розрахунку:

1. За табл. 4.27 встановлюємо, що заданий клас бетону (В20) забезпечує необхідні його марки за морозостійкістю та водонепроникністю (F100, W4). Попередніми експериментами визначили необхідне золо-цементне відношення  $З/Ц = 0,75$ .

2. За номограмою 4.18 визначаємо необхідне  $Ц/В$ :

$$Ц/В = 1,9.$$

3. За номограмою 4.19 визначаємо необхідний водовміст суміші:

$$В = 195 \text{ л/м}^3.$$

4. Витрати цементу і золи знаходимо за формулами (4.43, 4.44):

$$Ц = В \cdot Ц/В, \quad (4.43)$$

$$Ц = 1,9 \cdot 195 = 370 \text{ кг/м}^3,$$

$$З = Ц \cdot З/Ц, \quad (4.44)$$

$$З = 370 \cdot 0,75 = 278 \text{ кг/м}^3.$$

5. Об'єм золовмісного тіста визначаємо за формулою:



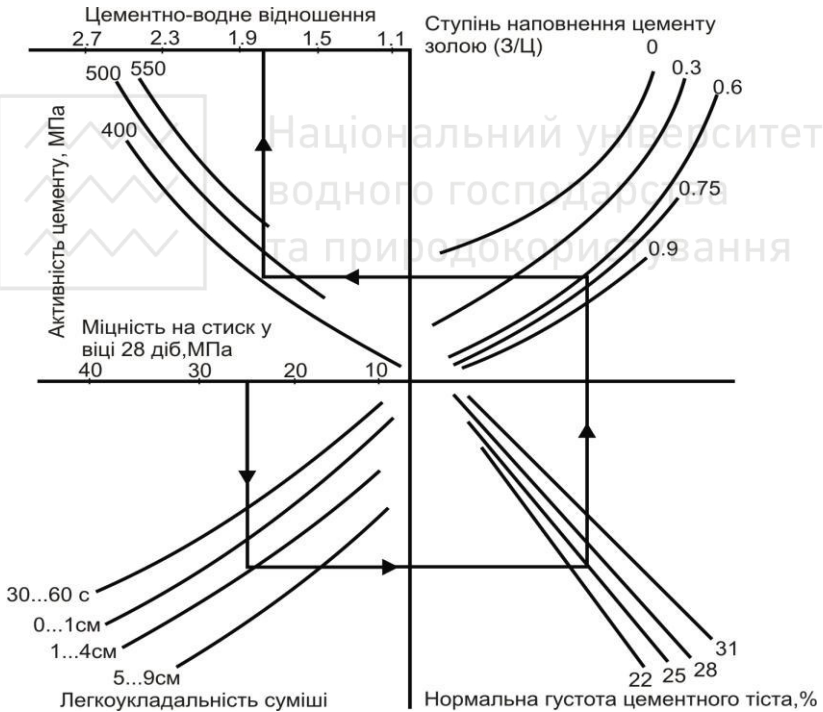
$$V_{\text{зшт}} = \Pi / \rho_{\text{ц}} + 3 / \rho_{\text{з}} + V / \rho_{\text{в}}$$

$$V_{\text{зшт}} = 370 / 3,1 + 278 / 2,3 + 195 / 1,0 = 435 \text{ л/м}^3.$$

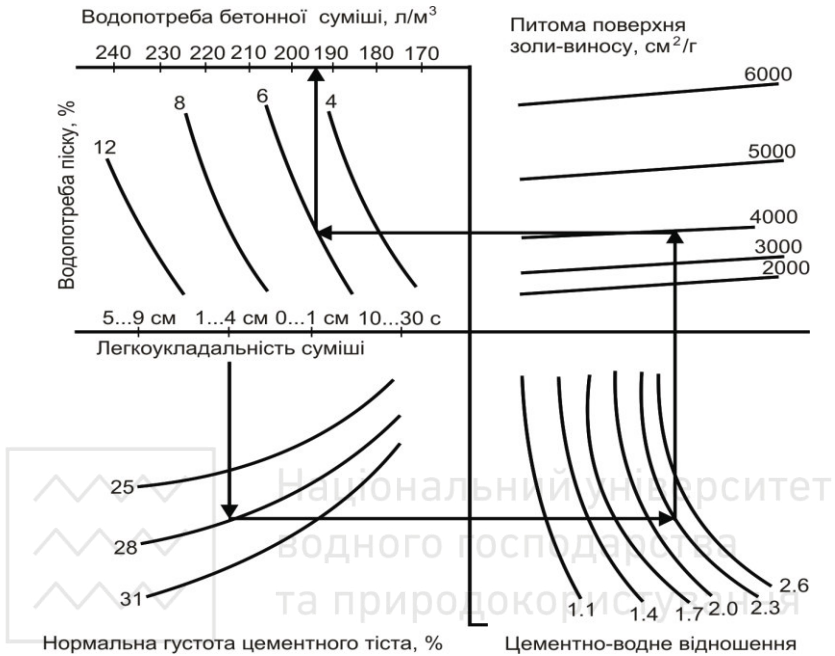
6. Витрату піску визначаємо за формулою:

$$\Pi = (1000 - V_{\text{зшт}}) \rho_{\text{п}},$$

$$\Pi = (1000 - 435) \cdot 2,6 = 1469 \text{ кг/м}^3.$$



**Рис. 4.18.** Визначення Ц/В дрібнозернистих бетонів, наповнених золю-виносу



**Рис. 4.19.** Визначення необхідного вмісту дрібнозернистих бетонних сумішей з золю-виносу

## 4.5. Фібробетони

При проектуванні складів фібробетону необхідно враховувати наведені нижче закономірності.

1. Властивості фібробетону визначаються видом і якістю застосовуваних волокон і бетону, їх кількісним співвідношенням і також залежать від стану контактів на межі поділу фаз.

2. Вид волокон, їх відносна довжина ( $l/d$ ) і процентний вміст у суміші повинні призначатися, виходячи з вимог до виробів і конструкціям з урахуванням прийнятої технології. Відхилення від оптимальних значень зазначених параметрів у





більшу або меншу сторону знижує ефективність дисперсного армування.

При оптимальних параметрах армування введення волокон сприяє поліпшенню структури й властивостей вихідного бетону, підвищенню його стійкості й довговічності.

В сталевібробетоні на відміну від звичайного бетону, основним фактором, що відповідає за властивості одержуваного композита є вміст дисперсної арматури в об'ємі матеріалу. Найменше значення відсотка армування при ( $d = \text{const}$ ) і найбільше значення діаметра при ( $\mu = \text{const}$ ) рекомендується вибирати відповідно до мінімальної середньої відстані між центрами фібр, при якій останні ефективно вступають у роботу. Найменші значення довжини фібр визначається мінімальною необхідною довжиною анкеровки. Максимальні значення відсотка армування й довжини фібр і мінімальне значення діаметра визначаються заданими фізико-механічними показниками матеріалу та обмежуються можливостями технології приготування сталевібробетону. Введення фібрової арматури у суміш знижує її легкоукладальність, тим суттєвіше, чим більший відсоток армування й довжина фібр і менший діаметр. При досягненні певного ступеня насичення настає такий момент, коли фібри починають комкуватися, утворюючи так звані "їжаки".

**Приклад 4.5.1** Розрахувати склад сталевібробетона. Використовується хвиляста фібра Ф1 з довжиною волокон 60 мм, діаметром 1 мм, опором розриву 1335 МПа, портландцемент ПЦЦ М500. Крупний заповнювач – гранітний щебінь 5...20 мм, дрібний заповнювач – кварцовий пісок з  $M_k = 1.9$ .

Був реалізований трирівневий трьохфакторний близький до D – оптимального експериментальний план у відповідності до умов планування наведених в табл.4.28

Статистичний аналіз отриманих результатів експерименту дозволив розрахувати математичні моделі міцнісних параметрів бетону у віці 3, 7 та 28 діб (табл. 4.29) та на їх основі побудувати графічні залежності (рис. 4.20). При побудові графічних залежностей від двох факторів значення третього приймалося на основному (нульовому) рівні.



Таблиця 4.28

Умови планування експериментів при визначенні  
параметрів складів сталевібробетону

| Фактори                                |                | Рівні варіювання |     |      | Інтервал варіювання |
|--|----------------|------------------|-----|------|---------------------|
| Натуральний вид                        | Кодований вид  | -1               | 0   | +1   |                     |
| Витрата цементу, кг/м <sup>3</sup> (Ц) | x <sub>1</sub> | 450              | 500 | 550  | 50                  |
| Цементно-водне відношення( В/Ц)        | x <sub>2</sub> | 0,35             | 0,4 | 0,45 | 0,1                 |
| Витрата фібри, кг/м <sup>3</sup> (Ф)   | x <sub>3</sub> | 40               | 60  | 80   | 20                  |

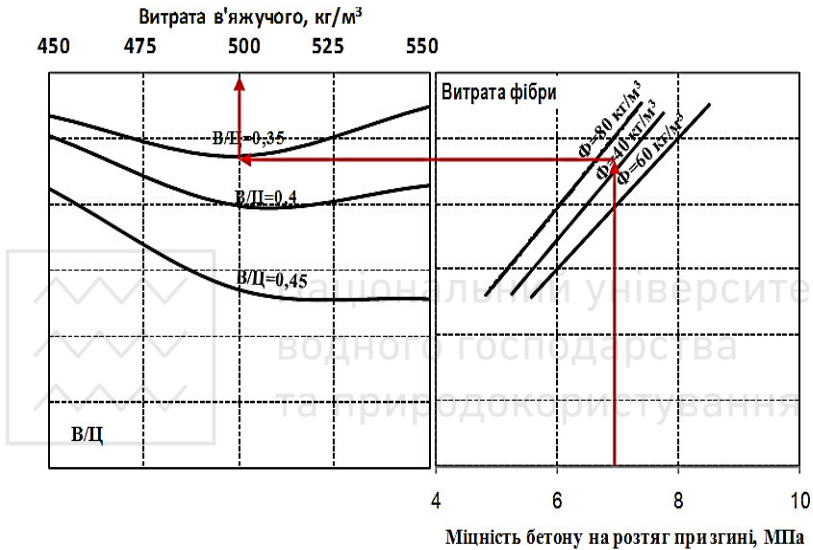
Таблиця 4.29

Математичні моделі міцнісних параметрів сталевібробетону

| Вихідний параметр                    |        | Математичні моделі  |
|--------------------------------------|--------|---|
| Витрата Melflux, %                   |        | $y_1 = 0,21 - 0,081x_1 - 0,315x_2 + 0,099x_3 + 0,2x_1^2 + 0,14x_2^2 - 0,04x_3^2 + 0,012x_1x_2 - 0,012x_1x_3 - 0,034x_2x_3$  |
| Міцність при стиску у віці:          | 3 доби | $y_2 = 35,46 - 0,26x_1 - 7,7x_2 - 0,14x_3 + 4,171x_1^2 + 1,47x_2^2 + 0,671x_3^2 - 8,363x_1x_2 - 0,388x_1x_3 + 0,213x_2x_3$  |
|                                      | 7 діб  | $y_3 = 46,20 - 3,9x_1 - 8,4x_2 + 0,42x_3 + 8,618x_1^2 + 0,418x_2^2 - 0,682x_3^2 - 4,850x_1x_2 - 1,40x_1x_3 + 0,575x_2x_3$   |
|                                      | 28 діб | $y_4 = 60,6 + 0,72x_1 - 16,5x_2 - 4,8x_3 + 11,748x_1^2 + 2,29x_2^2 + 0,498x_3^2 - 6,70x_1x_2 + 1,80x_1x_3 - 2,70x_2x_3$     |
| Міцність на розтяг при згині у віці: | 3 доби | $y_5 = 2,74 + 0,1x_1 - 0,22x_2 + 0,63x_3 + 0,171x_1^2 - 0,129x_2^2 - 0,279x_3^2 - 0,625x_1x_2 + 0,275x_1x_3 + 0,12x_2x_3$   |
|                                      | 7 діб  | $y_6 = 3,27 - 0,1x_1 - 0,41x_2 + 1,15x_3 + 0,365x_1^2 - 0,106x_2^2 - 0,194x_3^2 - 0,450x_1x_2 - 0,075x_1x_3 - 0,225x_2x_3$  |
|                                      | 28 діб | $y_7 = 4,05 - 0,15x_1 - 0,44x_2 + 1,67x_3 + 0,532x_1^2 - 0,282x_2^2 - 0,368x_3^2 - 0,388x_1x_2 - 0,087x_1x_3 - 0,213x_2x_3$ |



На основі отриманої експериментально-статистичної моделі (табл. 4.29, 4.30) побудовано номограму міцності сталевібробетону (рис.4.20). Дана номограма в сукупності з комплексом отриманих моделей (табл. 4.29) може бути використана для проектування складів фібробетонів з комплексом заданих властивостей.



**Рис. 4.20.** Номограма міцності сталевібробетону на розтяг при згині у віці 28 діб

Залежно від конкретних умов визначальними параметрами складу сталевібробетону можуть бути або водоцементне відношення або витрати фібри. При проектуванні складів за табл. 4.30 визначаємо бажаний діапазон в якому може знаходитись склад фібробетону із заданими значеннями міцності на стиск і розтяг при згині.

Прийнявши певні витрати фібри або значення водоцементного відношення по номограмі наведеній на рис. 4.20 визначаємо основні параметри складу бетонної суміші, які будуть забезпечувати задану міцність бетону на розтяг при згині.



Таблиця 4.30

Орієнтовні значення міцнісних характеристик сталевібробетону  
у віці 28 діб

| Витрата<br>фібри, кг/м <sup>3</sup> | <i>B/C</i> | <i>R<sub>зг</sub></i> , МПа | <i>R<sub>см</sub></i> , МПа |
|-------------------------------------|------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 20...40                             | 0,35...0,4 | 6,02...7,51                 | 65,8...72,2                 |
|                                     | 0,4...0,45 | 5,13...6,02                 | 44,6...65,8                 |
| 40...60                             | 0,35...0,4 | 7...7,75                    | 60,6...79,3                 |
|                                     | 0,4...0,45 | 5,3...7                     | 46,3...60,6                 |
| 60...80                             | 0,35...0,4 | 7...7,75                    | 65,8...83,9                 |
|                                     | 0,4...0,45 | 5,3...7                     | 48,8...65,8                 |

Переводимо отримані значення параметрів складу бетонної суміші в кодований вигляд використовуючи формули (4.40-4.42):



$$x_1 = \frac{(C - 500)}{50}; \quad (4.45)$$

$$x_2 = \frac{(B/C - 0,4)}{0,05}; \quad (4.46)$$

$$x_3 = \frac{(\Phi - 60)}{20}. \quad (4.47)$$

Підставивши отримані значення в рівняння (табл. 4.29), перевіряємо забезпеченість необхідної міцності бетону при стиску у віці 28 діб.

Розраховуємо при заданому водоцементному відношенні і витраті цементу витрати води за формулою:

$$B = C \cdot V / C. \quad (4.48)$$

Підставляємо переведені в кодований вигляд значення витрати цементу, фібри та водоцементного відношення в рівняння (табл. 4.29), і визначаємо витрату суперпластифікатора полікарбоксилатного типу, яка забезпечить необхідну рухомість бетонної суміші 16-18 см. При необхідності забезпечення іншої рухомості бетонної суміші вміст суперпластифікатора уточнюється експериментально.

Витрати заповнювачів знаходимо за відомими формулами:



$$\text{Щ} = \frac{1000}{\alpha \frac{V_{\text{щ}}^n}{\rho_{\text{нщ}}} + \frac{1}{\rho_{\text{щ}}}}; \quad (4.49)$$

$$\Pi = \left( 1000 - \left( \frac{\text{Ц}}{\rho_{\text{ц}}} + B + \frac{\text{Щ}}{\rho_{\text{щ}}} \right) \right) \rho_{\text{п}}. \quad (4.50)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт розсушення зерен,  $V_{\text{щ}}^n$  – пустотність щебеню,  $\rho_{\text{нщ}}$  – насипна густина щебеню,  $\rho_{\text{щ}}$  – дійсна густина щебеню,  $\rho_{\text{п}}$  – дійсна густина піску.

Наприклад, необхідно розрахувати склад високоміцного сталевібробетону з 28-добовою міцністю на стиск 75 МПа та міцністю на розтяг при згині 7 МПа. Насипна густина щебеню  $\rho_{\text{нщ}} = 1,65 \text{ г/см}^3$ , дійсна густина щебеню  $\rho_{\text{щ}} = 2,85 \text{ г/см}^3$ , дійсна густина піску  $\rho_{\text{п}} = 2,65 \text{ г/см}^3$ .

1. За табл. 4.30 визначаємо діапазон  $B/\text{Ц}$  та витрати фібри, в якому може знаходитись склад фівробетону із заданими значеннями міцності на стиск і розтяг при згині. В даному випадку – це витрати сталевібробетону 40...60 кг/м<sup>3</sup> та водоцементне відношення 0,35...0,4.

2. За номограмою, наведеною на рис. 4.20, задавшись з позицій економії мінімальною витратою фібри 40 кг/м<sup>3</sup>, визначаємо необхідну витрату цементу і водоцементне відношення, які б забезпечували виконання поставленої вимоги що до міцності фівробетону на розтяг при згині.

3. Переводимо отримані значення ( $\text{Ц}=500 \text{ кг/м}^3$ ,  $B/\text{Ц}=0,35$ ,  $\Phi=40 \text{ кг/м}^3$ ) в кодований вигляд:

$$x_1 = \frac{(\text{Ц} - 500)}{50} = \frac{500 - 500}{50} = 0;$$
$$x_2 = \frac{(B/\text{Ц} - 0,4)}{0,05} = \frac{0,35 - 0,4}{0,05};$$
$$x_3 = \frac{(\Phi - 60)}{20} = \frac{40 - 60}{20} = -1.$$



4. Підставляємо отримані значення в рівняння з табл.4.29 та перевіряємо чи забезпечується необхідна міцність бетону при стиску у віці 28 діб 75 МПа.

$$R_{cm} = 60,6 + 0,72 \cdot 0 - 16,5 \cdot (-1) + 4,8 \cdot (-1) + 11,748 \cdot (0)^2 + 2,2 \cdot (-1)^2 + 0,4 \cdot (-1)^2 - 6,70 \cdot 0 \cdot (-1) + 1,80 \cdot 0 \cdot (-1) + 2,70 \cdot (-1) \cdot (-1) = 77,6 \text{ МПа.}$$

Умова виконується  $77,6 \geq 75$  МПа.

5. Розраховуємо, при заданому водоцементному відношенні і витраті цементу, витрати води за формулою:

$$B = Ц \cdot V / Ц = 500 \cdot 0,35 = 175 \text{ л/м}^3.$$

6. Підставляємо переведені в кодований вигляд значення витрати цементу ( $x_1=0$ ), фібри ( $x_3=-1$ ) та водоцементного відношення ( $x_2=-1$ ) в рівняння з табл.4.29, і визначаємо витрату суперпластифікатора полікарбоксилатного типу Melflux, яка забезпечить необхідну рухомість бетонної суміші 16-18 см.

$$СП = 0,21 - 0,081 \cdot 0 - 0,315 \cdot (-1) + 0,099 \cdot (-1) + 0,27 \cdot 0^2 + 0,14 \cdot (-1)^2 + 0,04 \cdot (-1)^2 + 0,012 \cdot 0 \cdot (-1) - 0,012 \cdot 0 \cdot (-1) - 0,034 \cdot (-1) \cdot (-1) = 0,57\% \text{ від маси цементу.}$$

7. При знайдених значеннях витрати цементу та води, за відомими формулами визначаємо витрати заповнювачів.

$$Щ = \frac{1000}{1,5 \frac{0,42}{1,65} + \frac{1}{2,85}} = 1370 \text{ кг/м}^3;$$

$$П = \left( 1000 - \left( \frac{500}{3,1} + 175 + \frac{1370}{2,85} \right) \right) 2,65 = 389 \text{ кг/м}^3.$$

Отриманий за розрахунками бетон має наступний склад: цемент – 500 кг/м<sup>3</sup>, вода – 175 л/м<sup>3</sup>, щебінь – 1370 кг/м<sup>3</sup>, пісок – 389 кг/м<sup>3</sup>. Витрата суперпластифікатора Melflux складає 0,57% від маси цементу, витрата стальної фібри 40 кг/м<sup>3</sup>.

Розрахований склад фібробетону необхідно перевірити експериментально.

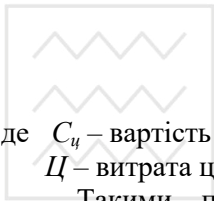


## 5. АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ СКЛАДІВ БЕТОНУ

Ефективність складів бетону визначається їх техніко-економічними показниками, що характеризують раціональність використання матеріальних і енергетичних ресурсів за умови повного забезпечення комплексу властивостей обумовлених особливостями технології виробів та конструкцій на його основі і їх експлуатації.

Визначальним матеріальним ресурсом, ефективність використання якого характеризує значною мірою ефективність складів бетону, є цемент.

Критерієм ефективності при виборі цементу може бути відношення необхідних на нього витрат до величини визначального проектного або технологічного параметра  $P$ :


$$K_{\text{ед}} = \frac{C_{\text{ц}} \Pi}{P}, \quad (5.1)$$

де  $C_{\text{ц}}$  – вартість цементу, грн./кг;

$\Pi$  – витрата цементу, кг/м<sup>3</sup>.

Такими параметрами можуть слугувати, наприклад, проектна 28 добова або рання міцність, що досягається бетоном при заданих температурно-вологісних умовах, а також водонепроникність, морозостійкість тощо.

При проектуванні складів бетону, особливості цементів з мінеральними добавками порівняно з бездобавочними цементами можна врахувати двома основними коефіцієнтами:

$$k_1 = R_{\text{ц}}/R_{\text{ц}}^0; k_2 = B/B^0, \quad (5.2)$$

де  $R_{\text{ц}}$  і  $B$  – відповідно активність цементу і водопотреба бетонної суміші на цементі з добавкою;

$R_{\text{ц}}^0$  і  $B^0$  – без добавки.

При застосуванні цементів з підвищеним вмістом мінеральних добавок може спостерігатися деяке сповільнення зростання міцності в перші 7 днів при збереженні марочної міцності. Якщо для цементу, що не містить мінеральних



добавок, 7-добова міцність становить 0,65-0,75 міцності в 28 діб, для портландцементу з 20% доменного шлаку, вона часто знижується до 0,55-0,65, з 35% шлаку – до 0,5-0,6, при заміні 10% шлаку опокою – до 0,4-0,5.

Відомо, що є деякий критичний вміст мінеральної добавки, вище якого 28-добова активність цементу починає знижуватися, хоча марка цементу і ціна на нього залишаються незмінними. Цей критичний вміст для кожної добавки з урахуванням її особливостей залежить від хіміко-мінералогічного складу клінкера, тонкості помелу і температурно-вологісних умов твердіння цементу.

Споживачам цементу доводиться зважати на те, що нерідко при однакових марках цементу, який не містить мінеральних добавок, і цементу з мінеральними добавками, активність останнього може бути істотно нижчою. Можна орієнтовно вважати, що кожні 2 МПа активності в середньому еквівалентні витраті 10 кг цементу на 1 м<sup>3</sup> бетону.

Суттєвим є врахування зміни водопотреби бетонної суміші при зміні виду цементу, що прямо враховується коефіцієнтом  $k_2$ .

Як відомо, параметром, що характеризує водопотребу цементу, є його нормальна густина, яка визначається при стандартному випробуванні.

Відповідно до експериментальних даних В.П.Сизова водопотребу бетонної суміші при зміні нормальної густоти можна представити рівнянням:

$$B = B_0 + 4(HГ - 28), \quad (5.3)$$

де  $B_0$  – водопотреба бетонної суміші, необхідна для досягнення заданого показника легкоукладальності на застосованих заповнювачах і портландцементі з  $HГ=28\%$ .

Орієнтовно коефіцієнт  $k_2$  можна знайти з виразу:

$$k_2 = \frac{B + 4(HГ - 28)}{B_0 + 4(HГ^0 - 28)}, \quad (5.4)$$





де  $\Pi^0$  і  $\Pi$  – відповідно нормальна густота цементу, що не містить мінеральних добавок, і цементу з мінеральними добавками.

Підвищенню нормальної густоти, як відомо, сприяє введення добавок з високою молекулярною вологоємністю, особливо осадового походження.

Визначення емпіричних значень  $k_1$  і  $k_2$  бажано виконувати в результаті узагальнення експериментальних даних підприємств-постачальників і споживачів цементу та враховувати їх при проектуванні складів бетону.

Знаючи на основі емпіричних досліджень коефіцієнти  $k_1$  та  $k_2$ , витрату цементу можна визначити, знайшовши  $\text{Ц/В}$  і  $\text{В}$ .

Активні мінеральні добавки, що вводять безпосередньо в бетонні суміші (активні наповнювачі), широко застосовуються для економії цементу і найбільш енергоємного їх компонента – цементного клінкеру.

Для рівних за міцністю бетонів з однаковою легкоукладальністю економія цементу  $\Delta\text{Ц}$  за рахунок введення активної мінеральної добавки може бути знайдена з рівняння:

$$\Delta\text{Ц} = K_{ц,е}D - (\text{Ц/В})_{пр} \Delta\text{В}, \quad (5.5)$$

де  $K_{ц,е}$  – коефіцієнт "цементуючої ефективності",

$D$  – витрата добавки,

$(\text{Ц/В})_{пр}$  – "приведене"  $\text{Ц/В}$ ,

$\Delta\text{В}$  – зміна водопотреби бетонних сумішей при введенні добавки ( $\Delta\text{В} = \text{В}_о - \text{В}_д$ ), де  $\text{В}_о$  і  $\text{В}_д$  – водовміст бетонної суміші відповідно без і при введенні мінеральної добавки).

Очевидно, при  $\Delta\text{В} < 0$  ефект наповнювача знижується, при  $\Delta\text{В} > 0$  зростає. При  $(\text{Ц/В})_{пр} \Delta\text{В} \geq K_{ц,е}D$ , введення активних наповнювачів не дозволяє досягнути економії цементу і клінкеру або приводить навіть до їхньої перевитрати.

З позицій економії цементу і цементного клінкеру мінеральну добавку доцільно застосовувати лише в тому випадку, якщо  $(\text{Ц/В})_{пр}$  більше  $\text{Ц/В}$  наповненого бетону. З виразу  $(\text{Ц/В})_{пр}$  слідує:



$$(C/V)_{\text{пр}} - C/V = K_{\text{ц.е}} D/V. \quad (5.6)$$

Економічний ефект від введення мінеральної добавки в бетонну суміш можна знайти з рівняння:

$$E_{\partial} = C_{\text{ц}} \Delta C - C_{\partial} D, \quad (5.7)$$

де  $C_{\partial}$  – вартість добавки.

Характерною особливістю сучасної будівельної технології є широке застосування хімічних добавок для досягнення необхідних властивостей бетону, зниження витрати матеріальних і енергетичних ресурсів при виготовленні цього матеріалу і при застосуванні його для виробництва конструкцій, зведення будинків і споруд. В наш час підприємства по виготовленню бетону, виробів і конструкцій на його основі поряд з порівняно дешевими добавками, одержаними найчастіше із промислових відходів, усе ширше застосовують спеціально синтезовані добавки на основі дорогої хімічної сировини. Такі добавки-модифікатори дозволяють забезпечити високу якість бетону і регулювати його властивості у широкому діапазоні, однак при оцінюванні доцільності їхнього введення, заміни ними традиційних дешевих добавок доводиться досягнений технічний ефект порівнювати з необхідними додатковими витратами.

Ефективність будь-яких технічних рішень, у тому числі введення хімічних добавок, у бетон повинна визначатися економічним ефектом ( $E$ ) і коефіцієнтом ефективності витрат ( $K_{\text{е}}$ ). Останній являє собою відношення економічного ефекту до витрат, необхідних для його одержання. Витрати на добавку ( $Z_{\text{д}}$ ) при одержанні бетону легко розраховуються:

$$Z_{\partial} = C_{\partial} D + Z_{\partial}^{\text{дод}}, \quad (5.8)$$

де  $C_{\partial}$  – вартість добавки на  $1 \text{ м}^3$  бетону з врахуванням необхідних транспортних витрат;

$D$  – питома витрата добавки;



$Z_o^{доо}$  - питомі витрати, пов'язані з додатковою обробкою добавки, її зберіганням, дозуванням, зміною складу бетонної суміші й ін.

На стадії виготовлення бетону введення добавки дозволяє зменшити його вартість, головним чином, за рахунок зменшення вартості необхідних матеріальних ресурсів, наприклад, у результаті зниження витрати цементу, переходу на інші його види або марки та ін. Однак, неврахування додаткових витрат на добавку і нераціональність технологічних рішень може не дозволити знизити вартість бетону. На рис. 7.1, як приклад, наведені можливі варіанти зміни ефективності введення добавки в бетонну суміш.

Нехай нормовані властивості бетону забезпечуються без добавки при витраті цементу  $\Pi_3$  (I, рис. 5.1). При введенні добавки можна забезпечити необхідні властивості бетону при витраті цементу  $\Pi_1$  (II, рис. 5.1), але це не вигідно, тому що вартість такого бетону буде вище, ніж бетону без добавки. Зменшивши витрату добавки (III, рис. 5.1) можна забезпечити необхідні властивості бетону при компромісній витраті цементу  $\Pi_2$  і це буде самий вигідний варіант. Підібрати оптимальну витрату добавки в цьому випадку можна шляхом перебирання варіантів, ґрунтуючись на результатах підборів складів або при використанні емпіричних залежностей, що пов'язують нормовані показники властивостей з витратою добавки та іншими параметрами складу.

Більш універсальним показником ефективності складів бетону є коефіцієнт раціонального використання цементу  $K_{p.v.u}$ , що являє відношення питомих витрат на цемент, які йдуть на виготовлення бетону або залізобетонних виробів з визначеними властивостями при деякому еталонному варіанті, до витрат на цемент і заходи, що сприяють зниженню його витрат, при даному технологічному рішенні:

$$K_{p.v.u} = \frac{S_{ц.ем}}{S_{ц} + S_{m.n}} = \frac{C_{ц.ем} \Pi_{ем}}{C_{ц} \Pi + S_{m.n}}, \quad (5.9)$$

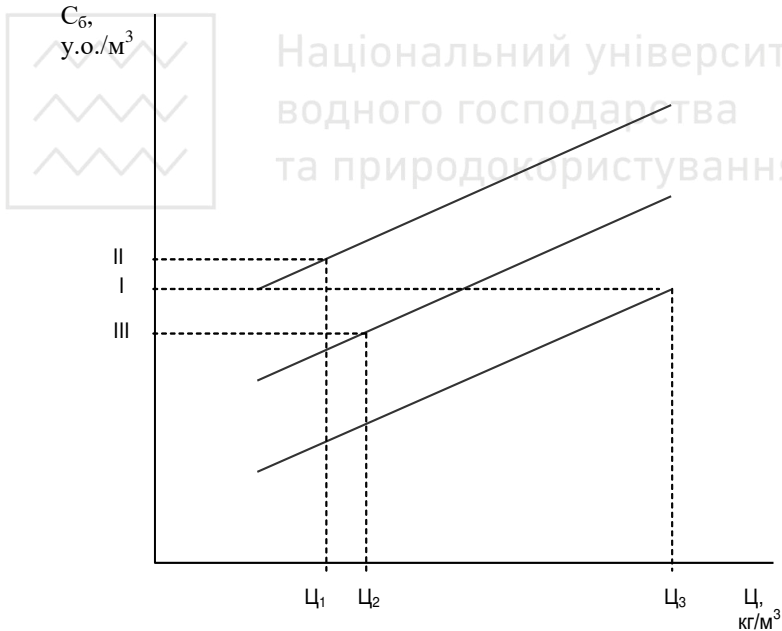


де  $S_{ц,ет}$  і  $S_{ц}$  – питомі витрати на цемент, що йде на  $1 \text{ м}^3$  бетону або визначену конструкцію відповідно при еталонному і даному варіантах технологічного рішення;

$S_{т,п}$  – питомі приведені витрати на комплекс технологічних прийомів, спрямованих на скорочення витрат цементу без погіршення якості бетону (введення добавок, електро- або паророзігрів суміші і т.д.);

$C_{ц,ет}$  і  $C_{ц}$  – вартості відповідно еталонного і застосованого цементів;

$Ц_{ет}$  і  $Ц$  – витрати умовно еталонного і порівнювального цементів для отримання бетону з заданими проектними вимогами.



**Рис. 5.1.** Можливі варіанти зміни вартості бетону при введенні хімічної добавки:  
I – вартість бетону без добавки, II і III – вартість бетону з добавкою



Критерій  $K_{p.v.ц}$  може використовуватися для аналізу ефективності цементів різної вартості і якості при зміні активності, нормальної густоти тощо.

За допомогою  $K_{p.v.ц}$  можна оцінювати ефективність використання цементу при аналізі не тільки технологічних, але й проектних рішень, пов'язаних зі зниженням матеріалоемності виробів і конструкцій. Наприклад, при порівняльній оцінці бетону в конструкціях за міцністю зручно використовувати вираз:

$$K'_{p.v.ц} = \frac{S'_c V}{(S'_c + S_{m.n})} \cdot V', \quad (5.10)$$

де  $S'_c, S'_c$  – витрати на цемент для одержання 1 м<sup>3</sup> бетону відповідно еталонної і порівнюваної міцності;

$V$  і  $V'$  – об'єм відповідно еталонної і порівнюваної конструкції;

$S_{m.n}$  – додаткові витрати, пов'язані зі зміною міцності бетону в конструкції.

При виготовленні конструкцій з високоміцного бетону, незважаючи на збільшення витрати цементу на 1 м<sup>3</sup> бетону, в результаті зменшення перерізу й об'єму виробів ефективність використання цементу виявляється більш високою.

Важливим наслідком оптимізації складів бетонів є економія цементного клінкеру – напівфабрикату цементу, який визначає його вартість.

Економію портландцементного клінкеру на 1 м<sup>3</sup> бетону можна знайти з умови:

$$\Delta K_l = \Delta C(1 - D_m), \quad (5.11)$$

де  $\Delta C$  – економія цементу, кг/м<sup>3</sup>,

$D_m$  – частка цементу, що припадає на мінеральну добавку.

Критерієм ефективності використання цементного клінкера в бетонах може слугувати міцність бетону на 1 кг витраченого клінкеру:



$$L = R_{cm} / K_l, \quad (5.12)$$

де  $K_l$  – витрата клінкеру на  $1 \text{ м}^3$  бетонної суміші.

Значення критерію  $L$ , розраховані за типовими нормами витрат цементу, коливаються залежно від виду цементу, легкоукладальності, проектної марки і відпускної міцності бетону. При використанні, наприклад, портландцементу і його різновидів та твердінні в нормальних умовах для М400 –  $L=0,094\dots 0,156$ ; М500 –  $L=0,106\dots 0,16$ ; М600 –  $L=0,133\dots 0,179$  (при розрахунках умовно прийнято, що цемент містить 80% клінкеру).

З виразу критерію  $L$  можна встановити, що його збільшення можливо за рахунок підвищення Ц/В і, відповідно, міцності бетону без збільшення витрати клінкеру, а також зростання активності цементу. Для підвищення Ц/В можуть застосовуватись всі технологічні прийоми зменшення водопотреби бетонних сумішей, з яких особливо ефективним є введення суперпластифікаторів.

Для оцінки ефективності рецептурно-технологічних параметрів виробництва бетону, виробів та конструкцій на його основі важливе значення набувають критерії енергетичних витрат. З позицій народногосподарської ефективності критерії енергетичних витрат повинні відображати питомі витрати теплової та електричної енергії, не тільки пов'язані безпосередньо з отриманням бетонної суміші, виробів і конструкцій, але і використані на отримання вихідних компонентів і, в першу чергу, цементу. Енерговитрати, пов'язані з отриманням цементу, що йде на  $1 \text{ м}^3$  бетону з проектною 28-добовою міцністю 20-50 МПа складають (для портландцементу і портландцементу з мінеральними добавками) 60-177 кг умовного палива, тоді як сумарна витрата теплової енергії безпосередньо у виробництві збірного залізобетону в середньому не перевищує 70, а на передових заводах – 43 кг умовного палива на  $1 \text{ м}^3$ .

До 70% енерговитрат у виробництві збірного залізобетону спрямовані на теплову обробку виробів. Ґрунтуючись на структурі енерговитрат, можна стверджувати, що народногосподарська ефективність використання



енергоресурсів у виробництві бетону і виробів на його основі обумовлена, в основному, оптимальністю технологічних параметрів, що визначають витрати цементу в бетоні (особливо його клінкерної складової) і витрати палива при тепловій обробці виробів.

Як критерій раціонального використання енергетичних витрат ( $K_{p.v.n}$ ) можна прийняти відносну питому витрату умовного палива (теплової енергії) на виробництво  $1 \text{ м}^3$  бетону або виробів на його основі, включаючи витрату палива на виробництво цементу:

$$K_{p.v.n} = \frac{C_{em} \cdot T_{ц.em} + T_{дод}}{C \cdot T_{ц} + T_{m.o} + T'_{дод}}, \quad (5.13)$$

де  $C_{em}$  і  $C$  – витрати умовно еталонного і порівнюваного цементів в  $\text{кг}/\text{м}^3$  для отримання бетону із заданими проектними вимогами;

$T_{ц.em}$  і  $T_{ц}$  – витрата умовного палива для отримання 1 кг еталонного і порівнюваного цементів;

$T_{m.o}$  – витрата умовного палива на теплову обробку виробів;

$T_{дод}$  – додаткові витрати палива на технологічні цілі.

Критерій  $K_{p.v.n}$  дозволяє привести до порівнюваного вигляду енерговитрати на отримання бетонів з різними показниками властивостей і оцінити ефективність використання теплової енергії в різних складах бетону як в умовах нормального твердіння, так і при тепловій обробці. За допомогою критерію  $K_{p.v.n}$  можна вибрати оптимальні за витратами палива режими теплової обробки. При порівнянні бетонів нормального твердіння і підданих тепловій обробці, чим ближче  $K_{p.v.n}$  до 1 (за умови застосування однакових видів і марок цементу в еталонному і порівняльному варіантах), тим енергетично ефективніший процес прискореного твердіння бетонів. За допомогою критерію  $K_{p.v.n}$  можна порівняти також енергетичну ефективність різних технологічних рішень - введення мінеральних і хімічних добавок, розігріву бетонної суміші та ін.

За допомогою перехідних коефіцієнтів при визначенні  $K_{p.v.n}$  можна враховувати поряд з тепловою і витрати



електроенергії (1кВт.год  $\sim$  0,34 кг умовного палива). Всі можливі технологічні рішення, що призводять до збільшення  $K_{p,в.л}$  без неприпустимого зниження продуктивності лінії і істотного збільшення витрат, є прогресивними і можуть бути рекомендовані до впровадження.

**Приклад 5.1.** Проаналізувати вплив технологічних факторів на коефіцієнт ефективності використання цементу в золі цементних бетонах.

В якості коефіцієнта ефективності використане відношення:

$$K_e = R_{cm}/Ц, \quad (5.14)$$

де  $R_{cm}$  – міцність бетону на стиск у віці 28 діб, МПа;

$Ц$  – витрата цементу, кг/м<sup>3</sup>.

В результаті виконання експериментів згідно плану  $Na_5$  при варіюванні В/Ц, витрати води (В) л/м<sup>3</sup>, частки піску в суміші заповнювачів ( $r_n$ ), витрати золи-виносу ( $D_3$ ), кг/м<sup>3</sup> та її питомої поверхні ( $S_3$ ), см<sup>2</sup>/г отримана експериментально-статистична модель  $K_e$ :

$$\begin{aligned} K_e = & 0,82 - 0,003x_2 + 0,008x_4 - 0,007x_5 + 0,012x_2^2 + \\ & + 0,007x_3^2 - 0,019x_4^2 - 0,015x_5^2 - 0,002x_1^2 - \\ & - 0,005x_1x_2 - 0,0027x_1x_5 + 0,0046x_2x_5 - 0,002x_3x_5, \end{aligned} \quad (5.15)$$

де  $x_1 = (В/Ц - 0,6)/0,1$ ;

$x_2 = (В - 190)/10$ ;

$x_3 = (r_n - 0,41)/0,07$ ;

$x_4 = (D_3 - 150)/100$ ;

$x_5 = (S_3 - 3900)/1000$ .

Аналіз отриманої моделі і відповідної діаграми (рис.5.2) дозволяє стверджувати, що вплив витрати золи та її дисперсності на критерій  $K_e$  має екстремальний характер. Оптимальні значення цих факторів можна визначити з моделі як похідні по  $x_4$  і  $x_5$ .

Відповідно до умов, прийнятих в експериментах виявилось, що оптимальні значення витрати золи становлять 170кг/м<sup>3</sup>.





Оптимальне значення питомої поверхні золи коливається при різних значеннях основних параметрів, що характеризують склад бетону і в середньому наближається до  $4000 \text{ см}^2/\text{г}$ .



**Рис. 5.2.** Поєднана діаграма міцності і коефіцієнта ефективності

використання цементу у литих золовмістких бетонах:

а – ізолінії міцності бетонів при  $V/C=0,6$ ;  $V=190 \text{ кг} / \text{м}^3$ ,  $r_n=0,41$ ;

б – графіки розподілу міцності і коефіцієнта ефективності використання цементу при: 1 –  $D_3=50 \text{ кг}/\text{м}^3$ ; 2 –  $D_3=150 \text{ кг}/\text{м}^3$ ;

в – графік розподілу міцності і коефіцієнта ефективності використання цементу при: 1 –  $S_3=290 \text{ м}^2/\text{кг}$ ;

2 –  $S_3=490 \text{ м}^2/\text{кг}$

Значення міцності бетону, що відповідають ізолініям на рис. 5.2 наведені в табл.5.1.



Таблиця 5.1

Ізорівні міцності бетону

| Номер ізорівня | Міцність бетону, МПа при $S_{шт}$ золи, $см^2/г$ |      |      |
|----------------|--|------|------|
|                | 2900   | 3900 | 4900 |
| 1              | 12,8   | 15,4 | 8,5  |
| 2              | 14,7   | 17,2 | 10,3 |
| 3              | 16,5   | 19,0 | 12,1 |
| 4              | 18,3   | 20,8 | 13,9 |
| 5              | 20,1   | 22,6 | 15,7 |
| 6              | 21,9   | 24,5 | 17,6 |
| 7              | 23,7   | 26,3 | 19,4 |
| 8              | 25,6   | 28,1 | 21,2 |
| 9              | 26,9   | 29,9 | 23,0 |
| 10             | 29,2   | 31,7 | 24,8 |

**Примітка.** Приведені середні значення міцності бетону при відхиленнях в межах ізорівнів до 0,9 МПа.

**Приклад 5.2.** Розрахувати з допомогою експериментально- статистичних моделей складу активованих цементно-зольних бетонів з різною міцністю на стиск у віці 28 днів і значення критерія  $L$  – відношення міцності бетону на стиск до витрати клінкеру  $кг$  на  $1 м^3$  бетонної суміші.

Як активізатори використані добавки мікрокремнезему (МК) – відходу виробництва феросиліцію і вапняно-карбонатного пилу (ВКП) – відходу виробництва грудкового вапна.

Для отримання моделей реалізовані експерименти за планом  $V_4$  відповідно до умов планування обраних факторів (табл.5.2).

Таблиця 5.2

Умови планування факторів

| Фактори варіювання                      | Рівні варіювання факторів |      |      |
|---|---------------------------|------|------|
|   | -1                        | 0    | +1   |
| $x_1 = V_a / (V_a + V_3)$               | 0,3                       | 0,37 | 0,44 |
| $x_2 = (V_a + V_3) / (V_a + V_3 + V_4)$ | 0,56                      | 0,63 | 0,7  |



| Фактори варіювання                                  | Рівні варіювання факторів |      |      |
|---|---------------------------|------|------|
|   | -1                        | 0    | +1   |
| $x_3 = (V_a + V_3 + V_u) / (V_a + V_3 + V_u + V_6)$ | 0,41                      | 0,47 | 0,53 |
| $x_c = V_c / (V_c + V_6)$                           | 0,0                       | 0,01 | 0,02 |

**Примітка:**  $V_a, V_3, V_u, V_6, V_c$  – абсолютні об’єми активатора (МК або ВКП), золи-виносу, портландцементу, води і сухого суперпластифікатора (С-3).

Статистична обробка отриманих експериментальних результатів дозволила отримати рівняння регресії для міцності цементно-зольного бетону активованого МК ( $y_1$ ) і ВКП ( $y_2$ ) при нормальному твердінні ( $y_1^{н.т}$  і  $y_2^{н.т}$ ) і після пропарювання ( $y_1^{п.п}$  і  $y_2^{п.п}$ ):

$$y_1^{н.м} = 23,4 + 4,9x_1 + 2,8x_2 + 4,1x_3 + 2,7x_c - 2,7x_1^2 - 2,1x_2^2 - 0,3x_3^2 - 0,8x_c^2 + 1,9x_1x_c - 0,8x_1x_2 \quad (5.16)$$

$$y_1^{п.п} = 18,5 + 4,5x_1 + 3,3x_2 + 4,3x_3 + 2,8x_c - 2,4x_1^2 - 1,9x_2^2 - 0,5x_3^2 - 0,7x_c^2 + 2,4x_1x_c - 0,6x_1x_2 \quad (5.17)$$

$$y_2^{н.м} = 28,5 + 5,5x_1 - 5,8x_2 + 4,7x_3 + 1,9x_c - 1,8x_1^2 - 0,5x_2^2 - 0,2x_3^2 - 0,6x_c^2 - 1,2x_1x_c + 1,1x_1x_2 \quad (5.18)$$

$$y_2^{п.п} = 21,5 + 4,4x_1 - 4,3x_2 + 3,4x_3 + 1,05x_c - 1,3x_1^2 - 0,3x_2^2 - 0,15x_3^2 - 0,5x_c^2 - 0,8x_1x_c + 0,7x_1x_2 \quad (5.19)$$

В табл. 5.3 наведені розрахункові по моделях (5.16–5.19) значення міцності і критерію L для характерних експериментальних складів бетонних сумішей. З них слідує, що введення оптимальної кількості як мікрокремнезему, так і вапняно-карбонатного пилу дозволяє збільшити ефективність використання клінкеру в 1,2...2 рази.



Таблиця 5.3

Розрахункові значення міцності бетону і критерію L

| Параметри структури                   |                |                |                | Витрата матеріалів, кг/м <sup>3</sup> |     |     |     | Міцність при стиску, МПа у віці 28 діб | Критерій L |
|---------------------------------------|----------------|----------------|----------------|---------------------------------------|-----|-----|-----|--|------------|
| x <sub>1</sub>                        | x <sub>2</sub> | x <sub>3</sub> | x <sub>c</sub> | A                                     | З   | Ц   | В   |  |            |
| Активізатор – вапняно-карбонатний пил |                |                |                |                                       |     |     |     |  |            |
| 0,3                                   | 0,56           | 0,41           | 0,02           | 52                                    | 113 | 179 | 189 | 25                                     | 0,174      |
| 0,37                                  | 0,56           | 0,41           | 0,02           | 65                                    | 101 | 179 | 189 | 28                                     | 0,195      |
| 0,44                                  | 0,56           | 0,41           | 0,02           | 77                                    | 90  | 179 | 180 | 30                                     | 0,209      |
| 0,44                                  | 0,70           | 0,41           | 0,02           | 97                                    | 113 | 122 | 189 | 23                                     | 0,235      |
| 0,44                                  | 0,70           | 0,53           | 0,02           | 125                                   | 146 | 158 | 150 | 28                                     | 0,221      |
| 0,37                                  | 0,63           | 0,47           | 0,02           | 84                                    | 131 | 172 | 170 | 29                                     | 0,21       |
| Активізатор – мікрокремнезем          |                |                |                |                                       |     |     |     |  |            |
| 0,3                                   | 0,70           | 0,53           | 0,02           | 63                                    | 148 | 128 | 122 | 22                                     | 0,215      |
| 0,37                                  | 0,70           | 0,53           | 0,02           | 78                                    | 133 | 128 | 122 | 30                                     | 0,293      |
| 0,3                                   | 0,70           | 0,41           | 0,02           | 48                                    | 112 | 99  | 153 | 15                                     | 0,189      |
| 0,37                                  | 0,70           | 0,41           | 0,02           | 60                                    | 103 | 99  | 153 | 19                                     | 0,24       |
| 0,44                                  | 0,70           | 0,53           | 0,02           | 93                                    | 119 | 128 | 122 | 33                                     | 0,32       |
| 0,37                                  | 0,63           | 0,47           | 0,02           | 62                                    | 107 | 140 | 138 | 23                                     | 0,20       |
| Без активізаторів                     |                |                |                |                                       |     |     |     |  |            |
| -                                     | 0,47           | 0,36           | 0,0            | -                                     | 113 | 174 | 189 | 15                                     | 0,107      |
| -                                     | 0,47           | 0,36           | 0,02           | -                                     | 113 | 174 | 164 | 20                                     | 0,144      |

**Примітки:** 1. Склади бетонів з добавкою МК розраховували при  $x_4=0,26$ , з добавкою ВКП – при  $x_4=0,37$ . 2. При розрахунку критерію L витрату клінкеру в портландцементі приймали рівною 80%. 3. А – активатор, З – зола-виносу, Ц – портландцемент, В – вода.

Найбільше значення критерію L при заданих умовах досягнуто при введенні до цементно-зольного бетону поряд з добавкою суперпластифікатора С-3 добавки мікрокремнезему в кількості 93 кг/м<sup>3</sup>.

**Приклад 5.3.** Визначити вплив нормальної густоти на величину критерію раціонального використання теплової енергії ( $K_{p,v,n}$ ) при отриманні бетону на портландцементі з мінеральною добавкою.



Значення критерію  $K_{p,v,n}$  розраховували за формулою (5.13). Попередньо були розраховані витрати портландцементу марок М400 і М500 для бетонів з різними значеннями 28-добової міцності на стиск, рухомість бетонної суміші відповідала марці Р2. Зміну нормальної густоти цементу від 25 до 29% забезпечували зміною вмісту трепелу від 0 до 20%.

При зміні нормальної густоти цементу враховували зміну водо потреби бетонної суміші і відповідно витрати цементу.

При розрахунках  $K_{p,v,n}$  питому витрату умовного палива для отримання 1 т. бездобавочного портландцементу марок М400 і М500 приймали по довідковим даним відповідно 280 і 291 кг. Твердіння бетону здійснювали в нормальних умовах.

Розрахункові значення  $K_{p,v,n}$  наведені в табл. 5.4.

Таблиця 5.4

Розрахункові значення критерію  $K_{p,v,n}$

| Нормальна густота цементу, % | Марка цементу | Міцність бетону, МПа |      |      |      |      |      |
|------------------------------|---------------|----------------------|------|------|------|------|------|
|                              |               | 20                   | 25   | 30   | 35   | 40   | 50   |
| 25                           | 400           | 1,27                 | 1,23 | 1,20 | 1,16 | -    | -    |
| 27                           | 400           | 1,21                 | 1,19 | 1,14 | 1,07 | -    | -    |
| 29                           | 400           | 1,13                 | 1,11 | 1,03 | 0,96 | -    | -    |
| 25                           | 500           | 1,15                 | 1,16 | 1,17 | 1,17 | 1,20 | 1,23 |
| 27                           | 500           | 1,13                 | 1,13 | 1,13 | 1,13 | 1,13 | 1,13 |
| 29                           | 500           | 1,07                 | 1,06 | 1,05 | 1,03 | 1,02 | 1,00 |

З табл. 5.4 слідує, що енергетична ефективність бетонів при збільшенні нормальної густоти цементу падає. При застосуванні цементу марки М400 порівняно з цементом М500 збільшення міцності бетону викликає більш суттєво збільшення витрат цементу і відповідно зменшення  $K_{p,v,n}$ . Застосування цементу М500 з низькою нормальною густотою енергетично ефективно особливо в бетонах з  $R_{cm} \geq 30$  МПа.

**Приклад 5.4.** Необхідно визначити оптимальний склад гіпсо-перлітового штукатурного розчину з міцністю у віці 7 діб



при стиску 2,3 МПа з середньою густиною 950 кг/м<sup>3</sup> із рухомістю суміші 8 см використовуючи експериментально-статистичні моделі (5.20- 5.22).

Матеріали: гіпсове в'язуче Г-5, спучений перлітовий пісок марки М100, фракції 0,16...1,25 мм; вапнякове борошнофракції 0...0,63 мм; вапно гідратне, ефір целюлози та ефір крохмалю.

Приймаємо вартості основних компонентів гіпсо-перлітової суміші наступними, у.о./кг: гіпс(Г)–2; перліт(П) –10; вапнякове борошно(Вб) 1; вапно пушонка(Вп) –4; ефір целюлоз (ЕЦ) –190; ефір крохмалю(ЕКр) –104.

У відповідності з умовами планування (табл.5.5.) реалізований факторний експеримент за планом Н<sub>5</sub> і отримані математичні моделі міцності бетону на стиск ( $R_{cm}^7$ ), та згин ( $R_{зг}^7$ ) у 7-добовому віці, МПа., середньої густини ( $\rho_0$ ), кг/м<sup>3</sup> та водопотреби (В), л/м<sup>3</sup>.

$$R_{cm}^7 = 2,456 - 0,050x_1 + 0,044x_2 + 0,006x_3 - 0,106x_4 + 0,183x_5 + 0,161x_1^2 + 0,211x_2^2 + 0,561x_3^2 - 0,339x_4^2 - 0,439x_5^2 - 0,144x_1x_2 - 0,069x_1x_3 + 0,044x_1x_4 - 0,156x_1x_5 - 0,069x_2x_3 + 0,019x_2x_4 - 0,156x_2x_5 + 0,044x_3x_4 + 0,269x_3x_5 - 0,044x_4x_5; \quad (5.20)$$

$$R_{зг}^7 = 1,863 - 0,022x_1 + 0,022x_2 - 0,039x_3 - 0,011x_4 + 0,017x_5 + 0,132x_1^2 + 0,132x_2^2 - 0,018x_3^2 - 0,068x_4^2 + 0,082x_5^2 + 0,013x_1x_2 + 0,025x_1x_4 - 0,088x_1x_5 + 0,013x_2x_3 - 0,038x_2x_4 + 0,075x_3x_4 + 0,012x_3x_5 + 0,013x_4x_5; \quad (5.21)$$

$$\rho_0 = 998,92 - 67,99x_1 + 9,45x_2 + 3,55x_3 - 3,39x_4 - 4,49x_5 + 37,19x_1^2 + 0,69x_2^2 - 0,30x_3^2 + 0,19x_4^2 + 0,19x_5^2 + 4,81x_1x_2 + 5,18x_1x_3 + 1,06x_1x_4 - 0,43x_1x_5 + 6,18x_2x_3 + 6,81x_2x_4 + 2,56x_2x_5 - 6,56x_3x_4 - 2,06x_3x_5 - 5,43x_4x_5; \quad (5.22)$$

$$B = 53,31 + 2,057x_1 - 1,223x_2 + 0,448x_3 + 0,333x_4 - 0,194x_5 + 0,79x_1^2 + 0,79x_2^2 + 0,29x_3^2 + 0,29x_4^2 + 0,04x_5^2 - 0,218x_1x_2 - 0,531x_1x_3 - 0,281x_1x_4 + 0,156x_1x_5 + 0,156x_2x_3 + 0,406x_2x_4 - 0,281x_2x_5 + 0,218x_3x_4 - 0,343x_3x_5 - 0,281x_4x_5. \quad (5.23)$$



Таблиця 5.5

Умови планування експериментів

| Фактори   |                       | Рівні варіювання |      |      | Інте-<br>р-<br>вал<br>варі-<br>юван-<br>ня |
|---|-----------------------|------------------|------|------|--|
| Натуральний вид   | Кодо-<br>ваний<br>вид | -1               | 0    | 1    |  |
| Відношення перліту до гіпсу, $\Pi/\Gamma$ , за масою            | $x_1$                 | 0,02             | 0,04 | 0,06 | 0,02                                       |
| Відношення вапнякового борошна до гіпсу, $Bб/\Gamma$ , за масою | $x_2$                 | 0,4              | 0,6  | 0,8  | 0,2  |
| Відношення вапна пушонки до гіпсу, $Bп/\Gamma$ , за масою       | $x_3$                 | 0,17             | 0,37 | 0,57 | 0,2  |
| Вміст ефіру целюлози $ЕЦ$ , % від маси суміші                   | $x_4$                 | 0,23             | 0,25 | 0,27 | 0,02                                       |
| Вміст ефіру крохмалю $ЕКр$ , % від маси суміші                  | $x_5$                 | 0,03             | 0,05 | 0,07 | 0,02                                       |

1. Підставляючи значення міцності при стиску у віці 7 діб ( $R_{cm} \geq 2,3$ ) та густини ( $\rho \leq 950$ ) у вирази (5.20) та (5.22), отримаємо функції обмежень ( $R_{cm} \geq f(x_1, x_2, \dots, x_5)$ ) задачі.

2. У вираз (5.24) підставляємо значення вартості компонентів суміші, а також задаємо обмеження значень факторів: від -1 до 1 (в кодованому вигляді).

$$B_p = B_c \cdot \Gamma + B_{\Pi} \cdot \Pi + B_{Bб} \cdot B_б + B_{Bп} \cdot B_п + B_{Ц} \cdot Ц + B_{Кр} \cdot Кр \rightarrow \min(5.24)$$

де  $B_c, B_{\Pi}, B_{Bб}, B_{Bп}, B_{Ц}, B_{Кр}$  – відповідно вартість гіпсового в'язучого, перліту, вапнякового борошна, гідратного вапна, добавки ефіру целюлози та ефіру крохмалю, у.о./кг.

3. За допомогою програмного забезпечення Microsoft Excel "Пошук рішення" знаходимо значення факторів, що задовольняють обмеженням задачі і мінімізують загальну вартість суміші:

$$x_1 = 0,89; x_2 = -0,44; x_3 = -1; x_4 = 0,6; x_5 = 1.$$



Кодовані значення факторів відповідають наступним формулам:

$$x_1 = \frac{\Pi/\Gamma - 0,04}{0,02}; \quad x_2 = \frac{B\delta/\Gamma - 0,6}{0,2}; \quad x_3 = \frac{Bn/\Gamma - 0,37}{0,2};$$
$$x_4 = \frac{EЦ - 0,25}{0,02}; \quad x_5 = \frac{EKp - 0,05}{0,02}. \quad (5.25)$$

4. Значення факторів в натуральному вигляді:

$$\Pi/\Gamma = 0,02 \cdot x_1 + 0,04 = 0,02 \cdot 0,89 + 0,04 = 0,057;$$

$$B\delta/\Gamma = 0,2 \cdot x_2 + 0,6 = 0,2 \cdot (-0,44) + 0,6 = 0,512;$$

$$Bn/\Gamma = 0,2 \cdot x_3 + 0,37 = 0,2 \cdot (-1) + 0,37 = 0,17;$$

$$EЦ = 0,02 \cdot x_4 + 0,25 = 0,02 \cdot 0,6 + 0,25 = 0,26 \text{ кг/м}^3;$$

$$EKp = 0,02 \cdot x_5 + 0,05 = 0,02 \cdot 1 + 0,05 = 0,07 \text{ кг/м}^3.$$

5. Витрата води, яка забезпечить рухомість суміші 8 см визначиться за рівнянням (5.23):

- у % від маси суміші:

$$B = 57\%$$

- за масою:

$$B = B' \cdot 1000 / 100 = 57 \cdot 1000 / 100 = 570 \text{ л.}$$

6. Витрата гіпсового в'язучого визначається за виразом (5.26):

$$\Gamma = \frac{1000 - (EЦ + EKp)}{\Pi/\Gamma + B\delta/\Gamma + Bn/\Gamma + 1}. \quad (5.26)$$

$$\Gamma = [1000 - (0,26 + 0,07)] / 0,057 + 0,512 + 0,17 + 1 = 572,7 \text{ кг.}$$

7. Значення мінімально можливої вартості 1000 кг гіпсо-перлітової суміші (ГПС) (знаходиться під час ітерацій в програмному забезпеченні "Пошук рішення", вираз (5.24)):

$$B_{ГПС} = 10 \cdot 33,1 + 1 \cdot 293 + 4 \cdot 97,4 + 190 \cdot 2,63 + 104 \cdot 0,7 + 2 \cdot 573 = 2731,5 \text{ у.о.}$$

Остаточний склад ГПС, кг:

$$\Gamma = 573; \quad \Pi = 33; \quad B\delta = 293; \quad Bn = 97; \quad EЦ = 2,6; \quad EKp = 0,7.$$





На етапі формулювання задачі визначення складу суміші необхідно коректно задаватись бажаними значеннями міцностей при стиску та густини. Очевидно, що ці значення повинні знаходитись в межах мінімально та максимально можливого значення вихідного параметру, оскільки саме в цих межах поліноміальна модель адекватно описує досліджувану властивість. Такі значення можна досить легко знайти використовуючи вже згаданий програмний додаток "Пошук рішення". Так для розглядуваного прикладу 1 граничні значення міцності та густини в межах області варіювання факторів будуть наступними:

$$R_{cm}^7 = 1,5-3,4 \text{ МПа}; \rho_0 = 926-1120 \text{ кг/м}^3.$$

Можливим є також деякий вихід за граничні межі вихідних параметрів. В цьому випадку, поряд із задачею оптимізації вирішується також екстраполяційна задача, що дозволяє приймати значення факторів поза межами області варіювання (наприклад,  $x_1 \dots x_3 = 1,1; 1,2; 1,3$ ). Однак необхідно мати на увазі, що екстраполяція може бути пов'язана з певними помилками і ці помилки стають більш відчутними, чим далі вихід за межі області варіювання. Екстраполяція можлива, якщо за результатами досліджень не виникає сумнівів, що за межами області варіювання факторів характер функції залишається без змін.

Запропонований метод розрахунку складу СБС дозволяє враховувати конкретні особливості досліджуваних матеріалів і оптимізувати склад за заданим критерієм, наприклад критерієм мінімальної вартості.



## Список використаної літератури

1. Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента.- М., 1969.- 194 с.
2. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии.- М.: Высш. шк., 1985. –327 с.
3. Баженов Ю.М., Вознесенский В.А. Перспективы применения математических методов в технологии сборного железобетона.- М.:Стройиздат,1974. – 192 с.
4. Баженов Ю.М.Технология бетона. – М.:Высшая школа,1987. – 415 с.
5. Вознесенский В.А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях. – М.: Статистика, 1974. – 192 с.
6. Вознесенский В.А., Ковальчук А.Ф. Принятие решений по статистическим моделям. – М.:Статистика. 1978.- 192 с.
7. Вознесенский В.А., Ляшенко Т.В., Огарков Б.Л. Численные методы решения строительно-технологических задач на ЭВМ. – К.: Вища шк., 1989. – 328 с.
8. Дворкин Л.И. Оптимальное проектирование составов бетона. – Львов: Вища школа, 1981.- 160 с.
9. Л.И.Дворкин, Шамбан И.Б. Проектирование составов бетона с применением математического моделирования: Учеб.пособие. – К.:УМК ВО, 1982. – 144 с.
10. Дворкин Л.И. Снижение расхода цемента и топлива в производстве сборного железобетона. –К.: Вища школа, 1985. – 99 с.
11. Дворкин Л.И., В.Л.Шестаков, Шамбан И.Б. Материаловедческие задачи в промышленном и гражданском строительстве. – Киев, УМК ВО, 1989. – 119 с.
12. Дворкин Л.И., Шамбан И.Б. Многофакторное прогнозирование свойств и проектирование составов бетонов. – М.: Стройиздат, 1992. – 132 с.
13. Дворкин Л. И., Дворкин О. Л. , Гарніцький Ю.В.Основні задачі комп'ютерного бетонознавства. – Рівне: РДТУ, 1999. – 215 с.
14. Дворкин Л. И. , Дворкин О.Л. Проектирование составов бетона с заданными свойствами. – Ровно: РГТУ, 1999. – 202 с.



15. Дворкін Л. Й., Дворкін О. Л., Гарніцький Ю.В. Проектування складів бетону із заданими властивостями. – Рівне: РДТУ, 2000. –215 с.
16. Дворкин Л. И., Дворкин О.Л. Проектирование составов бетона. (Основы теории и методологии). – Ровно: УГУВХП, 2003. – 265 с.
17. Дворкин Л. И., Дворкин О.Л. Основы бетоноведения . – С. Пб. : Стройбетон, 2006. – 682 с.
18. Дворкин Л. И., Большаков В.И., Дворкин О.Л. Основы теории и методологии многопараметрического проектирования составов бетона. – Днепропетровск: ПГАСА, 2006. – 360 с.
19. Дворкін Л. Й., Дворкін О.Л. Основи бетонознавства. – Київ: "Основа", 2007. – 613 с.
20. Дворкин Л. И., Дворкин О.Л., Горячих М.В. Проектирование и анализ эффективности состава бетона. – Ровно, 2009. – 173 с.
21. Дворкін Л. Й., Дворкін О.Л., Житковський В.В. Розв'язування будівельно-технологічних задач методами математичного планування експерименту. – Рівне: НУВГП, 2011. – 174 с.
22. Дворкін Л. Й., Гоц В.І., Дворкін О.Л. Випробування бетонів і будівельних розчинів. Проектування їх складів. – К. : Основа, 2014.– 304 с.
23. Дворкін Л. Й., Дворкін О.Л. Проектування складів. – Рівне: НУВГП, 2015. – 353с.
24. Дворкин Л. И., Дворкин О.Л. Расчетное прогнозирование свойств и проектирование составов бетона. – М.: Инфра-Инженерия, 2015. – 386 с.
25. Дворкин Л. И., Дворкин О.Л. Расчетное прогнозирование свойств и проектирование составов бетона.– М.: Инфра-Инженерия, 2015. – 386 с.
26. Дворкин Л. И., Дворкин О.Л. Проектування складів бетонів (Методи, приклади, вправи): Навчальний посібник/Дворкін Л.Й. – К.: Видавничий дім «Кондор», 2018. – 613 с.
27. Дворкин Л.И. Практическая методология проектирования составов бетона. – Москва: Инфра-Инженерия, 2018. – 627с.
28. Исханов Г.В., Чорний С.М. Чисельні методи розв'язування задач будівництва. – К.: ВШ, 1995. – 374 с.



29. Математические модели задач строительного профиля и численные методы их исследования: Учеб пособие / В.В.Карпов, А.В.Коробейников; Из-во АСВ; СПбГАСУ. – М.; СПб., 1999. – 188 с.
30. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1991, – 207 с.
31. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. – М.: ВШ, 1989. – 367 с.
32. Прыкин Б.В. и др. Основы управления. Производственно-строительные системы: Учеб. для вузов.– М.: Стройиздат, 1991.– 336 с.
33. Рекомендации по применению методов математического планирования эксперимента в технологии бетона. – М.: НИИЖБ, 1982. – 103 с.
34. Руководство по подбору составов тяжелого бетона / НИИЖБ.- М.: Стройиздат, 1979.- 103 с.
35. Тихомиров В.Б. Математические методы планирования эксперимента при изучении нетканых материалов. – Легкая индустрия, 1968. – 156 с.
36. Шеин В.И. Физико-химические основы оптимизации технологии бетона. - М.: Стройиздат, 1977. – 271 с.
37. Dvorkin L, Nwoubani S., Dvorkin O. Construction Materials. Nova Science Publishers, New York, USA, 2010.– 409 p.
38. Dvorkin L., Dvorkin O., Basics of concrete science. Amazon,(Kindle edition) 382 p.,2011/(e-book).
39. Dvorkin L., Dvorkin O., Ribakov Y. Mathematical Experiments Planning in Concrete Technology. Nova Science Publishers , New York, USA, 2012. p. 172.
40. Dvorkin L., Dvorkin O., Ribakov Y. Multi-Parametric Concrete Compositions Design. Nova Science Publishers, New York, USA, 2013, p. 223.
41. L. Dvorkin, V. Bolshakov. Structure and Properties of Building Materials. Trans Tech Publication ine, Zurich, 2016, p. 220.
42. L. Dvorkin, V. Zhitkovsky, Y. Ribakov. Concrete and montar production using stone sifting. CRC Press Taylor and Francis Group London, New York, 2018, p 159.



## Додатки

Таблиця 1

Значення  $t$  – критерію Стьюдента

| Число степенів<br>свободи | Рівень значимості |           |           |
|---------------------------|-------------------|-----------|-----------|
|                           | 0,1/0,9           | 0,05/0,95 | 0,02/0,98 |
| 1                         | 6031              | 12,7      | 31,82     |
| 2                         | 2,92              | 4,3       | 6,97      |
| 3                         | 2,35              | 3,18      | 4,54      |
| 4                         | 2,13              | 2,78      | 3,75      |
| 5                         | 2,01              | 2,57      | 3,37      |
| 6                         | 1,94              | 2,45      | 3,14      |
| 7                         | 1,89              | 2,36      | 3         |
| 8                         | 1,86              | 2,31      | 2,9       |
| 9                         | 1,83              | 2,26      | 2,82      |
| 10                        | 1,81              | 2,23      | 2,76      |
| 11                        | 1,8               | 2,2       | 2,72      |
| 12                        | 1,78              | 2,18      | 2,68      |
| 13                        | 1,77              | 2,16      | 2,65      |
| 14                        | 1,76              | 2,14      | 2,62      |
| 15                        | 1,75              | 2,13      | 2,6       |
| 16                        | 1,75              | 2,12      | 2,58      |
| 17                        | 1,74              | 2,11      | 2,57      |
| 18                        | 1,73              | 2,1       | 2,55      |
| 19                        | 1,73              | 2,09      | 2,54      |
| 20                        | 1,73              | 2,09      | 2,53      |
| 21                        | 1,72              | 2,08      | 2,52      |
| 22                        | 1,72              | 2,07      | 2,51      |
| 23                        | 1,71              | 2,07      | 2,5       |
| 24                        | 1,71              | 2,06      | 2,49      |
| 25                        | 1,71              | 2,06      | 2,48      |
| 26                        | 1,71              | 2,05      | 2,47      |
| 27                        | 1,7               | 2,05      | 2,46      |
| 28                        | 1,7               | 2,05      | 2,46      |
| 29                        | 1,7               | 2,04      | 2,46      |
| 30                        | 1,68              | 2,02      | 2,42      |
| 40                        | 1,67              | 2         | 2,39      |
| 60                        | 1,66              | 1,98      | 2,36      |
| 120                       | 1,64              | 1,96      | 2,33      |

Таблиця 2

Відношення дисперсії по F - критерії Фішера при  $\alpha = 0,05$   
(довірча ймовірність 95%)

| Число ступенів волі для дисперсії |              |      |       |       |      |       |       |       |       |       |      |
|-----------------------------------|--------------|------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| більшій<br>$f_1$                  | меншій $f_2$ |      |       |       |      |       |       |       |       |       |      |
|                                   | 1            | 2    | 3     | 4     | 5    | 6     | 8     | 10    | 20    | 50    |      |
| 1                                 | 161          | 200  | 216   | 225   | 230  | 234   | 239   | 224   | 248   | 252   | 254  |
| 2                                 | 18,51        | 19   | 19,16 | 19,25 | 19,3 | 19,33 | 19,37 | 19,39 | 19,45 | 19,47 | 19,5 |
| 3                                 | 10,13        | 9,55 | 9,28  | 9,12  | 9,01 | 8,94  | 8,84  | 8,78  | 8,66  | 8,58  | 8,53 |
| 4                                 | 7,71         | 6,94 | 6,59  | 6,39  | 6,26 | 6,16  | 6,04  | 5,96  | 5,8   | 5,7   | 5,63 |
| 5                                 | 6,61         | 5,79 | 5,41  | 5,19  | 505  | 4,95  | 4,82  | 4,74  | 4,56  | 4,44  | 4,36 |
| 6                                 | 5,99         | 5,14 | 4,76  | 4,53  | 4,39 | 4,28  | 4,15  | 4,06  | 3,87  | 3,75  | 3,67 |
| 8                                 | 5,32         | 4,46 | 4,07  | 3,84  | 3,69 | 3,58  | 3,44  | 3,35  | 3,15  | 3,03  | 2,93 |
| 10                                | 4,96         | 4,1  | 3,71  | 3,48  | 3,33 | 3,22  | 3,07  | 2,98  | 2,77  | 2,64  | 2,54 |
| 15                                | 4,54         | 3,68 | 3,29  | 3,06  | 2,9  | 2,79  | 2,64  | 2,54  | 2,33  | 2,18  | 2,07 |
| 20                                | 4,35         | 3,49 | 3,1   | 2,87  | 2,71 | 2,6   | 2,45  | 2,35  | 2,12  | 1,96  | 1,84 |
| 40                                | 4,08         | 3,23 | 2,84  | 2,61  | 2,45 | 2,34  | 2,18  | 2,08  | 1,84  | 1,66  | 1,51 |
| 100                               | 3,94         | 3,09 | 2,7   | 2,46  | 2,3  | 2,19  | 2,03  | 1,92  | 1,68  | 1,48  | 1,28 |
| >100                              | 3,84         | 2,99 | 2,6   | 2,37  | 2,21 | 2,09  | 1,91  | 1,83  | 1,57  | 1,35  | 1    |

Таблиця 3

Матриця ротатбельного плану для  $k = 4$ 

| Точки<br>плану<br>u | Матриця<br>планування |                |                |                | Квадрати змінних            |                             |                             |                             | Взаємодії факторів            |                               |                               |                               |                               |                               | Вихідний<br>параметр<br>y <sub>i</sub> |
|---------------------|-----------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--|
|                     | x <sub>1</sub>        | x <sub>2</sub> | x <sub>3</sub> | x <sub>4</sub> | x <sub>1</sub> <sup>2</sup> | x <sub>2</sub> <sup>2</sup> | x <sub>3</sub> <sup>2</sup> | x <sub>4</sub> <sup>2</sup> | x <sub>1</sub> x <sub>2</sub> | x <sub>1</sub> x <sub>3</sub> | x <sub>1</sub> x <sub>4</sub> | x <sub>2</sub> x <sub>3</sub> | x <sub>2</sub> x <sub>4</sub> | x <sub>3</sub> x <sub>4</sub> |  |
| 1                   | 2                     | 3              | 4              | 5              | 6                           | 7                           | 8                           | 9                           | 10                            | 11                            | 12                            | 13                            | 14                            | 15                            | 16                                     |
| 1                   | +1                    | +1             | +1             | +1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | +1                            | +1                            | +1                            | +1                            | +1                            | +1                            | y <sub>1</sub>                         |
| 2                   | +1                    | +1             | +1             | -1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | +1                            | +1                            | -1                            | +1                            | -1                            | -1                            | y <sub>2</sub>                         |
| 3                   | +1                    | +1             | -1             | +1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | +1                            | -1                            | +1                            | -1                            | +1                            | -1                            | y <sub>3</sub>                         |
| 4                   | +1                    | +1             | -1             | -1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | +1                            | -1                            | -1                            | -1                            | -1                            | +1                            | y <sub>4</sub>                         |
| 5                   | +1                    | -1             | +1             | +1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | -1                            | +1                            | +1                            | -1                            | -1                            | +1                            | y <sub>5</sub>                         |
| 6                   | +1                    | -1             | +1             | -1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | -1                            | +1                            | -1                            | -1                            | +1                            | -1                            | y <sub>6</sub>                         |
| 7                   | +1                    | -1             | -1             | +1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | -1                            | -1                            | -1                            | +1                            | -1                            | -1                            | y <sub>7</sub>                         |
| N <sub>1</sub> 8    | +1                    | -1             | -1             | -1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | -1                            | -1                            | +1                            | +1                            | +1                            | +1                            | y <sub>8</sub>                         |
| 9                   | -1                    | +1             | +1             | +1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | -1                            | -1                            | -1                            | +1                            | +1                            | +1                            | y <sub>9</sub>                         |
| 10                  | -1                    | +1             | +1             | -1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | -1                            | -1                            | +1                            | +1                            | -1                            | -1                            | y <sub>10</sub>                        |
| 11                  | -1                    | +1             | -1             | +1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | -1                            | +1                            | -1                            | -1                            | +1                            | -1                            | y <sub>11</sub>                        |
| 12                  | -1                    | +1             | -1             | -1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | -1                            | +1                            | +1                            | -1                            | -1                            | +1                            | y <sub>12</sub>                        |
| 13                  | -1                    | -1             | +1             | +1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | +1                            | -1                            | -1                            | -1                            | -1                            | +1                            | y <sub>13</sub>                        |
| 14                  | -1                    | -1             | +1             | -1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | +1                            | -1                            | +1                            | -1                            | +1                            | -1                            | y <sub>14</sub>                        |
| 15                  | -1                    | -1             | -1             | +1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | +1                            | +1                            | -1                            | +1                            | -1                            | -1                            | y <sub>15</sub>                        |
| 16                  | -1                    | -1             | -1             | -1             | +1                          | +1                          | +1                          | +1                          | +1                            | +1                            | +1                            | +1                            | +1                            | +1                            | y <sub>16</sub>                        |

Продовження . табл. 3

| 1   | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16              |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------------|
| 17  | +2 | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>17</sub> |
| 18  | -2 | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>18</sub> |
| 19  | 0  | +2 | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>19</sub> |
| №20 | 0  | -2 | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>20</sub> |
| 21  | 0  | 0  | +2 | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>21</sub> |
| 22  | 0  | 0  | -2 | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>22</sub> |
| 23  | 0  | 0  | 0  | +2 | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>23</sub> |
| 24  | 0  | 0  | 0  | -2 | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>24</sub> |
| 25  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>25</sub> |
| 26  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>26</sub> |
| 27  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>27</sub> |
| №28 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>28</sub> |
| 29  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>29</sub> |
| 30  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>30</sub> |
| 31  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>31</sub> |



Таблиця 4

Матриця ротатбельного плану для  $k = 5$ 

| Точки плану | Матриця планування |       |       |       |       | Квадрати змінних |         |         |         |         | Взаємодії факторів |          |          |          |          |          |          |          |          |          | Вихідний параметр $y_i$ |       |          |
|-------------|--------------------|-------|-------|-------|-------|------------------|---------|---------|---------|---------|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------------------------|-------|----------|
|             | $x_1$              | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^2$          | $x_2^2$ | $x_3^2$ | $x_4^2$ | $x_5^2$ | $x_1x_2$           | $x_1x_3$ | $x_1x_4$ | $x_1x_5$ | $x_2x_3$ | $x_2x_4$ | $x_2x_5$ | $x_3x_4$ | $x_3x_5$ | $x_4x_5$ |                         |       |          |
| 1           | 2                  | 3     | 4     | 5     | 6     | 7                | 8       | 9       | 10      | 11      | 12                 | 13       | 14       | 15       | 16       | 17       | 18       | 19       | 20       | 21       | 22                      |       |          |
| $N_1$       | 1                  | +1    | +1    | +1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1                      | $y_1$ |          |
|             | 2                  | -1    | -1    | +1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | -1       | -1       | -1       | -1       | +1       | +1       | +1       | +1                      | $y_2$ |          |
|             | 3                  | -1    | +1    | -1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | +1       | +1       | +1       | -1       | -1       | -1       | +1       | +1       | +1                      | +1    | $y_3$    |
|             | 4                  | +1    | -1    | -1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | -1       | -1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1                      | +1    | $y_4$    |
|             | 5                  | -1    | +1    | -1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | +1       | -1       | -1       | +1       | +1       | +1       | -1       | -1       | +1                      | +1    | $y_5$    |
|             | 6                  | +1    | -1    | -1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | +1       | +1       | +1       | -1       | -1       | -1       | -1       | +1                      | +1    | $y_6$    |
|             | 7                  | +1    | +1    | +1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | +1       | -1       | -1       | +1       | -1       | -1       | -1       | -1       | +1                      | +1    | $y_7$    |
|             | 8                  | -1    | -1    | +1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | -1       | +1       | +1       | -1       | +1       | +1       | -1       | -1       | +1                      | +1    | $y_8$    |
|             | 9                  | -1    | +1    | +1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | -1       | +1       | +1       | +1       | -1       | +1       | -1       | -1                      | -1    | $y_9$    |
|             | 10                 | +1    | -1    | +1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | +1       | +1       | -1       | -1       | -1       | +1       | +1       | -1       | -1                      | -1    | $y_{10}$ |
|             | 11                 | +1    | +1    | -1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | -1       | -1       | +1       | -1       | -1       | +1       | +1       | -1       | -1                      | -1    | $y_{11}$ |
|             | 12                 | -1    | -1    | -1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | +1       | +1       | -1       | +1       | +1       | -1       | +1       | -1       | -1                      | -1    | $y_{12}$ |
|             | 13                 | -1    | +1    | +1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | +1       | -1       | +1       | -1       | +1       | -1       | +1       | -1                      | -1    | $y_{13}$ |
|             | 14                 | +1    | -1    | +1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | +1       | -1       | +1       | -1       | +1       | -1       | -1       | +1       | -1                      | -1    | $y_{14}$ |
|             | 15                 | +1    | +1    | -1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | -1       | +1       | -1       | -1       | +1       | -1       | -1       | +1       | -1                      | -1    | $y_{15}$ |
|             | 16                 | -1    | -1    | -1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | +1       | -1       | +1       | +1       | -1       | +1       | -1       | +1       | -1                      | -1    | $y_{16}$ |

Продовження табл. 4

|                | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |                 |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------------|
| N <sub>u</sub> | 17 | +2 | 0  | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>17</sub> |
|                | 18 | -2 | 0  | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>18</sub> |
|                | 19 | 0  | +2 | 0  | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>19</sub> |
|                | 20 | 0  | -2 | 0  | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>20</sub> |
|                | 21 | 0  | 0  | +2 | 0  | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>21</sub> |
|                | 22 | 0  | 0  | -2 | 0  | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>22</sub> |
|                | 23 | 0  | 0  | 0  | +2 | 0  | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>23</sub> |
|                | 24 | 0  | 0  | 0  | -2 | 0  | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>24</sub> |
|                | 25 | 0  | 0  | 0  | 0  | +2 | 0  | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>25</sub> |
|                | 26 | 0  | 0  | 0  | 0  | -2 | 0  | 0  | 0  | 0  | +4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>26</sub> |
| n <sub>0</sub> | 27 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>27</sub> |
|                | 28 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>28</sub> |
|                | 29 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>29</sub> |
|                | 30 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>30</sub> |
|                | 31 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>31</sub> |
|                | 32 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>32</sub> |



Таблиця 5

Матриця плану Бокса-Бенкіна для  $k = 3$

| Точки<br>плану<br>$u$ | Матриця<br>планування |       |       | Квадрати<br>змінних |         |         | Взаємодії<br>факторів |          |          | Вихідний<br>параметр<br>$Y_i$ |
|-----------------------|-----------------------|-------|-------|---------------------|---------|---------|-----------------------|----------|----------|-------------------------------|
|                       | $x_1$                 | $x_2$ | $x_3$ | $x_1^2$             | $x_2^2$ | $x_3^2$ | $x_1x_2$              | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ |                               |
| 1                     | +1                    | +1    | 0     | +1                  | +1      | 0       | +1                    | 0        | 0        | $Y_1$                         |
| 2                     | +1                    | -1    | 0     | +1                  | +1      | 0       | -1                    | 0        | 0        | $Y_2$                         |
| 3                     | -1                    | +1    | 0     | +1                  | +1      | 0       | -1                    | 0        | 0        | $Y_3$                         |
| 4                     | -1                    | -1    | 0     | +1                  | +1      | 0       | +1                    | 0        | 0        | $Y_4$                         |
| 5                     | +1                    | 0     | +1    | +1                  | 0       | +1      | 0                     | +1       | 0        | $Y_5$                         |
| 6                     | +1                    | 0     | -1    | +1                  | 0       | +1      | 0                     | -1       | 0        | $Y_6$                         |
| 7                     | -1                    | 0     | +1    | +1                  | 0       | +1      | 0                     | -1       | 0        | $Y_7$                         |
| 8                     | -1                    | 0     | -1    | +1                  | 0       | +1      | 0                     | +1       | 0        | $Y_8$                         |
| 9                     | 0                     | +1    | +1    | 0                   | +1      | +1      | 0                     | 0        | +1       | $Y_9$                         |
| 10                    | 0                     | +1    | -1    | 0                   | +1      | +1      | 0                     | 0        | -1       | $Y_{10}$                      |
| 11                    | 0                     | -1    | +1    | 0                   | +1      | +1      | 0                     | 0        | -1       | $Y_{11}$                      |
| 12                    | 0                     | -1    | -1    | 0                   | +1      | +1      | 0                     | 0        | +1       | $Y_{12}$                      |
| $n_0$                 | 13                    | 0     | 0     | 0                   | 0       | 0       | 0                     | 0        | 0        | $Y_{13}$                      |
|                       | 14                    | 0     | 0     | 0                   | 0       | 0       | 0                     | 0        | 0        | $Y_{14}$                      |
|                       | 15                    | 0     | 0     | 0                   | 0       | 0       | 0                     | 0        | 0        | $Y_{15}$                      |



Таблиця 6

Матриця плану Бокса-Бенкіна для  $k=4$

| Точки<br>плану<br>u | Матриця<br>планування |                |                |                | Квадрати<br>змінних         |                             |                             |                             | Взаємодії факторів            |                               |                               |                               |                               |                               | Вихідний<br>параметр<br>U <sub>i</sub> |
|---------------------|-----------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--|
|                     | x <sub>1</sub>        | x <sub>2</sub> | x <sub>3</sub> | x <sub>4</sub> | x <sub>1</sub> <sup>2</sup> | x <sub>2</sub> <sup>2</sup> | x <sub>3</sub> <sup>2</sup> | x <sub>4</sub> <sup>2</sup> | x <sub>1</sub> x <sub>2</sub> | x <sub>1</sub> x <sub>3</sub> | x <sub>1</sub> x <sub>4</sub> | x <sub>2</sub> x <sub>3</sub> | x <sub>2</sub> x <sub>4</sub> | x <sub>3</sub> x <sub>4</sub> |  |
| 1                   | 2                     | 3              | 4              | 5              | 6                           | 7                           | 8                           | 9                           | 10                            | 11                            | 12                            | 13                            | 14                            | 15                            | 16                                     |
| 1                   | +1                    | +1             | 0              | 0              | +1                          | +1                          | 0                           | 0                           | +1                            | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | y <sub>1</sub>                         |
| 2                   | +1                    | -1             | 0              | 0              | +1                          | +1                          | 0                           | 0                           | -1                            | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | y <sub>2</sub>                         |
| 3                   | -1                    | +1             | 0              | 0              | +1                          | +1                          | 0                           | 0                           | -1                            | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | y <sub>3</sub>                         |
| 4                   | -1                    | -1             | 0              | 0              | +1                          | +1                          | 0                           | 0                           | +1                            | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | y <sub>4</sub>                         |
| 5                   | +1                    | 0              | +1             | 0              | +1                          | 0                           | +1                          | 0                           | 0                             | +1                            | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | y <sub>5</sub>                         |
| 6                   | +1                    | 0              | -1             | 0              | +1                          | 0                           | +1                          | 0                           | 0                             | -1                            | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | y <sub>6</sub>                         |
| 7                   | -1                    | 0              | +1             | 0              | +1                          | 0                           | +1                          | 0                           | 0                             | -1                            | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | y <sub>7</sub>                         |
| 8                   | -1                    | 0              | -1             | 0              | +1                          | 0                           | +1                          | 0                           | 0                             | +1                            | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | y <sub>8</sub>                         |
| 9                   | 0                     | +1             | +1             | 0              | 0                           | +1                          | +1                          | 0                           | 0                             | 0                             | 0                             | +1                            | 0                             | 0                             | y <sub>9</sub>                         |
| 10                  | 0                     | +1             | -1             | 0              | 0                           | +1                          | +1                          | 0                           | 0                             | 0                             | 0                             | -1                            | 0                             | 0                             | y <sub>10</sub>                        |
| 11                  | 0                     | -1             | +1             | 0              | 0                           | +1                          | +1                          | 0                           | 0                             | 0                             | 0                             | -1                            | 0                             | 0                             | y <sub>11</sub>                        |
| 12                  | 0                     | -1             | -1             | 0              | 0                           | +1                          | +1                          | 0                           | 0                             | 0                             | 0                             | +1                            | 0                             | 0                             | y <sub>12</sub>                        |
| 13                  | 0                     | 0              | +1             | +1             | 0                           | 0                           | +1                          | +1                          | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | +1                            | y <sub>13</sub>                        |
| 14                  | 0                     | 0              | +1             | -1             | 0                           | 0                           | +1                          | +1                          | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | -1                            | y <sub>14</sub>                        |
| 15                  | 0                     | 0              | -1             | +1             | 0                           | 0                           | +1                          | +1                          | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | -1                            | y <sub>15</sub>                        |
| 16                  | 0                     | 0              | -1             | -1             | 0                           | 0                           | +1                          | +1                          | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | +1                            | y <sub>16</sub>                        |
| 17                  | +1                    | 0              | 0              | +1             | +1                          | 0                           | 0                           | +1                          | 0                             | 0                             | +1                            | 0                             | 0                             | 0                             | y <sub>17</sub>                        |
| 18                  | +1                    | 0              | 0              | -1             | +1                          | 0                           | 0                           | +1                          | 0                             | 0                             | -1                            | 0                             | 0                             | 0                             | y <sub>18</sub>                        |
| 19                  | -1                    | 0              | 0              | +1             | +1                          | 0                           | 0                           | +1                          | 0                             | 0                             | -1                            | 0                             | 0                             | 0                             | y <sub>19</sub>                        |
| 20                  | -1                    | 0              | 0              | -1             | +1                          | 0                           | 0                           | +1                          | 0                             | 0                             | +1                            | 0                             | 0                             | 0                             | y <sub>20</sub>                        |
| 21                  | 0                     | +1             | 0              | +1             | 0                           | +1                          | 0                           | +1                          | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | +1                            | 0                             | y <sub>21</sub>                        |
| 22                  | 0                     | +1             | 0              | -1             | 0                           | +1                          | 0                           | +1                          | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | -1                            | 0                             | y <sub>22</sub>                        |
| 23                  | 0                     | -1             | 0              | +1             | 0                           | +1                          | 0                           | +1                          | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | -1                            | 0                             | y <sub>23</sub>                        |
| 24                  | 0                     | -1             | 0              | -1             | 0                           | +1                          | 0                           | +1                          | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | +1                            | 0                             | y <sub>24</sub>                        |
| 25                  | 0                     | 0              | 0              | 0              | 0                           | 0                           | 0                           | 0                           | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | y <sub>25</sub>                        |
| n <sub>0</sub> 26   | 0                     | 0              | 0              | 0              | 0                           | 0                           | 0                           | 0                           | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | y <sub>26</sub>                        |
| 27                  | 0                     | 0              | 0              | 0              | 0                           | 0                           | 0                           | 0                           | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | 0                             | y <sub>27</sub>                        |

Таблиця 7

Матриця плану Бокса-Бенкіна для k=5

| Точки плану | Матриця планування |       |       |       |       | Квадрати змінних |         |         |         |         | Взаємодії факторів |          |          |          |          |          |          |          |          |          | Вихідний параметр $Y_i$ |
|-------------|--------------------|-------|-------|-------|-------|------------------|---------|---------|---------|---------|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------------------------|
|             | $x_1$              | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^2$          | $x_2^2$ | $x_3^2$ | $x_4^2$ | $x_5^2$ | $x_1x_2$           | $x_1x_3$ | $x_1x_4$ | $x_1x_5$ | $x_2x_3$ | $x_2x_4$ | $x_2x_5$ | $x_3x_4$ | $x_3x_5$ | $x_4x_5$ |                         |
| 1           | 2                  | 3     | 4     | 5     | 6     | 7                | 8       | 9       | 10      | 11      | 12                 | 13       | 14       | 15       | 16       | 17       | 18       | 19       | 20       | 21       | 22                      |
| 1           | +1                 | +1    | 0     | 0     | 0     | +1               | +1      | 0       | 0       | 0       | +1                 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | $Y_1$                   |
| 2           | +1                 | -1    | 0     | 0     | 0     | +1               | +1      | 0       | 0       | 0       | -1                 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | $Y_2$                   |
| 3           | -1                 | +1    | 0     | 0     | 0     | +1               | +1      | 0       | 0       | 0       | -1                 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | $Y_3$                   |
| 4           | -1                 | -1    | 0     | 0     | 0     | +1               | +1      | 0       | 0       | 0       | +1                 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | $Y_4$                   |
| 5           | +1                 | 0     | +1    | 0     | 0     | +1               | 0       | +1      | 0       | 0       | 0                  | +1       | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | $Y_5$                   |
| 6           | +1                 | 0     | -1    | 0     | 0     | +1               | 0       | +1      | 0       | 0       | 0                  | -1       | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | $Y_6$                   |
| 7           | -1                 | 0     | +1    | 0     | 0     | +1               | 0       | +1      | 0       | 0       | 0                  | -1       | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | $Y_7$                   |
| 8           | -1                 | 0     | -1    | 0     | 0     | +1               | 0       | +1      | 0       | 0       | 0                  | +1       | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | $Y_8$                   |
| 9           | 0                  | +1    | +1    | 0     | 0     | 0                | +1      | +1      | 0       | 0       | 0                  | 0        | 0        | 0        | +1       | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | $Y_9$                   |
| 10          | 0                  | +1    | -1    | 0     | 0     | 0                | +1      | +1      | 0       | 0       | 0                  | 0        | 0        | 0        | -1       | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | $Y_{10}$                |
| 11          | 0                  | -1    | +1    | 0     | 0     | 0                | +1      | +1      | 0       | 0       | 0                  | 0        | 0        | 0        | -1       | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | $Y_{11}$                |
| 12          | 0                  | -1    | -1    | 0     | 0     | 0                | +1      | +1      | 0       | 0       | 0                  | 0        | 0        | 0        | +1       | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | $Y_{12}$                |
| 13          | 0                  | 0     | +1    | +1    | 0     | 0                | 0       | +1      | +1      | 0       | 0                  | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | +1       | 0        | 0        | $Y_{13}$                |
| 14          | 0                  | 0     | +1    | -1    | 0     | 0                | 0       | +1      | +1      | 0       | 0                  | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | -1       | 0        | 0        | $Y_{14}$                |
| 15          | 0                  | 0     | -1    | +1    | 0     | 0                | 0       | +1      | +1      | 0       | 0                  | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | -1       | 0        | 0        | $Y_{15}$                |

Продовження. табл. 7

| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22              |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------------|
| 16 | 0  | 0  | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  | +1 | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | У <sub>16</sub> |
| 17 | +1 | 0  | 0  | +1 | 0  | +1 | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>17</sub> |
| 18 | +1 | 0  | 0  | -1 | 0  | +1 | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>18</sub> |
| 19 | -1 | 0  | 0  | +1 | 0  | +1 | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>19</sub> |
| 20 | -1 | 0  | 0  | -1 | 0  | +1 | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>20</sub> |
| 21 | 0  | +1 | 0  | +1 | 0  | 0  | +1 | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>21</sub> |
| 22 | 0  | -1 | 0  | +1 | 0  | 0  | +1 | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>22</sub> |
| 23 | 0  | -1 | 0  | +1 | 0  | 0  | +1 | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>23</sub> |
| 24 | 0  | -1 | 0  | -1 | 0  | 0  | +1 | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>24</sub> |
| 25 | 0  | +1 | 0  | 0  | +1 | 0  | +1 | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | У <sub>25</sub> |
| 26 | 0  | +1 | 0  | 0  | -1 | 0  | +1 | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | У <sub>26</sub> |
| 27 | 0  | -1 | 0  | 0  | +1 | 0  | +1 | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | У <sub>27</sub> |
| 28 | 0  | -1 | 0  | 0  | -1 | 0  | +1 | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | У <sub>28</sub> |
| 29 | 0  | 0  | 0  | +1 | +1 | 0  | 0  | 0  | +1 | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | У <sub>29</sub> |
| 30 | 0  | 0  | 0  | +1 | -1 | 0  | 0  | 0  | +1 | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | У <sub>30</sub> |
| 31 | 0  | 0  | 0  | -1 | +1 | 0  | 0  | 0  | +1 | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | У <sub>31</sub> |
| 32 | 0  | 0  | 0  | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  | +1 | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | У <sub>32</sub> |
| 33 | 0  | 0  | +1 | 0  | +1 | 0  | 0  | +1 | +1 | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | У <sub>33</sub> |
| 34 | 0  | 0  | +1 | 0  | -1 | 0  | 0  | +1 | +1 | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | У <sub>34</sub> |
| 35 | 0  | 0  | -1 | 0  | +1 | 0  | 0  | +1 | +1 | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | У <sub>35</sub> |
| 36 | 0  | 0  | -1 | 0  | -1 | 0  | 0  | +1 | +1 | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | У <sub>36</sub> |
| 37 | +1 | 0  | 0  | 0  | +1 | +1 | 0  | 0  | +1 | +1 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>37</sub> |

Продовження табл. 7

| 1  | 2  | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22              |
|----|----|---|---|---|----|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------------|
| 38 | +1 | 0 | 0 | 0 | -1 | +1 | 0 | 0 | +1 | +1 | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>38</sub> |
| 39 | -1 | 0 | 0 | 0 | +1 | +1 | 0 | 0 | +1 | +1 | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>39</sub> |
| 40 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | +1 | 0 | 0 | +1 | +1 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>40</sub> |
| 41 | 0  | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>41</sub> |
| 42 | 0  | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>42</sub> |
| 43 | 0  | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>43</sub> |
| 44 | 0  | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>44</sub> |
| 45 | 0  | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>45</sub> |
| 46 | 0  | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | У <sub>46</sub> |

Таблиця 8

Матриця плану  $B_4$  для  $k = 4$ 

| Точки<br>плану<br>$u$ | Матриця<br>планування |       |       |       | Квадрати змінних |         |         |         | Взаємодії факторів |           |           |           |           |           | Вихідний<br>параметр<br>$Y_i$ |          |
|-----------------------|-----------------------|-------|-------|-------|------------------|---------|---------|---------|--------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------------------------|----------|
|                       | $x_1$                 | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1^2$          | $x_2^2$ | $x_3^2$ | $x_4^2$ | $x_1 x_2$          | $x_1 x_3$ | $x_1 x_4$ | $x_2 x_3$ | $x_2 x_4$ | $x_3 x_4$ |                               |          |
| 1                     | 2                     | 3     | 4     | 5     | 6                | 7       | 8       | 9       | 10                 | 11        | 12        | 13        | 14        | 15        | 16                            |          |
| $N_1$                 | 1                     | +1    | +1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1        | +1        | +1        | +1        | +1        | +1                            | $Y_1$    |
|                       | 2                     | +1    | +1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1        | +1        | -1        | +1        | -1        | -1                            | $Y_2$    |
|                       | 3                     | +1    | +1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1        | -1        | +1        | -1        | +1        | -1                            | $Y_3$    |
|                       | 4                     | +1    | +1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1        | -1        | -1        | -1        | -1        | +1                            | $Y_4$    |
|                       | 5                     | +1    | -1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1        | +1        | +1        | -1        | -1        | +1                            | $Y_5$    |
|                       | 6                     | +1    | -1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1        | +1        | -1        | -1        | +1        | -1                            | $Y_6$    |
|                       | 7                     | +1    | -1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1        | -1        | +1        | +1        | -1        | -1                            | $Y_7$    |
|                       | 8                     | +1    | -1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1        | -1        | -1        | +1        | +1        | +1                            | $Y_8$    |
|                       | 9                     | -1    | +1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1        | -1        | -1        | +1        | +1        | +1                            | $Y_9$    |
|                       | 10                    | -1    | +1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1        | -1        | +1        | +1        | -1        | -1                            | $Y_{10}$ |
|                       | 11                    | -1    | +1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1        | +1        | -1        | -1        | +1        | -1                            | $Y_{11}$ |
|                       | 12                    | -1    | +1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1        | +1        | +1        | -1        | -1        | +1                            | $Y_{12}$ |
|                       | 13                    | -1    | -1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1        | -1        | +1        | -1        | +1        | -1                            | $Y_{13}$ |
|                       | 14                    | -1    | -1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1        | -1        | +1        | -1        | +1        | -1                            | $Y_{14}$ |
|                       | 15                    | -1    | -1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1        | +1        | -1        | +1        | -1        | -1                            | $Y_{15}$ |
|                       | 16                    | -1    | -1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1        | +1        | +1        | +1        | +1        | +1                            | $Y_{16}$ |



Продовження табл. 8

| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |                 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------------|
| Na | 17 | +1 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>17</sub> |
|    | 18 | -1 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>18</sub> |
|    | 19 | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>19</sub> |
|    | 20 | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>20</sub> |
|    | 21 | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>21</sub> |
|    | 22 | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>22</sub> |
|    | 23 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>23</sub> |
|    | 24 | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>24</sub> |

Таблиця 9

Матриця плану  $B_5$  для  $k = 5$ 

| Точки<br>плану<br>$u$ | Матриця<br>планування |       |       |       |       | Квадрати змінних |         |         |         |         | Взаємодії факторів |          |          |          |          |          |          |          | Вихід-<br>ний<br>пара-<br>метр $y_i$ |          |          |          |
|-----------------------|-----------------------|-------|-------|-------|-------|------------------|---------|---------|---------|---------|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------------------------------------|----------|----------|----------|
|                       | $x_1$                 | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^2$          | $x_2^2$ | $x_3^2$ | $x_4^2$ | $x_5^2$ | $x_1x_2$           | $x_1x_3$ | $x_1x_4$ | $x_1x_5$ | $x_2x_3$ | $x_2x_4$ | $x_2x_5$ | $x_3x_4$ |                                      | $x_3x_5$ | $x_4x_5$ |          |
| 1                     | 2                     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7                | 8       | 9       | 10      | 11      | 12                 | 13       | 14       | 15       | 16       | 17       | 18       | 19       | 20                                   | 21       | 22       |          |
| $N_1$                 | 1                     | +1    | +1    | +1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1                                   | +1       | +1       | $y_1$    |
|                       | 2                     | +1    | +1    | +1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | +1       | -1       | +1       | +1       | -1       | +1       | -1                                   | -1       | -1       | $y_2$    |
|                       | 3                     | +1    | +1    | +1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | +1       | -1       | +1       | +1       | -1       | +1       | -1                                   | +1       | -1       | $y_3$    |
|                       | 4                     | +1    | +1    | +1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | +1       | -1       | -1       | +1       | -1       | -1       | -1                                   | -1       | +1       | $y_4$    |
|                       | 5                     | +1    | +1    | -1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | -1       | +1       | +1       | -1       | +1       | +1       | -1                                   | -1       | +1       | $y_5$    |
|                       | 6                     | +1    | +1    | -1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | -1       | +1       | -1       | -1       | +1       | -1       | -1                                   | +1       | -1       | $y_6$    |
|                       | 7                     | +1    | +1    | -1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | -1       | -1       | +1       | -1       | -1       | +1       | +1                                   | -1       | -1       | $y_7$    |
|                       | 8                     | +1    | +1    | -1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | -1       | -1       | -1       | -1       | -1       | -1       | +1                                   | +1       | +1       | $y_8$    |
|                       | 9                     | +1    | -1    | +1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | +1       | +1       | +1       | -1       | -1       | -1       | +1                                   | +1       | +1       | $y_9$    |
|                       | 10                    | +1    | -1    | +1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | +1       | +1       | -1       | -1       | -1       | +1       | +1                                   | -1       | -1       | $y_{10}$ |
|                       | 11                    | +1    | -1    | +1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | +1       | -1       | +1       | -1       | +1       | -1       | -1                                   | +1       | -1       | $y_{11}$ |
|                       | 12                    | +1    | -1    | +1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | +1       | -1       | -1       | -1       | +1       | +1       | -1                                   | -1       | +1       | $y_{12}$ |
|                       | 13                    | +1    | -1    | -1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | +1       | +1       | +1       | -1       | -1       | -1                                   | -1       | +1       | $y_{13}$ |
|                       | 14                    | +1    | -1    | -1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | +1       | -1       | +1       | -1       | +1       | -1                                   | +1       | -1       | $y_{14}$ |
|                       | 15                    | +1    | -1    | -1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | -1       | +1       | +1       | +1       | -1       | +1                                   | -1       | -1       | $y_{15}$ |
|                       | 16                    | +1    | -1    | -1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | -1       | -1       | +1       | +1       | +1       | +1                                   | +1       | +1       | $y_{16}$ |
|                       | 17                    | -1    | +1    | +1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | -1       | -1       | +1       | +1       | +1       | +1                                   | +1       | +1       | $y_{17}$ |

Продовження табл. 9

| 1              | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22              |                 |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------------|-----------------|
| N <sub>1</sub> | 18 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | Y <sub>18</sub> |                 |
|                | 19 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1              | Y <sub>19</sub> |
|                | 20 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1              | Y <sub>20</sub> |
|                | 21 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1              | Y <sub>21</sub> |
|                | 22 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1              | Y <sub>22</sub> |
|                | 23 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1              | Y <sub>23</sub> |
|                | 24 | -1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1              | Y <sub>24</sub> |
|                | 25 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1              | Y <sub>25</sub> |
|                | 26 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1              | Y <sub>26</sub> |
|                | 27 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1              | Y <sub>27</sub> |
|                | 28 | -1 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1              | Y <sub>28</sub> |
|                | 29 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1              | Y <sub>29</sub> |
|                | 30 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1              | Y <sub>30</sub> |
|                | 31 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1              | Y <sub>31</sub> |
|                | 32 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1              | Y <sub>32</sub> |
| N <sub>α</sub> | 33 | +1 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>33</sub> |                 |
|                | 34 | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>34</sub> |                 |
|                | 35 | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>35</sub> |                 |
|                | 36 | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>36</sub> |                 |
|                | 37 | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>37</sub> |                 |
|                | 38 | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>38</sub> |                 |
|                | 39 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | Y <sub>39</sub> |                 |

Продовження табл. 9

| 1  | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |                 |
|----|---|---|---|----|----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------------|
| 40 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0  | 0 | 0 | 0 | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | у <sub>40</sub> |
| 41 | 0 | 0 | 0 | 0  | +1 | 0 | 0 | 0 | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | у <sub>41</sub> |
| 42 | 0 | 0 | 0 | 0  | -1 | 0 | 0 | 0 | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | у <sub>42</sub> |

Таблиця 10

Матриця плану  $N_{a_5}$ , близького до Д-оптимального, для  $k=5$ 

| Точки плану $u$ | Матриця планування |       |       |       |       | Квадрати змінних |         |         |         |         | Взаємодії факторів |          |          |          |          |          |          |          |          |          | Вихідний параметр $y_i$ |       |          |
|-----------------|--------------------|-------|-------|-------|-------|------------------|---------|---------|---------|---------|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------------------------|-------|----------|
|                 | $x_1$              | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^2$          | $x_2^2$ | $x_3^2$ | $x_4^2$ | $x_5^2$ | $x_1x_2$           | $x_1x_3$ | $x_1x_4$ | $x_1x_5$ | $x_2x_3$ | $x_2x_4$ | $x_2x_5$ | $x_3x_4$ | $x_3x_5$ | $x_4x_5$ |                         |       |          |
| 1               | 2                  | 3     | 4     | 5     | 6     | 7                | 8       | 9       | 10      | 11      | 12                 | 13       | 14       | 15       | 16       | 17       | 18       | 19       | 20       | 21       | 22                      |       |          |
| $N_1$           | 1                  | +1    | +1    | +1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1                      | $y_1$ |          |
|                 | 2                  | -1    | -1    | +1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | -1       | -1       | -1       | -1       | +1       | +1       | +1       | +1                      | $y_2$ |          |
|                 | 3                  | -1    | +1    | -1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | +1       | +1       | +1       | -1       | -1       | -1       | +1       | +1       | +1                      | +1    | $y_3$    |
|                 | 4                  | +1    | -1    | -1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | -1       | -1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1       | +1                      | +1    | $y_4$    |
|                 | 5                  | -1    | +1    | -1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | +1       | -1       | -1       | -1       | +1       | +1       | -1       | -1       | +1                      | +1    | $y_5$    |
|                 | 6                  | +1    | -1    | -1    | +1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | +1       | +1       | +1       | -1       | -1       | -1       | -1       | +1                      | +1    | $y_6$    |
|                 | 7                  | +1    | +1    | +1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | +1       | -1       | -1       | +1       | -1       | -1       | -1       | -1       | +1                      | +1    | $y_7$    |
|                 | 8                  | -1    | -1    | +1    | -1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | -1       | +1       | +1       | -1       | +1       | +1       | -1       | -1       | +1                      | +1    | $y_8$    |
|                 | 9                  | -1    | +1    | +1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | -1       | +1       | +1       | +1       | -1       | +1       | -1       | -1                      | -1    | $y_9$    |
|                 | 10                 | +1    | -1    | +1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | +1       | +1       | -1       | -1       | -1       | +1       | +1       | -1       | -1                      | -1    | $y_{10}$ |
|                 | 11                 | +1    | +1    | -1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | -1       | -1       | +1       | -1       | -1       | +1       | +1       | -1       | -1                      | -1    | $y_{11}$ |
|                 | 12                 | -1    | -1    | -1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | +1       | +1       | -1       | +1       | +1       | -1       | +1       | -1       | -1                      | -1    | $y_{12}$ |
|                 | 13                 | -1    | +1    | +1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | -1       | +1       | -1       | +1       | -1       | +1       | -1       | +1       | +1                      | -1    | $y_{13}$ |
|                 | 14                 | +1    | -1    | +1    | -1    | +1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | -1       | +1       | -1       | +1       | -1       | +1       | -1       | -1       | +1       | +1                      | -1    | $y_{14}$ |
|                 | 15                 | +1    | +1    | -1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | -1       | +1       | -1       | -1       | +1       | -1       | -1       | +1       | +1                      | -1    | $y_{15}$ |
|                 | 16                 | -1    | -1    | -1    | +1    | -1               | +1      | +1      | +1      | +1      | +1                 | +1       | +1       | -1       | +1       | +1       | -1       | +1       | -1       | +1       | -1                      | -1    | $y_{16}$ |

Продовження табл. 10

| 1           | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22       |
|-------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----------|
| $N_\lambda$ | 17 | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | $y_{17}$ |
|             | 18 | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | $y_{18}$ |
|             | 19 | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | $y_{19}$ |
|             | 20 | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | $y_{20}$ |
|             | 21 | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | $y_{21}$ |
|             | 22 | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | $y_{22}$ |
|             | 23 | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | $y_{23}$ |
|             | 24 | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | $y_{24}$ |
|             | 25 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | $y_{25}$ |
|             | 26 | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | +1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | $y_{26}$ |
| $n_0$       | 27 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | $y_{27}$ |



Таблиця 11

Симплекс-решітчаті плани для побудови моделей  
трикомпонентних систем "склад-властивість"

| № дос-ліду | Модель          |                |                |                 |                |                |                          |                |                |                  |                |                | у               |     |     |                  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |   |     |     |                  |  |  |  |
|------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|--------------------------|----------------|----------------|------------------|----------------|----------------|-----------------|-----|-----|------------------|--|--|-----|-----|---|------------------|--|--|--|--|--|-----|-----|---|------------------|--|--|--|--|--|-----|---|-----|------------------|--|--|--|--|--|-----|---|-----|------------------|--|--|--|--|--|---|-----|-----|------------------|--|--|--|
|            | Першого порядку |                |                | Другого порядку |                |                | Неповна третього порядку |                |                | Третього порядку |                |                |                 |     |     |                  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |   |     |     |                  |  |  |  |
|            | v <sub>1</sub>  | v <sub>2</sub> | v <sub>3</sub> | v <sub>1</sub>  | v <sub>2</sub> | v <sub>3</sub> | v <sub>1</sub>           | v <sub>2</sub> | v <sub>3</sub> | v <sub>1</sub>   | v <sub>2</sub> | v <sub>3</sub> |                 |     |     |                  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |   |     |     |                  |  |  |  |
| 1.         | 1               | 0              | 0              | 1               | 0              | 0              | 1                        | 0              | 0              | 1                | 0              | 0              | y <sub>1</sub>  |     |     |                  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |   |     |     |                  |  |  |  |
| 2.         | 0               | 1              | 0              | 0               | 1              | 0              | 0                        | 1              | 0              | 0                | 1              | 0              | y <sub>2</sub>  |     |     |                  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |   |     |     |                  |  |  |  |
| 3.         | 0               | 0              | 1              | 0               | 0              | 1              | 0                        | 0              | 1              | 0                | 0              | 1              | y <sub>3</sub>  |     |     |                  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |   |     |     |                  |  |  |  |
| 4.         |                 |                |                | 1/2             | 1/2            | 0              | 1/2                      | 1/2            | 0              | -                | -              | -              | y <sub>12</sub> |     |     |                  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |   |     |     |                  |  |  |  |
| 5.         |                 |                |                | 1/2             | 0              | 1/2            | 1/2                      | 0              | 1/2            | -                | -              | -              | y <sub>13</sub> |     |     |                  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |   |     |     |                  |  |  |  |
| 6.         |                 |                |                | 0               | 1/2            | 1/2            | 0                        | 1/2            | 1/2            | -                | -              | -              | y <sub>23</sub> |     |     |                  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |   |     |     |                  |  |  |  |
| 7.         |                 |                |                |                 |                |                |                          |                |                | 1/3              | 1/3            | 1/3            | 1/3             | 1/3 | 1/3 | y <sub>123</sub> |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |   |     |     |                  |  |  |  |
| 8.         |                 |                |                |                 |                |                |                          |                |                |                  |                |                |                 |     |     |                  |  |  | 1/3 | 2/3 | 0 | y <sub>122</sub> |  |  |  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |   |     |     |                  |  |  |  |
| 9.         |                 |                |                |                 |                |                |                          |                |                |                  |                |                |                 |     |     |                  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  | 2/3 | 1/3 | 0 | y <sub>112</sub> |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |   |     |     |                  |  |  |  |
| 10.        |                 |                |                |                 |                |                |                          |                |                |                  |                |                |                 |     |     |                  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  | 1/3 | 0 | 2/3 | y <sub>133</sub> |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |   |     |     |                  |  |  |  |
| 11.        |                 |                |                |                 |                |                |                          |                |                |                  |                |                |                 |     |     |                  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  | 2/3 | 0 | 1/3 | y <sub>113</sub> |  |  |  |  |  |   |     |     |                  |  |  |  |
| 12.        |                 |                |                |                 |                |                |                          |                |                |                  |                |                |                 |     |     |                  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  | 0 | 1/3 | 2/3 | y <sub>233</sub> |  |  |  |
| 13.        |                 |                |                |                 |                |                |                          |                |                |                  |                |                |                 |     |     |                  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |     |   |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |     |   |     |                  |  |  |  |  |  |   |     |     |                  |  |  |  |



## ЗМІСТ

|   | <b>Стор.</b> |
|---|--------------|
| <b>ПЕРДМОВА</b>   | 3            |
| <b>1. ЗАДАЧІ ПРОЕКТУВАННЯ СКЛАДІВ БЕТОНІВ І МЕТОДОЛОГІЯ ЇХ ВИРІШЕННЯ</b>  | 5            |
| 1.1. Основні задачі проектування складів бетонів  | 5            |
| 1.2. Системний аналіз – сучасна методологія вирішення технологічних задач проектування складів                        | 20           |
| <b>2. МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНОГО ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ</b> | 28           |
| 2.1. Загальні відомості. Попереднє вивчення об'єкта   | 28           |
| 2.2. Побудова лінійних і неповних квадратичних моделей  | 41           |
| 2.3. Планування другого порядку і отримання квадратичних моделей  | 57           |
| 2.4. Планування експериментів на діаграмах "склад-властивість"  | 80           |
| 2.5. Аналіз рівнянь регресії й пошук оптимальних рішень. Загальна схема аналізу рівнянь                               | 93           |
| <b>3. ПРОЕКТУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ СКЛАДІВ ВАЖКОГО БЕТОНУ</b>   | 105          |
| 3.1. Основні задачі проектування складів бетону   | 105          |
| 3.2. Якісна структура залежностей властивість-режим-склад бетону  | 106          |
| 3.3. Аналіз основних робіт з застосуванням математичного планування експериментів                                     | 111          |





|           |   |     |
|-----------|---|-----|
|           | для проектування складів бетону                         |     |
| <b>4.</b> | <b>ПРОЕКТУВАННЯ СКЛАДІВ БЕТОНІВ РІЗНИХ ВИДІВ</b>        | 123 |
| 4.1.      | Бетони для виробів, що піддають тепловологісній обробці | 123 |
| 4.2.      | Гідротехнічні бетони                                    | 136 |
| 4.3.      | Високоміцні швидкотверднучі бетони                      | 154 |
| 4.4.      | Бетони з активними мінеральними добавками               | 166 |
| 4.5.      | Фібробетони   | 176 |
| <b>5.</b> | <b>АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ СКЛАДІВ БЕТОНУ</b>               | 183 |
|           | Список використаної літератури                          | 202 |
|           | Додатки   | 205 |
|           | Зміст   | 224 |

