**УДК 51-77** https://doi.org/10.31713/vt4202014

**Турбал Ю. В., д.т.н., професор** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне), **Кінда В. В., аспірант** (Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне)

# АНАЛІЗ ПІРАМІДАЛЬНОГО МЕТОДУ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ТА МОДЕЛЕЙ ЕКСПОНЕНЦІЙНОГО ЗГЛАДЖУВАННЯ ДЛЯ КОРОТКОСТРОКОВОГО ПРОГНОЗУ

**Реалізовано пірамідальний метод екстраполяції, моделі простого та подвійного експоненційного згладжувань в середовищі розробки високого рівня Python у вигляді програмного продукту. Проведено порівняльний аналіз короткострокового точкового прогнозу методами експоненціального згладжування з пірамідальним методом, в основі якого лежить аналіз розділених різниць. Проведено апробацію роботи програмного продукту та проаналізовано одержані результати.**

***Ключові слова:*** **екстраполяція; прогноз; пірамідальний метод; експоненційне згладжування.**

**Актуальність теми.** Із дедалі швидшим темпом розвитку та популяризацією нового ринку криптовалют все більшої актуальності набуває аналіз часових рядів. Разом з ним, зростає кількість юридичних та фізичних осіб, основною задачею яких є торгівля з метою отримання прибутку на різного роду платформах, біржах. Таким чином, розробка та застосування систем короткострокового прогнозу економетричних часових рядів у процесі прийняття рішення щодо здійснення операцій купівлі продажу є актуальною на сьогоднішній день.

**Аналіз досліджень.** За останні роки проведена велика кількість наукових досліджень у напрямку короткострокових прогнозів інтелектуальними методами. Серед них велику кількість займають методи на основі машинного навчання із допомогою нейронних мереж. Архітектура досліджуваних мереж різноманітна – від згорткових до рекурентних мереж [1; 4]. Проте дані моделі складні у використанні та досить ресурсоємні, на відміну від моделей експоненційного згладжування та пірамідального методу. Простота та швидкість одержання результату спонукає до необхідності в подальшому дослідженні пірамідального методу екстраполяції для точкового прогнозу та аналізу методів експоненційного згладжування для порівняння ефективності прогнозу.

**Метою статті є** реалізація моделей простого та подвійного експоненційного згладжувань, пірамідального методу для оцінювання ефективності короткострокового прогнозу на базі обраного критерію у вигляді програмного продукту.

**Викладення основного матеріалу.** Під часовим рядом можна вважати послідовність значень статистичного показника (ознаки), $\forall t \in T \subseteq \mathbb{R}$ у хронологічному порядку [2].

До найпростіших прикладів економетричних часових рядів можна віднести: ринкові ціни валют/акцій; обсяги продажів в торгових мережах; обсяги споживання та ціни енергоресурсів; обсяги вантажних чи пасажирських перевезень; дорожній трафік та ін.

Проста модель часового ряду має наступний вигляд вигляд:

$$X_t = b + \epsilon_t ,$$

де *b* – константа, $\epsilon$ – випадкова помилка. Константа *b* відносно стабільна на кожному часовому інтервалі, але може повільно змінюватися з часом.

Один з інтуїтивно ясних способів виділення *b* полягає в тому, щоб використовувати згладжування ковзним середнім, в якому останнім спостереженнями приписуються більші ваги, ніж передостаннім, передостаннім більші ваги, ніж перед-передостаннім і т.д. Просте експоненційне згладжування саме так і влаштовано.

Точна формула простого експоненційного згладжування має наступний вигляд [2]

$$S_t = \alpha X_t + (1-\alpha) S_{t-1} .$$

У випадку застосування формули рекурсивно, кожне нове згладжене значення (яке є також прогнозом) обчислюється як зважене середнє поточного спостереження і згладженого ряду. Очевидно, результат згладжування залежить від параметра $\alpha$. Емпіричні дослідження показали, що часто просте експоненційне згладжування дає досить точний прогноз.

Оцінювання кращого значення параметра $\alpha$ доцільно виконувати за допомогою даних. На практиці параметр згладжування часто шукається з пошуком на сітці. Можливі значення параметра розбиваються сіткою з певним кроком дискретизації. Наприклад, розглядається сітка значень від 0.01 до 0.99, з кроком дискретизації 0.05. Потім вибирається крок, для якого сума квадратів (або середніх квадратів) залишків є мінімальною.

Просте експоненційне згладжування в кращому випадку дає прогноз лише на одну точку вперед та ще може згладити ряд. У цьому нам допоможе розбиття ряду на дві складові – рівень (level, intercept) *l* і тренд (trend, slope) *b*. Рівень, або очікуване значення ряду, ми прогнозуємо за допомогою методів [2], а тепер таке ж експоненційне згладжування можна застосувати до тренду, вважаючи, що майбутній напрямок зміни ряду залежить від зважених попередніх змін.

$$\begin{aligned} l_x &= \alpha y_x + (1-\alpha)(l_{x-1} - b_{x-1}), \\ b_x &= \beta(l_x - l_{x-1}) + (1-\beta) b_{x-1}, \\ \hat{y}_{x+1} &= l_x + b + x. \end{aligned} \tag{1}$$

В результаті отримуємо набір функцій. Перша визначає рівень – він, як і раніше, залежить від поточного значення ряду, другий доданок тепер розбивається на попереднє значення рівня та тренда. Друга відповідає за тренд – він залежить від зміни рівня на поточному кроці, і від попереднього значення тренду. Тут в ролі ваги в експоненційному згладжуванні виступає коефіцієнт $\beta$. Нарешті, підсумкове прогнозування є сумою модельних значень рівня і тренду.

**Пірамідальний метод.** Нехай функція *f* задана в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та необхідно спрогнозувати значення функції в точці $x > x_n$. Введемо поняття модифікованих скінченних різниць наступним чином:

$$\Delta^i f_i = \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1} - \Delta^{j-1} f_i}{r_i^j - l_i^j}, \, j = 1, n-1; i = 1, n-j \, . \tag{2}$$

$$r_i^j = \begin{cases} x^c_{i+\frac{j}{2}}, j = 2k, \\ x_{i+\left[\frac{j}{2}\right]+1}, j = 2k+1, \end{cases} \quad l_i^j = \begin{cases} x^c_{i+\frac{j}{2}-1}, j = 2k, \\ x_{i+\left[\frac{j}{2}\right]}, j = 2k+1. \end{cases}$$

Зауважимо, що у випадку знаходження наступного значення для будь-якого ряду $k$ таблиці скінченних різниць $\Delta^k f_{n-k+1}$, легко можна збудувати прогнозне значення функції у точці $x_{n+1}$ за наступною обчислювальною процедурою [4]

$$\Delta^{j-1} f_{n-j+2} = \Delta^{j-1} f_{n-j+1} + \Delta^j f_{n-j+1} \left( r^j_{n-j+1} - l^j_{n-j+1} \right), \; j = \overline{k,1} \, .$$

Ідея методу екстраполяції, який пропонується, полягає у знаходженні такого ряду таблиці скінченних різниць, для якого вдається знайти наближено прогнозне значення відповідної скінченної різниці за допомогою підходу, що розглядається нижче.

Проінтерполюємо значення функції у проміжних точках, $x_i^c = \left(x_i + x_{i+1}\right)/2, i = \overline{1, n-1},$ визначивши значення функції $f_i^c, i = \overline{1, n-1}$ та знайдемо відповідні скінченні різниці:

$$\Delta^j f_i^c = \frac{\Delta^{j-1} f^c{}_{i+1} - \Delta^{j-1} f^c{}_i}{\hat{r}_i^j - \hat{l}_i^j}. j = \overline{1, n-2}, i = \overline{1, n-j}; \quad (3)$$

$$\hat{r}_i^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}+1}, j = 2k, \\ x^c_{i+\left[\frac{j}{2}\right]+1}, j = 2k+1, \end{cases} \quad \hat{l}_i^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}}, j = 2k, \\ x^c_{i+\left[\frac{j}{2}\right]}, j = 2k+1. \end{cases}$$

Розглянемо співвідношення виду:

$$r_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}+1}, i = 2k, \\ x^c_{n-\left[\frac{i}{2}\right]}, i = 2k+1, \end{cases} c_i = \begin{cases} x^c_{n-\frac{i}{2}}, i = 2k, \\ x_{n-\left[\frac{i}{2}\right]}, i = 2k+1, \end{cases} l_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}}, i = 2k, \\ x^c_{n-\left[\frac{i}{2}\right]-1}, i = 2k+1. \end{cases}$$

Нехай має місце рівність $\tilde{\Delta}^i f^c_{(n-i)} = \Delta^i f^c_{(n-i)}$.

Відповідні співвідношення мають вигляд :

$$\Delta^{j-1} f^c{}_{n-j+1} = \Delta^{j-1} f^c{}_{n-j} + \Delta^j f^c{}_{n-j} (\hat{r}^j_{n-j} - \hat{l}^j_{n-j}), \ j = \overline{i, 1}.$$

Алгоритм екстраполяції виглядає наступним чином:

1. Будується таблиця скінченних різниць виду (2).
2. Проводиться інтерполяція функції в середніх точках, таблиця скінченних різниць доповнюється середніми значеннями (3).
3. Знаходяться такі значення $i^*$, для яких
$$i^* = argmin_i \left| \frac{\left(\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}\right)}{c_i - l_i} - \frac{\left(\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i}\right)}{c_i - ll_i} \right|.$$
4. Обраховується значення $\tilde{\Delta}^{i^*} f^c_{n-i^*}$.
5. Знаходиться прогнозне значення функції за формулами :
$$\Delta^{j-1} f^c{}_{n-j+1} = \Delta^{j-1} f^c{}_{n-j} + \Delta^j f^c{}_{n-j} \left(\hat{r}^j_{n-j} - \hat{l}^j_{n-j}\right), \ j = \overline{i^*, 1}. \quad (4)$$

**Порівняння результатів.** Для проведення практичних експериментів прогнозування оберемо просту аналітичну функцію $f\left(x\right) = x^6 sin\left(x\right)$, графік якої приведений на рисунку.

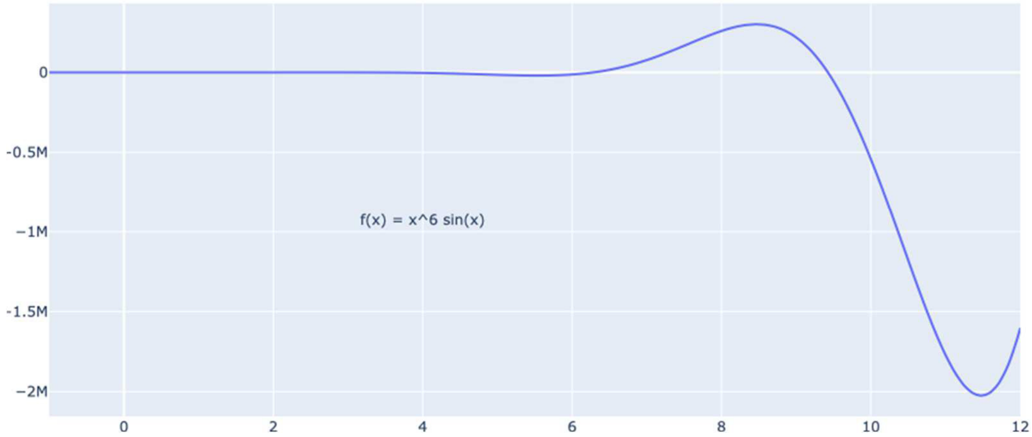


Рисунок. Графік досліджуваної функції

Обравши крок дискретизації неперервної функції 0.5 створимо набір даних в діапазоні 1…11. Задача полягає в прогнозі наступної точки 11.5. Отримані результати наведемо у зведеній таблиці.

Таблиця

Результати відносних похибок прогнозу в точці 11.5 шуканої функції

| | Реальні значення | Прогноз | Різниця | Відносна похибка, % |
|---|---|---|---|---|
| Piramidal $i^* = 9$ | -2024974.077 | -2017907.745 | -7066.332 | 0.348959133860557 |
| SES alpha = 0.2 | -2024974.077 | -557854.6118595 | -1467119.4651405 | 72.4512714411652 |
| SES alpha = 0.9 | -2024974.077 | -1705411.40373368 | -319562.67326632 | 15.7810747750288 |
| SES optimum | -2024974.077 | -1768564.38166822 | -256409.69533178 | 12.6623692739638 |
| Holt l 0.8 s 0.2 | -2024974.077 | -2003411.71294194 | -21562.36405806 | 1.06482173292829 |
| Holt optimum | -2024974.077 | -2028425.47308391 | 3451.39608391 | 0.170441494689317 |

Використання експоненційного згладжування доцільно застосовувати при не стаціонарних часових рядах, на відміну від авторегресійних моделей, де їх застосовувати неможливо. В результаті проведення короткострокового прогнозу для запропонованої функції отримали результати табл. 1. Оптимальні параметри підбирались на сітках [1] із кроком дискретизації 0.05. Як видно із таблиці, експоненційні згладжування двох типів дають різного роду відносні похибки.

Пірамідальний метод дав похибку 0.34% на заданому наборі даних. Схожу точність просте експоненційне згладжування дати не може. Подвійне експоненційне згладжування в найкращому варіанті дає похибку в районі одного відсотка, що говорить про можливість використання пірамідального методу як альтернативи серед моделей простого та подвійного експоненційного згладжування для точкового прогнозу.

**Висновки та перспективи подальших досліджень.** Побудовано моделі простого та подвійного експоненційного згладжування, пірамідального методу для короткострокового прогнозу у вигляді програмного продукту. Розроблено програмний продукт у середовищі розробки високого рівня Pyhon. Отримані результати підтверджують необхідність у більш детальному вивченні та модифікаціях пірамідального методу, що і є напрямком наших подальших досліджень.

**1.** Николенко С., Кадурин А., Архангельская Е. Глубокое обучение. СпБ : Питер, 2017. 432 с. **2.** Шалагинов А. В. Кубическая сплайн экстраполяция временных рядов. К. : УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2011. **3.** Бомба А. Я., Турбал Ю. В., Сьох А. П., Турбал М. Ю. Метод екстраполяції на основі модифікованих розділених різниць. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2017. Т. 33. С. 36–51. **4.** Minsky M. Neural Nets and the Brain Model Problem. Princeton : Princeton University, 1954. 157 p. **5.** Design a Data and Analytics Strategy. URL: https://www.gartner.com/en/\\publications/data-analytics-strategy (accessed date: 20.01.2021). **6.** Бідюк П. І., Савенков О. І., Баклан І. В. Часові ряди: моделювання та прогнозування. Київ : ЕКМО, 2004. 144 с.

## REFERENCES:

**1.** Nikolenko S., Kadurin A., Arhangelskaya E. Glubokoe obuchenie. SpB : Piter, 2017. 432 s. **2.** SHalaginov A. V. Kubicheskaya splayn ekstrapolyatsiya vremennyih ryadov. K. : UNK «IPSA» NTUU «KPI», 2011. **3.** Bomba A. Ya., Turbal Yu. V., Sokh A. P., Turbal M. Yu. Metod ekstrapoliatsii na osnovi modyfikovanykh rozdilenykh riznyts. *Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetu im. V. N. Karazina. Ser. Matematychne modeliuvannia. Informatsiini tekhnolohii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia*. 2017. T. 33. C. 36–51. **4.** Minsky M. Neural Nets and the Brain Model Problem. Princeton : Princeton University, 1954. 157 p. **5.** Design a Data and Analytics Strategy. URL: https://www.gartner.com/en/\\publications/data-analytics-strategy (accessed date: 20.01.2021). **6.** Бідюк П. І., Савенков О. І., Баклан І. В. Часові ряди: моделювання та прогнозування. Київ : ЕКМО, 2004. 144 с.

**Turbal Yu. V., Doctor of Engineering, Professor** (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne), **Kinda V. V., Post-graduate Student** (Rivne State University of the Humanities, Rivne)

## ANALYSIS OF THE EXPONENTIAL SMOOTHING MODELS AND PYRAMIDAL DATA EXTRAPOLATION METHOD FOR SHORT-LINE FORECASTING

**The pyramidal method of extrapolation, models of simple and double exponential smoothing in the high level development environment Python in the form of a software product is realized. A comparative analysis of short-term point forecast by exponential smoothing methods with the pyramidal method, which is based on the analysis of separated differences. The approbation of the software product operation was carried out and the obtained results were analyzed.**
***Keywords*: extrapolation; forecast; pyramidal method; exponential smoothing.**

---

**Турбал Ю. В., д.т.н., профессор** (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно), **Кинда В. В., аспирант** (Ровенский государственный гуманитарный университет, г. Ровно)

## АНАЛИЗ ПИРАМИДАЛЬНОГО МЕТОДА ЭКСТРАПОЛЯЦИИ И МОДЕЛЕЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО СГЛАЖИВАНИЯ ДЛЯ КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА

**Реализовано пирамидальный метод экстраполяции, модели простого и двойного экспоненциального сглаживаний в среде разработки высокого уровня Python в виде программного продукта. Проведен сравнительный анализ краткосрочного точечного прогноза методами экспоненциального сглаживания и пирамидальным методом, в основе которого лежит анализ разделенных разностей. Проведена апробация работы программного продукта для аналитической функции и проанализированы полученные результаты.**
***Ключевые слова*: экстраполяция; прогноз; пирамидальный метод; экспоненциальное сглаживание.**

---