

**Ніколайчук В. В., к.т.н., викладач Технічного коледжу НУВГП,  
Тимейчук О. Ю., к.т.н., доцент, Костюк О. П., к.т.н., доцент**  
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

### **РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ ДЕТАЛЕЙ НОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ З'ЄДНАННЯ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ**

В статті розроблено методику визначення деформацій і напружень в деталі складної конфігурації з'єднання змінної жорсткості (ЗЗЖ). При дослідженні деталь умовно розділено на дві геометричні фігури: циліндричну оболонку і круглу кільцеву пластину. На підставі умов спільності цих фігур складено системи рівнянь, розв'язком яких отримано вирази для визначення спільних внутрішніх силових чинників.

Вибрано розрахункову схему круглої кільцевої пластини з урахуванням її геометрії та навантаження; встановлено математичні залежності для визначення згинаючих моментів в радіальному та коловому напрямках. За результатами обчислень побудовано епюри згинаючих моментів і виявлено найбільш навантажені перерізи пластини, де визначено максимальні напруження та деформації і на підставі порівняння їх з допустимими та зроблено висновки про міцність та жорсткість деталі.

Аналіз міцності циліндричної оболонки виконано з урахуванням сил в різьбі та спільних внутрішніх силових чинників деталі.

**Ключові слова:** деталь; деформація; з'єднання; жорсткість; момент; міцність; напруження; сила.

**Ефективність роботи машин** значною мірою залежить від технічних характеристик з'єднань і тому, при виробництві машин, необхідний раціональний вибір їх конструкцій.

В сучасних машинах застосовуються, в основному, **з'єднання постійної жорсткості**, які мають ряд недоліків: не компенсують неточність монтажу, не зменшують вібрацію, не забезпечують плавність

руху механізмів.

**З'єднання змінної жорсткості (ЗЗЖ)** виконують, поряд з кінематичними та силовими зв'язками, ще такі функції: компенсують неспіввісність валів, зменшують вібрацію, забезпечують плавність руху, що позитивно впливає на роботу механізмів. Також доцільним є використання цих з'єднань в якості амортизаторів, віброізоляторів і пружних муфт.

Навантажувальна здатність елементів нових з'єднань залежить від багатьох чинників: режимів роботи машини; властивостей матеріалів; технологічних, експлуатаційних та інших умов. Тому при розрахунках на міцність і жорсткість деталей ЗЗЖ доцільно застосовувати методи теорії пружності.

Проблеми розробки нових конструкцій ЗЗЖ висвітлено в публікаціях, наведених в [1–3]. Там розглянуто детальний опис структури і взаємодії елементів з'єднань, а також наведено методи розрахунку деталей.

**Метою досліджень** є розробка методики розрахунку на міцність і жорсткість нової конструкції ЗЗЖ (детальний опис будови і принцип роботи наведено в патенті [2]).

Будемо досліджувати деталь ЗЗЖ (стакан), яка має поєднання двох геометричних фігур – циліндричної оболонки і круглої кільцевої пластини (рис. 1).

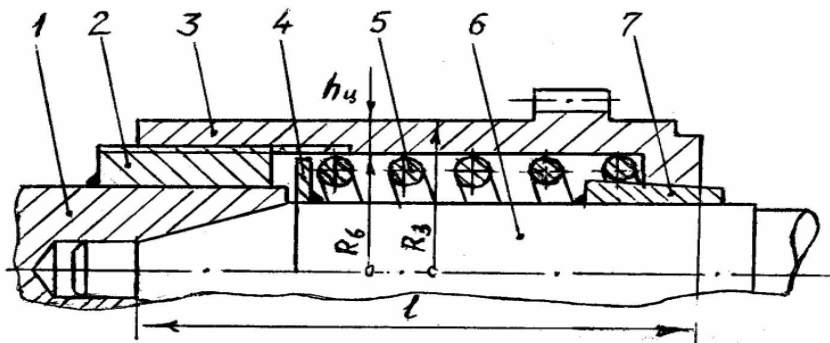


Рис. 1. Конструктивна схема ЗЗЖ: 1 – вал вхідний; 2 – втулка регулювальна; 3 – стакан; 4 – шайба; 5 – пружина; 6 – вал вихідний; 7 – конусна втулка

Виконуємо розрахунок кожної фігури окремо, враховуючи їх взаємодію. Відокремимо умовно циліндр від пластини і прийmemo точку перетину серединних поверхонь за точку дотику (рис. 2).

Такий спосіб розподілу дозволяє записати умову дотику в найбільш простій формі. Осьову силу в циліндрі визначаємо із умови рівноваги фігур

$$p\pi R_y^2 = T \cdot 2\pi R_y,$$

або

$$T = 0,5p\pi R_y. \quad (1)$$

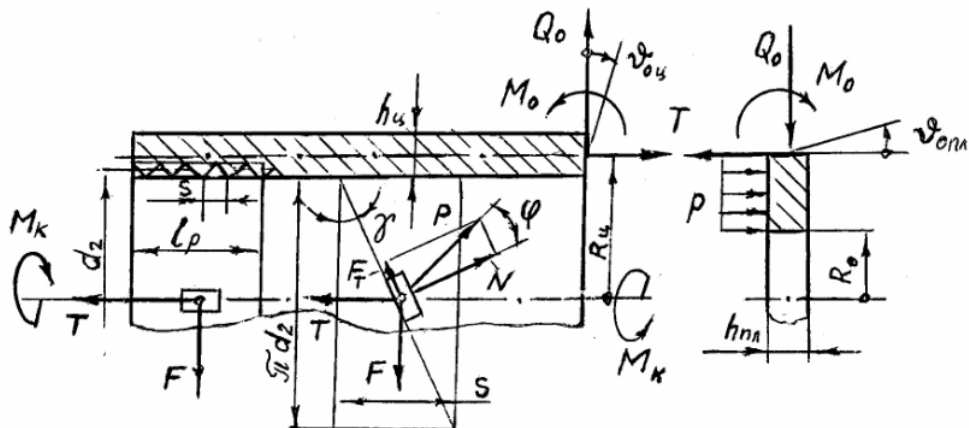


Рис. 2. Схема сил, які діють на деталь

Силкові чинники  $Q_0$  і  $M_0$  в перерізі знаходимо із умови спільності деформації фігур:

$$\text{при } x=0, \omega_y=0: v_{0ц} = -v_{пл}. \quad (2)$$

Застосувавши моментну теорію оболонок [4], отримаємо вирази для визначення переміщення кінця циліндра

$$\omega_y = \frac{M_0}{2D_y\beta^2} + \frac{Q_0}{2D_y\beta^3} - \frac{\mu p R_y^2}{2Eh_y}; \quad (3)$$

$$v_{0ц} = -\frac{M_0}{D_y\beta} - \frac{Q_0}{2D_y\beta^2}, \quad (4)$$

де  $\omega_y$  – радіальне переміщення;  $v_{0ц}$ ,  $v_{пл}$  – кути повороту нормалі на краях фігур;  $M_0$ ,  $Q_0$  – початкові параметри внутрішніх силових чинників;  $D_y = \frac{Eh_y^3}{12(1-\mu^2)}$  – згинальна жорсткість циліндра;

$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R_y^2 h_y^2}}$  – коефіцієнт геометрії та матеріалу;  $\mu$  – коефіцієнт Пу-

ассона;  $E$  – модуль пружності;  $p$  – внутрішній тиск;  $R_y$  – середній радіус циліндра;  $h_y$  – товщина стінки циліндра.

Кут повороту нормалі  $\nu_{0nl}$  визначаємо методом теорії осесиметричного згину круглих пластин [4].

При виборі розрахункової схеми пластини приймаємо такі припущення: товщина пластини значно менша в порівнянні з іншими геометричними параметрами; матеріал – однорідний, ізотропний; площини перерізів пластини не деформуються при згині; тиск на кільце пластини рівномірно розподілений.

Сформульовані умови дозволили вибрати таку розрахункову схему: пластинка шарнірно закріплена по краях; рівномірно навантажена по площі кільця; до країв прикладено розподільний момент  $M_0$  (рис. 3).

Тиск на пластину визначаємо розподілом сили пружини при максимальній деформації на площу кільця, тобто

$$p = \frac{4F_{np\max}}{\pi(d^2 - d_1^2)}, \quad (5)$$

де  $F_{np\max}$  – сила пружини при максимальній деформації;  $d, d_1$  – зовнішній та внутрішній діаметри пружини.

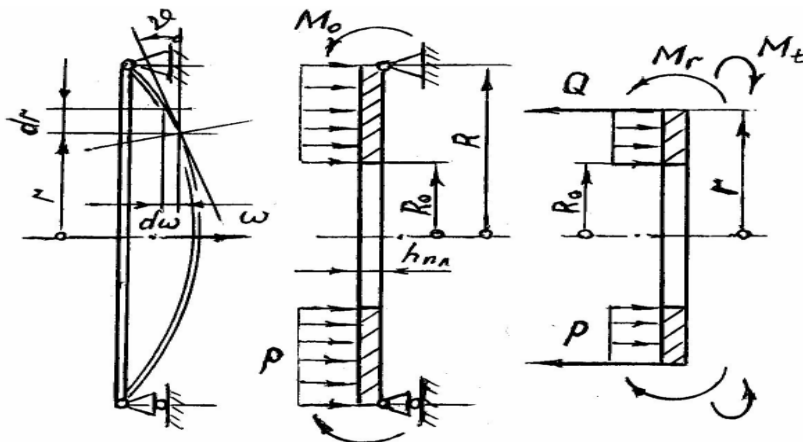


Рис. 3. Деформації та сили в круглій пластині

Для визначення напружень в перерізі кільцевої пружини встановлюємо залежність між внутрішніми силами та деформаціями. Згідно з методом [4] формула для обчислення кута повороту нормалі пластини така:

$$v = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \frac{1}{D_{nl} r} \int_{R_0}^r \left[ \hat{r} \int_{R_0}^{\hat{r}} Q d\tilde{r} \right] d\hat{r}, \quad (6)$$

де  $C_1, C_2$  – постійні інтегрування;  $Q$  – поперечна сила;  $r$  – змінний радіус;  $R_0 < \tilde{r} \leq \hat{r}$ ;  $R_0 \leq \hat{r} \leq r$ ;  $D_{nl} = \frac{Eh_{nl}^3}{12(1-\mu^2)}$  – циліндрична жорсткість пластини.

Поперечну силу  $Q$  знайдемо так: виріжемо із пластини кільце з внутрішнім радіусом  $R_0$  і зовнішнім  $r$  та складемо суму проєкцій сил на вісь кільця (рис. 3)

$$Q = -\frac{p(r^2 - R_0^2)}{2r}. \quad (7)$$

Коли обчислимо інтеграл (6), то отримаємо такі вирази функції  $v$  та її похідної  $\frac{dv}{dr}$ :

$$v = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{pR_0^2 r}{16D_{nl}} \left[ \frac{r^2}{R_0^2} - \frac{R_0^2}{r^2} - 4 \ln \frac{r}{R_0} \right], \quad (8)$$

$$\frac{dv}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r} - \frac{pR_0^2}{16D_{nl}} \left[ \frac{3r^2}{R_0^2} + \frac{R_0^2}{r^2} - 4 \left( 1 + \ln \frac{r}{R_0} \right) \right]. \quad (9)$$

Постійні  $C_1$  і  $C_2$  визначимо з граничних умов

$$\text{при } r = R_0, M_r = 0: \left( \frac{dv}{dr} + \mu \frac{v}{r} \right) = 0; \quad (10)$$

$$\text{при } r = R, M_r = M_0: D_{nl} \left( \frac{dv}{dr} + \mu \frac{v}{r} \right) = M_0. \quad (11)$$

Розв'язки рівнянь (10) і (11) такі:

$$v = \frac{pR_0^2 r}{D_{nl}} \left[ A + B \frac{R_0^2}{r^2} - C \frac{r^2}{R_0^2} + D \ln \frac{r}{R_0} \right] - \frac{M_0 r}{D_{nl}} k_1; \quad (14)$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{pR_0^2}{D_{nl}} \left[ A - B \frac{R_0^2}{r^2} - 3C \frac{r^2}{R_0^2} + D \left( 1 + \ln \frac{r}{R_0} \right) \right] - \frac{M_0}{D_{nl}} k_2; \quad (15)$$

де

$$\left. \begin{aligned}
 A &= \frac{(3 + \mu)n^2 + (1 - \mu)n^{-2} - 4[1 + (1 + \mu)\ln n]}{16(1 + \mu) \cdot (1 - n^{-2})}; \\
 B &= \frac{1 + \mu}{1 - \mu} A + C; \quad C = \frac{1}{16}; \quad D = \frac{1}{4}; \\
 k_1 &= \frac{1 + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \cdot \frac{R_0^2}{r^2}}{(1 + \mu) \cdot (1 - n^{-2})}; \quad k_2 = \frac{1 - \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \cdot \frac{R_0^2}{r^2}}{(1 + \mu) \cdot (1 - n^{-2})}; \quad n = \frac{R}{R_0}.
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Застосуємо умови спільності деформацій циліндра і пластини (2) та визначимо силові чинники

$$M_0 = pR_0^2 [A + Bn^{-2} - Cn^2 + D \ln n] \cdot k_3; \quad (16)$$

$$Q = pR_0^2 \frac{D_u}{Eh_u} \mu \beta^3 - M_0 \beta; \quad (17)$$

$$k_3 = \left[ k_1 + 0,5 \frac{D_{nl}}{D_u} \cdot \frac{1}{R\beta} \right]^{-1}. \quad (18)$$

Згинаючі моменти в радіальному і коловому напрямках обчислюємо за такими формулами:

$$M_r = D_{nl} \left( \frac{dv}{dr} + \mu \frac{v}{r} \right); \quad M_e = D_{nl} \left( \frac{v}{r} + \mu \frac{dv}{dr} \right). \quad (19)$$

Епюри моментів (рис. 4) побудовані при таких вихідних даних: матеріал деталі – сталь; коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0,33$ ; модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; геометричні параметри  $R = 30 \text{ мм}$ ,  $R_0 = 20 \text{ мм}$ .

На підставі епюр визначаємо найбільші напруження в перерізах пластини і, порівнюючи їх з допустимими, оцінюємо міцність пластини [5].

Перевірка пластини на жорсткість базується на визначенні найбільшого прогину площини і порівнянні його з допустимим:

$$W_{\max} \leq [W], \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 W_{\max} &= \int_{R_0}^R v dr = \frac{hR_0^4}{D_{nl}} \{0,5A(n^2 - 1) + B \ln n - 0,25C(n^4 - 1) + \\
 &+ 0,25D[1 + n^2(2 \ln n - 1)]\} - \frac{M_0 R_0^2}{D_{nl}} [A_1(n^2 - 1) + B_1 \ln n],
 \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$A_1 = [2(1 + \mu) \cdot (1 - n^{-2})]^{-1}; \quad B_1 = [(1 - \mu) \cdot (1 - n^{-2})]^{-1}. \quad (22)$$

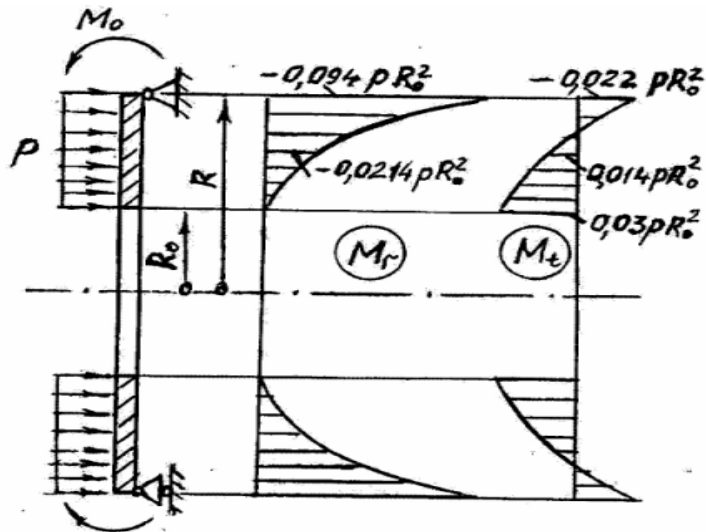


Рис. 4. Епюри згинаючих моментів в круглій пластині

При оцінці міцності циліндричної оболонки аналізуємо картину її навантаження: стінки оболонки розтягуються силою пружини і скручуються при загвинчуванні циліндра до вала; передача крутного моменту від вхідного до вихідного вала відбувається при стисненні силою пружини їх конічних поверхонь (рис. 1).

Надійність передачі руху між валами забезпечуються у випадку, коли сумуючі сили тертя на робочих поверхнях валів будуть рівні або більші осьової сили, яка створюється силою пружини (рис. 5).

Тобто при дотриманні умови зносостійкості  $q \leq [q]$  виконується умова

$$q = \frac{F_0}{A_k \sin \alpha_k} \leq [q]. \quad (23)$$

На підставі викладеного, отримаємо залежність величини допустимої сили стиснення робочих поверхонь валів від сил тертя

$$[F_0] = [q] \pi (R_k^2 - r_k^2), \quad (24)$$

де  $[q]$  – допустимий питомий тиск;  $\alpha_k$  – кут конуса валів;  $A_k$  – площа робочих поверхонь валів;  $R_k, r_k$  – найбільший і найменший радіуси конусів (рис. 5).

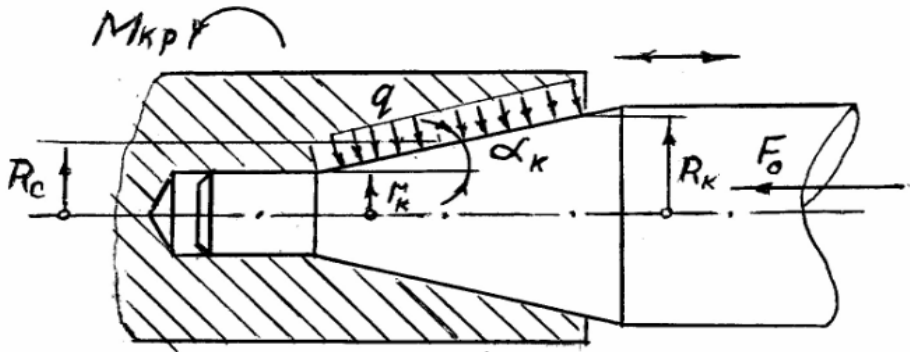


Рис. 5. Картина навантаження конусних поверхонь валів

На підставі викладеного, отримаємо залежність величини допустимої сили стиснення робочих поверхонь валів від сил тертя

$$[F_0] = [q]\pi(R_k^2 - r_k^2), \quad (24)$$

де  $[q]$  – допустимий питомий тиск;  $\alpha_k$  – кут конуса валів;  $A_k$  – площа робочих поверхонь валів;  $R_k, r_k$  – найбільший і найменший радіуси конусів (рис. 5).

Параметри стандартної пружини стиснення вибираємо, враховуючи величину допустимої сили стиснення та геометричні параметри валів, і дотримання умови

$$M_{kp} = F_{np \max} \left[ 0,5d_2 \operatorname{tg}(\gamma + \varphi') + \frac{1}{3} f \frac{D^3 - D_1^3}{D^2 - D_1^2} \right].$$

Необхідний крутний момент загвинчування стакана до вала визначаємо, враховуючи максимальну силу пружини і співвідношення сил в різьбі (рис. 2)

$$M_{kp} = F_{np \max} \left[ 0,5d_2 \operatorname{tg}(\gamma + \varphi') + \frac{1}{3} f \frac{D^3 - D_1^3}{D^2 - D_1^2} \right], \quad (25)$$

де  $d_2$  – середній діаметр різьби;  $\gamma$  – кут підйому гвинтової лінії;  $\varphi'$  – приведений кут тертя,  $\varphi' = \operatorname{arctg} \frac{f}{\cos(\alpha/2)}$ ;  $f$  – коефіцієнт тертя;  $\alpha$  – кут профілю різьби;  $d, d_1$  – зовнішній і внутрішній діаметри пружини.

Найбільший крутний момент, який може передавати з'єднання (рис. 5), визначаємо за формулою

$$[M_{kp}] = [F_0] \cdot R_{cp} \cdot f', \quad (26)$$



де  $R_{cp} = 0,5(R_k + r_k)$  – середній радіус робочих поверхонь конусів;

$f' = \frac{f}{\sin \alpha_k}$  – приведений коефіцієнт тертя.

Встановлені залежності (19) дозволяють визначити напруження в циліндрі, найбільші значення яких на краях. Тому для оцінки міцності деталі обчислюємо еквівалентні напруження і порівнюємо їх з допустимими [5]

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_{кр}^2} \leq [\sigma]. \quad (27)$$

Тому можна констатувати, що **розроблена методика** дозволяє знаходити **раціональні параметри деталей ЗЗЖ** із врахуванням особливостей його конструкції та навантаження.

**1.** Ніколайчук В. В., Тимейчук О. Ю. Методика розрахунку деталей нової конструкції з'єднання змінної жорсткості. *Вісник НУВГП. Сер. Технічні науки*. Вип. 1(81). Рівне : НУВГП, 2018. С. 183–193. **2.** З'єднання змінної жорсткості: пат. 134061, Україна: МПК В 60 G 11/00. № 201812457; заявл. 14.12.2018; опубл. 25.04.2019, Бюл. № 8. **3.** Ніколайчук В. В., Тимейчук О. Ю. Розрахунок на міцність деталей нової конструкції з'єднання змінної жорсткості. *Вісник НУВГП. Сер. Технічні науки*. Вип. 1(89). Рівне : НУВГП, 2020. С. 165–176. **4.** Бояршинов С. В. Основы строительной механики машин: учебное пособие для студентов вузов. М. : Машиностроение, 1973. 456 с. **5.** Павлице В. Т. Основы конструирования та розрахунок деталей машин : підручник. 2-е вид. виправл. Львів : Афіша, 2003. 560 с.

## REFERENCES:

**1.** Nikolaichuk V. V., Tymeichuk O. Yu. Metodyka rozrakhunku detalei novoi konstruktsii ziednannia zminnoi zhorstkosti. *Visnyk NUVHP. Ser. Tekhnichni nauky*. Vyp. 1(81). Rivne : NUVHP, 2018. S. 183–193. **2.** Ziednannia zminnoi zhorstkosti: pat. 134061, Ukraina: MPK V 60 G 11/00. № 201812457; zaiavl. 14.12.2018; opubl. 25.04.2019, Biul. № 8. **3.** Nikolaichuk V. V., Tymeichuk O. Yu. Rozrakhunok na mitsnist detalei novoi konstruktsii ziednannia zminnoi zhorstkosti. *Visnyk NUVHP. Ser. Tekhnichni nauky*. Vyp. 1(89). Rivne : NUVHP, 2020. S. 165–176. **4.** Boyarshinov S. V. Osnovy stroitelnoy mehaniki mashin: uchebnoe posobie dlya studentov vuzov. M. : Mashinostroenie, 1973. 456 s. **5.** Pavlyshche V. T. Osnovy kons-truiuvannia ta rozrakhunok detalei mashyn : pidruchnyk. 2-e vyd. vypravl. Lviv : Afisha, 2003. 560 s.

**Nikolaichuk V. V., Candidate of Engineering (Ph.D.), Lecturer,  
Tymeichuk O. Y., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor,  
Kostiuk O. P., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor**  
(National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

## **CALCULATION FOR STRENGTH AND RIGIDNESS OF DETAILS OF NEW CONSTRUCTION OF JOINT OF VARIABLE RIGIDITY METHODS OF THE THEORY OF ELASTICITY**

The article develops a method for determining deformations and stresses in a part of a complex configuration of a joint of variable stiffness. In the study, the part is conventionally divided into two geometric shapes: a cylindrical shell and a round annular plate. Based on the conditions of commonality of these figures, systems of equations are compiled, the solution of which produces expressions for determining the common internal force factors.

The calculated scheme of a round annular plate taking into account its geometry and loading is chosen; established mathematical dependences for determining the bending moments in the radial and circular directions. Based on the results of calculations, plots of bending moments are constructed and the most loaded cross-sections of the plate are identified, where the maximum stresses and strains are determined and based on their comparison with the admissible ones conclusions are made about the strength and rigidity of the part.

The analysis of the strength of the cylindrical shell is performed taking into account the forces in the thread and the common internal force factors of the part.

*Keywords:* part; deformation; connection; rigidity; moment; strength; stress; force.

---

**Николайчук В. В., к.т.н., преподаватель Технического коледжа  
НУВХП, Тимейчук О. Ю., к.т.н., доцент, Костюк А. П., к.т.н., доцент**  
(Национальный университет водного хозяйства и  
природопользования, г. Ровно)

## **РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ДЕТАЛЕЙ НОВОЙ КОНСТРУКЦИИ СОЕДИНЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

**В статье разработана методика определения деформаций и**

**напряжений в детали сложной конфигурации соединения переменной жесткости (СПЖ). При исследовании деталь условно разделена на две геометрические фигуры: цилиндрическая оболочка и круглая кольцевая пластина. На основании условий общности этих фигур составлены уравнения, решением которых получены выражения для определения общих внутренних силовых факторов.**

**Выбрана расчетная схема круглой кольцевой пластины с учетом ее геометрии и нагрузки; установлены математические зависимости для определения изгибающих моментов в радиальном и окружном направлениях. По результатам вычислений построены эпюры изгибающих моментов и выявлены наиболее нагруженные сечения пластины, где определены максимальные напряжения и деформации и на основании сравнения их с допустимыми сделаны выводы о прочности и жесткости детали.**

**Анализ прочности цилиндрической оболочки выполнен с учетом сил в резьбе и общих внутренних силовых факторов детали.**

***Ключевые слова:* деталь; деформация; соединения; жесткость; момент; прочность; напряжение, сила.**

---