Проф. В. Н. ПІНЄГІН

ГІДРАВЛІКА

ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНИ

В. Н. ПІНЕГІН
ПРОФЕСОР ОДЕСЬКОГО ПОЛІТЕХНІЧНОГО ІНСТИТУТУ

ГІДРАВЛІКА

ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

Державний Науково-Методологічний Комітет Наркомосвіти УСРР по секції професійної освіти дозволив до вжитку як підручник для ВТУЗ'ів та меліоративних факультетів с.-г. ВУЗ'ів

ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНИ
1928

Бібліографічний опис та шифри для бібліотечних каталогів на цю книгу вміщено в „Літописі Українського Друку“ та „Картковому репертуарі“ Української Книжкової Палати

Головліт № 639
Зам. № 3801 — 2000 прим.

„ОДЕСПОЛІГРАФ“
Перша державна друкарня
імени Карла Маркса. Одеса,
Стурдзівський зав., № 3-а.
Телеф. №№ 2-50 та 21-46

ВСТУП

§ 1. Поняття про предмет

Гідравліка, як наука, дуже близька до теоретичної механіки, саме до того її відділу, який вивчає плинні тіла; цей відділ, як відомо, так само, залежно від того, чи розглядається рівновагу рідин, чи їхній рух, поділяється на два підвідділи: гідростатику й гідродинаміку; останні, виходячи з основних властивостей плинного тіла, вивчаючи його, користуються врешті із загальних засад і висновків теоретичної механіки, що дає змогу вивчання плинного тіла звести до певних математичних операцій, суть яких є переважно в розвязанні різних диференціяльних рівнань; відси виходить, що розвязання питань з гідростатики й гідродинаміки по суті залежать од розвитку математичної аналізи. Але коли остання в теперішній час уже досить розвинена, щоб розвязувати питання гідростатики, то не можна цього сказати що до питань, які розглядається у гідродинаміці; в останній дуже часто доводиться подибувати питання, які за сучасного стану математичної аналізи не піддаються розвязанню. І коли Ґалілей говорив, що для нас легше уявити собі (вивчити) рух небесних тіл, що перебувають на дуже великому від нас віддаленні, ніж проаналізувати течію струмочка, що пробігає біля наших ніг, а відомий Сен-Венан (Saint-Venant) навіть говорив, що рух рідини становить для нас завдання, яке може спричинитись до божевілля, то і в теперішній час ми не дуже далеко пішли від цього стану — слова цих великих учених можна повторити й нині, і ми можемо й тепер констатувати ті величезні труднощі, що на них доводиться натрапляти, бажаючи розвязати питання течії рідин лише за допомогою математичної аналізи.

Що правда, гідродинаміка останніх років далеко сягнула вперед супроти того, що вона являла собою за часів Ґалілея, і безупинно розвивається далі; ми маємо чудові зразки розвязання багатьох питань з її обсягу чисто математичним шляхом, але все ж ці розвязання, коли їх застосовується до практичних питань, рідко можна використати безпосередньо: майже завжди виникає потреба заводити деякі поправки, деякі коефіцієнти, що залежать так од роду й стану рідини, як і від роду й стану тих поверхонь, що біля них рідина протікає, і які вже самою аналізою не можна визначити. Проте, практика вельми невідступно, і що більше розвивається будівництво гідротехнічних споруджень, то де-далі невідступніш вимагає відповіди на цілу низку питань, звязаних з течією рідини.

Не мавши поки що иншого виходу, щоб все ж задовольнити практичні запитання, люди науки й техніки примушені були йти шляхом компромісу, який є в тому, що тому або иншому окремому питанню, яке пильно треба розвязати, роблять досліди, иноді лабораторні, иноді в природних водотоках; з цих дослідів добувають деякі певні результати; на підставі цих результатів роблять узагальнення й складають гіпотези про ті або ті закони течії рідин у певних випадках, а на підставі цих гіпотез, користуючися знов таки з основних засад теоретичної механіки, складають уже узагальнені розвязання.

Ось таке вивчання питань руху рідин, — вивчання, яке користується, з одного боку, з досвідних даних, а, з другого боку, із засад і метод теоретичної механіки, становить предмет технічної або інженерної гідравліки.

§ 2. Властивості плинних тіл

Вивчаючи рідини, звичайно відрізняють ідеальні рідини від реальних, тоб-то таких, що дійсно існують у природі. Усяк, звичайно, знає, що кожна рідина вельми рухлива, що вона не здатна набирати й зберігати свою власну форму. Коли налити рідини в посудину першої-ліпшої форми, то рідина відразу ж набирає форми цієї посудини; коли на неї подути, то вже легкого подуву досить, щоб форма її змінилася: з'явиться переміщення часток на її поверхні і т. и.; все це ніби-то дає право висловити припущення, що зчіпляння між частками рідини таке мале, що не треба жодної сили, щоб їх роз'єднати, тоб-то, сказати иншими словами, що рідина не здатна чинити жодного опору силам розтяжним і силам зсувним.

Крім того, щоденний досвід переконує нас, що коли на рідину робити тиск, то її об'єм майже не змінюється; це так само дає нам право, — звичайно, ніби-то право, — говорити, що рідина є цілком нестислива. Коли б тепер, справді, існувала рідина з такими властивостями, то це й була б та рідина, яку називають ідеальною рідиною. Справді, в природі таких рідин нема; всі рідини, що реально існують, з яких найбільш поширена є, як відомо, вода, тільки почасти можуть наближатися своїми властивостями до ідеальних рідин, залежно від роду й стану, але ніколи не збігаються з ними цілком. Ідеальна рідина є, так би мовити, лише границя, до якої наближаються рідини, що реально існують, подібно до того, як тверде тіло теоретичної механіки є границя, що до неї наближається тверде тіло природи. Що справді реальні рідини відмінні від ідеальних, це бачимо з таких фактів: 1) беремо скляну паличку, опускаємо її у воду, а потім виймаємо, на кінці палички ми побачимо краплю води; ця крапля утворилась через те, що сила зчіпляння води й скла більша за силу зчіпляння часток води; але крапля, очевидно, має певну вагу, і, значить, у площині перекрою, проведеній на якійсь висоті краплі, діють, з одного боку, сили, що розтягають краплю (вага нижньої частини), а, з другого боку, сили зчіпляння часток краплі або сили опору розтягові, і ці сили за існування краплі між собою зрівноважуються. Відси висновок: вода здатна чинити опір розтягові. Довершеніші досліди Гейнемана (Heinemann) навіть установили, що вода чинить опір розтягові, рівний при 12° R: 3,7 *кг/м*^{2} або 0,00037 *кг/см*^{2}; 2) беремо скляну посудину, наливаємо в неї води й починаємо цю посудину обертати. Що ми бачимо? — Шари води, що дотикаються до стінок посудини, починають так само обертатися; очевидно, сила зчіпляння між частками води й стінками посудини така велика, що останні втягають за собою в рух і ближчі шари води; але виявляється, що й дальші шари поволі починають обертатися, тоб-то між різними шарами води діють сили, що, з одного боку, тягнуть за собою сусідні, спочатку нерухомі шари, а, з другого боку, затримують шари, що швидше обертаються й ближче лежать до стінок; відси новий висновок: **вода здатна чинити опір силам зсувним або дотичним**, а Гейнеман знайшов, що вода здатна чинити опір зсувним силам при тій самій температурі 12° R — опір, що дорівнює 2,63 *кг/м²*, або 0,000263 *кг/см²*; 3) нарешті, досліди показали, що вода здатна і стискуватись, і її об'ємний коефіцієнт стиску можна показати залежно від тиску в такому вигляді *):

Таблиця 1

Тиск (p) (в атмосферах)	Об'ємний коефіцієнт стиску — β	
	0° C	20° C
1—25	0,0000525	0,0000491
1—500	0,0000475	0,0000434
500—1000	0,0000416	0,0000386
1000—1500	0,0000358	0,0000338
1500—2000	0,0000324	0,0000307
2000—2500	0,0000292	0,0000278
2500—3000	0,0000261	0,0000257

значить, об'єм $V = V_0\,(1 - \beta p)$.

Таким робом, реальні рідини відрізняються від ідеальних рідин, але в той самий час ми констатуємо, що властивості чинити опір силам розтяжним та зсувним дуже слабо виявлені і, навпаки, опоровість стискові надзвичайно велика. Це призвело до того, що в гідравліці заведено розглядати взагалі ідеальні рідини і здобуті результати виправляти через коефіцієнти, що їх знаходять з дослідів, при тому, звичайно, залежно від роду рідин, їхнього стану й умов течії, коефіцієнти ці змінятимуться; проте, в деяких специяльних питаннях доводиться безпосередньо розглядати реальні рідини.

З усього попереднього для ідеальних рідин можна зробити такий висновок. Нехай маємо якусь масу рідини, що перебуває в рівновазі під діянням прикладених до неї сил (рис. 1).

*) Акад. А. Ф. Иоффе. Лекции по молекулярной физике. Петроград. 1923, стор. 202.

Поведімо в думці січну площину Z, що поділяє масу, яку ми взяли, на дві частини: I і II. А що площину Z поведено в думці, то, очевидно, в стані маси рідини порушення не буде. Коли тепер частину I відкинути, то, щоб не порушився стан II частини, ми повинні на заміну частини I припустити існування на січній площині якихось сил одміни P для кожної площинки $\Delta\omega$. Цю силу P, яку ми припускаємо спочатку скерованою від частини II, ми можемо розкласти на дотичну (K) і нормальну (N). Але рідина (ідеальна) не здатна чинити опір силам розтяжним та зсувним; отже, коли ми хочемо, щоб частина II залишилась у рівновазі, як і раніш, існування таких сил, як N і K, ми повинні вважати за неможливе. Колиб ми припустили замість сили P силу P', то, розкладаючи останню на K' і N', прийшли б до аналогічного висновку про неможливість існування й такої сили, тому що складова порушила б рівновагу. Очевидно, ми дійдемо висновку, що єдино можливий напрям сили в середині плинного тіла— це є нормальний до тієї поверхні, на яку розглядаємо вплив такої сили, до того ця сила повинна бути скерована по внутрішній нормалі, тоб-то бути за тиснення. Цим плинні тіла й відмінні від твердих тіл, в яких унутрішня сила може бути скерована в першому-ліпшому напрямі й бути першого-ліпшого знаку.

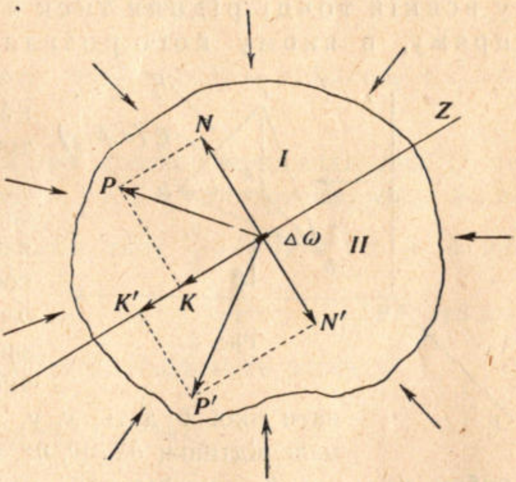

Рис. 1

Величину вищезгаданої внутрішньої сили визначається відношенням $\frac{P}{\Delta\omega}$, але, щоб виявити її напруження, очевидно, треба увільнитись од величини площі. Коли ми будемо зменшувати площу $\Delta\omega$ безмежно і до того так, що точка прикладення сили P весь час залишається в середині цієї площі, то границя відношення $\frac{P}{\Delta\omega}$, за наближенням $\Delta\omega$ до нуля, і виображатиме напруження, або те, що називають гідростатичним тиском (p) у точці прикладення сили; з зазначеного виходить: $\lim\limits_{\Delta\omega=0} \frac{P}{\Delta\omega}=p$, відки $\frac{P}{\Delta\omega}=p+\varepsilon$, де ε — безконечно мала величина, яка переходить у нуль при $\Delta\omega=0$, або $P=p\Delta\omega=\varepsilon\Delta\omega$; а що площа $\Delta\omega$ дуже мала, то з точністю до безконечно малих величин не вищого ряду, ніж $\Delta\omega$, можна вважати, що $P=p\Delta\omega$, де p є тиск у першій-ліпшій точці площинки.

Новий висновок попередніх властивостей рідин є такий: у всякій точці рідини тиск не залежить од напряму, в якому його розглядається, отже, залежить тільки від координат цієї точки, тоб-то $p=f(x, y, z)$.

Рис. 2

Щоб довести цю засаду, візьмімо масу рідини, яка є в рівновазі, і уявімо собі в ній осі координат $oxyz$ (рис. 2). В просторі, зайнятому рідиною, від якоїсь точки k, координати якої будуть x, y, z, поведімо безконечно малі відтинки δx, δy, δz, через утворення таким робом точки a, b, c уявімо собі площину; тоді виділений у думці об'єм $kabc$ буде тетраедр, і як цей тетраедр виділено в рідині, що є в рівновазі, то й сам він буде в рівновазі, не зважаючи на те, що на нього, очевидно, діють сили нормальні до граней і об'ємні сили; назовімо сили, нормальні до граней kbc, kac, kab, відповідно p_x, p_y, p_z, а силу нормальну (кути цієї нормали до осей координат назовімо відповідно α, β, γ) до грани abc $(\delta\omega)$ — p_n; сили ці будемо розуміти, як сили, що припадають на одиниці площі граней (з вищезгаданим наближенням); за рівноваги тетраедра, всі проєкції сил по осях координат, у тому числі і сил об'ємних, що їх визначено через $\frac{U}{6}\varrho\ \delta x \,.\, \delta y \,.\, \delta z$ (позначаючи через ϱ густину рідини, а через U пришвидшення від об'ємних сил, віднесене до одиниці маси), повинні зрівноважитись, тоб-то ми маємо право написати співвідношення:

$$\frac{1}{2} p_x \,\delta y\, \delta z - p_n\, \delta\omega \cos\alpha + \frac{X}{6} \varrho\, \delta x\, \delta y\, \delta z = $$
$$= \frac{1}{2} p_x\, \delta y\, \delta z - p_n\, \delta\omega \cos\alpha + \varepsilon_1''' = 0$$

$$\frac{1}{2} p_y \,\delta x\, \delta z - p_n\, \delta\omega \cos\beta + \frac{Y}{6} \varrho\, \delta x\, \delta y\, \delta z = $$
$$= \frac{1}{2} p_y\, \delta x\, \delta z - p_n\, \delta\omega \cos\beta + \varepsilon_2''' = 0$$

$$\frac{1}{2} p_z \,\delta x\, \delta y - p_n\, \delta\omega \cos\gamma + \frac{Z}{6} \varrho\, \delta x\, \delta y\, \delta z = $$
$$= \frac{1}{2} p_z\, \delta x\, \delta y - p_n\, \delta\omega \cos\gamma + \varepsilon_3''' = 0,$$

де через X, Y, Z означено проекції пришвидшення U по осях координат, а через ε_1''', ε_2''', ε_3''' — безконечно малі величини третього ряду малости типу $\frac{X}{6} \varrho\, \delta x\, \delta y\, \delta z$ і т. и.; а що $\delta\omega \cos\alpha = \frac{1}{2}\, \delta y\, \delta z$, $\delta\omega \cos\beta = \frac{1}{2}\, \delta x\, \delta z$, $\delta\omega \cos\gamma = \frac{1}{2} \delta x\, \delta y$, то попередні співвідношення такого набирають вигляду:

$$p_x - p_n + \varepsilon_1' = 0,$$
$$p_y - p_n + \varepsilon_2' = 0,$$
$$p_z - p_n + \varepsilon_3' = 0,$$

де ε_1', ε_2', ε_3' безконечно малі величини першого ряду малости (типу $\frac{X}{3} \varrho\, \delta x$ і т. и.), що наближаються до нуля в міру зменшення δx, δy, δz і в границі переходять у нуль. Коли тепер справді зменшувати рівномірно δx, δy, δz, то площинка abc наближатиметься до точки k і в границі з нею зіллється, а тоді

$$p_x = p_y = p_z = p_n.$$

А що відтинки δx, δy, δz вибрано цілком довільно, то за всяких инших вартостей їх матимемо нове орієнтування площинки *abc* і новий напрям та величину p_n, наприклад: p_n', p_n'', p_n''', ..., але, розмірковуючи за попереднім, в результаті матимемо, що в границі

$$p_x = p_y = p_z = p_n' = p_n'' = p_n''' = \ldots,$$

тоб-то, справді, величина тиску в даній точці не залежить від напряму і може бути лише за функцію координат точки прикладання:

$$p = f(x, y, z).$$

РОЗДІЛ I

РІВНОВАГА ПЛИННИХ ТІЛ

§ 1. Рівновага плинного тіла

Виділімо в рідині, яка перебуває в рівновазі, елементарний об'єм *klmntsru* (рис. 3) у вигляді паралелепіпеда і знайдімо умови його рівноваги. За попереднім тиснення в точці (k) однакові у всіх напрямах, а тому через малість граней паралелепіпеда, з точністю до безконечно малих величин другого ряду малости можна вважати, що тиски на грані km, kr, kt однакові й дорівнюють p; на протилежних гранях тиски, очевидно, будуть:

$$p+\frac{\partial p}{\partial x}\delta x+\cdots,\quad p+\frac{\partial p}{\partial y}\delta y+\cdots,\quad p+\frac{\partial p}{\partial z}\delta z+\cdots,$$

а тому ріжниці тиснень уздовж осей координат визначається відповідно через:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z+\cdots,\quad -\frac{\partial p}{\partial y}\delta x\delta y\delta z+\cdots,\quad -\frac{\partial p}{\partial z}\delta x\delta y\delta z+\cdots,$$

Взявши проекції сил по осях координат, у тому числі і сил об'ємних, матимемо умови рівноваги:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z+\varrho X\delta x\delta y\delta z+\varepsilon_1^{IV}=0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}\delta y\delta x\delta z+\varrho Y\delta x\delta y\delta z+\varepsilon_2^{IV}=0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}\delta z\delta x\delta y+\varrho Z\delta x\delta y\delta z+\varepsilon_3^{IV}=0$$

де через ε_1^{IV}, ε_2^{IV}, ε_3^{IV} означено безконечно малі величини вище третього ряду малости; далі, поділивши здобуті співвідношення на $\delta x\delta y\delta z$, в границі для безконечно малого об'єму рідини, матимемо:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x}+\varrho X=0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y}+\varrho Y=0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z}+\varrho Z=0 \end{aligned}\right\} \text{ або } \left.\begin{aligned} \varrho X=\frac{\partial p}{\partial x} \\ \varrho Y=\frac{\partial p}{\partial y} \\ \varrho Z=\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\}; \qquad [1]$$

ці рівняння мають назву Ейлерових рівнянь гідростатики, бо їх уперше подав Ейлер іще 1755 р.

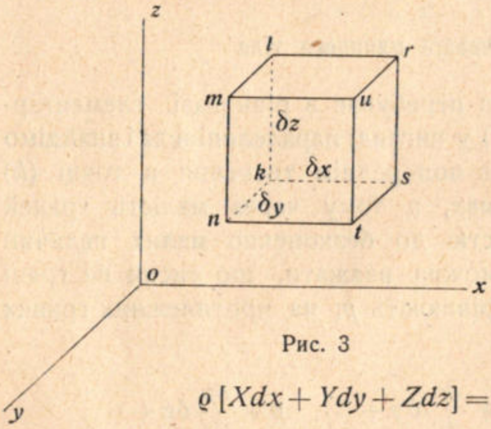

Рис. 3

Із знайдених вище трьох рівнянь можна добути одне, що цілком їх заступить; для цього множимо рівняння [1] відповідно на dx, dy, dz і добуті вирази додаємо один до одного;

$$\varrho\,[Xdx+Ydy+Zdz]=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz,$$

але тому, що друга частина останнього рівняння є не инше що, як цілковитий диференціял dp, то маємо:

$$dp=\varrho\,[Xdx+Ydy+Zdz]. \qquad [2]$$

Легко зрозуміти фізичне значення цього рівняння; для цього уявімо собі, що частка рідини з масою, яка дорівнює одиниці, переміщується під діянням зовнішньої сили F із стану M_1 у стан M_2 (рис. 4), при чому переміщення $M_1=M_2$ (ds) таке мале, що коли координати M_1 є x, y, z, то координати M_2 будуть $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$;

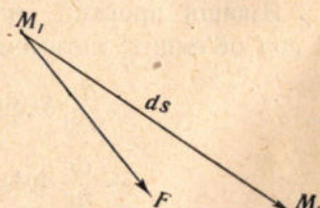

Рис. 4

у такому випадку маємо наочні співвідношення: $dx=ds\cos\alpha$, $dy=ds\cos\beta$, $dz=ds\cos\gamma$, коли кути, що їх утворює лінія M_1M_2 з осями координат, назвемо α, β, γ; якщо припустимо, що $X=F\cos\alpha'$, $Y=F\cos\beta'$, $Z=F\cos\gamma'$, де α', β', γ' є кути, що їх складає напрям сили F з осями координат, — то, підставивши знайдені вартості dx, dy, dz, X, Y, Z в рівняння [2], матимемо:

$$dp = \varrho ds F [\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'],$$

а що вираз у дужках є не инше що, як $\cos\widehat{Fds}$, то остаточно

$$dp = \varrho ds F \cos\widehat{Fds}; \qquad [3]$$

це означає, що приріст тиску за переміщення в рідині з одного стану до другого означаєтьсч через добуток роботи зовнішньої об'ємної сили на цьому шляху на густину рідини.

Співвідношення [2] дає змогу визначити за даних зовнішніх сил самий тиск, для цього треба тільки цей вираз проінтегрувати:

$$p = \int \varrho\, [Xdx + Ydy + Zdz] + C, \qquad [4]$$

де довільну сталу визначається з даних вартостей тиску в певних точках (особливі рівняння).

Коли в рідині є поверхні, в яких тиск має стале значення, то, по-перше, такі поверхні називають поверхнями рівного тиску, або поверхнями рівня, а, по-друге, рівняння таких поверхонь матимуть такий вигляд:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \qquad [5]$$

тому що $p = \text{const}$, отже $dp = 0$, $\varrho \neq 0$.

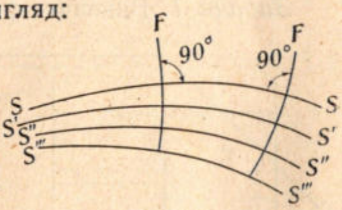

Рис. 5

Поверхні рівного тиску згідно з співвідношенням [3] можна визначити рівнянням виду:

$$Fds \,.\, \cos\widehat{Fds} = 0,$$

яке, коли уявити перекрій поверхні рівного тиску площиною рисунка кривої ss (рис. 5), говорить, що зовнішня об'ємна сила F є нормальна до кожного елементарного переміщення (ds) від точки прикладання цієї сили по поверхні, що її розглядається, тоб-то нормальна до поверхні рівного тиску. Далі, із співвідношення [3] виходить, що

$$ds = \frac{dp}{\varrho F \cos\widehat{Fds}},$$

тому, коли переміщувати з однієї поверхні рівня (ss) на иншу безконечно близьку поверхню рівня ($s's'$) в напрямі діяння сили F, то $\cos\widehat{Fds}$ дорівнюватиме ± 1, а $dp \neq 0$, отже, ніколи не може бути

$$ds = 0,$$

тоб-то, иншими словами, поверхні рівного тиснення (звичайно, різного для кожної поверхні) ніколи не можуть між собою перетинатися.

Переміщуючись у плинній масі в напрямі зовнішньої об'ємної сили або вислідної таких сил, ми обведемо в загальному випадку криву, нормальну до всіх, що трапляються на шляху, поверхонь рівного тиску, і таку криву, очевидно, можна означити через рівнання:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}. \qquad [6]$$

До цієї кривої вислідна сила буде дотична у всіх її точках; тому її називають силовою лінією.

§ 2. Приклади на визначення поверхонь рівного тиску

Задача 1. Визначте форму вільної поверхні рідини, наприклад, води, що на неї впливає тільки сила ваги; припускається, що рідина має невеликий обшир у горизонтальному напрямі.

Рис. 6

Розвязка. За згаданих умов, силу ваги можна вважати за скеровану однаково по всій поверхні по вертикалі вниз; тому, вибираючи осі координат так, що вісь z скеровано згори вниз (рис. 6), а осі x і y лежать у горизонтальній площині,— матимемо для складових по осях координат зовнішньої сили вартості:

$$X = Y = 0, \quad Z = g.$$

Рівнання [5] набере вигляду:

$$gdz = 0,$$

відки, інтегруючи, матимемо:

$$gz = C,$$

тоб-то поверхні рівного тиску — горизонтальні площини. Коли початок координат вибрано на вільній поверхні рідини, то

$$C = 0,$$

і, отже, рівнання вільної площі буде

$$z = 0,$$

тоб-то горизонтальна площина, що проходить через початок координат.

Задача 2. В посудину циліндричної форми радіюсу R і заввишки H налито води до половини; посудина обертається з кутовою швидкістю ω; визначте форму вільної поверхні, а так само й потрібну швидкість обертання, за якої вода почне переливатися через вінця посудини.

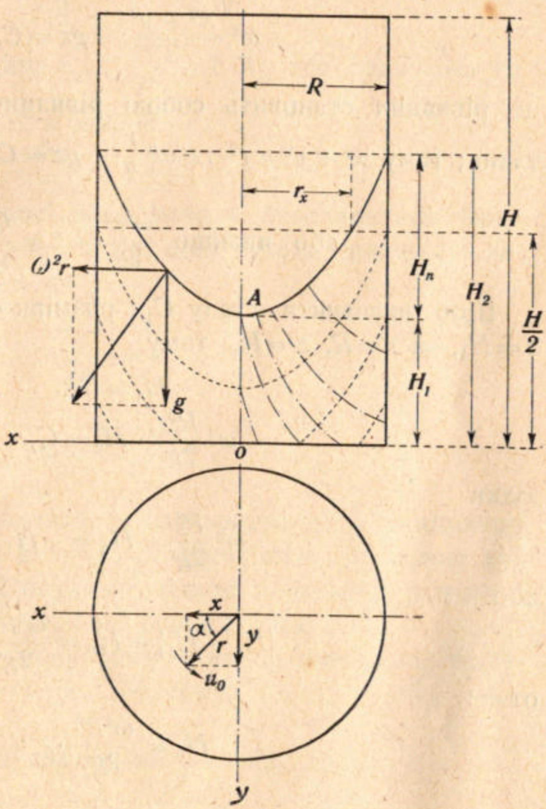

Рис. 7

Розвязка. Очевидно, підчас обертання посудини (рис. 7), через зчіпляння часток води з її стінками, рідина почне обертатися з тією самою кутовою швидкістю, що й посудина. На частки рідини з масою, що дорівнює одиниці, впливатиме в кожному місці відосередкова сила $\frac{U_0^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r$ і сила ваги $(-g)$; отже, складові вислідної сили F будуть:

$$X = \omega^2 r \cos \alpha = \omega^2 r \frac{x}{r} = \omega^2 x,$$

$$Y = \omega^2 r \sin \alpha = \omega^2 r \frac{y}{r} = \omega^2 y,$$

$$Z = -g.$$

Тому рівнання [5] набере вигляду:

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0,$$

а, інтегруючи, матимемо:

$$\omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} - gz = C,$$

це рівнання становить собою рівнання параболоїду обертання; тому $x^2 + y^2 = r^2$ та $\omega^2 \frac{r^2}{2} - gz = C$,

або инакше $\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z = \frac{C}{g} = C_1$.

Щоб визначити сталу C_1, розмірковуємо так: за $r = 0$, $z = H_1$, за $r = R$, $z = H_2$; тому

$$-H_1 = C_1;$$

$$\omega^2 \frac{R^2}{2g} - H_2 = C_1,$$

відки

$$\omega^2 \frac{R^2}{2g} - H_2 = -H_1$$

або

$$[H_2 - H_1] = H_n = \frac{\omega^2 R^2}{2g},$$

отже:

$$H_n = \frac{\omega^2 R^2}{2g}.$$

Коли припустити, що площина xy проходить через вершок параболоїду (точка A), то рівнання останнього набере простого вигляду:

$$\frac{\omega^2 R^2}{2g} = z.$$

Радіюс r_x, за якого поверхня параболоїду перетинає площину $z=\frac{H_n}{2}$, очевидно, визначиться із співвідношення:

$$\frac{\omega^2 r_x^2}{g}=H_n,$$

і таким робом знаходимо:

$$r_x^2=\frac{R^2}{2}.$$

А що далі з властивостей параболоїду виходить, що

$$\frac{\pi R^2 H_n}{2}-\frac{\pi r_x^2 h_1}{2}=\frac{\pi (R^2+r_x^2)\,h_2}{2},$$

то відси після скорочення $h_2=\left(\frac{R^2}{r_x^2}-1\right)h_1$, або, зважаючи на знайдену вище залежність між R і r_x,

$$h_2=h_1.$$

А тепер для того, щоб вода почала переливатися через вінце посудини, очевидно, треба, щоб кутова швидкість задовольняла співвідношення:

$$\frac{\omega_x^2 R^2}{2g}=H,$$

відки

$$\omega_x=\frac{\sqrt{2gH}}{R}.$$

Задача 3. Рідина, налита в горизонтальну циліндричну посудину, обертається довкола оси останньої із сталою кутовою швидкістю ω. Посудину цілком заповнено рідиною. Треба знайти форму поверхонь рівного тиску.

Розвязка. На поодиноку масу рідини, очевидно, впливають сили $(-g)$ і $(\omega^2 r)$ (рис. 8), тому:

$$Y=r\omega^2\cos\alpha=r\omega^2\frac{y}{r}=\omega^2 y,$$

$$Z=-g+r\omega^2\sin\alpha=-g+r\omega^2\frac{z}{r}=-g+\omega^2 z.$$

Таким робом, поверхні рівного тиску мають диференціяльне рівнання:

$$\omega^2 y\,dy+(-g+\omega^2 z)\,dz=0,$$

з якого, після інтегрування і зведення, добуваємо кінцеве рівнання:

$$\omega^2 (y^2+z^2) - 2gz = C,$$

а що

$$y^2 + z^2 = r^2,$$

то

$$\omega^2 r^2 - 2gz = C;$$

останнє рівнання становить собою не инше що, як рівнання тіл, що їхній центр переміщено по осі z-ів до точки (A), що є на віддалі $\frac{g}{\omega^2}$ від початку координат O; це бачимо так само з того, що, на підставі подібности трикутників abP і aOA, виходить

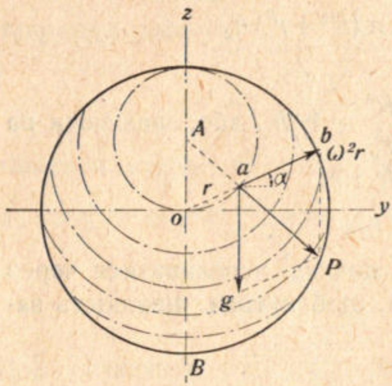

Рис. 8

$$\frac{\overline{AO}}{bP} = \frac{\overline{Oa}}{ab},$$

відки

$$\overline{AO} = \frac{bP \,.\, Oa}{ab} = \frac{gr}{\omega^2 r} = \frac{g}{\omega^2}.$$

В міру збільшення кутової швидкости, очевидно, центр A наближається до центру O, з яким він і зливається в границі за $\omega = \infty$.

В останньому випадку тиски розподіляються цілком рівномірно по концентричних довкола оси (O) циліндрах (наприклад, у відосередкових смоках, що дуже швидко обертаються). В міру зменшення колової швидкости, концентричне розміщення кол рівних тисків довкола оси O порушується, вісь (A) підноситься що далі, то вище, і тиск по осі z розподіляється що далі, то несиметричніш до оси (O); від оси A тиск збільшується до твірної B по параболі, що бачимо з виразу тиску:

$$\frac{p}{\delta} = \frac{p_0}{\delta} + \frac{\omega^2 r^2}{2g} - z,$$

що маємо після підставлення вартостей проекцій сил і інтегрування диференціяльного рівнання [2].

§ 3. Визначення тиску в рідині

Припустімо, що ми маємо якусь кількість рідини, наприклад, води, що міститься в посудині, водоймі і т. и.; на рідину (воду) впливає тільки сила ваги. Візьмімо осі координат так, що їхній початок є на вільній поверхні, осі x і y розміщено в горизонтальній площині, а вісь z скеровано згори вниз (рис. 9); тоді

$$X = O = Y,$$
$$Z = g,$$

отже, рівняння [2] набере вигляду:

$$dp = \varrho g dz. \qquad [7]$$

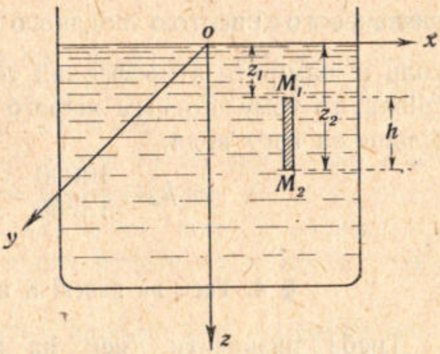

Рис. 9

Припустімо, що ми хочемо визначити ріжницю тиску у двох точках M_1 і M_2; тоді, інтегруючи вираз [7] у вказаних границях, знайдемо:

$$p_2 - p_1 = \varrho g (z_2 - z_1),$$

або

$$p_2 = p_1 + \varrho g (z_2 - z_1) = p_1 + \varrho g h = p_1 + \delta h.$$

Таким робом, тиск в точці M_2 дорівнюватиме тискові в точці M_1 плюс вага водяного циліндрику, в якого в основі є площа, що дорівнює одиниці, а висота його дорівнює вертикальному віддаленню між даними точками.

Коли точка M_1 буде на поверхні, то $p_1 = p_a$ (атмосферному тискові), і

$$p_2 = p_a + \delta h, \qquad [8]$$

де вже буде глибина затоплення точки M_2 під вільною поверхнею. Коли розглядатимемо тільки відносний тиск води, то для такого знайдемо дуже простий вираз:

$$p = p_2 - p_a = \delta h \left[\frac{кг}{м^2}\right], \qquad [9]$$

відки, навпаки:

$$h = \frac{p}{\delta} \left[\frac{кг}{м^2} \cdot \frac{м^3}{кг} = м\right].$$

Тиск заведено визначати, як указано, в *кг*, глибини h — в *м*, а що для води можна взяти (строго кажучи, тільки за 4°С) $\delta = 1000\left[\frac{кг}{м^3}\right]$, то, знавши ще, що одна атм. (технічна) $\cong 1\frac{кг}{см^2}$, або $10\,000\frac{кг}{м^2}$, для атмосферного тиску, визначеного висотою водяного стовпа, $h_a = \frac{10000}{1000} = 10$ *м*; коли ж виміряти атмосферний тиск висотою стовпа живого срібла, то тому що вага живого срібла в 13,6 (13,596) разів більша за вагу води,

$$h_a = \frac{10000}{13600} = 0{,}735 \text{ м}.$$

§ 4. Тиск на плоскі й криволінійні стінки

Треба визначити тиск на плоску стінку обмежених розмірів і центр прикладання тиску. Хай ця стінка (рис. 10) площею ω [$м^2$] як завгодно розміщена у воді; для того, щоб орієнтувати положення цієї стінки, продовжмо в думці її до перетину з вільною поверхнею води й лінію перетину візьмімо за вісь x-ів. Припустімо спочатку, що вісь y-ів розміщена у вільній поверхні (вісь y'), а вісь z-ів скеруймо згори вниз. Виділімо елементарну площинку $d\omega$ і тиск на неї позначмо через dP; тоді за вищенаведеним цей тиск буде нормальний до площинки $d\omega$, і коли глибина затоплення елементарної площинки дорівнюватиме z, то

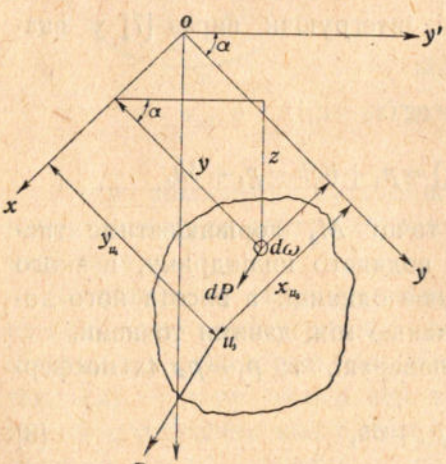

Рис. 10

$$dP = \delta z d\omega.$$

Всі такі елементарні тиски на инші елементарні площинки будуть паралельні з тиском dP, з ним буде паралельний і вислідний тиск P, величину якого знайдемо, коли просумуємо елементарні тиски:

$$P = \delta \int_{\omega} z d\omega = \delta \omega z_c, \tag{10}$$

тоб-то **тиск на плоску стінку визначається вагою циліндру води, в якому за основу править площинка (ω) стінки, а за висоту глибина (z_c) затоплення центру ваги стінки, або ще: дорівнює добуткові площі стінки на тиск у центрі ваги стінки.**

Треба звернути так само увагу на те, що, згідно з виразом [10], тиск залишається незмінний, хоч як би ми обертали стінку, тільки б глибина центру ваги її залишалась незмінна, і коли тільки за цього обертання частина стінки не вийде за границі води.

Щоб визначити центр тиску, зробімо так: передусім вісь y-ів повернімо, залишаючи її нормальною до оси x-ів, доки вона зіллється з площиною стінки, і хай кут обертання буде α. Тоді

$$z = y \sin \alpha$$

отже,

$$dP = \delta y \sin \alpha d\omega, \quad \text{а} \quad P = \delta \sin \alpha \int_{\omega} y d\omega.$$

Припустімо далі, що завдання розвязано, і хай точка прикладення вислідної P є точка ($ц$). Відомо, що момент вислідної сили відносно оси дорівнює сумі моментів складових сил відносно тієї самої оси, а тому

$$P x_ц = \int_{\omega} \delta x y \sin \alpha d\omega,$$

$$P y_ц = \int_{\omega} \delta y^2 \sin \alpha d\omega,$$

відки

$$\left.\begin{aligned} y_ц &= \frac{\delta \sin \alpha \int_{\omega} y^2 d\omega}{P} = \frac{\delta \sin \alpha \int_{\omega} y^2 d\omega}{\delta \sin \alpha \int_{\omega} y d\omega} = \frac{\int_{\omega} y^2 d\omega}{\int_{\omega} y d\omega} \\ x_ц &= \frac{\delta \sin \alpha \int_{\omega} x y d\omega}{P} = \frac{\delta \sin \alpha \int_{\omega} x y d\omega}{\delta \sin \alpha \int_{\omega} y d\omega} = \frac{\int_{\omega} x y d\omega}{\int_{\omega} y d\omega} \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

а що $\int\limits_{\omega} y^2 d\omega$ є момент інерції (J_x) стінки відносно оси x-ів $\int\limits_{\omega} y d\omega$ — статичний момент (Θ_x) стінки відносно тієї самої оси, і $\int\limits_{\omega} xy d\omega$ — відосередковий момент (Θ_{xy}), то можна попередні вирази для координат точки прикладення вислідної сили подати так:

$$\left.\begin{aligned} y_ц &= \frac{J_x}{\Theta_x} \\ x_ц &= \frac{\Theta_{xy}}{\Theta_x} \end{aligned}\right\}; \qquad [12]$$

нарешті, як: $J_x = J_c + \omega y_c^2$, а $\Theta_x = \omega y_c$, то

$$y_ц = \frac{J_x}{\Theta_x} = \frac{J_c + \omega y_c^2}{\omega y_c} = y_c + \frac{\varrho^2}{y_c},$$

де ϱ радіюс інерції, а J_c момент інерції стінки відносно оси, що проходить через центр ваги стінки паралельно з віссю x-ів.

Друге з рівнань [11] або [12] показує, що вислідна сила тиску завжди лежить у площині симетрії, нормальної до площини стінки, і яка проходить через центр ваги її.

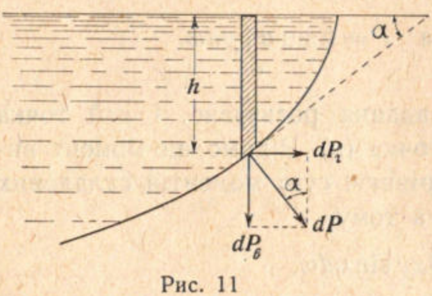

Рис. 11

Коли тепер ми маємо криволінійну стінку, то не важко показати, що відшукання величини тиску й центру прикладення вислідної легко звести до попереднього випадку плоскої стінки. Справді, на криволінійній стінці (рис. 11) виділімо елементарну площинку $d\omega$ і позначмо тиск (нормальний) на неї через dP; для орієнтації площинки проводимо площину, дотичну до площинки, і хай вона перетинає продовження вільної поверхні води в посудині під кутом α; розкладімо тиск dP, величина якого, очевидно, є $\delta h d\omega$, на дві складові: горизонтальну ($dP_г$) і вертикальну ($dP_в$); за рисунком цілком ясно, що:

$$dP_г = dP \sin\alpha = \delta h \sin\alpha d\omega,$$

$$dP_в = dP \cos\alpha = \delta h \cos\alpha d\omega;$$

а як далі так само очевидно, що

$$d\omega \sin \alpha = d\omega_в,$$
$$d\omega \cos \alpha = d\omega_г,$$

то попереднє співвідношення можна уявити в такому вигляді:

$$\left. \begin{array}{l} dP_г = \delta h d\omega_в \\ dP_в = \delta h d\omega_г \end{array} \right\}. \qquad [13]$$

Останні співвідношення показують, що тиск по горизонталі на елементарну площинку дорівнює тискові на проекції цієї площинки на вертикальну площину, тиск же по вертикалі дорівнює вазі стовпчика рідини, в якій за основу править проекція елементарної площинки на горизонтальну площину, а за висоту — глибина затоплення цієї площинки під вільною поверхнею.

Цілком зрозуміло далі, що

$$\left. \begin{array}{l} P_г = \delta \int\limits_\omega h d\omega_в \\ P_в = \delta \int\limits_\omega h d\omega_г \end{array} \right\} \qquad [14]$$

й, нарешті, цілковитий тиск:

$$P = \sqrt{P_г^2 + P_в^2}.$$

Таким робом, горизонтальна складова тиску на криволінійну стінку дорівнює тискові на проекцію стінки на вертикальну площину, а вертикальна складова дорівнює вазі рідини, що є над криволінійною стінкою (між иншим, звідси виходить відомий парадокс Pascal'я), цілковитий же тиск дорівнює кореневі квадратовому із суми квадратів складових тисків.

Щоб відшукати центр прикладення тиску, користуємось знову з теореми про момент вислідної сили; маємо очевидні співвідношення:

$$\left. \begin{array}{l} P_г h_ц = \delta \int\limits_\omega h^2 d\omega_в \\ P_в x_ц = \delta \int\limits_\omega h x d\omega_г \end{array} \right\}, \qquad [15]$$

відси

$$\left.\begin{aligned} h_ц &= \frac{\int\limits_\omega h^2 d\omega_в}{\int\limits_\omega h d\omega_в} \\ x_ц &= \frac{\int\limits_\omega hx d\omega_г}{\int\limits_\omega h d\omega_г} \end{aligned}\right\}, \qquad [16]$$

і, отже, глибину центру прикладення тиску визначають через відношення моменту інерції проєкції стінки на вертикальну площину що до оси, яка лежить у вільній поверхні рідини (нормально до рисунку), до статичного моменту цієї проєкції відносно тієї самої оси; з другого співвідношення [16] бачимо так само, що точка прикладення тиску лежить у площині симетрії стінки, яка проходить паралельно з рисунком через центр ваги стінки, коли така площина симетрії взагалі є, і в ній лежить вісь y-ів.

§ 5. Приклади на визначення тиску води на стінки

Задача 4. Визначте відношення ширини (B) стінки, що підпирає воду, до її висоти (H) за умови, щоб стінка не перевернулась од тиску води, так само знайдіть це відношення за подвійного запасу стійкости (рис. 12).

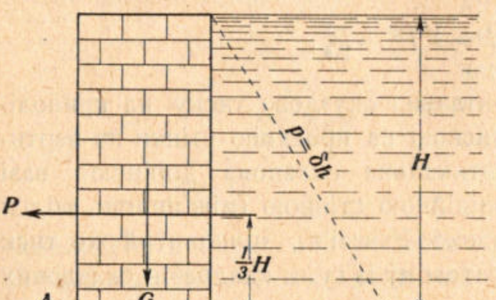

Рис. 12

Розвязка. Розвязуючи запропоновану задачу так само, як і инші аналогічні, можна вживати геометричної інтерпретації розподілу тиснення, що иноді значно спрощує саме розвязання.

Справді, на підставі попереднього відомо, що тиснення визначається через співвідношення $p = \delta h$; отже, розподіл тиснення по висоті стінки можна визначити простою лінією, похилою до вертикали під кутом, що його тангенс є δ; тому вислідна тиснення на одиницю довжини стінки визначиться так:

$$P = \frac{\delta H \,.\, H}{2} = \frac{\delta H^2}{2},$$

де всі позначення вже відомі. Прикладено буде цю вислідну на одній третині висоти (H) від нижньої границі стінки, тоб-то момент, що перевертає стінку коло точки A, буде:

$$M_n = P \frac{1}{3} H = \frac{\delta H^2}{2} \cdot \frac{H}{3} = \frac{\delta H^3}{6}.$$

Від перевертання затримує стінку її вага (G), яку, очевидно, називаючи вагу одного $м^3$ мурування стінки через δ_c, можна визначити (на одиниці довжини) через $\delta_c BH$; тоді момент, що затримує від перевертання, визначиться так:

$$M_з = \delta_c BH \frac{B}{2} = \delta_c H \frac{B^2}{2};$$

не заводячи запасу стійкости, умова неперевертання стінки, очевидно, буде така:

$$M_з \geqslant M_n,$$

або

$$\delta_c \frac{HB^2}{2} \geqslant \frac{\delta H^3}{6},$$

відки

$$\delta_c B^2 \geqslant \frac{\delta H^2}{3},$$

або

$$\frac{B}{H} \geqslant \sqrt{\frac{\delta}{3\delta_c}}.$$

За подвійного запасу стійкости матимемо, очевидно, співвідношення:

$$M_з \geqslant 2M_n,$$

або

$$\delta_c \frac{HB^2}{2} \geqslant \frac{\delta H^3}{3},$$

відки

$$\frac{B}{H} \geqslant \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\delta}{\delta_c}}.$$

В останньому випадку для об'єму мурування на 1 подовжинному метрі стінки матимемо вираз:

$$V = BH \cong H^2 \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\delta}{\delta_c}}.$$

Задача 5. Визначте для виображеної на додаваному рисункові (рис. 13) стінки відношення основи (B) до висоти (H) за умови, щоб стінка не перевернулася від тиску води, а так само знайдіть те саме відношення за подвійного запасу стійкости (форма стінки — рівнораменний трикутник).

Рис. 13

Розвязка. Що за теоремою: тиснення по горизонталі на яку завгодно стінку дорівнює тискові на проєкцію цієї стінки на вертикальну площину, розподіл тисків по висоті на дану стінку можна визначити знову законом прямої лінії, то

$$P = \frac{\delta H . H}{2} = \frac{\delta H^2}{2},$$

і момент, що перевертає стінку, буде:

$$M_n = \frac{\delta H^2}{2} \cdot \frac{H}{3} = \frac{\delta H^3}{6}.$$

Так сила, що затримує стінку від перевертання, визначиться як

$$G = \frac{BH}{2} \cdot \delta_c,$$

а момент, що затримує від перевертання:

$$M_з = G \cdot \frac{B}{2} = \frac{BH}{2} \delta_c \frac{B}{2} = \delta_c H \cdot \frac{B^2}{4} \cdot$$

Таким робом, умова стійкости стінки буде:

$$M_з \geqslant M_п,$$

або

$$\delta_c \frac{HB^2}{4} \geqslant \frac{\delta H^3}{6},$$

відки

$$\frac{B}{H} \geqslant \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\delta}{\delta_c}}.$$

За подвійного запасу стійкости маємо:

$$M_з \geqslant 2M_п,$$

або

$$\delta_c H \frac{B^2}{4} \geqslant \frac{\delta H^3}{3},$$

відки

$$\frac{B}{H} \geqslant \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\delta}{\delta_c}}.$$

Для об'єму мурування на 1 подовжинному метрі стінки, очевидно, матимемо вираз:

$$V = \frac{BH}{2} \cong \frac{H^2}{2} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\delta}{\delta_c}} \cong$$

$$\cong H^2 \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\delta}{\delta_c}},$$

таким робом для стінки простокутної треба буде мурування в

$$H^2 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\delta}{\delta_c}} : H^2 \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\delta}{\delta_c}} = \sqrt{2}$$

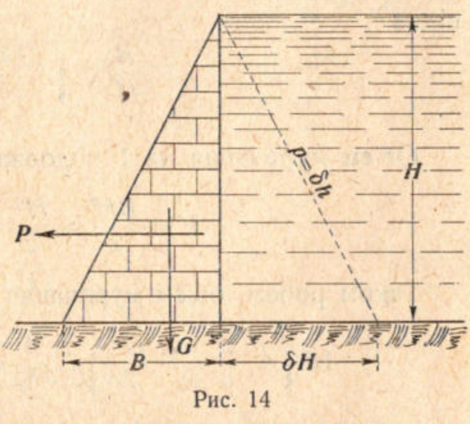

Рис. 14

разів більше, як до розглядуваної стінки.

Задача 6. Розвяжіть аналогічну до попередніх задачу для стінки, показаної на додаваному рисункові (рис. 14).

Розвязка. За попереднім маємо:

$$M_n = \frac{\delta H^2}{2}\frac{H}{3} = \frac{\delta H^3}{6};$$

$$M_з = G \cdot \frac{2}{3}B = \delta_c \frac{BH}{2}\frac{2}{3}B = \delta_c \frac{HB^2}{3},$$

а тепер умова стійкости:

$$M_з \geqslant M_n,$$

або

$$\delta_c \frac{HB^2}{3} \geqslant \frac{\delta H^3}{6},$$

отже,

$$\frac{B}{H} \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta_c}}.$$

За подвійного запасу стійкости маємо:

$$M_з \geqslant 2M_n,$$

або

$$\delta_c \frac{HB^2}{3} \geqslant 2\delta \frac{H^3}{6},$$

або

$$\delta_c HB^2 \geqslant \delta H^3,$$

відки

$$\frac{B}{H} \geqslant \sqrt{\frac{\delta}{\delta_c}}.$$

Об'єм мурування на 1 подовжинному метрі стінки буде:

$$V = \frac{BH}{2} \cong \frac{H^2}{2}\sqrt{\frac{\delta}{\delta_c}}.$$

Таким робом, об'єм мурування для стінки простокутної в

$$H^2\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\delta}{\delta_c}} : \frac{H^2}{2}\sqrt{\frac{\delta}{\delta_c}} = \sqrt{\frac{8}{3}} \cong \sqrt{2{,}67}$$

разів більше, як для стінки розглядуваної форми.

Задача 7. Визначте тиск й центр прикладення вислідної тиску на щит і розрахуйте стояки (AB), на які спирається щит за вказаних розмірів усієї споруди (рис. 15).

Розвязка. Очевидно, тиск P на щит визначиться так:

$$P=\frac{\delta H \,.\, H}{2}B=\frac{\delta H^2}{2}B,$$

де H є глибина води, а B — віддаль між осями стояків; як

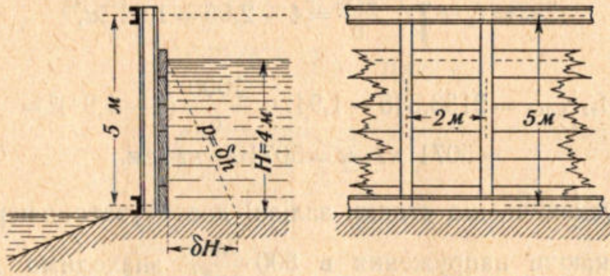

Рис. 15

підставити вказані розміри,

$$P=\frac{1000\,.\,4^2}{2}\,.\,2=1000\,.\,4\,.\,2\,.\,2\,.=16000\ кг.$$

Центр прикладення вислідної тиску міститиметься на віддалі від дна:

$$h_c=\frac{H}{3}=\frac{4}{3}\ м.$$

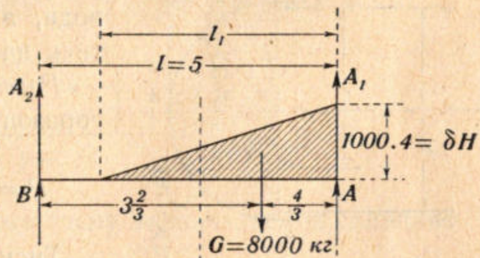

Рис. 16

Кожний із стояків (AB) навантажено згідно з доданим рисунком (рис. 16); тому

$$A_1+A_2=8000;$$

$$5A_1=8000\cdot\frac{11}{3},$$

відки

$$A_1=\frac{8000\,.\,11}{5\,.\,3}=5866{,}7\ кг,$$

отже,

$$A_2=2133{,}3\ кг.$$

Момент згину відносно перекрою (x) визначиться так:

$$M_{зг}=+A_2(l-x)-\frac{\delta(l_1-x)^3}{6},$$

відки умова найбільшого моменту буде:

$$\frac{dM_{зг}}{dx} = -A_2 + \frac{1}{2}\delta(l_1 - x_м)^2 = 0,$$

а тепер відси

$$x_м = l_1 - \sqrt{\frac{2A_2}{\delta}} = 4 - 2{,}06 = 1{,}94 \ м,$$

а тому

$$M_{зг\ макс} = 2133{,}3\,(5 - 1{,}94) - \frac{1000}{6}(4 - 1{,}94)^3 =$$

$$= 5071 \ кг\,.\,м = 507100 \ кг\,.\,см.$$

Припускаючи, що стояки залізні двотетуватого перекрою і припускаючи напруження в $800 \frac{кг}{см^2}$, знаходимо момент опору:

$$W = \frac{507100}{800} \cong 634 \ см^3,$$

якому моментові відповідає найближчий профіль № 32.

Задача 8. Визначте зусилля, що зрізає нюти (a) у шві кульового днища казана, повного води, а так само вертикальний тиск на це днище.

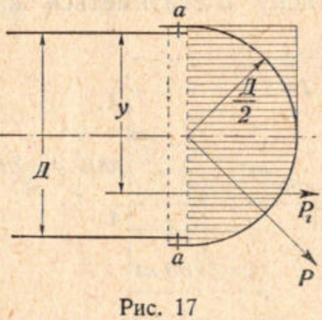

Рис. 17

Розвязка. Очевидно, тиск по горизонталі (рис. 17):

$$P_г = \delta\frac{\pi Д^2}{4}\cdot\frac{Д}{2} = \delta\,.\,\pi\,.\,\frac{Д^3}{8}.$$

Тиск по вертикалі на днище буде:

$$P_в = \delta\,.\,\frac{1}{24}\cdot\pi Д^3 + \delta\,\frac{\pi Д^2}{8}\,\frac{Д}{2} = \delta\pi Д^3\,\frac{5}{48}.$$

Цілковитий тиск:

$$P = \sqrt{P_г^2 + P_в^2} \cong \frac{1}{6}\,\delta\pi Д^3.$$

Центр прикладення тиску $P_г$ знайдемо із співвідношення:

$$y = \frac{J_x}{\Theta_x} = \frac{\frac{1}{64}\pi Д^4 + \frac{\pi Д^2}{4}\cdot\frac{Д^2}{4}}{\frac{\pi Д^2}{4}\cdot\frac{Д}{2}} = \frac{5}{8}Д.$$

Задача 9. Визначте, з яким натягом (T) треба тягти линву, прикріплену до нижньої окрайки закривки, що закриває відтулину в греблі, за вказаних розмірів (рис. 18).

Розвязка. Тиск на закривку буде:

$$P = \frac{\delta h_1 + \delta(h_1 + h)}{2} hl = \delta \frac{(2h_1 + h)}{2} hl =$$

$$= \frac{1000\,(6+1)}{2} 2 = 7000 \text{ кг.}$$

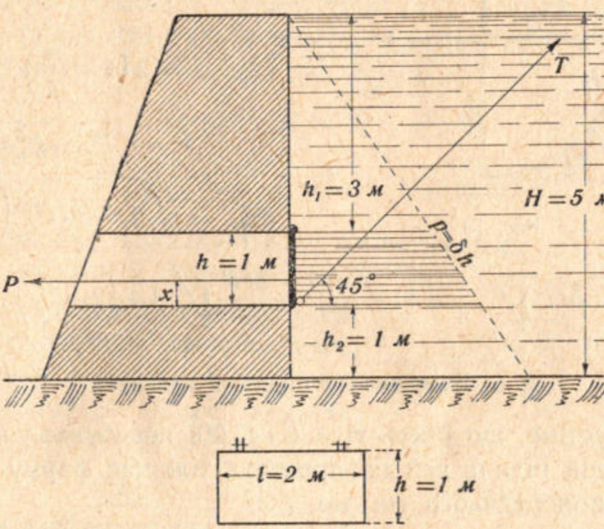

Рис. 18

Центр прикладення цього тиску визначиться із співвідношення:

$$x = \frac{\delta\,(h_1 + h) + 2\delta\, h_1}{\delta\,(h_1 + h) + \delta\, h_1} \cdot \frac{h}{3} = \frac{h}{3}\ \frac{3h_1 + h}{2h_1 + h} = \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{7} = \frac{10}{21} \text{ м.}$$

А тепер маємо таке очевидне співвідношення моментів:

$$P(h - x) \leqslant T \,.\, \cos 45° h,$$

відки

$$T \geqslant \frac{P(h-x)}{h \cos 45°} = \frac{7000 \cdot \frac{11}{21}}{1\,.\,0{,}707} = \frac{1000\,.\,11}{3\,.\,0{,}707} = 5186 \text{ кг.}$$

Задача 10. Визначте тиск на суглоби у квадрантній греблі (рис. 19).

Розвязка. Для метрового протягу греблі маємо:

$$P_г = \frac{\delta H \, . \, H}{2} = \frac{\delta H^2}{2},$$

$$P_в = \delta\left(H^2 - \frac{\pi H^2}{4}\right) = \delta H^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right),$$

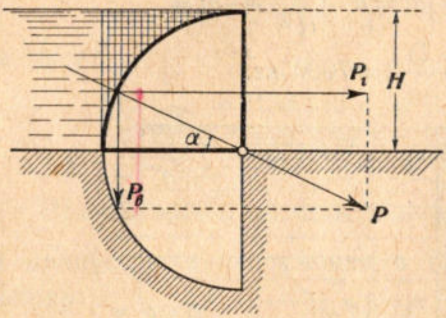

Рис. 19

відки

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_в}{P_г} = \frac{\delta H^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\delta H^2}{2}} =$$

$$= 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$P = \sqrt{P_г^2 + P_в^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\delta H^2}{2}\right)^2 + (\delta H^2)^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)^2} =$$

$$= \delta H^2 \sqrt{\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{\delta H^2}{2}\sqrt{1 + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

§ 6. Плавання та стійкість плавання

Припустімо, що якесь тіло (рис. 20) перебуває у воді або який инший рідині; хай для простоти тіло має форму кулі; на підставі попереднього ми можемо сказати, що, по-перше, тиски на це тіло по горизонталі зрівноважаться між собою, тому що ці тиски визначаться через тиск на проєкції даної кулі на вертикальну площину, тоб-то будуть тиски на площі кол, що їхні центри ваги лежатимуть на однаковій глибині під водою; по-друге, коли провести через центр кулі горизонтальну січну площину, то тиск на верхню частину визначиться вагою (P_1) води, що є над верхньою половиною кулі (об'єм *абвдга*, зарисований похило), а тиск на нижню частину— вагою (P_2) води в об'ємі *гдвеаг* (зарисований вертикально),

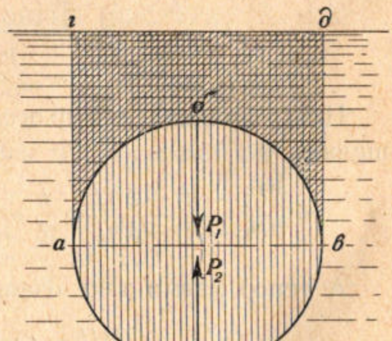

Рис. 20

при цьому цей тиск скеровано знизу вгору; очевидно, вислідний тиск дорівнюватиме вазі об'єму води, який становить ріжницю (*гдвеаг — абвдга*) попередніх об'ємів, тоб-то дорівнює вазі $(P_2 - P_1)$ об'єму води, рівного об'ємові даного тіла, і цей тиск скеровано знизу вгору (відомий принцип Архімедів).

Припустімо тепер, що власна вага тіла, затопленого у воду, є G; її, очевидно, можна подати у вигляді $G = \delta_m V$, де δ_m є вага одиниці об'єму тіла, а V — об'єм тіла; тоді тиск води на тіло буде у вигляді $P = \delta V$, де δ є вага одиниці об'єму води. Можливі три випадки:

$$P < G; \quad P = G; \quad P > G$$

відповідно:

$$\delta < \delta_m; \quad \delta = \delta_m; \quad \delta > \delta_m.$$

У першому випадку тіло затоплятиметься далі у воду — потопатиме, в другому випадку тіло залишиться на місці (рис. 21); в третьому випадку воно буде підноситись — виринатиме. Підносячись угору, тіло може частину свого об'єму вивести

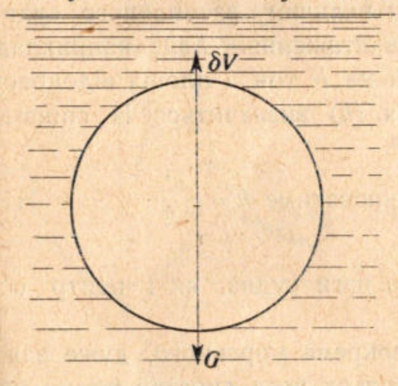

Рис. 21

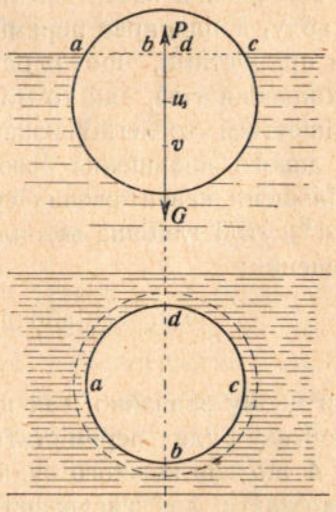

Рис. 22

з води і при цьому так, що об'єм затопленої частини V_n буде саме такий, що задовольнить співвідношення:

$$\delta_m \cdot V = \delta V_n;$$

тоді тіло почне плавати у воді (рис. 22). Крива лінія (*abcd*) перетину поверхні тіла з поверхнею води називається водокрес (ватерлінія), а перекрій тіла, що містить водокрес, зветься площиною плавання; квадратовий уміст плоскої фігури (*abcd*) в середині водокресу зветься площею водокресу. Сила $P=\delta V_n$ зветься силою водообсягу, об'єм V_n — водообсягом плавного тіла, а точка (V) прикладання сили водообсягу, що є центр витісненого об'єму води, — центром водообсягу. Лінія, що проходить нормально до площини плавання через центр ваги тіла і через центр водообсягу, має назву оси плавання.

Те саме тіло за затоплення в різні рідини, очевидно, матиме різні обсяги й різні водокреси, тому що, залежно від величини δ, глибина затоплення буде різна; наприклад, для річкової води беруть $\delta=1000$ *кг*, а для морської — 1025 *кг*; тому в морській воді тіло (судно) буде менш затоплене у воду, як у річковій (водокрес переміститься по судну вниз). З другого боку, за збільшення ваги тіла, наприклад, за збільшення навантаження судна, останнє затоплятиметься у воду, а водокрес переміщатиметься по судну вгору. Коли ми припустимо, що площа водокресу в певних границях затоплення тіла, як то можна взяти для деяких суден, не змінюється, то легко визначити величину затопленого судна за даного збільшення його навантаження. Хай, наприклад, збільшено навантаження судна на P тон і площа відокресу є A*), тоді глибина затоплення (h) визначиться із співвідношення:

$$\delta A h=P, \text{ або дорівнюватиме } h=\frac{P}{\delta A}, \tag{17}$$

при цьому звичайно, так центр ваги судна, як і центр водообсягу судна перемістяться.

А що для кожного судна, зокрема морського, дуже важливо знати, для з'ясування багатьох його якостей, площі водокресів, а так само і водообсягу, за різних глибин затоплення, то ще підчас самого проєктування судна особливими методами визначають ці величини для низки положень

---

*) Коли назвемо в границях площі водокресу довжину судна L, а ширину B, то можна площу водокресу визначити: $A=\alpha BL$, де α є так званий коефіцієнт повности, що зміняється, залежно від типу суден, в межах від 0,65 до 1.

судна у воді, починаючи від його фіктивного положення, коли воно тільки дотикається кілем до води (нульовий водокрес). Одержані дані виявляються у вигляді особливих кривих, які й становлять важливі для судна характеристики.

Для кожного судна, окрім того, важливо знати його держкість, тоб-то здатність у випадку виведення його з нормального положення в наслідок, наприклад, хвилювання, неправильного розміщення вантажу й инш., повертатися в це саме положення.

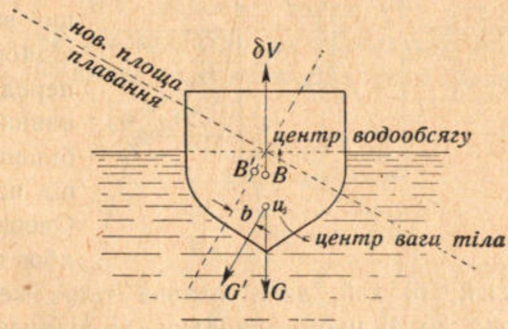

Рис. 23

Щоб з'ясувати ці питання, розгляньмо такі можливі випадки плавання.

1) Центр ваги тіла або судна є нижчий за центр водообсягу (рис. 23); в цьому випадку за нахилення судна, наприклад, ліворуч, центр водообсягу судна так само переміститься ліворуч, і як центр ваги залишиться на місці, то легко побачити, що з'явиться пара (δVb, або Gb), яка змагатиметься повернути судно в попереднє нормальне положення; такий стан судна звуть безумовно стійкий.

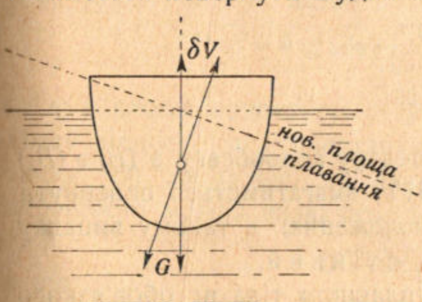

Рис. 24

2) Центр ваги судна й центр водообсягу зливаються, і форма судна така, що центр водообсягу не зміняє свого положення за хитання судна (рис. 24); очевидно, в цьому випадку жодної пари за відхилення судна з свого нормального положення не утвориться, і судно не змагатиметься змінити своє нове положення; такий стан плавного судна звуть безвиразний, або індиферентний.

3) Центр ваги судна є вищий за центр водообсягу; в цьому випадку стійкість судна і взагалі плавного тіла за-

лежить од форми останнього. Справді, хай: а) форма плавного тіла має вигляд, показаний на рисункові (рис. 25); тоді за нахиляння тіла ліворуч центр водообсягу переміститься так само ліворуч у положення B_1, а пара ($\delta V . b$), що виникла при цьому, не відновлятиме тіло в попередньому положенні, а, навпаки, змагатиметься ще більше відсунути його від нормального положення. Очевидно, такий стан тіла або судна буде **не стійкий**; б) хай, далі, плавне тіло має форму, показану на рис. 26. В цьому випадку, за відхилення тіла від нормаль-

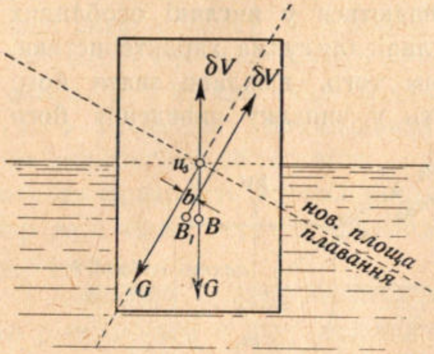

Рис. 25

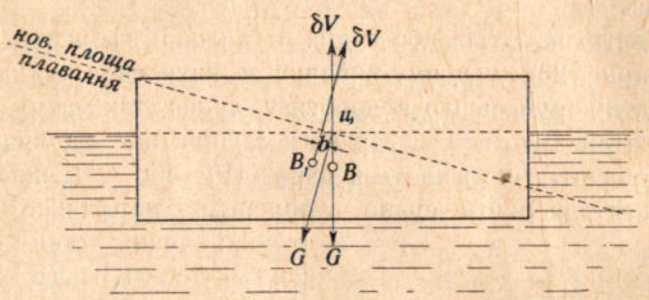

Рис. 26

ного положення, переміщення центру водообсягу з (B) в (B_1) буде таке, що виникла пара (δVb) змагатиметься повернути тіло в попереднє нормальне положення; в такому випадку називають стан тіла **умовно стійкий**.

Таким робом, стійкий стан плавного тіла не обов'язково відповідає положенню центру ваги тільки нижче за центр ваги водообсягу; навпаки, частенко момент відновлювальної пари за положення центру водообсягу, нижчого за центр ваги, буває більший, як при зворотному положенні.

Щоб розвязати питання про стійкість остаточно в певнішій формі, звернімось до схематичного виображення поперечного перекрою судна (рис. 27), що похилилося праворуч на деякий кут $d\varphi$.

В похилому положенні судна точка (*ц*) і надалі лишається за центр ваги судна; до первісної ж сили водообсягу (δV) у точці (B) в новому положенні додається сили ($+P$) і ($-P$), виниклі в наслідок затоплення призматичної частини судна OCD у воду й виходу з води другої призматичної частини OEF. Ці сили відносно точки (O) утворюють момент ($P.S$), який діє зворотно до нахильного моменту ($G.\delta.V_B$). Тепер, очевидно, положення плавання судна буде држке (про судна звичайно кажуть „держкість“ замість стійкість), коли додатковий момент ($P.\ S$), що з'явився за похилого положення судна, буде більший за нахильний момент ($G.\delta.V_B$) і змагається надати судну первісного стану плавання. А як,

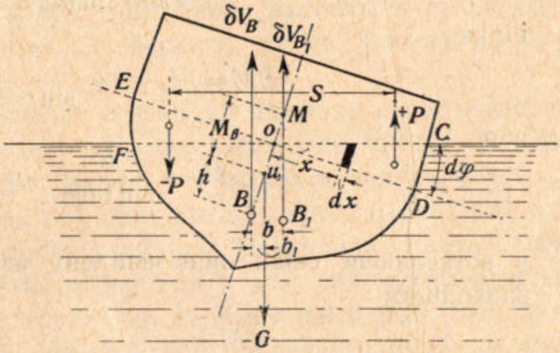

Рис. 27

згідно з рисунком 27, момент ($P.S$) легко можна подати у вигляді:

$$P.S = \delta\,\mathrm{tg}\,(d\varphi)\int_{\omega} x^2 d\omega = \delta\,\mathrm{tg}\,(d\varphi)\,J_{\omega},$$

де ω є площа водокресу, а J_{ω} = момент інерції площі водокресу відносно оси обертання судна, яка проходить через точку (O) нормально до площини рисунку, то цю умову держкости можна визначити так:

$$\delta\,\mathrm{tg}\,(d\varphi)\,J_{\omega} > \delta V_B b_1,$$

а що

$$b_1 = Bц \sin(d\varphi) = h \sin(d\varphi),$$

то попередня нерівність набирає вигляду:

$$\delta\,\mathrm{tg}\,(d\varphi)\,J_{\omega} > \delta\, V_B h \sin(d\varphi),$$

відки, заміняючи *) δV_B через δV:

$$h < \frac{J_{\omega}}{V \cos(d\varphi)}. \qquad [18]$$

*) Сили δV_B і δV_{B_1}, звичайно, однакові і рівні просто δV, одмінні тільки в точці прикладення B і B_1.

Поява сил $(+P)$ і $(-P)$ спричиняється до паралельного переміщення сили водообсягу із (B) в (B_1) на віддаль (b), яку за правилами статики можна визначити:

$$b=\frac{PS}{\delta V}=\frac{\delta \operatorname{tg}(d\varphi) J_\omega}{\delta V}=\frac{J_\omega \operatorname{tg}(d\varphi)}{V}.$$

Згідно з рисунком (рис. 27), з другого боку, ми маємо:

$$b=BM\sin(d\varphi),$$

відки

$$BM=M_в+h=\frac{b}{\sin(d\varphi)},$$

або

$$M_в=\frac{b}{\sin(d\varphi)}-h.$$

а вставляючи сюди вищезнайдену вартість (b), остаточно знаходимо:

$$M_в=\frac{J_\omega}{V\cos(d\varphi)}-h; \qquad [19]$$

ця величина згідно з нерівністю [18] для держкости плавання судна повинна бути більша за нуль; отже, для держкости плавання судна потрібно і досить, щоб центр ваги судна завжди лежав нижче за точку M. За дуже малих кутів нахилу судна, вартість $\cos(d\varphi)$ близька до одиниці, а тому в цьому випадку співвідношення [19] набере вигляду:

$$M_в=\frac{J_\omega}{V}-h. \qquad [20]$$

А що, далі, судно повинно бути цілком держке за яких завгодно можливих напрямів нахиляння, то попередні умови має бути виконано для всіх осей хитання судна, переважно, звичайно, для більш несприятливої; а за таку, через те, що повинно виконати умову $Bц<\frac{J_\omega}{V\cos d\varphi}$, очевидно, є та вісь площі водокресу, яка проходить через центр ваги останньої, що для неї момент інерції J_ω найменший. Для суден нормального будування це буде подовжня вісь.

Знайдена висота $M_в$, що так багато важить для визначення держкости судна, має назву висоти метацентру, а точка M й точка перетину оси плавання в нормальному положенні судна з напрямом сили водообсягу за нахилу судна — метацентр (Bouguer, 1746 р.).

Тепер цілком очевидно, що зниження центру ваги судна [розміщення вантажу в трюмі, залиття нижньої частини судна оливом (яхти) й т. и.], збільшує держкість судна; навпаки, підвищення центру ваги судна (розміщення вантажів на верхній палубі, підіймання вантажів з трюму блоками, прикріпленими до верхніх частин щогол) зменшує держкість судна.

Нарешті, з викладеного ясно, що коли на судні є вантаж, що легко пересувається (зерно, насипане просто в трюм, плинний вантаж: гас, нафта — в наливних суднах, бочки, що можуть перекочуватись від одного до другого борту та ин.), то за нахиляння судна у якийсь бік згаданий вантаж пересуватиметься в тому ж напрямі і тим самим пересуватиме центр ваги судна ближче до напряму вислідної сили водообсягу, тоб-то зменшуватиме висоту метацентру, отже, зменшуватиме держкість судна, за несприятливих умов і цілком позбавлятиме судно держкости; ось чому на морських суднах, де це питання має особливо важливе значення, вантаж треба позбавляти рухливости — плинний вантаж треба наливати в цистерни й баки, симетрично розміщені що до оси судна і герметично закриті при цілковитому об'ємі; зерно краще вантажити в мішках, бочки та инші рухливі предмети закріпляти на своїх місцях і т. и.

§ 7. Приклади на плавання тіл і визначення їхньої стійкости

Задача 11. Визначте висоту метацентру для плавної у воді призми вказаних (на рис. 28) розмірів, при чому глибина затоплення призми дорівнює саме половині висоти призми, тоб-то одному метрові.

Розвязка. За вищенаведеним, згідно з рівнанням [20] висота метацентру

$$M_в = \frac{J_\omega}{V} - Вц.$$

А що перекрій квадратовий і бік квадрату дорівнює 1 метрові, то

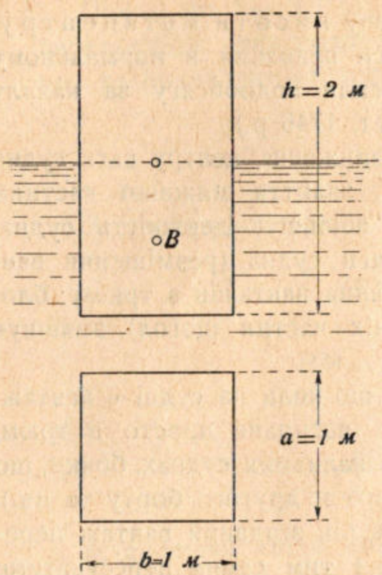

Рис. 28

$$J_\omega = \frac{ab^3}{12} = \frac{1}{12}\ м^4,$$

водообсяг

$$V = ab \cdot \frac{h}{2} = 1\ м^3$$

і віддаль

$$Bц = 0{,}5\ м,$$

а тому

$$M_в = \frac{J_\omega}{V} - Bц = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} = -0{,}42,$$

тоб-то положення не стійке.

Задача 12. Визначте висоту метацентру тієї самої призми, але такої, що плаває у воді плазом (рис. 29).

Розвязка. В даному випадку висота метацентру буде неоднакова, залежно від того, відносно якої оси будемо визначати стійкість призми; так, розглядаючи хитання призми коло оси *xx*, матимемо:

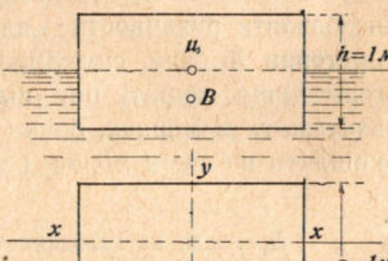

Рис. 29

$$J_\omega = \frac{ba^3}{12} = \frac{2.1}{12} = \frac{1}{6}\ м^4,$$

за хитання коло оси *yy* маємо:

$$J_\omega = \frac{ab^3}{12} = \frac{1.8}{12} = \frac{2}{3}\ м^4.$$

Водообсяг в обох випадках однаковий і дорівнює:

$$V = a.b\frac{h}{2} = 1.2 \cdot \frac{1}{2} = 1\ м^3.$$

Тому для першого випадку хитання

$$M_в = \frac{J_\omega}{V} - Bц = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}\ м,$$

і для другого

$$M_в = \frac{J_\omega}{V} - Вц = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}\ м.$$

Розглянуті два випадки плавання призми ясно показують відносну стійкість її плавання.

Задача 13. Залізна посудина (рис. 30) квадратового перекрою з боком $a = 1$ *м* і висотою $b = 1$ *м*, з товщиною стінок $s = 1$ *см* плаває у воді. Визначте глибину затоплення й висоту метацентру, а так само і положення центру ваги і центру водообсягу. Вага 1 $м^3$ заліза = 7000 *кг*.

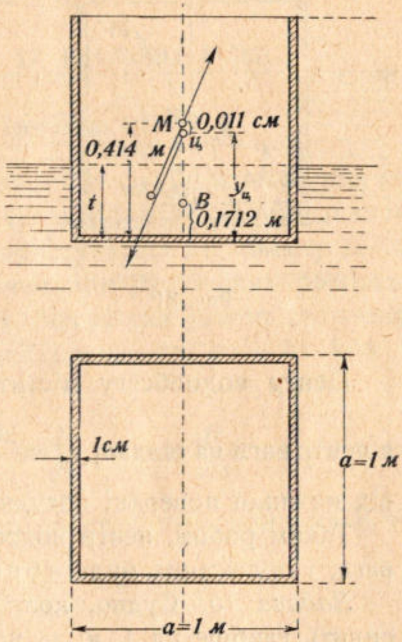

Рис. 30

Розвязка. Об'єм заліза в посудині$=[a\,.\,l\,.\,a-(a-2)\,.\,(a-2)\,.\,(l-1)] = 1 - 0{,}98\,.\,0{,}98\,.\,0{,}99 = 1 - 0{,}9508 = 0{,}0492\ м^3$.

Вага$=0{,}0492\,.\,7000=344{,}4$ *кг*.

Таким робом: $a^2t\,.\,1000 = 344{,}4$, звідки глибина затоплення

$$t = \frac{344{,}4}{1000} = 0{,}3444\ м.$$

Центр водообсягу B міститься, очевидно, на віддалі $\frac{t}{2} = 0{,}1712$ *м* від нижньої поверхні посудини.

Центр ваги посудини міститься від нижньої його поверхні на віддалі: $y_ц = \frac{274{,}4\,.\,0{,}505 + 70\,.\,0{,}005}{344{,}4} = 0{,}403\ м$, де 274,4 є вага (*кг*) посудини без дна, а 70 — вага (*кг*) дна.

Водообсяг посудини $V = a^2t = 1\,.\,0{,}3444 = 0{,}3444\ м^3$.

Момент інерції відносно оси *уу* буде:

$$J_\omega = 0{,}0833\ м^4,$$

а тому

$$M_в = \frac{J_\omega}{V} - Вц = \frac{0{,}0833}{0{,}3444} - 0{,}231 = 0{,}242 - 0{,}231 = 0{,}011\ м.$$

Таким робом, метацентр міститься від нижньої поверхні посудини на віддалі:

$$0{,}403 + 0{,}011 = 0{,}414 \text{ м.}$$

Задача 14. В попередній задачі визначте зміну положення центрів ваги посудини й водообсягу, а так само стійкости, коли на дно посудини покладено ще шар заліза, завтовшки 5 *см* (рис. 31).

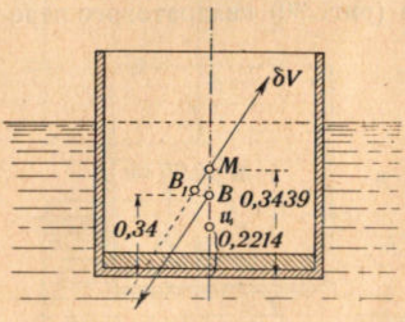

Рис. 31

Розвязка. Вага посудини збільшиться на $0{,}98^2 . 0{,}05 . 7000 = 0{,}9604 . 350 = 336{,}14$ *кг* і дорівнюватиме

$$G = 680{,}54 \text{ кг.}$$

Глибина затоплення буде

$$t_1 = \frac{680{,}54}{1000} = 0{,}6805 \text{ м.}$$

Центр водообсягу міститиметься на віддалі $\frac{t_1}{2} \cong 0{,}340$ *м*,

а центр ваги на віддалі $y_{ц_1} = \frac{260{,}54 . 0{,}53 + 420 . 0{,}03}{680{,}54} = 0{,}2214$ *м* від нижньої поверхні посудини.

Таким робом, центр водообсягу міститься вище за центр ваги, і положення буде абсолютно стійке.

Задача 15. Судно, коли переходить з моря в річку, сидить глибше на 1 *м*; за навантаження на нього 500 тон вантажу, сідає у воду (в річці) на 2 *м*. Визначте його водообсяг.

Розвязка. Коли означити об'єм витисненої судном води в річці через V, вагу 1 $м^3$ солодкої води через δ (1000 $кг/м^3$), і вагу 1 $м^3$ морської води через $\delta_м$ (1025 $кг/м^3$), то умови задачі дають нам такі співвідношення:

$$V(\delta_м - \delta) = \delta . 1{,}0 . A,$$

$$500 . 1000 = \delta . 2 . A,$$

де A є площа водокресу в $м^2$. Виключаючи A, маємо:

$$V = \frac{500000}{2 . (\delta_м - \delta)} = \frac{250000}{25} = 10000 \text{ тон.}$$

РОЗДІЛ II

РУХ ІДЕАЛЬНИХ ТА РЕАЛЬНИХ РІДИН

§ 1. Рух ідеальних рідин

Рівнання руху елементарної частки ідеальної рідини легко здобувати з вищенайдених (розділ I, § 1) рівнань рівноваги плинного елементу, коли скористуватися з принципу Д'Аламбера; як відомо, за цим принципом рух можна розглядати, як рівновагу, коли тільки до числа сил увести сили інерції, називаючи, через це, проєкції швидкости по осях x-ів, y-ів, z-ів, відповідно:

$$u = \frac{dx}{dt}; \quad v = \frac{dy}{dt}; \quad w = \frac{dz}{dt};$$

визначаючи далі сили інерції, введені до одиниці маси, через

$$-\frac{du}{dt}, \quad -\frac{dv}{dt}, \quad -\frac{dw}{dt},$$

і, зводячи їх до рівнання рівноваги рідини, матимемо такі рівнання руху останньої:

$$\left.\begin{aligned} X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du}{dt} \\ Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dv}{dt} \\ Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dw}{dt} \end{aligned}\right\}. \qquad [1]$$

А що в найзагальнішому випадку руху рідини швидкості її можуть змінюватись не тільки з часом, але й з зміною місця, то проєкції швидкости — u, v і w є функціями координат x, y, z, які так само суть функції від часу, то рівнання [1] можна переписати у такому вигляді:

$$\left.\begin{aligned} X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w \\ Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial z}w \\ Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w \end{aligned}\right\}. \qquad [2]$$

Останні рівнання мають назву Ейлерових рівнань. Як бачимо, вони містять у найзагальнішому випадку п'ять змінних величин: ϱ, p, u, v і w — для визначення їх замало буде трьох рівнань. Додаткові рівнання утворюються з таких міркувань. По-перше, між p і ϱ для яких завгодно рідин повинна існувати певна залежність, коли тільки рідина не цілком нестискальна (в останньому випадку $\varrho = \mathrm{const}$).

Наприклад, для газів (а виведені рівнання придатні і для таких рідин, зважаючи на те, що при виводі і рівнань рівноваги, і руху, жодних обмежень що до густини ϱ не робилося) — для газів, що підлягають законові Маріотта і Гей-Люссака, маємо:

$$\frac{p}{\varrho} = RT,$$

де R є газова стала, що для повітря, наприклад, дорівнює 29,4, а T — абсолютна температура, що дорівнює $(273 + t^\circ)$ C. За адіябатичного стиснення має місце співвідношення:

$$\frac{p}{\varrho^k} = \mathrm{const},$$

де $k = 1{,}41$ є відношення тепломісткостей за сталого тиску й за сталого об'єму. Для рідин крапляних, наприклад, для води, згідно з наведеними вже результатами дослідів Амага (Amagat), так само можна написати залежність вигляду:

$$\frac{p}{\varrho_0} = 1 + \frac{p}{\beta},$$

де β є об'ємний коефіцієнт стиску.

По-друге, припускається, що маса рідини, котра міститься в якомусь об'ємі, не змінюється з часом. Позначмо елементарний об'єм рідини через ΔV, тоді маса, що міститься в цьому об'ємі, буде $p\Delta V$; визначаючи, що маса ця не змінюється з часом, маємо:

$$\frac{d}{dt}(\varrho \Delta V) = 0,$$

відки

$$\frac{d\varrho}{dt}\Delta V + \varrho\frac{d(\Delta V)}{dt} = 0. \qquad [3]$$

Уявімо собі об'єм у вигляді паралелепіпеду з боками Δx, Δy, Δz (рис, 32). Очевидно, об'єм може змінюватись через те, що точка A і точки B, D і G матимуть різні швидкості; хай, наприклад, проєкції швидкости A в напрямі осей координат x, y, z будуть відповідно u, v, w; тоді швидкість B в напрямі оси x-ів можна визначити, як $u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x$, швидкість D в напрямі оси y-ів, як $v + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y$ і швидкість G в напрямі оси z-ів, як $w + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z$; тому, збільшення об'єму в напрямі осей координат визначиться, з певним наближенням, відповідно через

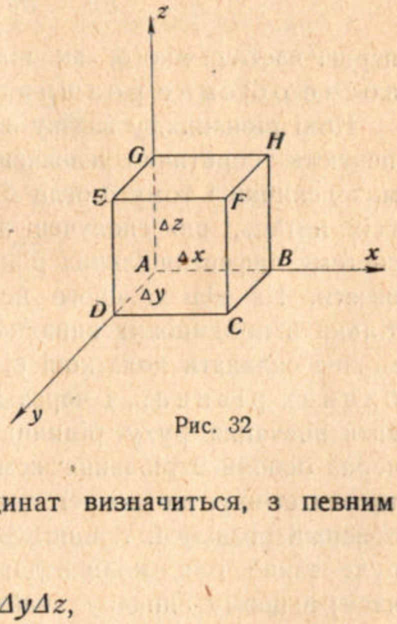

Рис. 32

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\Delta x\Delta z,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}\Delta z\Delta x\Delta y;$$

цілковите збільшення об'єму, таким робом, можна подати у вигляді:

$$\Delta x\Delta y\Delta z\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] = \Delta V\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{dz}\right].$$

А, що, очевидно,

$$\Delta V\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]=\frac{d(\Delta V)}{dt},$$

то маємо:

$$\frac{d\varrho}{dt}+\varrho\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]=0, \qquad [4]$$

співвідношення, відомі під назвою закона нерозривности маси, або суцільности руху. У випадку рідини нестискальної це рівнання набирає вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

перша частина якого, як відомо, є не инше що, як відносне об'ємне розширення рідини.

Нові рівнання, у звязку з рівнаннями [2], цілком забезпечують теоретично визначення п'яти вже вказаних невідомих величин і тому могли б бути придатні до розвязання всіх питань, що сполучені з рухами рідин, коли б тільки систему диференціяльних рівнань завжди можна було розвязати. На ділі ж цього немає, і розвязання її можливе тільки в поодиноких випадках. В деяких окремих випадках можна складати додаткові рівнання, які мають назву особливих рівнань, і через які иноді можна значно спрощувати вивчання руху рідини; наприклад, можна визначити через особливе рівнання неможливість руху рідини крізь тверду стінку, що до неї дотикається, рух рідини уздовж поверхні розділу й т. инш. За окремий випадок руху рідини буде такий рух, коли в даному місці він не залежить од часу; в цьому випадку знайдені рівнання руху рідини не міститимуть окремих похідних з часу; такий рух має назву усталеного руху. Ще більш окремий випадок руху рідини буде не тільки усталений, але й рівномірний рух, тоб-то такий, коли швидкості й инші характеристики рідини не тільки не змінюються в даному перекрої з часом, але й за переходу від одного перекрою до иншого лишаються незмінні.

Всі такі розмежування течій рідин дуже полегшують вивчання їх. Щоб установити різні аналітичні залежності між швидкостями й тисками в текучих рідинах, майже завжди беруть засновки, які спрощують розвязання; правда, ці засновки здебільшого в дуже малій мірі, а иноді й зовсім не виконується за руху рідин. За один з таких засновків, є, наприклад, припущення про можливість розподілити потік на дрібніші потоки, при чому вважають, що поверхня розділу зливається з напрямом головної течії: за такого розподілу потоку на елементарні потоки, поперечні перекрої останніх, нормальні до напряму течії, вважають або за конечні або за безконечно малі.

Коли тепер звернути увагу на якусь точку (A) в рідині, то перед цією точкою можуть бути такі частки рідини (B), які за свойого дальшого руху обов'язково повинні будуть перейти через точку (A); але й позаду останньої так само є частки рідини, які перед тим, як зайняти це положення (C), пройшли через точку (A). Послідовну низку таких точок (A, B, C) називають л і н і є ю т о к у. Дотичні до лінії току в окремих точках зливаються з напрямом швидкостей в цих точках, а тому рівнання такої лінії току буде у формі:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \qquad [5]$$

За усталеного руху ці лінії току мають певне незмінне положення в просторі, за неусталеного, навпаки, приймають що-моменту нове положення, бо швидкість у кожній точці може змінюватись з часом і величиною і напрямом.

Указаний вже розподіл потоку на елементарні потоки можна тепер уявити так, що кожний такий елементарний потік обмежується лініями току, при тому, коли обмежений останіми елементарний потік буде безконечно малого поперечного перекрою, то його називають т о к о в о ю н и т к о ю, у випадку ж конечного поперечного перекрою — т о к о в о ю т р у б к о ю. Подовжний перекрій через таку поділену на ці нитки або трубки течію дозволяє добре з'ясувати собі рід руху й мати уявлення про напрям течії, про зміни в ній швидкости й тиску.

Між иншим, коли припустити, що швидкості в окремих, нормальних до головного напряму течії, поперечних перекроях, не зважаючи на ріжницю в похилі до останніх окремих ліній току, все ж паралельні одна з однією і одна одній дорівнюють, то, як наслідок цього припущення, є те, що поперечні перекрої повинні бути плоскі й у послідовних через елементи часу положеннях, повинні лишатися паралельні. Така спрощена течія називається паралельною течією.

Зупинімося тепер на одному дуже важливому співвідношенні для усталеного руху рідини, що воно становить собою так званий закон енергії для рухомої по якійсь траєкторії частки рідини.

Візьмімо для цього перші три рівнання Ейлерові:

$$X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{du}{dt};$$

$$Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{dv}{dt};$$

$$Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{dw}{dt},$$

помножмо їх відповідно на dx, dy, dz і додамо одне до одного; матимемо:

$$Xdx+Ydy+Zdz-\frac{1}{\varrho}\left[\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}\right]=$$

$$=\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz. \qquad [6]$$

Перший тричлен лівої частини, за попереднім, є елемент роботи (dE) зовнішньої об'ємної сили; вираз у квадратових дужках є повний диференціял dp і, нарешті, тричлен правої частини, як легко побачити, є не инше що, як $d\left(\frac{\nu^2}{2}\right)$; справді, означивши вислідну швидкість елементу рідини через ν, маємо:

$$\nu^2=u^2+v^2+w^2,$$

відки диференціюючи, одержимо:

$$2\nu d\nu=2udu+2vdv+2wdw,$$

або

$$d\left(\frac{1}{2}\nu^2\right)=udu+vdv+wdw=\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz,$$

тому що за диференціяції кінцевий результат не залежить од порядку диференціяції. Таким робом, вищенаписане рівнання [6] набирає вигляду:

$$dE - \frac{dp}{\varrho} = d\left(\frac{1}{2}v^2\right),$$

або

$$dE = \frac{dp}{\varrho} + d\left(\frac{1}{2}v^2\right), \qquad [7]$$

тоб-то робота зовнішньої сили йде на прирощення живої сили й тиску (потенціяльної енергії), що становить своєрідне формулування закону зберігання енергії.

Коли на рідину впливає тільки сила ваги, і при тому вона (рідина) нестислива, то, за напряму оси z-ів вертикально вгору, $dE = -gdz$; тоді співвідношення [7] набере вигляду:

$$gdz + \frac{dp}{\varrho} + d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = 0,$$

або, поділивши на g:

$$dz + \frac{dp}{\delta} + d\left(\frac{v^2}{2g}\right) = 0,$$

відки, інтегруючи, матимемо:

$$z + \frac{p}{\delta} + \frac{v^2}{2g} = C. \qquad [8]$$

— рівнання, відоме під назвою рівнання Данила Бернуллі (1738 р.).

В цьому рівнанні z (*м*) — нівеляційна висота положення частки рідини над основною площиною; $\frac{p}{\delta}\left(\frac{кг}{м^2}\cdot\frac{м^3}{кг} = м\right)$ — висота тиску; $\frac{v^2}{2g}\left(\frac{м^2}{сек.^2}\cdot\frac{сек.^2}{м} = м\right)$ — висота швидкости. Таким робом, рівнання [8] визначає положення, що в кожній точці траєкторії частки рідини рухомої без опору (ідеальної) сума трьох висот: нівеляційної, тиску й швидкости — величина стала. Тому, коли ми суми цих трьох висот відкладемо послідовно від якоїсь горизонтальної площини, що її ми взяли за основну, то кінці цих сумарних векторів лежатимуть так само в одній горизонтальній площині (рис. 33).

Знайдений закон Данила Бернуллі, у випадку існування потенціялу швидкостей, можна поширити на ввесь потік; у застосуванні до всієї маси рухомої рідини, рівнання [8],

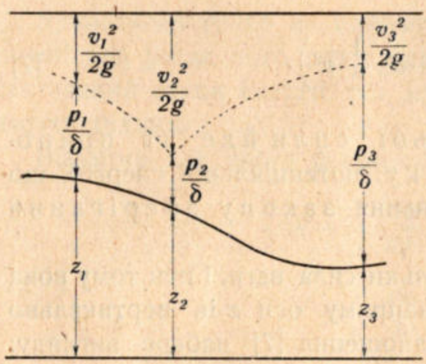

Рис. 33

що вже має назву рівнання Бернуллі-Ейлера, вказує на однаковість запасу енергії у всіх точках зайнятого потоком об'єму; і в цьому випадку визначене рівнанням положення можна зформулувати так: у кожному перекрої рухомої без опору рідини сума висот нівеляційної, тиску й швидкосної — є величина стала.

А що швидкості (позначмо їх через v_1, v_2, v_3) визначається перекроєм ($\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$) потоку, на підставі того, що припущено сталість у даному місці і в даний час кількости протічної рідини (закон суцільности руху), то ми можемо написати співвідношення:

$$Q = \omega_1 v_1 = \omega_2 v_2 = \omega_3 v_3 = \ldots = \text{const}. \qquad [9]$$

Сталість течії припиняється, коли рух $p = 0$; в цьому випадку співвідношення [9] не існує.

За силою закону Д. Бернуллі, за инших однакових умов, тиск у потоці має найбільшу вартість там, де швидкість найменша, і навпаки. Тому в звужених місцях горизонтального трубопроводу бувають менші тиски, як у инших.

§ 2. Приклади на течію рідин без опору

Задача 1. В трубі, що має форму, показану на рисунку (рис. 34), п'єзометричні висоти *) різні в широкому і вузькому перекроях. Хай ріжниця їхня дорівнює h. Треба визначити кількість рідини (води), що протікає трубопроводом.

*) П'єзометричними висотами називають висоти піднесення рідини у (скляних) трубочках, вставлених вертикально в стінки труби, якою тече рідина; висоти ці, очевидно, відповідають тискам в середині рідини у відповідних перекроях; самі трубочки мають назву п'єзометрів.

Розвязка. За законом Д. Бернуллі, маємо:

$$\frac{p_1}{\delta}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\delta}+\frac{v_2^2}{2g},$$

бо, коли трубопровід горизонтальний, що ми припускаємо, очевидно, є існування рівности $z_1=z_2$. Через просте пере-

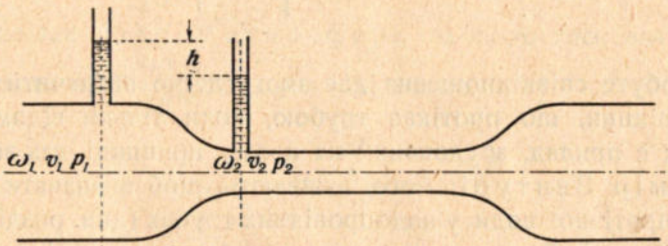

Рис. 34

ставляння членів вищенаписане співвідношення перетворюється на таке:

$$\frac{p_1-p_2}{\delta}=\frac{v_2^2-v_1^2}{2g},$$

а що, очевидно,

$$\frac{p_1-p_2}{\delta}=h,$$

то

$$h=\frac{v_2^2-v_1^2}{2g},$$

відки

$$2gh=v_2^2-v_1^2,$$

за законом суцільности течії

$$\omega_1 v_1=\omega_2 v_2,$$

відки

$$v_2=v_1\cdot\frac{\omega_1}{\omega_2},$$

а тому попереднє співвідношення набирає вигляду:

$$2gh=v_1^2\left[\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}-1\right],$$

відки

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1}} = 4,429 \sqrt{\frac{h}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1}},$$

отже,

$$Q = \omega_1 v_1 = 4,429 \,.\, \omega_1 \sqrt{\frac{h}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1}}.$$

Здобуте співвідношення дає змогу легко визначити кількість рідини, що протікає трубою, коли тільки відомі ω_1, ω_2 і h; є прилад, збудований на цьому принципі, так званий водомір Вентурі; його вживають, щоб визначати кількість протічної води у водопровідних трубах (див. розділ IX).

Задача 2. Дано посудину показаної на рисункові (рис. 35) форми; для перекроїв *I*, *II* і *III* дано діяметри перекроїв і напори. В перекрої *AB*, діяметр якого вважатимемо за дуже великий, тиск дорівнює атмосферному; через перекрій *III* вода витікає назоколо. Визначте швидкості й п'єзометричні висоти, припускаючи, що рівень *AB* не змінюється, тоб-то, що посудину ввесь час доповнюється водою.

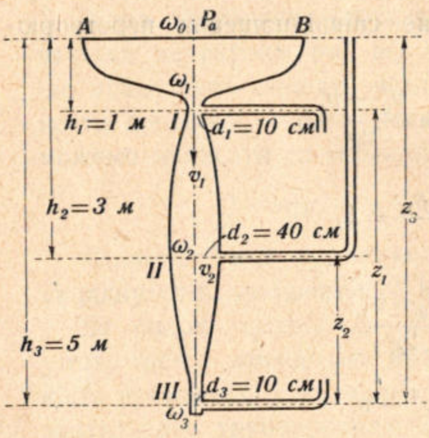

Рис. 35

Розвязка. Вважатимемо, що основна площина, від якої відраховуватимемо положення часток рідини, проходить через *III* перекрій. Тоді, застосовуючи рівняння Д. Бернуллі, маємо:

$$z_3 + \frac{p_a}{\delta} + \frac{v_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\delta} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\delta} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_3}{\delta} + \frac{v_3^2}{2g}. \quad [10]$$

Рівняння суцільности нам дає:

$$\frac{\pi d_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2 = \frac{\pi d_3^2}{4} v_3,$$

або після скорочення на $\frac{\pi}{4}$:

$$d_1^2 v_1 = d_2^2 v_2 = d_3^2 v_3. \qquad [11]$$

Велика вартість діяметра d_0 і незмінність вільної поверхні води (AB) дає нам право вважати швидкість $v_0 = 0$, а що витікання відбувається в повітря, то $p_3 = p_a$ і $\frac{p_3}{\delta} = 10{,}3$ *м* (відповідає старій атмосфері, за якою тиск вважають за рівний $1{,}033 \frac{кг}{см^2}$); тому з [10] маємо:

$$z_3 = \frac{v_3^2}{2g},$$

відки

$$v_3 = \sqrt{2gz_3} = 4{,}429 \cdot 2{,}236 \cong 9{,}9 \frac{м}{сек.}\cdot$$

Рівнання [11] після підставляння в них вартостей d_1, d_2 і d_3 набувають вигляду:

$$0{,}01 v_1 = 0{,}16 v_2 = 0{,}01 v_3,$$

а тому співвідношення [10] перетворюються на таке:

$$5 + 10{,}3 = 4 + \frac{p_1}{\delta} + \frac{v_1^2}{2g} = 2 + \frac{p_2}{\delta} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_3}{\delta} + \frac{v_3^2}{2g},$$

відки

$$15{,}3 = 4 + \frac{p_1}{\delta} + 5 = 2 + \frac{p_2}{\delta} + \frac{5}{256};$$

а тепер

$$\frac{p_1}{\delta} = 6{,}3 \text{ м} < \frac{p_a}{\delta} = 10{,}3;$$

$$\frac{p_2}{\delta} = 13{,}297.$$

Таким робом, у перекрої *III* тиск дорівнює атмосферному, і вода в п'єзометрі не підіймається, в перекрої *II* тиск більший від атмосферного, і вода підіймається на висоту 2,997 *м*; нарешті, в перекрої *I* тиск менший за атмосферне на 4 *м*, і коли ми п'єзометричну трубку загнемо вниз, як показано на рисункові, і спустимо кінець у резервуар з водою, то за висоти вертикального кінця > 4 *м*, вода з резервуару підійметься на висоту в 4 *м*, коли ж висота цього кінця < 4 *м*, то вода з нього буде всмоктуватись у посудину, якою протікає вода. Що ж до швидкостей, то

$$v_1 = v_3$$

$$v_2 = \frac{1}{16} v_3 = 0{,}619 \frac{м}{сек.}\cdot$$

Задача 3. З посудини, наповненої водою до рівня AB (рис. 36), через відтулину в дні, вода витікає наоколо; визначте швидкість витікання води з відтулини, коли посудина циліндричної форми перекрою ω_1, а перекрій відтулини — ω_2; висота рівня (AB) води в посудині над відтулиною ввесь час витікання залишається стала й дорівнює h. Посудина відкрита, і вода витікає в повітря.

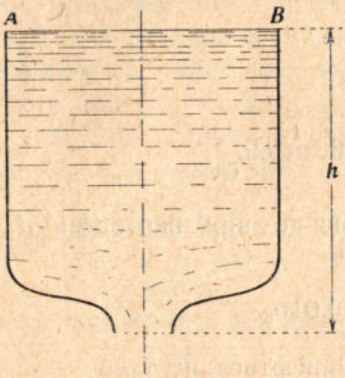

Рис. 36

Розвязка. Вважаючи, що основна площина, від якої будемо відраховувати висоти, проходить через відтулину і, застосовуючи закон Д. Бернуллі, маємо:

$$h + \frac{p_a}{\delta} + \frac{v_1^2}{2g} = 0 + \frac{p_a}{\delta} + \frac{v_2^2}{2g},$$

означаючи швидкість витікання через v_2, а швидкість води в посудині на рівні AB через v_1; а що за законом суцільности руху

$$\omega_1 v_1 = \omega_2 v_2,$$

то попереднє рівняння, після скорочення й заміни v_1 через v_2, набере вигляду:

$$h + \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \cdot \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g},$$

відки

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}}}\,.$$

Коли ω_1 велике супроти ω_2, наприклад, $\omega_1 \geqq 10\,\omega_2$, то з точністю більшою ніж 1% можна знехтувати знаменником, і тоді матимемо:

$$v_2 = \sqrt{2gh} = 4{,}429\sqrt{h}$$

— відому формулу Торічеллі (1643). Очевидно, що кількість рідини, що витікає з відтулини, визначиться із співвідношення:

$$Q = \omega_2 v_2 \left(\frac{м^3}{сек.}\right).$$

За $\omega_2 = \omega_1$ швидкість обернеться на ∞; а це показує, що суцільність руху порушується.

Задача 4. Визначте кількість рідини, що витікає з відтулини якої завгодно форми в бічній стінці посудини (рис. 37), тільки симетричної відносно горизонтальної оси, яка проходить через центр ваги відтулини.

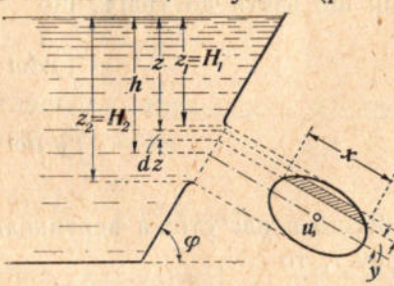

Рис. 37

Розвязка. Хай кут нахилу бічної стінки посудини до горизонтальної площини буде φ, а глибина затоплення центру ваги відтулини під вільною поверхнею води h. Уявімо собі відтулину, розбиту на горизонтальні смужки завширшки dy; тоді площа ($d\omega$) такої смужки буде xdy, а висота напору

$$z = h + y\sin\varphi = h\left(1 + \frac{y}{h}\sin\varphi\right),$$

якщо тільки віддаль y будемо вважати за від'ємну, коли розглядаємо смужки вище центру ваги відтулини, і за додатню, коли нижче; очевидно, що менше dy, то точніше ми можемо прийняти попередній вираз за напір для розглядуваної смужки.

За знайденого напору, кількість води, яка витікає за одиницю часу через смужку, визначиться з виразу:

$$dQ = d\omega\sqrt{2gh\left(1 + \frac{y}{h}\sin\varphi\right)},$$

а повна кількість рідини, що витікає з усієї відтулини, буде:

$$Q=\int_{\omega} d\omega \sqrt{2gh\left(1+\frac{y}{h}\sin\varphi\right)};$$

а що далі

$$\left(1+\frac{y}{h}\sin\varphi\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{y}{h}\sin\varphi-\frac{1}{8}\left(\frac{y}{h}\right)^2\sin^2\varphi+\frac{1}{16}\left(\frac{y}{h}\right)^3\sin^3\varphi-\ldots,$$

то, задовольняючися з перших трьох членів, після інтегрування матимемо:

$$Q=\sqrt{2gh}\left[\omega-\frac{1}{8}\frac{J}{h^2}\sin^2\varphi\right],$$

коли ще взяти до уваги, що

$$\int_{\omega} y\,d\omega=0,$$

$$\int_{\omega} y^2 d\omega=J.$$

Якщо в нас стінка вертикальна і відтулина округла радіюсу r, то

$$J=\frac{\pi r^4}{4}; \ \sin\varphi=1,$$

і попередній вираз перетвориться на такий:

$$Q=\omega\sqrt{2gh}\left[1-\frac{r^2}{32\,.\,h^2}\right].$$

Коли відтулина прямокутна, і ширина її дорівнює b, а висота a, то питання розвязується простіш; виразові для dQ тоді можна надати вигляду:

$$dQ=b\,dy\sqrt{2gh\left(1+\frac{y}{h}\sin\varphi\right)}=b\,dy\sqrt{h+y\sin\varphi}\sqrt{2g},$$

або, заводячи нову перемінну $z=h+y\sin\varphi$, а, значить, $dy=\frac{dz}{\sin\varphi}$, можемо написати:

$$dQ=\frac{b\sqrt{2g}}{\sin\varphi}\sqrt{z}\,.\,dz,$$

а, інтегруючи, маємо:

$$Q = \frac{2}{3}\, b \frac{\sqrt{2g}}{\sin\varphi}\left(H_2^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}}\right),$$

позначаючи

$$H_2 = z_2 = h + \frac{a}{2}\sin\varphi$$

і

$$H_1 = z_1 = h - \frac{a}{2}\sin\varphi;$$

а що

$$\sin\varphi = \frac{H_2 - H_1}{a},$$

то

$$Q = \frac{2}{3}\, ab\sqrt{2g} = \frac{H_2^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}}}{H_2 - H_1}.$$

Коли припустити в останньому виразі для Q висоту $H_1 = 0$, то співвідношення набере вигляду:

$$Q = \frac{2}{3}\, ab\sqrt{2gH_2} = \frac{2}{3}\, bh\sqrt{2gh}$$

— вираз для кількости рідини, що витікає з прямокутної відтулини, але не обмеженої згори стінкою; така відтулина має назву п е р е л и в н о ї   в і д т у л и н и (рис. 38).

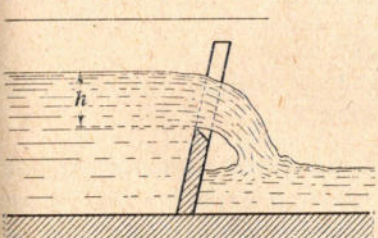

Рис. 38

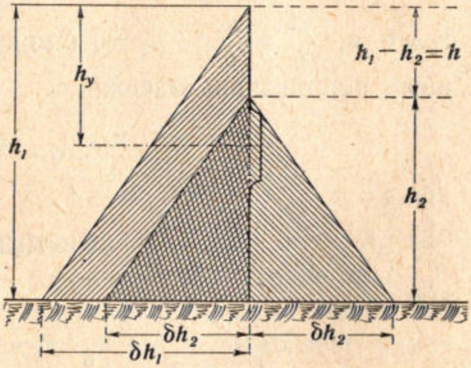

Рис. 39

Коли витікання відбувається не в повітря, а у воду, як показано на додаваному рисункові (рис. 39), то, будуючи, за показаним вище, епюри розподілу тисків з того й другого боку відтулини, побачимо, що витікання через відтулину в усіх перекроях останньої відбувається під тим самим напором $(h_1 - h_2) = h$, отже, кількість рідини, що витікає через відтулину, можна визначити із співвідношення:

$$Q = \omega \sqrt{2gh} = \omega \sqrt{2gh(h_1 - h_2)}.$$

Задача 5. Визначте тиск (p_x) у перекрої xy всисної труби смоку після того, як його зупинено; при цьому висота устави смоку над рівнем (AB) в живильному колодязі дорівнює 6 *м*.

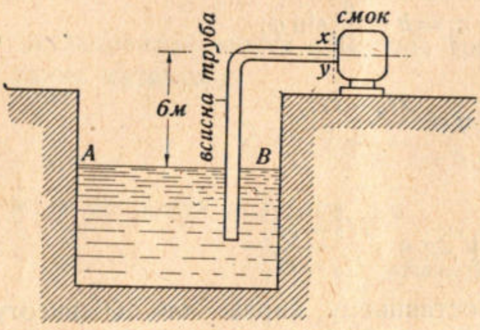

Рис. 40

Розвязка. Взявши за основну площину перекрою AB (рис. 40) ми, застосовуючи до даного випадку закона Д. Бернуллі:

$$z_1 + \frac{p_1}{\delta} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\delta} + \frac{v_2^2}{2g},$$

маємо, очевидно, такі вартості членів даного співвідношення: $z_1 = 0$; $\frac{p_1}{\delta} = \frac{p_a}{\delta}$ (атмосф.); $v_1 = 0$ (рівень AB не змінюється); $z_2 = 6$ *м*; $\frac{p_2}{\delta} = \frac{p_x}{\delta}$; $v_2 = 0$ (смок зупинено), і, таким робом, після підставляння одержимо:

$$\frac{p_a}{\delta} = 6 + \frac{p_x}{\delta},$$

відки

$$\frac{p_x}{\delta} = \frac{p_a}{\delta} - 6 = 10{,}3 - 6 = 4{,}3 \text{ м},$$

або

$$\frac{p_x - p_a}{\delta} = -6,$$

тоб-то в перекрої xy ми маємо вакуум (порожняву); тиск визначається висотою водяного стовпа тільки в 4,3 *м* проти атмосферного в 10,3 *м*, або, иншими словами, до останнього не вистачає тиску в 6 *м* водяного стовпа.

§ 3. Рух справжніх рідин

Закон Д. Бернуллі, що звязує поодинокі характеристики руху й дуже просто, здавалося б, застосовуваний до розвязання тих або тих завдань із царини руху рідин, виведено, припускаючи рідини ідеальні. Справжні рідини, як відомо, одмітні від таких; тому, природно, що утворюється якесь розходження між результатами застосовування закону Д. Бернуллі і досвідними даними. Що це справді так, легко пересвідчитись з такого прикладу: уявімо собі, що ми маємо циліндричну трубу, укладену горизонтально (рис. 41), якою

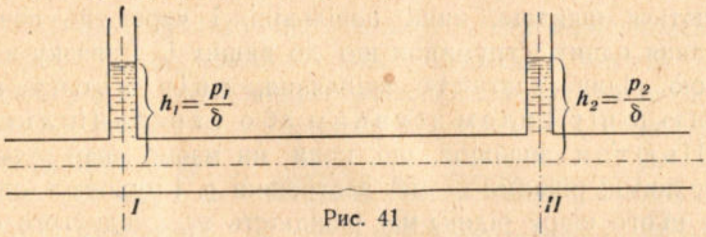

Рис. 41

тече вода під якимсь напором. Для такого випадку руху, коли б закон Д. Бернуллі був цілком справедливий, ми повинні були б мати із співвідношення:

$$z_1 + \frac{p_1}{\delta} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\delta} + \frac{v_2^2}{2g}$$

для якихось двох перекроїв *I* і *II*:

$$\frac{p_1}{\delta} = \frac{p_2}{\delta},$$

бо за наших умов

$$z_1 = z_2 \quad \text{і} \quad v_1 = v_2,$$

тоб-то, иншими словами, п'єзометричні висоти h_1 і h_2 повинні були б бути однакові; справді ж, коли перекрої *I* і *II* є один від одного недалеко, ріжницю цих висот важко помітити, але, як віддаляти перекрій *II* від *I*, зменшення піднесення води в п'єзометричній трубці *II* перекрою стає щодалі помітніше. Далі, виявляється, що не тільки збільшення віддали між перекроями *I* і *II* зменшує п'єзометричну висоту в *II* перекрої, але це саме відбувається і за збільшення швидкости протікання води трубою і зменшення діяметру труби. Проте, зменшення п'єзометричної висоти, очевидно, відповідає зменшенню потенціяльної енергії в текучій воді, а остання, взагалі, сама по собі втрачатись не може (за законом зберігання енергії); очевидно, зменшення її можна пояснити лише тим, що ця енергія витрачається, щоб перебороти якісь, не взяті нами до уваги, коли виводили рівняння Д. Бернуллі, опори, які є наслідком як унутрішніх якостей рідини та властивостей її руху, так і зовнішніх обставин. Справді, дослід показує, що, по-перше, підчас руху рідин повстає внутрішнє тертя, що є результат неоднакової швидкости рухомих струминок; одні струминки рухаються швидше, инші повільніш, і через це виникає ковзання одних струминок що до инших і, в звязку з властивою рідині здатністю зчіпляння, опір цьому ковзанню (опір силам зсувним або тангенціяльним). Ще Ньютон знайшов, що, коли ми маємо шар рідини з поверхнями, рівними ω *см*^{2}, завтовшки ϱ, і рухова з одного боку цього шару рідина має швидкість v_1, а з другого боку швидкість v_2, при чому $v_1 > v_2$, то з боку рухової з більшою швидкістю рідини виникає сила, яка прискорює рух середнього шару, а з боку рухової з меншою швидкістю рідини сила, загаювальна для руху того ж шару, що величиною дорівнює:

$$S = \eta\omega \frac{v_1 - v_2}{\varrho}, \qquad [12]$$

де η є коефіцієнт пропорційности (який становить собою силу опору, що виявляється підчас руху із швидкістю 1 *см/сек.* шару води, площею, що дорівнює 1 *см*^{2} відносно другого шару, площею так само 1 *см*^{2}, і який є на віддалі 1 *см* від першого) і визначається (в абсолютній системі *C. G. S.* в $\frac{дин.сек.}{см^2}$) для води, температурою в t° C співвідношенням:

$$\eta_{абс} = \frac{0{,}01775}{1 + 0{,}0331t + 0{,}000244t^2},$$

а в технічній системі $\left(\frac{кг.сек.}{м^2}\right)$:

$$\eta = \eta_{абс} \frac{0{,}001}{9{,}81} \cdot 0{,}01 \frac{1}{\frac{1}{10000}} = \eta_{абс} \frac{10000}{981000} = \frac{\eta_{абс}}{98{,}1}.$$

Коефіцієнт цей і є коефіцієнт унутрішнього тертя, або в'язкість рідини; його знайшов вперше французький гідравлик Пуазейль (Poiseuille, 1844) і для води, наприклад, у температурі 15° С має вартість $1162 . 10^{-7}$.

Коли в попередньому рівнанні [12] від конечних величин перейти до безконечно малих і взяти $v_1 - v_2 = dv$, а грубину ϱ вважати за рівну dy, то матимемо вираз для опору за руху одного шару відносно до другого у вигляді:

$$S = \eta . \omega \frac{dv}{dy} . \qquad [13]$$

Вже саме існування внутрішнього тертя може пояснити, до деякої міри, показане вище зниження висоти води (тиснення) в п'єзометричних трубках горизонтального водопроводу. Справді, через неоднакову швидкість руху різних шарів, рухової в трубі (рис. 42) води і, до того ж, як показує дослід, вона збільшується до оси труби, виникає тертя між циліндричною поверхнею радіюсу r і другою до неї концентричною радіюсу $r + dr$; тертя це перешкоджає сковзанню внутрішнього циліндру вздовж зовнішнього, на підставі попереднього, це можна подати в такому вигляді:

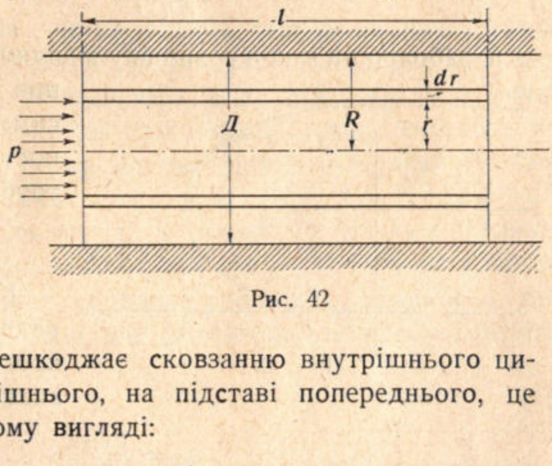

Рис. 42

$$-2\pi . r . \eta l \frac{dv}{dr} ;$$

тут знак (—) визначає, що (v) зменшується із збільшенням радіюсу (r); назвавши тиск, який треба прикласти до сторцевої поверхні, щоб перебороти цей опір, через p (на одиниці площі), можемо написати співвідношення:

$$\pi . r^2 . p = -2\pi r \eta l \frac{dv}{dr} ,$$

відки

$$dv = -\frac{p . rdr}{2\eta l} ,$$

а, інтегруючи, маємо:

$$v = -\frac{p \cdot r^2}{4\eta l} + \text{const}.$$

А що є всі підстави припускати, що коло самих стінок труби, через зчіплення матеріялу стінок з частками рідини, швидкість (v) = нулеві (далі ми побачимо потвердження цього припущення на дослідних даних), то

$$0 = -\frac{pR^2}{4\eta l} + \text{const},$$

і тепер, підставивши з останнього співвідношення вартість сталої в попереднє рівняння, маємо:

$$v = \frac{p}{4\eta \cdot l}(R^2 - r^2)$$

— параболічний закон розподілу швидкостей у трубі (рис. 43); при цьому, очевидно, максимальну вартість швидкости матимемо по осі труби:

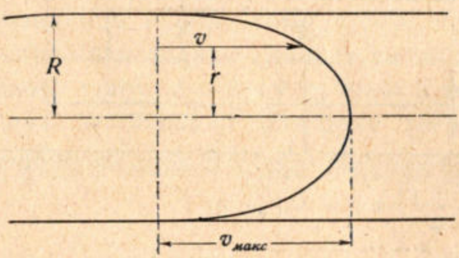

Рис. 43

$$v_{макс} = \frac{pR^2}{4\eta l}.$$

Коли впровадити середню швидкість по перекрою труби, $v_{ср}$, то, очевидно,

$$v_{ср} = \frac{v_{макс}}{2},$$

а тому

$$v_{ср} = \frac{pR^2}{8\eta l},$$

відки знаходимо тиск, потрібний для того, щоб уся маса води просунулася в трубі:

$$p = \frac{8\eta \cdot l}{R^2} v_{ср} = \frac{32 \cdot \eta \cdot v_{ср}}{D^2} \cdot l. \qquad [14]$$

Переходячи від тиску до висоти тиску (напору), матимемо:

$$h = \frac{8\eta l}{\delta R^2} v_{ср} = \frac{32 \cdot \eta \cdot v_{ср}}{\delta D^2} \cdot l \qquad [15]$$

— коли ще замінити R через $\frac{D}{2}$; останній вираз для втрати у висоті напору в трубопроводі від унутрішнього тертя знайшов на досліді ще Пуазейль, а тому він має назву формули Пуазейля.

Течія, яку ми щойно розглядали, відбуваючись паралельними струминками (лінії тока паралельні з віссю труби), а тому і названа, як ми бачили вище, паралельно струмнястою або спокійною (або ще ламінарною) течією, відбувається лише за швидкостей, що не досягають певної границі, яка залежить од діяметру труби і від роду й стану рідини; виявляється, що скоро-но швидкість течії рідини в трубі переходить цю границю, течія в трубі стає неспокійною, вихровою; в цьому випадку про паралельність течії казати вже зовсім не доводиться. За вихрового руху кожна частка рідини описує ламану зигзагувату путь, бо разом з головним рухом, що просуває масу рідини вперед, виявляється ніби-то додатковий, поперечний рух, дуже неправильної форми. Явища такого переходу рідини із спокійного стану до неспокійного за певної швидкости спостерігало багато гідравликів (Hagen, Hele-Shaw і ин.), але спеціяльно вивчав це явище не тільки з якісного, але й з кількісного боку Osborne Reynolds*); останній не тільки встановив факт існування граничної швидкости, яку він назвав критичною, але й дав для неї певну вартість, а саме:

$$v_{кр} = C\frac{\eta}{\delta d}, \qquad [16]$$

де η є коефіціент внутрішнього тертя, δ — вага рідини в $кг/м^3$, d — діяметр труби в $м$; для C можна взяти вартість ~ 20000. Для води, наприклад, за $t = 0°$ C матимемо:

$$v_{кр} \cong \frac{20000 \,.\, 0{,}00018}{1000 \,.\, d} \cong \frac{0{,}0036}{d}.$$

Пізніші досліди показали, що гранична швидкість Reynolds'а не має абсолютної вартости, що вона може мати вказану величину лише за злагодження установи для дослідження течії, геометрично подібного до злагоди Rey-

*) Papers of Mechanical and Physical Subjects, Cambridge, at the University. Press, 1901. Vol. II, page 51 і далі.

nolds'a, зокрема за однакових умов входу в трубу і за однакової шаршавости труби; за різного злагодження установ течії й різних шаршавостей гранична швидкість може набрати всяких можливих вартостей. Як ужити старанних заходів проти потрусів або збурень, вдається иноді мати ламінарну течію за швидкостей, далеко більших за граничну швидкість Reynolds'a.

Останнього часу в гідродинаміці набув дуже важливого значення вираз, подібний до [16]

$$R = \frac{vL}{\nu}, \qquad [17]$$

так зване „Рейнольдсове число", в якому L визначає якийсь характеристичний вимір (діяметр труби, ширина каналу й т. ин.), v є характеристична швидкість і $\nu = \frac{\eta}{\varrho}$ модуль в'язкости рідини; вираз цей є більш загальний, як [16], і з нього вже, як висновок, виходить Рейнольдсова критична швидкість або критичне число, коли тільки ми Рейнольдсовому числу (R) дамо певну вищевказану для C вартість. Рейнольдсове число є відношення вимірів (наприклад, у системі *м-кг-сек.*) — $\frac{v^2}{L}$ і $\frac{\nu v}{L^2}$ — основних членів, що входять до рівнання руху рідини і становлять сили інерції $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right.$, або $\left. v\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ і в'язкости $\left(\nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$, воно дає змогу встановити механічну подібність течій рідин. Справді, очевидно, що дві геометрично подібні течії рідини будуть і механічно подібні, коли вони подібні між собою що до впливу сил інерції і в'язкости, а це буде, коли Рейнольдсові числа R, обчислені за відповідними одне до одного в обох течіях вартостями v, L і ν, зливаються. Якщо, наприклад, порівнюючи дві течії цієї самої рідини, коли модуль в'язкости ν в обох випадках однаковий, добутки vL для обох течій численно будуть рівні між собою, то дві геометрично подібні течії будуть так само подібні і механічно.

Задача 6. В горизонтальній довгій трубці діяметром 0,05 *м* ми хочемо відтворити течію води, що має місце в трубі діяметром 0,5 *м*. Яку швидкість (v_1) ми повинні надати воді в трубці, щоб мати течію, механічно подібну до течії в трубці за швидкости 2 *м/сек.*?

Розвязка. За рівнанням [17], через те що $\nu_1 = \nu_2$, маємо:

$$v_1 d_1 = v_2 d_2,$$

відки

$$v_1 = v_2 \frac{d_2}{d_1} = 2 \frac{0{,}5}{0{,}05} = 20 \text{ м/сек.}$$

Задача 7. Треба випробувати модель плану (літака), ширина якого $L_1 = 0{,}5$ *м*; ширина справжнього плану 0,5 *м*. З якою швидкістю треба пересувати модель, щоб мати рух, механічно подібний до того, який має місце за справжнього льоту плану із швидкістю 40 *м/сек*.?

Розвязка. За рівнанням [17] маємо:

$$v_1 L_1 = v_2 L_2,$$

відки

$$v_1 = v_2 \frac{L_2}{L_1} = 40 \frac{1{,}5}{0{,}5} = 120 \text{ м/сек.}$$

Щоб уникнути такої великої швидкости, можна випробування моделю робити у воді; в цьому випадку, взявши модуль в'язкости для води (15° С)

$$\nu_1 = 1156 \,.\, 10^{-7}$$

і для повітря (15° С, 760 *мм*)

$$\nu_2 = 1541 \,.\, 10^{-6},$$

маємо:

$$\frac{v_1 \,.\, L_1}{\nu_1} = \frac{v_2 \,.\, L_2}{\nu_2},$$

відки

$$v_1 = v_2 \frac{L_2}{L_1} \frac{\nu_1}{\nu_2} = 40 \frac{1{,}5}{0{,}5} \cdot \frac{1156 \,.\, 10^{-7}}{1541 \,.\, 10^{-6}} \cong 9 \text{ м/сек.}$$

Роботи останніх років, як теоретичні *), так і експериментальні **), показали, що все ж і за вихрової течії рідини

---

*) Prandtl, L. Ueber Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Uerhandl. d. 3. Int. Mathem. Kongresses in Heidelberg. 1911.

Kármán. Th. Ueber laminare und turbulente Reibung. Z. f. angew. Math. u. Mech. Bd, 1, 1921.

Kármán, Th. und Lewi-Civita, T. Vorträge aus dem Gebiete der Hydro-und Aerodynamik. 1924.

**) Burgers, I. M. Verhandl. d. Kön. Akad. v. Wiss. Amsterdam. 1 Sektion, XIII, 3. 1924.

В. Н. Пинегин. Экспериментальное исследование перехода спокойного течения в вихревое в стекляном клиновом желобе. Томск. 1924. Роботу ще не зовсім закінчено й не опубліковано.

B. G. Van-der Hegge Zijnen. Z. f. Angewandte Mathem. und Mechanik. 1924.

в безпосередній близькості до стінок труби, канала й инш., в дуже тонкому шарі, що зветься межовий шар, є ламінарна течія, вона переходить далі в середині рідини у вихрову; за межу між обома течіями є ділянка, в якій швидкість течії має величину критичної швидкости Reynolds'а, від цієї межі швидкість у межевому шарі знижується біля самих стінок до нуля. Вихровий рух складається з вихрів, що зароджуються в межевому шарі через з'явлення тут підвищеного тиску, і посилаються в середину рідини; вихрі ці для свого поширення мають певну нижню межу швидкости й можуть виникати лише в тому випадку, коли для їхнього розвитку є достатній простір.

Встановлення цих засад призвело до визначення критичної швидкости Reynolds'а, як такої швидкости, за якої опір в'язкости між рідиною, що тече, наприклад, у трубі, і тією її частиною, яка пристала до стінок труби, переборено, і відбувається сковзання рухливої частини рідини по нерухливій. При цьому в межевому шарі виникає підвищений тиск, що через в'язкість поширюється на внутрішню масу рухової рідини *).

§ 4. Пульсація струмин

Списаний вихровий рух ми можемо спостерігати не лише в трубах, а й взагалі, майже в усіх природних і штучних водотоках: річках, каналах та ин. Як наслідок такого неспокійного вихрового руху, є, між иншим, так звана пульсація водяних струмин, яка наочно виявляється в тому, що в тій самій точці якогось живого розтину потоку величина швидкости хитається так у сторону збільшення, як і в сторону зменшення, коло якоїсь пересічної місцевої швидкости, иноді в значних границях. Щоб показати характер і величину пульсації струмин, подаємо на рисункові (рис. 44) один із графиків пульсації за спостереженням її на річці Бозі **); тут по осі абсцис відкладається час у секундних частках, а по осі координат швидкість у даній точці живого перекрою річки; як бачимо, пересічна за якесь межичасся

*) Weil, L. W. Neue Grundlagen der technischen Hydrodynamik. München und Berlin. 1920.

**) Инженер В. Н. Попов. Результаты работ и исследований на Южно-Бугской гидрометрической станции. Одеса. 1925, стор. 19.

швидкість визначилась у цій самій точці, приблизно, в 0,385 *м/сек.*, але протягом цього межичасся вона хиталась і вгору (до 0,414 *м/сек.*) і вниз (до 0,36 *м/сек.*).

Пульсація, як показує дослід, збільшується в міру наближення точки спостереження до дна й до берегів живого перекрою річки або каналу і зменшується в міру віддаляння від них.

Рис. 44

Остання обставина дає змогу шукати причину пульсації у впливі шаршавости стінок і дна корита, і до певної міри це правильно, але все ж основна причина лежить у властивостях самої рідини. З'явлення вказаного раніш підвищеного тиску в межевому шарі, в наслідок чого з'являються вихри, що ніби їх надсилає цей шар, спричиняється, очевидно, в масі рухової рідини до періодичних загаювань і наступних по них пришвидшувань руху часток, а це й спричиняється безпосередньо до пульсації струмин.

§ 5. Рух ґрунтових вод

Спокійну або ламінарну течію доводиться спостерігати дуже рідко, переважно в трубах малого діяметру, але в природі можна вказати, як на приклад такої течії, на течію ґрунтових вод, які, бувши, з одного боку, продуктами атмосферних опадів, почасти просочуються крізь поверхневий ґрунтовий шар, з другого боку, продуктами конденсації водяної пари, що є в атмосфері, рухаються в товщі водопроникливих шарів, ідучи за їхнім спадом. Почасти пробиваючись між окремими зернятами ґрунту, аналогічно до того, як якась рідина проходить крізь пісок, вугляний порошок і т. и., почасти просочуючись крізь саму товщу ґрунтових зернят, ґрунтові води течуть подібно до того, як тече вода капілярними трубками; до цього тиснення можна, отже, застосувати закон Пуазейля, тоб-то, иншими словами, застосувати рівнання

$$h = \frac{8\,\eta}{\delta r^2} vL;$$

а що залежно від характеру й роду водопроникливого шару і радіюс пор r, і коефіцієнт η, що залежить у даному випадку від роду розчинених у воді речовин, змінюватимуться, то ми можемо попереднє співвідношення подати в такому вигляді:

$$h = mvL,$$

де під v треба розуміти вже швидкість просочувань ґрунтових вод, під m — дослідний коефіцієнт, залежний від роду й стану ґрунту, а під h і L — відповідно, напір, що під ним відбувається рух ґрунтових вод, і довжину пути просочування; з останнього співвідношення можемо добути ще таке:

$$v = k\frac{h}{L},$$

або, заміняючи h і L на диференціяльні вирази: dz (напір) і відповідно dx (елементарна путь просочування), остаточно матимемо:

$$v = k\frac{dz}{dx}, \tag{18}$$

де $k = \frac{1}{m}$, як показано вище, є дослідний коефіцієнт.

Припустімо тепер, що на подаваному рисункові (рис. 45) позначено розріз ґрунту: лінія AB є горизонтальна поверхня ґрунту, A_1B_1 — поверхня водонепроникливого підстілкового шару; A_2B_2 — поверхня ґрунтових вод у стані спокою над водонепроникливим шаром A_1B_1. Припустімо, що ми викопали округлий колодязь, радіюсу r, до водонепроникливого шару. За нормальних умов рівень води в колодязі буде на рівні A_2B_2; коли ми з колодязя почнемо в якийсь спосіб висмоктувати воду (смоком, або просто вичерпувати відром і т. и.), то на місце висмоктуваної води з водоносного шару почне надходити инша, що доповнює першу; коли ми будемо висмоктувати води більше, як її надходить з водоносного шару, рівень води в колодязі знижуватиметься, швидкість підтоку води до колодязя збільшуватиметься, через підвищення напору, але за достатнього зниження рівня води в колодязі й відповідного збільшення напору, нарешті може встановитись рівновага між кількістю висмоктуваної й підтеклої води. Поверхня ґрунтової води коло колодязя вже, очевидно, не буде горизонтальною площиною, а набере форми якоїсь поверхні обертання, що її перекрій меридіональною площиною можна виобразити кривими CD, EF, що мають назву депресійних кривих, або просто депресій. Уявімо тепер концентричний з поверхнею колодязя вертикальний циліндр, радіюсу x і висоти z (див. рис. 45);

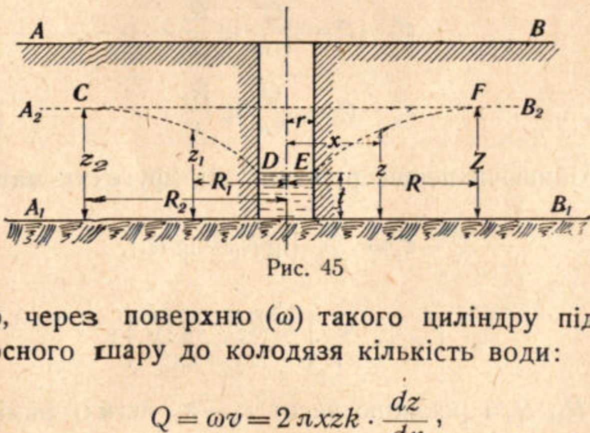

Рис. 45

очевидно, через поверхню (ω) такого циліндру підтікатиме з водоносного шару до колодязя кількість води:

$$Q = \omega v = 2\pi xzk \cdot \frac{dz}{dx}, \qquad [19]$$

відки маємо:

$$zdz = \frac{Qdx}{2\pi kx},$$

а, інтегруючи цей вираз у границях змін x від $x=r$ до $x=R$, розуміючи під R віддаль, на яку поширюється депресійна крива, або на якій остання зливається з простою A_2B_2, та відповідні границі зміни z позначивши через t і Z, матимемо:

$$Z^2 - t^2 = \frac{Q}{\pi k} \lg \frac{R}{r},$$

відки можна визначити кількість води, що підтікає до колодязя:

$$Q = \pi k \cdot \frac{Z^2 - t^2}{\lg \frac{R}{r}} \cdot \qquad [20]$$

За відомого вже Q й визначеного R можна обчислити глибину води в колодязі:

$$t = \sqrt{Z^2 - \frac{Q}{\pi k} \lg \frac{R}{r}},$$

або обчислити за безпосередньо виміряною глибиною t. Рівнання кривої депресії, очевидно, буде:

$$z^2 - t^2 = \frac{Q}{\pi k} \cdot \lg \frac{x}{r} \cdot$$

Очевидно, далі, що для якихсь двох вертикалей, що є від оси колодязя на віддалі R_1 і R_2, маємо:

$$z_1^2 - t^2 = \frac{Q}{\pi k} \lg \frac{R_1}{r},$$

$$z_2^2 - t^2 = \frac{Q}{\pi k} \lg \frac{R_2}{r},$$

відки, відіймаючи перше рівнання від другого, матимемо:

$$z_2^2 - z_1^2 = \frac{Q}{\pi k} [\lg R_2 - \lg R_1],$$

а тепер

$$z_2 + z_1 = \frac{Q}{\pi k} \left[\frac{\lg R_2 - \lg R_1}{z_2 - z_1} \right];$$

а що Q, R_1, R_2 і ріжницю висот $z_2 - z_1$ легко виміряти, то останнє співвідношення дає змогу обчислити $z_2 + z_1$, а, знавши цю суму й ріжницю $z_2 - z_1$, знайти z_2 і z_1, отже, і глибину вкладення водонепроникливого шару.

Задача 8. Дві водойми (рис. 46), що мають глибини h_1 і h_2, розділяє земляна гатка. Визначте кількість води, що просочується крізь гатку.

Розвязка. Очевидно, рівень води, яка просочується крізь гатку, міститься по кривій депресії; тому до цієї задачі можна застосувати всі наші попередні міркування. Таким робом, назвавши площу просочування ω, а швидкість v, маємо кількість (Q) води, яка просочується крізь гатку:

$$Q = \omega v;$$

підставивши сюди, згідно з [18], вартість швидкости v і вважаючи Q за кількість води, яка просочується на одиниці довжини гатки, маємо:

$$Q = -kh\frac{dh}{dx};$$

тут знак (—) визначає, що h зменшується із збільшенням x.

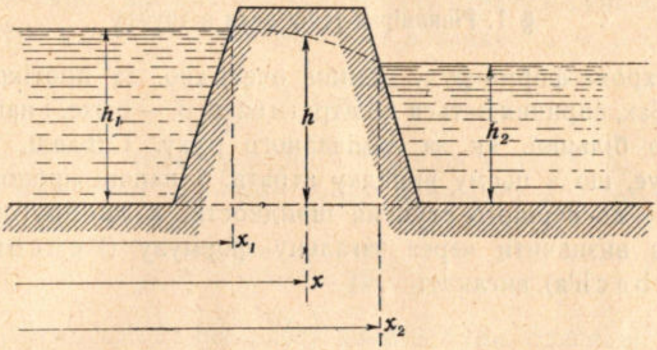

Рис. 46

З останнього співвідношення знаходимо:

$$hdh = -\frac{Q}{k}dx,$$

і, інтегруючи в границях зміни h і x, матимемо:

$$\frac{h_1^2 - h_2^2}{2} = -\frac{Q}{k}(x_1 - x_2),$$

відки визначаємо відшукуване Q:

$$Q = \frac{k}{2} \cdot \frac{h_1^2 - h_2^2}{x_2 - x_1}.$$

РОЗДІЛ III

РІВНОМІРНА ТЕЧІЯ ВОДИ В ТРУБАХ

§ 1. Рівномірна течія води в трубах

Вихрова форма руху рідини, очевидно, за протікання її в трубах, спричинюється до втрати енергії, — отже, і напору — значно більшої, як за ламінарного руху. Справді, дослід показує, що в цьому випадку втрата в напорі пропорційна вже не до першого ступеня швидкости, а до другого, і її можна визначити через загальну формулу (Вейсбаха — Weisbach'а) вигляду:

$$h=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}, \qquad [1]$$

де λ є дослідний коефіцієнт, що залежить од роду й стану стінок труби, а так само від роду й стану рідини, від діяметра труби й від швидкости руху, і для грубих підрахунків иноді його вважають за рівний 0,03 — 0,025.

Що справді так повинно визначати втрату в напорі в даному випадку, це можна бачити з таких міркувань *): відомо, що паралельний рух за якоїсь певної швидкости (критичної) перестає існувати і замість його виникає вихровий рух, який самою суттю мусить іти в супроводі иншого закону опору, ніж паралельний; перехід цей від однієї форми течії до другої відбувається майже завжди дуже швидко. Хоча закона для нової форми руху ми й не знаємо, але можемо припустити, що для механічно подібних течій рідини, отже, для таких, у яких Рейнольдсові числа (R) однакові, так само і цей перехід повинен відбуватися при однакових числах R. У такому випадку, в момент, коли ви-

---

*) Th. Pöschl. Lehrbuch der Hydraulik. 1924, стор. 105.

никає вихрова форма руху, обидві вартості втрат у напорі для обох форм руху повинні зливатись, хоча б уже в найближчу мить і почав існувати инший закон. Можливість такого припущення лежить виключно у швидкому переході однієї форми руху в иншу. Знавши тепер, що для паралельного руху втрати в напорі визначаються на одиниці довжини через відношення [15] (розділ II):

$$h_{w_1} = \frac{32\eta v}{\delta D^2} = \frac{32 \,.\, \nu \,.\, v}{g D^2}$$

і припустивши, що для вихрового руху втрату можна визначити через загальне співвідношення вигляду:

$$h_{w_2} = \varepsilon \frac{v^a}{D^\beta},$$

ми повинні для моменту переходу обидві вартості h_{w_1} і h_{w_2}, як для механічно подібних течій, порівняти між собою, і, таким робом:

$$\frac{32\nu v}{g D^2} = \varepsilon \frac{v^a}{D^\beta}.$$

Для того, щоб Рейнольдсові числа були однакові, очевидно, треба, щоб певний з цього рівнання вираз $\frac{v^{a-1} D^{2-\beta}}{\nu}$ був Рейнольдсове число, тоб-то:

$$\frac{v^{a-1} D^{2-\beta}}{\nu} \cong \frac{vD}{\nu} = R,$$

а це можливо, коли тільки

$$a = 2,$$
$$\beta = 1,$$

а тоді

$$h_{w_2} = \varepsilon \frac{v^2}{D},$$

тоб-то для втрати в напорі матимемо вираз, цілком згідний із співвідношенням [1], що, як уже зазначалося, було знайдено дослідом.

Звичайно, за течії рідин у трубі опір од унутрішнього тертя — сковзання одних шарів рідини по инших існує і далі, але можна показати, що цей опір проти опору від вихрового руху дуже малий. Розвяжімо справді таку задачу.

Задача 1. Дано трубу, довжиною $l=1000$ *м*, діяметром $d=0{,}5$ *м*; трубою протікає вода з температурою 20° С з пересічною швидкістю $v=2$ *м/сек.* Треба відшукати опір од унутрішнього тертя і від безладного руху.

Розвязка. Розвязуючи задачу, визначаймо не втрату в напорі, а відповідний тиск, потрібний, щоб просунути воду трубою.

Тиск для переборення внутрішнього тертя буде, згідно із співвідношенням [14] розділу II:

$$p_1=\frac{32\eta . v . l}{d^2}=\frac{32 . 0{,}000103 . 2 . 1000}{0{,}25}=26{,}4\ кг/м^2.$$

Тиск для переборення вихрового опору, згідно із співвідношенням [1] розділу III, повинен мати величину:

$$p_2=0{,}025\,\frac{1000}{0{,}5}\,\frac{4}{2 . 9{,}81}\cdot 1000=10193\ кг/м^2.$$

Одержані результати цілком потверджують надзвичайну величину вихрового опору проти опору внутрішнього тертя, а що в практиці доводиться майже завжди, за дуже рідкими винятками, мати справу з рухом вихровим (швидкості завжди вищі за критичну), то зрозуміла потреба вміти правильно й точно визначати вихровий опір.

Тому не дивно, що дуже багато гідравликів працювали над визначенням істинної величини втрати в напорі підчас протікання води трубами, і всяких формул для визначення цього опору в технічній літературі знайдеться чимало. І немає нічого дивного в тому, що гідравлики знаходили різні вартості для цієї втрати, бо, по-перше, досліди роблено над трубами з різного матеріялу (залізні труби, чавунні, мідяні, цинкові й т. и.), або з одного матеріялу, але різних його якостей або способів добування труб (нютові залізні труби й зварені, чавунні труби з дрібного зернястого чавуна й т. и.). По-друге, труби могли бути різних строків служби (нові труби, труби старі), а дослід учить, що вже річний строк служби, наприклад, водопровідної труби, змінює і її поверхню і діяметр, бо на внутрішній поверхні труби осідають з води всякі солі, що зменшують діяльність труби і змінюють її поверхню, отже, і шаршавість. За даними, наприклад, професора Banki*), річні осади в трубах гамбурзького водогону (Ельба) діяметром $d = 102$, 152, 305 і 508 *мм* визначились, відповідно в 1,25, 1,75, 2,07 і 2,25 *мм*. По-третє, методи переведення дослідів, а також і вимірювальні прилади, звичайно, вдосконалюється, і результати, одержані з дослідів, переведених кілька десятків років тому, можуть не відповідати результатам дослідів сучасних. Нарешті, четверте, сама вода в різних містах має різний склад, і, звичайно, ця обставина так само повинна відбитися на результатах дослідів. Тому, не наводячи цілої низки, може й цікавих, дослідних даних і формул, у дальшому ми вкажемо тільки на такі співвідношення для визначення вихрових опорів у трубах, які заслуговують на особливу увагу.

Формула Lang'а**) (1907 р.) на підставі даних попередніх, відомих у літературі, дослідів і понад 300 своїх власних дослідів, переведених за швидкостей, що були в границях від 0,004 *м* до 53 *м*, Lang вивів для коефіцієнта λ у співвідношенні [1] таку залежність:

$$\lambda = a + \frac{b}{\sqrt{vd}}, \tag{2}$$

де v є швидкість і d — діяметр труби в метрах, сталі ж a і b для чистої води мають такі вартості: 1) для цілком гладеньких нових труб (з металу, скла, полакованого дерева та ін.) $a = 0{,}012$; 2) для нових або добре чищених і старанно монтованих чавунних труб $a = 0{,}020$; 3) стала b залежить од в'язкости рідини, отже, від температури, і для води з температурою $t = 3°$, $20°$, $100°$ C відповідно дорівнює 0,0022, 0,0018 і 0,0004.

Формулу Biel'я***) (1907) так само виведено на підставі літературних матеріялів і перевірено власними дослідами; вона має вигляд:

$$h = \frac{Lv^2}{R}\left(a + \frac{f}{\sqrt{R}} + \frac{b}{v\sqrt{R}}\right), \tag{3}$$

*) D. Banki. Energie-Umwandlungen in Flüssigkeiten. 1921. Bd. 1, стор. 70.

**) Hütte, 21 Aufl., Bd. 1. 1911, стор. 293.

***) R. Biel. Über den Druckhöhenverlust bei Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten. Mitteilungen über Forschungsarbeiten. 1907. Heft 44.

де L є довжина труби в кілометрах, v — швидкість і h — напір у метрах, R — так званий гідравлічний радіюс, що дорівнює відношенню площі (ω) поперечного перекрою труби до змоченого периметру $\left(R=\frac{\omega}{P}\right)$, нарешті, a, f, b — коефіцієнти, при цьому (f) залежить од шаршавости труби, а (b), крім того, од в'язкости рідини $\left(b=b_0\frac{\eta}{Q}\text{, де } b_0 \text{ нова стала}\right)$. Для води, наприклад, у температурі в 12° С, коли позначити категорії шаршавости відповідно через 0, I, II, III, IV, V, маємо такі вартості цих коефіцієнтів:

Таблиця 2

Категорії шаршавости	0	I	II	III	IV	V
Коефіцієнт a .	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
" f .	0	0,0064	0,018	0,036	0,54	0,07
" b .	0	0,0118	0,0088	0.0057	0,0032	0,0032

Ці категорії шаршавости встановив Biel у такий спосіб:

Категорія 0 належить до ідеально гладеньких труб; з великим наближенням до цієї категорії можна віднести, наприклад, шаршавість скляних трубок, особливо старанно виготуваних;

Категорія I належить до труб мідяних, олив'яних, цинкових, тягнутих без шва, скляних трубок, трубок з виструганого й полірованого дерева;

Категорія II належить до залізних труб, газових труб, труб з виструганого дерева, чавунних труб, асфальтованих, фарбованих олійною фарбою;

Категорія III належить до нових чавунних труб, бетонних труб, особливо старанно виготуваних, труб дерев'яних, довбаних;

Категорія IV належить до старих чавунних труб, труб із звичайного бетону, труб з неструганих дощок;

Категорія V належить до труб із звичайного цегляного мурування, ламаного каміння та иншого.

Формулу Dupuit (1865) легко добути з формули [1], підставивши замість λ числову вартість 0,0302; вона має велике поширення у водопровідній справі, через те що замість швидкости до неї входить кількість Q (в $м^3/сек.$) поданої води і діяметру труби; справді, маємо очевидне співвідношення:

$$v=\frac{4Q}{\pi d^2},$$

або

$$v^2 = \frac{16\,Q^2}{\pi^2 d^4},$$

підставивши цю вартість v^2 у формулу [1] і рівняючи $\lambda = 0{,}0302$, матимемо:

$$h = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = 0{,}0302\,\frac{16}{3{,}14^2\,2\,.\,9{,}81}\cdot\frac{Q^2}{d^5}\,l \cong 0{,}0025\,\frac{Q^2}{d^5}\,l, \qquad [4]$$

або, просто:

$$h = \beta\,\frac{Q^2}{d^5}\,l,$$

де

$$\beta = \frac{1}{400}\,.$$

Формула Фламана*) (Flamant, 1892) і Блазіюса (Blasius, 1913)**):

$$\lambda = \frac{a}{\sqrt[4]{vd}} \qquad [5]$$

Рис. 47

цікава тим, що Фламан вивів її на підставі численних дослідів, а Блазіюс потвердив її своїми теоретичними висновками; в цій формулі коефіцієнт a, за Фламаном, для води (температури $t = 15^\circ$ C) має вартість:

для труб олив'яних, скляних і з білого заліза . 0,0104 — 0,122,
для труб залізних і сталевих, вживаних 0.0180

Що ж до розподілу швидкостей у масі рухомої в трубі води, то, за дослідами з водопровідними трубами м. Detroit***) знайдено, що коли швидкості води в різних точках перекрою труби (рис. 47) подати векторами v_1, v_2, v_3, то кінці їхні лежатимуть на еліпсоїді обертання ($ABCD$), у якого мала

*) Flamant, A. Hydraulique. Paris. 1909.

**) Blasius, H. Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Mitteilungen über Forschungsarbeiten. Heft 131. 1913.

***) G. S. Williams, C. W. Hubbel, G. H. Frenkell. Transl. of the American Soc. of Civ. Eng. Bd. 47. 1902.

вісь є діяметр (d) труби, а велика вісь — максимальна швидкість ($v_{макс}$) води вздовж оси труби. Отже, вартість пересічної швидкости ($v_{прс}$) легко здобути з таких міркувань: очевидно, кількість рідини, що протікає в трубі за одну секунду, можна, з одного боку, уявити, як:

$$Q = \omega \, . \, v_{прс},$$

де ω є площа попереднього розтину труби, а, з другого боку, згідно з рисунком:

$$Q = \omega \frac{v_{макс}}{2} + \omega \frac{2}{3} \frac{v_{макс}}{2},$$

а тому

$$\omega \, . \, v_{прс} = \omega \frac{v_{макс}}{2} + \omega \frac{2}{3} \frac{v_{макс}}{2},$$

відки маємо:

$$v_{прс} = \frac{5}{6} v_{макс} = 0{,}833 \, v_{макс}.$$

За вищезазначених дослідів для чавунних труб діяметром 127, 305, 406, 762, 1067 *мм* і для залізних труб діяметром 51 *мм* знайдено, при дуже різних швидкостях, що пересічно $v_{прс} = 0{,}84 v_{макс}$, при цьому для труб з більшим діяметром пересічна швидкість трохи більша за цю середню величину; за більших швидкостей зростає так само і відношення $\frac{v_{прс}}{v_{макс}}$, але збочування від пересічної величини не перевищують 3%.

Відси можна зробити висновок, що в довгих простих трубах пересічну швидкість з більшою точністю можемо визначати за швидкістю уздовж оси труби, що легко зробити трубкою Піто (Pitot) системи Amsler'а (див. розділ IX, § 2).

Цікаво відзначити, що згаданий вище Th. v. Kármán *), на підставі аналізи турбулентного руху рідини, встановив теоретично так званий $y^{\frac{1}{7}}$-закон для розподілу швидкости течії рідини, яка обтікає стінку, де y є віддаль розглядуваної швидкости від стінки. На підставі цього закону добу-

*) Th. Kármán. Über laminare turbulente Reibung. Zeit. f. angew. Mat. u. Mech. 1. 1921, № 4, стор. 233—252.

ваємо таке співвідношення для розподілу швидкостей у трубі радіюсу (R):

$$v = v_{макс}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^n\right]^{\frac{1}{7}},$$

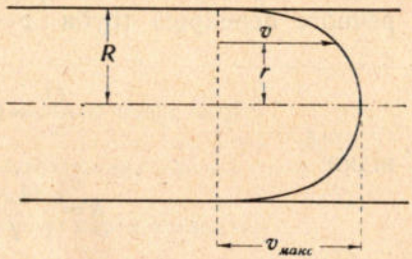

Рис. 48

яке при $n = 1{,}25 - 2$ з більшою точністю відповідає дослідним даним, між иншим і вищеподаним.

Розподіл швидкостей у трубі за вихрової течії, який дає це співвідношення, виразно показує рис. 48 на порівняно рівномірний розподіл швидкостей по перекрою труби і хуткий спад їх до нуля коло самих стінок труби.

§ 2. Загальні основи розрахунку водопроводів

У попередньому параграфі подано співвідношення для втрати в напорі в трубопроводах у формі:

$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Це співвідношення, завівши замість діяметра труби гідравлічний радіюс, очевидно, можна перетворити на таке:

$$h = \lambda_0 \frac{l}{R} \frac{v^2}{2g},$$

відки

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\lambda_0}} \sqrt{\frac{h}{l} R}. \qquad [6]$$

Позначивши тепер $\frac{h}{l}$ через I, при чому в даному випадку I становитиме собою втрату напору на одиницю довжини труби („п'єзометричний спад“), ми можемо співвідношення [6] написати в такому вигляді:

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\lambda_0}} \sqrt{RI},$$

а, позначивши ще $\sqrt{\frac{2g}{\lambda_0}}$ через C і завівши замість швидкости v її вартість через відношення витрати k площі поперечного перекрою труби $\left(v=\frac{Q}{\omega}\right)$, матимемо:

$$\frac{Q}{\omega}=C\sqrt{R.I},$$

відки:

$$k=\frac{Q}{\sqrt{I}}=\omega C\sqrt{R}. \qquad [7]$$

Відношення $\frac{Q}{\sqrt{I}}$ зветься модуль витрати або коефіцієнт пропускальности*), і його широко вживається, як буде показано далі, коли розраховують водопровідні й каналізаційні сили. Для коефіцієнту C, що залежить од шаршавости стінок, найбільш уживане для даних випадків співвідношення — це скорочена формула Ґанґільє-Куттера (Ganguillet-Kutter, 1869):

$$C=\frac{23+\frac{1}{n}}{1+\frac{23n}{\sqrt{R}}}. \qquad [8]$$

Останнє значення C вживається особливо в розрахунках каналізаційних труб (коли, тільки як виняток, спад $I<0{,}0005$), при цьому вартість n вибирається в границях $0{,}012-0{,}014$ без ріжниці матеріялу труб, бо останні в значній мірі вкриваються вибрудами, що, звичайно, зрівнює вказані одміни в шаршавості стінок.

Для водопроводів, що були у вжиткові, і в Европі і в Америці рекомендується брати, за Kutter'ом (1868 р.):

$$C=\frac{100}{1+\frac{0{,}25}{\sqrt{R}}}\ (м). \qquad [9]$$

Взагалі у водопровідній і каналізаційній справі вартість коефіцієнту (n) для формули [9] дається в наступній таблиці 3:

*) Коефіцієнт пропускальности завів у практику розрахунку водопровідних труб інженер К. М. Ігнатов („Из практики проектирования инженерных сооружений". Москва, 1908 р.).

Таблиця 3

	Рід стінок	n
1	Чисті (нові) ганчарні, чавунні — залізні труби, добре укладені й сполучені	0,011
2	Водопровідні труби в нормальних умовах, без помітної інкрустації; дуже чисті ринви	0,012
3	Ринви в нормальних умовах, трохи забруднені водопровідні труби	0,013
4	Забруднені труби (водопровідні й ринви)	0,014
5	Надзвичайно забруднені водостоки	0,015

Треба відзначити, що для коефіцієнту C складено таблиці, які дають його вартість залежно від величин гідравлічного радіюсу R і міри шаршавости*), а це, звичайно, значно полегшує всі розрахунки.

Для трубопроводів взагалі дуже поширена ще формула Маннінґа (Manning, 1890 р.):

$$C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}}, \qquad [10]$$

де n є коефіцієнт шаршавости, для якого автор бере вартість за Ґангільє і Куттером.

Раніш було вказано, що вживання коефіцієнту пропускальности дуже поширене в розрахунках водопровідних і каналізаційних труб, справді, користуючися з цього коефіцієнту, можна здобути такий ряд співвідношень:

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{Q^2}{k^2} l \\ I &= \frac{Q^2}{k^2} \\ Q &= k\sqrt{I} \\ k &= a d^5 \end{aligned}\right\}, \qquad [11]$$

при цьому для модулю витрати (k) або його квадрату (k^2) є вже готові таблиці вартостей залежно від діяметра труб

*) Див. проф. Н. Н. Павловский. Гидравлический справочник. Ленинград, 1924, відки й запозичено вартості коефіцієнтів (n) для водопровідних і каналізаційних труб.

і взятого коефіцієнту C. В наступній таблиці (табл. 4) подано значення k^2 при коефіцієнті C за Маннінґом і Куттером*).

Таблиця 4

Діяметр труб у міліметрах	Вартості k в *літр/сек.*^{2} і k^2 при коефіцієнтах C			
	за Маннінґом		за Куттером	
	k	k^2	k	k^2
50	10,4	108,3	6,782	45, 99
75	32,9	1083,6	21,43	459, 25
100	70,7	$5{,}0 \cdot 10^3$	48,10	$2{,}314 \cdot 10^3$
125	126,1	$15{,}9 \cdot 10^3$	89,84	$8{,}072 \cdot 10^3$
150	202,5	$41{,}0 \cdot 10^3$	149,37	$22,\ 31 \cdot 10^3$
175	300,8	$90{,}5 \cdot 10^3$	229,20	$52,\ 53 \cdot 10^3$
200	423,1	$179{,}0 \cdot 10^3$	331,70	$110,\ 03 \cdot 10^3$
250	746,3	$557{,}0 \cdot 10^3$	613,59	$376,\ 50 \cdot 10^3$
300	1187,4	$1410{,}0 \cdot 10^3$	1012,00	$1024,\ 00 \cdot 10^3$

В цій таблиці вартості (k) обчислено для C за Маннінґом при коефіцієнті шаршавости $n = 0{,}011$, тоб-то для труб чистих.

Що ж до коефіцієнту a, то його можна взяти відповідно для ходових величин $\lambda = \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}$, рівний 400, 500, 600.

Користуючись тепер із співвідношень [11] і вартостей модулю витрати й коефіцієнту a, можна багато з питань розрахунку простих водопроводів (тоб-то розрахунку водопровідних тіл з витратою лише на кінці труби) звести до простого добору діяметрів труб за модулями витрати, як це буде показано на зразкових завданнях.

Коли водопровідна труба розподіляє воду на путі (складні водопроводи), то повинно дати довжини окремих ділянок труби, кількість протічної цими ділянками води (або витрати у вузлових точках) і напори у вузлових точках. У цьому випадку відшукування діяметрів для окремих ділянок за відповідними модулями втрати ведеться за попе-

*) Докладніші таблиці вартостей за Куттером див. Н. Н. Павловский. „Гидравлический справочник", 1924, або Астров. „Гидравлика". Москва, 1911 р.

реднім; а що в таблицях діяметри труб не відповідатимуть точно визначеним за розрахунком модулям, то треба вибирати найближчі своїми вартостями і до того так, щоб, з одного боку, труби коштували найменше, а з другого боку, втрата в напорі не була більша за дану величину.

§ 3. Економічний розрахунок водопроводів

Розраховуючи водопровідні лінії й мережі, треба мати на увазі не тільки вартість труб, але й експлоатаційні витрати водопроводу. В цьому випадку розрахунок лінії або мережі провадиться так.

За даною кількістю води Q визначають, задавшись різними швидкостями: $v_1, v_2, \ldots$, діяметри труб. Знавши вартості одиниці (фут, метр) довжини труб відповідних діяметрів, знаходять при даних їхніх довжинах цілі вартості лінії або мережі. Додавши вартість укладання труб, дістають остаточні вартості лінії або мережі: K_1, K_2. Щоб вивести строк амортизації, добувають певні щорічні амортизаційні витрати, додавши до них відсотки на капітал, відсотки на ремонт і щорічні витрати на обслуговування, добувають суми (S_1, $S_2, \ldots$) цілковитих щорічних витрат на мережу, залежно від вибраної швидкости води в трубопроводах; ці вартості позначають (рис. 49), як ординати, в простокутній системі координат, а по осі абсцис одкладають відповідні швидкості v_1, $v_2 \ldots$; добуті точки S_1, $S_2 \ldots$ кінців ординат сполучають кривою, яка, очевидно, дасть зміну річних витрат на мережу залежно від обраної швидкости течії води в трубопроводах, при цьому ці витрати зменшуватимуться разом із збільшенням обраної швидкости.

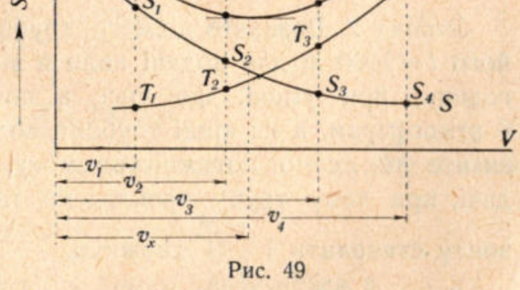

Рис. 49

З другого боку, залежно від зміни швидкости протікання води в трубопроводах, змінятимуться втрати напору (h_w) в останніх од вихрового опору. Ці втрати будуть то більші, що більші швидкості. Очевидно, далі, що потужності смоків $\left(N=\frac{\delta Q(H+h_w)}{75\eta}\right.$, де η є коефіцієнт корисної дії смоку$\left.\right)$ повинні збільшуватись, збільшаться їхні вартості й експлоатаційні витрати на них (паливо або кількість кіловат електричної енергії, мастило, витрати на персонал, що обслуговує, то-що). Хай вартості смоків будуть відповідно: $L_1, L_2 \ldots$, амортизаційні річні витрати плюс річна вартість палива або електричної енергії, мастила та ін. будуть: $T_1, T_2 \ldots$, виображаючи нові річні витрати знову як ординати для відповідних швидкостей, відкладуваних по осі абсцис, матимемо ряд нових точок $T_1, T_2 \ldots$, і, сполучаючи їх, знайдемо нову криву (T) річних витрат на смокову станцію, при цьому ці витрати, очевидно, зростатимуть, як підвищуватиметься швидкість води в трубопроводах. Підсумовуючи тепер річні витрати на станцію й мережу (в окремому випадку на одну лінію), матимемо нову криву ($S+T$); провівши до останньої дотичну, паралельну з віссю абсцис і, визначивши її точку дотикання з кривою, знісши останню на вісь абсцис, знайдемо ту швидкість v_x, за якої річні витрати на станцію й трубопроводи будуть найменші.

§ 4. Задачі на розрахунок трубопроводів

Задача 2. Визначте діяметр трубопроводу, що довжина його $l=1000$ *м* для подачі води в кількості 20000 відер за годину, при умові, що тиск з початку труби дорівнює 6 атмосферам, а на кінці трубопроводу — 4 атмосферам; визначте так само потужність смоку, потрібну для цієї подачі, при чому трубу прокладено так, що узвіз до горизонту становить $1\frac{1}{2}\%$ довжини.

Розвязка. Ріжниця тисків на кінцях трубопроводу дорівнює 2 *атм.* або 20 *м* водяного стовпа; відіймаючи з цієї ріжниці висоту узвозу труби в 15 *м*, матимемо втрату в напорі на опір в 5 *м*, відси п'єзометричний спад $I=\frac{5}{1000}=0{,}005$.

Кількість подаваної води за секунду дорівнює:

$$Q = \frac{20000 \,.\, 12{,}3}{3600} = 68{,}3 \frac{літр}{сек.}.$$

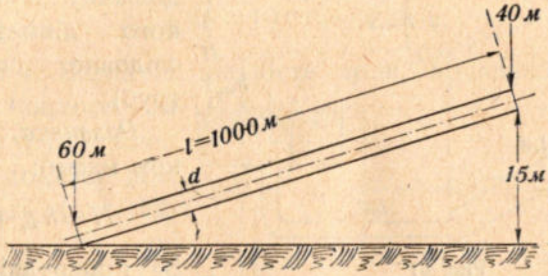

Рис. 50

Таким робом, коефіцієнт пропускальности матиме вартість:

$$k = \frac{Q}{\sqrt{I}} = \frac{68{,}3}{0{,}005} = \frac{68{,}3}{0{,}071} = 962 \frac{літр.}{сек.},$$

для якого за таблицею 4 ближчий підхожий більший модуль дорівнює 1012 ($k^2 = 1024{,}0 \,.\, 10^3$), відповідний діяметрові труби 300 *мм.*

За формулою Dupuit, та сама задача розвязується так. Втрату в напорі, що дорівнює, за умовами задачі, 5 *м*, визначиться, згідно з основним співвідношенням:

$$h_w = 5 = 0{,}0025 \frac{Q^2}{d^5} l,$$

відки, при $l = 1000$ *м* маємо:

$$d^5 = \frac{Q^2}{2} = \frac{0{,}00466}{2} = 0{,}00233,$$

а тепер

$$d \cong 300 \text{ мм}.$$

За вказаної втрати в напорі повна висота нагнітання буде:

$$H + h_w = 15 + 5 = 20 \text{ м},$$

а тому потрібна потужність смоку визначиться в

$$N = \frac{\delta \,.\, Q(H + h_w)}{75 \,.\, \eta} = \frac{1000 \,.\, 0{,}0683 \,.\, 20}{75 \,.\, 0{,}8} = 22{,}6 \cong 23 \text{ мех. коня},$$

коли взяти коефіцієнт корисної дії смоку $\eta = 0{,}8$.

Задача 3. Треба визначити кількість протічної з одного резервуара до другого води (рис. 51), при цьому трубопровід складається в довжину з труб різного діяметра (послідовне сполучення труб).

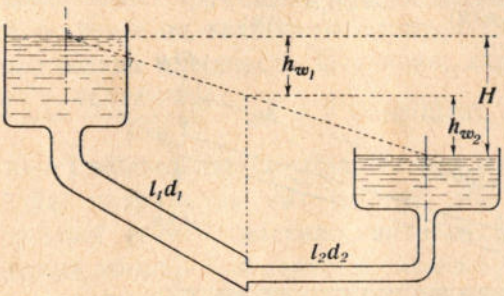

Рис. 51

Розвязка. За рисунком маємо:

$$H = h_{w_1} + h_{w_2}.$$

За попереднім, згідно з [11]:

$$h_{w_1} = q_1^2 \frac{l_1}{k_1^2},$$

$$h_{w_2} = q_2^2 \frac{l_2}{k_2^2}.$$

де всі вартості вхідних величин треба брати в дециметрах; отже (тому що, очевидно, $q_1 = q_2 = q$):

$$H = h_{w_1} + h_{w_2} = q^2 \left(\frac{l_1}{k_1^2} + \frac{l_2}{k_2^2} \right),$$

і взагалі, коли б послідовно було сполучено n труб:

$$H = h_{w_1} + h_{w_2} + \cdots + h_{w_n} = q^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{l_i}{k_i^2}.$$

Хай, наприклад,

$$H = 35\ м, \quad l_1 = 1000\ м, \quad l_2 = 500\ м, \quad d_1 = 2\ дц, \quad d_2 = 1{,}5\ дц,$$

тоді маємо:

$$350 = q^2 \left[\frac{1000 \,.\, 10}{110{,}0 \,.\, 10^3} + \frac{500 \,.\, 10}{22{,}31 \,.\, 10^3} \right] = q^2\, [0{,}0906 +$$

$$+ 0{,}2241] = 0{,}3147 q^2,$$

відки

$$q^2 = \frac{350}{0{,}3147} \cong 1112$$

або

$$q \cong 33{,}4 \frac{літр.}{сек.},$$

а тепер

$$h_{w_1} = 1112 \cdot \frac{1000 \,.\, 10}{110{,}3 \,.\, 10^3} = 10{,}08,$$

$$h_{w_2} = 35 - 10{,}08 = 24{,}92 \text{ м}.$$

Задача 4. Визначте кількість води, подаваної з одного баку до иншого, за умови, що трубопровід на деякій довжині розгалужується (рис. 52) на кілька ліній, які знову сполучаються в певному пункті (паралельне сполучення труб).

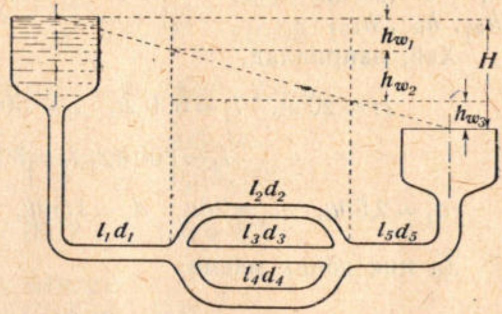

Рис. 52

Розвязка задачі ґрунтується на припущенні, що втрати напору в розгалуженнях однакові; тоді

$$H = h_{w_1} + 3h_{w_2} \text{ (тому що } h_{w_2} = h_{w_3} = h_{w_4}) + h_{w_5};$$

$$q_1 = q_2 + q_3 + q_4 = q_5 = q;$$

$$q_2^2 \frac{l_2}{k_2^2} = q_3^2 \frac{l_3}{k_3^2} = q_4^2 \frac{l_4}{k_4^2};$$

$$h_{w_1} = q_1^2 \frac{l_1}{k_1^2}; \quad h_{w_2} = q_2^2 \frac{l_2}{k_2^2}; \quad h_{w_5} = q_5^2 \frac{l_5}{k_5^2};$$

відки маємо:

$$q_3 = q_2 \sqrt{\frac{l_2}{l_3} \frac{k_3^2}{k_2^2}}; \quad q_4 = q_2 \sqrt{\frac{l_2}{l_4} \cdot \frac{k_4^2}{k_2^2}};$$

а тепер

$$q = q_2 + q_3 + q_4 = q_2 \left[1 + \sqrt{\frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{k_3^2}{k_2^2}} + \sqrt{\frac{l_2}{l_4} \cdot \frac{k_4^2}{k_2^2}}\right] = q_2 \cdot m \cdot$$

Останнє співвідношення дає змогу визначити витрату q_2, отже, за попереднім співвідношенням, і витрати q_3 і q_4 через витрату q, а вставивши одержану вартість витрати q_2

у вираз для повного напору H:

$$H = q_1^2 \frac{l_1}{k_1^2} + 3q_2^2 \frac{l_2}{k_2^2} + q_5^2 \frac{l_5}{k_5^2} = q_2 \left[\frac{l_1}{k_1^2} + \frac{l_2}{k_2^2} \frac{3}{m^2} + \frac{l_5}{k_5^2} \right], \quad [12]$$

знаходимо й саму витрату q, а потім за останньою і витрати q_2, q_3 і q_4 і, нарешті, окремі втрати в напорі h_{w_1}, h_{w_2}, h_{w_3}.

Хай, наприклад,

$$H = 20\ м,\quad l_1 = 500\ м,\quad l_2 = 500\ м,\quad l_3 = 400\ м,$$

$$l_4 = 800 м,\quad l_5 = 300 м;$$

$$d_1 = 2{,}5 дц,\quad d_2 = 2 дц,\quad d_3 = 1{,}5 дц,\quad d_4 = 2 дц,\quad d_5 = 2 дц.$$

За цих даних маємо:

$$q_3 = q_2 \sqrt{\frac{500}{400} \cdot \frac{22{,}31 \cdot 10^3}{110{,}03 \cdot 10^3}} = 0{,}503 q_2,$$

$$q_4 = q_2 \sqrt{\frac{500}{800} \cdot \frac{110{,}03 \cdot 10^3}{110{,}03 \cdot 10^3}} = 0{,}791 q_2,$$

тому

$$q = q_2 (1 + 0{,}503 + 0{,}791) = 2{,}294 q_2,$$

відки

$$q_2 = \frac{q}{2{,}291} = 0{,}436 q.$$

Тепер за співвідношенням [12] знаходимо:

$$200 = q^2 \left[\frac{500 \cdot 10}{376{,}5 \cdot 10^3} + \frac{3 \cdot 500 \cdot 10}{110{,}03 \cdot 10^3} \cdot 0{,}1901 + \right.$$

$$\left. + \frac{300 \cdot 10}{110{,}03 \cdot 10^3} \right] = 0{,}0665 q^2,$$

відки

$$q^2 = \frac{200}{0{,}0665} = 3008,$$

або

$$q \cong 54{,}8\ \textit{літр./сек.},$$

і далі:

$$q_2 = 0{,}436 q = 23{,}89 \cong 23{,}9\ \textit{літр./сек.},$$

$$q_3 = 0{,}503 q = 12{,}01 \cong 12{,}0\ \textit{літр./сек.},$$

$$q_4 = 0{,}791 q = 18{,}90 = 18{,}9\ \textit{літр./сек.}$$

Нарешті, втрати в напорах будуть:

$$h_{w_1} = q_1^2 \frac{l_1}{k_1^2} = q^2 \frac{l_1}{k_1^2} = 3008 \cdot \frac{500 \, . \, 10}{376{,}5 \, . \, 10^3} =$$

$$= 3008 \, . \, 0{,}0133 = 40{,}0 \, дц = 4{,}0 \, м,$$

$$h_{w_2} = h_{w_3} = h_{w_4} = q_2^2 \frac{l_2}{k_2^2} = 571{,}21 \cdot \frac{500 \, . \, 10}{110{,}03 \, . \, 10^3} =$$

$$= 571{,}21 \, . \, 0{,}0454 = 25{,}94 \, дц \cong 2{,}6 \, м,$$

$$h_{w_5} = q_5^2 \frac{l_5}{k_5^2} = 3008 \cdot \frac{300 \, . \, 10}{110{,}03 \, . \, 10^3} =$$

$$= 3008 \, . \, 0{,}0273 = 82{,}1 \, дц \cong 8{,}2 \, м,$$

відки сума всіх втрат у напорі:

$$h_{w_1} + 3h_{w_2} + h_{w_5} = 4{,}0 + 3 \, . \, 2{,}6 + 8{,}2 = 4{,}0 + 7{,}8 + 8{,}2 = 20 \, м.$$

Задача 5. Відосередковий смок подає 50 *літр/сек.* води. Воду береться на глибині 5 *м* [нівеляційна віддаль між смоком і рівнем води в колодязі (рис. 53)]. Довжина всисної труби $l = 15$ *м.* Визначте діяметр всисної труби за умови, щоб вакуум у ній був $\leqslant 7{,}5$ *м.*

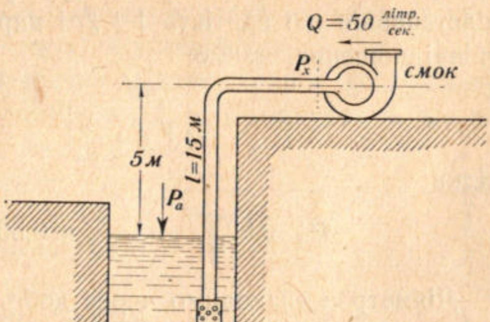

Рис. 53

Розвязка. За рівнянням Д. Бернуллі маємо:

$$\frac{p_a}{\delta} = 5 + \frac{p_x}{\delta} + \frac{v^2}{2g} + \xi_c \frac{v^2}{2g},$$

відки:

$$\frac{p_a - p_x}{\delta} = \text{вакууму} = 5 + \frac{v^2}{2g}(1 + \xi_c);$$

а що

$$Q = \omega v,$$

то

$$\text{вакуум} = 5 + \frac{Q^2}{2g\omega^2}(1 + \xi_c) \leqslant 7{,}5,$$

відки

$$\frac{1+\xi_c}{\omega^2}\frac{Q^2}{2g} \leqslant 2{,}5,$$

або

$$\frac{\omega}{\sqrt{1+\xi_c}} \geqslant \frac{Q}{\sqrt{2g\,.\,2{,}5}},$$

або в загальному вигляді:

$$\frac{\omega}{\sqrt{1+\xi_c}} \geqslant \frac{Q}{\sqrt{2g\ (\text{вакуум — нівеляційна висота})}}.$$

В нашому випадку:

$$\frac{\omega}{\sqrt{1+\xi_c}} \geqslant \frac{50}{\sqrt{2\,.\,9{,}81\,.\,10\,.\,2{,}5\,.\,10}} \cong 0{,}72\ \partial ц^2;$$

а що

$$1+\xi_c = 1+\left[5+\frac{15}{40}\cdot\frac{1}{d}\right] = 6+\frac{3}{8d},$$

(де число 5 є коефіцієнт опору у всисній коробці), то, підставивши цю вартість $1+\xi_c$ і вираз для ω в попереднє співвідношення, маємо:

$$\frac{\pi d^2}{4\sqrt{6+\frac{3}{8d}}} \geqslant 0{,}72,$$

відки

$$d^2 \geqslant 0{,}92\sqrt{6+\frac{3}{8d}} \cong 0{,}56\sqrt{16+\frac{1}{d}}\cdot$$

Діяметр d знаходимо через добір (див. таблицю 5).

Таблиця 5

d	d^2	$0{,}56\sqrt{16+\frac{1}{d}}$
1,25	1,56	2,30
1,50	2,25	2,29
1,75	3,06	2,28

Очевидно, за поставленої умови підхожий діяметр всисної труби буде:

$$d = 1{,}75\ \partial ц.$$

РОЗДІЛ IV

РІВНОМІРНА ТЕЧІЯ ВОДИ В РІЧКАХ І КАНАЛАХ

§ 1. Рівномірна течія води в річках і каналах

Хоча в загальному випадку течія води в природних водотоках (річках), очевидно, може відбуватись і відбувається в такий спосіб, що й ширина, і глибина, а так само і швидкість є змінні величини, при чому в водотоках спокійних ця зміна відбувається завжди плавко, без гострих скоків, проте, завжди існують досить довгі ділянки, на яких показана зміна помітно не виявляється; в штучних каналах здебільшого перелічені фактори не змінюються.

Тому, коли взяти невелику ділянку річки або каналу (рис. 54), завдовжки, припустімо, L *м*, і припустити, що на цій ділянці саме маємо незмінність указаних раніш елементів, то нівеляцією ми встановимо, що поверхня води завжди має якийсь певний спад у напрямі течії, і, виходить, точка (a) перекрою (aa') лежить вище за точку (b) перекрою (bb') на деяку величину $(bd) = H$. Останню величину звуть **спадання** **річки** або каналу на даній ділянці, а відношення $\frac{H}{L}$ — **відносне** **спадання**, або **спад**, і звичайно позначається його через I; це відносне спадання, очевидно, є не инше що, як тангенс кута (bad); а що спадання звичайно для великих спокійних річок або каналів дуже мале, то тангенс можна замінити на синус згаданого кута, або навіть

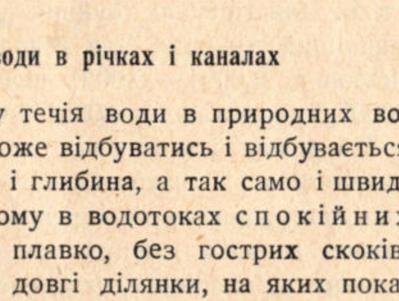

Рис. 54

на самий кут; таким робом, маємо:

$$I = \frac{H}{L} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cong \sin \alpha \cong \alpha. \qquad [1]$$

Що відносне спадання справді мале, це бачимо з таких даних для деяких російських річок: для Волги в її середній течії середній спад $I = 0{,}000044$; для Дону $I = 0{,}000052$; для Дніпра (в порожистій частині) $I = 0{,}000086$; для Ангари (Сибір) $I = 0{,}00022$; для Томи коло Томського (Сибір) $I = 0{,}00017$ і т. и. Для гірських буйних річок спади иноді досягають значніших величин. Для каналів беруть такі спади: для промислових 0,0004 — 0,002; великих зрошувальних 0,0002 — 0,0005, судноплавних 0,0001 — 0,00025, вуличних 0,002—0,006.

І в річках, і в каналах, подібно до того, як і в трубах, швидкості в різних точках того самого перекрою не однакові: найменші швидкості через вплив шаршавости і з инших причин звичайно будуть коло дна й берегів; в міру ж віддалення від останніх, швидкості зростають, хоча на поверхні води вони все ж звичайно менші, ніж на деякій (що правда, невеликій) глибині під поверхнею на тій самій вертикалі*); таким робом, центр прикладання найбільшої швидкости в даному перекрої річки (иноді таких центрів у річці може бути й декілька, залежно від форми поперечного профілю) або каналу звичайно лежатиме на деякій глибині під поверхнею або коло середини перекрою (в прямих каналах, в річках з прямим коритом правильної форми), або в більшій чи меншій віддалі від неї (в колінах річок і каналів за несиметричної форми корита); тому, коли сполучити в перекрої точки з рівними швидкостями лініями (**ізотахи**), то матимемо таку картину розподілу швидкостей у перекрої (рис. 55).

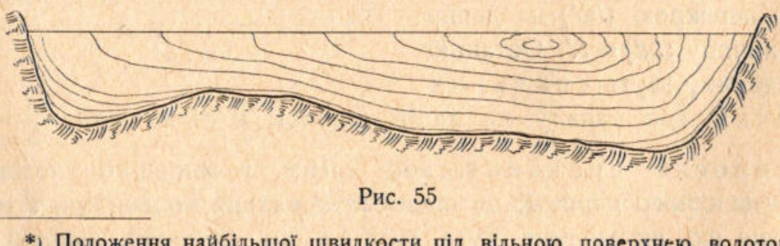

Рис. 55

*) Положення найбільшої швидкости під вільною поверхнею водотоки пояснюється, по-перше, пульсацією струмин, що спричинюється до деякої підпори вільної поверхні води, отже, затримки руху поверхневих часток (L. W. Weil. Neue Grundlagen der Technischen Hydrodynamik. München und

У дальшому викладі (коли не буде специяльних застережень) ми розумітимемо під швидкістю води в даному перекрої річки або каналу (подібно до того, як і в трубах) пересічну швидкість (про визначення швидкостей у перекрої взагалі й пересічної зокрема, див. останній розділ IX).

Розглядаючи тепер виділену ділянку річки або каналу (див. рис. 54), ми повинні дійти висновку, що кількість енергії, яку витрачає вода на цій ділянці, можна визначити так:

$$E = \left(\frac{\delta Q_1}{g} \cdot \frac{v_1^2}{2} + \delta \,.\, Q_1 H_1\right) - \left(\frac{\delta Q_2}{g} \cdot \frac{v_2^2}{2} + \delta \,.\, Q_2 H_2\right),$$

коли тільки позначити кількість води, яка вливається на ділянку через перекрій (aa') і витікає з нього через перекрій (bb'), відповідно, через Q_1 і Q_2, швидкості вливання й витікання через v_1 і v_2 і, нарешті, висоти розміщення центру в перекрої над основним рівнем (наприклад, рівнем моря, в яке втікає вода) через H_1 і H_2; коли, як ми беремо, $Q_1 = Q_2 = Q$ і $v_1 = v_2$, вищенаписана рівність набере вигляду:

$$E = \delta Q \,[H_1 - H_2] = \delta QL \,.\, I,$$

а взявши $L = 1$ *м*, маємо:

$$E = \delta \,.\, Q \,.\, I. \qquad [2]$$

Знайдену кількість енергії витрачається почасти на підтримання швидкости протічної води, почасти на розмивання корита і перенесення намулу, але як вона розподіляється між цими поодинокими одмінами її роботи, ми, звичайно, точно не знаємо; ми можемо тільки робити ті або ті припущення, певні остільки, оскільки одержані результати виправдуються потім на досвіді.

У всякому разі очевидно, що деяку частку вищевизначеної енергії, наприклад, $\frac{1}{k}$ витрачається, щоб надати воді живої сили, тоб-то:

$$\frac{\delta QI}{k} = \frac{\delta Q v^2}{g \,.\, 2};$$

Berlin. 1920. стор. 46—47), по-друге, утворенням хвиль на поверхні (A. Budau. Kurzgefasstes Lehrbuch der Hydraulik. Wien und Leipzig. 1921, стор. 78), по-третє, поверхневим натягом води (Baudisch. Mechanik. 1914), нарешті, вихруватими або спіралюватими рухами й вирами, що підносяться від дна до поверхні (Forchheimer. Hydraulik. 1914, стор. 109).

так само очевидно, що ця частка буде то більша, що легші умови течії води, тоб-то що більше, наприклад, буде відношення площі поперечного перекрою до обмиваного периметру (гідравлічний радіюс) і що, взагалі, менші будуть опори за протікання води. Тому ми маємо цілковиту підставу покласти:

$$k = \lambda \frac{P}{\omega},$$

де λ є коефіцієнт пропорційности, або, як заведено називати, коефіцієнт шаршавости. За цієї умови попереднє співвідношення має вигляд, після можливих скорочень:

$$\frac{I\omega}{\lambda P} = \frac{v^2}{2g},$$

відки

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \cdot \sqrt{RI}; \qquad [3]$$

тут гідравлічний радіюс $\left(\frac{\omega}{P}\right)$, а $\sqrt{\frac{2g}{\lambda}}$ є коефіцієнт, який будемо позначати через C. Добута нами формула має назву формули Шезі (Chezy, 1775 р.). C спочатку мали за постійну величину, але з розвитком гідрометрії й накопиченням досвідного матеріялу знайшли, що C є так само величина змінна, і, подібно до того, як для коефіцієнту λ, який входить у вираз втрати в напорі підчас протікання води трубами, є достатня кількість різних співвідношень, так і для C у формулі Шезі гідравліка має низку різноманітних вартостей, иноді досить складних. Причини в одмінності вартостей для C ті самі, що й для коефіцієнту λ. Не перераховуючи всіх таких вартостей, наведімо деякі з них, дуже поширені в практиці.

Формула Базена (Bazin, 1897 р.). Базен на підставі своїх численних досвідів знайшов, що

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{k}}} \qquad [4]$$

де γ є коефіцієнт, що залежить од шаршавости корита, і вартості якого наведено в поданій нижче таблиці (таблиця 6).

Таблиця 6

№№	Характеристика корита каналу або, взагалі, водотоки	γ
1	Канали з дуже гладенькими стінками: з чистого цементу, виструганих дощок	0,06
2	Канали з гладенькими стінками: з тесаного каменю, цегли, дощок і т. и.	0,16
3	Канали з нерівними стінками: з бутового мурування .	0,46
4	Канали із ще більш нерівними стінками: земляні в густому ґрунті, що їх раз-у-раз чистять, мощені, вирубані гладко в скелі і т. и.	0,85
5	Канали земляні, трохи зарослі травою, з ламаного каменю, в торфяному ґрунті й т. и.	1,30
6	Канали і взагалі водотоки з цілком нерівними стінками: порослі травою, вкриті лобаками, вирубані в скелястому ґрунті	1,75
7	Річки й канали з дуже нерівним коритом, вкриті камінням, то-що	2 і вище

Щоб полекшити користування з формули Базена, маємо таблиці вартостей C для різних гідравлічних радіюсів R і коефіцієнтів шаршавости *).

Формулу Ґанґільє і Куттера (Ganguillet et Kutter 1869 р.), двох швайцарських інженерів, виведено на підставі дослідів Базена над каналами та Гемфрі й Аббота (Humphrey—Abbot, 1861 р.) на річці Міссісіпі, і має вона такий вигляд:

$$C=\frac{23+\frac{1}{n}+\frac{0,00155}{I}}{1+\left(23+\frac{0,00155}{I}\right)\frac{n}{\sqrt{R}}}, \qquad [5]$$

де R є гідравлічний радіюс, I — спад, а n — коефіцієнт шаршавости, вартості якого подано в такій таблиці (таблиця 7, див. стор. 96):

Для формули Ґанґільє—Куттера так само є таблиці вартостей C, які значно полегшують її вживання в розрахунках.

З нових, порівняно, формул укажемо ще на формулу Форхгеймера (Ph. Forchheimer, 1903 р.), в якого

$$C=\lambda R^{0,2}. \qquad [6]$$

*) Н. Н. Павловский. Гидравлический справочник. Ленінград, 1924 р.

Таблиця 7

№№	Характеристика корита каналу або взагалі водотоки	n	$\frac{1}{n}$
1	Канали з дуже гладенькими стінками: з цементу, виструганих дощок	0,010	100
2	Канали з неструганих дощок	0,012	83
3	Канали з гладенькими стінками: з тесаного каменю, цегли й т. и.	0,013	77
4	Канали з нерівними стінками: з бутового мурування	0,017	59
5	Канали з іще більше нерівними стінками: з дуже грубого бутового мурування	0,020	50
6	Канали в земляному густому ґрунті, неукріпленому і необлицьованому	0,025	40
7	Канали земляні, трохи порослі травою, з ламаного каменю, в торфяному ґрунті	0,030	33
8	Ті самі земляні канали й природні водотоки, більш зарослі травою, в поганому стані	0,035	28,6
9	Канали в дуже поганому стані, природні водотоки, вкриті камінням, ринню, зарослі водотоки	0,040	25

і, таким робом, швидкість визначається, як

$$v = \lambda R^{0,7} I^{0,5}, \qquad [7]$$

при цьому, на підставі старих вимірів Базена і своїх власних численних досвідів, Форхгеймер бере

$$\lambda = \frac{1}{n},$$

тоб-то, иншими словами, коефіцієнт λ дорівнює зворотній величині коефіцієнту шаршавости (n) у формулі Ґанґільє—Куттера (див. таблицю 7).

Для міркування про величину коефіцієнтів γ (у формулі Базена) і λ (у формулі Форхгеймера) на підставі безпосередніх вимірів наводимо такі часткові дані Центрального Гідрографічного Бюра у Відні (див. таблицю 8, на стор. 97).

Всі вищенаведені формули містять коефіцієнт шаршавости, залежний від характеру й роду корита каналу або природної водотоки. Проте, в деяких гідравликів виникла думка, чи не можна, звязуючи швидкість з різними гідравлічними елементами водотоків, обійтись без коефіцієнту

Таблиця 8

Річки	Пересічна швидкість в $м/сек.$	Спад I	Живий перекрій в $м^2$	Ширина в $м$	Змочений периметр в $м$	Пересічна глибина в $м$	Гідравлічний радіюс в $м$	γ для Базенової формули	λ для Форхгеймерової формули
Польцен біля Вертенбергу	0, 3	0,00075	2,85	3,25	4,63	0,88	0,62	4,1	15,3
Річка біля Симплону .	0,34	0,00175	—	2	—	0,23	0,23	2,0	23,0
Рейн біля Базеля	1,94	0,0012	—	—	—	2,10	2,10	1,834	35,2
Дунай білл Маритгавзена	1, 7	0,00055	750	271	280	2,77	2,68	1,49	38,6
Річка Ладовіцера в Базелі	0,48	0,00065	1,70	5,20	5,69	0,33	0,30	1,21	43,8

шаршавости, змінивши його на инші гідравлічні фактори, бо в природному стані водотока є ніби саморегулівна: зміна характеру ґрунту спричинюється до зміни спаду, отже, і швидкости, а так само і глибини та ширини; навпаки, зміна останніх елементів спричинюється до зміни спаду. Перший, що виявив такий погляд на водотоку, був Зідек (Siedek) *), який запропонував своєрідну залежність між швидкістю і гідравлічними елементами водотоки — спадом, глибиною, шириною і гідравлічним радіюсом, але без заведення коефіцієнту шаршавости.

За Зідеком з'явилася ціла низка инших гідравликів, переважно австрійської школи, які так само запропонували залежності од швидкости течії водотоків від гідравлічних елементів без коефіцієнту шаршавости.

Не перераховуючи всіх таких залежностей, відомих у літературі, вкажемо на деякі з них, що мають поширення

*) R. Siedek. Studie über neue Formel zur Ermittelung der Geschwindigkeit des Wassers in Flussen und Strömen. Wien. W. Braumüller. 1901 p. Дослівно Зідек формулював свою думку так: „Коли зменшити шаршавість лотоку прямокутного розтину, що ним протікає певна кількість води за незмінного спаду, то швидкість течії збільшиться, а що витрата води постійна, то повинен змінитись підводний периметр, а разом із ним і глибина, за умови ж незмінности витрати і глибини, повинна змінитись, із зменшенням шаршавости, швидкість, а разом з нею і спад".

і в російській практиці *). Така, наприклад, формула Ліндбое (Lindboe) **), що її вважають за одну з найліпших:

Глибина річки в *м*	Спад $I < 0{,}0006$	
	Відношення глибини до ширини $\frac{t}{b} < 0{,}028$	$\frac{t}{b} > 0{,}028$
	$v =$	$v =$
$t < 1{,}12$	$23{,}37\left[0{,}822 - \frac{t}{b}\right] \cdot t^{0,9}\ I^{0,42}$	$8{,}19\left[2{,}293 - \frac{t}{b}\right] t^{0,9}\ I^{0,42}$
$1{,}12 < t < 3{,}65$	$24{,}11\left[0{,}822 - \frac{t}{b}\right] \cdot t^{0,63}\ I^{0,42}$	$8{,}45\left[2{,}293 - \frac{t}{b}\right] t^{0,63}\ I^{0,42}$
$t > 3{,}65$	$27{,}45\left[0{,}822 - \frac{t}{b}\right] \cdot t^{0,53}\ I^{0,42}$	$9{,}62\left[2{,}293 - \frac{t}{b}\right] t^{0,53}\ I^{0,42}$

Глибина річки в *м*	$0{,}0006 < I < 0{,}005$	
	$\frac{t}{b} < 0{,}028$	$\frac{t}{b} > 0{,}028$
	$v =$	$v =$
$t < 1{,}12$	$33{,}86\left[0{,}822 - \frac{t}{b}\right] \cdot t^{0,9}\ I^{0,47}$	$11{,}86\left[2{,}293 - \frac{t}{b}\right] t^{0,9}\ I^{0,47}$
$1{,}12 < t < 3{,}65$	$34{,}94\left[0{,}822 - \frac{t}{b}\right] \cdot t^{0,63}\ I^{0,47}$	$12{,}24\left[2{,}293 - \frac{t}{b}\right] t^{0,63}\ I^{0,47}$
$t > 3{,}65$	$39{,}77\left[0{,}822 - \frac{t}{b}\right] \cdot t^{0,53}\ I^{0,47}$	$13{,}94\left[2{,}293 - \frac{t}{b}\right] t^{0,53}\ I^{0,47}$

До тієї самої класи формул належить співвідношення Германека [Hermanek'а] ***):

$$\left.\begin{array}{lll} v = 30{,}7\sqrt{t}\sqrt{tI} & \text{при} & t < 1{,}5\ м \\ v = 34\ \sqrt[4]{t}\sqrt{tI} & \text{„} & 1{,}5 < t < 6\ м \\ v = \left(50{,}2 + \frac{t}{2}\right)\sqrt{tI} & \text{„} & t > 6{,}0\ м \end{array}\right\} \qquad [8]$$

Для порівнання результатів обчислення швидкости за найхарактернішими формулами двох видів з дійсними вимі-

---

*) Див. Ессен. А. Отчет гидрометрической части за 1911—1912 при водном управлении на Кавказе. 1913, ч. II, стор. 87 і даль.

**) W. Lindboe. Eine neue Formel zur Ermittelung der mittleren Geschwindigkeit in natürlichen Wasserlaufen. Zeit. f. Gewesserkunde. 1910, стор. 1. Див. також: Engels. Zentralbl. d. Bauverw. 1910. S. 389.

***) Hermanek. Die mittlere Profilgeschwindigkeit in natürlichen und künstlichen Gerinnen. Zeitschr. d. Österr. Ing. u. Arch. Ver. 1905.

рами, подаємо такі дані Швайцарського Гідрометричного Бюра *) (таблиця 9):

Таблиця 9

Формули	Швидкість *v в м/сек.* Видаток *Q в м³/сек.*	Рейн	Рона	Інн	Ельба	Сян
Ґанґільє і Куттера	v	1,059	0,789	2,40	0,72	0,32
	Q	447,861	15,064	403,2	44,35	4,82
Нова формула Базена	v	1,018	0,694	2,45	0,74	0,30
	Q	430,521	13,251	411,98	45,60	4,51
Зідека	v	0,917	0,691	—	—	—
	Q	387,808	13,193	—	—	—
Ліндбое	v	—	—	2,01	0,68	0,31
	Q	—	—	337.98	41,90	4,66
Германека	v	—	—	2,25	0,64	0,24
	Q	—	—	378.34	39,68	3,61
Безпосередні виміри .	v	1,021	0,647	2,31	0,79	0,34
	Q	431,369	12,358	388,08	48,68	5,12

Дані останньої таблиці показують, що формули для швидкостей дають у природних коритах величини, які часто значно відрізняються від величин, знаходжуваних безпосередніми вимірами. Тому не дивно, що в тих випадках, коли бажають більш-менш точно визначити швидкості в річках (наприклад, щоб визначити секундні видатки води), завжди вживають безпосередніх вимірів цих швидкостей (способами, викладеними в „Гідрометрії“), і тільки для попередніх вишуків і міркувань припускається визначення швидкостей за формулами.

Що ж до каналів, то тут, зважаючи на постійні шаршавості стінок і дна, можливість цінувати більш-менш точно коефіцієнт шаршавости, виразність поперечних перекроїв і, нарешті, справжню, здебільшого, рівномірність течії, застосування зазначених раніш формул для розрахунку цілком припустиме і завжди призводить до достатніх для практики, в розумінні точности, результатів.

---

*) Ессен, А. Отчет гидрометрической части за 1911—12 г. при Водном Управлении на Кавказе, 1913, ч. II, стор. 94.

Bubendey-Engels. Praktische Hydraulik, стор. 674.

§ 2. Форма каналів

Формула Шезі, в звязку з співвідношенням: $Q = \omega . v$, вимагає, з метою зменшення поперечного перекрою каналу, щоб обрана для даних місцевих умов швидкість була найбільша, а це, очевидно, можливо лише тоді, коли гідравлічний радіюс матиме найбільшу величину, або коли, за даної площі поперечного перекрою, периметр матиме найменшу величину. З цього погляду за найвигідніший профіль був би півокруглий, але такий профіль можна виконати тільки для каналів з певного матеріялу: залізо-бетонних, цегляних, кам'яних, дерев'яних або вирубаних у скелі; при цьому на практиці подібної форми надається переважно каналам залізо-бетонним, — для инших перелічених каналів вживається форми трапезуватої, при цьому спад стінок залежить од звязлости ґрунту.

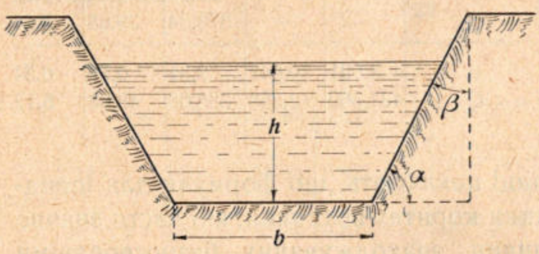

Рис. 56

Найвживаніші спади укосів залежно від матеріялів подано в дальшій таблиці 10 [в цій таблиці наведено кути (рис. 56) нахилення укосів до горизонту (α) і додаткові кути (β)]:

Таблиця 10

	Одміна каналу	Спади укосів	Кути нахилення укосів	
			α	β
1	Канали дерев'яні, кам'яні, бетонні й скельні	$\perp$	90°	0°
2	Канали з бутового мурування . .	1,75 : 1	60°	30°
3	Канали у твердому, звязному ґрунті	1 : 1	45°	45°
4	Канали в звязному ґрунті (глина) .	$1 : 1\frac{1}{4}$	38°40′	51°20′
5	Канали в мало звязному ґрунті (суглинок)	$1 : 1\frac{1}{2}$	33°41′	56°20′
6	Канали в пухкому ґрунті (дрібний пісок, рослинний ґрунт)	1 : 2	26°34′	63°26′

На призначення профілю канала в дальшому має великий вплив найбільша припустима пересічна швидкість води, яку залежно від роду ґрунту, за Тельфордом і Кенном (Telford і Th. Koenn), дається*) в таких границях:

Легкий ґрунт	0,15	*м/сек.*
Піщаний ґрунт	0,30—0,45	„
Ситець	0,61—0,75	„
Лобак	0,91—1,20	„
Каменястий ґрунт	1,22—1,50	„
Лупаковий ґрунт (або канал, облицьований камінням)	1,52—2,00	„
Скелястий ґрунт (або канал з цементним тиньком, або дерев'яний) . . .	1,83—2,50	„
Тверда скеля	3,00—3,50	„

З другого боку, щоб запобігти осаджуванню мулу або піску, пересічна швидкість не повинна спускатись нижче, відповідно, за 0,25—0,50 *м/сек.* За довгих каналів, що підводять воду до гідравлічних устав, щоб зберегти напір, часто вибирають менші швидкості $\left(\text{вживані спади } \frac{1}{2000} - \frac{1}{2500}\right)$, як раніш показано, а иноді за більших кількостей води й більших напорів, щоб зменшити витрату, навпаки, беруть більші швидкості (до 5—8 *м/сек.*).

Вибір пересічної швидкости і визначає площу поперечного перекрою каналу; дальший розрахунок каналу сходить на визначення відносних розмірів його поперечного перекрою. Раніш уже було зазначено, що завжди корисно прагнути до того, щоб гідравлічний радіюс був за даної площі яко мога більший, або инакше периметр найменший (це корисно ще тим, що вибраної швидкости доходять за меншого відносного спаду канала).

З цією метою знаходимо вирази площі (ω) поперечного перекрою каналу та його периметра (P) через елементи перекрою; очевидно, з узятими на рис. 56 позначеннями, маємо:

$$\omega = (b + h \operatorname{tg} \beta)\, h,$$

$$P = b + \frac{2h}{\cos \beta},$$

*) D. Banki. Energie-Umwandlungen in Flüssigkeiten. 1921. Bd. 1, стор. 117.

мавши на увазі, що $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}$ і позначивши $\operatorname{tg}\beta$ через m (коефіцієнт укосу), перетворюємо останнє рівняння на такі:

$$\omega = (b + mh)\,h, \tag{9}$$

$$P = b + 2h\sqrt{1+m^2}. \tag{10}$$

Підставивши у вираз для P вартість b з [9], матимемо вираз периметра, як функцію від глибини (наповнення) — h:

$$P = \frac{\omega}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2}, \tag{11}$$

а, взявши похідну за h і прирівнюючи її до нуля, маємо умову мінімуму:

$$\frac{dP}{dh} = \frac{\omega}{h^2} - m + 2\sqrt{1+m^2} = 0,$$

відки, замінивши знову площу ω на її вираз з [9], остаточно матимемо умову найвигіднішого профілю каналу:

$$\frac{b}{h} = 2\left(\sqrt{1+m^2} - m\right)\cdot \tag{12}$$

Таким робом, наприклад, для простокутного каналу, коли $m = 0$, маємо:

$$\frac{b}{h} = 2,$$

а для трапезуватого каналу із спадок укосів 1 : 1, коли $m = 1$:

$$\frac{b}{h} = 0{,}82.$$

Треба зауважити, що на практиці часто відходять од найбільш сприятливого гідравлічного радіюсу; коли перекрій каналу невеликий, канал, щоб здешевити його вартість, роблять глибший, навпаки, за більшого поперечного перекрою, зважаючи на небезпеку підмиву, беруть мільчіший, ніж це треба було б з умови одержання показаного найвигіднішого профілю.

Коли воду треба зберігати чистою (питна вода), або, навпаки, треба захистити навкружний район від брудної води (каналізаційні води), або, нарешті, профіль місцевости примушує робити тунелі, воду проводять у закритих каналах, при цьому для гостро мінливих кількостей води найвідповідніший профіль каналу є форма яйця (овоїдальний (яйцюватий) перекрій (рис. 57); останній профіль

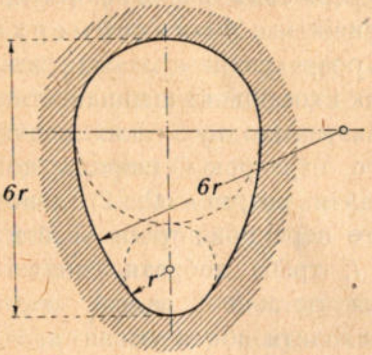

Рис. 57

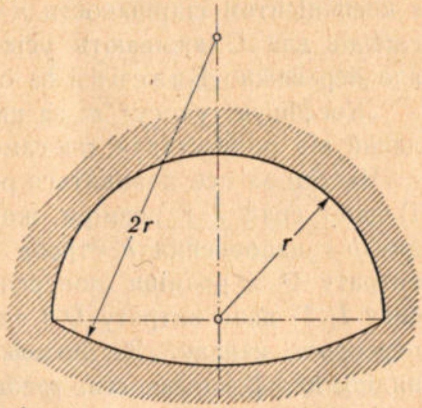

Рис. 58

цілком придатний навіть за незначних витрат рідини; вживається в цих випадках так само і перекрою лотокового (рис. 58).

§ 3. Гідравлічний і економічний розрахунок каналів

В гідравлічному розрахунку каналів, очевидно, за основне співвідношення є

$$\left.\begin{aligned} v &= C\sqrt{RI} \\ Q &= \omega v = \omega C\sqrt{RI} \end{aligned}\right\} \qquad [13]$$

З останнього співвідношення, як і для трубопроводів, легко знаходимо так званий коефіцієнт пропускальности каналу (k):

$$k = \frac{Q}{\sqrt{I}} = \omega C\sqrt{R},$$

заведення якого так само значно спрощує розвязування багатьох задач на розрахунок каналів.

Що до коефіцієнту C, то за розрахунків замкнених каналів (лотокових, яйцюватих) майже виключно вживають скороченої формули Ґанґільє й Куттера:

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{23n}{\sqrt{R}}},$$

з коефіцієнтом шаршавости $n = 0{,}012 - 0{,}014$; для инших же каналів для C вживають усіх перелічених раніш формул, але переважно Базена і за останній час Форхгеймера.

„Коефіцієнт укосу“ m за цих розрахунків є завжди заданий від роду каналу, так само, як і коефіцієнт шаршавости.

Частіш за все доводиться розвязувати одну з таких задач: 1) дано спад I і розміри живого перекрою — ширина по дну b і наповнення h, треба знайти витрату Q; 2) дано витрату Q й розміри поперечного перекрою, треба знайти спад I; 3) дано витрату Q і спад I, треба добрати живого перекрою каналу. За розвязання останньої задачі, очевидно, для її виразности, треба виходити або з умови найвигіднішого профілю каналу, або з якихось технічних умов для глибини й ширини; в решті випадків, задачу розвязується дуже просто за допомогою співвідношень [13] і [14].

Економічний розрахунок каналу можна провадити або з умови, щоб будівнича вартість його була найменша, або, коли це канал для підведення води до гідравлічної устави, щоб експлоатаційні видатки були найменші.

В першому випадку, наприклад, для відводу певної кількости води в річку або яр (тальвег) з певним спадом, взявши різні швидкості, або, що те саме, спади, знаходять різні площі живого перекрою й різні довжини, отже, за даного рельєфу місцевости, і певні кубатури вийми, які, залежно від місцевих розцінок праці, спричинюють різну вартість каналу. Виобразивши ці вартості в певному маштабі, як ординати, можна добути криву вартости каналу залежно від обраної швидкости і за цією кривою знайти найвигіднішу швидкість, отже, і найвигідніший спад і довжину.

В другому випадку, так само, взявши різні швидкості, знаходять відповідний до кожної швидкости спад каналу, площу живого перекрою й кубатуру вийми. Очевидно, із збільшенням швидкости, або, однаково, спаду, зменшується корисний напір для устави, але через це канал коштує дешевше. А що за цих умов експлоатаційні річні видатки складаються: 1) з амортизаційної вартости злагоди каналу + відсотки на витрачений капітал + витрати на утримання каналу в порядку і 2) з величини річних утрат через утрату потужности устави, то, взявши різні швидкості й нанісши в певному маштабі обидві частини експлоатаційних видатків на рисунку, матимемо дві криві залежностей цих видатків од швидкостей, при цьому перша крива (S_1) (рис. 59) покаже зниження видатків на будування й експлоатацію каналу за збільшення швидкости, а друга крива (S_2) — збільшення видатків на втрачену потужність устави за того самого збільшення швидкости. Сумарна крива ($S_1 + S_2$) покаже ту найвигіднішу швидкість v_n, за якої експлоатаційні видатки будуть найменші.

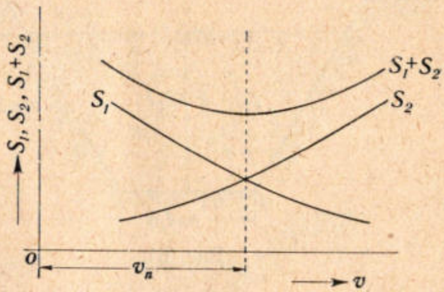

Рис. 59

§ 4. Задачі на канали

Задача 1. Визначте витрату в земляному каналі ($\gamma = 1{,}3$) трапезуватого перекрою (рис. 60) з основою $b = 2$ *м*, наповненням $h = 1{,}5$ *м* і коефіцієнтом укосів $m = 2$. Спад $I = 0{,}0006$.

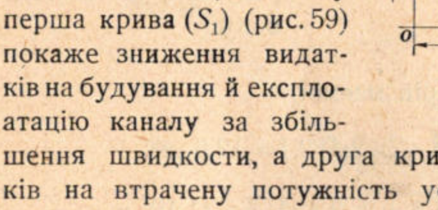

Рис. 60

Розвязка. Відшукувана витрата, очевидно, буде:

$$Q = \omega C \sqrt{RI}.$$

За даних розмірів маємо:

$$\omega = (b + m \,.\, h)h = (2 + 2 \,.\, 1{,}5)\,1{,}5 = 7{,}5 \ м^2;$$

$$P = b + 2h\sqrt{1 + m^2} = 2 + 2 \,.\, 1{,}5\sqrt{5} = 8{,}71 \ м;$$

$$R = \frac{\omega}{P} = \frac{7{,}5}{8{,}71} \cong 0{,}86;$$

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} = \frac{87}{1 + \frac{1{,}3}{\sqrt{0{,}86}}} = \frac{87}{2{,}4} = 36{,}25,$$

і тепер:

$$Q=\omega C.\sqrt{RI}=7{,}5.36{,}25.\sqrt{0{,}86.0{,}0006}\cong 271{,}9.0{,}0227\cong 6{,}18\ \textit{м}^3/\textit{сек}.$$

Задача 2. Визначте спад земляного ($\gamma=1{,}3$) каналу трапезуватого перекрою (рис. 61) з шириною по дну $b=1{,}8$ *м*, наповненням $h=2{,}1$ *м*, коефіцієнтом укосів $m=2$, який перепускає 8 *м*^{3}/*сек*. води.

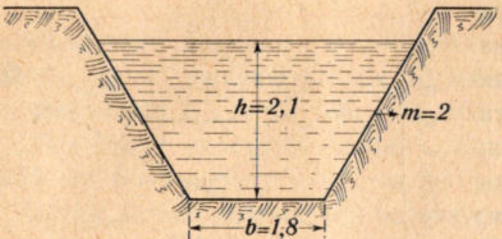

Рис. 61

Розвязка. За даних розмірів маємо:

$$\omega=(b+mh)h=[1{,}8+2\,.\,2{,}1]\,2{,}1=12{,}6\ \textit{м}^2;$$

$$P=b+2h\sqrt{1+m^2}=1{,}8+2\,.\,2{,}1\,.\sqrt{5}=11{,}19\ \textit{м};$$

$$R=\frac{\omega}{P}=\frac{12{,}6}{11{,}19}=1{,}13;\ \textit{м}$$

$$C=\frac{87}{1+\frac{\gamma}{\sqrt{R}}}=\frac{87}{1+\frac{1{,}3}{1{,}063}}=39{,}2;$$

тому

$$I=\frac{Q^2}{\omega^2C^2R}=\frac{64}{12{,}6^2\,.\,39{,}2^2\,.\,1{,}13}\cong\frac{64}{275700}\cong 0{,}000232.$$

Задача 3. Визначте розміри земляного трапезуватої форми каналу для перепуску 12 *м*^{3}/*сек*. води за спаду $I=0{,}0004$. Відношення ширини каналу до наповнення $\left(\frac{b}{h}\right)$ повинно бути найвигідніше. Ґрунт густий, добре злеглий.

Розвязка. Для такого ґрунту можна взяти:

$$m=1;\quad \gamma=1{,}3.$$

Найвигідніше відношення $\frac{b}{h}$ буде (рис. 62):

$$\frac{b}{h}=2(\sqrt{1+m^2}-m)=0{,}82.$$

Отже:

$$\omega = (b + mh)h = (0{,}82\,.\,h + h)h = 1{,}82h^2;$$

$$P = b + 2h\sqrt{1+m^2} = 0{,}82h + 2h\sqrt{2} = (0{,}82 + 2\,.\,1{,}41)h = 3{,}64h;$$

$$R = \frac{\omega}{P} = \frac{1{,}82h^2}{3{,}64h} = 0{,}5h;$$

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} = \frac{87\,.\sqrt{R}}{\sqrt{R} + \gamma} = \frac{87\,.\sqrt{0{,}5h}}{\sqrt{0{,}5h} + \gamma},$$

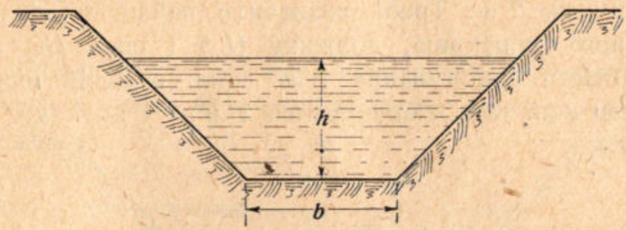

Рис. 62

а далі за співвідношенням:

$$k = \frac{Q}{I} = \omega C\sqrt{R},$$

яке, після підставляння вищезнайдених вартостей ω, C та R, а так само даних Q і I, набирає вигляду;

$$k = \frac{Q}{\sqrt{I}} = 600 = \omega C\sqrt{R} = \frac{1{,}82\,.\,h^2\,.\,87\,.\,0{,}5h}{\sqrt{0{,}5h} + \gamma} = \frac{79{,}2h^3}{\sqrt{0{,}5h} + 1{,}3};$$

добираємо вартість h; маємо:

$$\text{за } h = 2{,}0\ м,\ k = \frac{79{,}2\,.\,8}{2{,}3} \cong 275;$$

$$„\ h = 2{,}5\ м,\ k = \frac{79{,}2\,.\,15{,}625}{2{,}418} \cong 512;$$

$$„\ h = 2{,}7\ м,\ k = \frac{79{,}2\,.\,19{,}68}{2{,}462} \cong 633;$$

$$„\ h = 3{,}0\ м,\ k = \frac{79{,}2\,.\,27}{2{,}525} \cong 847,$$

з цього бачимо, що найбільш відповідна вартість наповнення є $h = 2{,}7$ *м*, і тоді

$$b = 0{,}82 \times 2{,}7 \cong 2{,}21 \ м.$$

Задача 4. Від річки, що має спад $I_p = 20 \, . \, 10^{-4} = 2\%$, треба відвести для села 10 $м^3/сек$; село розташоване на березі на висоті $H = 5$ *м* над рівнем води в річці. Відвести воду можна каналом, при цьому останній доведеться провадити в ґрунті середньої густоти, а тому укоси треба брукувати; за місцевими умовами глибину каналу треба взяти не більшу як 2 *м*. Треба визначити найвигідніші розміри поперечного перекрою, довжину (L_k) і спад (I_k) каналу, коли вартість викопування 1 $м^3$ землі в даній місцевості коштує 50 коп. (s_1), а брукування 1 $м^2$ — 1 крб. (s_2).

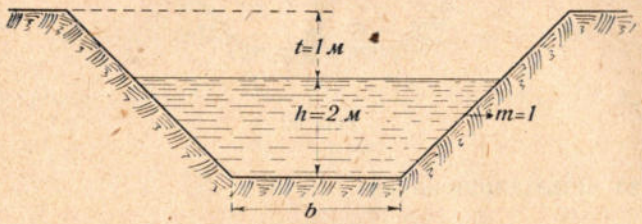

Рис. 63

Розвязка. Беремо: коефіцієнт брукованих укосів $m = 1$; коефіцієнт шаршавости $\gamma = 0{,}85$. Щоб розвязати цю задачу, маємо такі, відомі вже співвідношення (див. рис. 63);

$$\omega = (b + mh)h = 2b + 4;$$

$$P = b + 2h\sqrt{1 + m^2} = b + 5{,}64;$$

$$R = \frac{\omega}{P} = 2\,\frac{b+2}{b+5{,}64};$$

$$k = \frac{Q}{\sqrt{I_k}} = \omega C \sqrt{R},$$

отже

$$I_k = \frac{Q^2}{k^2}; \qquad C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} = \frac{87}{1 + \frac{0{,}85}{\sqrt{R}}};$$

і, окрім того, очевидно (рис. 64):

$$L_k = \frac{H}{I_p - I_k}.$$

Взявши тепер різні швидкості води в каналі, обчислюємо спочатку вартість площі живого перекрою каналу, пери-

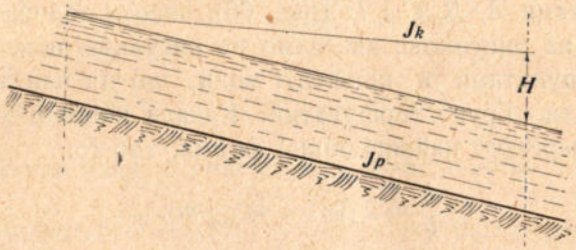

Рис. 64

метра, гідравлічного радіюсу, коефіцієнту C, спаду й довжини його, а потім загальну кубатуру вийми за прокопування каналу ($\Omega . L_k$, де Ω є площа повної вийми), площа брукування ($W . L_k$, де W є довжина бруку в поперечному перекрої каналу), нарешті, вартість вийми ($\Omega . L_k s_1$), бруку ($W . L_k s_2$) і загальну вартість робіт (S). Для наочности й зручности обчислень результати останніх зводимо в таблиці 11:

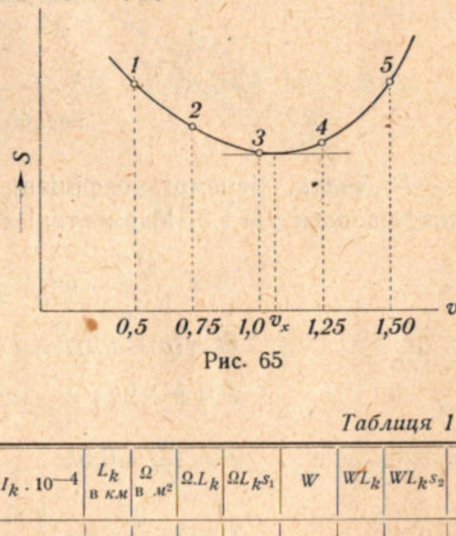

Рис. 65

Таблиця 11

v в м/сек.	ω в $м^2$	b в м	P в м	R в м	C	k	$I_k \cdot 10^{-4}$	L_k в км	Ω в $м^2$	$\Omega . L_k$	$\Omega L_k s_1$	W	WL_k	$WL_k s_2$	S
0,5	20	8	13,64	1,46	51	1230	0,66	2,59	33	85,6	43	16,48	42,6	42,6	85,6
0.75	13,23	4.67	10,31	1,29	49,7	752	1,77	2,74	23	63,0	31,5	13,13	36,0	36,0	67,5
1,0	10	3	8,64	1,16	48.6	524	3,7	3,06	18	55,1	27,6	11,46	35,1	35,1	62,7
1,25	8	2	7.64	1,05	47,5	389	6,6	3,74	15	56,0	28,0	10,46	39,2	39,2	67,2
1,50	6,67	1,335	6,975	0,955	46,5	303	10.9	5,50	13	71,5	35,8	9,80	53,9	53,9	89,7

Щоб остаточно точніше розвязати цю задачу, радиться відкласти S (рис. 65) у якомусь маштабі по осі ординат за відповідних вартостей швидкости v, відкладуваної по осі абсцис; добуті таким робом точки 1, 2, 3... сполучають плавною кривою; дотична до неї, проведена паралельно з віссю абсцис, і покаже найменшу можливу вартість каналу й відповідну швидкість v_x.

Задача 5. Треба спроєктувати висушну мережу каналів між пунктами A, B, C і D (рис. 66), висоти положення яких показано на рисункові; так само на рисункові показано віддалі між пунктами й кількості води, що їх канали мають перепускати. Ґрунт торфуватий. Канали повинні мати трапезуваті перекрої найвигіднішої форми, тоб-то:

$$\frac{b}{h} = 2\left[\sqrt{1+m^2} - m\right].$$

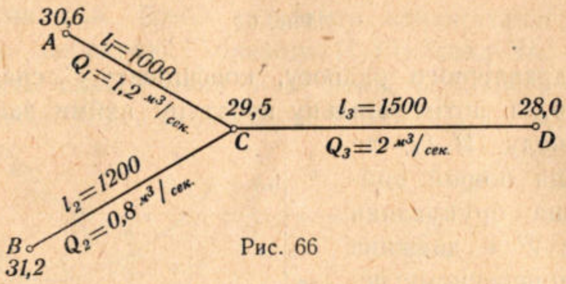

Рис. 66

Розвязка. Беремо: коефіцієнт укосів $m=1$; коефіцієнт шаршавости $\gamma = 1{,}3$. Маємо такі співвідношення:

$$k = \frac{Q}{\sqrt{I_k}} = \omega C \sqrt{R};$$

$$\omega = (b + mh)\,h = 1{,}82h^2;$$

$$P = b + 2h\sqrt{1+m^2} = 3{,}64h;$$

$$R = \frac{\omega}{P} = 0{,}5h;$$

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}.$$

Згідно з даними маємо:

$$I_{k_1} = \frac{30{,}6 - 29{,}5}{1000} = \frac{1{,}1}{1000} = 0{,}0011;$$

$$I_{k_2} = \frac{31{,}2 - 29{,}5}{1200} = \frac{1{,}7}{1200} = 0{,}00142;$$

$$I_{k_3} = \frac{29{,}5 - 28{,}0}{1500} = \frac{1{,}5}{1500} = 0{,}001,$$

а тому

$$k_1 = \frac{Q_1}{\sqrt{I_{k_1}}} = \frac{1,2}{0,0332} = 36,14;$$

$$k_2 = \frac{Q_2}{\sqrt{I_{k_2}}} = \frac{0,8}{0,0372} = 21,4;$$

$$k_3 = \frac{Q_3}{\sqrt{I_{k_3}}} = \frac{2,0}{0,0316} = 63,4.$$

З другого боку, з попередніх співвідношень маємо:

$$k = \omega C \sqrt{R} = 1,82 h^2 \frac{87}{1 + \frac{7}{\sqrt{0,5h}}} \cdot \sqrt{0,5h} = \varphi(h).$$

Тому, надаючи різних значень h, можемо збудувати криву залежности k від h; наприклад, при

$$h' = 0,5,$$

$$k = 1,82 \,.\, 0,5^2 \frac{87}{1 + \frac{1,3}{\sqrt{0,5.0,5}}} \cdot \sqrt{0,25} = 0,91 \,.\, 24,1 \,.\, 05^2 = 5,43;$$

при

$$h'' = 1, \quad k = 1,82 \frac{87}{1 + \frac{1,3}{\sqrt{0,5}}} \cdot \sqrt{0,5} = 39,4;$$

при

$$h''' = 1,5,$$

$$k = 1,82 \frac{87}{1 + \frac{1,3}{\sqrt{0.75}}} \cdot \sqrt{0,75} h^2 = 1,82 . 34,8 . 0,866 h^2 = 54,7 . 1,5^2 = 123,1;$$

при

$$h'''' = 2, \quad k = 1,82 \,.\, 2^2 \frac{87}{1 + \frac{1,3}{\sqrt{0,5\,.\,2}}} \cdot \sqrt{0,5\,.\,2} = 1,82 \,.\, 4 \,.\, 37,8 = 275,0;$$

тепер будуємо криву (рис. 67) $k = f(h^i)$, потім, відкладаючи по осі ординат раніш добуті вартості k_1, k_2 і k_3, проводячи через добуті точки паралельні з віссю x-ів прямі до перетину з кривою $k = f(h_i)$ в точках a, b, c, а з останніх проводячи нормалі до оси x-ів, одержуємо відшукувані глибини $h_1 = 0,97$, $h_2 = 0,82$ і $h_3 = 1,18$, і, нарешті, знаходимо:

$$b_1 = 0,82 \,.\, 0,97 = 0,795 \text{ м};$$

$$b_2 = 0,82 \,.\, 0,82 = 0,67 \text{ м};$$

$$b_3 = 0,82 \,.\, 1,18 = 0,97 \text{ м}.$$

Коли б було зроблено додаткові вказівки, що, за місцевими умовами, канали не повинні мати глибину, більшу за якусь певну величину, наприклад, $h = 0{,}8$ *м*, тоді довелось би відмовитись од найвигіднішої форми каналів; в цьому

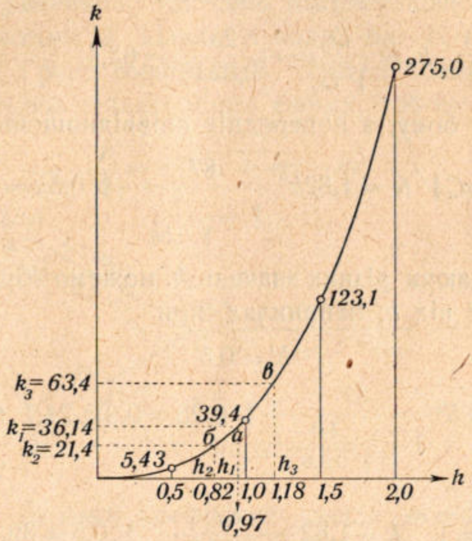

Рис. 67

випадку треба було б взяти певну глибину і визначити коефіцієнт перепускальности $k = \omega C \sqrt{R}$ у функції від ширини по основі каналу (b) і збудувати криву $k = f(b)$ за заданого h.

РОЗДІЛ V

ТЕЧІЯ УСТАЛЕНА, АЛЕ ПОВОЛІ ЗМІНЮВАНА (АБО НЕРІВНОМІРНА)

§ 1. Основні співвідношення для нерівномірної течії

Розглядувана течія характерна тим, що в якомусь даному перекрої водотоки швидкість залишається увесь час стала, за переходу ж від одного перекрою до иншого, вона дуже повільно змінюється в той чи той бік. Здебільшого на нерівномірну течію переходить рівномірна і в наслідок природних змін у кориті річки (заглиблення або підвищення ложища, розширення берегів, то-що) і в наслідок злагоди штучних споруджень на річці або каналі, наприклад, у наслідок злагодження греблі на річці, злагодження щитових відтулин у каналі; нарешті, такий перехід одної течії на иншу може відбуватися за природних змін рівня води в річці в той чи той бік підчас раптових поводей, зашеретів, то-що. До течії, що повільво змінюєтьса, очевидно, співвідношення $RI = \lambda \frac{v^2}{2g}$, що ми знайшли раніш, застосовувати не можна, але все ж у дальшому ми, звичайно, трохи довільно, вважатимемо, що перекрій водотоків змінюється надзвичайно повільно, що лінії течії є лінії дуже слабо вигнуті, тому без великого огріху їх можна вважати скрізь за нормальні до відповідних поперечних перекроїв. Виділімо у водотоці (рис. 68) простокутного поперечного пере-

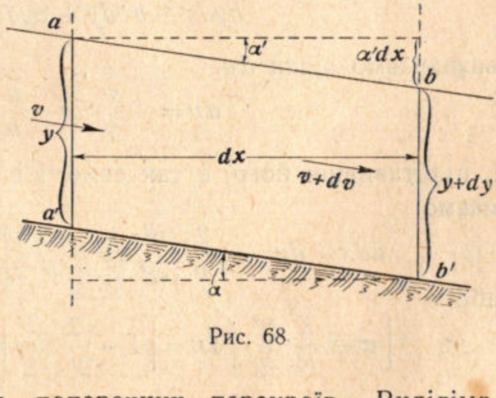

Рис. 68

крою з двома перекроями aa' і bb' ділянку $aa'bb'$ малої довжини dx.

Хай спади поверхні води й дна на цій ділянці будуть I' і I, а відповідні й рівні їм своєю малістю кути поверхонь води й дна з рівнем α' і α; хай глибини й швидкості в перекроях aa' і bb' будуть, відповідно, y, v і $y+dy$, $v+dv$. Очевидно, закон зберігання енергії дає нам співвідношення:

$$\frac{v^2}{2g}+\alpha' dx=\frac{(v+dv)^2}{2g}+\lambda\frac{dx}{R}\frac{v^2}{2v}, \qquad [1]$$

де λ є коефіцієнт шаршавости, а R — гідравлічний радіюс; співвідношення [1], після можливих скорочень і відкинення члена $\frac{dv^2}{2g}$, зважаючи на його малість проти инших членів, набирає вигляду:

$$\alpha' dx=2\frac{v}{2g}dv+\lambda\frac{dx}{R}\frac{v^2}{2g}. \qquad [2]$$

За рисунком безпосередньо маємо:

$$y+\alpha dx=y+dy+\alpha' dx,$$

відки

$$\alpha' dx=\alpha dx-dy. \qquad [3]$$

Позначивши далі ширину водотоки через b, маємо, за законом суцільности руху:

$$b\,.\,v\,.\,y=\text{const},$$

відки, диференціюючи, знаходимо:

$$bydv+bvdy+vydb=0;$$

визначаємо відси dv:

$$dv=-\frac{v}{y}dy-\frac{v}{b}db$$

і, підставивши його, а так само і вартість $\alpha' dx$ з [3] в [2], маємо:

$$\alpha dx-dy=-\frac{2}{y}\frac{v^2}{2g}dy-\frac{2}{b}\frac{v^2}{2g}db+\lambda\frac{dx}{R}\frac{v^2}{2g},$$

або

$$\left[\alpha-\frac{\lambda}{R}\frac{v^2}{2g}\right]dx=\left[1-\frac{2}{y}\frac{v^2}{2g}\right]dy-\frac{2}{b}\frac{v^2}{2g}db. \qquad [4]$$

Ми здобули диференціяльне рівнання для течії, що повільно змінюється, але це рівнання через велику кількість змінних величин, що в нього входять, не інтегрується; тому робимо такі припущення, що їх більш-менш можна застосувати для невеликих ділянок річки або каналу:

$$a = \text{const}; \quad \lambda = \text{const}; \quad b = \text{const}; \quad R = \frac{yb}{2y+b} = \frac{y}{1+\frac{2y}{b}} \cong y;$$

останнє припущення, очевидно, для більшости річок близько відповідає дійсності; але для каналів воно припустиме остільки, оскільки ширина значно більша за глибину.

Як зробити такі припущення, рівняння [4] набирає вигляду:

$$\left[a - \frac{\lambda}{y}\frac{v^2}{2g}\right]dx = \left[1 - \frac{2}{y}\frac{v^2}{2g}\right]dy, \qquad [5]$$

і його можна інтегрувати.

Раніш було зазначено, що нерівномірну течію можна розглядати як течію, утворювану в наслідок тих або инших причин з рівномірної; тому, назвавши глибину і швидкість у рівномірній течії, відповідно, h_0 (побутова глибина) і v_0, ми маємо за законами суцільности течії:

$$bv_0 \,.\, h_0 = b \,.\, v \,.\, y \qquad [6]$$

і, крім того, для рівномірної течії:

$$R_0 a = h_0 a = \lambda \frac{v_0^2}{2g}, \qquad [7]$$

тому

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{h_0^2}{y^2}\frac{v_0^2}{2g} = \frac{h_0^3 a}{y^2 \lambda};$$

підставивши цю вартість $\frac{v^2}{2g}$ в рівняння [5], перетворюємо його на таке:

$$a\left[1 - \frac{h_0^3}{y^3}\right]dx = \left[1 - \frac{2a}{\lambda}\frac{h_0^3}{y^3}\right]dy,$$

або

$$a\left[\frac{y^3}{h_0^3} - 1\right]dx = \left[\frac{y^3}{h_0^3} - \frac{2a}{\lambda}\right]dy. \qquad [8]$$

Зведімо нове позначення $\frac{y}{h_0} = \eta$, тоді $dy = h_0 d\eta$ і рівнання [8] набере вигляду:

$$a(\eta^3 - 1)\,dx = \left(\eta^3 - \frac{2a}{\lambda}\right)h_0 d\eta,$$

відки, поділивши все рівнання на $h_0(\eta^3-1)$ і зробивши в другій частині спрощення, добудемо остаточно:

$$\frac{a}{h_0}\,dx = d\eta - \left(1-\frac{2a}{\lambda}\right)\frac{d\eta}{1-\eta^3}. \qquad [9]$$

Інтегрування цього рівнання дасть кінцеву розвязку (за Bresse'ом, 1860 р.):

$$\frac{a}{h_0}\,x = \eta - \left(1-\frac{2a}{\lambda}\right) f(\eta) + C, \qquad [10]$$

коли позначити $\int \frac{d\eta}{1-\eta^3}$ че рез $f(\eta)$. Числові вартості функції

$$f(\eta) = \frac{1}{6}\ln\frac{\eta^2+\eta+1}{(\eta-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,cotg}\frac{2\eta+1}{\sqrt{3}}$$ [1])

дав Bresse[2]) в таблиці, що охоплює її вартість від $\eta=0$ до $\eta=1$ $(\eta<1)$ і від $\eta=1$ до $\eta=\infty$ $(\eta>1)$: витяги цих вартостей наведено в таблиці 12.

---

[1]) Вираз функції $f(\eta)$ знаходять так:

$$\frac{d\eta}{1-\eta^3} = -\frac{d\eta}{\eta^3-1} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\eta-1}-\frac{\eta+2}{\eta^2+\eta+1}\right)d\eta = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\eta-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\,\frac{2\eta+1}{\eta^2+\eta+1}-\frac{3}{2}\,\frac{1}{\eta^2+\eta+1}\right]d\eta = \frac{1}{6}\,d\ln(\eta^2+\eta+1)-\frac{1}{3}\,d\ln(\eta-1)+$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{d\eta}{\frac{3}{4}+\left(\frac{2\eta+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{6}\,d\ln\frac{\eta^2+\eta+1}{(\eta-1)^2}+\frac{2}{3}\,\frac{d\eta}{1+\left(\frac{2\eta+1}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{6}\,d\ln\frac{\eta^2+\eta+1}{(\eta-1)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,d\operatorname{arc\,tg}\frac{2\eta+1}{\sqrt{3}};$$ а тепер $\int\frac{d\eta}{1-\eta^3} =$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{\eta^2+\eta+1}{(\eta-1)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\eta+1}{\sqrt{3}}+C;$$ а що $\operatorname{arc\,tg}\varphi +$

$+\operatorname{arc\,cotg}\varphi = \frac{\pi}{2}$, то в попередньому виразі arc tg можна замінити на arc cotg, а $\frac{\pi}{2}$ увійде до довільної сталої C; тому остаточно:

$$\int\frac{d\eta}{1-\eta^3} = \frac{1}{6}\ln\frac{\eta^2+\eta+1}{(\eta-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,cotg}\frac{2\eta+1}{\sqrt{3}}+C.$$

[2]) Bresse. Hydraulique. 1860, стор. 238 і далі.

Таблиця 12

η	$f(\eta)$	η	$f(\eta)$	η	$f(\eta)$	η	$f(\eta)$	η	$f(\eta)$
0,00	–0,605	0,85	0,461	1,001	2,183	1,30	0,373	3,0	0,055
0,01	–0,595	0,90	0,614	1,005	1,647	1,35	0,335	4,0	0,031
0,05	–0,555	0,94	0,798	1,01	1,416	1,40	0,304	5,0	0,020
0,10	–0,505	0,95	0,862	1,02	1,191	1,50	0,257	10,0	0,005
0,20	–0,404	0,96	0,940	1,03	1,060	1,60	0,218	20,0	0,0013
0,30	–0,303	0,97	1,040	1,05	0,895	1,70	0,190	50	0,0002
0,40	–0,198	0,98	1,178	1,07	0,783	1,80	0,166	100	0,0001
0,50	–0,088	0,99	1,412	1,10	0,676	1,90	0,146	∞	0
0,60	+0,032	0,995	1,647	1,15	0,561	2,0	0,132		
0,70	0,171	0,999	2,183	1,20	0,479	2,2	0,108		
0,80	0,346	1,000	∞	1,25	0,420	2,5	0,082		

Коли проінтегрувати диференціяльне рівнання [9] в границях від η_2 до η_1, то матимемо співвідношення:

$$\frac{a}{h_0}[x_2 - x_1] = \eta_2 - \eta_1 = \left(1 - \frac{2a}{\lambda}\right)[f(\eta_2) - f(\eta_1)],$$

або, позначивши $x_2 - x_1$ через s:

$$\frac{a}{h_0} s = \eta_2 - \eta_1 - \left(1 - \frac{2a}{\lambda}\right)[f(\eta_2) - f(\eta_1)], \qquad [11]$$

дуже зручне для визначення віддалей між поперечними перекроями водотоки, в яких відносні підпори $(y > h_0)$ або спади $(y < h_0)$ мають відповідно величини:

$$\eta_2 = \frac{y_2}{h_0} \text{ і } \eta_1 = \frac{y_1}{h_0}.$$

§ 2. Форма вільної поверхні водоток за нерівномірної течії

Щоб дослідити форму вільної поверхні водоток за нерівномірної течії, вдамося до рівняння [8], з якого легко знайти:

$$\frac{dy}{dx} = a\,\frac{y^3 - h_0^3}{y^3 - \frac{2a}{\lambda} h_0^3},$$

або, позначивши $\frac{2a}{\lambda} h_0^3$ через z^3, маємо:

$$\frac{dy}{dx} = a\,\frac{y^3 - h_0^3}{y^3 - z^3}. \qquad [12]$$

Залежно від величини a, вартість z може бути менша за h_0, більша за h_0 і дорівнювати h_0; справді, коли $a < \frac{\lambda}{2}$, то, очевидно, $z < h_0$ (в цьому випадку кажуть, що маємо справу з водотокою спокійною — річкою), коли $a > \frac{\lambda}{2}$, то $z > h_0$ (кажуть, що маємо справу з водотокою бурхливою — гірською річкою або потоком), нарешті, коли $a = \frac{\lambda}{2}$, то $z = h_0$. Розгляньмо ці три випадки окремо.

Перший випадок: $a < \frac{\lambda}{2}$, $z < h_0$.

а) Хай $y > h_0$, тоді, очевидно:

$$\frac{dy}{dx} > 0,$$

отже, глибина водотоки з пересувом за течією зростає; навпаки, пересуваючись проти течії, низходить; за зростання глибини $\frac{dy}{dx}$ наближається до вартости a, і, коли глибина стане дуже велика (∞), $\frac{dy}{dx}$ дорівнюватиме a; це значить, що вільна поверхня води в річці, в міру збільшення глибини, наближається асимптотично до горизонтальної площини, якої досягає в границі, коли $y = \infty$; за зменшення глибини (за пересуву проти течії) $\frac{dy}{dx}$ наближається, очевидно, до нуля, і в границі, коли $y = h_0$, вільна поверхня, що наближається асимтотично до вільної поверхні рівномірного руху, зіллється з останньою.

Отже, вільна поверхня в даному випадку має дві асимптотичні поверхні — поверхню рівня в нижній течії й поверхню рівномірного руху у верхньому; криву перетину цієї поверхні з площиною рисунка виображено на рис. 69 (крива a), при цьому за показника правильности обернення опуклости цієї кривої до оси x-ів править вартість другої похідної:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3ay^2 \frac{h_0^3 - z^3}{(y^3 - z^3)^2} \cdot \frac{dy}{dx}, \qquad [13]$$

очевидно, в даному випадку додатня. Добута нами крива має назву кривої підпору й має місце у всіх випадках, коли водотоку підперто (див., напр., далі рис. 71) греблею (рис. 69), підвищенням рівня в нижньому б'єфі (плесо) і т. и.

б) Хай, далі, $z < y < h_0$.

В цьому випадку (див. рівнання [12])

$$\frac{dy}{dx} < 0,$$

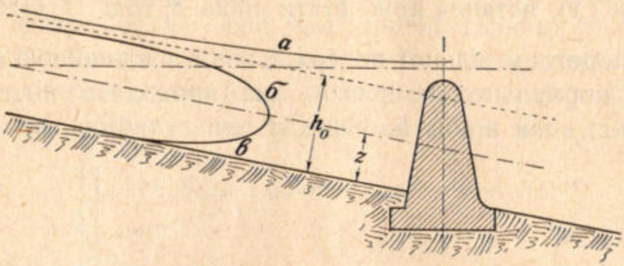

Рис. 69

отже, глибина водотоки низходить, в міру руху за течією, і зростає за руху проти течії. Границі зміни y суть h_0 і z; при цьому, в міру збільшення глибини, крива вільної поверхні асимптотично наближається до кривої вільної поверхні рівномірного руху, з якою і зливається в границі, коли y стає рівний h_0; в міру зменшення глибини вільна поверхня наближається до поверхні, яка паралельна з поверхнею рівномірного руху і є від дна на віддалі z. За цього наближення $\frac{dy}{dx}$, або тангенс кута дотичної до кривої перетину розглядуваної вільної поверхні з площиною рисунка, раз-у-раз збільшується і в границі, коли y стає рівний z, обертається на безконечність; иншими словами, розглядувана крива підійде нормально до прямої z. Криву цю позначено на рисунку 69 буквою (*б*), і має вона назву кривої спадання; правильність виображення опуклости вгору доводиться знаком другої похідної (див. рівнання [13]), яка в даному випадку від'ємна. Вільна поверхня води набирає розглядуваної форми, наприклад, у каналі, що відводить воду з верхньої водойми в нижню за знижень рівня води в останній, за землечерпання й т. и. (рис. 70).

в) Хай, нарешті, $y<z$.

У цьому випадку, згідно з рівнянням [12]:

$$\frac{dy}{dx}>0,$$

тоб-то глибина водотоки зростає в міру руху за течією і не сходить підчас руху у зворотному напрямі; за зростання глибини (y), остання може стати рівна z; тоді $\frac{dy}{dx}=\infty$, отже, крива перетину вільної поверхні води з площиною рисунку підійде нормально до прямої, яка проходить від дна на віддалі z; коли крива йде проти течії, глибина, як сказано

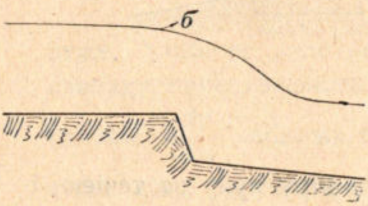

Рис. 70

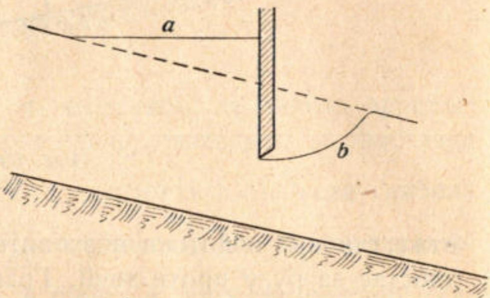

Рис. 71

раніш, низходить, і в границі, коли $y=0$ (теоретично), похідна $\frac{dy}{dx}$ дорівнює $\frac{\lambda}{2}$,— це визначає напрям підходу розглядуваної кривої до дна водотоки; друга похідна $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ в цьому випадку додатня, отже, опуклістю крива звернена до оси x-ів. Ця крива, виображена на мал. 69 у вигляді кривої (*в*), має назву щитової кривої, бо вільна поверхня води, яка витікає з-під щиту в лотоку, набирає саме розглядуваної форми (*b* рис. 71).

Другий випадок: $\alpha>\frac{\lambda}{2}$, $z>h_0$.

Тут так само можуть бути 3 форми вільної поверхні води, залежно від того, чи буде $y>z$, або $z>y>h_0$, або $y<h_0$.

а) Хай $y>z$, тоді:

$$\frac{dy}{dx}>0 \quad \text{і} \quad \frac{d^2y}{dx^2}<0;$$

глибина, як бачимо, підчас руху за течією збільшується; вільна поверхня асимптотично наближається при цьому до горизонтальної поверхні, з якою і зливається в границі, коли глибина стає (теоретично) безконечно великою, бо тоді $\frac{dy}{dx} = \alpha$. Підчас руху у зворотному напрямі, глибина зменшується, вільна поверхня наближається до поверхні паралельної з поверхнею рівномірного руху і відлеглої від нас на віддалі z, до якої при другій границі y, що дорівнює z, підходить під прямим кутом. Криву перетину цієї поверхні нерівномірного руху з площиною рисунка позначено на рис. 72 буквою (a_1), і вона має назву **кривої**

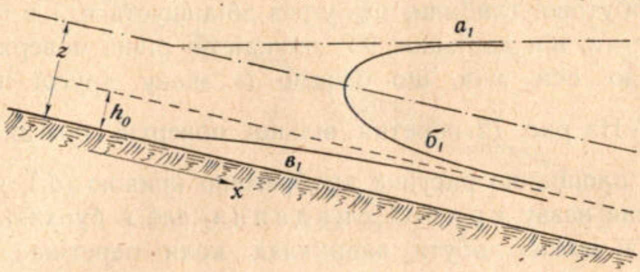

Рис. 72

скоку води; за цією кривою міститься поверхня води в бурхливому потоці, коли в ньому становлять греблю; поверхня води, що текла спочатку з побутовою глибиною h_0,

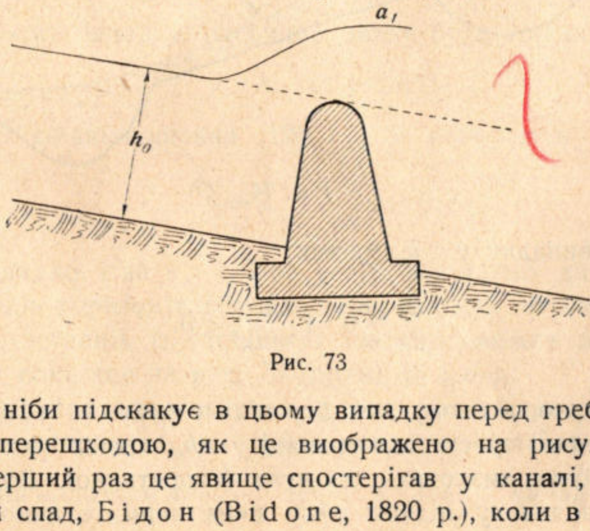

Рис. 73

відразу ніби підскакує в цьому випадку перед греблею, або взагалі перешкодою, як це виображено на рисунках 73 і 75. В перший раз це явище спостерігав у каналі, що мав великий спад, Бідон (Bidone, 1820 р.), коли в кінці канала він поставив на дно перегородку; тому явище це й має в літературі назву Бідонового скоку.

б) Коли $h_0 < y < z$, тоді

$$\frac{dy}{dx} < 0 \quad \text{і} \quad \frac{d^2y}{dx^2} > 0.$$

Підчас руху за течією, глибина зменшується, і вільна поверхня води асимптотично наближається до поверхні побутової глибини (h_0), з якою і зливається в границі, коли $y = h_0$. Підчас руху проти течії, глибина збільшується до границі $y = z$; при наближенні до цієї границі, кут, складений вільною поверхнею з поверхнями, паралельними з поверхнею побутової глибини, раз-у-раз збільшується, і в границі, коли $y = z$, він дорівнює 90°; опуклістю рівна поверхня зведена до оси x-ів, що бачимо із знаку другої похідної $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$. На рис. 72 перетин вільної поверхні розглядуваної течії з площиною рисунка виображено кривою ($б_1$), яка так само має назву ,кривої спадання, але в бурхливих потоках; її можна добути, наприклад, коли перетікає вода з однієї водойми до иншої лотоком великого спаду (рис. 74) як це иноді буває в плотопрохідних каналах, то-що.

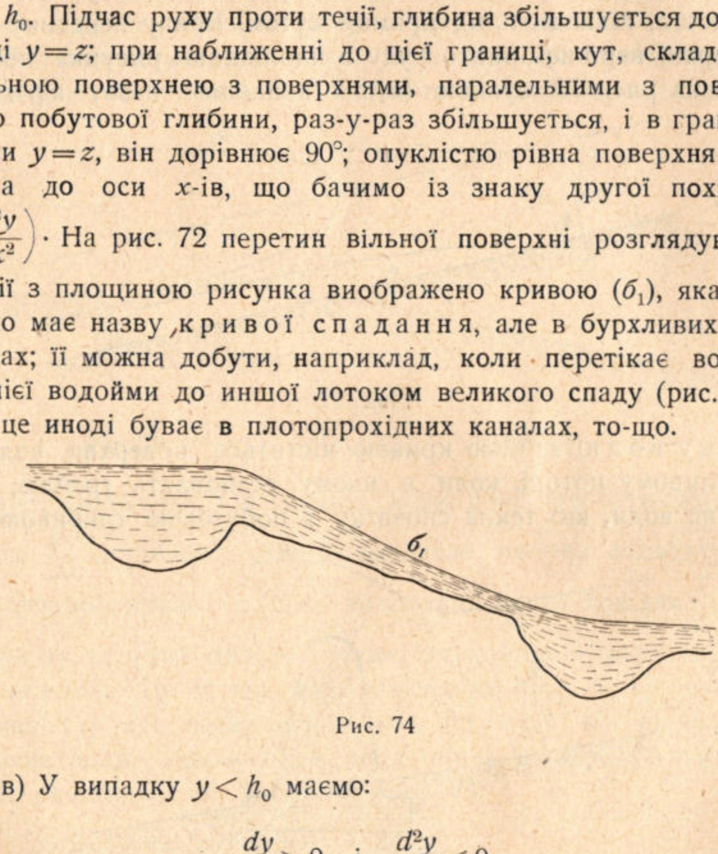

Рис. 74

в) У випадку $y < h_0$ маємо:

$$\frac{dy}{dx} > 0 \quad \text{і} \quad \frac{d^2y}{dx^2} < 0.$$

Очевидно, в цьому випадку підчас руху за течією глибина що-далі зростає до границі $y = h_0$; підчас руху проти течії глибина низходить до нуля (теоретично). Вільна поверхня водотоку підчас руху вниз асимптотично наближається до поверхні побутової глибини (h_0), з якою і зливається в границі, коли $y = h_0$. Підчас руху в зворотному напрямі, вільна поверхня наближається до поверхні дна і в границі, коли $y = 0$, підходить до останньої під кутом, що його тангенс дорівнює $\frac{\lambda}{2}$. Опуклістю вільна поверхня, очевидно, звернена до осей x-ів. Перетин вільної поверхні

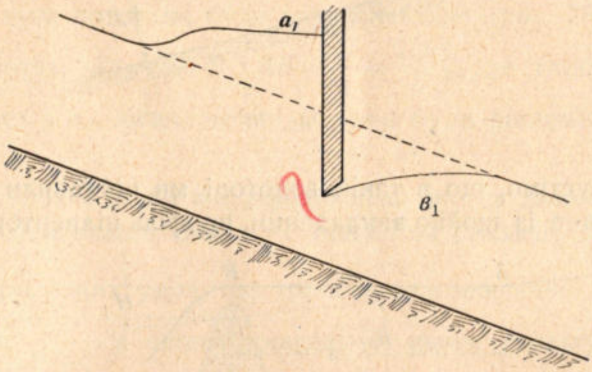

Рис. 75

з площиною рисунка виображено на рис. 72 кривою ($в_1$); ця крива має назву щ и т о в о ї к р и в о ї при великому спаді каналу або лотоку (рис. 75, крива $в_1$).

Третій випадок: $a = \frac{\lambda}{2}$, отже, $z = h_0$.

В цьому випадку, очевидно, може бути тільки

$$y > h_0 \quad \text{і} \quad y < h^0.$$

А що співвідношення [12] і [13] набирають тепер вигляду:

$$\frac{dy}{dx} = a \quad \text{і} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

то, очевидно, і за $y > h_0$ і за $y < h_0$ ми маємо для вільних поверхонь горизонтальні площини, і самий вигляд перетинів цих останніх із площиною рисунку можна виобразити так, як показано на рис. 76 (прямі a_{II} і $б_{II}$).

На практиці розглядувані форми вільної поверхні можна добути, наприклад, у таких випадках: уявімо собі, що спад дна водотоки $a = \frac{\lambda}{2}$; течія в цьому випадку цілком рівномірна, отже й профіль вільної поверхні є пряма, паралельна з дном ($h_0 = \text{const}$).

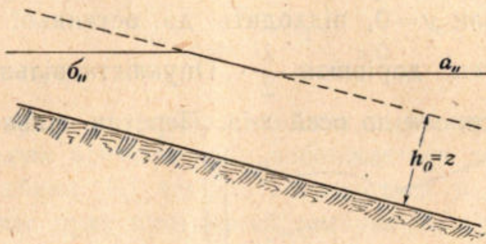

Рис. 76

Припустімо, що в такій водотоці ми поставили греблю; тоді, згідно із щойно викладеним, профіль підпертої (рис. 77)

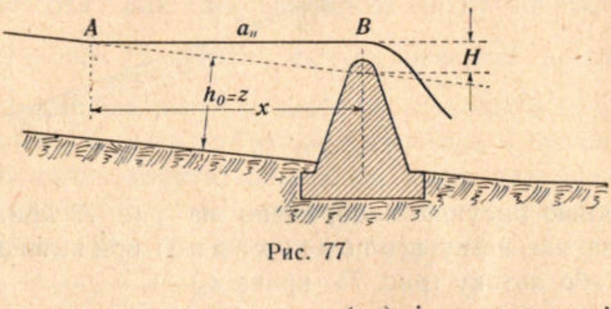

Рис. 77

води буде горизонтальна пряма (a_{II}), і коли в точці B глибина потоку перевищує глибину рівномірної течії на величину H, то довжина потоку, що протягом неї профіль залишається горизонтальний (довжина AB), є

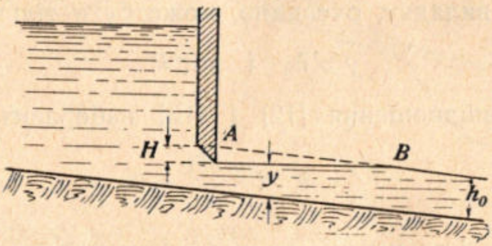

Рис. 78

$$x = \frac{H}{\alpha} = \frac{2H}{\lambda},$$

а далі, від точки A вгору потоку, рух буде рівномірний.

Припустімо тепер, що вода з водотоки, посудини, то-що, витікає через щитову відтулину в жолоб або канал, поставлений під спадом $a=\frac{\lambda}{2}$, і витікає під таким напором, що швидкість у жолобі або каналі біля вихідної відтулини більша, як швидкість рівномірної течії далі, вниз по каналу. В цьому випадку після виходу з відтулини в канал або жолоб, її вільна поверхня буде горизонтальна (рис. 78) на деякому протязі від A до B $\left[AB=\frac{H}{a}=\frac{2H}{\lambda}\right]$, де глибина ($y$) зрівняється з h_0; нижче точки B течія буде рівномірна.

§ 3. Розвязування задачі про нерівномірний рух за Дюпюї-Рюльманом (Dupuit-Rühlmann, 1880 р.) і Толкміттом (Tolkmitt, 1892 р.)

За нормальних умов, що трапляються звичайно в практиці, член $\frac{2}{y}\frac{v^2}{2g}$ у співвідношенні [5] цього розділу становить дуже малий дріб, на який можна не звертати уваги, що й робить Рюльман; у цьому випадку рівняння [8] набирає вигляду:

$$a\left(1-\frac{h_0^3}{y^3}\right)dx=dy. \tag{14}$$

Дослідження цього рівняння призводить до тих самих профілів рівних поверхонь, що й дослідження рівняння [8].

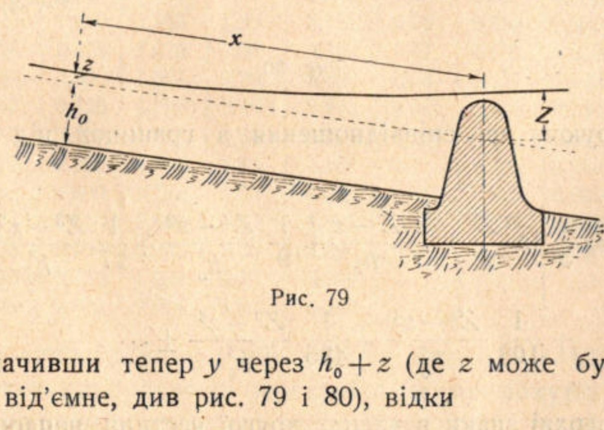

Рис. 79

Позначивши тепер y через h_0+z (де z може бути і додатнє і від'ємне, див рис. 79 і 80), відки

$$dy=dz,$$

маємо з [14];

$$a\left(1-\frac{h_0^3}{(h_0+z)^3}\right)dx=dz,$$

а з нього:

$$adx=\frac{(h_0+z)^3}{(h_0+z)^3-h_0^3}\,dz=\frac{h_0^3+3h_0^2\,z+3h_0\,z^2+z^3}{3h_0^2z+3h_0z^2+z^3}\,dz.$$

Справді, поділивши чисельник на знаменик у другій частині останнього рівнання й винісши h_0 за дужки, знаходимо:

$$adx=h_0\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z}+\frac{2}{3}\,\frac{1}{h_0}+\frac{2}{9}\,\frac{z}{h_0^2}-\frac{1}{9}\,\frac{z^2}{h_0^3}+\frac{1}{27}\,\frac{z^3}{h_0^4}-\cdots\right)dz$$

або

$$\frac{a}{h_0}dx=\frac{1}{3}\,\frac{dz}{z}+\frac{2}{3}\,\frac{dz}{h_0}+\frac{2}{9}\,\frac{zdz}{h_0^2}-\frac{1}{9}\,\frac{z^2dz}{h_0^3}+$$

$$+\frac{1}{27}\,\frac{z^3dz}{h_0^4}-\frac{1}{81}\,\frac{z^5dz}{h_0^6}+\cdots$$

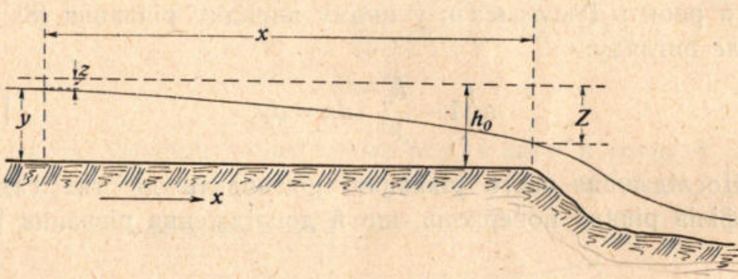

Рис. 80

Інтегруючи це співвідношення в границях від Z до z, маємо:

$$\frac{a}{h_0}\,x=\frac{1}{3}\ln\frac{Z}{z}\pm\frac{2}{3}\,\frac{Z-z}{h_0}+\frac{1}{9}\,\frac{Z^2-z^2}{h_0^2}\mp\frac{1}{27}\,\frac{Z^3-z^3}{h_0^3}+$$

$$+\frac{1}{108}\,\frac{Z^4-z^4}{h_0^4}-\frac{1}{486}\,\frac{Z^6-z^6}{h_0^6}\pm\cdots \qquad [15]$$

Тут верхні знаки в членах другої частини непарних степенів стосуються до підпору, нижні до спадання.

Очевидно, далі другу частину останнього співвідношення можна виобразити, як: $\Phi\left(\frac{Z}{h_0}\right)-\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$, а тоді все рівнання набере вигляду:

$$\frac{a}{h_0}x=\Phi\left(\frac{Z}{h_0}\right)-\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right), \qquad [16]$$

в якому вигляді звичайно і подається розвязання задачі про нерівномірну течію за Dupuit-Rühlmann'ом. Вартості функції $\Phi\left(\frac{Z}{h_0}\right)$ і $\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$ обчислив Ґедекер (Gödecker), а у вигляді таблиць їх подав Rühlmann (скорочені таблиці дав іще Dupuit); витяг з них наводимо в таблиці 13, при цьому треба зауважити, що оскільки і підпора і спадання зникають (теоретично) тільки в безконечності, Ґедекер початок координат ($x=0$) умовно взяв там, де $z=0{,}0098h_0$.

Таблиця 13

Для кривих підпору						Для кривих спадання			
$\frac{z}{h_0}$	$\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$	$\frac{z}{h_0}$	$\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$	$\frac{z}{h_0}$	$\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$	$\frac{z}{h_0}$	$\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$	$\frac{z}{h_0}$	$\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$
0,010	0,0067	0,275	1,296	0,850	2,110	0,010	0,0067	0,250	0,914
0,015	0,1452	0,300	1,343	0,900	2,168	0,015	0,1251	0,300	0,945
0,020	0,2444	0,325	1,388	0,950	2,226	0,020	0,2287	0,350	0,967
0,025	0,3222	0,350	1,431	1,00	2,284	0,025	0,2888	0,400	0,983
0,030	0,3863	0,375	1,472	1,20	2,508	0,030	0,3463	0,450	0,995
0,040	0,489	0,400	1,512	1,40	2,726	0,04	0,436	0,500	1,004
0,050	0,570	0,425	1,551	1,60	2,940	0,05	0,503	0,550	1,010
0,060	0,637	0,450	1,588	1,80	3,151	0,06	0,558	0,600	1,014
0,070	0,696	0,475	1,625	2,00	3,359	0,07	0,603	0,650	1,017
0,080	0,748	0,500	1,661	2,20	3,566	0,08	0,641	0,700	1,018
0,090	0,793	0,525	1,696	2,40	3,772	0,09	0,673	0,750	1,019
0,100	0,835	0,550	1,731	2,60	3,977	0,100	0,702	0,800	1,020
0,125	0,927	0,575	1,765	2,80	4,181	0,125	0,760	0,850	1,0202
0,150	1,005	0,600	1,798	3,00	4,385	0,150	0,805	0,900	1,0203
0,175	1,074	0,650	1,863	3,50	4,891	0,175	0,841	0,950	1,0203
0,200	1,136	0,700	1,927	4,00	5,396	0,200	0,870	1,000	1,0203
0,225	1,193	0,750	1,989	4,50	5,899				
0,250	1,246	0,800	2,046	5,00	6,402				

Вищенаведені розвязання Bresse'a і Dupuit-Rühlmann'a припускають, що поперечні перекрої корит прямокутні й дуже великі завширшки; справжні корита звичайно рідко мають точно прямокутні перекрої; тому Толкмітт запропонував змінену розвязку задачі про нерівномірну течію, припустивши корито параболічної форми, а так само дуже велике завширшки.

Визначаючи всі гідравлічні елементи потоку (ширина, площа живого перекрою, то-що), які змінюються за нерівномірного руху залежно від ширини (b) й глибини (y) тільки через останню й постійні побутові глибину h_0 й ширину b_0 (рис. 81), Толкмітт дійшов до рівняння вигляду:

$$\frac{ax}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - \left(1 - \frac{2a}{\lambda}\right)[\psi(\eta_2) - \psi(\eta_1), \qquad [17]$$

де η_2 і η_1, відповідно, дорівнюють $\frac{y_2}{h_0}$ і $\frac{y_1}{h_0}$, тоб-то до рівняння, вельми подібного до рівняння Bresse'a і відмінного від нього тільки функціями $\psi(\eta_2)$ і $\psi(\eta_1)$.

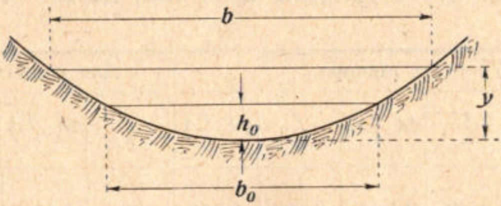

Рис. 81

Рівняння [17] можна, очевидно, переписати в такій формі:

$$\frac{ax}{h_0} = \left[\eta_2 - \left(1 - \frac{2a}{\lambda}\right)\psi(\eta_2)\right] - \left[\eta_1 - \left(1 - \frac{2a}{\lambda}\right)\psi(\eta_1)\right],$$

а тепер, поклавши

$$\left.\begin{aligned} \eta_2 - \left(1 - \frac{2a}{\lambda}\right)\psi(\eta_2) = \Phi(\eta_2) \\ \eta_1 - \left(1 - \frac{2a}{\lambda}\right)\psi(\eta_1) = \Phi(\eta_1) \end{aligned}\right\}, \qquad [18]$$

остаточно маємо Толкміттове рівняння:

$$\frac{ax}{h_0} = \Phi(\eta_2) - \Phi(\eta_1), \qquad [19]$$

при цьому для кривих підпору в спокійних річках функції $\Phi(\eta_2)$ і $\Phi(\eta_1)$ трохи спрощуються, бо Толкмітт не зважає на член $\frac{2a}{\lambda}$, як на порівняно малу величину.

Для вартостей функції $\Psi(\eta)$ так само складено таблиці, що витяги з них тут додається (табл. 14).

Таблиця 14

Для кривих підпору						Для кривих спадання			
η	$\Psi(\eta)$	η	$\Psi(\eta)$	η	$\Psi(\eta)$	η	$\Psi(\eta)$	η	$\Psi(\eta)$
1,0	$-\infty$	1,22	0,985	1,75	1,685	1,000	∞	0,80	0,087
1,005	−0,102	1,24	1,021	1,80	1,740	0,995	0,894	0,78	0,074
1,010	0,074	1,26	1,055	1,85	1,795	0,990	0,724	0,76	0,063
1,015	0,179	1,28	1,087	1,90	1,850	0,985	0,625	0,74	0,054
1,020	0,254	1,30	1,119	1,95	1,904	0,980	0,556	0,72	0,046
1,025	0,313	1,32	1,149	2,00	1,957	0,975	0,504	0,70	0,039
1,03	0,362	1,34	1,178	2,2	2,168	0,970	0,461	0,68	0,033
1,04	0,440	1,36	1,207	2,4	2,376	0,96	0,395	0,66	0,028
1,05	0,502	1,38	1,235	2,6	2,581	0,95	0,346	0,64	0,024
1,06	0,554	1,40	1,262	2,8	2,785	0,94	0,306	0,62	0,020
1,07	0,599	1,42	1,289	3,0	2,988	0,93	0,274	0,60	0,017
1,08	0,635	1,44	1,315	3,5	3,492	0,92	0,246	0,55	0,011
1,09	0,675	1,46	1,341	4,0	3,995	0,91	0,223	0,50	0,006
1,10	0,708	1,48	1,367	4,5	4,496	0,90	0,203	0,45	0,004
1,12	0,766	1,50	1,392	5,0	4,997	0,88	0,169	0,40	0,002
1,14	0,818	1,55	1,453	6,0	5,998	0,86	0,142	0,35	0,001
1,16	0,865	1,60	1,513	8,0	7,999	0,84	0,120	0,30	0
1,18	0,908	1,65	1,571	10,0	10,000	0,82	0,102	0	0
1,20	0,948	1,70	1,628						

Що ж до порівняного цінування викладених розвязок, то, як показує перевірка розвязок справжніми спостереженнями методи Дюпюї-Рюльмана і Толкмітта мало одмінні одна від однієї, але, як бачимо, перша метода точніша за другу; обчислюючи підпір на Дунайському каналі*) довжиною в 16 *км* і при підпорі в 4,5 *м* максимальні збочення розрахункових профілів (трьох) од справжніх профілів підпору за першою методою були: 15,11 і 19 *см*, а за другою: 17,15 і 21 *см*.

Спосіб Брессів трохи точніший за два инші способи, але, звичайно, абсолютного збігання з справжніми спостереженнями не дає, бо всі вказані способи припускають дуже велику ширину корита проти глибини і, крім того, не зважають на зміни коефіцієнту $C=\sqrt{\frac{2g}{\lambda}}$ з глибиною у формулі Шезі.

*) Ph. Forchheimer. Hydraulik. 1914, стор. 133.

Але, не зважаючи на згадані вади, одержувані наслідки підрахунків за цими методами не дуже розбігаються із справжніми спостереженнями, і на практиці до цього часу методи ці дуже поширені. При цьому треба зауважити, що в справжніх коритах взагалі важко здобути точну розвязку, бо поперечні профілі й спади дна иноді дуже змінюються за течією. Через це корито річки доводиться розбивати на такі окремі ділянки, що для кожної з них можна було б з більшою чи меншою точністю взяти якийсь пересічний спад дна і пересічний поперечний перекрій; пересічний спад доводиться при цьому обчисляти, як частку від ділення падання рівня води на ділянці на довжину її.

Для подовжного профіля, наприклад, за рис. 82, треба було б спершу визначити (вирисувати) профіль вільної поверхні на ділянці від *A* до *B*, потім од *B* до *C*, взявши точку *B* за початок підпору проти течії, далі від *C* до *D*, взявши точку *C* за початок підпору проти течії й т. и.; в результаті мали б ламаний профіль підпорної кривої *ABCD*..., який був би, звичайно, тільки наближений.

Рис. 82

Останнього часу з'явилось кілька нових метод розвязувати ту саму задачу. Такі, наприклад, способи проф. Бахметьєва (1914 р.) і Батікля (Baticle, 1921 р.), але, зважаючи на їхню новину й на обмеженість уживання на практиці, зупинятися на них ми не будемо. Охочих ознайомитися з цими способами посилаємо до „Гидравлического Справочника" проф. Н. Н. Павловського, де наведено також і літературні джерела.

§ 4. Питома енергія водотоки

Хай маємо поперечний перекрій *AOB* водотоки, показаний на доданому рисункові (рис. 83). Через нижню точку *O* проводимо площину, що від неї будемо відраховувати ординати. Хай повна глибина є h. Візьмімо безконечно малу площинку $d\omega$ в поперечному перекрої водотоки; віддаль її від поверхні й від основної площини (OO) назовімо y і z; тоді, означивши ще швидкість течії площинкою $d\omega$ через u, маємо вираз елементарної енергії:

$$\delta \,.\, u \,.\, d\omega\left(z+\frac{p}{\delta}+\frac{u^2}{2g}\right)=dЭ=\delta \,.\, u \,.\, d\omega\,(z+y)+$$

$$+\frac{\delta u^3}{2g}\,d\omega=\delta \,.\, u \,.\, d\omega \,.\, h+\frac{\delta u^3}{2g}\,d\omega,$$

віднесеної до ваги води, яка протікає площинкою, $d\omega$ за 1 секунду. Енергія цієї водотоки, очевидно, буде:

$$Э=\delta h\int\limits_{\omega} u d\omega+\frac{\delta}{2g}\int\limits_{\omega} u^3 d\omega=\delta h v\omega+\frac{\delta}{2g}\,a v^3\omega,$$

де a є коефіцієнт (залежний від нерівномірного розподілу швидкостей по перекрою), близький до одиниці (прийманий за рівний 1,06 — 1,1), а v — пересічна швидкість у перекрої.

Енергія водотоків, віднесена до ваги води ($\delta\omega v$), що протікає через перекрій і яку називають питомою енергією*), очевидно, буде:

$$E=\frac{Э}{\delta\omega v}=\frac{\delta h v\omega}{\delta\omega v}+\frac{\delta}{2g}\,\frac{a v^3\omega}{\delta\omega v}=$$

$$=h+\frac{a v^2}{2g}=h+\frac{aQ^2}{2g\omega^2}\,.$$

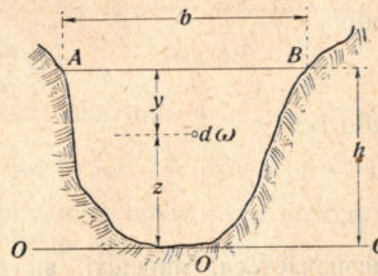

Рис. 83

Зміну енергії з глибиною знайдемо, взявши похідну за h:

$$\frac{dE}{dh}=1-\frac{aQ^2}{g\omega^3}\cdot\frac{d\omega}{dh}\,;$$

але $\frac{d\omega}{dh}$ є, очевидно, ширина водотоки b, а тому:

$$\frac{dE}{dh}=1-\frac{aQ^2}{g\omega^3}\cdot b; \qquad [20]$$

цей вираз може бути:

$$<O,\ =O \text{ і } >O;$$

---

*) Цю назву запровадив у гідравліку проф. Б. А. Бахметьєв (О неравномерном движении в открытых каналах и руслах. Петроград, 1912).

отже, енергія низходить:

$$\frac{dE}{dh} < 0, \quad \text{коли} \quad 1 - \frac{aQ^2}{g\omega^3} b < 0,$$

енергія досягає minimum'у:

$$\frac{dE}{dh} = 0, \quad \text{коли} \quad 1 - \frac{aQ^2}{g\omega^3} b = 0,$$

енергія зростає:

$$\frac{dE}{dh} > 0, \quad \text{коли} \quad 1 - \frac{aQ^2}{g\omega^3} b > 0.$$

А що в природних і штучних коритах ω зростає із збільшенням глибини, то з попередніх співвідношень виходить, що у водотоці із збільшенням глибини, енергія спочатку зменшується і досягає мінімуму на глибині, яку можна знайти із співвідношення:

$$1 - \frac{aQ^2}{g\omega^3} b = 0, \quad \text{або} \quad 1 - \frac{a}{g} \frac{Q^2}{b^2} \frac{b}{bh^3} = 0,$$

або

$$1 - \frac{aq^2}{g} \frac{1}{h_k^3} = 0,$$

або ще

$$1 - \frac{av^2}{gh_k} = 0,$$

визначається, нарешті, як $h_k = \sqrt[3]{\frac{aq^2}{g}} = \frac{av^2}{g}$ і зветься критичною глибиною; тут через q позначається кількість води, яка протікає на одиниці ширини корита, при цьому за наведених операцій припускалося, що ширина корита значно більша за глибину, тому площу корита можна вважати за рівну добуткові від ширини на глибину (природні водотоки), або що корито прямокутнє (канали).

Після переходу критичної глибини питома енергія із збільшенням глибини зростає. На додаваному рисункові (рис. 84) цю зміну виображено графічно.

Раніш ми бачили, що зменшення енергії із збільшенням глибини відбувається за умови:

$$1 - \frac{aQ^2}{g\omega^3} b < 0,$$

або, очевидно,

$$1-\frac{av^2b}{g\omega}<0,$$

або ще:

$$1-\frac{av^2}{gh}>0;$$

вираз $1-\frac{av^2}{gh}$ майже не відрізняється від виразу $1-\frac{2}{y}\frac{v^2}{2g}$, який є у співвідношенні, одержуваному з [5], і далі у [12]:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a-\frac{\lambda}{R}\frac{v^2}{2g}}{1-\frac{2}{y}\frac{v^2}{2g}}=a\,\frac{y^3-h_0^3}{y^3-z^3},$$

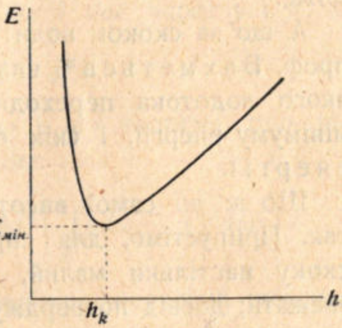

Рис. 84

тоб-то, инакше кажучи, умова $1-\frac{av^2}{gh}<0$ нерозривно звязана з нерівностями:

$$1-\frac{2}{y}\frac{v^2}{2g}<0, \text{ або } y<z;$$

останню ж нерівність виконується або при $a<\frac{\lambda}{2}$, коли $0<y<z<h_0$, або при $a>\frac{\lambda}{2}$, коли $h_0<y<z$; перша умова стосується до звичайної спокійної річки, друга — до потоку. А що глибина z є, очевидно, не инше що, як критична глибина, бо умові $y=z$ відповідає умова:

$$1-\frac{av^2}{gh}=0, \text{ або } 1-\frac{aq^2}{gh^3}=0;$$

і що за умови $h_0<y<z$ у потоці, так само як і за умови $0<y<z<h_0$ у річці, збільшення глибини спричинюється до наближення до критичної глибини, то виходить, що в річці і в потоці спад енергії відбувається за збільшення глибини, але з тією ріжницею, що в річках ці глибини повинні бути менші за нормальні (побутові), а в потоках більші за побутові, і мінімум енергії в першому випадку буде так само за глибин менших від побутових, у другому — більших від побутових. Навпаки, коли через якісь причини в річці відбувається втрата енергії, то ця втрата повинна відбуватись

разом із зменшенням глибини проти нормальної; в потоці, навпаки, із збільшенням глибини проти нормальної; так, наприклад, камінь, що лежить на дні річки, спричинюється до зниження поверхні води над ним, той самий камінь у потоці спричинюється до підвищення поверхні води над ним.

У потоці, очевидно, збільшення глибини проти нормальної й наближення останньої до критичної може спричинитись до утворення скоку води, в річці цього статися не може.

А що за скоком води встановлюється спокійна течія, то проф. Бахметьев*) визначає скік води, як таке явище, за якого водотока переходить з одного стану до иншого за мінімуму енергії, і скік є, таким робом, ніби **зберігач енергії**.

Що ж до самої висоти скоку, то її можна визначити так. Припустімо, для спрощення, що спад дна в районі скоку настільки малий, що ми на силу ваги можемо не зважати; досвід потверджує, що для даного випадку таке припущення допустиме. Виділімо двома перекроями AB і CD в місці скоку порівняно невелику ділянку водотоки і застосуймо до неї теорему про кількість руху: збільшення кількости руху за дане межичасся дорівнює імпульсові сил за те саме межичасся. За межичасся візьмімо елемент dt, і хай протягом його об'єм, що ми виділили, переміститься з положення $ABCD$ в положення $A'B'C'D'$. З рисунку 85 ми ба-

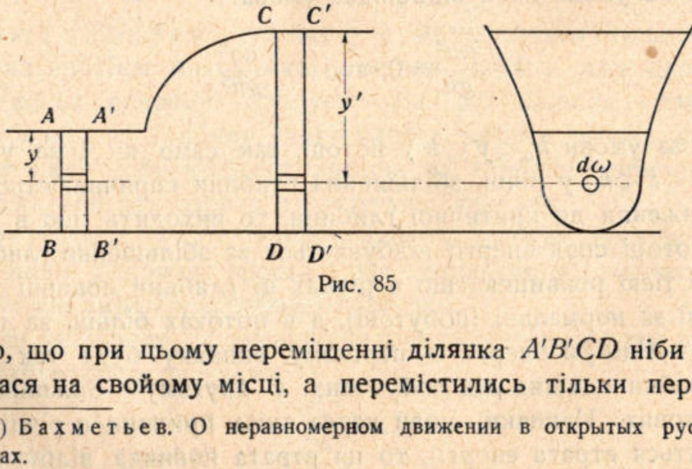

Рис. 85

чимо, що при цьому переміщенні ділянка $A'B'CD$ ніби залишилася на своєму місці, а перемістились тільки перекрої

*) Бахметьев. О неравномерном движении в открытых руслах и каналах.

AB і CD, відповідно в положення $A'B'$ і $C'D'$; таким робом, вищенаведену теорему ми можемо застосувати лише до об'ємів $ABA'B'$ і $СДС'D'$; тому, виділивши в перекроях AB і CD елементарні площинки $d\omega$ і $d\omega'$ і назвавши швидкості течії через них u і u', маємо збільшення кількости руху за час dt:

$$\frac{\delta u'^2 dt}{g} d\omega' - \frac{\delta u^2 dt}{g} d\omega \cong \frac{\delta}{g} dt \left[u'^2 d\omega' - u^2 d\omega \right] \cdot$$

Імпульс сил за це саме межичасся буде, коли позначити глибини затоплення площинок $d\omega$ і $d\omega'$ через y і y', відповідно:

$$\delta (y d\omega - y' d\omega') dt.$$

Отже, для цілих перекроїв (ω і ω') теорема про кількість руху дає нам співвідношення:

$$\frac{\delta}{g} dt \left[\int_{\omega} u'^2 d\omega' - \int_{\omega} u^2 d\omega \right] = \delta dt \left[\int_{\omega} y d\omega - \int_{\omega'} y' d\omega' \right],$$

відки, зробивши скорочення і завівши пересічні швидкості по перекроях v і v', маємо:

$$\frac{a}{g} \left[\omega' v'^2 - \omega v^2 \right] = y_c \omega - y_c' \omega'; \qquad [21]$$

при цьому ми позначили глибини затоплення центрів ваги перекроїв ω і ω' через y_c і y_c' і замінили $\int_{\omega'} u'^2 d\omega$ і $\int_{\omega} u^2 d\omega$, відповідно, на $a\omega' v'^2$ і $a\omega v^2$, де a вважають за рівне $1{,}02 - 1{,}04$ і вище.

Застосуймо останнє співвідношення до прямокутного корита сталої ширини b: тоді, назвавши глибини до скоку й після скоку, відповідно, h_1 і h_2, маємо:

$$\omega = bh_1; \; y_c = \frac{h_1}{2}; \quad bh_2 v' = bh_1 v;$$

$$\omega' = bh_2; \; y_c' = \frac{h_2}{2}; \quad v' = v \frac{h_1}{h_2},$$

а тому попереднє співвідношення матиме вигляд:

$$\frac{a}{g} v^2 \left(\frac{h_1^2}{h_2^2} - h_1 \right) = \frac{h_1}{2} h_1 - \frac{h_2}{2} h_2,$$

відки

$$\frac{av^2}{g}\cdot\frac{h_1}{h_2}[h_1-h_2]=\frac{h_1^2-h_2^2}{2},$$

або

$$\frac{2av^2}{g}h_1=(h_1+h_2).h_2=h_1h_2+h_2^2.$$

З останнього співвідношення знаходимо:

$$h_2=-\frac{h_1}{2}+\sqrt{\frac{h_1^2}{4}+\frac{2av^2h_1}{g}}=\frac{h_1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{8av^2}{gh_1}}-1\right],$$

взявши перед коренем знак + за змістом задачі.

Замінивши, нарешті, (v) на $\frac{q}{h_1}$, де q є кількість води, що протікає на одиниці ширини каналу, остаточно маємо:

$$h_2=\frac{h_1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{8aq^2}{gh_1^3}}-1\right]. \qquad [22]$$

Легко вивести так само, що, навпаки:

$$h_1=\frac{h_2}{2}\left[\sqrt{1+\frac{8aq^2}{gh_2^3}}-1\right]. \qquad [23]$$

Глибини h_1 і h_2 звуться через це взаємними.

§ 5. Задачі на нерівномірний рух

Задача I. Річка має пересічний спад $I=0{,}0001$, пересічну ширину $b_0=100$ *м* і пересічну побутову глибину $h_0=2$ *м*. На річці збудовано греблю такої висоти, що глибина в греблі підвищилась на 2 *м*. Треба визначити довжину поширення підпору.

Розвязка перша. Беремо корито в поперечному перекрої за прямокутнє. Задачу розвязуємо за способом Дюпюї-Рюльмана. Вважаємо кінець підпору там, де відношення перевищення підпірної глибини над побутовою до останньої становить 0,01.

Для основного співвідношення Дюпюї-Рюльмана:

$$\frac{ax}{h_0}=\Phi\left(\frac{Z}{h_0}\right)-\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$$

маємо:

$$a = I = 0{,}0001;$$

$$h_0 = 2 \text{ м};$$

$$Z = 2 \text{ м}, \text{ отже, } \frac{Z}{h_0} = 1;$$

$$\frac{z}{h_0} = 0{,}01,$$

а тому

$$x = \frac{2}{0{,}0001}\left[\Phi(1) - \Phi(0{,}01)\right];$$

за таблицею 11 знаходимо:

$$\Phi(1) = 2{,}284; \quad \Phi(0{,}01) = 0{,}0067,$$

а тепер

$$x = \frac{2(2{,}284 - 0{,}0067)}{0{,}0001} = \frac{2 . 2{,}277}{0{,}0001} = 45540 \text{ м} = 45{,}54 \text{ км}.$$

Розвязка друга. Беремо корито в поперечному перекрої за параболічне. Задачу розвязуємо за способом Толкмітта. А що, очевидно, живі перекрої річки треба взяти однакові, розвязуючи задачу за обома способами, то, передусім, знаходимо найбільшу побутову глибину для параболічного корита; маємо:

$$\omega = b_0 h_0 = 2 . 100 = 200 = \frac{2}{3} h'_0 b_0 = \frac{2 . 100}{3} \cdot h'_0 = \frac{200}{3} h'_0,$$

відки

$$h'_0 = 3 \text{ м}.$$

Для основного співвідношення Толкмітта.

$$\frac{ax}{h_0} = \Psi(\eta_2) - \Psi(\eta_1)$$

маємо:

$$a = I = 0{,}0001.$$

$$h_0 = h'_0 = 3;$$

$$\eta_2 = \frac{y_2}{h_0} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3} = 1{,}66;$$

$$\eta_1 = \frac{y_1}{h_0} = \frac{3 + 0{,}01 . 3}{3} = \frac{3{,}03}{3} = 1{,}01,$$

а тому

$$x = \frac{h_0}{a}[\Phi(\eta_2) - \Phi(\eta_1)] = \frac{3}{0,0001}[\Phi(1,66) - \Phi(1,01)];$$

за таблицею 14 знаходимо:

$$\Phi(1,66) = 1,582 \text{ (інтегруванням)},$$

$$\Phi(1,01) = 0,074,$$

а тепер

$$x = \frac{3(1,582 - 0,074)}{0,0001} = \frac{3 \,.\, 1,508}{0,0001} = 45240 \text{ м} = 45,24 \text{ км}.$$

Задача 2. Річка з пересічним спадом $I = 0,00016$ у меженну (низьку) воду має середню ширину $b_0 = 240$ *м*, а пересічну площу поперечного перекрою $\omega = 280$ *м*^{2}. Від певного поперечного перекрою *A* за водою розпочато землечерпальні роботи, що спричинились до того, що біля перекрою *A* (рис. 86) рівень води в річці знизився на 0,3 *м*. Питання, на якій віддалі від перекрою *A* проти води зниження рівня води проти нормального досягає ще 0,06 *м*.

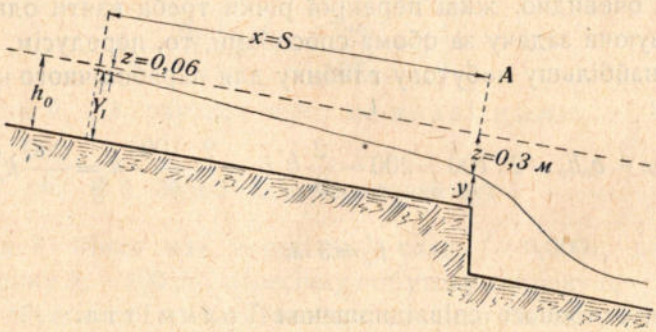

Рис. 86

Розвязка перша. Профіль поперечного перекрою річки беремо за параболічний; тому задачу розвязуємо за способом Толкмітта. Для основного співвідношення:

$$\frac{ax}{h_0} = \Phi(\eta_2) - \Phi(\eta_1).$$

яке для кривих спадання набере вигляду:

$$\frac{ax}{h_0} = \Phi(\eta_1) - \Phi(\eta_2),$$

маємо:

$$a = I = 0{,}00016;$$

$$h_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{280}{240} = 1{,}75 \ \textit{м};$$

$$\eta_2 = \frac{h_0 - 0{,}3}{h_0} \cong 0{,}829;$$

$$\eta_1 = \frac{h_0 - 006}{h_0} = 0{,}966,$$

а тому

$$x = \frac{h_0}{a} \left[\Psi(0{,}966) - \Psi(0{,}829)\right];$$

за таблицею 14 знаходимо:

$$\left.\begin{array}{l}\Psi(0{,}966) = 0{,}434 \\ \Psi(0{,}829) = 0{,}110\end{array}\right\} \text{інтерполюванням,}$$

а тепер

$$x = \frac{1{,}75(0{,}434 - 0{,}110)}{0{,}00016} = \frac{1{,}75 \, . \, 0{,}324}{0{,}00016} \textit{м} = 3540 \ \textit{м} = 3{,}54 \ \textit{км}.$$

Розвязка друга. Профіль поперечного перекрою річки беремо за прямокутний, тому задачу розвязуємо за способом Дюпюї-Рюльмана.

Для основного співвідношення:

$$\frac{ax}{h_0} = \Phi\left(\frac{Z}{h_0}\right) - \Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$$

маємо

$$h_0 = \frac{\omega}{b_0} = \frac{280}{240} = 1{,}167;$$

$$Z = 0{,}3, \text{ а тому } \frac{Z}{h_0} = \frac{0{,}3}{1{,}167} = 0{,}257;$$

$$z = 0{,}06, \text{ а тому } \frac{z}{h_0} = \frac{0{,}06}{1{,}167} = 0{,}0514;$$

за таблицею 13:

$$\Phi\left(\frac{Z}{h_0}\right) = \Phi(0{,}257) = 0{,}9189;$$

$$\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right) = \Phi(0{,}0514) = 0{,}5114;$$

а тому

$$x=\frac{h_0}{a}\left[\Phi\left(\frac{Z}{h_0}\right)-\Phi\frac{z}{h_0}\right)\right]=\frac{1,167}{0,00016}\,0,408=2970\ м=2,97\ км.$$

Розвязка третя. Зважаючи на велику розбіжність одержаних результатів розвязок за способом Толкмітта і за способом Дюпюї-Рюльмана, розвязуємо задачу ще за Брессовою методою.

Для основного співвідношення:

$$\frac{aS}{h_0}=\eta_2-\eta_1-\left(1-\frac{2a}{\lambda}\right)[f(\eta_2)-f(\eta_1)]$$

маємо:

$$h_0=1,167;$$

$$\eta_2=\frac{h_0-0,3}{h_0}=\frac{1,167-0,3}{1,167}=\frac{0.867}{1,167}=0,74;$$

$$\eta_1=\frac{h_0-0,06}{h_0}=\frac{1,167-0,06}{1,167}=\frac{1,107}{1,167}=0,95;$$

за таблицею 12 знаходимо через інтерполяцію:

$$f(\eta_1)=f(0,95)=0,862;$$

$$f(\eta_2)=f(0,74)=0,241.$$

Беремо коефіцієнт шаршавости $\lambda=0,025$, а тоді

$$1-\frac{2a}{\lambda}=1-\frac{2\,.\,0,00016}{0,025}=1-\frac{0,00032}{0,025}=1-0,0128=0,987,$$

і тепер

$$S=\frac{1,167}{0,00016}\,[0,740-0,950-0,987\,(0,241-0,862)]=$$

$$=\frac{1,167}{0,00016}\,[-0,210-0,987\,(-0,621)]=\frac{1,167}{0,00016}\,[0,613-0,210]=$$

$$=\frac{1,167}{0,00016}\cdot 0,403=2940\ м=2,94\ км.$$

А що результат розвязки за Брессом майже збігається з таким же самим за Дюпюї-Рюльманом, то, очевидно, значна одміна першої розвязки (за Толкміттом) від двох останніх не є явище випадкове, а лежить у самій суті явищ, що відбувалися за зроблених припущень. Справді, на рис. 87 показано площі (*abcd* і *a'b'e'*) поперечних перекроїв у водотоку за рівномірного руху, а зарисовані площинки (*aefd* і *d'c'e'*) є площі поперечних перекроїв водотоки біля перекрою *A* (див. на рис. 86 проти течії), де відбулося зниження вільної поверхні води на 0,3 *м*. За рівномірної течії в обох розвязках площі поперечного перекрою водотоки $\omega = 280$ *м*^{2} і ширини $b_0 = 240$ *м* однакові, при цьому $\frac{\omega}{b_0} = 1,167$. Біля перекрою *A* за нерівномірної течії для прямокутного перекрою ширина b_0 залишається стала (240 *м*), а площа $\omega_1 = 240 \times 0,867 = 208,1$ *м*^{2}, і, таким робом, $\frac{\omega_1}{b_0} = \frac{208,1}{240} = 0,868$; за параболічного перекрою, ми маємо глибину 1,45 *м*, а ширину $b = 240\sqrt{\frac{1,45}{1,75}} = 218$ *м*, і, таким робом, $\omega_2 = 210$ *м*^{2} і $\frac{\omega_2}{b} = 0,965$. Відси виходить, що за параболічного профілю корита біля перекрою *A* живий перекрій трохи більший, отже, швидкість перетікання менша, ніж за прямокутного профілю, відношення ж $\frac{\omega}{b}$, яке можна з певним наближенням взяти за гідравлічний радіюс, за параболічного профілю значно більше, ніж за прямокутного. А що тепер, так само з певним наближенням, $I = \frac{v^2}{C^2R}$, то за параболічного профілю і вільна поверхня матиме менший спад при *A*, а через це і віддаль до цього перекрою, в якому зниження рівня дорівнює ще 0,06 *м*, буде більше, ніж за прямокутного профілю.

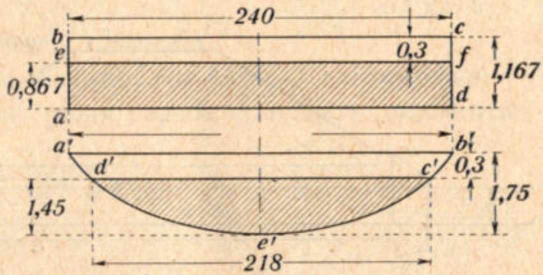

Рис. 87

Отже, з'ясування питання про те, яку з показаних розвязок уважати за правильнішу, залежатиме в кожному окремому випадку від дійсних місцевих особливостей корита річки.

Задача 3. Під насипом залізниці в балці треба збудувати трубу, щоб пропускати зливову воду в кількості $Q = 4,248 \frac{м^3}{сек.}$ за побутової глибини (коли нема насипу) $h_б = 1,02$ *м*. Визначте відтулину труби й підпір z (рис. 88).

Розвязка. Розвязуючи подібні задачі, доводиться брати на увагу різні швидкості по дну, залежно від роду й укріплення корита; від денної швидкости не важко перейти вже й

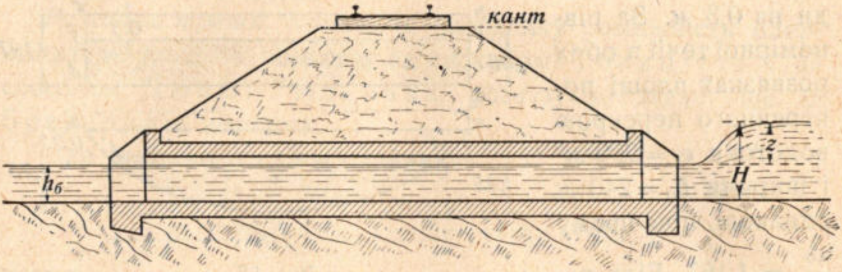

Рис. 88

до пересічної швидкости. Згідно з нормами НКШ швидкості ці такі:

Таблиця 15

№	Ґрунт корита й його укріплення	Допускна швидкість по дну в сек.		Відпов. пересічна швидкість в сек.	
		Фут.	Метр.	Сажн.	Метр.
1	Густий пісок	3	0,922	0,538	1,148
2	Щільний глинястий ґрунт	5	1,524	0,880	1,878
3	Каменястий ґрунт або укріплений одиничним брукуванням	7	2,135	1,170	2,496
4	Скелястий або укріплений подвійним брукуванням	10	3,05	1,630	3,478
5	Лотік з кам'яного мурування	14	4,27	2,228	4,754
6	Дерев'яний лотік, чавунні труби . . .	20	6,134	3,110	6,636

Звичайно, розвязуючи поставлену задачу, виходять із того, щоб в трубі глибина води дорівнювала побутовій $h_б$.

Спробуймо вибрати денну швидкість в трубі

$$v_д = 10' = 3{,}05 \frac{м}{сек.},$$

тоді пересічна швидкість буде

$$v = 3{,}478 \frac{м}{сек.}.$$

За вибраної швидкости, критична глибина h_k визначиться так:

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{aq^2}{g}} = \frac{av^2}{g} = \frac{a \,.\, 3{,}478^2}{9{,}81} = \frac{3{,}478^2}{9{,}81} = \frac{12{,}096}{9{,}81} = 1{,}23 \text{ м},$$

припустивши $a = 1$; ми бачимо, що $h_k > h_б$, а тому, щоб у трубі не виникло скоку води, треба швидкість зменшити; виберімо

$$v_д = 7' = 2{,}135 \frac{м}{сек.};$$

тоді пересічна швидкість

$$v = 2{,}496 \frac{м}{сек.};$$

тепер

$$h_k = \frac{2{,}496^2}{9{,}81} \cong \frac{6{,}25}{9{,}81} \cong 0{,}636 \text{ м};$$

а що $h_k < h_б$, то ми можемо не побоюватись скоку і поставити глибину води в трубі, однакову з побутовою. За середньої швидкости $v = 2{,}496 \frac{м}{сек.}$ і глибини $h_б = 1{,}02$ *м*, кількість протічної води на одиниці ширини труби визначається в $q = 2{,}496 \times 1{,}02 = 2{,}546 \frac{м^3}{сек.}$, а тому потрібна ширина (b) труби буде:

$$b = \frac{Q}{q} = \frac{4{,}248}{2{,}546} = 1{,}669 \text{ м}.$$

Цілковиту висоту труби визначиться так: за правилами НКШ треба, щоб від рівня води в трубі до п'ят склепіння була віддаль не менша як 0,3 *саж.* = 0,64 *м* (за прогонів $\angle$ 7 *саж.*). Отже, цілковита висота труби буде:

$$h_m = h_б + 0{,}64 + \text{висота склепіння}.$$

Підпір води перед трубою, припустивши підхідну до труби швидкість за дуже малу, визначиться із співвідношення:

$$z = \frac{1}{\varphi^2} \frac{v^2}{2g},$$

де коефіцієнт φ залежить од злагоди входу до труби, і його звичайно вважають за рівний 0,82; тоді:

$$z = \frac{1}{0{,}82^2} \frac{2{,}496^2}{2 \,.\, 9{,}81} = 0{,}475 \text{ м},$$

і, таким робом, цілковита глибина перед трубою буде:

$$H = 1{,}02 + 0{,}475 = 1{,}495 \ \text{м}.$$

За нормами НКШ, кант залізничого тору повинен бути від рівня води не менший як 0,5 *саж.* $= 1{,}0668$ *м.* Коли цю умову не виконується, треба зменшити швидкість у трубі, для цього доведеться брати дуже широкі труби, незручні для виконання; в таких випадках доводиться, взагалі, відмовлятися від труб і лагодити замість них через балки містки.

Задача 4. Розвяжіть питання про те, що перед нами: чи звичайна спокійна річка, чи потік, коли пересічна ширина річки $b = 3$ *м*, пересічна глибина $h = 0{,}4$ *м*, а витрата в ній $Q = 2{,}4 \ \frac{\text{м}^3}{\text{сек.}}$.

Розвязка. Питання розвязується на підставі попереднього визначення величини відношення:

$$\frac{2a}{\lambda} \cong \frac{2l}{\lambda} = \frac{v^2}{gR},$$

бо за $a < \frac{\lambda}{2}$ матимемо спокійну річку, а за $a > \frac{\lambda}{2}$ — потік. У нашому випадку, припустивши поперечний перекрій водотоки за близький до прямокутного, маємо його площу (ω):

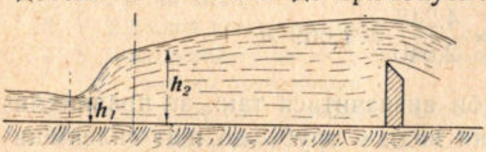

Рис. 89

$$\omega = b \times h = 3 \times 0{,}4 = 1{,}2 \ \text{м}^2;$$

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{2{,}4}{1{,}2} = 2 \ \frac{\text{м}}{\text{сек.}};$$

$$R = \frac{\omega}{P} = \frac{1{,}2}{b + 2h} = \frac{1{,}2}{3{,}8} = 0{,}316 \ \text{м},$$

а тому

$$\frac{2l}{\lambda} = \frac{v^2}{gR} = \frac{2^2}{9{,}81 \, . \, 0{,}316} = 1{,}38;$$

і що

$$\frac{2l}{\lambda} > 1,$$

то перед нами потік (бурхлива річка).

Задача 5. В потоці попередньої задачі поставлено на дні перегородки; запитання, якої висоти утвориться стік води перед цією перегородкою (рис. 89).

Розвязка. Задачу розвязується за відомим уже співвідношеням:

$$h_2 = \frac{h_1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{8aq^2}{gh_1^3}}-1\right].$$

В нашому випадку

$$h_1 = 0{,}4\ м; \quad q = \frac{Q}{b} = \frac{2{,}4}{3} = 0{,}8\ м^3;$$

беремо $\alpha = 1$; тоді маємо:

$$h_2 = \frac{h_1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{8aq^2}{gh_1^3}}-1\right] = \frac{0{,}4}{2}\left[\sqrt{1+\frac{8\,.\,0.8^2}{9{,}81\,.\,0{,}4^3}}-1\right] = 0{,}405\ м,$$

отже:

$$h_2 - h_1 = 0{,}405 - 0{,}400 = 0{,}005\ м.$$

Такий невеликий скік утворився через те, що наша водотока є, порівняно, мало виразний потік: $\frac{2I}{\lambda}$ близько до одиниці.

Для другого прикладу, коли ширина потоку $b = 1{,}2\ м$ пересічна глибина $h = 0{,}24\ м$ і витрата $Q = 1{,}2\ \frac{м^3}{сек.}$, ми маємо:

$$\omega = b\,.\,h = 1{,}2 \times 0{,}24 = 0{,}288\ м^2;$$

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{1{,}2}{0{,}288} = 4{,}16\ \frac{м}{сек.};$$

$$R = \frac{\omega}{P} = \frac{\omega}{b+2h} = \frac{0{,}288}{1{,}2+0{,}48} = \frac{0{,}288}{1{,}68} = 0{,}171,$$

а тому

$$\frac{2I}{\lambda} = \frac{v^2}{gR} = \frac{17{,}3}{9{,}81\,.\,0{,}171} = 10{,}36 > 1;$$

тепер, через те що

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{1{,}2}{1{,}2} = 1,$$

то

$$h_2 = \frac{h_1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{8aq^2}{gh_1^3}}-1\right] = \frac{0{,}24}{2}\left[\sqrt{1+\frac{8}{9{,}81\,.\,0{,}24^3}}-1\right] =$$

$$= \frac{0{,}24}{2}\left[\sqrt{1+59{,}26}-1\right] = 0{,}12\,.\,6{,}76 = 0{,}81\ м.$$

РОЗДІЛ VI

ТЕЧІЯ УСТАЛЕНА, АЛЕ ШВИДКО МІНЛИВА

§ 1. Принцип Борда-Карно

Уявімо собі, що маємо трубопровід, у якого перекрій раптово змінюється з вузького на широкий (рис. 90). Наслідок цієї зміни перекрою є зменшення швидкости (з v_0 на v_1, при цьому, за законом суцільности руху $v_1 = \frac{\omega_0}{\omega_1} v_0$), що відбувається в супроводі значної втрати енергії, яку не можна визначити через звичайні для втрати від тертя співвідношення. Таке явище, що відбувається з утворенням вирів у просторі, обмеженому поверхнею *232′3′*, має назву г і д р а в л і ч н о г о в д а р у, і його можна дослідити, як це зробив Б о р д а, за допомогою відомої теореми: „приріст кількости руху в якомусь напрямі дорівнює сумі імпульсів сил, які діють у цьому напрямі“; при цьому роблять припущення, що гідравлічне тиснення біля стінки *1234* дорівнює гідродинамічному тисненню в перекрої *23*, в цьому випадку рівні в п'єзометрах *M* і *N* повинні бути однакові. Застосовуючи тепер вищезгадану теорему, маємо, очевидно, для приросту кількости руху за час dt вираз:

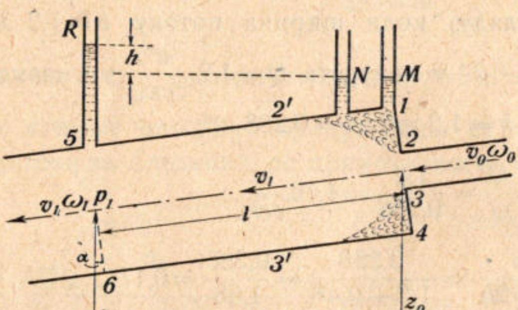

Рис. 90

$$\frac{\delta\omega_1 v_1^2 dt}{g} - \frac{\delta\omega_0 v_0^2 dt}{g} = \frac{\delta\omega_1 v_1 dt}{g}(v_1 - v_0),$$

тому що маси в кількості води, що проходить за час dt через перекрої ω_0 і ω_1, однакові, тоб-то:

$$\frac{\delta\omega_1 v_1 dt}{g} = \frac{\delta\omega_0 v_0 dt}{g}.$$

Що ж до імпульсу сил, то такий складається з імпульсу тиску й імпульсу сили ваги; перший з них, очевидно, буде:

$$\omega_1 (p_0 - p_1)\, dt,$$

а проєкція другого на вісь трубопроводу визначиться так:

$$\delta\omega_1 l dt \cos\alpha = \delta\omega_1 (z_0 - z_1)\, dt.$$

Таким робом, згідно з теоремою про кількість тиснення:

$$\frac{\delta\omega_1 v_1 dt}{g}(v_1 - v_0) = \omega_1 (p_0 - p_1)\, dt + \delta\omega_1 (z_0 - z_1)\, dt,$$

відки, після скорочення й ділення на δ, маємо:

$$\frac{(v_1 - v_0)\, v_1}{g} = \frac{p_0}{\delta} - \frac{p_1}{\delta} + z_0 - z_1;$$

але, що

$$(v_1 - v_0)\, v_1 = \frac{v_1^2 - v_0^2 + v_0^2 - 2v_0 v_1 + v_1^2}{2} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2} + \frac{(v_0 - v_1)^2}{2},$$

то попереднє рівнання набере вигляду:

$$\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} + \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g} = \frac{p_0}{\delta} - \frac{p_1}{\delta} + z_0 - z_1,$$

або

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\delta} + z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\delta} + z_1 + \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g}.$$

Згідно з виправленим рівнанням Д. Бернуллі,

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\delta} + z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\delta} + z_1 + h_w,$$

очевидно, втрата на гідравлічний удар визначиться як:

$$h_w = \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g}. \qquad [1]$$

Зважаючи на те, що $(v_0 - v_1)$ становить собою втрачену швидкість, знайдене співвідношення (закон або принц и п Б о р д а - К а р н о) можна формулувати так: в и с о т а, щ о ї ї в т р а ч е н о н а в д а р і, д о р і в н ю є в и с о т і в т р а ч е н о ї ш в и д к о с т и.

Принцип Б о р д і в, що його широко вживається в практиці, виведено, проте, з такими припущеннями: 1) в кількості руху введено пересічну швидкість, тимчасом, очевидно, треба ввести поправковий коефіцієнт (α), який для трубопроводів з шаршавими стінками беруть за рівний 1,036 і вище; 2) заведено, що швидкість змінюється раптово разом із перекроєм, що, звичайно, не відповідає дійсності; 3) припущено, що біля кільцевої стінки *1234* тиснення p дорівнює такому ж (p_0) у перекрої *23*; справді, за дослідами M i s e s'a, тиснення $p < p_0$, і тому п'єзометрична висота N (рис. 91) менша, як у п'єзометрі M; до речи зауважмо, що нахил трубопроводу не впливає на втрату на вдарі; явище відбувається цілком незалежно від того, чи похилений трубопровід, як на попередньому рисункові, чи горизонтальний, як на додаваному.

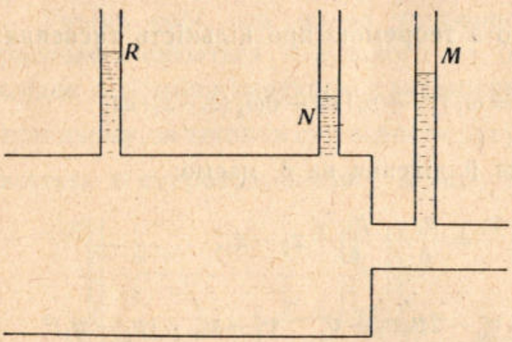

Рис. 91

Коли взяти на увагу вказівку M i s e s'a*), то втрату на вдар можна вивести так: з попереднього маємо:

$$\frac{\delta\omega_1 v_1 dt}{g}(v_1 - v_0) = [\omega_0 p_0 + (\omega_1 - \omega_0)p - \omega_1 p_1]\,dt + \delta\omega_1(z_0 - z_1)\,dt =$$
$$= [\omega_0 p_0 + (\omega_1 - \omega_0)p - \omega_1 p_1]\,dt + [\delta\omega_1(z_0 - z_1) + \delta\omega_0 z_0 - \delta\omega_C z_0]\,dt,$$

відки

$$\frac{\delta}{g}\omega_1 v_1 (v_0 - v_1) = \omega_1(p_1 + \delta z_1) - \omega_0(p_0 + \delta z_0) - (\omega_1 - \omega_0)(p + \delta z_0).$$

або, взявши на увагу, що для горизонтальної труби $z_0 = z$,

$$\omega_1 \cdot \frac{v_0 v_1 - v_1^2}{g} = \omega_1\left[\frac{p_1}{\delta} + z_1 - \left(\frac{p}{\delta} + z\right)\right] - \omega_0\left[\frac{p_0}{\delta} + z_0 - \left(\frac{p}{\delta} + z\right)\right]$$

*) R. M i s e s. Elemente der technischen Hydromechanik. Teil 1, 1914 р., стор. 168 і далі.

Очевидно, ріжниця рівнів у п'єзометрах M і N є:

$$h' = \left(\frac{p_0}{\delta} + z_0\right) - \left(\frac{p}{\delta} + z\right),$$

а тому

$$\omega_1 \frac{v_0 v_1 - v_1^2}{g} = \omega_1 \left\{ \frac{p_1}{\delta} + z_1 - \left(\frac{p}{\delta} + z\right) - \left[\left(\frac{p_0}{\delta} + z_0\right) - \left(\frac{p}{\delta} + z\right)\right] + h' \right\} -$$

$$- \omega_0 h' = \omega_1 \left[\frac{p_1}{\delta} + z_1 - \left(\frac{p_0}{\delta} + z_0\right)\right] + h' (\omega_1 - \omega_0),$$

або, поділивши обидві частини на ω_1,

$$\frac{v_0 v_1 - v_1^2}{g} = \frac{p_1}{\delta} + z_1 - \left(\frac{p_0}{\delta} + z_0\right) + h'\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_1}\right).$$

Нарешті, через те що

$$\frac{v_0 v_1 - v_1^2}{g} = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2g} - \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g},$$

остаточно маємо:

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\delta} + z_0 = \frac{v_1}{2g} + \frac{p_1}{\delta} + z_1 + \left[\frac{(v_0 - v_1)^2}{2g} + h'\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_1}\right)\right].$$

Порівнання останнього рівнання з виправленим рівнанням Д. Бернуллі дає:

$$h_w = \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g} + h'\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_1}\right). \qquad [2]$$

Для остаточного виявлення другого члена цієї формули, треба звернутись до дослідних даних. Для цього зосібна придатні результати дослідів інженера Баера (Baer) *), з яких виходить, що формула Бордова дає для втрати на вдар нижню границю, а вираз $h_w' = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2g}$ — верхню границю. За цими двома формулами можна вирисувати дві граничні криві залежности h_w від відношення площ $\frac{\omega_0}{\omega_1}$. Як бачимо з додаваного рисунку (рис. 92), за $\frac{\omega_0}{\omega_1} = 0$ обидві границі

---

*) H. Baer. Versuche über hydraulische Stossverluste. Dingler's Polytechnisches Journal. Band 322, Heft 12.

зливаються; але за $\frac{\omega_0}{\omega_1}=0$ попередня формула дає:

$$h''_w=\frac{(v_0-v_1)^2}{2g}+h';$$

тому, прирівнюючи h'_w і h''_w, матимемо:

$$h'=\frac{v_0^2-v_1^2}{2g}-\frac{(v_0-v_1)^2}{2g}=\frac{v_1(v_0-v_1)}{g},$$

отже:

$$h_w=\frac{(v_0-v_1)^2}{2g}+\left(1-\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)\frac{v_1(v_0-v_1)}{g}.$$

Позначивши тепер $\frac{\omega_0}{\omega_1}=\frac{v_1}{v_0}$ через x, маємо $v_1=v_0x$ і

$$h_w=\frac{[v_0(1-x)]^2}{2g}+(1-x)\frac{xv_0(v_0-xv_0)}{g}=\frac{v_0^2}{2g}(1-x)^2(1+2x)=$$
$$=\frac{v_0^2}{2g}(1-3x^2+2x^3),$$

або в остаточній формі:

$$h_w=\frac{v_0^2}{2g}\left[1+2\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^3-3\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2\right]=\frac{v_0^2}{2g}\left[1+2\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^3-3\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2\right]. \quad [3]$$

Ми дістали формулу Mises'а, графічно виображену синусуватою кривою, яка визначає втрату на вдар з достатньою для практики точністю.

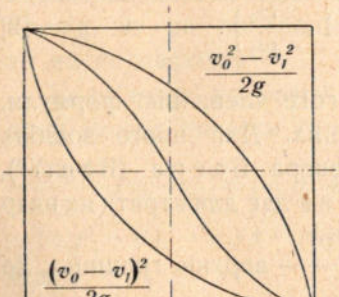

Рис. 92

Розглядуване явище вдару відбувається, звичайно, в супроводі й зміни тиску. Очевидно, що за збільшення перекрою трубопроводу, коли зменшується швидкість течії, тиск, визначуваний п'єзометричною висотою, повинен збільшуватись. Це збільшення тиску за раптового збільшення перекрою можна обчислити або за формулою Бордовою, або за формулою Mises'овою. В першому випадку із співвідношення:

$$\frac{v_0^2}{2g}+\frac{p_0}{\delta}+z_0=\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\delta}+z_1+\frac{(v_0-v_1)^2}{2g},$$

маємо:

$$h=\left(\frac{p_1}{\delta}+z_1\right)-\left(\frac{p_0}{\delta}+z_0\right)=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{v_1^2}{2g}-\frac{(v_0-v_1)^2}{g}=$$

$$=\frac{v_1(v_0-v_1)}{g}>0. \qquad [4]$$

В другому випадку з формули:

$$\frac{v_0^2}{2g}+\frac{p_0}{\delta}+z_0=\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\delta}+z_1+\frac{v_0^2}{2g}\left[1+2\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^3-3\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2\right],$$

маємо:

$$h=\left(\frac{p_1}{\delta}+z_1\right)-\left(\frac{p_0}{\delta}+z_0\right)=\frac{v_0^2}{2g}\left[1-\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2-1-2\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^3+3\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{2v_0^2}{2g}\left[\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2\left(1-\frac{v_1}{v_0}\right)\right]=\frac{v_1^2}{g}\left(1-\frac{v_1}{v_0}\right)>0. \qquad [5]$$

Так само очевидно, що формула Бордова дає трохи перебільшену вартість підвищення тиснення.

§ 2. Застосування Бордового принципу до визначення місцевих опорів у трубах

На Бордовому принципі ґрунтується визначення втрат у напорі у випадках цілої низки инших, так званих місцевих опорів у трубопроводах.

Гостра зміна напряму трубопроводу. За гострої зміни напряму трубопроводу відбувається гостра зміна попереднього перекрою водяного потоку [див. рис. 93, на якому

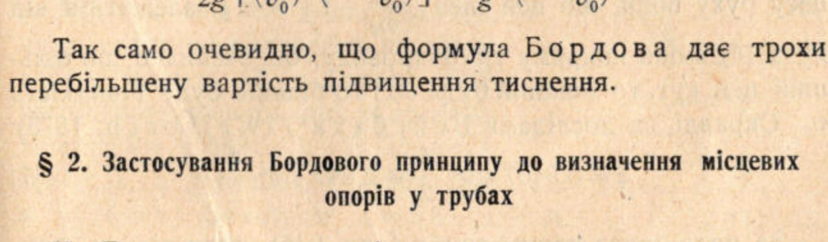

Рис. 93

зарисовані площинки показують місця води, яка не бере участи (мертва вода) в загальному русі рухового водяного потоку навіть тоді, коли $\omega_1 = \omega_2$]; при цьому виявляється, що головна частина втрати залежить од гострого розширення найвужчого перекрою ω_c до нормального перекрою труби ω_2, тоді як сама зміна напряму спричинюється порівняно до невеликої втрати.

Назвавши поперечні перекрої водотоки в найвужчому місці й далі в нормальному перекрої, який дорівнює перекроєві труби, відповідно через ω_c і ω_2, а швидкості в цих перекроях відповідно через v_c і v_2, очевидно, матимемо за принципом Бордовим:

$$h_w = \frac{(v_c - v_2)^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{v_c}{v_2} - 1\right)^2 = \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{\omega_2}{\omega_c} - 1\right)^2 = \xi \frac{v_2^2}{2g}, \quad [6]$$

мавши на увазі, що, за законом суцільности руху, $v_c \omega_c = v_2 \omega_2$, і означивши $\left(\frac{\omega_2}{\omega_c} - 1\right)^2$ через ξ; легко бачити з самого процесу руху води, що цей член $\left(\frac{\omega_2}{\omega_c} - 1\right)^2$ або ξ залежатиме від кута (δ) зміни напряму трубопроводу, бо, очевидно, що більший цей кут, то менший буде ω_c і то більша буде швидкість v_c. Справді, за дослідами Вейсбаха*) (Weisbach, 1875):

$$\xi = 0{,}9457 \sin^2\frac{\delta}{2} + 2{,}047 \sin^4\frac{\delta}{2}\,. \quad [7]$$

За подвійного злому труби (рис. 93*б*), коли тільки другий злім відбувається в тій самій площині, що й перший, утрата напору (ξ) та сама, що й за ординарного злому; коли ж другий злім відбувається в напрямі, перпендикулярному до першого злому, то втрата напору збільшується в $1^1/_2$ рази; коли, нарешті, другий злім, хоча й відбувається в тій самій площині, що й перший, але в напрямі, прямо протилежному до першого (рис. 93*в*), то втрата в напорі збільшується удвоє.

Вейсбах, окрім того, знайшов, що в трубах з меншим діяметром утрата в напорі (ξ) більша, ніж у трубах більшого діяметру; инші гідравлики**) пізнішого часу (Montanoni, 1893 р., A. W. Brightmoore, 1907 р.) цього не потверджують, а запевняють на підставі своїх дослідів навіть у протилежному.

*) Weisbach. Lehrbuch der Technischen Mechanik. 1875.

**) Forchheimer, Ph. Hydraulik. 1914, стор. 242.

Плавка зміна напряму трубопроводу. Не зважаючи на плавку зміну напряму трубопроводу, в цьому випадку також є простір, у якому вода не бере участи в загальному русі потоку, і звуження перекрою водотоки (рис. 94, ω_c). Легко побачити, що в даному випадку втрату в напорі можна визначити за Бордовим принципом:

$$h_w = \frac{(v_c - v)^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{\omega}{\omega_c} - 1\right)^2 = \xi \frac{v^2}{2g},$$

при цьому, за досвідами Вейсбаховими, для округлих труб, які мають кут відхилення $\delta = 90^\circ$:

$$\xi = 0{,}131 + 1{,}847\left(\frac{d}{2\varrho}\right)^{3,5}. \qquad [8]$$

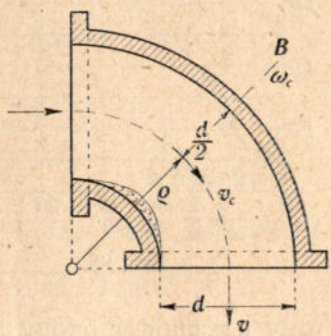

Рис. 94

Далі, Вейсбах знайшов, що збільшення кута відхилення більше за 90°, так само й инші фактори, дуже незначно впливають на збільшення втрати (ξ) в напорі. Тимчасом, нові досвіди, що їх зробили Freeman (1889 р.), Williams, Hubell і Frenkell (1902 р.), з трубами діяметром $d = 0{,}3 - 0{,}76$ *м*, і Brightmoor (1907 р.) з трубами діяметром 0,076 і 0,102 *м*, показали, що формула Вейсбахова правдива тільки в середині меж його досвідів і тільки за малих радіюсів кривини. Взагалі ж утрата в напорі є величина змінна, не обмежена впливом лише криволінійного патрубка (рис. 94). Виявляється, що вода, що перейшла в цьому патрубку в іще неспокійніший стан, ніж коли вона тільки підходила до нього, повинна після нього в прямокутній трубі протекти ще якусь путь, щоб прийти до більш-менш нормального стану. Тому вони виміряли опір, утворений вмиканням криволінійного патрубка (90%) до труби діяметра d, на ділянці завдовжки $80d$ після патрубка і зрівнювали цей опір з опором для прямої труби тієї самої довжини. Відклавши потім по осі абсцис радіюси кривини, віднесені до діяметра труби, а по осі ординат утрати в напорі, утворені включенням криволінійного патрубка, у % у напорі на прямій трубі зазначеної довжини, дістали кривину зміни цієї втрати із зміною

$\frac{\varrho}{d}$; при цьому виходить, що найменша втрата, згідно з дослідами Williams'a, Hubell'я і Frenkell'я, буде при $\varrho = 2{,}55d$, а згідно з дослідами Brightmoor'a при $\varrho = 3d - 4d$; при цьому утворена патрубком втрата напору на ділянці труби довжиною $80d$ становить 13% опору прямої ділянки труби рівної довжини*). Таким робом, коли в якомусь випадку втрату в напорі труби визначають за співвідношенням: $h_w = 0{,}025 \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$, то втрата, до якої спричинюється криволінійний патрубок, що має $\varrho = 2{,}55d$, буде:

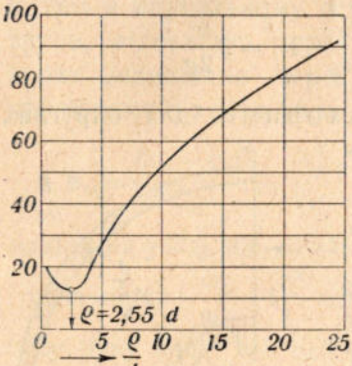

Рис. 95

$$0{,}025 \, . \, 80 \, . \, 0{,}13 \frac{v^2}{2g} = 0{,}26 \frac{v^2}{2g},$$

тому коефіцієнт опору для цього патрубка $\xi = 0{,}26$.

Коли до трубопроводу включають патрубок, який має $\varrho = 19{,}7d$, то за допомогою наведеної діяграми знаходимо для нього коефіцієнт опору $\xi = 0{,}025 \, . \, 80 \, . \, 0{,}80 = 1{,}6$.

Гостре звуження труби. Вже з додаваного рисунку (рис. 96) бачимо, що за переходу води з широкої труби до вузької повинно відбутися гостре звуження перекрою (ω_c) водотоки проти перекрою (ω_2) вузької частини труби, і разом із тим, збільшення швидкости (v_c) течії, а далі таке само гостре збільшення перекрою до ω_2 і відповідне зменшення швидкости до v_2. Тому, згідно з принципом Бор-

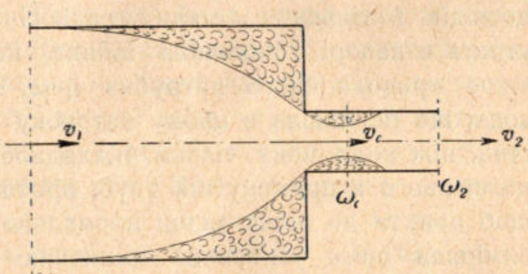

Рис. 96

*) D. Banki. Energie-Umwandlungen in Flüssigkeiten. 1921, стор. 175 і далі.

довим:

$$h_w = \frac{(v_c - v_2)^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{v_c}{v_2} - 1\right)^2 = \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{\omega_2}{\omega_c} - 1\right)^2 =$$

$$= \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{\omega_2}{k\omega_2} - 1\right)^2 = \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{1}{k} - 1\right)^2 = \xi\frac{v_2^2}{2g},$$

при цьому, очевидно, коефіцієнт k, отже й ξ залежать од відношення площі перекрою ω_1 і ω_2. Справді, за дослідами Вейсбаха:

$$\xi = 0{,}5 \qquad 0{,}42 \qquad 0{,}33 \qquad 0{,}25 \qquad 0{,}15,$$

коли, відповідно,

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 0{,}1 \qquad 0{,}2 \qquad 0{,}4 \qquad 0{,}6 \qquad 0{,}8.$$

Так само втрату в напорі за переходу через діяфрагму (рис. 97), вставлену в трубу, можна визначити через аналогічне співвідношення:

$$h_w = \xi\frac{v^2}{2g},$$

при цьому коефіцієнт ξ, очевидно, залежить од відношення площ перекроїв діяфрагмової відтулини ($\omega_д$) і труби (ω). За Вейсбаховими дослідами, виходить:

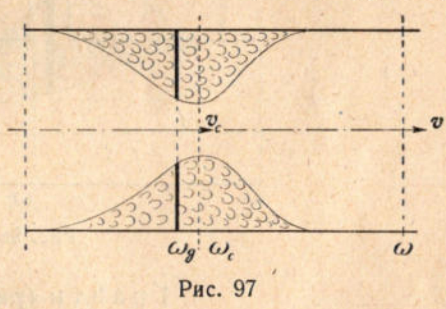

Рис. 97

$$\xi = 1067 \qquad 110{,}8 \qquad 9{,}01 \qquad 1{,}191 \qquad 0{,}121,$$

коли

$$\frac{\omega_д}{\omega} = 0{,}046 \qquad 0{,}1406 \qquad 0{,}3814 \qquad 0{,}6511 \qquad 0{,}8598.$$

Опори в органах, що замикають і зменшують перекрої труб. Принцип Бордів можна застосувати так само і до визначення втрат у напорі за переходу води через органи, які замикають і зменшують перекрої труб, а саме: засувки, дросельні хлипаки, ґранти, то-що. Легко можна пересвідчитись, що в усіх цих випадках утрати в напорі так само можна визначити через формулу загального вигляду:

$$h_w = \xi \frac{v^2}{2g},$$

і тільки коефіцієнт ξ змінюватиметься залежно від роду запірної злагоди. В дальшому наводиться вартості цього коефіцієнту ξ, переважно, за Вейсбахом[1]).

Засувки (рис. 98)

$\frac{\omega_c}{\omega}=1$	0,948	0,856	0,740
$\xi=0$	0,07	0,26	0,81
$\frac{\omega_c}{\omega}=0{,}609$	0,466	0,315	0,159
$\xi=2{,}06$	5,52	17,0	97,8

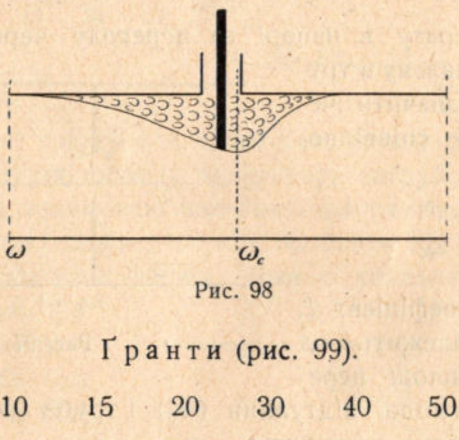

Рис. 98

Ґранти (рис. 99).

$\delta^\circ=5$	10	15	20	30	40	50	60	65
$\frac{\omega_c}{\omega}=0{,}93$	0,85	0,77	0,69	0,53	0,38	0,25	0,14	0,09
$\xi=0{,}05$	0,29	0,75	1,56	5,47	17,3	52,6	206	486

Дросельні хлипаки (рис. 100)

$\delta^\circ=5$	10	15	20	30	40	50	60	70	90
$\xi=0{,}24$	0,52	0,90	1,54	3,91	10,8	32,6	118	751	∞

[1]) Із спеціяльних статтів про опори водопровідних хлипаків покажемо на статтю Б. А. Бахметьєва і М. В. Кірпічова. О сопротивлении водопроводных клапанов. Известия С.-Петерб. Политехнического Института. 1908 р., т. X.

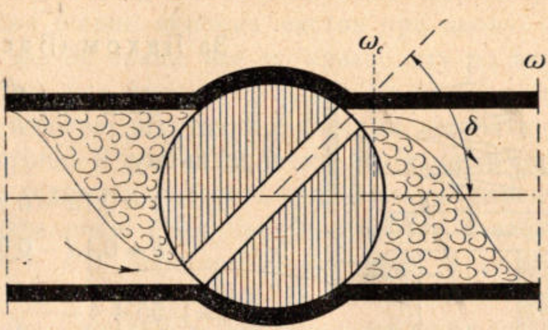

Рис. 99

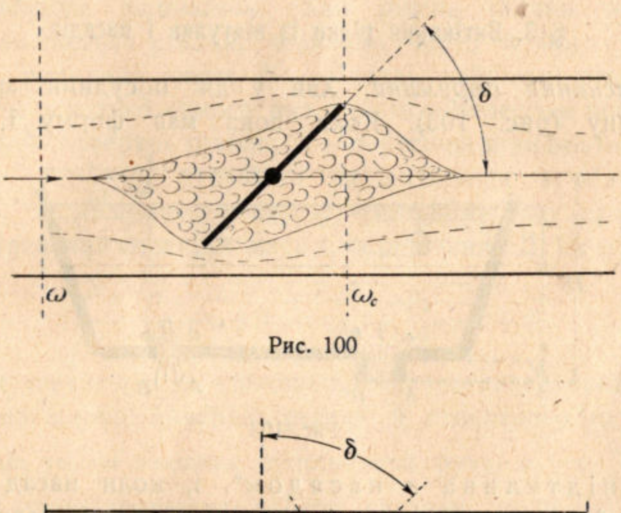

Рис. 100

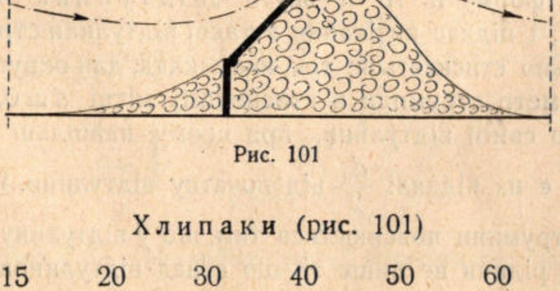

Рис. 101

Хлипаки (рис. 101)

$\delta^\circ =$	15	20	30	40	50	60	70
$\xi =$	90	62	30	14	6,6	3,2	1,7

Тарілчасті хлипаки (рис. 102)

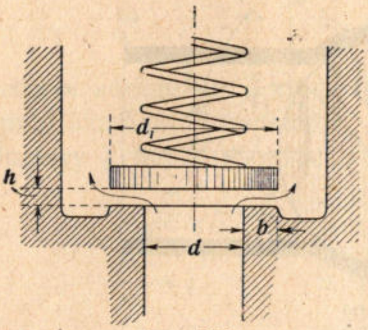

Рис. 102

За Бахом (Bach, 1884),

$$\xi = \alpha + \beta\left(\frac{d}{h}\right)^2,$$

при цьому

$$h = 0{,}1d - 0{,}25d,$$

$$b = 0{,}1d - 0{,}25d,$$

$$\alpha = 0{,}55 + 4\,\frac{b - 0{,}1d}{d},$$

$$\beta = 0{,}15 - 0{,}16.$$

§ 3. Витікання рідин із відтулин і насадів

Стискання струмини. Хай у дні посудини зроблено відтулину (рис. 103). Коли вона має форму I, то її

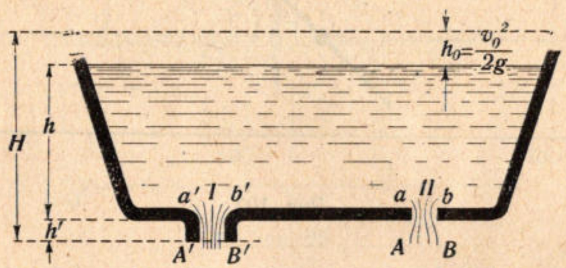

Рис. 103

звуть „відтулина з насадом“, і, коли насад досить округлий з країв, то струмина, що витікає, виповняє всю відтулину й має правильну циліндричну форму. Коли відтулина має форму II, то її звуть „відтулина в тонкій стінці“, і підчас витікання з такої відтулини струмина досить сильно стискається; так, наприклад, для округлого перекрою діяметр струмини в стисненому місці $d \cong 0{,}8d_0$, де d_0 є діяметр самої відтулини, при цьому найбільш стиснений перекрій є на віддалі $\frac{d_0}{2}$ від початку відтулини. Явище стискання струмини пояснюється тим, що у відтулину прямують елементи рідини не лише ті, що є над відтулиною, але й ті, що з боків її, через це й утворюються бічні струминки, які спричинюються до стиснення струмини; хоча горизонтальні складові сил інерції окремих часток при цьому парою знищуються, але це явище все ж призводить до втрати енергії; ця втрата має назву **втрати в насаді**, незалежно від того, чи є справді відтулина з насадом, чи тільки відтулина в тонкій стінці. В розглядуваному витіканні в перекроях ab і $a'b'$ тиск рідини має досить неправильний характер; швидкості не паралельні й не рівні між собою; навпаки, в перекроях AB і $A'B'$ швидкості паралельні й розподілені по перекрою майже рівномірно. Ця обставина змушує вважати за пересічну швидкість витікання ту швидкість, яка є у кінцевому перекрої насаду і в найбільш стиснутому перекрої струмини за витікання з відтулини тонкої стінки.

Швидкість витікання. Хай рівень рідини в посудині залишається сталий; позначмо через h його віддаль від дна посудини, через h' — віддаль найбільш стисненого перекрою від того самого дна, хай v_0 — пересічна швидкість на вільній поверхні рідини, v — пересічна швидкість у стисненому перекрої струмини за витікання з відтулини. Взявши за основну площину — площину, що проходить через стиснений перекрій, маємо, за рівнанням Д. Бернуллі:

$$\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\delta}+0+h_w=\frac{v_0^2}{2g}+\frac{p_0}{\delta}+h+h'.$$

Коли тепер ω_0 і ω є площі поперечного перекрою посудини біля вільної поверхні рідини й стисненого перекрою струмини, то, за законом суцільности руху, $v_0=v\frac{\omega}{\omega_0}$, і попереднє співвідношення набере вигляду (коли ще припустити $h_w=\xi\frac{v^2}{2g}$):

$$\frac{v^2}{2g}+\xi\frac{v^2}{2g}-\frac{v_0^2}{2g}=\frac{v^2}{2g}\left[1+\xi-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]=h+h'+\frac{p_0-p}{\delta},$$

відки

$$v=\sqrt{\frac{2g\left(h+h'+\frac{p_0-p}{\delta}\right)}{\xi+\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}}. \qquad [9]$$

Величиною $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ звичайно дуже невеликою, часто нехтують (див. раніш розділ II, задачу 3); коли ж у попередньому співвідношенні припустити $\frac{v_0^2}{2g} = h_0$ і суму $h_0 + h + h'$ позначити через H, то матимемо ще:

$$v = \sqrt{\frac{2g\left(H + \frac{p_0 - p}{\delta}\right)}{\xi + 1}},$$

а коли, нарешті, з достатньою для практики точністю покласти $p = p_0 =$ атмосферному тисненню, то остаточно:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{2gH}. \qquad [10]$$

А що в даному випадку $h_w = \xi \frac{v^2}{2g}$ становить виключно втрату в насаді, то коефіцієнтові ξ дають назву „коефіцієнт опору в насаді“; цей коефіцієнт завжди більший за нуль і досягає иноді вартости $\xi = 0{,}5$. Коефіцієнт φ називають „коефіцієнтом швидкости“, і очевидно, що $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ завжди менше за одиницю.

В практиці вживається насадів різноманітних форм: на додаваному рисункові (рис. 104) наведено найбільш характерні типи їх. Очевидно, що коефіцієнт опору насаду ξ дуже залежить од його форми; при цьому треба ще відзначити, що коефіцієнт цей не є стала величина, а вона змінюється залежно від величини напору; так, наприклад, для насаду з дуже великим напруженням (104*ж*) маємо:

$h = 0{,}161$	$0{,}292$	$0{,}374$	$0{,}46$ *м*
$\xi = 0{,}1191$	$0{,}1161$	$0{,}1150$	$0{,}1123$.

Для насаду звичайного типу з розмірами за рисунком (104*з*) маємо, за Weisbach'ом:

$h = 0{,}02$	$0{,}5$	$3{,}5$	17	103 *м*
$\xi = 0{,}087$	$0{,}07$	$0{,}052$	$0{,}012$	$0{,}012$
$\varphi = 0{,}959$	$0{,}967$	$0{,}975$	$0{,}994$	$0{,}994$.

З наведених даних бачимо, що швидкісний коефіцієнт φ змінюється в значно меншій мірі, ніж коефіцієнт опору насаду ξ; в границях, що їх ми подибуємо в практиці ($h = 0{,}5$—$3{,}5$ *м*), можна брати $\varphi = 0{,}96 - 0{,}97$. Для більших напорів краще обчислювати ξ за формулою:

$$\xi = 0{,}02 + \frac{0{,}042}{\sqrt[4]{h}}, \qquad [11]$$

яка дає вартість ξ, близьку до дійсности.

Для відтулин у тонкій стінці коефіцієнт опору насаду беруть у границях $\xi = 0{,}14 - 0{,}171$, при цьому для більших відтулин треба брати менші вартості ξ.

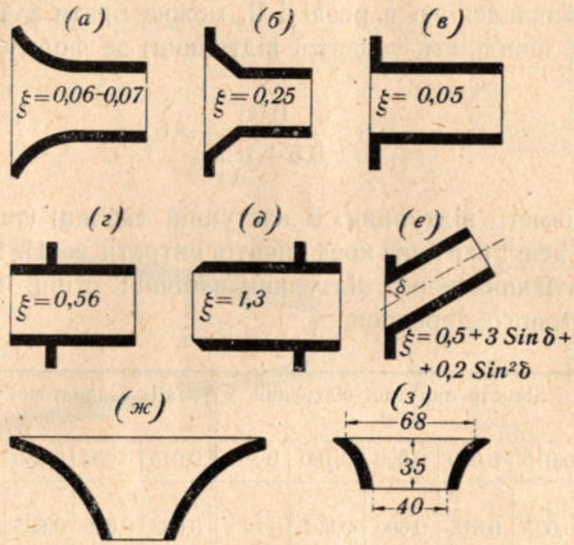

Рис. 104

Видаток рідини через звичайні відтулини. Позначивши площу відтулини в стінці через ω, а площу перекрою струмини в стисненому місці через ω_c, очевидно, можемо написати:

$$\omega_c = a\omega,$$

де коефіцієнт a має назву „коефіцієнт звуження“ або „стискання“, або ще „коефіцієнт контракції“. Видаток рідини через відтулину можна ще визначити, як:

$$Q = \omega_c v = a\varphi\omega\sqrt{2gH} = \mu \,.\, \omega\sqrt{2gH},$$

при цьому коефіцієнт $\mu = a\varphi$ називають „коефіцієнтом витрати“; останній коефіцієнт, що становить собою добуток від двох коефіцієнтів α і φ, очевидно, змінюється разом із зміною цих коефіцієнтів, отже, змінюється і з зміною напору й величини відтулини; наприклад, для відтулини в тонкій стінці за пересічного напору, коли можна взяти $\varphi = 0{,}97$ ($\xi = 0{,}065$), а $\alpha = 0{,}64$, коефіцієнт $\mu = 0{,}62$. За Grasgof'ом, на підставі дослідів Weisbach'a, можна обчисляти цей коефіцієнт для округлих відтулин у тонкій бічній стінці посудини (наші попередні міркування, очевидно, можна застосовувати й до відтулин у бічних стінках посудини, що для них, на підставі викладеного в розділі II, можна брати за швидкість витікання швидкість у центрі відтулини) за формулою:

$$\mu = 0{,}6 + \frac{0{,}06}{0{,}5 + \sqrt{h}} = 0{,}7d, \qquad [12]$$

де d є діяметр відтулини. В наступній таблиці (таблиця 16) наведено деякі вартості коефіцієнтів витрати за H. Smith'ом підчас витікання через відтулини в бічній стінці округлого й квадратового перекрою.

Таблиця 16

Напір над центром відтул. в *м*	Діяметр округлої відтулини в *м*					Бік квадратової відтулини в *м*				
	0,015	0,030	0,060	0,180	0,300	0,015	0,030	0,060	0,180	0,300
0,15	0,627	0,615	0,600	0,592	—	0,633	0,619	0,605	0,597	—
0,30	0,617	0,608	0,600	0,595	0,591	0,622	0,613	0,605	0,601	0,599
0,60	0,610	0,604	0,599	0,597	0,595	0,615	0,608	0,605	0,604	0,602
0,90	0,606	0,603	0,599	0,597	0,597	0,612	0,607	0,605	0,604	0,603
1,20	0,605	0,602	0,599	0,598	0,596	0,610	0,606	0,605	0,603	0,602
2,40	0,603	0,600	0,598	0,596	0,596	0,608	0,605	0,604	0,603	0,602
3,00	0,601	0,598	0,597	0,596	0,595	0,606	0,604	0,603	0,602	0,601
6,00	0,598	0,596	0,596	0,596	0,594	0,603	0,602	0,602	0,601	0,600

Для конічних насадів (рис. 105) коефіцієнт витрати залежить од кута δ, і найбільша витрата буває за $\delta = 13°24'$, коли $\mu = 0{,}946$ і $\xi = 0{,}078$. А що досліди показали, що струмина, яка витікає за такого кута насаду, не є рівна, і більшої рівности можна досягти за $\delta = 5°$, то, наприклад, для вирприскувачів (наконечники для пожежних кишок), за витікання з яких саме й потрібна рівна струмина, беруть завжди кут $\delta = 5°$, за якого $\mu = 0{,}923$ і $\xi = 0{,}19 - 0{,}2$.

Нерівномірне стискання струмини. Коли відтулина є не в центрі дна посудини, а біля його стінки, або біля двох стінок, або, взагалі, коли є особливі напрямні стінки по тій чи тій частині периметра відтулини, то по довжині цих стінок очевидно, звуження струмини, яка витікає, не відбувається (рис. 106), і коефіцієнт витрати збільшується. За дослідами Bidone'a і Weisbach'a, коли повний периметр відтулини означити через p_n, а частину периметра, по якій не відбувається стиск, через $p_з$, то коефіцієнт витрати через таку відтулину μ' визначиться у формулі:

$$\mu' = \mu\left(1 + k\frac{p_з}{p_n}\right); \qquad [13]$$

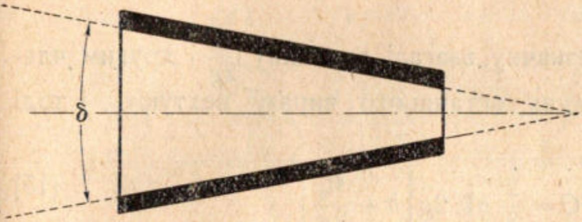

Рис. 105

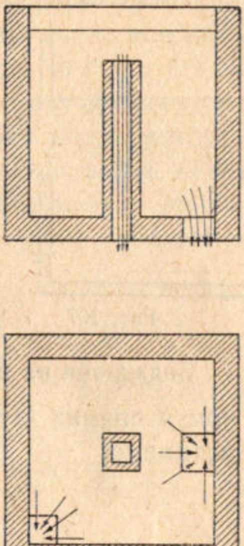

Рис. 106

при цьому для округлої відтулини $k = 0{,}128$, для невеликої квадратової відтулини $k = 0{,}152$, для невеликої прямокутної відтулини $k = 0{,}134$; для більших прямокутних відтулин k підвищується до 0,157; що ж до коефіцієнту μ, то його вартість, як для відтулини з цілковитим стиском струмини, вважають за рівну 0,62.

§ 4. Витікання через переливні відтулини

В § 2 розділу II було виведено для теоретичної кількости води, яка перетікає через переливну відтулину, співвідношення:

$$Q = \frac{2}{3} b \,.\, h\sqrt{2gh}, \qquad [14]$$

де b є ширина відтулини, а h—товщина шару води, що переливається.

Коли взяти на увагу підтікання води каналом до переливу і назвати швидкість підтікання через v_0, то напори H_2 і H_1 (див. розділ II, задачу 4) збільшаться ніби на величину $\frac{v_0^2}{2g}$; отже, за переходу до переливної відтулини, коли (рис. 107)

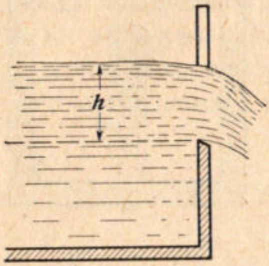

Рис. 107

$$H_1 = 0,$$
$$H_2 = h,$$

матимемо рівняння:

$$Q = \frac{2}{3}\, b\sqrt{2g}\left[\left(h + \frac{v_0^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Зважаючи на незначну, взагалі, величину $\frac{v_0^2}{2g}$, другим членом у прямих дужках останнього виразу нехтують, і тоді матимемо:

$$Q = \frac{2}{3}\, b\sqrt{2g}\left[h + \frac{v_0^2}{2g}\right]^{\frac{3}{2}}, \qquad [15]$$

або, позначивши $h + \frac{v_0^2}{2g}$ через h_0:

$$Q = \frac{2}{3}\, b\sqrt{2g}\, h_0^{\frac{3}{2}}; \qquad [16]$$

коли швидкість v_0 не буває більша за 0,5 – 0,6 $\frac{м}{сек.}$, тоді в останньому співвідношенні нехтують і членом $\frac{v_0^2}{2g}$, і ми матимемо вираз витрати через перелив у спрощеній формі [14].

Справжня кількість води, яка витікає через переливну відтулину, звичайно, буде менша, і її ми матимемо, коли помножимо вираз [14], [15] і [16] на коефіцієнт витрати μ:

$$Q = \frac{2}{3}\, \mu b h \sqrt{2gh}, \qquad [17]$$

$$Q = \frac{2}{3}\, \mu \cdot b\sqrt{2g}\left[h + \frac{v_0^2}{2g}\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\, \mu\, b\sqrt{2g}\, h_0^{\frac{3}{2}}. \qquad [18]$$

Що ж до коефіцієнту μ, то його величина залежить од багатьох причин: заокруглености або незаокруглености окрайок відтулини, звуження ширини переливної відтулини що до ширини каналу, або, взагалі, водотоки, що в ній злагоджено цю відтулину, відношення грубини шару води, що переливається через перелив, до висоти стінки P, нахилення стінки що до дна каналу, грубини стінки, то-що. Крім того, як коефіцієнт витрати, як і сама форма струмини, залежить од того, чи надходить під струмину повітря, чи ні, чи стоїть нижній рівень води вище або нижче од верхньої окрайки стінок переливу і т. и. Щоб показати, оскільки може бути різноманітна форма струмин, які переливаються через переливи, наводимо кілька з цих форм (рис. 108), найтиповіших, при цьому тут скрізь припускаємо, що ширина переливної відтулини однакова з шириною каналу.

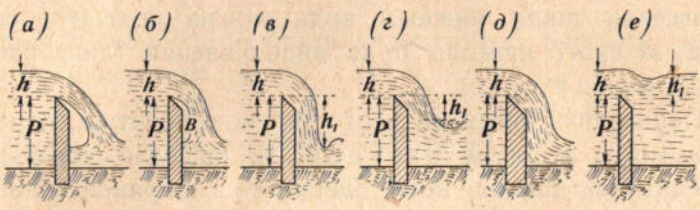

Рис. 108

Перша з наведених форм (*а*) належить вищерівневому або довершеному переливові з вільною струминою, коли під струмину в простір (*В*) може цілком вільно надходити повітря з боків.

Форма (*б*) належить переливові з стисненою струминою й утворюється тоді, коли, по-перше, $h < 0{,}4P$, а, по-друге, під струмину підходить повітря в недостатній кількості. Струмина в цьому випадку менше віддаляється від стінки, ніж у попередній формі (*а*), але, що в просторі (*В*) повітря трохи розріджене, виявляється з його боку всисне діяння, і витрата води через такий перелив більша, ніж через попередній.

Форма (*в*) належить переливові з підтопленою знизу струминою, і переливання відбувається за цілковитої відсутности доступу повітря в простір (*В*), за $h \geqq 0{,}4P$; увесь простір (*В*) повний води, яка перебуває у вихровому русі. Часто при цьому підноситься рівень води трохи нижче від струмини, що стікає (як показано на рисункові — відігнаний скік води), що спричинюється до збільшення витрати через перелив.

Форма (*г*) належить переливові з підтопленою знизу струминою із скоком, що її покриває, і її маємо тоді, коли $h + h_1 \leqq \frac{3}{4} P$; в цьому випадку скік води наближається до струмини так, що частина її вкривається вихровою водою.

Форма (*д*) належить переливові з струминою, що прилипає, коли стінка переливу не дуже тонка, й окрайка її звернена до води, що підтікає зверху.

Нарешті, форма (*е*) належить затопленому переливові (або нижчерівневому переливові); ця форма трапляється тоді, коли рівень води нижче стінки лежить вище її окрайки і $h - h_1 < 0{,}75 P$; в противному разі це піднесення рівня нижньої води можна пояснити скоком води, за якого перелив буде вищерівневий (див. раніш — відігнаний скік).

Переходячи тепер до вартостей коефіцієнту μ, передусім укажемо на формулу Базенову*), яка для довершеного переливу за ширини його, однакової з шириною підвідного каналу, за вертикальної стінки й гострої її окрайки, з вільним доступом повітря під струмину, тоб-то для переливу форм (*а*), при чому підтікання води для переливу вже обличено в ній, має вигляд:

$$\frac{2}{3} \mu = \left[0{,}405 + \frac{0{,}003}{h} \right] \left[1 + 0{,}55 \frac{h^2}{(h+P)^2} \right], \qquad [19]$$

при цьому $0{,}1 < h < 0{,}6$; з достатньою для практики точністю можна скористуватися й із скороченої формули:

$$\frac{2}{3} \mu = 0{,}405 + 0{,}212 \frac{h^2}{(h+P)^2} \cdot$$

Для переливу цієї самої форми Ребок**) (Th. Rehbock) дає формулу такого вигляду (обличивши підтікання):

$$\mu = 0{,}605 + \frac{1}{1050\,h - 3} + 0{,}08 \frac{h}{P} \cdot \qquad [20]$$

*) H. Bazin. Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir. Paris. 1898, стор. 25.

**) Rehbock, Th. Der Abfluss von Wasser über Wehre verschiedenen Querschnitts. Zeit. für Architekt. u. Ingenieurvereines. 1913, стор. 130.

Нарешті, за Ф р е з е, для випадку, коли підтікання води до відтулини можна не брати на увагу, або, виходить, коли $h+P$ дуже велике що до h, для $h>0{,}1$:

$$\mu = 0{,}615 + \frac{0{,}0021}{h}; \qquad [21]$$

для випадку ж, коли підтікання конче потрібно облічити Ф р е з е дає формулу:

$$\frac{2}{3}\mu = \left[0{,}615 + \frac{0{,}0021}{h}\right]\left[1 + 0{,}55\left(\frac{h}{h+P}\right)^2\right]. \qquad [22]$$

Для форми переливу (*в*) Б а з е н для коефіцієнту витрати (m) дає співвідношення:

$$m = \mu\left[0{,}845 + 0{,}176\frac{P}{h} - 0{,}016\frac{P^2}{h^2}\right], \qquad [23]$$

при цьому для μ треба брати вищезгадану вартість; менш точна буде вартість (m):

$$m = \mu\left[0{,}878 + 0{,}128\frac{P}{h}\right].$$

Для переливів форми (*г*) за Б а з е н о м:

$$m = \mu\left[1{,}06 - 0{,}16\left(\frac{h_1}{P} + 0{,}05\right)\frac{P}{h} - 0{,}02\left(\frac{h_1}{P} + 0{,}05\right)^2\left(\frac{P}{h}\right)^2\right], \qquad [24]$$

або з меншою точністю:

$$m = \mu\left[1{,}05 - 0{,}15\frac{h_1}{h}\right];$$

а що величина h_1 від'ємна, то вона входить до останніх двох рівнань із знаком —, а тому завжди $m>\mu$.

Перелив форми (*д*) подає води на 30% більше, ніж перелив форми (*а*).

Вплив бічного звуження дослідив B r a s c h m a n n, який дає такі співвідношення для коефіцієнту витрати:

$$\frac{2}{3}\mu = 0{,}384 + 0{,}0386\frac{b}{B} + \frac{0{,}0053}{h}, \qquad [25]$$

де B є ширина каналу, а b — ширина переливної відтулини.

Для переливів форми (*e*) з гострими окрайками стінок, за Базеном, при $h-h_1 \leqslant 0{,}7$ витрату можна визначити формулою:

$$Q=\left[0{,}446+0{,}223\left(\frac{h}{h+P}\right)^2\right]\left(1+\frac{1}{5}\,\frac{h_1}{P}\right)\sqrt[3]{\frac{h-h_1}{h}}\,b\,.\,h\sqrt{2gh}.\quad[26]$$

де член $\left(1+\frac{1}{5}\,\frac{h_1}{h}\right)\sqrt[3]{\frac{h-h_1}{h}}$ звуть коефіцієнтом затоплення.

З найпростіших формул покажемо для цього випадку ще на формулу Марі (Mary):

$$Q=0{,}8h_1\sqrt{2g\left(h-h_1+\frac{v_0^2}{2g}\right)}\,.\,b, \quad [27]$$

і на формулу Тольмана*) (B. Tolmann):

$$Q=b\sqrt{2g\,(h-h_1)}\cdot\mu\cdot\frac{2h+h_1}{3}\,, \quad [28]$$

де можна взяти $\mu=0{,}64$.

Для переливу, показаного на додаваному рисункові (рис. 109), за Лебро (Lesbros):

$$Q=\mu\,.\,b\,.\,h\sqrt{2g(h-h_1)}, \quad [29]$$

де $\mu=0{,}474-0{,}6$, залежно від обрису окрайки переливу.

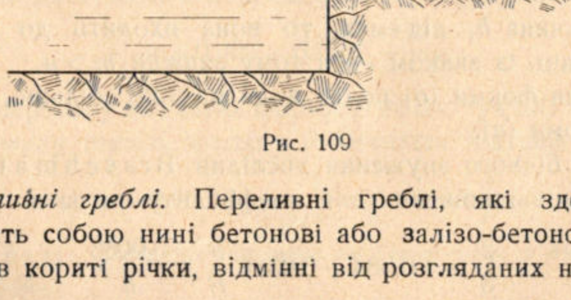

Рис. 109

Переливні греблі. Переливні греблі, які здебільшого становлять собою нині бетонові або залізо-бетонові спорудження в кориті річки, відмінні від розгляданих нами пере-

*) Allgemeine Bauzeitung. 1904, стор. 104—106.

ливів тим, що гребінь переливної відтулини греблі не загострений, а, навпаки, заокруглений і зрідка тільки має форму плоску з криволінійним супряженням з передньою чи задньою гранями тіла греблі, або, нарешті, як це иноді буває в залізо-бетонових греблях, має трикутну форму. Переливні греблі так само можуть бути у вигляді вищерівневих переливів (незатоплених) або нижчерівневих (затоплених).

Зупиняючись тільки на греблях із заокругленим гребнем *), ми, звичайно, повинні передбачати, що коефіцієнт витрати через відтулину таких гребель повинен бути вищий, ніж для переливів з гострою окрайкою стінки. Справді, Ребок для цілковитої переливної греблі, показаної на додаваному рисункові (рис. 110) форми, дає **) для коефіцієнту витрати вартість:

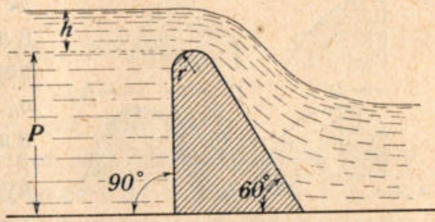

Рис. 110

$$\mu = 0{,}845 - 0{,}0206\left(3{,}8 - \frac{h}{r}\right)^2 + \frac{h}{12P} \qquad [30]$$

для всіх вартостей h, менших за $0{,}4P + 0{,}5r$, де r є радіюс заокруглення гребеня греблі. Найбільші зміни проти показаних на рисункові, в нахилах передньої й задньої граней греблі не мають посутного впливу на витрату.

Трохи пізніше для греблі, майже цілком однакової з показаною на рис. 110 формою (спад задньої грані 2:3, що відповідає кутові 56°20′), Ребок ***) дав другу формулу для μ:

$$\mu = 0{,}312 + 0{,}09\,\frac{h}{P} + \sqrt{0{,}30 - 0{,}01\left(5 - \frac{h}{r}\right)^2}, \qquad [31]$$

яка правильна, поки $\frac{h}{P} \leqslant 1$, $r \geqslant 0{,}2$ і $\frac{h}{r} \leqslant \left(6 - \frac{20r}{P + 3r}\right)$.

*) Тих, хто бажає ближче ознайомитися з переливними греблями инших обрисів, відсилаємо до вельми ґрунтовної праці проф. Н. Н. Павловського — „Гидравлический справочник". Ленінград, 1924 р.

**) Verhandlungen d. Gesellschaft deutsch. Naturforcher, 1911, стор. 139, див. так само Forchheimer. Hydraulik, 1914, стор. 301.

***) Handb. d. Ingenieurwissenschaften. 3. Wasserbau. 2 Bd. 1 Abt., 1912, стор. 53.

Проф. Н. Н. Павловський, систематизуючи розрізнений, але достатній, дослідний матеріял що до коефіцієнтів витрати для переливів криволінійних високих профілів, подав*) формулу [18] у такому вигляді:

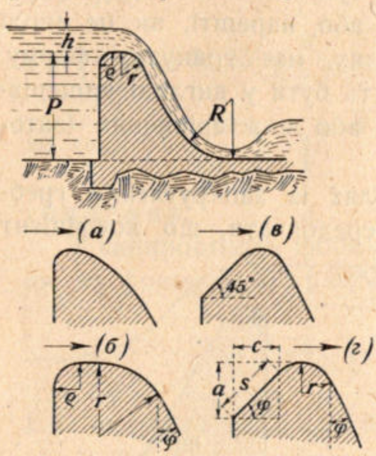

Рис. 111

$$Q = mb\sqrt{2g}\, h_0^{\frac{3}{2}}, \qquad [32]$$

при цьому ввів новий коефіцієнт витрати m:

$$m = m_r \sigma_f \sigma_h \sigma_n,$$

де σ_n є коефіцієнт затоплення, що для незатоплених переливів дорівнює одиниці; σ_h — коефіцієнт повноти напору, який дає змогу облічувати відношення $\frac{h}{P}$; σ_f — коефіцієнт форми, що облічує вплив обрису гребеня; m_r — наведений коефіцієнт витрати, тоб-то коефіцієнт витрати за $\sigma_n = \sigma_h = \sigma_f = 1$.

Для цієї формули, залежно від обрису гребеня (рис. 111) Павловський радить додержувати таких вартостей коефіцієнтів:

а) Для типу (*а*):

$$m_r = 0{,}49; \quad \sigma_f = 1;$$

$$\sigma_h = 0{,}785 + 0{,}25\frac{h}{h_{макс}}\left(\text{для } \frac{h}{h_{макс}} = 0{,}1 - 0{,}8\right);$$

$$\sigma_h = 0{,}88 + 0{,}12\sqrt{\frac{h}{h_{макс}}}\left(\text{для } \frac{h}{h_{макс}} > 0{,}8\right).$$

Тут $h_{макс}$ є максимальна грубина шару, що переливається, для якої проектується греблю, h — яка завгодно грубина того самого шару, але $< h_{макс}$.

б) Для типу (*б*):

$$m_r = 0{,}49; \quad \sigma_f = 0{,}97;$$

σ_h має таку саму вартість, що для типу (*а*).

---

*) Проф. Н. Н. Павловский. Гидравлический справочник. Ленинград, 1924, стор. 46.

в) Для типу (*в*):

$$\sigma_r = 0{,}48; \quad \sigma_f = 1;$$

$$\sigma_h = 0{,}805 + 0{,}31\frac{h}{h_{макс}} \left(\text{для } \frac{h}{h_{макс}} = 0{,}1 - 0{,}5\right);$$

$$\sigma_h = \sqrt[20]{\frac{h}{h_{макс}}} \left(\text{для } \frac{h}{h_{макс}} > 0{,}5\right).$$

г) Для типу (*г*):

$$m_r = 0{,}47; \ \sigma_f = 1{,}02 - 0{,}02s - 0{,}02\left(\frac{a}{r} - 1\right),$$

$$\text{де } s = \frac{c}{a} \text{ (рис. 109, } г);$$

σ_h має ту саму вартість, що і для типу (*в*).

Щоб визначити витрату через затоплені переливні греблі, дуже часто користуються з Базенової формули [26], що її застосовують для затопленого переливу з тонкою стінкою, змінивши в ній коефіцієнт витрати відповідно до нової форми обрису гребеня переливної стінки; таким робом, матимемо:

$$Q = \left(1 + 0{,}2\frac{h_1}{P}\right)\sqrt[3]{\frac{z}{h}}\, m \,.\, b \,.\, \sqrt{2gh} \,.\, h, \tag{33}$$

де $m = \frac{2}{3}\mu$ є коефіцієнт витрати для незатопленого переливу з тим самим обрисом гребеня.

Проф. Н. Н. Павловський, показуючи на ту обставину, що наведена щойно формула для переливів практичних профілів дає, згідно з дослідами Базеновими, перемееншену вартість для Q, радить користуватися з формули такого самого виду:

$$Q = \sigma_n \,.\, m \,.\, b \,.\, \sqrt{2gh} \,.\, h,$$

але для коефіцієнту затоплення (σ_n) брати не обчислені вартості за співвідношенням Базена $\left(1 + 0{,}2\frac{h_1}{P}\right)\sqrt[3]{\frac{z}{h}}$, а користуватися з даних спеціяльних дослідів, пророблених в Америці з затопленими переливами й наведених у наступній таблиці (див. так само рис. 112).

Таблиця 17

$\frac{h_1}{h}$	σ_n	$\frac{h_1}{h}$	σ_n	$\frac{h_1}{h}$	σ_n	$\frac{h_1}{h}$	σ_n
0,0	1,000	0,3	0,972	0,6	0,907	0,9	0,621
0,1	0,991	0,4	0,956	0,7	0,856	1,0	0
0,2	0,983	0,5	0,937	0,8	0,778		

Витікання через щитові відтулини (рис. 113). Зважаючи на те, що швидкість (v) протікання води через щитову відтулину у всіх точках її зберігає ту саму вартість, ми можемо написати таке очевидне співвідношення:

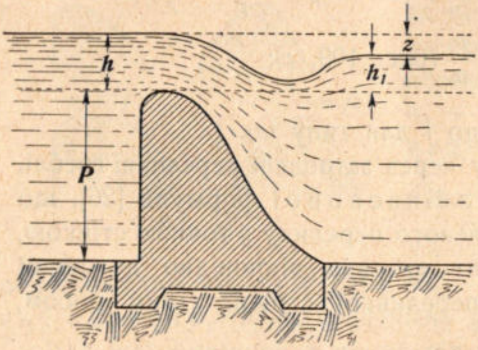

Рис. 112

$$\frac{v^2}{2g}(1+\xi) = \frac{v_0^2}{2g} + h_1 - h_2,$$

де $\xi \frac{v^2}{2g}$ є висота напору, що її втрачається на опорі в щитовій відтулині, а v_0—швидкість підтікання води до відтулини. Із щойно написаного співвідношення знаходимо:

$$v = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2g(h_1 - h_2)}}{\sqrt{1+\xi}},$$

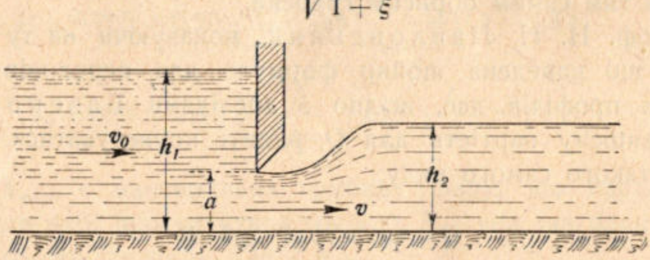

Рис. 113

при цьому $\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ є коефіцієнт, залежний від обрису окрайки щита, а так само від того, чи є ця окрайка вільна, як на додаваному рисункові, чи підтоплена нижньою водою; величина цього коефіцієнту хитається в границях 0,5 — 0,46, отже, можна покласти $\xi = 3$.

Назвавши тепер ширину відтулини b, а висоту її a, при цьому ширину відтулини вважаємо за однакову з шириною підвідного каналу, — маємо вираз для об'єму води, що протікає через відтулину за одну секунду:

$$Q = ab\sqrt{\frac{2g}{1+\xi}\left(h_1 - h_2 + \frac{v_0^2}{2g}\right)}.$$

Дуже часто із щитових відтулин користуються для виміряння витрати води, при цьому, звичайно, підхідна швидкість v_0 заздалегідь буває відома; але легко бачити, що швидкість цю не важко виключити; справді, цілком очевидно:

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{Q^2}{2gb^2h_1^2};$$

підставивши цю вартість $\frac{v_0^2}{2g}$ в попереднє співвідношення, зводячи й визначаючи Q, знайдемо остаточно:

$$Q = ab\sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{1 + \xi - \frac{a^2}{h_1^2}}}. \qquad [34]$$

§ 5. Задачі на місцеві опори в трубах і витікання води через відтулини

Задача 1. Визначте кількість води, яку можна подати трубою діяметром $d = 0{,}075$ *м* і довжиною $l = 90$ *м* під напором $h = 9$ *м*. В трубі на віддалі 60 *м* од напірного резервуару є засувка (рис. 114).

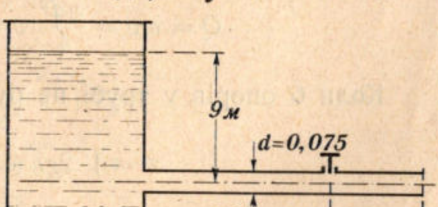

Рис. 114

Розвязка. Очевидно, що напір h йде, щоб надати швидкости (v) воді в трубі й перебороти опори; тому

$$h = \frac{v^2}{2g} + \Sigma h_{w_i}. \qquad [35]$$

Опори ж у даному випадку складаються:

1) з опору підчас виходу води з напірного резервуару в трубу (напір, що втрачається h_{w_1});

2) з опору підчас протікання води трубою (напір, що втрачається h_{w_2});

3) з опору підчас проходження води через засувку (напір, що втрачається h_{w_3}).

Таким робом:

$$\Sigma h_{w_i} = h_{w_1} + h_{w_2} + h_{w_3}.$$

На підставі попереднього, перелічені втрати можна визначити так:

$$h_{w_1} = \xi_1 \frac{v^2}{2g} \cong 0,5 \frac{v^2}{2g};$$

$$h_{w_2} = \xi_2 \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \cong \frac{1}{40} \frac{90}{0,075} \cdot \frac{v^2}{2g} = 30 \frac{v^2}{2g};$$

$$h_{w_3} = \xi_3 \frac{v^2}{2g} = 1 \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Підставивши всі ці вартості h_{w_i} в рівнання [35] маємо:

$$h = \frac{v^2}{2g} [1 + 0,5 + 30 + 1] = 32,5 \frac{v^2}{2g},$$

відки

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{32,5}} = \sqrt{\frac{2 \,.\, 9,81 \,.\, 9}{32,5}} = \sqrt{5,43} = 2,33 \frac{м}{сек.}.$$

Кількість води, подаваної трубою, очевидно, буде:

$$Q = \omega v = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v = 0,0103 \frac{м^3}{сек.}.$$

Коли б опорів у трубі не було, то швидкість (v) була б:

$$v = \sqrt{2gh} = 13,3 \frac{м^3}{сек.},$$

а кількість води, подаваної трубою:

$$Q \cong 0,0587 \frac{м^3}{сек.}.$$

Задача 2. Визначте висоту ($h_ф$) водограю за нівелірного напору $h = 9$ *м* і за вказаних на рисункові (рис. 115) розмірів трубопроводу, а так само витрату води.

Розвязка. Напір h йде, щоб надати швидкости (v) витікання струменеві й перебороти опори за протікання води трубопроводом; тому

$$h = \frac{v^2}{2g} + \Sigma h_{w_i}.$$

Опори в даному випадку поділяються на:

1) опір підчас входу води до труби (втрачуваний напір h_{w_1});

2) опір від тертя на окремих ділянках трубопроводу (втрачувані напори h_{w_2}, h_{w_3}, h_{w_4});

3) опори в місцях (AB) колін трубопроводу (втрачувані напори h_{w_5} і h_{w_6});

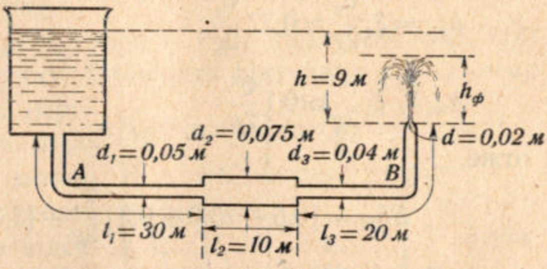

Рис. 115

4) опір підчас переходу води з труби діяметром 5 *см* до труби в 7,5 *см* і з останньої до труби, діяметром 4 *см*) (втрачувані напори h_{w_7} і h_{w_8});

5) опір у конічному насаді підчас виходу води з трубопроводу (втрачуваний напір h_{w_9}).

Таким робом:

$$\Sigma h_{w_i} = h_{w_1} + h_{w_2} + h_{w_3} + h_{w_4} + h_{w_5} + h_{w_6} + h_{w_7} + h_{w_8} + h_{w_9}.$$

На підставі вищенаведеного, маємо:

$$h_{w_1} = \xi_1 \frac{v_1^2}{2g} \cong 0{,}5 \frac{v_1^2}{2g};$$

$$h_{w_2} = \xi_2 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} \cong \frac{1}{40} \cdot \frac{30}{0{,}05} \cdot \frac{v_1^2}{2g} = 15 \frac{v_1^2}{2g};$$

$$h_{w_3} = \xi_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} \cong \frac{1}{40} \frac{10}{0{,}075} \frac{v_2^2}{2g} = 3{,}3 \frac{v_2^2}{2g};$$

$$h_{w_4} = \xi_2 \frac{l_3}{d_3} \frac{v_3^2}{2g} \cong \frac{1}{40} \frac{20}{0{,}04} \frac{v_3^2}{2g} = 12{,}5 \frac{v_3^2}{2g};$$

$$h_{w_5} = \xi_3 \frac{v_1^2}{2g} \cong 0{,}3 \frac{v_1^2}{2g};$$

$$h_{w_6} = \xi_3 \frac{v_3^2}{2g} = 0{,}3 \frac{v_3^2}{2g};$$

$$h_{w_7} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^2 = \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{0{,}075^2}{0{,}05^2} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = 1{,}56 \frac{v_2^2}{2g};$$

$$h_{w_8} = \xi_4 \frac{v_3^2}{2g} \cong 0{,}37 \frac{v_3^2}{2g};$$

$$h_{w_9} = \xi_5 \frac{v^2}{2g} \cong 0{,}1 \frac{v^2}{2g},$$

отже,

$$\Sigma h_{w_i} = [0{,}5 + 15{,}0 + 0{,}3] \frac{v_1^2}{2g} + [3{,}3 + 1{,}56] \frac{v_2^2}{2g} +$$

$$+ [12{,}5 + 0{,}3 + 0{,}37] \frac{v_3^2}{2g} + 0{,}1 \frac{v^2}{2g} = 15{,}8 \frac{v_1^2}{2g} + 4{,}86 \frac{v_2^2}{2g} + 13{,}17 \frac{v_3^2}{2g} + 0{,}1 \frac{v^2}{2g},$$

а що за законом суцільности руху

$$Q = \omega_1 v_1 = \omega_2 v_2 = \omega_3 v_3 = \omega v,$$

$$v_1 = v \frac{\omega}{\omega_1} = v \frac{d^2}{d_1^2} = \frac{4}{25} v = 0{,}16 v;$$

$$v_2 = v \frac{\omega}{\omega_2} = v \frac{d^2}{d_2^2} = \frac{4}{56{,}25} v = 0{,}071 v;$$

$$v_3 = v \frac{\omega}{\omega_3} = v \frac{d^2}{d_3^2} = \frac{4}{16} v = 0{,}25 v;$$

а, підставивши всі вартості швидкостей у вираз для Σh_{w_i}; матимемо:

$$\Sigma h_{w_i} = 0{,}404 \frac{v^2}{2g} + 0{,}024 \frac{v^2}{2g} + 0{,}823 \frac{v^2}{2g} + 0{,}1 \frac{v^2}{2g} \cong 1{,}45 \frac{v^2}{2g}.$$

Таким робом

$$h = \frac{v^2}{2g} + 1{,}45 \frac{v^2}{2g} = 2{,}45 \frac{v^2}{2g},$$

відки

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{2{,}45}} = \sqrt{\frac{2 . 9{,}81 . 9}{2{,}45}} \cong 8{,}49 \frac{м}{сек.}$$

а тепер, нехтуючи опором повітря,

$$h_ф = \frac{v^2}{2g} = \frac{72,07}{19,61} \cong 3,67 \text{ м.}$$

Кількість води, потрібна для водограю, буде:

$$Q = \omega v = 0,000314 . 8,49 = 0,00257 \frac{м^3}{сек.} \cong 0,217 \frac{\text{відра}}{сек.},$$

або 781 відро за годину.

Задача 3. Є два резервуари (*I* і *II*), сполучені (рис. 116) через округлу відтулину *A* (діяметр відтулини $d_1 = 30$ *мм*). З резервуару *I* вода перетікає через відтулину *A* до резервуару *II*, а з останнього вона витікає через відтулину *B* (діяметр відтулини $d_2 = 20$ *мм*) у повітря. Рівень води у резервуарі *I* увесь час підтримується на висоті $h_1 = 4$ *м* над центром відтулини *A*; віддаль центру відтулини *B* від рівня води резервуару *I* дорівнює $h_2 = 6$ *м.* Визначте витрату води через відтулину *B*, коли відтулини *A* і *B* у тонких стінках.

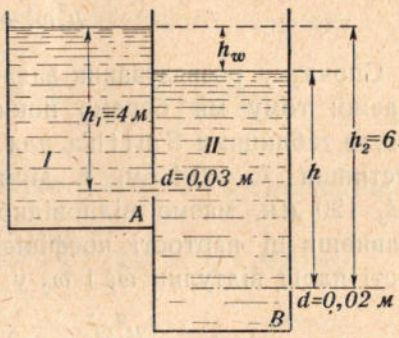

Рис. 116

Розвязка. В наслідок опорів підчас протікання води через відтулину *A*, рівень води в резервуарі *II* міститься нижче за рівень води в резервуарі *I* на якусь висоту h_w. Тому, означивши коефіцієнти витрати через відтулини *A* і *B*, відповідно через μ_1 і μ_2, а самі витрати через Q_1 і Q_2, ми можемо, очевидно, написати:

$$Q_1 = \mu_1 \omega_1 \sqrt{2gh_w} \quad Q_2 = \mu_2 \omega_2 \sqrt{2gh},$$

де ω_1 і ω_2 є площі відтулин *A* і *B*, а h — напір, що під ним витікає вода з відтулини *B*. За законом суцільности руху очевидно:

$$Q_1 = Q_2,$$

а тому:

$$\mu_1 \omega_1 \sqrt{2gh_w} = \mu_2 \omega_2 \sqrt{2gh}$$

або

$$\mu_1^2 \omega_1^2 2gh_w = \mu_2^2 \omega_2^2 2gh,$$

або, після скорочення,

$$\mu_1^2\omega_1^2 h_w = \mu_2^2\omega_2^2 h.$$

А що, далі, за рисунком

$$h_w = h_2 - h,$$

то попереднє співвідношення набере вигляду:

$$\mu_1^2\omega_1^2 (h_2 - h) = \mu_2^2\omega_2^2 h,$$

відки визначається h:

$$h = \frac{\mu_1^2\omega_1^2}{\mu_1^2\omega_1^2 + \mu_2^2\omega_2^2} h_2.$$

Спочатку розвязування задачі, напори h_w і h точно не знаємо; тому ми беремо поки наближені вартості μ_1 і μ_2; так, за таблицями Smith'а для напорів в 0,4 *м* і 5,6 *м* (припустивши $h_w = 0{,}4$ *м*) і діяметрів відтулин $d_1 = 30$ *мм* і $d_2 = 20$ *мм*, маємо відповідно, $\mu_1 = 0{,}605$ і $\mu = 0{,}598$; підставивши ці вартості коефіцієнтів витрати μ_1 і μ_2 і вартості площ відтулин ω_1 і ω_2 у відношенні для h, маємо:

$$h = \frac{\mu_1^2\omega_1^2}{\mu_1^2\omega_1^2 + \mu_2^2\omega_2^2} h_2 = \frac{177{,}88}{35{,}37} = 5{,}03,$$

отже,

$$h_w = h_2 - h = 0{,}97 \text{ м}.$$

Зважаючи на те, що напір $h_w = 0{,}97$ значно відмінний від припущеного нами в 0,4 *м*, ми знову підшукуємо за таблицями вартості μ_1 і μ_2; вони будуть відповідно $\mu_1 = 0{,}603$ і $\mu_2 \cong 0{,}598$, а тоді

$$h = \frac{176{,}9}{35{,}37} = 5{,}0,$$

отже,

$$h_w = h_2 - h = 1{,}0.$$

А що нова вартість h_w не дуже одмінна од попередньої його вартости, то ми можемо далі його вартості не уточнювати і, таким робом, остаточно взяти:

$$h_w = 1{,}00,$$

$$\mu_1 = 0{,}603,$$

$$\mu_2 = 0{,}598,$$

а тоді витрата води через відтулину B буде:

$$Q=\mu_2\omega_2\sqrt{2gh}=0{,}598\,.\,0{,}000314\sqrt{2\,.\,9{,}81\,.\,5{,}0}=$$

$$=0{,}00186\,\frac{м^3}{сек.}=1{,}86\,\frac{\text{літра}}{сек.}\,.$$

Задача 4. Визначте витрату води через вищерівневий перелив з вільною струминою з тонкою стінкою (вимірчий перелив), коли грубина шару води, що переливається, $h=0{,}3$ *м;* висота стінки $P=1$ *м* і ширина переливу, що дорівнює ширині підвідного каналу, $b=2$ *м* (рис. 117).

Розвязка. За Базеном, маємо для такого переливу

$$Q=\left[0{,}405+\frac{0{,}003}{h}\right]\left[1+0{,}55\left(\frac{h}{h+P}\right)^2\right]b\sqrt{2g}\,h^{\frac{3}{2}}\,.$$

Підставляючи відповідні вартості h, P, b і g, знаходимо:

$$Q=\left[0{,}405+\frac{0{,}003}{0{,}3}\right]\left[1+0{,}55\left(\frac{0{,}3}{1{,}3}\right)^2\right]2\sqrt{2\,.\,9{,}81}\,.\,0{,}3^{\frac{3}{2}}=$$

$$=0{,}415\,.\,1{,}029\,.\,2\,.\,4{,}429\,.\,0{,}164=0{,}617\;\frac{м^3}{сек.}\cong 617\,\frac{\text{літрів}}{сек.}$$

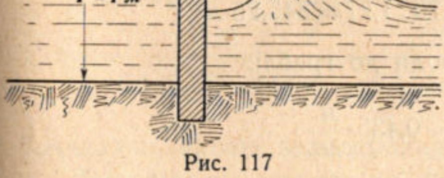

Рис. 117

Рис. 118

Задача 5. Визначте підпір або висоту шару води, що переливається через переливну греблю (рис. 118) за довжини переливу $b=50$ *м*, витрати високих вод $Q_{вв}=150\,\frac{м}{сек.}$, площі живого перекрою річки до ребра переливу $\Omega_0=250$ $м^2$ і ширини річки $B=75$ *м*.

Розвязка. Із співвідношення

$$Q = \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\,.\,b\left(h+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}$$

для витрати на одиниці ширини переливу маємо:

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\left(h+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Практично коефіцієнт витрати $m = \frac{2}{3}\mu$ хитається для гребель з криволінійними обрисами гребеня у вузьких, порівняно, границях; 0,46 — 0,54; тому візьмемо для безпечности вартість $m = 0{,}48$; тоді $\frac{2}{3}\mu\sqrt{2g} \cong 2{,}1$, і за наших умов:

$$q = \frac{150}{50} = 3 = 2{,}1\left(h+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Припускаємо попередньо $v_0 = 0$, тоді

$$3 = 2{,}1 h^{\frac{3}{2}}$$

відки

$$h = \left(\frac{3}{2{,}1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1{,}43^{\frac{2}{3}} = 1{,}27.$$

Тепер знаходимо всю площу живого перекрою річки вище греблі; очевидно, вона буде:

$$\Omega = \Omega_0 + Bh = 250 + 75\,.\,1{,}27 = 345{,}25\ м^2;$$

тому швидкість (v_0) підходу води до греблі:

$$v_0 = \frac{150}{345{,}25} = 0{,}435\,\frac{м}{сек.},$$

а відповідна їй висота:

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{(0{,}435)^2}{2\,.\,9{,}81} \cong 0{,}01,$$

і, таким робом, справжній підпір:

$$h = 1{,}27 - 0{,}01 = 1{,}26\ м.$$

Очевидно, в даному випадку така незначна поправка сталась через те, що річка дуже підперта греблею, і швидкість підходу до неї дуже незначна.

Задача 6. Зробіть перевірку гідравлічного розрахунку переливної греблі для таких умов: нормальний меженний (низький) рівень води у річці береться за основний рівень з поміткою 0,00; нормальний підпірний рівень (зливається з гребенем греблі) повинен мати помітку $+8{,}00$ *м*; рівень повіддя $+8{,}5$ *м*; максимальний припустимий рівень високих вод $+9{,}75$ *м*. Витрата води підчас повіддя $Q_п = 80 \frac{м^3}{сек.}$; витрата підчас високих вод $Q_в = 320 \frac{м^3}{сек.}$. Довжина переливної частини греблі $b = 75$ *м*.

Розвязка. В основному співвідношенні:

$$Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} \,.\, b \,.\, h_0^{\frac{3}{2}}$$

знову беремо $\frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} = 2{,}1$ і, крім того, нехтуємо підхідною швидкістю v_0; тому

$$Q = 2{,}1 \,.\, b \,.\, h^{\frac{3}{2}},$$

відки

$$b = \frac{Q}{2{,}1 \,.\, h^{\frac{3}{2}}}.$$

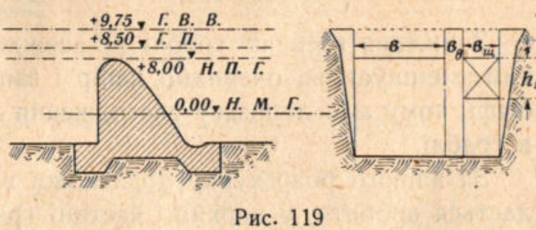

Рис. 119

Перевіряємо передусім можливість проходу високих вод:

$$b = \frac{320}{2{,}1\,(9{,}75 - 8{,}00)^{\frac{3}{2}}} = \frac{320}{2{,}1 \,.\, 1{,}75^{\frac{3}{2}}} \cong \frac{320}{2{,}1 \,.\, 2{,}315} \cong 65{,}8 \text{ м} < 75,$$

очевидно, високі води проходять цілком вільно.

Перевіряємо можливість проходу вод повіддя:

$$b = \frac{80}{2{,}1 \,.\, (8{,}5 - 8{,}0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{80}{2{,}1 \,.\, 0{,}5^{\frac{3}{2}}} = \frac{80}{0{,}74} = 108 > 75,$$

тоб-то води повіддя за завданих умов не проходять, отже, конче потрібно або знизити гребінь греблі або злагодити додаткові відтулини в греблі.

В першому випадку, зважаючи на те, що потрібну грубину шару води, яка переливається через греблю, визначається в

$$h=\left[\frac{Q_n}{2{,}1\,.\,b}\right]^{\frac{2}{3}}=\left[\frac{80}{157{,}5}\right]^{\frac{2}{3}}=(0{,}508)^{\frac{2}{3}}\cong 0{,}637\ м,$$

гребінь греблі довелось би знизити до помітки

$$8{,}50-0{,}637=7{,}863\ м.$$

У другому випадку, припустивши висоту додаткової відтулини $h_щ=2\ м$, маємо очевидне співвідношення:

$$Q+Q_щ\geqslant 80\,\frac{м^3}{сек.},$$

або

$$2{,}1\,.\,b\,(0{,}5)^{\frac{3}{2}}+2{,}1 b_щ 2^{\frac{3}{2}}\geqslant 80,$$

відки

$$b_щ=\frac{80-2{,}1\,.\,b\,.\,0{,}5^{\frac{3}{2}}}{2{,}1\,.\,2^{\frac{3}{2}}}=\frac{24{,}5}{5{,}94}\cong 4{,}12\ м.$$

Зниження гребеня греблі не завжди буває корисне, бо тим зменшується, очевидно, напір і запас води у верхньому б'єфі; тому має перевагу злагодження додаткової відтулини в греблі.

За нашого розрахунку додаткової відтулини останню гадається зробити у верхній частині греблі; иноді додаткові відтулини злагоджується і в нижній частині греблі (денні відтулини), але такі відтулини, опріч небезпеки підмивання греблі через утворення великих вихідних швидкостей, становлять іще великі труднощі що до керування ними: конечність прикладати великі зусилля для підіймання закривок, то що.

Задача 7. Є переливна гребля (рис. 120) з довжиною гребеня $b=50\ м$. Витрата води в річці $400\,\frac{м^3}{сек.}$, при цьому рівень її в природному стані має помітку $+4{,}2\ м$; рівень підпертих греблею вод $+5{,}00\ м$. Площа живого перекрою річки в підпертому стані $300\ м^2$. Запитання, чи можна за заданих умов помітку гребеня греблі взяти $+3{,}00\ м$, чи він повинен бути нижчий, коли помітка спідки греблі $-0{,}00$.

Розвязка. Передусім розвязуємо питання, який буде перелив: затоплений чи незатоплений. На підставі попереднього, це питання, за Базеном, розвязується через визначення вартости відношення $\frac{z}{P}$, при цьому, коли $\frac{z}{P} < 0{,}75$, перелив затоплений, коли ж $\frac{z}{P} > 0{,}75$, то нижче греблі утвориться відігнаний плиг, і перелив буде незатоплений. У нашому випадку, взявши помітку гребеня греблі $+3{,}00$, маємо:

$$\frac{z}{P} = \frac{5{,}0 - 4{,}2}{3} \cong 0{,}27 < 0{,}75,$$

тоб-то характерний затоплений перелив.

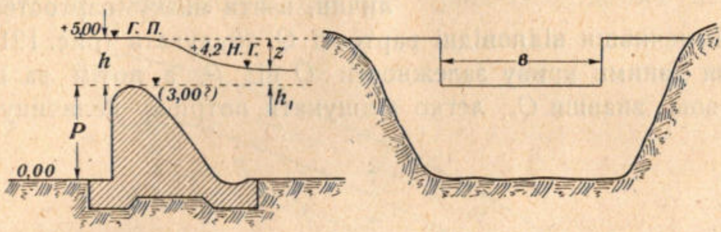

Рис. 120

Далі, за Базеном, маємо для такого переливу:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot 1{,}05\left(1 + 0{,}2\frac{h_1}{P}\right)\sqrt[3]{\frac{z}{h}} \cdot b\left(h + \frac{v_0^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Взявши знову

$$\frac{2}{3}\mu \cdot \sqrt{2g} = 2{,}1,$$

маючи

$$v_0 = \frac{400}{300} = 1{,}33\ \frac{м}{сек.},$$

отже,

$$\frac{v_0^2}{2g} \cong 0{,}1,$$

та знайшовши, що

$$1{,}05\left(1 + 0{,}2\frac{h_1}{P}\right)\sqrt[3]{\frac{z}{h}} = 1{,}05\left(1 + 0{,}2\frac{1{,}2}{3{,}00}\right)\sqrt[3]{\frac{0{,}8}{2}} \cong 0{,}8,$$

маємо:

$$Q = 2{,}1 \,.\, 0{,}8 \,.\, 50 \,.\, 3{,}04 \cong 255{,}4 < 400.$$

Таким робом, коли вмістити гребінь греблі на рівні $+3{,}00$ *м*, вода в кількості $400 \frac{м^3}{сек.}$ не перейде через греблю за умови розташування підпорного рівня на рівні $+5{,}00$ *м*; отже, конче потрібно знизити гребінь греблі до такого рівня, щоб указані $400 \frac{м^3}{сек}$ пройшли між гребенем греблі й рівнем $+5{,}00$ *м*. Щоб розвязати цю задачу, доводиться, зважаючи на складну функціональну залежність Q від P та від инших величин, взяти низку вартостей P і, визначивши відповідні вартості Q, збудувати (рис. 121) за цими даними криву залежности Q від P, а потім за цією кривою, знавши $Q_з$, легко відшукати потрібну величину P_x.

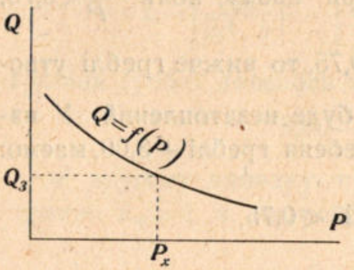

Рис. 121

РОЗДІЛ VII

НЕУСТАЛЕНА ТЕЧІЯ РІДИНИ

§ 1. Рівняння неусталеної течії рідини по криволінійній траєкторії

Уявімо собі якусь токову трубку вздовж оси *ss*, розташовану як завгодно в просторі (рис. 122); двома пере-

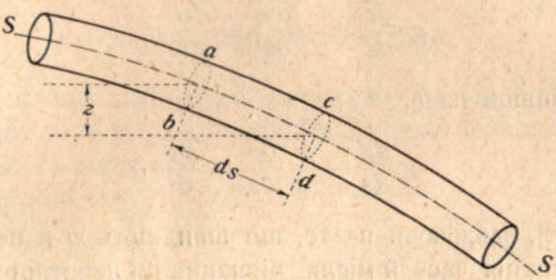

Рис. 122

кроями *ab* і *cd* виділімо елемент рухомої рідини, довжиною *ds*; хай самі площі перекроїв будуть ω і $\omega + d\omega$; тиски в середині рідини в цих перекроях хай будуть відповідно p і $p + dp$, і, нарешті, швидкості хай будуть, відповідно, v і $v + \frac{\partial v}{\partial s} ds$; тоді, очевидно, назвавши ще масу елементу рідини dm і об'ємну силу, що діє по осі s через S, матимемо відповідне співвідношення:

$$dm\,.\,S + p\omega - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds\right)\left(\omega + \frac{\partial \omega}{\partial s} ds\right) = dm \frac{dv}{dt};$$

розкривши дужки і зробивши зведення, одержуємо:

$$dm\,.\,S - \omega \frac{\partial p}{\partial s} ds - p \frac{\partial \omega}{\partial s} ds - \frac{\partial p}{\partial s} ds \frac{\partial \omega}{\partial s} ds = dm \frac{dv}{dt},$$

відки, припустивши зміну площі поперечного перекрою за безконечно малу, знаходимо:

$$Sdm - \omega \frac{\partial p}{\partial s} ds = \frac{dv}{dt} dm, \qquad [1]$$

але що, з одного боку,

$$dm = \omega \,.\, ds \frac{\delta}{g},$$

а, з другого боку, об'ємну силу (віднесену до одиниці маси), коли тільки мати на увазі силу ваги, можна визначити як

$$S = g \frac{dz}{ds},$$

то рівнання [1] набирає вигляду:

$$g \frac{dz}{ds} \varrho - \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dv}{dt} \varrho,$$

або, поділивши на ϱ:

$$g \frac{dz}{ds} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dv}{dt}, \qquad [2]$$

Нарешті, зважаючи на те, що швидкість v в неусталеній течії є функція часу й місця, рівнання [2] перетворюється на

$$g \frac{dz}{ds} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} v, \qquad [3]$$

воно й є рівнання неусталеного руху рідини якою завгодно криволінійною путтю (ss).

§ 2. Витікання води з відтулин у посудинах за перемінного рівня

Маємо посудину, повну води до рівня AB. В бічній стінці посудини є відтулина, площею ω_2, спочатку закрита. Коли відкрити відтулину, то вода почне витікати й рівень її знижуватись; треба дослідити процес цього витікання, припустивши, що води в посудину не доливається. Візьмімо лінію OO (рис. 123) за перетин площини рисунку з основною площиною, від якої відраховуємо віддалі будь-якого вільного рівня води, в момент одкриття відтулини, й оси відтулини; хай ці віддалі будуть z_1 і z_2; хай швидкості будуть відповідно v_1 і v_2; тоді, застосовуючи рівняння [3] і інтегруючи його, наперед помноживши на ds, в границях від z_2 до z_1, маємо:

$$g(z_2 - z_1) - \frac{1}{\varrho}(p_2 - p_1) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds, \qquad [4]$$

але що p_1 і p_2 рівні атмосферному тискові (p_a), то останнє співвідношення, після скорочення й множення на 2, набере вигляду:

$$2g(z_2 - z_1) = v_2^2 - v_1^2 + 2\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds. \qquad [5]$$

Зважаючи на те, що, за законом суцільности руху,

$$\omega_1 v_1 = \omega_2 v_2 = \omega v = \text{const},$$

де ω_1 є площа перекрою посудини на рівні початкового рівня води, а v й ω — швидкість і площа перекрою за першого-ліпшого рівня води у посудині, то

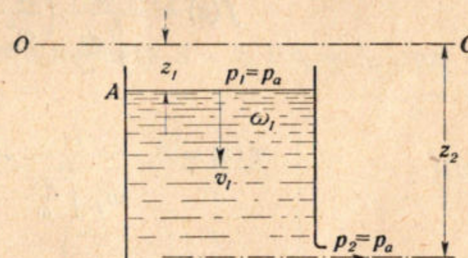

Рис. 123

$$v_1 = v_2 \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

$$v = v_2 \frac{\omega_2}{\omega},$$

відки

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\omega_2}{\omega} \frac{dv_2}{dt};$$

тому з рівнання [5] матимемо:

$$2g(z_2 - z_1) = v_2^2\left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) + 2\omega_2 \frac{dv_2}{dt} \int_{z_1}^{z_2} \frac{ds}{\omega}. \qquad [6]$$

Коли б ми припустили в цьому рівнанні $v_2 = \text{const}$, отже, $\frac{dv_2}{dt} = 0$, що, очевидно, буде за незмінного рівня, то мали б співвідношення, що його ми вивели в задачі 3, § 2, розділу II.

А що до посудини вода не підтікає, то, очевидно,

$$\omega_2 v_2 dt = \omega_1 dz_1 = \omega dz.$$

відки

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{\omega_2}{\omega}\frac{v_2 dv_2}{dz} = g\frac{\omega_2}{\omega}\frac{d\left(\frac{v_2^2}{2g}\right)}{dz} = g\frac{\omega_2}{\omega}\frac{dh_2}{dz},$$

коли позначити $\frac{dv_2}{2g}$ через h_2; рівнання [6], після підставляння до нього вартости $\frac{dv_2}{dt}$, введення $2gh_2$ замість v_2^2 і можливих скорочень, набере вигляду:

$$\frac{dh_2}{dz} + \frac{\omega}{\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{ds}{\omega}}\left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right)h_2 - \frac{\omega}{\omega_2^2\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{ds}{\omega}}(z_2 - z_1) = 0,$$

або, ввівши позначення:

$$f(z) = \frac{\omega}{\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{ds}{\omega}}\left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right),$$

$$\varphi(z) = -\frac{\omega}{\omega_2^2\int\limits_{z_1}^{z_3}\frac{ds}{\omega}}(z_2 - z_1),$$

(при цьому, очевидно, щоб визначити $f(z)$ і $\varphi(z)$, треба знати закон зміни площі ω з довжиною пути s) — матимемо лінійне диференціяльне рівнання:

$$\frac{dh_2}{dz} + f(z)h_2 + \varphi(z) = 0; \tag{7}$$

інтегрування його дає нам змогу визначити h_2, або, однаково, v_2:

$$h_2 = e^{-\int f(z)dz}\left[C - \int\frac{\varphi(z)dz}{e^{\int f(z)dz}}\right]; \tag{8}$$

тут сталу C доводиться визначати для кожного випадку окремо.

В окремому випадку, коли посудина має сталий перекрій ($\omega = \omega_1 = \text{const}$), маємо:

$$f(z) = \frac{\omega_1^2}{z_2 - z_1}\left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right) = \frac{\omega_1^2}{h}\left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1\right),$$

$$\varphi(z) = -\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2},$$

$$e^{-\int f(z)\,dz} = h^{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1},$$

означивши $z_2 - z_1$ через h, де h, очевидно, є змінна величина; тепер вираз для h_2 набере вигляду:

$$h_2 = h^{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1}\left[C + \frac{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2\right) h^{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2}}\right]. \qquad [9]$$

Беремо для початкового моменту $h = h_0$ і $h_2 = h_{2_0}$ тоді

$$h_{2_0} = h_0^{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1}\left[C + \frac{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2\right) h_0^{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2}}\right], \qquad [10]$$

а тепер, виключивши з [10] і [9] сталу C, знаходимо:

$$\frac{h_2}{h} = \frac{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2} + \left[\frac{h_{2_0}}{h_0} - \frac{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2}\right]\left(\frac{h}{h_0}\right)^{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2}, \qquad [11]$$

або, означивши $\dfrac{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2}$ через a, $\left(\dfrac{h_{2_0}}{h_0} - \dfrac{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2}\right)\dfrac{1}{h_0^{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2}}$

через b

$$\frac{h_2}{h} = a + bh^{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2}. \qquad [12]$$

З останнього співвідношення маємо граничну вартість $\frac{h_2}{h}$, припустивши $h = 0$,

$$\lim\left(\frac{h_2}{h}\right) = \frac{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2} = a. \qquad [13]$$

Припустімо, що відтулина посудини була спочатку закрита, а в момент $t = 0$ її відразу відкрили; тоді в цей момент, очевидно, $h_{2_0} = 0$, і з рівнання [11] маємо:

$$\frac{h_2}{h} = a\left[1 - \left(\frac{h}{h_0}\right)^{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2}\right], \qquad [14]$$

відки бачимо, що $\frac{h_2}{h}$ раз-у-раз зростає від 0 (за $h = h_0$) до a (за $h = 0$).

Припустімо ще, що ввесь час вода притікала до посудини, а потім з моменту $t = 0$ притікання спинилось, і посудина почала спорожнюватись; очевидно, в момент припинення притікання води витікання відбувається за постійного напору, і

$$\frac{h_2}{h} = \frac{h_{2_0}}{h} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1}. \qquad [15]$$

Від цієї початкової вартости $\frac{h_2}{h}$ зростає до $\frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 2}$, як виходить із співвідношення [13]. Вартість [15] відношення $\frac{h_2}{h}$ набирає, згідно з [14], за зниження поверхні води до того моменту, коли

$$\frac{h}{h_0} = \left[1 - \frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1}\right]^{\frac{1}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 2}} = \left[\frac{1}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1}\right]^{\frac{1}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 2}}.$$

За великих вартостей відношення $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ величина $\frac{h}{h_0}$ дуже близька до одиниці; справді, наприклад, за $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 20$, маємо $\frac{h}{h_0} = 0{,}985$.

Так само за великих вартостей $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ різниця між $\frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1}$ і $\frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 2}$ практично дуже мала; так, наприклад, за тієї ж вартости $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 20$, маємо:

$$\frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{400}} = \frac{400}{399} = 1{,}0025,$$

$$\frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 2} = \frac{1}{1 - 2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{2}{400}} = \frac{400}{398} = 1{,}00502;$$

тому, по-перше, ми можемо вважати пришвидшувальний період, коли $\frac{h_2}{h}$ підноситься від 0 до a, за дуже короткий і припускати, що відношення $\frac{h_2}{h}$ миттю набирає вартости $\frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1}$; по-друге, брати обидві щойно наведені вартості для $\frac{h_2}{h}$ за однакові і, що вони близькі до одиниці, вважати за можливе визначити швидкість v_2 із співвідношення:

$$\frac{h_2}{h} = 1, \text{ або } \frac{v_2^2}{2g} = h,$$

або, нарешті,

$$v_2 = \sqrt{2gh}\,;$$

практично, звичайно, в останнє співвідношення ще треба ввести швидкісний коефіцієнт φ:

$$v_2 = \varphi \sqrt{2gh}\,.$$

Так само можна дослідити зміну швидкости v_1. Справді, коли у співвідношення [5] підставити вартості v_2 і v, означені через v_1, то матимемо:

$$2g\,(z_2-z_1)=v_1^2\left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2-1\right]+2\omega_1\frac{dv_1}{dt}\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{ds}{\omega}, \qquad [16]$$

або, позначивши $\left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2-1\right]$ через a, а $\omega_1\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{ds}{\omega}$ через b, маємо:

$$2g\,(z_2-z_1)=av_1^2+2b\frac{dv_1}{dt},$$

а що

$$\frac{dv_1}{dt}=\frac{dv_1}{dz_1}\cdot\frac{dz_1}{dt}=v_1\frac{dv_1}{dz}=\frac{1}{2}\frac{d(v_1)^2}{dz_1},$$

то

$$2g\,(z_2-z_1)=av_1^2+b\frac{d(v_1)^2}{dz_1}. \qquad [17]$$

З моменту відкриття відтулини швидкість v_1, очевидно, має змінятися від 0 (в той момент $v_2=0$; див. вище) до якоїсь найбільшої величини v_m; при цьому положення рівня води зміниться з z_0 на малу величину Δz_m; для цього періоду швидкістю v_1, зважаючи на її дуже малу величину, можна знехтувати проти $\frac{d(v_1)^2}{dz_1}$; а тоді для моменту найбільшої швидкости, очевидно, можна припустити $dz_1=\Delta z_m$ і визначити:

$$v_1^2=v_m^2=\frac{2g(z_2-z_0)}{b}\Delta z_m;$$

крім того, як у цей момент $\frac{d(v_1)^2}{dz_1}=0$, $z_1=z_0+\Delta z_m$ і $v_1=v_m$, то

$$2g(z_2-z_0-\Delta z_m)=\frac{a}{b}\,2g(z_2-z_0)\,\Delta z_m,$$

відки

$$\Delta z_m=\frac{z_2-z_0}{1+\frac{a}{b}(z_2-z_0)}=\frac{b}{a}\,\frac{z_2-z_0}{z_2-z_0+\frac{b}{a}}=\frac{b}{a}\,\frac{1}{1+\frac{\frac{b}{a}}{z_2-z_0}}\cong\frac{b}{a}, \qquad [18]$$

нехтуючи членом $\frac{\frac{b}{a}}{z_2 - z_0}$ у знаменику через його малість.

Час t_m, протягом якого існує пришвидшувальний період для v_1 знайдемо, коли вважати рух за рівномірно прискорений, з виразу:

$$t_m = 2\frac{\Delta z_m}{v_m} = 2\frac{\Delta z_m \sqrt{b}}{\sqrt{2g(z_2 - z_0)} \cdot \sqrt{\Delta z_m}} =$$

$$= 2\frac{\sqrt{\Delta z_m}\sqrt{b}}{\sqrt{2g(z_2 - z_0)}} = 2\frac{b}{\sqrt{2g(z_2 - z_0)a}}. \qquad [19]$$

Очевидно, після пришвидшувального періоду для v_1 почнеться період загаювання через зменшення швидкости v_2. Припустімо спочатку для цього періоду, як для першого наближення, у виразі [17] $\frac{d(v_1)^2}{dz_1} = 0$; тоді

$$v_1^2 = \frac{2g(z_2 - z_1)}{a},$$

а відси за постійного ω_1 і, значить, a, маємо:

$$\frac{d(v_1)^2}{dz_1} = -\frac{2g}{a}.$$

Співвідношення [17], після підставлення цієї вартости $\frac{d(v_1)^2}{dz_1}$, набере вигляду:

$$2g(z_2 - z_1) = av_1^2 - \frac{b}{a}2g,$$

відки

$$v_1 = \sqrt{\frac{\left(z_2 - z_1 + \frac{b}{a}\right)2g}{a}}.$$

Час, потрібний для витікання води, почавши від загаювального періоду до кінця витікання, очевидно, буде:

$$t = \int_{z_0 - \Delta z_m}^{z_2} \frac{dz_1}{v_1} = \int_{z_0 - \Delta z_m}^{z_2} \frac{dz_1}{\sqrt{\frac{2g}{a}\left(z_2 - z_1 + \frac{b}{a}\right)}}. \qquad [20]$$

Задача 1. Дослідіть витікання води з посудини сталого перекрою висотою 2 *м* за $\frac{\omega_1}{\omega_2}=20$.

Розвязка. Маємо:

$$a=\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2-1=399;$$

$$b=\omega_1\int_{z_1}^{z_2}\frac{ds}{\omega}=z_2-z_1=2\text{ м}.$$

Із співвідношення [18] знаходимо величину зниження рівня підчас пришвидшувального періоду:

$$\Delta z_m=\frac{b}{a}=\frac{2}{399}\cong 0{,}005\text{ м}.$$

Із співвідношення [19] знаходимо час пришвидшувального періоду:

$$t_m=2\frac{b}{\sqrt{2g(z_2-z_1)a}}=\frac{2\,.\,2}{\sqrt{2\,.\,9{,}81\,.\,2\,.\,399}}=\frac{4}{125}=0{,}032\text{ сек}.$$

Найбільша швидкість у розглядуваний період буде, оскільки за [18] $\frac{\Delta z_m}{b}=\frac{1}{a}$,

$$v_m=\sqrt{\frac{2g(z_2-z_1)}{a}}=\sqrt{\frac{2\,.\,9{,}81\,.\,2}{399}}=\sqrt{0{,}09834}=0{,}3135\text{ м/сек}.$$

Нарешті, час спорожнювання можна знайти за рівнянням [20]:

$$t=\int_{z_0-\Delta z_m}^{z_2}\frac{dz_1}{\sqrt{\frac{2g}{a}\left(z_2-z_1+\frac{b}{a}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2g}{a}}}\int_{z_0-\Delta z_m}^{z_2}\frac{dz_1}{\sqrt{z_2-z_1+\frac{b}{a}}}=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\frac{2g}{a}}}\left[\frac{b}{a}-\sqrt{z_2-z_0+\Delta z_m+\frac{b}{a}}\right]=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\frac{2g}{a}}}\left[\sqrt{z_2-z_0+\Delta z_m+\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right]=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\frac{2\,.\,9{,}81}{399}}}\left[\sqrt{2+0{,}005+\frac{2}{399}}-\sqrt{\frac{2}{399}}\right]=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{0{,}04905}}[\sqrt{2{,}01}-\sqrt{0{,}005}]=\frac{2}{0{,}2214}[1{,}418-0{,}0224]=$$

$$=12{,}61\text{ сек}.$$

§ 3. Витікання води з відтулин за змінного рівня, але незмінного притікання

Вище знайдено, що за досить великих відношень $\frac{\omega}{\omega_2}$ можна швидкість витікання вважати за рівну $\sqrt{2gh}$. Хай тепер за секунду в посудину підтікає води Q *м*³; хай у певний момент t рівень води в посудині (рис. 124) є над відтулиною на висоті h; протягом елементу часу dt хай він знизиться на dh; тоді, очевидно, ми маємо право написати таке співвідношення:

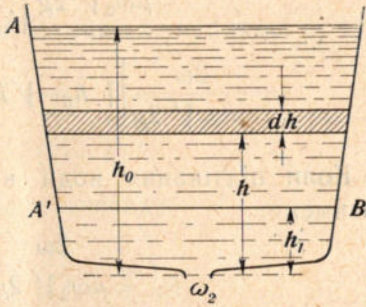

Рис. 124

$$-\omega dh = (\mu\omega_2\sqrt{2gh} - Q)\,dt. \qquad [21]$$

Далі, завжди є можливість підшукати такий напір k, щоб він задовольняв співвідношення

$$Q = \mu\,.\,\omega_2\sqrt{2gk};$$

тому рівняння [21] набере вигляду:

$$-\omega dh = \mu\omega_2\sqrt{2g}(\sqrt{h} - \sqrt{k})\,dt,$$

відки

$$dt = -\frac{\omega dh}{\mu\omega_2\sqrt{2g}(\sqrt{h} - \sqrt{k})},$$

а час зниження рівня з висоти h_0 до висоти h_1 буде, коли тільки почати лічити час од того моменту, коли рівень був на висоті h_0:

$$t = \frac{1}{\mu\omega_2\sqrt{2g}}\int_{h_1}^{h_0}\frac{\omega dh}{\sqrt{h} - \sqrt{k}}. \qquad [22]$$

Очевидно, щоб остаточно розвязяти питання, треба знати функціональну залежність ω від h. Питання розвязується значно простіш, коли $\omega = \text{const.}$; у цьому випадку маємо:

$$t = \frac{\omega}{\mu\omega_2\sqrt{2g}}\int_{h_1}^{h_0}\frac{dh}{\sqrt{h} - \sqrt{k}},$$

а, взявши $\sqrt{h}-\sqrt{k}=y$, отже, $dh=2(y+\sqrt{k})\,dy$, матимемо:

$$t=\frac{2\omega}{\mu\omega_2\sqrt{2g}}\left[\int_{h_1}^{h_0} dy+\sqrt{k}\int_{h_1}^{h_0}\frac{dy}{y}\right]=$$

$$=\frac{2\omega}{\mu\omega_2\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h_0}-\sqrt{h_1}+\sqrt{k}\ln\frac{\sqrt{h_0}-\sqrt{k}}{\sqrt{h_1}-\sqrt{k}}\right]. \qquad [23]$$

Коли підтікання води в посудині нема, то $Q=0=k$, і матимемо:

$$t=\frac{2\omega}{\mu\omega_2\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h_0}-\sqrt{h_1}\right]. \qquad [24]$$

Час (T) цілковитого спорожнювання посудини матимемо, припустивши $h_1=0$; в цьому випадку знаходимо:

$$T=\frac{2\omega h_0}{\mu\omega_2\sqrt{2gh_0}}. \qquad [25]$$

Останній вираз, очевидно, говорить, що час цілковитого спорожнювання посудини за змінного (від h_0 до 0) напору h буде удвоє більший за час витікання з тієї самої посудини тієї ж кількости води, але за постійного напору $h=h_0$.

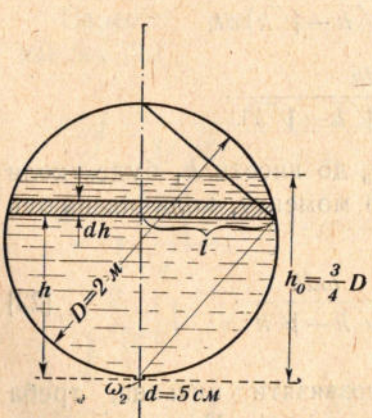

Рис. 125

Задача 2. Маємо циліндричний казан (рис. 125) діяметром $D=2$ *м* і довжиною $L=8$ *м*; унизу є ґрант з відтулиною діяметра $d=5$ *см*; казан наповнено водою так, що остання заповнює його до висоти $h_0=\frac{3}{4}D$; визначте час спорожнювання казана від води через ґрант.

Розвязка. А що вода до казана не підтікає, то у співвідношенні [22] висота $k=0$, а що крім того, казан повинно спорожнити цілком, то і $h_1=0$; тому, зауваживши ще, що

$h_0 = \frac{3}{4} D$ і $\omega_2 = \frac{\pi d^2}{4}$, маємо для даного випадку:

$$T = \frac{1}{\mu\omega_2 \sqrt{2g}} \int_0^{h_0} \frac{\omega dh}{\sqrt{h}} . \qquad [26]$$

Позначивши довжину хорди, відповідну напорові h, через $2l$, очевидно, маємо:

$$l^2 = h(D-h),$$

тому

$$\omega = 2lL = 2\sqrt{h(D-h)}\, L,$$

отже, співвідношення [26] набере вигляду:

$$T = \frac{2L}{\mu\omega_2 \sqrt{2g}} \int_0^{h_0} \sqrt{D-h}\,.\,dh;$$

після інтегрування матимемо:

$$T = \frac{4L}{3\mu\omega_2\sqrt{2g}} \left\{ \left[D - \frac{3}{4} D \right]^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}} \right\} = \frac{7LD^{\frac{3}{2}}}{6\mu\omega_2 \sqrt{2g}} .$$

Нарешті, підставивши відповідні вартості L, ω_2, D і g покладаючи $\mu = 0{,}64$, як для відтулини з гострими окрайками, знаходимо:

$$T = \frac{7\,.\,8\,.\,2^{\frac{3}{2}}}{6\,.\,0{,}64\,.\,0{,}001962\,.\,4{,}429} = \frac{7\,.\,8\,.\,2{,}828}{6\,.\,0{,}64\,.\,0{,}00869} =$$

$$= \frac{7\,.\,22{,}624}{6\,.\,0{,}00556} = 4747{,}2 \text{ сек.} = 1 \text{ год. } 19 \text{ хв. } 7{,}2 \text{ сек.}$$

Задача 3. Дано посудину показаної на рисункові (рис. 126) форми, повну до краю води; за спорожнювання посудини через відтулину в дні, рівень води що-секунди знижується на 1 *см.* Визначити форму посудини й час витікання води з неї, коли об'єм води, налитий в посудину, дорівнює $Q = 1$ *м*^{3} а діяметр випускної відтулини $d = 5$ *см*; довжина посудини (b) 2 *м.*

Розвязка. Позначивши ширину люстра води в посудині в якийсь момент t після початку спорожнювання через $2x$ і відповідний напір через h, очевидно, маємо;

$$dt = -\frac{\omega dh}{\mu\omega_2 \sqrt{2g}\sqrt{h}} = -\frac{2xbdh}{\mu\omega_2 \sqrt{2g}\sqrt{h}} ,$$

відки швидкість зниження рівня:

$$u = -\frac{dh}{dt} = \frac{\mu\omega_2 \sqrt{2g}\sqrt{h}}{2x \cdot b}. \qquad [27]$$

А що $u = \text{const} = 1 \ \frac{см}{сек.} = 0{,}01 \ \frac{м}{сек.}$, то для двох якихось положень рівня h_1 і h_2 маємо:

$$\frac{\mu\omega_2 \sqrt{2g}\sqrt{h_1}}{2x_1 b} = \frac{\mu\omega_2 \sqrt{2g}\sqrt{h_2}}{2x_2 b},$$

відки

$$\frac{h_1}{x_1^2} = \frac{h_2}{x_2^2} = \text{const},$$

або взагалі, ввівши якусь сталу $k = 2p = \text{const}$, маємо:

$$\frac{x^2}{h} = \text{const}; \quad x^2 = kh = 2ph.$$

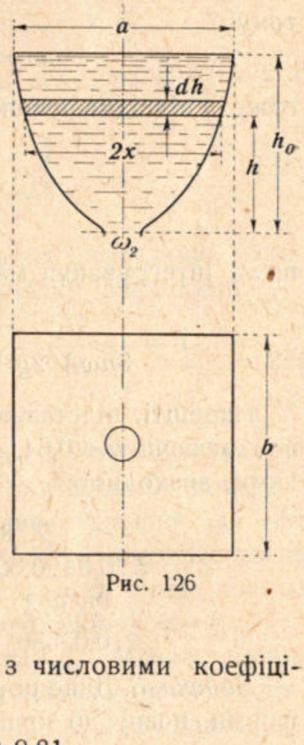

Рис. 126

Таким робом, бічні стінки посудини мають бути обрисовані за параболою. А що швидкість зниження рівня $= 1 \ \frac{см}{сек.} = 0{,}01 \ \frac{м}{сек.}$, то:

$$\frac{\mu^2\omega_2^2 2gh}{4b^2x^2} = 0{,}01^2 = 0{,}0001,$$

відки добуваємо рівнання параболи з числовими коефіцієнтами:

$$x^2 = \frac{\mu^2\omega_2^2 2g}{4 \cdot b^2 \cdot 0{,}0001} \cdot h = \frac{0{,}64^2 \cdot (0{,}00196)^2 \cdot 2 \cdot 9{,}81}{4 \cdot 4 \cdot 0{,}0001} \cdot h = 0{,}02012h. \qquad [28]$$

Для початкового моменту $2x_0 = a$; $h = h_0$ і, крім того, об'єм води дорівнює 1 $м^3$; тому

$$\frac{2}{3} ah_0 L = Q = 1,$$

відки

$$h_0 a = \frac{3}{4}.$$

Підставивши відси вартість $a=\frac{3}{4h_0}$ до співвідношення [28], маємо:

$$\frac{9}{64h_0^2}=0{,}02012h_0,$$

або

$$h_0^3=\frac{9}{64\,.\,0{,}02012}=6{,}834,$$

отже,

$$h_0=\sqrt[3]{6{,}834}=1{,}898\ \text{м},$$

а тепер

$$a=\frac{3}{4\,.\,h_0}=\frac{3}{7{,}592}=0{,}395\ \text{м}.$$

Час спорожнювання посудини, очевидно, дорівнюватиме:

$$T=189{,}8\ \textit{сек.}=3\ \textit{хв.}\ 9{,}8\ \textit{сек.}$$

Задача 4. Визначити форму посудини, в яку налито воду в кількості 1 $\textit{м}^3$, і яка спорожнюється через відтулину в дні так, що швидкість зниження рівня води, взагалі, обернено-пропорційна до напору, в початковий же період після того, як відкрито відтулину, вона дорівнює 1 $\frac{\textit{см}}{\textit{сек.}}$. Діяметр відтулини $d=5$ *см*; розмір посудини, нормальний до площини рисунку, сталий і дорівнює 0,5 *м*.

Розвязка. Швидкість зниження рівня можна подати взагалі, як

$$v=-\frac{dh}{dt}=\frac{\mu\omega_2\sqrt{2g}\cdot\sqrt{h}}{\omega},$$

або, означивши ширину посудини через $2x$, а довжину через b, маємо;

$$v=\frac{\mu\omega_2\sqrt{2g}\sqrt{h}}{2x\,.\,b}.$$

За умовами задачі, швидкість ця обернено пропорційна до напору; тому, назвавши коефіцієнт пропорційности k, одержуємо:

$$\frac{\mu\omega_2\sqrt{2g}\,.\,\sqrt{h}}{2xb}=\frac{k}{h},$$

відки знаходимо рівнання кривої, що вона обрисовує стінки посудини:

$$h = Bx^{\frac{2}{3}},$$

коли позначити $\left(\frac{2bk}{\mu\omega_2\sqrt{2g}}\right)^{\frac{2}{3}}$ через B.

Для початкового моменту відкриття відтулини, коли $h = h_0$ і $x = x_0$, за умовами завдання

$$\frac{k}{h_0} = 0{,}01 \text{ м},$$

а тому

$$h_0 = \left(\frac{2b\,.\,0{,}01}{\mu\omega_2\sqrt{2g}}\right)^{\frac{2}{3}} h_0^{\frac{2}{3}} x_0^{\frac{2}{3}},$$

відки, взявши $\mu = 0{,}64$ та поділивши обидві частини рівности на $h_0^{\frac{2}{3}}$ і піднісши до 3-го степеня, знаходимо:

$$h_0 = \left(\frac{2\,.\,0{,}5\,.\,0{,}01}{0{,}64\,.\,0{,}00196\,.\,4{,}429}\right)^2 x_0^2 = 3{,}24 x_0^2;$$

як наслідок, маємо ще:

$$k = 0{,}01 h_0 = 0{,}0324 x_0^2.$$

А що елементарний об'єм води в посудині, вирізаний горизонтальними площинами, проведеними від дна посудини на віддалі h і $h + dh$, можна подати в такому вигляді:

$$dq = 2xbdh = \frac{4}{3} Bbx^{\frac{2}{3}} dx,$$

то повний об'єм води в посудині до початкового рівня визначиться:

$$q = \frac{4}{3} B\,.\,b \int_0^{x_0} x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{4}{5} Bbx_0^{\frac{5}{3}}.$$

Цей об'єм за умовами задачі дорівнює 1 $м^3$, а тому:

$$\frac{4}{5} B\,.\,b\,.\,x_0^{\frac{5}{3}} = 1.$$

Внісши туди вартості B, b і k, знаходимо:

$$\frac{4}{5}\left(\frac{2 \,.\, 0{,}5 \,.\, 0{,}0324 x_0^2}{0{,}64 \,.\, 0{,}00196 \,.\, 4{,}429}\right)^{\frac{3}{2}} 0{,}5 x_0^{\frac{5}{2}} = 1,$$

відки після обчислень маємо:

$$x = 0{,}917$$

і далі:

$$h_0 = 3{,}24 x_0^2 = 3{,}24 \,.\, 0{,}917^2 = 2{,}725 \text{ м};$$

$$k = 0{,}0324 x_0^2 = 0{,}0324 \,.\, 0{,}917^2 = 0{,}0272;$$

$$B = \left(\frac{2b \,.\, k}{\mu\omega_2 \sqrt{2g}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2 \,.\, 0{,}5 \,.\, 0{,}0272}{0{,}64 \,.\, 0{,}00196 \,.\, 4{,}429}\right)^{\frac{2}{3}} = 2{,}88,$$

і, нарешті,

$$h = B x^{\frac{2}{3}} = 2{,}88 x^{\frac{2}{3}}.$$

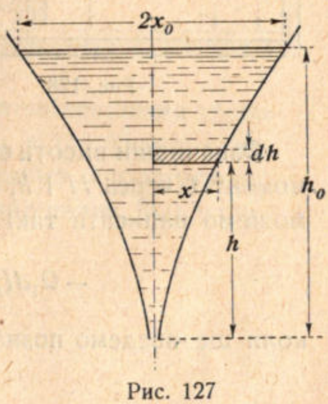

Рис. 127

Саму форму обрису посудини показано на рисункові 127 (збудовано на точках). Час цілковитого спорожнення посудини визначається із співвідношення:

$$dt = -\frac{\omega dh}{\mu\omega_2 \sqrt{2g}\sqrt{h}} = -\frac{2xbdh}{\mu\omega_2 \sqrt{2g}\sqrt{h}},$$

яке, після підставляння в нього вартости x, набере вигляду:

$$dt = -\frac{2bh^{\frac{3}{2}}\,dh}{\mu\omega_2 \sqrt{2g}\, B^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2bh \,.\, dh}{\mu\omega_2 \sqrt{2g}\, B^{\frac{3}{2}}};$$

підставивши в останнє рівнання числові вартості членів, що входять до нього, знаходимо:

$$dt = -\frac{2 \,.\, 0{,}5}{0{,}64 \,.\, 0{,}00196 \,.\, 4{,}429 \,.\, 2{,}88^{\frac{3}{2}}} \cdot h \,.\, dh = -36{,}9 h dh:$$

а тепер, інтегруючи, маємо:

$$T = 36{,}9 \int_0^{h_0} h dh = 18{,}45\,[h^2]_0^{h_0} = 18{,}45 \,.\, 7{,}425 = 137 \text{ сек.} \cong 2 \text{ хв. } 17 \text{ сек.}$$

§ 4. Перетікання води між двома посудинами

Є дві сполучені через відтулину з площею ω посудини (рис. 128), площі поперечних перекроїв яких Ω_1 і Ω_2. Початкові висоти рівнів води в посудинах над віссю відтулини хай будуть відповідно H_0 і h_0; вода перетікає з лівої посудини до правої, і треба визначити час, протягом якого в лівій посудині рівень знизиться до висоти H_1 над віссю відтулини, а в правій піднесеться до висоти h_1 над тією самою віссю.

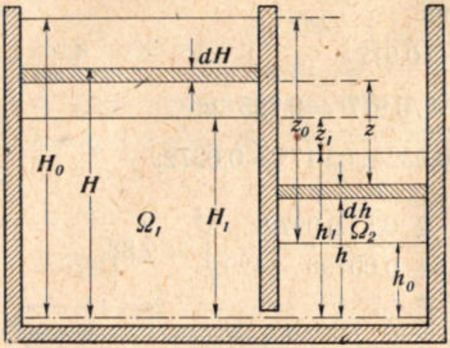

Рис. 128

Означивши висоти стояння рівня води в посудинах у якийсь момент t через H і h, ми для елементу часу dt, очевидно, можемо написати такі співвідношення:

$$-\Omega_1 dH = \Omega_2 dh = \mu\omega\sqrt{2gz}\,dt, \qquad [29]$$

коли ще введемо позначення:

$$H - h = z. \qquad [30]$$

Останнє співвідношення дає нам після диференціювання:

$$dH - dh = dz. \qquad [31]$$

Позначивши тепер dh з [29] через dH і підставивши знайдену вартість в [31], маємо:

$$dH + dH\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = dz,$$

або

$$dH\left(\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{\Omega_2}\right) = dz,$$

відки

$$dH = \frac{\Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2}\,dz. \qquad [32]$$

Встановивши цю вартість dH в [29], матимемо:

$$-\frac{\Omega_2\Omega_1}{\Omega_1+\Omega_2}dz=\mu\omega\sqrt{2gz}\,dt;$$

визначаємо відси dt:

$$dt=-\frac{\Omega_1\Omega_2}{\Omega_1+\Omega_2}\frac{dz}{\mu\omega\sqrt{2gz}},$$

і, інтегруючи у вказаних вище границях, при чому початок лічби часу відносимо знов до моменту, коли рівні були на висотах H_0 і h_0, маємо:

$$t=\frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\int_{z_1}^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{z}}\frac{\Omega_1\Omega_2}{\Omega_1+\Omega_2}, \qquad [33]$$

коли позначимо $H_0-h_0=z_0$ і $H_1-h_1=z_1$.

Для остаточної розвязки останнього співвідношення треба знати функціональну залежність Ω_1 і Ω_2 від z (наприклад, $\Omega_1=\psi(z)$ і $\Omega_2=f(z)$). Завдання знову значно спрощується, коли $\Omega_1=\text{const}$ і $\Omega_2=\text{const}$; тоді співвідношення [33] набирає вигляду:

$$t=\frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\cdot\frac{\Omega_1\Omega_2}{\Omega_1+\Omega_2}\int_{z_1}^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{z}},$$

а після інтегрування маємо:

$$t=\frac{2\Omega_1\Omega_2}{\mu\omega\sqrt{2g}(\Omega_1+\Omega_2)}[\sqrt{z_0}-\sqrt{z_1}]. \qquad [34]$$

Час (T) зрівнання рівнів настане, очевидно, при $z_1=0$ і буде:

$$T=\frac{2\Omega_1\Omega_2\sqrt{z_0}}{\mu\omega\sqrt{2g}\,(\Omega_1+\Omega_2)}; \qquad [35]$$

цей вираз за дуже великих відношень $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ перетворюється, очевидно, на вираз [25].

Задача про перетікання води з однієї посудини (камери, водойми) до другої часто трапляється в гідротехніці. Вкажемо, наприклад, на застосування цієї задачі підчас шлюзування річок, коли для безперешкодного проходу суден на порогуватих або взагалі мілких ділянках річки підносять рівень води в останній греблями, а утворені при цьому верхню (вище греблі) і нижче (нижче греблі) ділянки (б'єфи) з більш-менш значною ріжницею рівнів сполучають так званим **дериваційним каналом**, який має особливі, одну або кілька (коли ріжниця рівнів вища за 9—10*м*), камер (шлюзів), що закриваються з боку б'єфів воротами (звичайно, двопільні).

Загальне розташування злагоди бачимо на додаваному рисункові (рис. 129). Щоб щільно замикати ворота, треба, щоб останні відчинялись тільки проти течії, що так само примушує злагоджувати або в самих воротях, або в бічних стінках, обходячи ворота, відтулини (з деякими площами ω_1 і ω_2). Коли виникає потреба перевести судно, наприклад, з верхнього б'єфу в нижній, то відкривають відтулину (або відтулини) у верхніх воротях (ω_1) і наповнюють камеру водою до зрівнання рівнів води в останній і у верхньому б'єфі; одчинивши після цього верхні ворота (B_1) (це зробити тепер через відсутність напору вже легко), переводять судно з верхнього б'єфу до камери і знову зачиняють ворота, а разом із тим і відтулини в них; потім одкривають відтулини (ω_2) в нижніх воротях і спускають рівень води в камері до рівня води в нижньому б'єфі, після цього можна відчинити нижні ворота (B_2) і ввести судно в нижній б'єф.

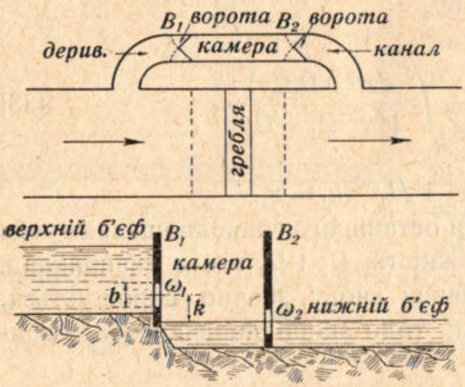

Рис. 129

Щоб перевести судно з нижнього б'єфу до верхнього, очевидно, відчиняти й зачиняти ворота доводиться у зворотному порядкові: коли камера була повна води до рівня верхнього б'єфу, то спочатку відкривають відтулини в нижніх воротях (B_2) і спускають воду до рівня нижнього б'єфу; відчинивши потім нижні ворота, проводять судно до камери, зачиняють нижні ворота, закривають у них відтулини і, відкривши відтулини у верхніх воротях, наповнюють камеру водою до рівня верхнього б'єфу, коли можна відчинити верхні ворота й вивести судно з камери у верхній б'єф. Як бачимо із щойно викладеного, питання про продуктивність шлюзу або про кількість перепускуваних через шлюз протягом доби суден сходить на завдання визначити час спорожнювання й наповнювання камери водою за змінного напору; при цьому, наповнювання камери водою, строго кажучи, треба було б розбити на три окремі фази: 1) вільне витікання, коли вода за незмінного напору піднесеться на висоту $k - \frac{b}{2}$, де k є вертикальна віддаль між рівнем води в камері (рівень нижнього б'єфу) і віссю відтулини у воротях B, а b — висота цієї відтулини; 2) витікання, коли рівень води в камері підноситься на висоту b; 3) перетікання під водою, протягом якого рівень води в камері підноситься від верхньої окрайки відтулини до рівня води у верхньому б'єфі. З трьох перелічених фаз друга найскладніша через недостатню виявленість коефіцієнтів витікання для такого випадку і не вільна від помилок. Тому звичайно, обчислення спрощують, вважаючи, що вільне витікання продовжується до центру відтулини у воротях, а відси вже вважають перетікання під водою.

У випадку недостатности однієї камери, що трапляється, коли ріжниця рівня води у верхньому й нижньому б'єфах велика для однієї камери, злагоджують кілька камер—2, 3, 4 (наприклад, за проєктом професора І. Г. Александрова*) утилізації водної енергії Дніпрових порогів у звязку з шлюзуванням припущено, за загальної ріжниці рівнів у б'єфах в 36,89 *м*, збудування 4-камерного шлюзу з падінням одного ступеня в 9,22 *м*), відокремлених один від одного ворітьми. Наповнювання верхньої камери й спорожнювання нижньої в цьому випадку переводитиметься так само, як і в попередньому однокамерному шлюзі, перетікання ж між двома камерами (у випадку двокамерного шлюзу) після закриття крайніх—верхніх і нижніх—воріт і відкриття відтулини в середніх воротях, треба б поділити на дві фази: 1) перша відбувається, поки рівень води в другій камері піднесеться до середини відкритої в середніх воротях відтулини, 2) друга продовжується потім до цілковитого зрівнання рівнів води в обох камерах.

*) И. Г. Александров. Днепровское строительство и его экономическое значение. Харків, 1925 р., стор. 19.

Задача 5. Дві бочки діяметром $D=2$ *м* і довжиною $L=4$ *м* поставлено поруч; одна бочка повна води, друга порожня; визначте час, потрібний для перетікання води з першої бочки до другої, доки рівні води в них зрівняються; перетікання відбувається через сифон, діяметром 5 *см* і завдовжки 3 *м*.

Розвязка. Для розвязки скористуємось з рівнання [33], що в ньому нижня границя інтегрування $z_1=0$:

$$t=\frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\int_0^z\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Зважаючи на те, що за умовою діяметри бочок однакові, підчас перетікання води площі поперечних перекроїв бочок на одночасних рівнях води будуть так само однакові, тоб-то $\omega_1=\omega_2$; це легко бачити й безпосередньо з рисунку 130, де, очевидно, в перший-ліпший момент $2b_1=2b_2$. За рисунком:

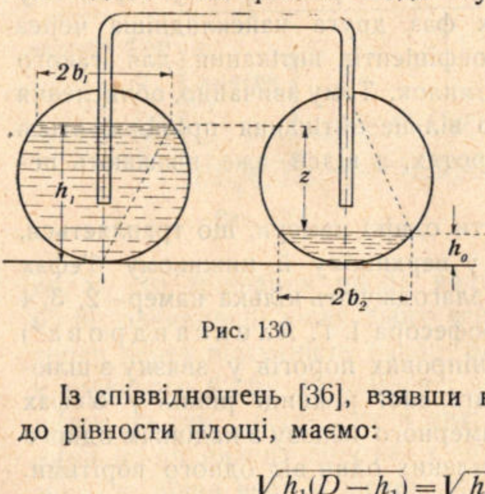

Рис. 130

$$\left.\begin{aligned}b_1&=\sqrt{h_1(D-h_1)}\\ b_2&=\sqrt{h_0(D-h_0)}\end{aligned}\right\}, \qquad [36]$$

$$h_1-h_0=z. \qquad [37]$$

Із співвідношень [36], взявши на увагу вищесказане що до рівности площі, маємо:

$$\sqrt{h_1(D-h_1)}=\sqrt{h_0(D-h_0)},$$

або

$$h_1(D-h_1)=h_0(D-h_0),$$

відки легко добуваємо:

$$h_1+h_0=D. \qquad [38]$$

Тепер з [37] і [38] виходить:

$$h_1=\frac{D+z}{2},$$

$$h_0=\frac{D-z}{2}.$$

Вставивши останні вартості h_1 і h_0 в рівнання [36], знаходимо:

$$b_1 = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - z^2},$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - z^2},$$

отже, для площ ω_1 і ω_2 маємо вираз:

$$\omega_1 = \omega_2 = 2b_1L = 2b_2L = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{D^2 - z^2}\,.\,L = \sqrt{D^2 - z^2}\,.\,L.$$

Таким робом, для часу цілковитого зрівнання рівнів води в бочках матимемо співвідношення:

$$T = \frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\int_0^{z_0}\frac{\omega_1^2 dz}{2\omega_1\sqrt{z}} = \frac{1}{2\mu\omega\sqrt{2g}}\int_0^{z_0}\frac{\omega_1 dz}{\sqrt{z}} =$$

$$= \frac{L}{2\mu\omega\sqrt{2g}}\int_0^{z_0}\frac{\sqrt{D^2 - z^2}}{\sqrt{z}}\,.\,dz. \qquad [39]$$

Коефіцієнт μ визначаємо з таких міркувань: утрата в напорі підчас перетікання води в сифоні складається з утрат: за входу, за виходу, в заокругленнях і по довжині сифону, і, на підставі даних розділу VI, її можна визначити, як

$$h_w = \frac{v^2}{2g}\left(0{,}5 + 1 + 2\,.\,0{,}25 + 0{,}025\,\frac{3}{0{,}05}\right) = 3{,}5\,\frac{v^2}{2g}\cdot$$

А що кількість води протічної в сифоні можна, очевидно, подати у виразі $\omega\sqrt{2g\left(z - 3{,}5\,\frac{v^2}{2g}\right)}$, де ω є площа поперечного перекрою сифону, то, заміняючи ще в цьому виразі швидкість v через кількість води (Q), маємо:

$$Q = \omega\sqrt{2g\left(z - 3{,}5\,\frac{Q^2}{\omega^2 2g}\right)},$$

відки

$$Q^2 = \omega^2 2gz - 3{,}5Q^2$$

і далі

$$Q^2 = \frac{\omega^2 2gz}{4{,}5},$$

а тепер:

$$Q=\frac{1}{\sqrt{4,5}}\,\omega\sqrt{2gz}=\frac{1}{2,12}\,\omega\sqrt{2gz}\cong 0,47\omega\sqrt{2gz},$$

і ми бачимо, що для даного випадку можна взяти:

$$\mu=0,47.$$

Що до $\int\limits_0^{z_0}\frac{\sqrt{D^2-z^2}}{\sqrt{z}}\,dz$, то ми його знайдемо, розклавши в ряд підінтегрального виразу:

$$\frac{\sqrt{D^2-z^2}}{\sqrt{z}}=\sqrt{\frac{D^2-z^2}{z}}=\left(\frac{D^2}{z}-z\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{D^2}{z}\right)^{\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{D^2}{z}\right)^{\frac{1}{2}-1}z-\frac{1}{8}\left(\frac{D^2}{z}\right)^{\frac{1}{2}-2}z^2\ldots=\frac{D}{z^{\frac{1}{2}}}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{D}-\frac{1}{8}\frac{z^{\frac{7}{2}}}{D^3}\ldots,$$

отже,

$$\int\limits_0^{z_0}\frac{\sqrt{D^2-z^2}}{\sqrt{z}}\,dz=\int\limits_0^{z_0}\left[\frac{D}{z^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{D}-\frac{1}{8}\frac{z^{\frac{7}{2}}}{D^2}\cdots\right]dz=$$

$$=\left[2Dz^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{5}\frac{z^{\frac{5}{2}}}{D}-\frac{1}{36}\frac{z^{\frac{9}{2}}}{D^3}\cdots\right]_0^2=5,64-0,56-0,075-\cdots\cong 5,$$

а тепер із [39] виходить, що час, потрібний для зрівнання рівня води в бочках буде:

$$T=\frac{L\,.\,5}{2\mu\omega\sqrt{2g}}=\frac{4\,.\,5}{2\,.\,0,47\,.\,0,00196\,.\,4,429}=2451\,\textit{сек.}=$$

$$=40\,\textit{хвил.}\ 51\,\textit{сек.}$$

§ 5. Час спорожнювання водойм неправильної форми

Коли доводиться визначати час спорожнювання водойм неправильної форми, можна робити так. Хай нам запропоновано визначити час спорожнювання ставу виображеного на рисункові (рис. 131). Ввесь став поділяємо горизонтальними площинами на шари; що більша кількість останніх, то точніші будуть наші підрахунки. Хай кількість шарів буде n. З попередніх промірів і здіймань ставу в горизонталях виявляються поперечні перекрої ставу й площі шарів, отже, і об'єми води в кожному шарі; хай вони будуть відповідно Q_1, Q_2, $Q_3, \ldots, Q_n$. Хай так само середні напори для кожного шару будуть відповідно H_1, H_2, $H_3, \ldots, H_n$. Коли припустити,

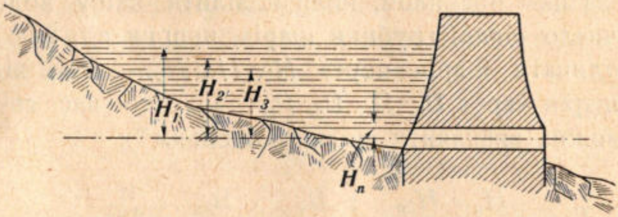

Рис. 131

що завдання про витікання кожного шару вже розвязане, і ми знаємо часи витікання шарів t_1, t_2, $t_3, \ldots, t_n$, то, очевидно, можемо написати низку таких співвідношень:

$$Q_1 = \mu\omega\sqrt{2gH_1} \,.\, t_1,$$

$$Q_2 = \mu\omega\sqrt{2gH_2} \,.\, t_2,$$

$$Q_3 = \mu\omega\sqrt{2gH_3} \,.\, t_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q_n = \mu\omega\sqrt{2gH_n} \,.\, t_n,$$

де ω є площа відтулини водоперепускної труби, μ — коефіцієнт витрати. Із щойно написаних співвідношень маємо часи витікання кожного шару:

$$t_1 = \frac{Q_1}{\mu\omega\sqrt{2gH_1}},$$

$$t_2 = \frac{Q_2}{\mu\omega\sqrt{2gH_2}},$$

$$t_3 = \frac{Q_3}{\mu\omega\sqrt{2gH_3}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t_n = \frac{Q_n}{\mu\omega\sqrt{2gH_n}},$$

відкладаючи які, матимемо час спорожнювання ставу:

$$T=\sum_{i=1}^{i=n} t_i=\frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left[\frac{Q_1}{\sqrt{H_1}}+\frac{Q_2}{\sqrt{H_2}}+\frac{Q_3}{\sqrt{H_3}}+\cdots+\frac{Q_n}{\sqrt{H_n}}\right]. \quad [40]$$

Точніший розрахунок часу спорожнювання водойм матимемо, коли скористуємося з Сімпсонового правила. Як відомо за цим правилом, коли поділити нашу водойму на парне число рівної грубини шарів, наприклад, $2n$, і визначити ординати шарів через $H_0, H_1, H_2, \ldots, H_{2n}$, відповідні площі шарів через $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots \Omega_{2n}$, то час спорожнювання можна визначити співвідношенням*):

$$T=\frac{H_0-H_{2n}}{3.2n\mu\omega\sqrt{2g}}\left\{\frac{\Omega_0}{\sqrt{H_0}}+\frac{\Omega_{2n}}{\sqrt{H_{2n}}}+4\left[\frac{\Omega_1}{\sqrt{H_1}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\Omega_3}{\sqrt{H_3}}+\cdots\right]+2\left[\frac{\Omega_2}{\sqrt{H_2}}+\frac{\Omega_4}{\sqrt{H_4}}\cdots\right]\right\} \quad [41]$$

---

*) За Сімпсоновим правилом, для наближеного обчислення інтегралу $\int_{z_{2n}}^{z_0} f(z)\,dz$ треба поділити промежок z_0-z_{2n} на парне число рівних частин, для кожної одержаної вартости $z_0, z_1\ z_2, \ldots, z_{2n}$ визначити в якийсь спосіб вартість підінтегральної функції $f(z)$, і коли ці вартості будуть $f(z_0), f(z_1), f(z_2), \ldots, f(z_{2n})$, то тоді

$$\int_{z_{2n}}^{z_0} f(z)\,dz=\frac{z_0-z_{2n}}{3.2n}\left\{f(z_0)+f(z_{2n})+4\left[f(z_1)+f(z_3)+\cdots\right]+\right.$$

$$\left.+2\left[f(z_2)+f(z_4)+\cdots\right]\right\}.$$

У нашому випадку, очевидно, доводиться наближено визначати величину $\int_{H_{2n}}^{H_0}\frac{\Omega dh}{\sqrt{h}}$ (див. співвідношення [22] за $k=0$) отже, для кожного шару з ординатами $H_0, H_1, \ldots, H_{2n}$ і з площами перекроїв шарів Ω_0, $\Omega_1, \ldots, \Omega_{2n}$ вартості підінтегральної функції будуть:

$$f(z_0)=\frac{\Omega_0}{\sqrt{H_0}};\quad f(z_1)=\frac{\Omega_1}{\sqrt{H_1}};\cdots;f(z_{2n})=\frac{\Omega_{2n}}{\sqrt{H_{2n}}}.$$

§ 6. Змінна течія в трубах *)

Уявімо собі, що в горизонтально розташованій трубі (рис. 132) внутрішнього радіюсу R, стінки якої мають грубину d (з матеріялу з модулем пружности, що дорівнює E), рухається вода з якоюсь певною швидкістю v у напрямі, зворотному до додатнього напряму x-ів. Коли в шарі, що є на віддалі x од початку координат (кінець труби) тиск буде p, то основне рівнання [2] руху рідини для даного випадку набере вигляду (нехтуючи силою ваги):

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} = \frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad [42]$$

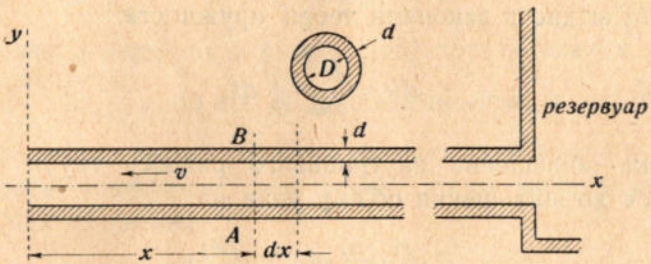

Рис. 132

Припустімо, що в деякий момент якийсь збудник подіяв на цей шар води, що рухається в трубі, і змінив і швидкість руху і тиск (наприклад, трубу відразу закрито або відкрито більше, як нормально й т. и.), і хай тиск при цьому збільшився з p_0 до $p_0 + \frac{\partial p}{\partial t}dt$. Під впливом такого збільшення тиску шар рідини грубиною dx стиснеться уздовж оси на якусь величину λ_1.

Крім того, під впливом того самого збільшення тиску, труба в цьому місці розшириться в радіяльному напрямі, це

*) Н. Е. Жуковский. Бюллетени Политехн. Общ. 1899 р. Ч. 5.

L. Allievi. Allgemeine Theorie über die verändliche Bewegung des Wassers in Leitungen. Berlin. 1909.

В. Н. Пинегин. К вопросу о скорости распространения колебательных движений в жидкостях и газах, заключенных в трубы, в связи с упругостью материала последних. Журнал Прикладной Физики. Том I, выпуски 1—4 і 5—8. Москва, 1925.

R. Escher. Über den Wasserschlag. Die Turbine. 1910. H. 1.

спричиниться до нового стиску шару dx уздовж оси x на величину λ_2, так що цілковитий стиск шару рідини буде:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Перший стиск, застосовуючи до води закон Гуків, можна подати в такому вигляді:

$$\lambda_1 = \frac{dx}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} dt,$$

де ε є модуль пружности води, що дорівнює $2{,}07 \,.\, 10^8 \frac{кг}{м^2}$ (при 0°C за Allievi і Grassi). Другий стиск утвориться із збільшення dR радіюсу труби за збільшення тиску на $\frac{\partial p}{\partial t} = dt$; згідно з законами теорії пружности:

$$dR = \frac{R^2}{Ed} \frac{\partial p}{\partial t} dt.$$

Таке збільшення внутрішнього радіюсу труби спричиняється до збільшення об'єму води на

$$\pi \,.\, D \,.\, dR \,.\, dx = \pi R^2 \lambda_2,$$

якщо через D позначити внутрішній діяметр труби, бо при цьому повинна на величину λ_2 зменшитись довжина шару dx. Відси:

$$\lambda_2 = \frac{D \,.\, dR \,.\, dx}{R^2} = \frac{Ddx}{Ed} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} dt,$$

отже,

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = dx \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{Ed} \right] \frac{\partial p}{\partial t} dt. \qquad [43]$$

В наслідок стиску шару dx на величину λ буде зменшення швидкости руху води в перекрої AB, яке знайдемо із співвідношення:

$$\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dt - vdt = \lambda.$$

Порівнюючи останній вираз з [43], матимемо:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{Ed} \right]. \qquad [44]$$

Коли тепер у виразах [42] і [44] ввести замість тиску висоту тиску за співвідношенням $p=\delta y$, отже, $\frac{\partial p}{\partial t}=$ $=\delta\frac{\partial y}{\partial t}$ і $\frac{\partial p}{\partial x}=\delta\frac{\partial y}{\partial x}$, то матимемо:

$$\left.\begin{aligned} g\frac{\partial y}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial t}-v\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=\delta\frac{\partial y}{dt}\left[\frac{1}{\varepsilon}+\frac{D}{Ed}\right]\end{aligned}\right\}. \qquad [45]$$

Вводячи позначення:

$$\frac{\delta}{g}\left[\frac{1}{\varepsilon}+\frac{D}{Ed}\right]=\frac{1}{a^2} \qquad [46]$$

і нехтуючи в першому з рівнань [45] другим членом правої частини $\left(-v\frac{\partial v}{\partial x}\right)$, бо він не впливає помітно на остаточний результат через взагалі невеликі вартості швидкости v проти швидкости поширення змін тиску, легко приводимо рівнання [45] до вигляду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}&=g\,\frac{\partial y}{\partial x} & & & a^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\ & & &\text{або} & & \\ \frac{\partial v}{\partial x}&=\frac{g}{a^2}\frac{\partial y}{\partial t} & & & a^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}. \qquad [47]$$

Останні два рівнання являють собою звичайні диференціяльні рівнання поширення коливальних рухів, аналогічних до звукових, у будь-якому оточенні й мають спільні інтеграли вигляду:

$$y=f_1(x+at)+f_2(x-dt);$$

$$v=\psi_1(x+at)+\psi_2(x-at).$$

За окремі інтеграли будуть вирази:

$$\left.\begin{aligned} y&=y_0+F\left(t-\frac{x}{a}\right)\\ v&=v_0-\frac{g}{a}F\left(t-\frac{x}{a}\right)\end{aligned}\right\}, \qquad [48]$$

відки, виключивши функцію $F\left(t-\frac{x}{a}\right)$, маємо:

$$y = y_0 + \frac{a(v_0 - v)}{g}. \qquad [49]$$

Останнє рівняння дає ключ розвязати, наприклад, питання про зміну тиску в трубі, коли кінець труби закривається засувкою (водопровідні труби, труби, що підводять воду до турбін і т. и.); з нього легко побачити, що за вказаного закриття, коли змінна швидкість (v) води в трубі (v_0 — початкова швидкість води в трубі) зменшується до 0 (за цілковитого закриття труби), відбувається збільшення тиску до найвищої величини:

$$\frac{av_0}{g}$$

поверх нормального тиску y_0; коли б, навпаки, засувкою можна було відкрити відтулину труби більш нормального, за якого швидкість води в трубі v_0, то тоді v почало б ставати більше за v_0, і ми мали б у трубі зниження тиску проти нормального тиску y_0.

Зважаючи на те, що швидкість витікання води з труби (назвемо її u) і звязана з нею через співвідношення $u\omega = v\Omega$ (де ω є площа перекрою вихідної відтулини труби, а Ω — площа перекрою останньої) швидкість у трубі v є функції не тільки змінної величини ω, але й підвищення або зниження тиску, що виникає при цьому, зміни тиску, яке дає рівняння [49], не визначається звичайною лінійною залежністю від швидкости v, а є складніша функція, а саме функція 2-го порядку, яка дає в координатах y і v або y і t, коли ω або v змінюється пропорційно до часу, параболічну криву OA (рис. 133).

Проте, вказане підвищення тиску (за закриття вихідної відтулини труби) може розвиватись безпосередньо лише тоді, коли труба буде безконечно довга (теоретично); справді, через завжди конечну довжину труби явище відбувається в дуже зміненому вигляді, залежно від довжини труби й часу (τ) закривання кінця останньої. Справді, виникле підвищення тиску не може бути лише на кінці труби, воно, очевидно, почне поширюватись трубою від цього кінця до резервуару, що з нього труба виходить, і поширюватиметься цей підвищений тиск з швидкістю a; що, справді, a є швидкість поширення підвищеного тиску (ударної хвилі), це легко можна побачити, з одного боку, з цього, що за частинний інтеграл рівнання [47] є також вираз:

$$x = at + c$$

(щоб у цьому пересвідчитись, досить підставити цю вартість x у рівнання [47]), до якого тиск y не входить, а це значить, що

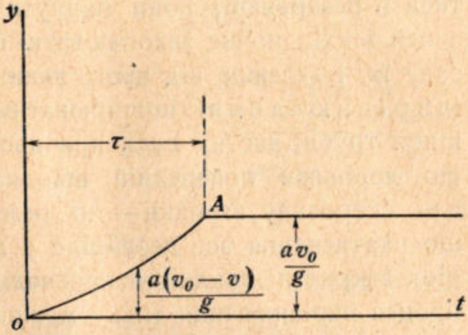

Рис. 133

коли переміщуватися в трубі зі швидкістю a, то ми побачимо той самий тиск, тоб-то ми переміщуватимемося зі швидкістю поширення тиску; з другого боку, на те, що a є швидкість поширення тиску, вказує і самий вираз для a (див. [46]):

$$a = \sqrt{\frac{\frac{g}{\delta}}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{Ed}}}, \qquad [50]$$

який при $E = \infty$, — що рівнозначне припущенню про відсутність впливу стінок на увесь розглядуваний процес, — перетворюється в

$$a = \sqrt{\frac{g\varepsilon}{\delta}},$$

а цей вираз є, як відомо, швидкість поширення звуку в воді. Вартість a (за [50]) для труб, що ми маємо в практиці — залізних, чавунних, олив'яних, пересічно дорівнює $1000\ \frac{м}{сек.}$, — це легко перевірити звичайним підрахунком.

Підвищений тиск, що з такою швидкістю поширюється до резервуару й має, очевидно, форму, показану на додаваному рисункові, в певний момент, через $\frac{L}{a}$ секунд, де L є довжина труби, — дійде до резервуару; одначе, дійшовши, він не залишиться й надалі незмінний, бо частки рідини, що підійшли вже з труби до резервуару, перебувають з боку часток, що надходять ззаду під більшим тиском, ніж тиск в резервуарі; вони почнуть відходити до резервуару, а цей відхід почне захоплювати що-далі, то нові шари позаду їх, і залежне від цього зниження тиску до нормального (вирівнювання) поширюватиметься від резервуару до кінця труби; частки води при цьому одержують швидкість, що дорівнює попередній швидкості течії до кінця труби, але скеровану навпаки — до резервуару (ми припускаємо, що надтиснення все перейшло у швидкість, як раніш у період закриття швидкість переходила в надтиснення). Самий процес вирівнювання тиску можна уявити собі так, що коли надтиснення (додатня хвиля) дійде до резервуару, з останнього ніби почне рухатись у напрямі до кінця труби знижений тиск, як від'ємна хвиля, вирівнюючи тиск, як це показано на додаваних рисунках (рис. 134).

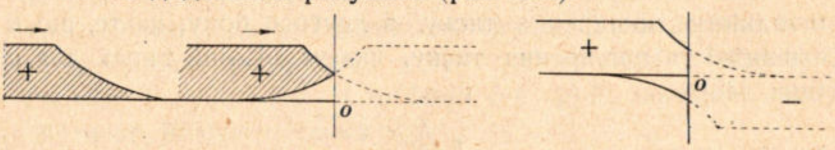

Рис. 134

Коли хвиля зниженого тиску, що вона вирівнює тиск у трубі й рухається до кінця труби, досягне, нарешті, останнього $\left(\text{знову через } \frac{L}{a}\, \textit{сек.}\right)$ в той час, як відтулину вже цілком закрито, то, зважаючи на те, що всі частки води рухаються в напрямі до резервуару, і новій воді до кінця труби надходити нема відки, в останньому почне виявлятись дальше розрідження, отже, і дальше зниження тиску, що дорівнює, очевидно, своєю величиною прибулому розрідженню. Процес можна уявити, як це показано на додаваному рисункові (рис. 135) таким робом, що до прибулої хвилі додається ніби нову того самого знаку, яка цілком симетрична що до точки O (кінець труби) з першою хвилею. Прибула хвиля розрідження в точці O, не змінюючись, ніби відбивається, і відкинена хвиля складається з прибулою. За додаваним рисунком, щоб одержати повну картину стану тиску, ми повинні взяти алгебричну суму трьох виображених хвиль.

Як тільки відбита хвиля дійде внутрішнього кінця труби (біля резервуару), її знову відкинеться, але вже на цей раз із зміною знаку, тоб-то вона спричиниться там до хвилі додатнього знаку, яка йтиме до зовнішнього кінця і загасить зниження тиску, і т. и.

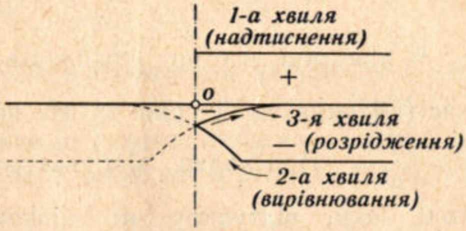

Рис. 135

Задача 6. Припустімо тепер, що нам відомий вигляд кривої тиску (крива OA рис. 133) для зовнішнього кінця труби підчас (τ) закривання й підчас перебігу хвилі вперед і назад $\left(T_e = \dfrac{2L}{a}\right)$; треба визначити процес зміни тиску протягом довшого часу в тому самому кінці.

Розвязка. Хай час закриття $\tau < \dfrac{2L}{a}$, тоді зворотна хвиля, очевидно, приходить уже тоді, коли відтулину закрито. Процес зміни тиску ми матимемо, коли уявимо, що кожна хвиля тиску, коли виникла, залишається незмінна, і кожна відкинена хвиля, що вона самостійно існує, складається з першою. До першої ударної хвилі [1] підходить (рис. 136) зворотна хвиля [2] (противдар або вирівняльна хвиля) з таким запізненням, що верх її підходить до точки O через межичасся T_e. Відразу ж виникає відбита (рефлективна) хвиля [3], яка з другою [2] має однаковий знак. Після впливу наступного межичасся, яке дорівнює T_e, підходить додатня хвиля [4], яка рефлектує так само додатню хвилю [5]. Коли взяти тепер алгебричну суму ординат усіх цих хвиль, то матимемо відшукувану картину процесу зміни тиску на кінці труби — криву $Oabcde$; в результаті матимемо несиметричні хвилі вигляду: $OabO_1$, $O_1cdO''\ldots$, які мають висоту піднесення $+h$ і $-h$, і повне тривання

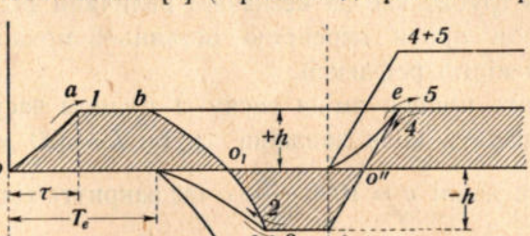

Рис. 136

хитання:

$$T = 2T_e = \frac{4L}{a} \cdot$$

В практиці частіше трапляється другий випадок, коли час (τ) закриття більший за час пробігу хвилі $\left(\frac{2L}{a}\right)$, тоб-то $\tau > \frac{2L}{a} \cdot$ Противдар відбувається в цьому випадку ще тоді, коли відтулину не цілком закрито, отже, крива тиску не може цілком розвинутись. Перібільшення тиску не підноситься тепер вище за ту вартість, яку матимемо з кривої тиску для часу $T_e = \frac{2L}{2}$, бо противдар зупиняє дальше підвищення тиску. Але й тут противдар рефлектує і відкидається назад до резервуару, від якого знову відкидається, але вже зі зміною знаку, і т. д., і т. д.; отже, за достатньо довгого часу закриття труби або за достатньо короткого часу перебігу він може не один раз повернути раніш, як відбудеться цілковите закриття відтулини труби. Звичайно, поки відтулину не закрито цілком, рефлексія на зовнішньому кінці труби не може бути цілковита, бо частину енергії викидається через відтулину назовні, разом з водою, що витікає з труби, але за незначної величини відтулини на кінці труби проти перекрою останньої можна знехтувати недовершеністю рефлексії.

Задача 7. Дослідіть процес зміни тиску з плином часу на кінці труби у випадку, коли довжина труби $L = 500$ *м*, швидкість поширення хвилі $a = 1000 \frac{м}{сек.}$, час закриття відтулини $\tau = 4$ *сек.*

Розвязка. Через те, що час перебігу хвилі для даного випадку становить 1 *сек.*, то підвищення тиску вже через 1 *сек.* перериває противдар, і тиск не підвищується вище відповідної вартости h_0 (рис. 137); після цього він спадає, бо до противдару прилучається рефлекс. Але, скоро надходить додатня хвиля [4], остання разом із її рефлексом знову спричинюється до підвищення тиску, і останній досягає свого максимуму (h_1) в момент переходу від'ємної хвилі [6]. Цей другий максимум трохи більший за перший. В момент, коли закриття закінчилось, тиск має певну вартість h_2. З цього моменту почнуться регулярні хитання несиметричного виду, але з піднесеннями і зниженнями однієї вартости $(+h_2)$ і $(-h_2)$ і триванням хитання $2T_e = \frac{4L}{a}$.

Справді, звичайно явище відбувається, як уже було сказано раніш, трохи инакше, бо що більш відкрито трубу, то недовершеніш відбуваються рефлекси хвиль на кінці труби; крім того, за перебігу хвиль виникає зовнішнє тертя, яке

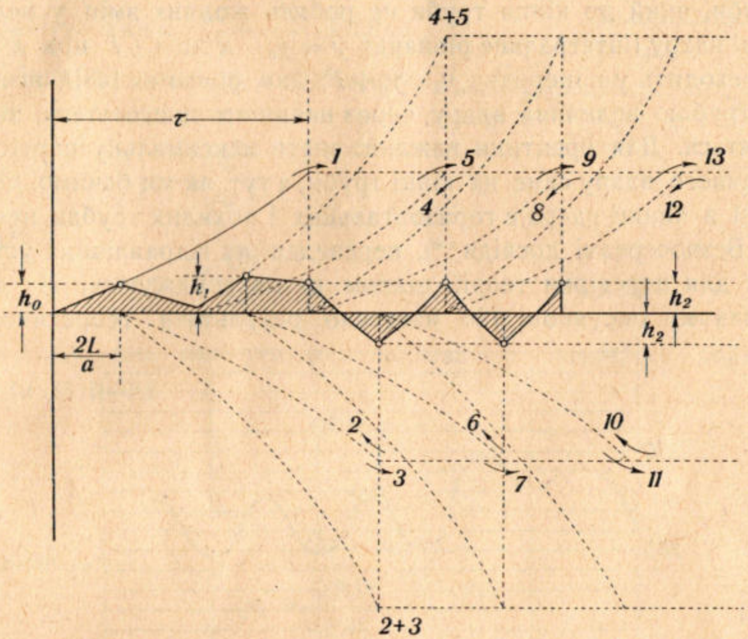

Рис. 137

трохи знижує швидкість їхнього поширення, отже, і величину вдару; але, як показали досвіди Н. Є. Жуковського на трубах московського водопроводу, збочування від викладеної теорії дуже незначні і, у всякому разі, не позбавляють її значення для практичної застосованости.

Між иншим, на викладеній теорії засновано злагодження приладу до визначення місця витікання води у водопровідних трубах. Прилад цей, що його запропонував іще сам Жуковський, і який потім зазнав деяких змін, дуже поширений в американській водопровідній практиці *), дає змогу з більшою точністю (до 3 *м*) визначити місце пошкодження труби за швидкістю повертання вдарної хвилі, що спускається трубою й відбувається в місцях пошкодження.

Підводячи воду до турбін в середньо-напірних і високонапірних уставах, доводиться мати справу з трубами похилими (під кутом α) до горизонту. Стосовно до цього випадку в перше з основних рівнань [47] підійде додатковий член виду $+g \sin \alpha$, залежний від складової ваги води вдовж труби, який до кінця труби не робить жодних змін у величині вдару (інтегральне рівнання $y = y_0 - x \sin \alpha + F$ при $x = 0$ переходить у попереднє $y = y_0 + F$; див. рівнання [48]), вгору ж трубою величина вдару, через наявність цього члена, знижується. Для практики важливо знати максимальну вартість водяного вдару саме на кінці труби, а тут, як ми бачимо, ріжниці в явищі вдара в горизонтальних і похилих трубах нема.

Безпосередні досвіди **), переведені на гідравлічних уставах для перевірки теорії, цілком це потверджують. На додаваному рисункові 138 нанесено результати теоретичних

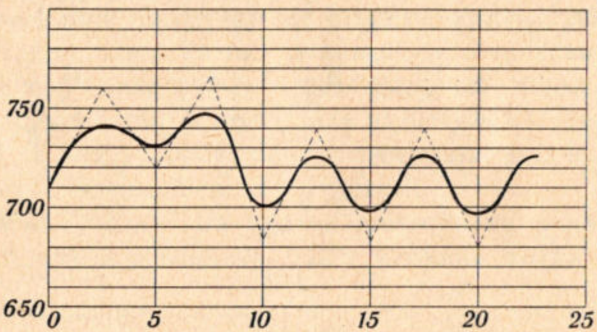

Рис. 138

підрахунків явищ удару (пунктирна крива) й результати досвідів (суцільна крива). Як бачимо, досвідна крива ввесь

*) Опис приладу Жуковського можна знайти в „Трудах 4-го русского водопроводного съезда“ 1899 р. і в „Бюллетенях Политехнического О-ва“ (1899 р., ч, 5), а змінених конструкцій в:

a) Engineering News. Sept. 11. 1913, стор. 515.

b) Journal of the New England. Water Works Assotiation. 1913, стор. 422.

**) R. Neeser Coups de bélier dans les conduites. Bulletin Technique de la Suisse Romande. 1910 p.

A. Strickler. Zeitschr. für das gesammte Turbinenwesen. 1915. S. 229.

час трохи відстає від теоретичної, але тим самим підвищується певність теорії для практичного прикладання.

Зважаючи на те, що повторне підвищення (h_1) тиску (див. попередній рисунок і останній) трохи більше за підвищення тиску h_0, для грубого підрахунку величини вдару можна брати, замість параболічної кривої підвищення тиску за закривання відтулини труби, пряму лінію; тоді, згідно з рисунком (рис. 139), підчас закривання відтулини в τ *сек.*, за перебігу хвилі $T_e = \dfrac{2L}{a}$ можна підвищення тиску ($y_\partial = ab$) визначити із співвідношення:

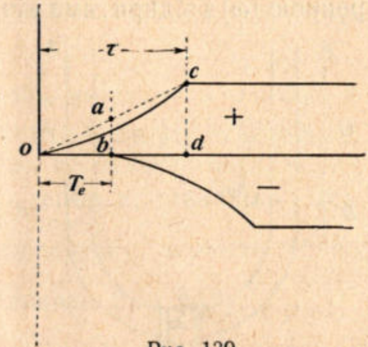

Рис. 139

$$\frac{ab}{cd} = \frac{Ob}{Od},$$

відки

$$y_\partial = cd\,\frac{Ob}{Od};$$

але тому, що, припускаючи нормальну швидкість води в трубі за рівну v_0,

$$cd = \frac{av_0}{g},$$

$$Ob = T_e = \frac{2L}{a},$$

$$Od = \tau,$$

матимемо:

$$y_\partial = \frac{av_0 2L}{ga\tau} = \frac{2}{g}\,\frac{v_0 L}{\tau}. \qquad [51]$$

Задача 8. Довжина труби, що підводить воду до турбіни, $L = 200$ *м*, швидкість води в трубі $v_0 = 2\ \dfrac{м}{сек.}$, час закриття відтулини труби $\tau = 8$ *сек.* Визначте максимальне підвищення тиску.

Розвязка. За попереднім підвищення тиску:

$$y_\partial = \frac{2\,.\,2\,.\,200}{9{,}81\,.\,8} = 10{,}194\ м \cong 1\ атм.,$$

замість підвищення тиску за раптово зачиненої труби:

$$y_м = \frac{1000\,.\,2}{9{,}81} = 203{,}88\ м \cong 20\ атм.$$

§ 7. Коливальний рух води

З коливальних рухів води, що мають велике значення в практиці (коливальні рухи в повітряних ковпаках толокових смоків, коливальні рухи в зрівняльних резервуарах гідравлічних устав, то-що), розгляньмо тільки найпростіший рух. Припустімо, що маємо вигнуту, як дуга, трубку сталого перекрою (ω) з відкритими кінцями, зверненими догори (рис. 140).

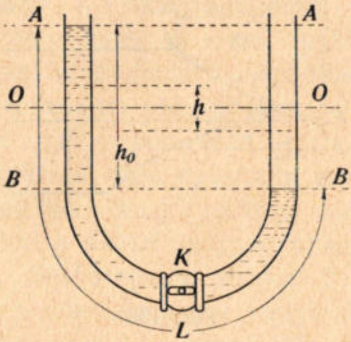

Рис. 140

Внизу трубки є дросельний хлипак (K), який у початковий момент закриває трубку.

В трубку налито води, яка в лівому коліні стоїть на рівні AA, а в правому на рівні BB. Віддаль рівнів AA і BB між собою дорівнює h_0. Якщо відкрити хлипак K, то вода під впливом первісного напору h_0 почне перетікати з лівого коліна до правого, рівень води в першому почне знижуватись, а в правому підвищуватись, і таким робом, напір (потенціяльна енергія), що під ним відбувається перетікання, буде що-далі зменшуватись і цілком зникне, коли рівні зрівняються (положення OO), швидкість (кінетична енергія), що утворюється коштом напору, де-далі, то більш зростає й досягає максимуму за того самого середнього положення OO; очевидно, рух на цьому не заспокоїться, вода почне із середнього положення за рахунок інерції підноситись у правому коліні і спускатись у лівому; швидкість при цьому зменшуватиметься й переходитиме в напір (від'ємний) у правому коліні; швидкість цілком знищиться, коли напір у правому коліні досягне максимальної вартости ($-h_0$); після цього почнеться зворотний рух і т. д.; очевидно, такі коливальні рухи відбувалися б безконечно довгий час, коли б не було опорів (тертя об стінки трубки, опір повітря й т. и.). За дальшого дослідження розглядуваного руху ми припускатимемо відсутність опорів. Розмірковуймо в такий спосіб: на масу води, яка є в трубці $M = \frac{\delta \omega L}{g}$ в перший момент після відкритття дросельного хлипака діє сила ваги $\delta \omega h_0$.

Сила ця в міру наближення до середнього положення OO що-далі, то більш зменшується і в останньому положенні дорівнює нулеві; як ми й раніш бачили, коштом цієї сили збільшується кінетична енергія. Таким робом, для розглядуваного процесу руху ми можемо скористуватися з диференціяльного рівнання вигляду:

$$M \frac{d^2s}{dt^2} = P, \tag{52}$$

де для даного випадку сила $P = \delta h \omega$ змінюється лінійно в границях $\delta h_0 \omega \div 0$, а під s розумітимемо довжину пути центру ваги всієї маси води в трубці; через це останнє зауваження маємо право покласти $h = h_0 - 2s$; а тепер, підставивши відси вартість $s \left(\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2h}{dt^2} \right)$ і вищевказану вартість P до рівнання [52], матимемо лінійне рівнання 2-го ряду:

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{2\delta\omega}{M} h = 0,$$

яке, позначаючи $\frac{2\delta\omega}{M}$ через k^2 $\left(\text{відки } k = \sqrt{\frac{2\delta\omega}{M}} = \sqrt{\frac{2\delta\omega g}{\delta\omega L}} = \sqrt{\frac{2g}{L}} \right)$, можна переписати так:

$$\frac{d^2h}{dt^2} + k^2 h = 0.$$

Останнє рівнання, як відомо, має спільний інтеграл:

$$h = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt, \tag{53}$$

що в ньому постійні C_1 і C_2 визначається з початкових умов явища. Коли, наприклад, умовитись відраховувати час від того моменту, коли вода є в середньому положенні, то, очевидно, для $t = 0$ і $h = 0$, а тоді, по-перше, $C_2 = 0$, а, по-друге, за $h = h_0$, час $t = \frac{T}{4}$, де T є час повного коливання; а що в цьому випадку $C_1 = \frac{h_0}{\sin k \frac{T}{4}}$, то попереднє рівнання набере простого вигляду:

$$h = \frac{h_0}{\sin k \cdot \frac{T}{4}} \sin kt = a \sin kt,$$

коли ще визначити $\frac{h_0}{\sin k \cdot \frac{T}{4}}$ через a.

З останнього рівнання маємо:

$$kt = \arcsin \frac{h}{a},$$

і тепер можемо визначити час цілковитого коливання води в трубці: справді, для $h = 0$, тоб-то для початку коливань $(t = 0)$ і після того, як мине половина коливання $\left(t = \frac{T}{2}\right)$, величина $\arcsin \frac{h}{a}$ дорівнює нулеві або π, тому

$$k \frac{T}{2} = \pi,$$

відки

$$T = 2\pi \frac{1}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}. \qquad [54]$$

Таким робом, час коливань не залежить од роду (питомої ваги) рідини і від площі поперечного перекрою трубки, а залежить від довжини стовпа рідини, що є в трубці, і прискорення сили ваги.

РОЗДІЛ VIII

ТИСК РУХОМОЇ РІДИНИ НА СТІНКИ, ЩО ВОНА ЇХ ОБТІКАЄ

§ 1. Реактивне діяння води на стінки нерухомих зігнутих каналів

Ще з теоретичної механіки відомо, що тіло, яке почало рухатися в якомусь напрямі з певною швидкістю, рухатиметься увесь час з цією швидкістю в тому самому напрямі, коли тільки на нього не подіє в путі якась сила, що під її впливом тіло змінить і свою швидкість і напрям свого руху; навпаки, коли тіло за свого руху змінює і свою швидкість і напрям свого руху, значить, на нього діє якась сила. Так само і вода або инша яка рідина, коли підчас свого руху змінює свій напрям або свою швидкість, значить, є якась зовнішня причина, чи то буде справжня сила, чи якесь оточення, що на неї впливає (наприклад, стінка каналу, яким рухається рідина, або поставлено поперек пути й т. и.), і яке діє в указаний спосіб. За законом „діяння дорівнює протидіянню“, очевидно, і з боку рідини, що рухається, так само буде вплив, рівний і протилежний, на оточення, що на неї впливає.

А що всяку елементарну силу (dp) можна подати співвідношенням:

$$dp = dm\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt}dv = Mdv, \tag{1}$$

де dm є елемент маси, dv — зміна швидкости, dt — елемент часу і M — маса, віднесена до одиниці часу, то в дальшому ми користуватимемося з цього виразу, розглядаючи взаємодіяння між стінками й рідиною, що рухається. При цьому припускатимемо, що гідравлічних опорів немає. Припустімо, наприклад, що вода входить у канал, як показано на рисункові (рис. 141) під кутом α_1 до оси x-ів із швидкістю v_1, а виходить з нього під кутом α_2 до тієї самої оси із швидкістю v_2. Зміна швидкости й напряму, очевидно, залежить од стінок каналу, а тому, інтегруючи рівнання [1] в границях зміни швидкости, ми знайдемо складову P_x по осі x-ів сили тиску стінок на воду у вигляді:

$$P_{x_1} - P_{x_2} = - P_x = M(v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2) \dots,$$

бо, очевидно, що складова сила P_{x_1}, входячи до каналу, або дорівнює нулеві, або надто мала (стінки тільки починають діяти); навпаки, вода на стінки робить тиск, рівний і просто-протилежний:

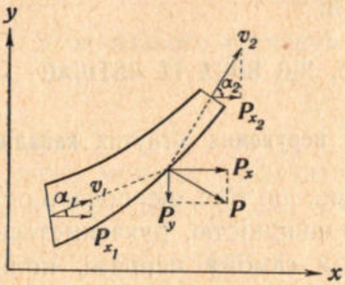

Рис. 141

$$P_x = M(v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2) = \frac{\delta Q}{g}(v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2); \qquad [2]$$

так само знайдемо складову тиску води P_y на стінки каналу в напрямі оси y-ів:

$$P_y = M(v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2) = \frac{\delta Q}{g}(v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2). \qquad [3]$$

Вислідна сила P тиску води на стінки каналу, очевидно, буде:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}. \qquad [4]$$

В окремому випадку, коли вода входить у канал у напрямі однієї оси координат і витікає в напрямі другої, співвідношення значно спрощується, наприклад, для протікання води за рисунком 142, очевидно, маємо:

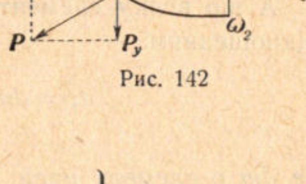

Рис. 142

$$\left.\begin{aligned} P_x &= -\frac{\delta Q}{g} v_2 \\ P_y &= -\frac{\delta Q}{g} v_1 \\ P &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \frac{\delta Q}{g}\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \end{aligned}\right\} . \qquad [5]$$

Знак (—) у перших двох виразах [5] показує, що сили скеровано у від'ємному напрямі осей координат, як показано на рисункові.

Коли припустити, що вода витікає з посудини під напором h, так що $v_2 = \sqrt{2gh}$, то, означивши ще вихідну площу поперечного перекрою через ω_2, очевидно, матимемо:

$$Q = \omega_2 v_2 = \omega_2 \sqrt{2gh},$$

а, взявши тільки абсолютну величину тиску, матимемо:

$$P_x = \frac{\delta}{g} \omega_2 v_2^2 = \frac{\delta}{g} \omega_2 2gh = 2\delta\omega_2 h. \qquad [6]$$

Таким робом, **складова тиску по горизонталі на стінку каналу (реакція) за витікання з нього рідини в горизонтальному просто-протилежному до стінки напрямі, дорівнює подвійному статичному тискові за того самого напору h і тієї самої площі ω_2.**

Таке саме явище реакції ми матимемо й тоді, коли в нас є не канал, а посудина з відтулиною в бічній стінці. Підчас витікання води через цю відтулину на протилежну до відтулини стінку робитиметься тиск (рис. 143), що завбільшки цілком дорівнює наведеному нами тискові на стінку каналу за рівних напорів і площі відтулини:

$$R = 2\delta h \omega_2.$$

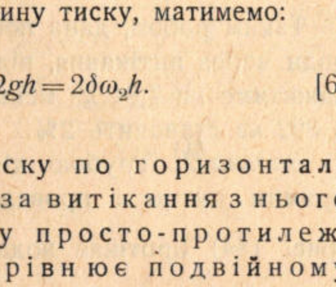

Рис. 143

Коли відтулина є в дні посудини, то, як не важко побачити з викладеного, реакція так само існуватиме і визначиться, як

$$R = -\frac{\delta Q}{g} v_2 = -2\delta h \omega_2, \qquad [7]$$

де від'ємний знак показує, що реакцію буде скеровано вгору по вертикалі і її можна помітити з деякого полегшання посудини.

Задача 1. Циліндрична посудина діяметром 0,5 *м* і заввишки 2 *м* повна води; в дні посудини є відтулина діяметром 5 *см*. Визначте, яке полегшання матиме посудина в перший момент після відкриття відтулини.

Розвязка. За співвідношенням [7] маємо величину реакції в даних умовах задачі:

$$R = 2\delta h\omega_2 = 2 \,.\, 1000 \,.\, 2 \,.\, 0{,}00196 = 7{,}84 \text{ кг}.$$

Таким робом, дана посудина, незалежно від зменшення води через витікання, відразу ж, як відкриють відтулину, важитиме на 7,84 *кг* менше, а це за ваги води в посудині в 392 *кг* становить 2%.

Задача 2. Трубою діяметром 10 *см*, яку зігнуто під прямим кутом і проведено під підлогою машинової залі (рис. 144) протікає вода із швидкістю $v = 5 \frac{м}{сек.}$. Трубу прокладено на висоті 2,5 *м* над підлогою і щільно заправлено в підлозі. Визначте згинальний момент труби під впливом реактивного діяння води в згині труби.

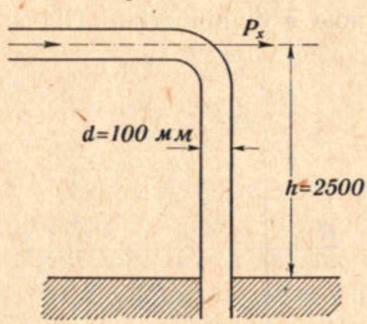

Рис. 144

Розвязка. Сила (P_x) реакції, очевидно, згідно з співвідношенням [2], буде:

$$P_x = \frac{\delta Q}{g} v = \frac{\delta}{g} \omega v^2,$$

а момент M_x є згинальний момент труби:

$$M_x = P_x \,.\, h = \frac{\delta}{g} \omega v^2 h.$$

За наших завдань матимемо:

$$M_x = \frac{\delta}{g} \omega v^2 h = \frac{1000}{9{,}81} \cdot 0{,}00785 \,.\, 25 \,.\, 2{,}5 = 50 \frac{кг}{м} = 5000 \frac{кг}{см}.$$

Задача 3. У воду, яка тече з якоюсь швидкістю (v), спущено трубку, зігнуту під прямим кутом (рис. 145) проти течії. Визначте висоту h піднесення води в трубці проти рівня води, що оточує трубку.

Розвязка. На підставі співвідношення [1] силу тиску води на відтулину трубки визначається виразом:

$$P = Mv = \frac{\delta\omega v^2}{g},$$

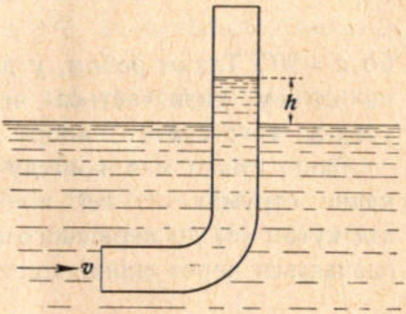
Рис. 145

де ω є площа відтулини трубки; з другого боку, цей тиск повинен зрівноважуватись, очевидно, вагою стовпчика води $\delta\omega h$, який піднявся, тому:

$$\frac{\delta\omega v^2}{g} = \delta\omega h,$$

відки

$$h = \frac{v^2}{g},$$

а навпаки:

$$v = \sqrt{gh} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2gh} = 0{,}71\sqrt{2gh} = \varphi\sqrt{2gh}.$$

§ 2. Тиск струмини на стінки, поставлені на путі струмини нормально до останньої

1) *Стінки нерухомі.* За всіх дальших міркувань, як і в попередньому параграфі, припускається, що втрат енергії на гідравлічні опори немає. Хай вода витікає через відтулину в бічній стінці в посудині під напором h. Хай площа відтулини, отже, і струмини (звуження не припускається), є ω; на путі струмини поставлено стінку нормально до напряму струмини. В розташуванні на рисунку 146 (*а*), користуючись із співвідношення [2], очевидно, знайдемо для тиснення (P) на стінку таку величину:

$$P = M(v - v\cos\alpha) = Mv(1-\cos\alpha) = \frac{\delta Q}{g}v(1-\cos\alpha). \qquad [8]$$

Коли стінка достатніх розмірів (за досвідами треба, щоб її площа була, приблизно, в 9 разів більша за площу поперечного перекрою струмини), то розташування струмини що до стінки буде збігатися з рисунком 146 (*б*), і тоді тиск визначиться, як

$$P = \frac{\delta Q v}{g} = \frac{\delta \omega v^2}{g} = 2\delta h \omega, \qquad [9]$$

бо $\alpha = 90^\circ$. Таким робом, у даному випадку тиск струмини на стінку визначається через подвійний гідростатичний тиск за того самого напору й тієї самої площі.

Якщо стінка має конічну форму (рис. 146, *в*), то стікання струмини з неї відбувається в той і инший бік під кутом (α) до первісного напряму струмини, і тиск визначається через співвідношення [8].

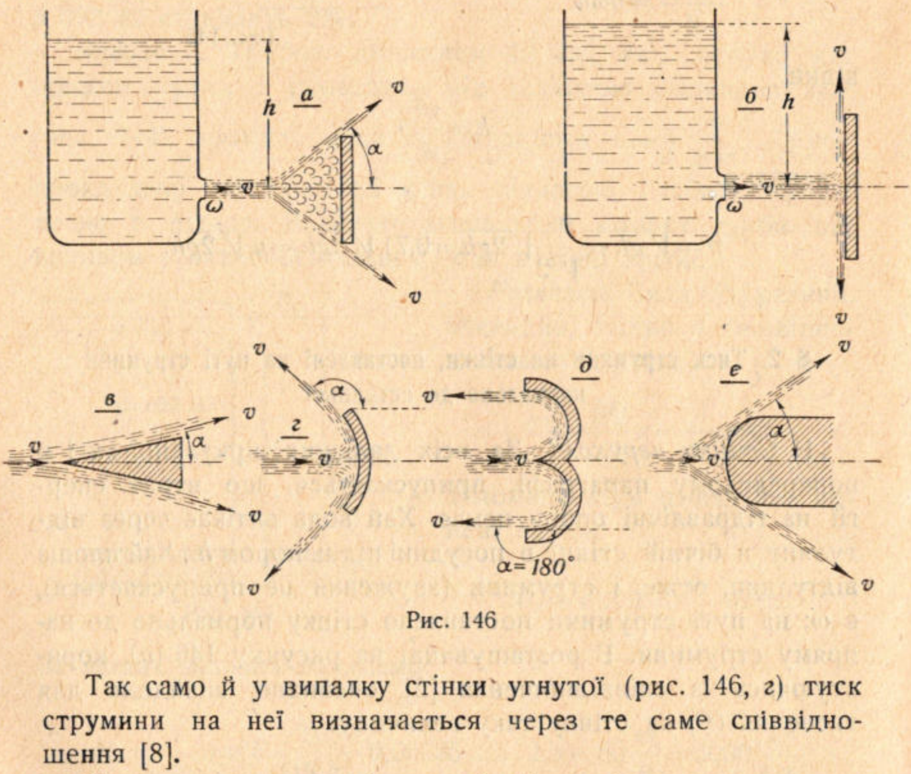

Рис. 146

Так само й у випадку стінки угнутої (рис. 146, *г*) тиск струмини на неї визначається через те саме співвідношення [8].

Якщо струмина такої угнутої стінки відхиляється в напрямі просто-протилежному до первісного напряму струмини (рис. 146, *д*), тоб-то, якщо кут $\alpha = 180^\circ$, то тиск буде:

$$P = \frac{2\delta Q v}{g} = \frac{2\delta \omega v^2}{g} = 4\delta h \omega, \qquad [10]$$

тоб-то тиск дорівнює чотирикратному статичному тискові за того самого напору й тієї самої площі.

Тиск на стінку опуклу (рис. 146, *е*), очевидно, визначиться через співвідношення [8].

2) *Стінки рухомі.* Припустімо, що та або инша стінка з розглянутих (рис. 146 *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е*) під тиском струмини починає рухатися з якоюсь швидкістю $u < v$, тоді відносна швидкість струмини що до стінок буде $v - u$, і, очевидно, основне співвідношення для тиску [8] перетвориться на таке:

$$P = \frac{\delta Q(v-u)}{g}(1-\cos\alpha). \qquad [11]$$

Для стінки типу (*б*) цей вираз перетворюється на

$$P = \frac{\delta Q(v-u)}{g}, \qquad [12]$$

а для стінки типу (*д*) на

$$P = \frac{2\delta Q(v-u)}{g}. \qquad [13]$$

Підчас руху стінки в протилежному напрямі (проти струмини) тиск, очевидно, буде:

$$P = \frac{\delta Q}{g}(v+u)(1-\cos\alpha). \qquad [14]$$

Задача 4. Визначте максимальну можливу роботу струмини, коли вона тисне на рухому стінку типу (*б*) і типу (*д*).

Розвязка. В першому випадку роботу визначається згідно з співвідношенням [12]:

$$R = \frac{\delta Q}{g}(v-u)u;$$

в другому:

$$R = \frac{2\delta Q}{g}(v-u)u.$$

Умова максимуму роботи в обох випадках, очевидно, буде:

$$\frac{dR}{du} = 0 = (v-2u),$$

або найвигідніша швидкість має дорівнювати:

$$u_н = \frac{v}{2}. \qquad [15]$$

Таким робом, максимальна робота в першому випадку буде:

$$R_{макс} = \frac{\delta Q}{g}\left(v - \frac{v}{2}\right)\frac{v}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{\delta Q v^2}{2g}, \qquad [16]$$

а в другому:

$$R_{макс} = \frac{2\delta Q}{g}\left(v - \frac{v}{2}\right)\frac{v}{2} = \delta Q\,\frac{v^2}{2g}. \qquad [17]$$

§ 3. Тиск струмини на стінки, поставлені похило до оси струмини

1) *Нерухомі стінки.* Ми припускаємо, що площа стінки що до площі перекрою струмини достатньо велика (не менша за 9 площ струмини), отже, напрям струмин, які стікають, зливається з напрямом площини стінки. Стінка похила до оси струмини під кутом α (рис. 147). Вода, що підтікає до стінки в кількості Q, поділяється на 2 частини Q_1 і Q_2, які стікають стінкою в протилежних напрямах. Припускається знову, що відхилення струмини, а так само й стікання відбувається без жодних гідравлічних опорів; вплив сили ваги не береться на увагу. Ми можемо собі уявити, що даний процес обтікання відбувається так, що поділені струмини ніби відхиляються двома каналами. Тому силу тиску можна визначити, користуючися з відношення [2], яке в застосуванні до даного випадку можна подати так:

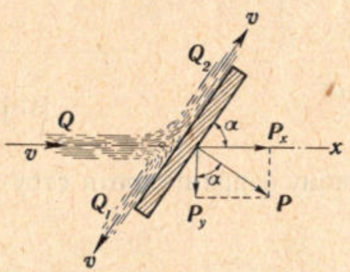

Рис. 147

$$P_x = \frac{\delta Q_1}{g}(v + v\cos\alpha) + \frac{\delta Q_2}{g}(v - v\cos\alpha) =$$

$$= \frac{\delta v}{g}\left[(1+\cos\alpha)Q_1 + (1-\cos\alpha)Q_2\right]. \qquad [18]$$

В напрямі самої стінки сили реакції, очевидно, повинні бути в рівновазі, а тому:

$$\frac{\delta Q}{g}v\cos\alpha - \frac{\delta Q_2}{g}v + \frac{\delta Q_1}{g}v = 0,$$

або, після скорочення:

$$Q\cos\alpha - Q_2 + Q_1 = 0.$$

Остання рівність, у звязку з зрозумілою рівністю $Q = Q_1 + Q_2$, дає:

$$Q_1 = \frac{1-\cos\alpha}{2}Q;$$

$$Q_2 = \frac{1+\cos\alpha}{2}Q;$$

підставивши знайдені вартості до співвідношення [18], матимемо:

$$P_x = \frac{\delta Q v}{2g}[(1-\cos^2\alpha)+(1-\cos^2\alpha)] = \frac{\delta Q}{g}v\sin^2\alpha. \qquad [19]$$

Оскільки очевидно, що сила P_x є проекція вислідної сили (P) тиску на стінку, то останню визначиться із співвідношення:

$$P = \frac{\delta Q}{g}\frac{v\sin^2\alpha}{\cos(90-\alpha)} = \frac{\delta Q}{g}\frac{v\sin^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\delta Q}{g}v\sin\alpha, \qquad [20]$$

а складова тиску по осі y-ів буде:

$$P_y = \frac{\delta Q}{g}v\sin\alpha\cos\alpha. \qquad [21]$$

За дуже малого кута (α) нахилення стінки до оси струмини (рис. 148), остання відхиляється тільки в одному напрямі; в цьому випадку, як легко бачити, $Q_1 = 0$ і $Q_2 = Q$, а тому

$$\left.\begin{array}{l} P_x = \dfrac{\delta Q}{g}v(1-\cos\alpha) \\ P_y = \dfrac{\delta Q}{g}v\sin\alpha \\ P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \end{array}\right\}, \qquad [22]$$

при цьому

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \qquad [23]$$

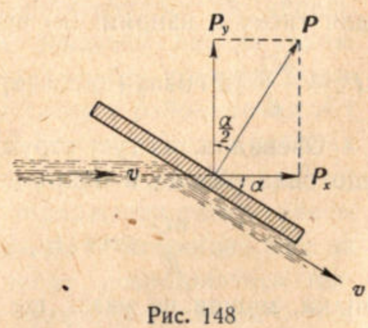

Рис. 148

2) *Рухомі стінки.* У випадку, коли стінка під впливом тиску рухається із швидкістю (u) за первісним напрямом оси струмини, то відносна швидкість струмини що до стінки

буде $(v-u)$, і рівнання [19] і [21] перетворюється на такі:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \frac{\delta Q}{g}(v-u)\sin^2\alpha \\ P_y &= \frac{\delta Q}{g}(v-u)\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}\right\}, \qquad [24]$$

при цьому не важко пересвідчитись, що за попереднім

$$Q_1 = \frac{1-\cos\alpha}{2}Q,$$

$$Q_2 = \frac{1+\cos\alpha}{2}Q.$$

Для загальнішого випадку, коли стінка рухається під впливом тиску струмини під кутом (α_1) до первісного напряму струмини із швидкістю u, відносну швидкість (w) струмини що до стінки можна знайти з геометричного побудування, як показано на рис. 149, і вона буде похила до напряму швидкости (u) під якимось кутом (α_2); з цією швидкістю (w) і відбуватиметься стікання води стінкою на обидва боки.

Рис. 149

Користуючись знову із співвідношення [2], ми матимемо для тиску в напрямі (u) вираз:

$$P_u = \frac{\delta Q_1}{g}[w\cos\alpha_2 + w\cos(\alpha_1+\alpha_2)] + \frac{\delta Q_2}{g}(w\cos\alpha_2 - w\cos\alpha_1). \qquad [25]$$

Очевидно, і тут струмина поділяється на Q_1 і Q_2 так, що сили реакції в напрямі стінки зрівноважуються, тоб-то:

$$\frac{\delta Q}{g}w\cos(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{\delta Q_2}{g}w - \frac{\delta Q_1}{g}w,$$

відки, мавши на увазі ще рівність $Q = Q_1 + Q_2$, знаходимо:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1-\cos(\alpha_1+\alpha_2)}{2}Q \\ Q_2 &= \frac{1+\cos(\alpha_1+\alpha_2)}{2}Q \end{aligned}\right\}. \qquad [26]$$

Підставивши знайдені вартості Q_1 і Q_2 в рівнання [25], після можливих зведень і скорочень, матимемо:

$$P_u = \frac{\delta Q}{g} w \left[\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 . \cos (\alpha_1 + \alpha_2)\right]. \qquad [27]$$

§ 4. Тиск потоку рідини необмеженого поперечного перекрою на тіла, що перебувають у цьому потоці

1) Тиск рідини, яка тече, в напрямі її течії на тіло, що в ній міститься, і, навпаки, опір, що його зазнає тіло підчас пересування в нерухомій рідині. Уявімо собі, що є необмежених розмірів маса рідини, яка перебуває в стані рівномірного й прямолінійного руху; за такого руху лінії течії будуть прості, паралельні між собою лінії, при цьому швидкості по всіх лініях течії будуть однакові. Коли уявити, що всю масу рідини поділено на течійні трубки рівного поперечного перекрою, то через кожну таку течійну трубку протікатиме однакова кількість рідини, і коли в якомусь місці з тих або з тих причин лінії течії повинні були б знизитись, а течійні трубки, отже, звузитись, то швидкість течії повинна була б у цьому місці збільшитись, а тиск, за законом Д. Бернуллі, зменшитись; за розходження ліній мало б відбутись зворотне явище: зменшення швидкости і збільшення тиску.

Тому, коли ми тепер уявимо, що в рідині в якомусь місці вміщено якесь тіло, наприклад, кулю (рис. 150), то підчас обтікання цієї кулі рідиною, відбулись би явища, щойно списані, і ми, розглядаючи показану на рисункові картину переміщення ліній течії, можемо без помилки показати на обов'язковість підвищення тиску в районі точки A і зменшення тиску на меридіяні B, C (на рисункові в районах точок B і C). Коли б рідина була ідеальна, то і в районі точки D ми повинні були б мати підвищення тиску, цілком однакове з підвищенням біля точки A, бо очевидно, що за кулею лінії течії повинні були б знову розподілятися цілком однаково з розподілом перед кулею. Ми дійшли б тоді до так званого парадоксу Дірішле*) (Dirichlet, 1852),

*) G. L. Dirichlet. Über die Bewegung eines festen Körpers in einem incompressibelen flüssigen Medium. Verhandlung. d. K. Pr. Ak. d. W. 1852, стор. 12—17.

за яким тіло, затоплене в рідину необмежених розмірів, яка рухається, і, навпаки, тіло, що рухається в нерухомій рідині, не зазнає з боку рідини жодної вислідної сили тиску.

В реальній рідині, що має в'язкість і здатність прилипати до стінок твердого тіла, картина буде цілком инша.

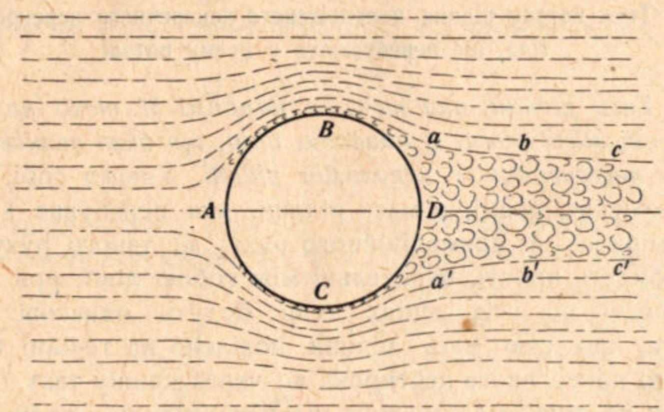

Рис. 150

Частки рідини, що проходять коло поверхні кулі й затримуються з одного свого боку, через в'язкість від часток, які прилипли до стінок кулі, а з другого свого боку захоплювані з тієї самої причини частками, що є далі від кулі, переходять в обертальний рух і ніби котяться по поверхні кулі; коло кулі утворюється шар якоїсь грубини таких часток, що обертаються й котяться по кулі. В той час, коли вони котяться, починаючи від точки A, вони переходять з царини підвищеного тиску до царини зниженого тиску (район точок B і C), при чому кінетична енергія, витрачаючись на обертання, очевидно, зменшується. Від району BC частки повинні котитися до району D, — знов у район підвищеного тиску, перебороти який у них не вистачить уже послабленої енергії, і через це легко зароджується за кулею зворотна течія. Але зворотна течія, що в такий спосіб утворилась і має місце за кулею між її поверхнею й головною масою рідини, що рухається вперед, починає відбирати, через тертя, кінетичну енергію від часток рідини, що проходять, і примушує нові частки рідини брати участь у зворотній течії, через це зворотна течія підсилюється й поширюється в ширину. За кулею утворюється значний простір, повний рідини, що перебуває в обертальному (вихровому) русі, й оточений зовні рідиною, яка рухається вперед. Поверхню розділу цих двох станів рідини (твірні цієї поверхні лінії *abc... a'b'c'*) називають іще межовим шаром, і вона починається відразу ж за зоною *BC*. Через те, що за кулею в середині простору з вихровим рухом тиск дуже знижується, спереду ж кулі в районі *A* тиск підвищений, виникає вислідна сила, додавши яку до сили тертя за обтікання поверхні кулі потоком, ми матимемо повну силу тиску на кулю, яку треба прикласти до неї чи для того, щоб утримати кулю на місці в рідині, що рухається, чи для того, щоб її пересувати в нерухомій рідині; в першому випадку матимемо силу тиску рідини, що рухається, на тіло, в другому — опір рідини рухові тіла*) в ній.

Тепер цілком зрозуміло, що форма тіла може мати істотний вплив на тиск, що чинить рухома рідина на нерухоме тіло, або на опір підчас руху тіла в нерухомій рідині: форма тіла може збільшити або зменшити і навіть зовсім знищити царину утворення вихрів за тілом і тим самим збільшити або зменшити тиск на тіло; форма передньої частини має при цьому значно менший вплив на тиск.

Таким робом, коли треба зменшити опір, що його чинить рідина на рухоме в ній тіло, треба надати йому такої форми,

*) Можна вважати сили тиску рідини, яка тече з певною швидкістю, на нерухоме тіло і опір, якого зазнає тіло, що рухається з тією самою швидкістю в нерухомій рідині, теоретично за цілком ідентичні. Незбіжність цих двох величин відома під назвою парадоксу Дюбуа, що її виявили на досвідах Дюбуа (Principes d'Hydraulique, 1786—1816) і Дюгамен (Rech. expérim. sur les lois de la résistance des fluides. 1842) над платівками, як відомо в теперішній час більш-менш з'ясовано (Н. Е. Жуковский. „О парадоксе Дюбуа". 1891); справді, рідину підчас досвідів з певним тиском або опором треба обмежити бічними стінками, які підчас її течії впливають на розподіл у ній швидкостей і заповнюють її масу вихровими потоками, що підсилюють тиснення на нерухому в ній платівку. Замінивши рухому рідину й нерухому в ній платівку на рідину нерухому й рухому платівку, ми примушуємо рідину зазнати цілком иншого впливу від стінок, які тепер не заповнюють її масу вихровими потоками в такій мірі, і тим самим зменшуємо тиск на тіло. Коли б можна було утворити рухомий потік досить великого поперечного розміру, можна було б вплив стінок обмежити або навіть зовсім знищити і обидва явища в бажаній мірі зблизити. Практично, через те, що потік завжди обмежено стінками, вплив останніх на величину тиску на затоплене в потік тіло буде виявлятися, і це треба мати на увазі підчас експериментальних досліджень.

щоб, висловлюючись мовою гідродинаміки, можливо повільніш (отже на довшій путі) перевести межовий шар із зони малого тиску до зони вищого тиску за тілом; не важко при цьому пересвідчитись, що тілу треба надати для цього своєрідної форми, дуже подібної до форми тіла риби або пташки; в цьому випадку, як показує нанесена на додаваний рисунок (рис. 151) діяграма розподілу тисків, утворюється най-

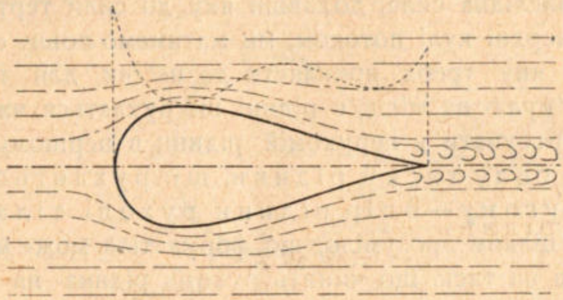

Рис. 151

вигідніший розподіл останніх і зменшення вихідної сили тиску по довжині рухомого тіла; природа риб і птиць, через пристосування до умов довколішнього життя, виробила для них форму, яка зазнає найменшого опору підчас плавання у воді й літання в повітрі.

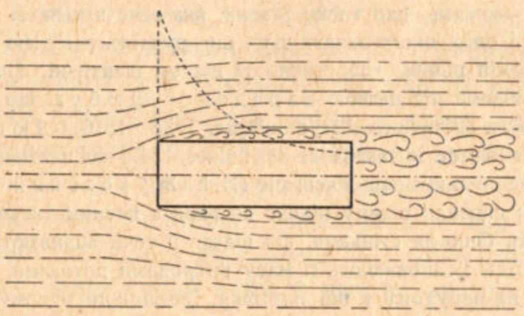

Рис. 152

Цілком иншу картину ми матимемо, коли уявимо, що в оточенні (будемо так говорити тому, що явище в розглядуваному випадку відбувається майже однаково і у воді і в повітрі) посувається тіло, наприклад, циліндричної форми; розподіл тисків буде, як показує рисунок (рис. 152), найсприятливіший для збільшення вислідної сили тиску; вже від головної сторцевої поверхні відділюється межовий шар і захоплює царину, багато ширшу від самого тіла, і тим самим дуже сильно збільшується витрата енергії на вихрі й перетворення її в остаточному результаті на тепло.

Дуже цікава картина процесу обтікання утворюється, коли взяти замість тіла округлу платівку (рис. 153). Коли платівку поставлено нормально до напряму течії води, спереду й позаду платівки утворюються вихрові кільця з круговою віссю *abcd*, довкола якої обертаються частки води, як показано на рисункові.

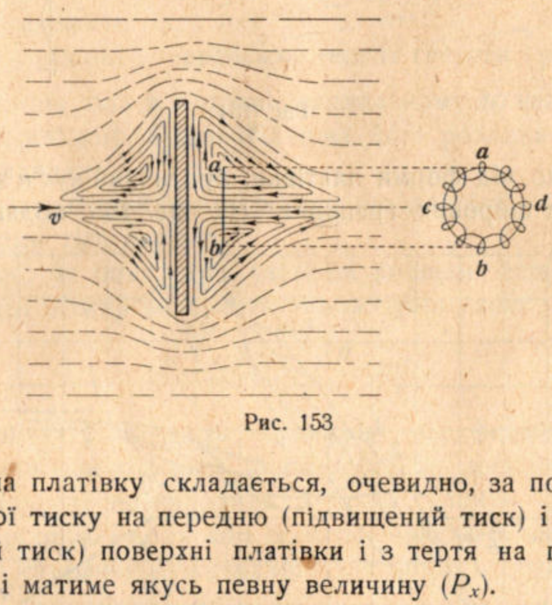

Рис. 153

Тиск на платівку складається, очевидно, за попереднім, з вислідної тиску на передню (підвищений тиск) і на задню (знижений тиск) поверхні платівки і з тертя на периферію платівки, і матиме якусь певну величину (P_x).

Тепер нахиляймо платівку до напряму течії рідини (рис. 154). Виходить, що в цьому випадку вихрові простори спереду і ззаду платівки набувають, як і треба було сподіватись, еліпсоїдальної форми з еліптичною віссю обертання (*abcd*); у вихровому русі при цьому спочатку беруть участь що-далі, то більші маси рідини, і тиснення на платівку підвищується, але при якомусь досить великому повороті платівки настає, нарешті, такий момент (критичний), коли вихрове кільце не може утриматись на платівці і сприскує з неї, перетворюючись на вихрову дугу, що продовжується на деякій віддалі в рухомій рідині і за платівкою. В момент зриву вихрового кільця тиск відразу падає дуже сильно і, за дальшого збільшення нахилу платівки, підвищується вже дуже повільно.

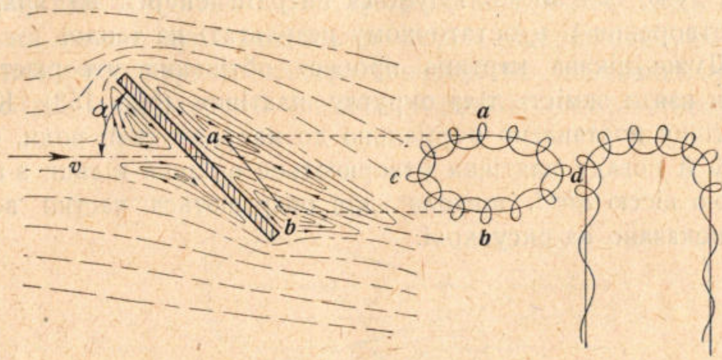

Рис. 154

Залежно від форми платівки, критичний кут α змінюється не в дуже широких границях. На рис. 155 подано*) у ви-

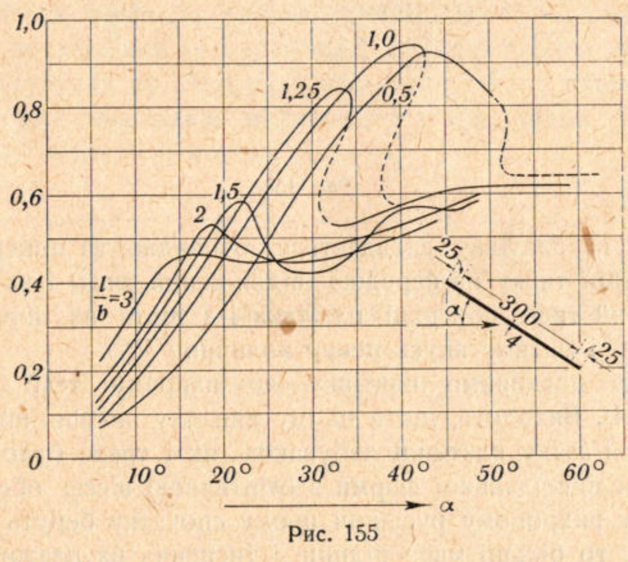

Рис. 155

гляді діяграми зміни нормального тиску (зведеного до одиниці площі платівки, до швидкости, що дорівнює одиниці, і до густоти, що дорівнює одиниці) залежно від кута нахилу α

*) D. Banki. Energie-Umwandlungen in Flüssigkeiten. 1921, стор. 448.

на прямокутні платівки з таким відношенням довжини (l) платівки до її ширини (b):

$$\frac{l}{b} = 3;\ 2;\ 1{,}5;\ 1{,}25;\ 1{,}0;\ 0{,}5,$$

при цьому ширина (b) для всіх платівок однакова й дорівнює $b = 350$ *мм*; кінці платівок на протязі 25 *мм* було загострено; рідина — повітря.

З усього вище викладеного, без сумніву, можна прийти до таких висновків. Величина тиску рухомої рідини на нерухоме в ній тіло, або опір, що чинить рідина рухомому в ній тілу, залежить од:

1) роду рідини і, переважно, від її густоти $\left(\varrho = \frac{\delta}{g}\right)$;

2) розмірів тіла в напрямі, нормальному до напряму руху рідини, переважно, від найбільших його розмірів (площі ω) в цьому напрямі;

3) відносної швидкости рідини що до тіла;

4) форми тіла взагалі.

Справді, як показують численні досвіди останніх років, тиск (опір) можна визначити також формулою:

$$P = \xi \varrho \omega v^2 = \xi \frac{\delta}{g} \omega v^2, \qquad [28]$$

де коефіцієнт ξ залежить переважно від форми тіла. Для можливости застосувати формулу [28] зосібна важливо, щоб швидкості не виходили з таких границь, за яких ми можемо рідину — воду або повітря — вважати ще за нестисливу або стисливу дуже мало. Для води в практиці рідко доводиться мати діло з швидкостями, вищими за 14—17 $\frac{м}{сек.}$, які не спричинюються до помітного підвищення тиску, отже, воду можна вважати за нестисливу. Для повітря в авіяційній справі швидкості не переходять поки за 100 $\frac{м}{сек.}$; за таких швидкостей тиск збільшується вже до 4% проти нормального атмосферного, але таке збільшення ще мало відбивається на зміні густоти, а тому його можна й не брати на увагу; в балістиці швидкості досягають швидкости звука $\left(332 \frac{м}{сек.}\right)$ а за таких швидкостей не брати на увагу стисливість повітря, отже, зміни тиску — вже не можливо.

Що ж до коефіцієнту ξ, то за сучасного стану гідродинаміки визначити його вартість теоретично не можливо (за дуже малими винятками), і доводиться визначати досвідною путтю в дослідних лабораторіях (гідравлічних і аеродинамічних). Нині цей досвідний матеріял дуже великий, зокрема для повітряного середовища. Нижче наводиться вартості коефіцієнту ξ для різних форм тіла, середні з результатів досвідів цілого ряду експериментаторів.

1) Плоскі платви, поставлені нормально до напряму потоку:

a) круглі або квадратові:

за малих порівняно поверхонь ($\omega \leqslant 0{,}1\ м^2$)$: \xi = 0{,}55$,

за значніших поверхонь ($\omega > 0{,}1\ м^2$)$: \xi = 0{,}65$;

b) прямокутні:

за відношення боків $1:\ 5: \xi = 0{,}70$,

„ „ „ $1:10: \xi = 0{,}78$.

2) Круглі циліндри або призми з квадратовими основами.

a) з напрямом осей, що зливаються з напрямом потоку.

За відношення довжини (l) циліндру (рис. 156) або призми до діяметру або боку ($Д$):

$$\frac{l}{Д} = 0; \quad 0{,}5; \quad 1; \quad 2; \quad 4; \quad 7;$$

$$\xi = 0{,}55; \quad 0{,}54; \quad 0{,}44; \quad 0{,}40; \quad 0{,}41; \quad 0{,}47.$$

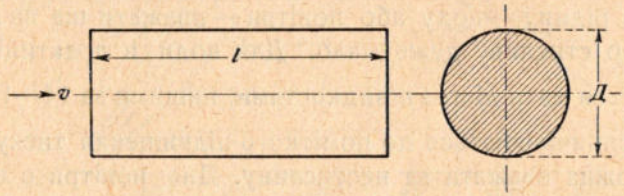

Рис. 156

Специяльно для опору призм квадратового перекрою у воді за досвідами Engels'a i Gebers'a:

$$\frac{l}{Д} = 1; \quad 2; \quad 5; \quad 10; \quad 20; \quad 30;$$

$$\xi = 0{,}49; \quad 0{,}38; \quad 0{,}41; \quad 0{,}43; \quad 0{,}47; \quad 0{,}57.$$

b) З напрямом осей, нормальним (рис. 157) до напряму потоку:

$Д = 0,05;\quad 0,02;\quad 1;\quad 10;\quad 30;\quad 150$ в *мм*;

$\xi = 0,88;\quad 0,64;\quad 0,52;\quad 0,49;\quad 0,48;\quad 0,32.$

3) **Для тіла, що має форму кулі**, коефіцієнт значно більший (майже в $2^1/_2$ рази) за малих швидкостей, ніж за великих.

Критична швидкість (швидкість переходу) залежить од діяметра кулі (D), але, взагалі, лежить у вузьких границях. Для кулі діяметром в 20 *см* можна покласти:

за великих швидкостей $\left(v > 15\,\frac{м}{сек.}\right) : \xi = 0,11,$

за малих „ $\left(v < 15\,\frac{м}{сек.}\right) : \xi = 0,30.$

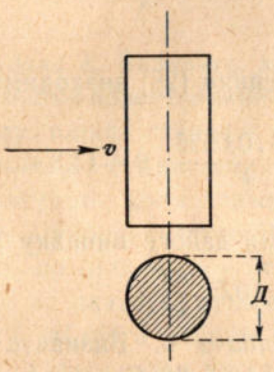

Рис. 157

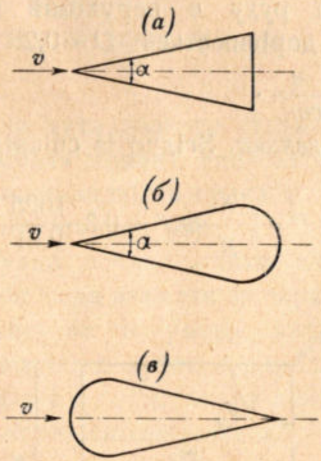

Рис. 158

4) **Для клинових і конічних тіл** (рис. 158 *а—в*):

а) за клинового кута:

$$2\alpha = 90^\circ : \xi = 0,36;$$
$$2\alpha = 60^\circ : \xi = 0,26;$$
$$2\alpha = 30^\circ : \xi = 0,17;$$

b) за конусного кута $2\alpha = 20^\circ$ і заокруглення заднього кінця по півкулі:

$$\xi = 0,12;$$

c) за зворотного розташування конусу $\xi = 0{,}040$ до $0{,}024$, залежно від кута й форми конусу.

5) Для циліндричних тіл з заокругленнями кінців по півкульових поверхнях (балони), (рис. 159) можна брати:

$$\xi = 0{,}06.$$

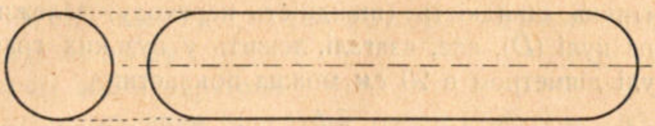

Рис. 159

Задача 5. Визначте опір, що його зазнає куля підчас її руху в нерухомій морській воді, коли діяметр кулі дорівнюється $D = 0{,}25$ *м*, і швидкість пересування $v = 3 \frac{м}{сек.}$.

Розвязка. Згідно із співвідношенням [28] знаходимо:

$$P = \xi \frac{\delta}{g} \omega v^2 = 0{,}3 \frac{1025}{9{,}81} \cdot \frac{3{,}14 \, . \, 0{,}0625}{4} \cdot 9 = 13{,}8 \, кг,$$

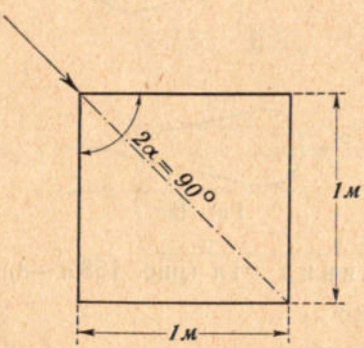

Рис. 160

бо для даного випадку $\xi = 0{,}3$ і $\delta = 1025 \frac{кг}{м^3}$.

Задача 6. Визначте тиск вітру ($t = 20^\circ$ C), що дме із швидкістю $20 \frac{м}{сек.}$, на димар квадратового перекрою (бік квадрату $= 1$ *м*), заввишки 20 *м*. Розташування димаря що до напряму вітру показано на рисункові 160.

Розвязка. Згідно із співвідношенням [28] маємо для тиску:

$$P = \xi \frac{\delta}{g} \omega v^2.$$

А що 1 $м^3$ повітря в температурі 20° С і за 760 *мм* атмосферного тиску важить 1,2049 *кг*, то густота

$$\varrho = \frac{\delta}{g} = \frac{1{,}2049}{9{,}81} = 0{,}123.$$

Далі, взявши для ξ вартість 0,36, маємо:

$$P = \xi \frac{\delta}{g} \omega v^2 = 0{,}36 \,.\, 0{,}123 \,.\, 1{,}414 \,.\, 20 \,.\, 400 \cong 500 \;\textit{кг}.$$

Задача 7. Визначте опір цепеліна площею поперечного перекрою 50 *м*, що летить у повітрі з швидкістю $30 \frac{м}{сек.}$.

Розвязка. Опір визначається за співвідношенням [28] і буде:

$$P = \xi \frac{\delta}{g} \omega v^2 = 0{,}06 \,.\, 0{,}123 \,.\, 50 \,.\, 900 \cong 242 \;\textit{кг}.$$

Задача 8. Визначте, за якого кута поверту стерна буде найбільший повертальний для судна момент, коли затоплена у воду площа стерна є ω, коли швидкість судна v, і коли довжина (L) судна велика проти ширини (B).

Розвязка. Коли довжина судна велика проти ширини, можна відносні траєкторії часток води вважати за паралельні прості до подовжної оси судна; за цієї умови, вважаючи стерно за платву, спущену у воду під кутом α до напряму потоку, згідно з даними досвідів L ö s s l'я, визначаємо нормальний тиск води на стерно через співвідношення:

$$P = \xi \frac{\delta}{g} \omega v^2 \sin \alpha.$$

Означивши віддаль точки прикладання тиску на стерно від оси обертання його (рис. 161) через x [за досвідами A v a n z i n i*) для квадратових платов, затоплених у воду, віддаль $x = (0{,}2 + 0{,}3 \sin \alpha)\, b$, коли через b означити довжину бока платви], а віддаль тієї самої оси від вертикальної оси, що вона проходить через центр ваги S судна через l, для

*) D. B a n k i. Energie-Umwandlungen in Flüssigkeiten. 1921 р., стор. 450.

обертального для судна моменту знайдемо співвідношення:

$$M = P(l\cos\alpha + x) = \xi \frac{\delta}{g} \omega v^2 \sin\alpha\,(l\cos\alpha + x).$$

Як перше наближення, за достатньо великої довжини судна (L), величиною (x) можна знехтувати, і, якщо, крім того, можливо взяти $l = \frac{L}{2}$, то

$$M = \xi \frac{\delta}{g} \omega v^2 \frac{L}{2} \sin\alpha \cos\alpha.$$

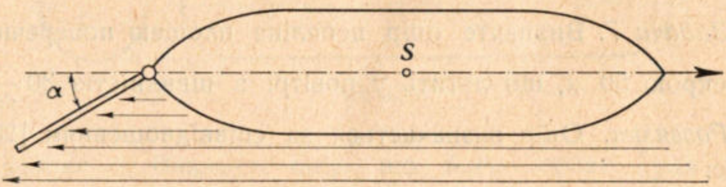

Рис. 161

Умова максимуму, вважаючи коефіцієнт ξ за постійну величину, буде:

$$\frac{dM}{d\alpha} = 0 = \frac{d}{d\alpha}(\sin\alpha\cos\alpha) = -\sin^2\alpha + \cos^2\alpha,$$

відки

$$\operatorname{tg}^2\alpha = 1,$$

отже,

$$\alpha = 45^\circ,$$

а максимальний момент

$$M_{max} \cong 0{,}5\xi \frac{\delta}{g} \omega v^2 \frac{L}{2} = 0{,}25\,\xi \frac{\delta}{g} \omega L v^2.$$

Точніший вираз для максимального моменту матимемо, коли у вираз для моменту, підставляючи вартість кута α, вставимо й вартість x.

Нарешті, для остаточного розвязання задачі, треба було б підставити вартість ξ за критичного кута α_k поверту стерна, підрахувати для нього відповідну вартість $M_{\alpha k}$ і, порівнявши цю вартість з $M_{макс.}$, вибрати найбільшу вартість.

II) *Бічний тиск, або підтримна сила за обтікання тіла рідиною.* Припустімо, що в рідині, яка тече із швидкістю v, є нерухома, зігнута догори, як показано на рисункові (рис. 162), платівка.

Очевидно, лінії течії за обтікання цієї платівки повинні будуть зближатися між собою коло опуклого боку її і, навпаки, розходитись близько ввігнутого боку; таким робом, швидкості течії часток рідини над опуклим боком повинні збільшитись, нижчі ж від увігнутого боку зменшитись, тиски, навпаки, за законом Д. Бернуллі, зменшаться з опуклого боку платівки і збільшаться з увігнутого боку; відси виходить, що на платівку утвориться якийсь вислідний тиск з боку рідини, що її обтікає, і цей тиск буде скерований за розташування платівки згідно з рисунком 162, знизу вгору. Цей вислідний тиск, множений на площу платівки, дає так звану підтримну силу, значно більшу за сили тиску згори від безпосереднього тиску рідини за обтікання опуклого боку і яка пояснює явища літання в повітрі, плавання у воді, то-що.

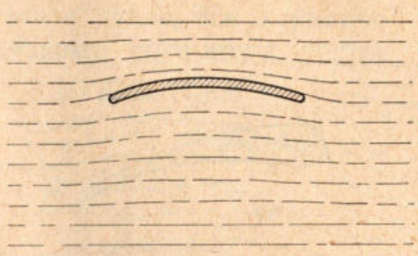

Рис. 162

Авіяція, яка останніми роками що-далі, то більш розвивається, спричинилась до великого інтересу й цілком зрозумілого прагнення розвязати завдання знайти таку форму поверхні, яка, з одного боку, спричинилась би до найбільшої підтримної сили, а, з другого боку, давала б найменший опір підчас пересування в плинному оточенні. Теоретичні роботи Кутта*), Жуковського**) і Чаплигіна***) в цьому на-

*) W. M. Kutta. Über eine mit den grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung. Sitz-Ber. d. K. Akad. d. Wiss. in München. 1910, стор. 1—58.

W. M. Kutta. Über ebene Zirculationsströmungen nebst flügtechnischen Anwendungen. Sitz-Ber. d. Akad. d. Wiss. in München. 1911, стор. 65—125.

**) Н. Е. Жуковский. Geometrische Untersuchungen über Kuttasche Strömungen. Труды Отдела Физ. Наук О-ва Любителей Естествознания в Москве, т. 15, 1911, стор. 10—22.

Його ж. Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger. Zeit. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt. 1910, стор. 281—284.

Його ж. „О поддерживающих планах типа Антуанетт". Труды отд. Ф. Н. О-ва Естеств. Т. 15, вип. 2, 1912, стор. 7—20.

Його ж. Определение давления плоско-параллельного потока жидкости на контур, который в пределе переходит в отрезки прямой. Математ. сборник. 1911. Т. 28, стор. 195—204.

***) Чаплыгин С. А. О давлении плоско-параллельного потока на преграждающие тела. Математ. сборник. 1910. Т. 27.

прямі, підсилені цілою низкою досвідних досліджень инших учених, показали справжні шляхи до розвязання цього завдання, яке нині в окремих його частинах можна вважати вже за більш-менш достатньо розвязане.

Цілком точно, наприклад, виявлено, що форма поверхні, показана на додаваному рисункові (рис. 163), задовольняє найгостріші вимоги і до виявлення найбільшої можливої підтримної сили, і до найменшої сили опору за пересування, тоб-то, иншими словами, теорія й досвід дійшли того, що форма, яку розробила природа для крил птахів, у вказаних відношеннях є найліпша.

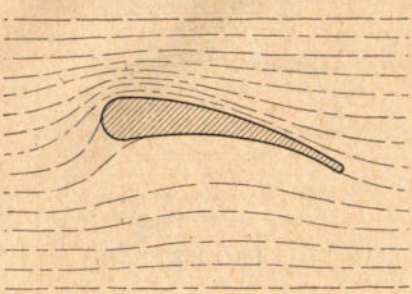

Рис. 163

В дуже близькому відношенні до розглядуваного питання є застосування явища бічного тиску за обтікання тіл руховою рідиною до пересування суден, яке дуже зацікавило морські кола.

Припустімо, справді, що обтічне тіло являє собою циліндр, який обертається довкола своєї оси з якоюсь кутовою швидкістю; тоді, очевидно, коло того боку (a) циліндру (рис. 164), який підчас цього обертання рухається в одному напрямі з частками рідини, швидкість останніх іще збільшиться, лінії течії між собою ще більш зблизяться, і тиск ще більше зменшиться, ніж у тому випадку, коли б циліндр був нерухомий; коло протилежного боку (b) циліндру, де напрями руху стінок циліндру й часток рідини протилежні, швидкості в останній зменшуються, лінії течії розійдуться, і тиск збільшиться; в результаті такого перерозподілу швидкостей і тисків коло циліндру, виникне бічна сила P, яка тиснутиме на циліндр в той бік, де напрями переміщення стінки циліндру й часток рідини збігаються. Так само очевидно, що, змінивши швидкість обертання циліндру, можна

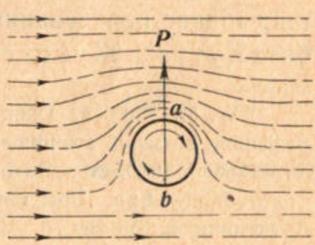

Рис. 164

досягти того, що сила тиску (P) досягне найбільшої можливої, за даної швидкости руху потоку, величини; крім того, змінивши бік обертання циліндру, можна мати силу тиску на циліндр у напрямі, протилежному до першого.

Досвіди Флеттнера (Flettner, 1924) показали*), що, застосовуючи обертові циліндри до суден, можна досягти значно більших сил для пересування судна, ніж користуючись із звичайних вітрил за однакової сили вітру, а саме: як маємо обертовий циліндр, сила утворюється у вісім разів більша, ніж за вітрил, що мають робочу поверхню, яка дорівнює проєкції поверхні циліндру на площину, паралельну до площини вітрил. На додаваному рисункові (рис. 165) показано напрям обертання циліндрів підчас ходу судна вперед і назад за заданого напряму вітру.

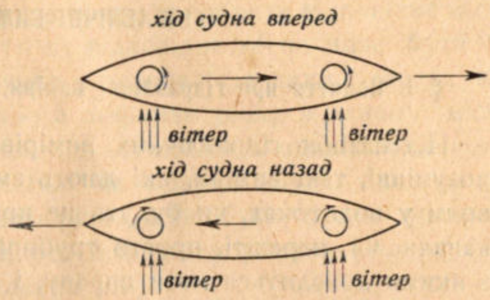

Рис. 165

---

*) Див. Das Walzensegel von Flettner. Zeit. d. Ver. d. Ingenieure. 1924. Ч. 47, стор. 1218.

Prof. H. Föttinger u. H. Wagner. Fortschritte der strömungslehre und Entstehung der Fragflügelkräfte. Zeit. d. Ver. d. Ingenieure. 1924. Ч. 36, стор. 926—928.

З'явлення бічного тиску на обертовий циліндр у паралельній течії було відоме ще за 70-х років минулого століття; отже, давно вже робили досліди в аеродинамічній лабораторії в Геттінгені. Флеттнерові належить ідея застосування обертових циліндрів до пересування суден і безпосередні досвіди з останніми.

РОЗДІЛ IX

ГІДРАВЛІЧНІ ВИМІРИ

§ 1. Поняття про гідравлічні виміри, їхню мету й завдання

Під назвою гідравлічних вимірів розуміють, у вузькому розумінні, такі виміри, які дають змогу визначити витрати води у водотоках, чи будуть це природні річки, чи штучні канали, чи, нарешті, просто трубопроводи. Але що об'єкти, з якими доводиться мати справу, і завдання, що їх ставлять за вказаних вимірів, різні, то й об'єм вимірів і самі способи вимірів, і навіть вимірні прилади так само різні. Коли ще можна говорити про визначення тільки витрат води за гідравлічних вимірів у каналах і трубопроводах, то що до річок таке визначення було б дуже неповне. Справді, за кінцеву мету гідравлічних вимірів у річках є вивчення повного режиму річки з бігом часу; тому в гідравлічні виміри тут входять не тільки виміри витрат у певний момент, але й установлення певної закономірности змін цих витрат, залежно від стану рівня води в річці, від зміни поверхневого спаду її, як тоді, коли річка має рівну поверхню, так і тоді, коли цю поверхню вкрито кригою; в гідравлічні ж виміри входить і вивчення намулів, що несе річка, і з якісного і з кількісного боку, і вивчення змін таких з часом.

Таким робом, під назвою гідравлічних вимірів у річці розуміють не то виміри витрат, а й виміри спадів, намулів та иншого.

Всі ці питання у всій повності розглядається в окремому відділі гідравліки — гідрометрії. В загальному ж курсі гідравліки розглядається, переважно, способи вимірів витрат і, до того, у формі викладу загальних метод вимірів; инші ж перелічені питання розглядається або дуже коротко, або зовсім не розглядається.

Додержуючи вищевказаних загально заведених способів викладу, в дальшому ми викладемо лише в загальній формі сучасні способи гідравлічних вимірів стосовно до річок, каналів і трубопроводів.

§ 2. Основні положення для вимірів витрати води в річках

Для гідравлічних вимірів у річках передусім, щоб добути більш-менш певні результати, треба вибрати відповідне місце на річці. Для даної мети за відповідне місце може бути по змозі прямолінійна ділянка, однакової ширини уздовж, що дорівнює принаймні 4 — 5 ширинам річки в даному місці, без жодних розгалужень, відгалужень або впадів допливів— ці останні (допливи) взагалі не повинні бути близько від вибраної ділянки. Корито річки має бути рівне, правильної коритуватої форми, без місцевих горбовин (мілини, каміння) або значних заглибин (ям).

Знайшовши відповідну ділянку на річці, вибирають і закріпляють на ній головний простець, тоб-то такий поперечний перекрій, до якого більшість струмин була б, по змозі, нормальна; очевидно, такий перекрій буде своїми розділами найменший для пропуску протічної води в річці. Положення головного простця закріпляється тичками (довгими кілками), що їх забивають у берег по одному й по другому боці (по дві з кожного боку) річки в напрямі простця (рис. 168 і 169). Крім головного простця, що є за місце для гідрометричних робіт, в такий самий спосіб закріпляється ще два простці, один вище, другий нижче за течією головного простця. Верхній з додаткових простців є від головного простця на віддалі, що дорівнює двом ширинам річки, нижній — на віддалі однієї ширини річки; ці додаткові простці звуть спадовими простцями, бо їх використовують, щоб визначити спади.

Всю ділянку річки, що на ній мають на думці переводити гідрометричні роботи, разом з прилежними берегами, точно нівелюють і наносять у певному маштабі на папір разом із розташуванням простців; глибини річки по простцях багато разів проміряють з човна замірками [штанга (див. рис. 166), поділена на сажні, фути, сотки сажня, або метри, дециметри й сантиметри й пофарбована по поділах то червоною, то білою фарбою] через певні віддалі; наносячи глибини в певному маштабі на папір та пильнуючи при цьому відносних віддалей, одержуємо профілі поперечних перекроїв по простцях річки разом із берегами. Є й спеціяльні прилади—профілографи—для безпосереднього поміру поперечного перекрою річки.

Рис. 166

На головному простці біля одного з берегів вбивають у річище палю, вершок якої, рівно підтесаний, звязується точним нівелюванням з репером (рис. 167), тоб-то певною точкою (яка є, звичайно, кінець залізного стрижня, закріпленого в бетоновій основі, закладеній у ґрунт) берега, положення якої точно визначено у відношенні якоїсь площини, що її взяли за основну; в нас, у Союзі, за основну площину заведено вважати середній рівень Балтицького моря. Таким робом, через звязок репера з вершком палі, положення останньої так само точно визначено, і, коли ми будемо виміряти віддаль рівня води в річці від вершка палі, то можемо добути ясну картину зміни всіх рівнів з часом, і положення останніх завжди буде точно фіксоване; є прилади й для автоматичного записування стояння рівнів — лімнігрáфи.

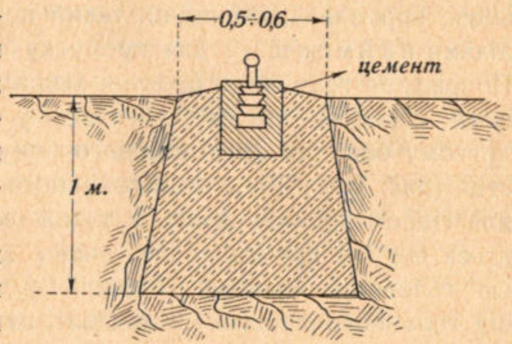

Рис. 167

На обох берегах спадових простців так само забивають палі (спадові палі), вершки яких так само звязують нівелюванням з репером і між собою, отже, положення вершків цих паль є так само цілком виразне. Виміряючи віддалі рівнів води від спадових паль, ми, очевидно, знатимемо нівелювальні висоти становищ рівнів води на верхньому й нижньому спадовому простці, а, поділивши ріжниці цих висот на віддаль між спадовими простцями, знайдемо і спади річки на даній ділянці. Щоб точніш виміряти віддалі вершків паль од рівнів води, є спеціяльні прилади.

Щоб виміряти швидкість течії води головним простцем, в останньому вибирають певну кількість вертикалей, залежно від ширини річки, при цьому завжди ставлять основну вимогу, щоб характерні місця поперечного профілю річки (місця горбовин, заглибин та ин.) охопили вертикалі. Взагалі ж що до вибору кількости вертикалей, то загальних усталених правил немає. Наприклад, відомий гідрометр Ясмунд*) (R. Jasmund) радить вибирати кількість вертикалей так, щоб віддалі між вертикалями були з $\frac{1}{10}$ ширини річки, але у всякому разі не більші за 20 *м*, при цьому коло самих берегів віддалі між вертикалями повинні бути менші (не більші за 5 *м*), в середині ж річки можуть бути й більші. В разі великої ширини річки (більш як 200 *м*), щоб мати змогу перевести всі гідрометричні виміри за один день, Ясмунд не радить вибирати кількість вертикалей більшу за 10.

Підчас гідрометричних робіт у Туркестані кількість вертикалей вибирали**) залежно від ширини річки з такого розрахунку:

за ширини річки	до 1 саж.	4 вертикалі
„ „ „	від 1 саж. до 10 саж.	5 „
„ „ „	понад 10 сажнів . .	10 „

Професор Ф. Є. Максименко, щоб мати змогу закінчити виміри за 1 день, не радить вибирати кількість вертикалей більшу за 15. Взагалі ж кількість вертикалей він визначає***) з такого розрахунку:

за ширини річки в	1	саж.	4 вертикалі
„ „ „ „	1— 5	„	5 „
„ „ „ „	5— 10	„	8 „
„ „ „ „	10—120	„	10 „
“ „ „ „	120—300	„	12 „
„ „ „ „	понад 300	„	15 „

А що для вивчення всіх виявів життя й діяльности річки важливо переводити всі гідравлічні виміри на тих самих

*) R. Jasmund. Hydrometrische Ermittelungen. Handbuch der Ingenieurwissenschaften. 3 Teil. 1 Bd. 1923, стор. 623.

**) В. Глушков. Отчет гидрометрической части отдела земельных улучшений в Туркестанском крае за 1913 г. Т. I., стор. 7.

***) Ф. Е. Максименко. Курс Гидравлики. 1921, стор. 446.

місцях, то дуже потрібно закріпити положення вертикалей на довший час. За малих ширин річки, до того річки несудноплавної, таке закріплення можна перевести, наприклад, перекинувши через річку линву (тонка стальна кодола) з відповідними розміченнями; для річок великої ширини і зокрема для річок судноплавних такі способи закріплення вертикалей не придатні.

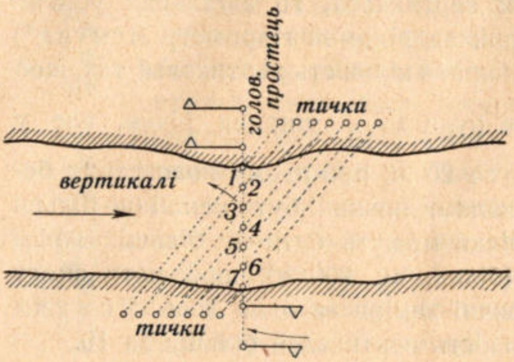

Рис. 168

Найбільш поширений у таких випадках спосіб закріплення вертикалей є закріплення через тички, забивані по берегах річки—спосіб скісних простців (рис. 168) і спосіб центральних простців (рис. 169), який становить єдину незручність тим, що установа понтону або човна одночасно по лінії головного простця і скісних або центральних простців за сильних течій і, зокрема, підчас вітру дуже важка і відбирає досить багато часу.

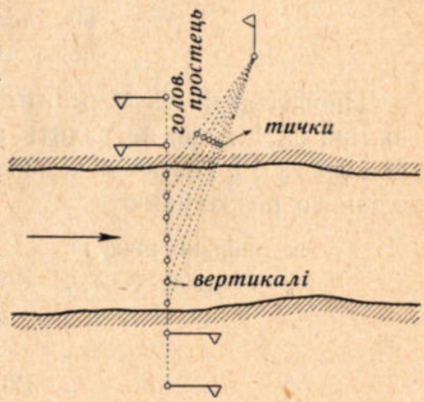

Рис. 169

Переходячи тепер до визначення самих швидкостей на вертикалях, очевидно, треба визначити цілком виразно ті точки на них, в яких конче треба і слід виміряти швидкості. Вибір таких точок, звичайно, треба засновувати на припущенні, що швидкості, зазначені на вибраних точках, дадуть змогу найточніше встановити середню швидкість на вертикалі. Вивести якусь строгу математичну залежність для визначення швидкостей на вертикалі досі, як відомо, не пощастило, але все ж у цьому відношенні назбирано багатий досвідний матеріял. На підставі цього матеріялу встановлено*), що, визначаючи швидкість у трьох точках на вертикалі на глибинах 0,2 ($v_{0,2}$); 0,6 ($v_{0,6}$); 0,8 ($v_{0,8}$) і взявши середню швидкість:

$$v_{сер} = \frac{v_{0.2} + 2v_{0.6} + v_{0.8}}{4},$$

матимемо швидкість, відмінну від справжньої середньої швидкости на вертикалі на надто малий відсоток.

Щоб краще визначити розподіл швидкости, коли це треба з тих або тих міркувань, до позначених 3 точок прилучають іще дві: близько поверхні й дна.

За малої глибини вертикалей (наприклад, біля берегів), заведено виміряти швидкість течії у двох точках: біля поверхні й на $\frac{2}{3}$ глибини або на глибинах 0,2 і 0,8; у першому разі середню швидкість визначається за співвідношенням:

$$v_{сер} = \frac{v_n + 3v_{\frac{2}{3}}}{4},$$

у другому —

$$v_{сер} = \frac{v_{0.2} + v_{0.8}}{2}.$$

На особливо мілких місцях задовольняються з визначення однієї швидкости на вертикалі на 0,6 глибини; ця швидкість так само близька до середньої швидкости на вертикалі. Нарешті, за дуже бурхливих течій, великих глибин і відсутности достатньо міцного устаткования задовольняються з вимірів поверхневих швидкостей, при цьому для переходу до середніх швидкостей на вертикалі беруть, на підставі досвідного матеріялу, коефіцієнт 0,85.

Коли середні швидкості на вертикалях обчислено, починають визначати витрату води через даний перекрій.

Метод визначати витрату є кілька, але найбільш вживана й проста є метода Гарлахера**) (Harlacher). Суть її ось у чому. На рисункові (рис. 170), на якому в маштабі вирисувано поперечний перекрій річки (головного простця), на продовження вертикали відкладають у маштабі відповідні

*) Hoyt and Grover. River Disharge. 1910.

**) Handbuch d. Ingenieurwissenschaften. 1908. 3 Teil, Bd. 13, стор. 211.

середні швидкості, кінці яких сполучають ламаною лінією. Взявши тепер елементарну площинку, розташовану на якійсь із вертикалей (глибина h), наприклад, hdx (див. рис. 170), і помноживши на відповідну цій вертикалі середню швидкість $v_{сер}$, ми, очевидно, матимемо елементарну кількість води, що протікає через елементарну площинку за одну секунду,

$$dQ = hdx \, . \, v_{сер},$$

а, позначивши змінну по перекрою величину $hv_{сер}$ через змінну t, маємо:

$$dQ = tdx;$$

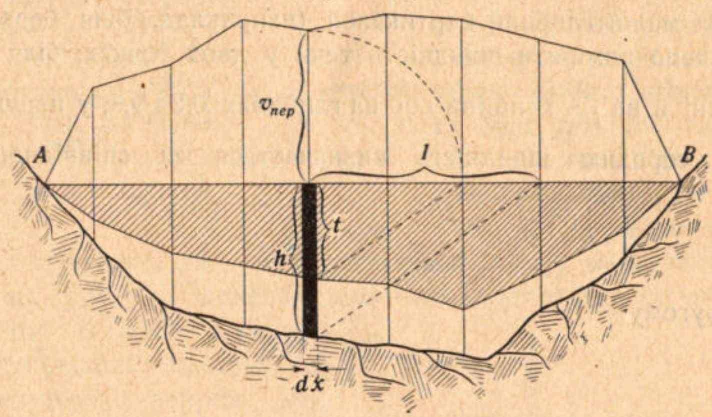

Рис. 170

інтегруючи останній вираз у границях площі (ω) перекрою, матимемо відшукувану витрату (Q) води через перекрій:

$$Q = \int_{\omega} tdx.$$

Розвязування дуже спрощується тим, що з рівности $hv_{сер} = t$ маємо пропорцію;

$$\frac{t}{h} = \frac{v_{сер}}{1},$$

яку легко будується, як показано на рисункові, і яка дає в певному вже маштабі відтинок t. Визначаючи подібні відтинки для цих вертикалей, сполучаючи їхні кінці кривою, ми маємо нову площу ABC, яку легко визначити через планіметрування і яка дає, очевидно, не инше що, як $\int_{\omega} tdx$, тоб-то витрату Q.

Визначивши витрату води за кількох найхарактерніших рівнів води, можна збудувати так звану **криву витрат** води для даного перекрою, яка встановлює певну залежність між стоянням рівнів у границях вимірів і відповідними витратами, і яка дає змогу, навпаки, за стояння рівня в даний час безпосередньо визначити витрату. На додаваному рисунку 171 наведено, наприклад, криву витрат для р. Чу*) в Туркестані (гідр. станція Константинівська), яку збудовано, як бачимо, по точках, що відзначають витрати води за відповідних стоянь рівня.

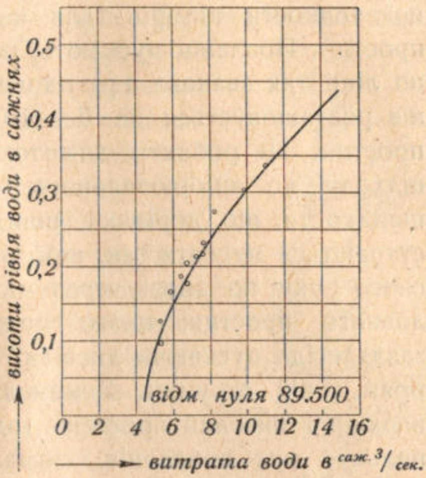

Рис. 171

§ 3. Прилади визначати швидкості в річках

Щоб визначити поверхневі швидкості в річках, дуже швидких і глибоких, де складних приладів та інструментів дуже важко вживати, вживають і досі иноді **поплавців**, що їх пускають униз за водою. Щоб швидкість поплавця по змозі була мало одмінна від швидкости руху струмин, і в місцях вигину останніх не впливала б помітно відбіжна сила, поплавець повинен бути легкий. Тому за найкращий матеріял для поплавців є дерево і краще за все модрина. Поплавці вирізують з круглого дерева завтовшки 5 *см* (0,02 саж.) і діяметром 10 — 12 *см* (0,04 — 0,06 саж.). Щоб уникнути впливів повітрових течій, що майже завжди є в близькому до води шарі атмосфери, ніяких прапорчиків на них ставити не треба. Щоб іще більш зменшити вагу, зберігаючи найбільшу площу, рекомендується поплавці посередині зверху видовбати. Поверхню поплавця, щоб краще бачити здалеку, фарбують у червоний і білий колір. Щоб

*) В. Глушков. Отчет Гидрометрической части Отдела земельных улучшений в Туркестанском крае. 1913, т. VI.

визначити швидкість через поплавці, вибирають два нові простці, один вищий, другий нижчий за головний простець на певній один від одного віддалі, яка залежить од бажаної точности вимірів (для цього можна брати і спадові простці). Поплавці пускають із човна, який установлюють по лінії так званого простця човнів. Цей простець човнів розташовується за 5 — 10 сажнів далі від верхнього простця. Це роблять для того, щоб поплавець встиг до підходу до вимірювального (верхнього) простця набрати швидкости, що дорівнює швидкості течії води. Поплавці стараються пускати так, щоб вони переходили за дальшого свого руху по змозі через місця вибраних вертикалей головного простця; цього можна, звичайно, досягти, лише заздалегідь пускаючи досвідні поплавці, які показують напрям течій струмин. У момент, коли поплавці проходять верхній і низовий простець, один з учасників роботи, що пильнує рух поплавців, сигналізує (наприклад, прапорцем) другому, який зачеркує з певного місця поплавець пантометром, і, таким робом, встановлюється траєкторію руху поплавця на ділянці річки між простцями. Час, коли поплавці, переходять верхній і нижній простці, відзначають секундоміром. За великих ширин річки, щоб пильнувати поплавці доводиться користуватись з бінокля. Вирисовуючи тепер на папері, де нанесено план даної ділянки річки, траєкторію руху поплавців, визначають довжину шляхів, що їх проходять поплавці, і, знавши час проходження цих довжин, очевидно, легко визначають швидкість руху поплавців, отже, і швидкість течії води на різних віддалях од берегу. Середня з цих швидкостей дає середню поверхневу швидкість на даній ділянці, від якої вже можна перейти до середньої швидкости по перерізу.

За старанної роботи, за правильно вибраної віддали між верхнім і нижнім простцями, як показує практика, можна добути більш-менш достатні результати з поплавцями.

Найдовершеніші прилади визначати швидкості є гідрометричні трубки і гідрометричні млинки, або крила. Гідрометричні трубки, що мають назву трубок Піто-Дарсі (Pitot-Darcy), нині конструюють з двох одігнутих під прямим кутом трубок (m_1) і (m_2) (рис. 172), з яких одну (m_1) одігнуто проти течії, а другу (m_2) за течією.

Трубки (m_1) і (m_2) сполучені між собою обіймицею (O) з ґрантом (k_1). За продовження трубок m_1 і m_2, здебільшого металічних, є скляні трубки (C_1) і (C_2), оточені спільною, так само скляною трубкою (BB), на якій нанесено міліметрові поділи. Верхні кінці скляних трубок переходять знову в металічні трубки (y_1) і (y_2), які сполучаються в одну трубку (y) і мають триходовий ґрант (k). Вище ґранту трубка (y) переходить у циліндр ($ц$) з толоком (n).

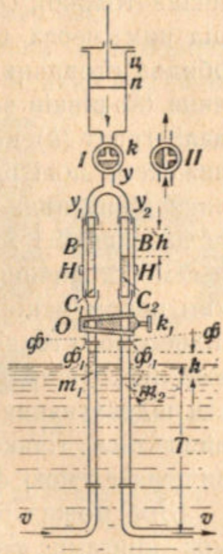

Рис. 172

За положення ґранту (k), позначеного цифрою I, простір циліндру під толоком сполучається із зовнішнім повітровим простором; за положення ж II — з унутрішнім простором трубок (y_1) і (y_2), далі (C_1) і (C_2) і ще далі (m_1) і (m_2). Принцип діяння описаного приладу (конструкція Amsler'а) викладено в розділі VIII § 1 (див. задачу 3). Там найдено, що, коли спустити у воду трубку, вигнуту під прямим кутом проти течії, то рівень води в трубці піднесеться до певної висоти h, при цьому залежність швидкости від висоти (h) визначиться у співвідношенні:

$$v = \sqrt{gh} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2gh} = 0{,}71\sqrt{2gh} = \varphi\sqrt{2gh}.$$

Коефіцієнт φ, що став при цьому рівний 0,71, очевидно, взагалі кажучи, повинен залежати від злагоди відтулини трубки, і його треба визначити досвідною путтю для кожної трубки зокрема. Коли б відігнутий кінець трубки повернути вниз за течією, то картина була б инша: рівень води в трубці знизився б проти рівня води наоколо трубки через висисання води із останньої. Поставивши дві трубки поруч, як у вище описаному приладі, ми, очевидно, матимемо підвищення рівня в лівій і зниження в правій, тоб-то підсилимо діяння води і за тієї ж самої швидкости ріжниця (h) рівнів води у двох трубках буде більша, ніж прибуття в одній трубці, але залежність швидкости (v) від висоти (h) зберігає свій вагальний вигляд, за винятком коефіцієнту φ, який зміниться і який, звичайно, знову треба визначити досвідом. Щоб зручніш відраховувати висоти (h), і є дальше ускладнення приладу; ставлячи ґрант (k) в положення II і піднісши толочок (n) вгору, ми, очевидно, розріджуємо простір під ним; через це зовнішнє атмосферне тиснення піднесе обидва стовпчики води в правій і лівій трубках, але ріжниця (h) рівнів залишиться при цьому незмінна. Повернувши, далі, ґрант (k) в положення I і спустивши толочок униз, ми виженемо повітря з-під толочка наоколо, не порушуючи стояння рівня води в трубках. Перевівши потім ґрант знов у положення II і знов піднісши толочок угору, ми знову піднесемо стовпчики води в трубках і т. д. Продовжуючи таким робом маніпулювати толочком і ґрантом (k), ми, нарешті, піднесемо стовпчики води в скляні трубки (C_1) і (C_2), де вже легко відрахувати ріжницю рівнів. Для більшої точности відрахування є ноніюс (H). Визначивши висоту (h), залишається тільки підрахувати швидкість за аналогічною вищенаведеною формулою *).

Щоб можна було виміряти швидкості за великих глибин, між крисами $\phi\phi$ і $\phi_1\phi_1$ вставляється додаткові ланки трубок. Щоб уникнути впливу капілярности, внутрішній діяметр трубок роблять не менший як 15 *мм*, а, щоб уникнути впливу хвилювання води у водотоці на покази, діяметр відігнутих кінців трубок роблять, навпаки, невеликий: $1 - 1\frac{1}{2}$ *мм*.

Треба звернути увагу на те, що ріжниця стоянь рівнів води в трубках, очевидно, відповідатиме якомусь певному моментові, а не середньому за дане межичасся,

*) Що до впливу кінця трубки Піто на точність результатів вимірів і взагалі про роботу з трубками Піто див.:

H. Blasius. Einige Formen von Pitotmessröhren. Die Turbine. 1910, стор. 150.

K. Ellon. Zeit. d. Ver. d. Ingen. 1919, стор. 989.

Schuster. Experimentelle Untersuchung der Strömungsvorgänge in einer Schnelläufer Francis-Turbine, unter Anwendung eines Verfahrens zur Bestimmung von Stromrichtungen mit Pitot-Röhren. Mitteilungen über Forschungsarbeiten. 1910. Heft 82.

R. Winkel. Stauröhren zur Messung des Druckes und der Geschwindigkeit im fliessenden Wasser. Zeit. des Vereines d. Ingen. 1923, стор. 568—571.

що має, коли пригадати про вплив пульсації на швидкість води у водотоках, посутнє значення.

Ґрант (k_1) є для того, щоб, закривши його, можна було увесь прилад, вийнявши його з води, перенести, наприклад, на берег і тут спокійніше відрахувати висоту (h).

Гідрометричні млинки, або крила в основних своїх рисах складаються з валка (a) (рис. 173), який має ґвинтову різь ($б$); валок, який обертається в кулькових валницях, несе на собі ґвинтове колесо (k), яке підчас течії води уздовж оси валка обертається з певною швидкістю і шнеком ($б$) обертає зубчасте коліщатко (тріб, $з$); останнє на своїй поверхні має звичайно 4 шпеники (m), що виступають з його тіла, до яких дотикається пружинка (p) підчас проходження шпеників під нею; пружинка сполучається з ізольованою від инших частин млинка дотичкою (H_1); друга дотичка (H) не ізольована; електричні проводи (тонкий жильник—$д$), що йдуть від дотичок, сполучаються з батареєю, яка має у своєму колі дзвінок. А що зубчасте коліщатко ($з$) обертається на один зубець, коли валок робить цілий оберт, і тому що на коліщатці буває звичайно сто зубців, то валкові треба зробити сто обертів, щоб коліщатко зробило один оберт; показані вище шпеники (m) на зубчатому коліщатку, дотикаючись з пружинкою (p), що відбуватиметься через кожні 25 обертів валка (за 100 зубців на коліщатку), замикають струм, і відразу ж дзвонить дзвінок, який, отже, дзвонитиме через кожні 25 обертів валка; відси, визначаючи секундоміром межичасся між дзвінками, можна підрахувати кількість обертів валка (n) за одну секунду.

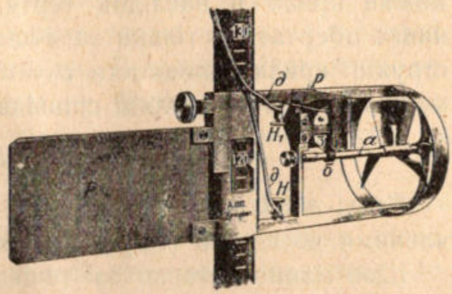

Рис. 173

Шпеники на своїх кінцях мають вирізи, які дають змогу, коли їх відповідно повернути довкола оси, вільно проходити шпеникам під пружинкою; отже, можна регулювати межичасся між дзвонками: коли три шпеники з 4-х не дотикатимуться до пружинки, дзвінок дзвонитиме тільки через кожні 100 обертів валка; коли два шпеники, діяметрально протилежні, не дотикатимуться до пружинки, дзвінок дзвонитиме через кожні 50 обертів валка і т. д.

Оскільки очевидно, що швидкість обертання ґвинтового колеса, отже, і валка, залежить од швидкости течії води, то кількість обертів валка (n) за одиницю (1 *сек.*) є міра швидкости течії води у відповідному місці. А що, крім того, кожне крило в наслідок тертя, яке завжди є на осі, починає обертатися тільки за якоїсь певної, залежної від конструкції крила, швидкости $v_0 = a$, то швидкість течії води можна подати у вигляді співвідношення:

$$v = a + bn.$$

Сталі a і b треба визначати для кожного крила спеціяльними досвідами (таруванням).

Щоб млинок ставав за течією, до нього приробляють особливу тонку й широку платівку (P), так зване стерно. Щоб встановити прилад на певній глибині, його або одягають на металеву штангу, на якій його можна закріпити на якому завгодно місці, або закріпляють його на кінці штанги; в першому випадку штангу встановлюють на дно і прилад пересувають по ній для виміру на різних глибинах, у другому випадку для цього ж переміщають по вертикалі штангу з млинком, яку містять в особливих напрямницях, закріплених на понтоні, помості, містку й т. и.

Описане вище гідрометричне крило має, порівняно, просту конструкцію; складніші й досконаліші конструкції роблять, щоб скоротити час переведення робіт, зробити прилад чутливішим і, нарешті, забезпечити механізм приладу від засмічування й псування різними предметами, що плавають у воді, та й самою водою. На рис. 174 виображено, наприклад, гідрометричне крило, що в нього ввесь механізм закрито, а саме крило підвішано на линві, що її перекинуто через блок (f) на верхньому кінці штанги, і що йде потім на калібрований барабан; повертаючи його за ручку, можна дуже точно підносити й спускати млинок по штанзі; внизу штанга закінчується кружалом, що дає змогу штанзі затоплятись у ґрунт корита завжди на певну глибину; крило має так само кружало (h), підчас спускання якого на кружало штанги замикається шпеником (g)

струм і дзвонить дзвінок, що показує границі спускання млинка.

Чутливість приладу залежить од злагоди валниць, що підтримують валок, а так само від форми ґвинтових лопатей крила. З другого боку, форма лопатей має дуже велике значення на прилипання до них предметів, що плавають у воді, а саме: трави, листя, водоростей, то-що. В цьому відношенні лопаті у формі двоконічних ґвинтових поверхонь, виображені на рис. 175, кращі.

Ґвинтові поверхні можуть бути змінні; за великих швидкостей вживають ґвинтових лопатей з більшим підвищенням.

Щоб цілком забезпечити лічильний механізм приладу, в деяких найновіших конструкціях уміщують його в цілком ізольо-

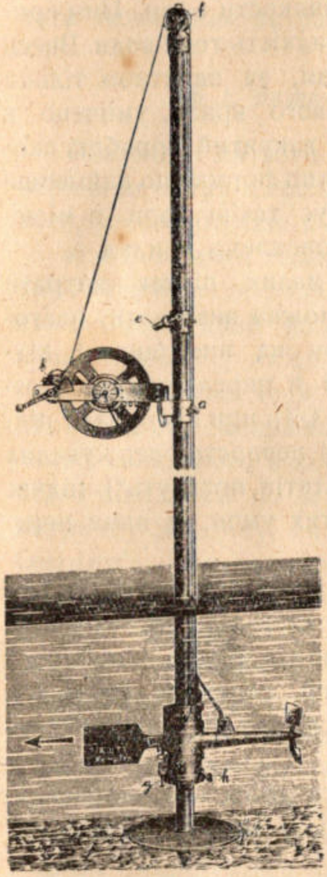

Рис. 174

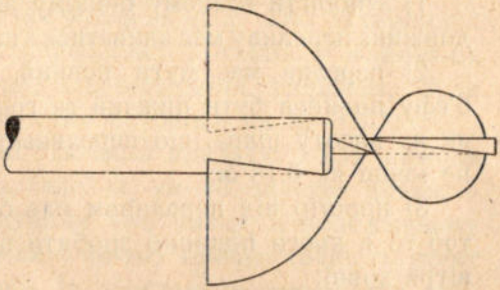

Рис. 175

ваному від води приміщенні; при цьому, наприклад, в одній конструкції передавання обертання до нього від валка відбувається зокола через магнет, що міститься на валку (магнетові млинки системи Mensing'a).

Останніми часами з'явились*) млинки (рис. 176) дуже великої чутливости—системи *DBF* (інженери Dubs, Bitterli, Fischer).

*) Die Wasserkraft. 1922.

Особливість цього приладу в тому, що ґвинтове крило рухає маленьку динамо-машинку, а струм останньої підводиться жильником до дуже чутливого гальванометру, на якому й відраховується, при цьому відхилення стрілки гальванометра прямо-пропорційне до швидкости води. Цим приладом можна визначити миттєву швидкість течії води. Ввесь механізм, за винятком тільки ґвинтового крила, уміщено в цілком закритий коробок, якому надано форми, що найменше порушує течію води в місці, де встановлено прилад.

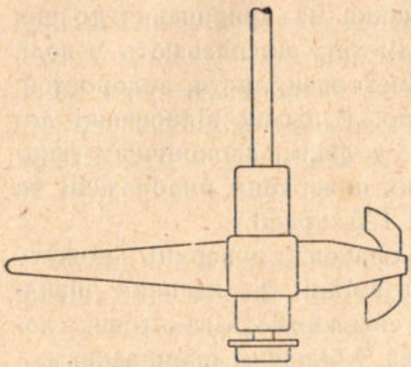

Рис. 176

У малих річках витрати води можна визначати, злагоджуючи на них щитові відтулини й переливи (див. розділ VI, § 4); при цьому для цілковитої певности одержуваних результатів прагнуть*) підчас роботи з переливами додержувати тих умов, за яких переводив досвіди Базен:

1) запобігти всякому бічному звуженню струмини, тоб-то довжина переливу має зливатися з шириною підвідного каналу;

2) перелив має бути повний, тоб-то рівень нижнього б'єфу повинен бути нижчий за гребінь переливу не менш, як на висоту шара, що переливається, але ні в якому разі не менш як 0,15 *м*;

3) простір під переливом має бути добре вентильований, тоб-то в нього повинно зробити цілком вільний підвід повітря зовні;

4) струмина, що переливається, не повинна мати бічного розширення, тоб-то стінки каналу повинні продовжуватись за перелив;

5) висота стінки переливу повинна мати один з таких розмірів: 0,20; 0,30; 0,40; 0,50; 0,60; 0,80;

6) до дерев'яної стінки, щоб утворити гребінь, треба закріпити залізну штабку завтовшки 6—7 *мм*, завширшки 0,20 *м*, і щоб вона виступала над дерев'яною стінкою на 0,1 *м*;

*) А. **Эссен.** Отчет Гидрометрической части Отдела земельных улучшений на Кавказе за 1910—12 г.г. Випуск 2, стор. 102—103.

7) висоту шару над переливом слід визначати на віддалі 5 *м* вище за течією від гребеня переливу.

Додержуючи всіх перелічених умов, уживання формули Базенової (19, розділ VI, § 4) дає дуже точні результати визначення витрати.

§ 4. Визначення витрат води в каналах

Визначати витрати води в каналах можна залежно від величини всіма переліченими вище способами, але, крім того, вживають іще й таких способів:

а) *Визначення середніх швидкостей по вертикалі через гідрометричні жердини.* Гідрометричною жердиною називають дерев'яний або металевий порожнистий стрижень, навантажений у нижній своїй частині з таким розрахунком, щоб у воді, яка тече з певною швидкістю, він тримався вертикально. За правильно вибраної довжини стрижня, звичайно складеного з кількох частин за значних глибин, середні швидкості по вертикалі, що їх визначено через гідрометричну жердину, як показали численні досвіди Francis'а, Gordon'а, Lombardini, Grote і зосібна Cunningham'а в каналах Індії, дуже мало (не більш як на 2—3%) відмінні від тих, які було добуто за порівняних досвідів з млинками; витрати ж, визначені через гідрометричні жердини, були одмінні від справжніх так само не більш як на 3% *).

Гідрометричні жердини так само придатні і для вимірів у великих і малих річках, але за умови цілком правильного корита з одноманітними глибинами в подовжньому напрямі і, до того, в річках з тихою течією: точність робіт з ними зменшується разом із зростанням швидкости течії потоку.

Що ж до правильного вибору довжини жердини, то, за дослідами Cunningham'а і Francis'а, треба довжину (l) затопленої частини жердини робити на 4—5% меншу за глибину (H) вертикали, на якій переводиться вимір швидкости. За цих умов середню швидкість ($v_{сер}$) по вертикалі можна обчислити за швидкістю (v) руху гідрометричної

*) R. Jasmund. Fliessende Gewässer. Handbuch der Ingenieurwissenschaften. Der Wasserbau. 1 Bd. 1923, стор. 587.

жердини із співвідношення:

$$v_{сер} = Kv;$$

при цьому, за досвідами Francis'а перехідний коефіцієнт (K) має вартість:

$$K = 1{,}000 - 0{,}116\left[\sqrt{1 - \frac{l}{H}} - 0{,}1\right].$$

Що ж до способу переведення робіт із гідрометричними жердинами, то він нічим не відрізняється від способу переведення робіт з поплавцями.

b) *Вимір середних швидкостей по всьому перекрою каналу за допомогою рухомих грантів або щитів.* З таких злагод найбільш відомий прилад Е. Andersson'а*), який складається з гумованого полотна, натягненого на раму (рис. 177); при цьому остання тільки на 1 *см* не доходить

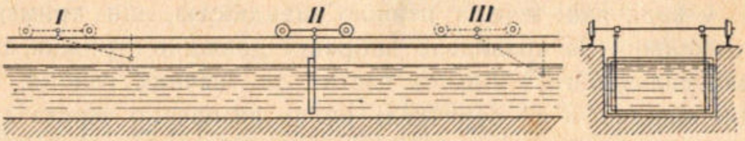

Рис. 177

до стінок і дна каналу. Раму підвішано вільно до горизонтальної оси, що лежить на легкому візку, який може котитись на колесах по рейках, укладених уздовж каналу. Коли спустити щит із положення *I* у воду, нормально до течії останньої (положення *II*) й закріпити його в цьому положенні за допомогою окремих укріпних злагод, то він, під тисненням води, пересуватиметься разом із нею з якоюсь швидкістю, що майже точно збігається (зважаючи на дуже малі опори) з середньою швидкістю течії води в каналі; рух щита триватиме доти, доки особливим приладом його буде затримано, після цього прилад підіймають до положення *III*. Для відліку часу, за який прилад пробігає вимірювальну путь, вживають звичайного секундоміру, а за великих злагод — особливі електричні вимірювачі і пути і часу.

За основну умову вживання екрана Андерссона є наявність довгих, прямих каналів з рівними стінками й незмінного поперечного перекрою.

*) Zeit. d. Vereines Deutsch. Ing. 1907, стор. 627.

§ 5. Вимірювання витрат води в трубопроводах

Це вимірювання можна переводити за допомогою трубок Піто-Дарсі і водомірів. Як вже зазначено вище (розділ III, § 1), вимірювання швидкости по осі труби дає змогу з більшою, порівняно, точністю визначити середню швидкість у поперечному перекрої труби, отже, і секундну витрату води в трубі.

Трубку Піто-Дарсі для цього випадку конструюється (рис. 178) з дуже невеликими згинами на кінцях і герметично вкручується за допомогою особливої обіймиці, що має характер злучника, в стінку труби; уставу кінців трубок по осі труби можна зробити з великою точністю.

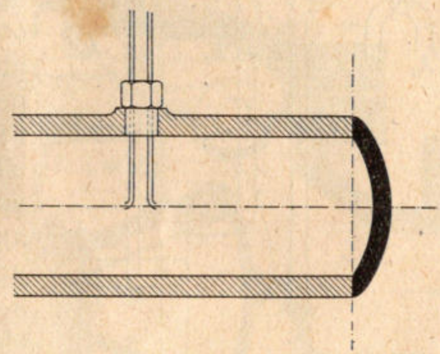

Рис. 178

Водоміри, дуже поширені у водопровідній справі, можна поділити на 4 головні групи: об'ємні, кружалові, швидкісні й водоміри Вентурі.

Всі перелічені групи водомірів мають багато різних конструкцій, списати які в даному короткому підручнику, звичайно, не можна; в дальшому наводиться опис тільки одного якогось зразка водомірів з вищезгаданих груп *).

Об'ємний толоковий водомір системи Кеннеді (Kennedy). На додаваному рисункові (рис. 179) схематично виображено в розрізі водомір Кеннеді. Воду підводиться штуцером A_1, і тече вона триходовим ґрантом (K_1) і трубою (m_1) до вимірювального циліндру (*ц*), тисне знизу на толок (*п*) і підносить його разом із толочилном (*ш*), кінець якого пере-

*) Про водоміри див.:

Труди 3-го (1897), 8-го (1907), 9-го (1909) русских водопроводных съездов.

Труды Донского Отделения Русск. Технич. Общества. 1914, ч. 2.

A. Claus et P. Poinsard. Le compteur d'eau. Paris, 1906.

A. Bergesse. Compteur et limitation automatique de débit. Le Génie Civile, 1906 і 1908 р.

P. Juppont. Le vente de l'eau potable dans les villes. Paris, 1908.

Hütte. 21 і 22 Auflage, II.

ходить у зубчасту мірницю (брусок трибовий, p). Вода, що над толоком, іде трубою (m_2) і виходить ґрантом (k_2) у відвідну трубку (A_5). Брусок трибовий (p) зчіплюється з шестернею ($з$), яка міститься на осі, що виходить на обидва боки й керує, з одного боку, годинниковим механізмом, а, з другого боку, становить собою важель (P), який так само, за допомогою особливого шпеника діє на противагу ($П$) і становить її, припустімо, у вертикальне положення; при цьому противага повертає обидва ґранти (k_1) і (k_2) на 90°, після чого вода тече вже через (A_2) і (k_2) трубою (m_2) в горішню частину циліндру ($ц$) і примушує толок спуститись униз; вода з-під толоку відходить трубою (m_1) і ґрантом (k_1) у трубу (A_6), що сполучається з трубою (A_5) у спільну відвідну трубу (A_4). Змінному то в один, то в другий бік обертанню трибка ($з$) особливий механізм надає безупинного кругового обертання, що рухає стрілки циферблату. А що об'єм циліндру точно відомий, то рух стрілки по циферблату показує, яка кількість води в певне межичасся пройшла крізь апарат. Толок, що ходить у циліндрі, цілком непроникливий через кавчукове кільце, яке качається між толоком і стінками циліндру, що в той самий час тертя між останніми зводить до мінімуму. За цим типом будується двоциліндрові, трициліндрові й навіть чотирициліндрові водоміри.

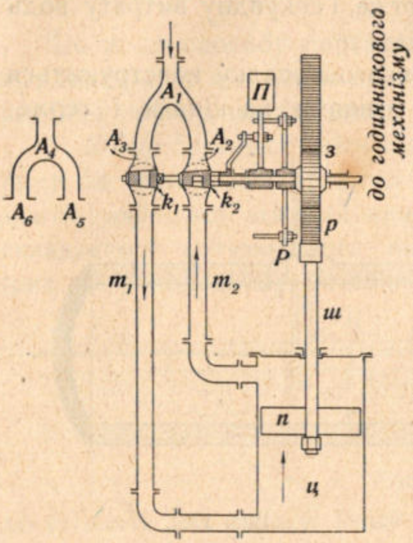

Рис. 179

Об'ємні водоміри вважається за дуже точні водоміри, що відраховують з однаковою точністю прохід води в 0,1 літра за секунду і в кілька літрів і, навіть, десятків літрів; перевага їхня є мала чутливість до чистоти води. Їхні хиби — велика вага і висока ціна проти инших типів; крім того, деякі системи об'ємних водомірів дуже шумливі в роботі, що, звичайно, становить певну незручність, зокрема вночі;

нарешті, до хиб можна зарахувати й те, що, за пошкодження деяких частин водоміру, иноді зовсім зупиняється подавання води.

Кружаловий водомір системи Сіменса виображено на додаваному рисункові (рис. 180). Посутню частину

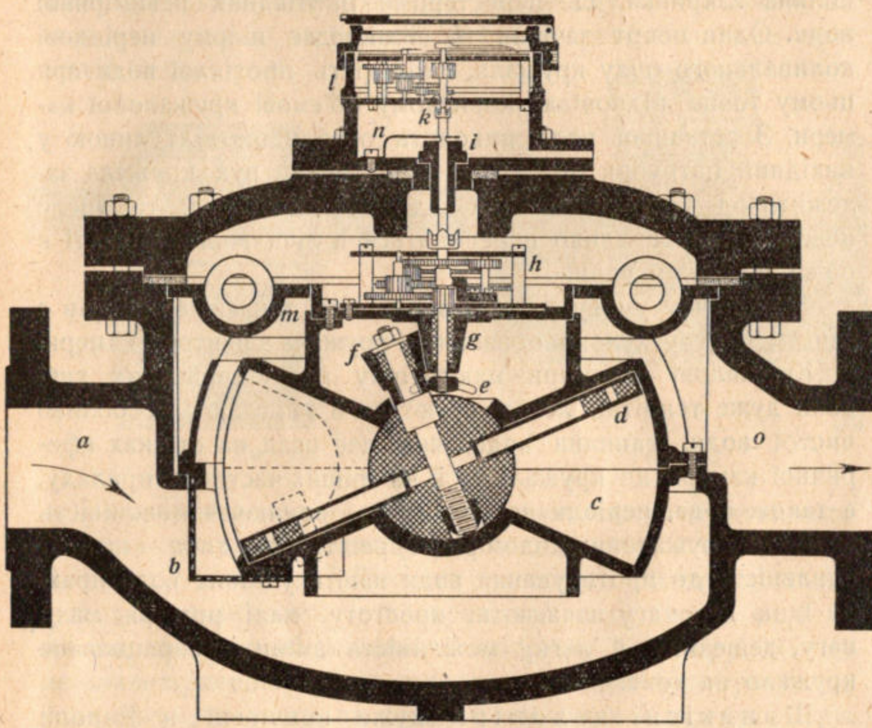

Рис. 180

водоміру цієї системи становить пласке кружало (*d*), встановлене на кульковій валниці, і яке міститься в камері (*c*) з конусуватими верхніми й нижніми днищами, до яких це кружало ввесь час дотикається по твірній; у верхньому днищі камери є відтулина, через яку проходить невеликий шпиндель від кулькової валниці; цей шпиндель, що має на кінці конічну голівку (*f*), останньою дотикається до конічного ж наконечника (*g*) вертикального валка, який передає за допомогою трибової передачі обертальний рух кружала до лічильного й вказівного механізмів (*h*) і (*l*). Вода, надходячи до водоміру випускним патрубком (*a*), проходить спочатку сітку (*b*) і, обмиваючи всю вимірювальну камеру потрапляє у власно вимірювальний простір (*c*) й надає своєрідного коливально-обертального руху кружалу; при цьому рух кружала через злагоду напрямних конусів (*g*) і (*f*) відбувається так, що між кружалом і камерою утворюється щільна закривка, що перестерігає протікання невиміряної води. Один оберт зачіпки (*l*) відповідає цілому періодові коливального руху кружала, і кількість протіклої води при цьому точно відповідає корисному об'ємові кружалової камери. З останньої вода виходить особливою відтулиною у вихідний патрубок (*o*). А що обертальний рух кружала залежить од швидкости течії води або її об'єму, то число обертів безпосередньо переводиться в лічильному апараті в об'єм протіклої води.

За конечну умову для правильности показів водомірів є злиття центру кулькової вальниці кружала з центром камери.

Кружалові водоміри мають цілу низку серйозних хиб: вони дуже тендітні, легко псуються й вимагають особливо чистої води; вапняна вода, яка дає осад на стінках сферичної камери на кружалі та й на инших частинах приладу, а також вода, періодично каламутна, виключає можливість уживати кружалових водомірів; нарешті, їхня хиба — велика схильність до проточування води навіть у нових водомірах. За їхню перевагу вважають: простоту, малі розміри, малу вагу, дешевину й легку можливість змінити спрацьоване кружало на нове.

Швидкісні водоміри дуже поширені в Европі; поділяють їх на дві головні системи: крильчасті і Вольтманівські.

В тих і в тих вода, проходячи через коробку водоміру, примушує обертатися колесо, яке передає обертання лічильному механізмові. В крильчастих водомірах колесо має форму, виображену на додаваному рисунку (рис. 181); у Вольтманівських водомірах (рис. 182) колесо формою має багато спільного з ґвинтовими колесами гідрометричних млинків. Щоб полегшити й зменшити тертя у валницях, у деяких системах водомірів першого типу колеса роблять з кавчуку або з целулоїду; для кращого впливу води на колесо, патрубок, що ним підводиться воду на колесо, в деяких конструкціях похилений що до зовнішнього кола колеса; в инших конструкціях вода, перед тим, як ступити на колесо, проходить крізь відтулину в стінці, яка оточує колесо і що має певний напрям до лопатей колеса.

Обертання колеса в тому і в тому типі водомірів передається лічильним апаратом, а що число обертів пропорційне до швидкости течії води або об'єму її, то лічильний апарат відразу ж переводить числа обертів на об'єми протічної води.

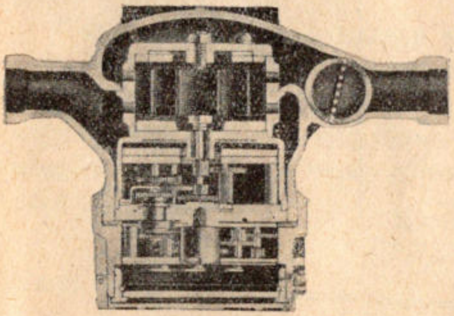

Рис. 181

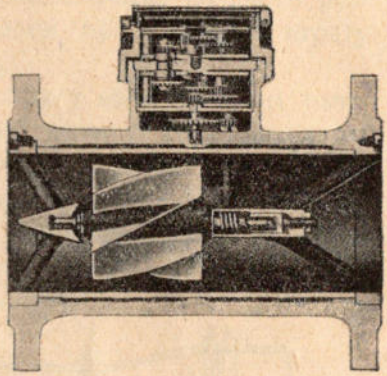

Рис. 182

Швидкісні водоміри самою своєю суттю не можуть мати такої точности, за рівних умов, як толокові, але вони дешевші від останніх. Точність реєстрації води особливо низька за малих кількостей протічної води, і вона стає то менша, що більші розміри швидкісного водоміру що до можливих зменшень витрат води; це цілком буде зрозуміло, коли звернути увагу на те, що за великих поперечних перекроїв і малих секундних витрат, швидкість течії дуже легко може знизитись до тієї границі, за якої водомір уже перестає показувати подання. За значних коливань витрати, можна усунути цю хибу, тільки встановивши два водоміри— одного великого, другого малого, але з обов'язковою умовою, щоб в періоді малого споживання води працював малий водомір.

Коли ж, не зважаючи на вказану посутню хибу водомірів цього типу, вони дуже поширені у міських водопостачаннях, то це можна пояснити тим, що для водогінного господарства вигідніше допустити деякий недооблік виданої населенню води, ніж ставити дорогі водоміри і мати для цього дуже кваліфікований персонал.

Водоміри Вентурі, одну з конструкцій яких для холодної й гарячої води виображено на рис. 183, і принцип хнього діяння вже описано в розділі II, § 2.

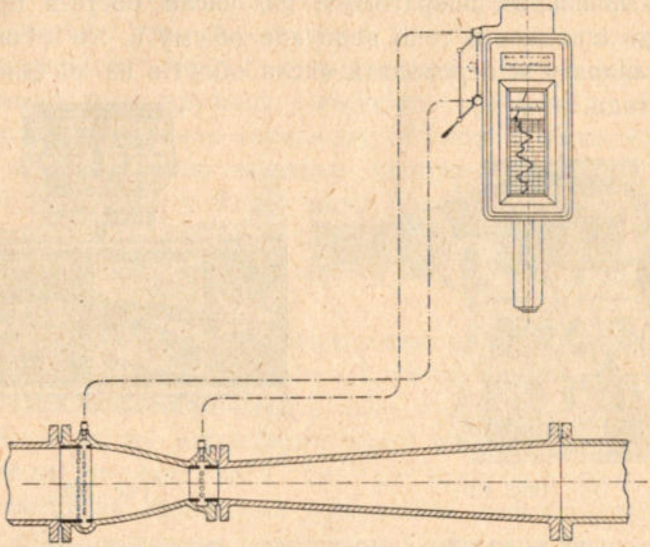

Рис. 183

На рисункові водомір виображено разом із приладом для автоматичного записування ріжниці тиснень у вимірювальних перекроях апарату. А що від ріжниці тиснень легко перейти до витрат води, то є конструкції, які безпосередньо автоматично реєструють кількість протічної через водомір води. Реєстраційний апарат водоміру цього типу і є найскладніша і найдорожча злагода проти аналогічних злагод инших водомірів. Тому водоміри Вентурі можуть конкурувати своєю вартістю з водомірами инших типів лише за великих діяметрів (над 200 *мм*). Зокрема вони придатні до реєстрування споживання води з відкритих каналів або жолобів, коли головну увагу треба звертати на зменшення втрати в напорі (підчас обліку води з метою зрошування та ин.). Цілковита нечутливість до каламутности води робить водоміри Вентурі в таких випадках особливо цінними.

§ 6. Хемічна метода визначати витрати води

Суть хемічної методи [1]) визначати витрати води є в тому, що в потік уводиться якусь цілком певну кількість концентрованого розчину якоїсь соли, найчастіш чищеної кухонної соли, і на якійсь віддалі від цього місця беруть пробу води з потоку; ступінь розводнювання соляного розчину й дозволяє зробити висновок про секундну втрату води в потоці.

Справді, коли відшукувану витрату води в потоці означити через Q, ступінь концентрації розчину соли, заведеної в потік, через C, кількість заведеного в потік за одиницю часу (1 *сек.*) розчину соли через q, ступінь концентрації розчину у взятій пробі через c, то, очевидно, можна написати таке співвідношення:

$$Qc = qC,$$

відки

$$Q = q\frac{C}{c}\cdot$$

Хай, наприклад, заведено в потік 0,15 *л/сек* концентрованого розчину соли, що містить 300 *г* соли в одному літрі, а взята з потоку проба містить 0,02 *г* соли в одному літрі, тоді за вищенаведеним співвідношенням витрата води в потоці буде:

$$Q = \frac{300 \,.\, 0{,}15}{0{,}02} = 2250 \,\frac{\text{літр}}{\text{сек.}} = 2{,}25 \,\frac{м^3}{\text{сек.}}\cdot$$

Щоб вимірювання витрати описаною методою цілком удалось, треба виконати три умови:

---

[1]) E. F. Cote et H. Bellet. La mesure du débit dans les essais de turbines hydraul. 1909.

A. Boucher et R. Mellet. Jaugeages par titrations et applications de la titration des chlorures au jaugeage de débits. Bull. techn. de la Suisse Romande. 1910. № 11.

Dr. Collet et Dr. Mellet. Jaugeages par titration. 1913. Mitteil. der Abt. der Schweiz. Landeshydrographie.

W. Zuppinger. Neuere Messmethoden zur Bestimmung von Wassermengen. Zeit. für d. gesam. Turbinenwesen. 1913.

W. Müller. Über ein neues Wassermessverfahren. Zeit. f. d. gesam. Turbinenwesen. 1915, стор. 205.

а) рівномірність підводу концентрованого розчину;

б) цілковите перемішування розчину в потоці;

в) точна аналіза розчинів соли.

Рівномірности підводу концентрованого розчину води можна досягти через різні пристрої. На додаваному, наприклад, рисункові (рис. 184) наведено схему досить простої

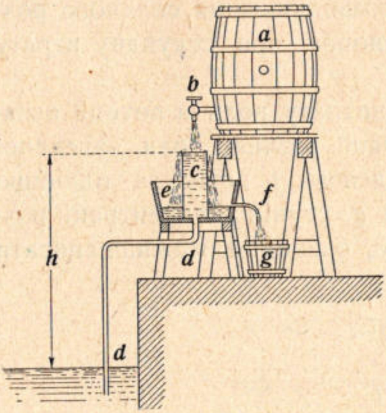

Рис. 184

злагоди, що складається з посудини (*a*), яка містить концентрований розчин соли, і з кадобу (*e*), з закріпленим у ньому щільно циліндром (*c*); з посудини (*a*) розчин витікає через ґрант (*b*) в циліндр (*c*), а з останнього трубкою *dd* в потік. Витікання регулюється так, що частина розчину раз-у-раз переливається через верхні вінця циліндру (*c*) в кадіб (*e*); таким робом, є можливість більш-менш точно визначити напір (*h*), за яким обчислюється швидкість витікання розчину соли з трубки *dd*, і який є не инше що, як нівелювальна віддаль між верхньою поверхнею шару розчину, що переливається через вінця циліндру (*c*), і рівнем води в потоці; щоб добути ще точніші результати, рекомендується грубину шару, що переливається, мати в 1000 разів меншу від напору (*h*). Розчин, що потрапляє до кадобу (*e*), переливається трубкою (*f*) у посудину (*g*), з якої його знову можна перелити у бочку (*a*). Друга умова точности визначення витрат розглядуваною методою—перемішування розчину в потоці — буває виконана то краще, що неспокійніша течія потоку; тому найбільш сприятливу умову застосувати хемічну методу дають річки невеликі, бурхливі, гірські, порогуваті, і найменш сприятливу умову становлять річки великі, спокійні.

Справді, досвіди Boucher і Mellet для визначення витрат у відповідних каналах високонапірних гідравлічних установ, де, звичайно, і треба було сподіватись цілковитого перемішування, дали разюче точні результати. Такі самі результати одержувано й підчас визначення витрат у малих річках. Застосування хемічної методи до визначення витрат у таких великих річках, як от Волга, як це зробив інженер Н. М. Бернадський, давали не завжди достатні результати; проте, треба сказати, що точність результатів підчас робіт на таких великих річках дуже багато залежить од правильно обраної віддали між місцем впуску в річку концентрованого розчину і місцем, де беруть пробу після перемішування, а так само від правильно вибраної тривалости впуску розчину в річку. Так, на роботах Бернадського[1]), коли було взято пробу для визначення концентрації в двох верствах від місця пуску розчину і тривалість пуску останнього в 90′0″, розходження витрати, визначеної хемічним способом, з витратою, визначеною за допомогою млинка, виявилося всього в 0,3%. За инших тривалостей впуску розчину та на инших віддалях розходження було значно більше і доходило до 38,3%. Але при цьому треба вказати на надзвичайно великі витрати соли підчас вживання хемічної методи визначення витрат у великих річках: у Бернадського витрата соли доходила до 7 пудів на $1 \frac{саж^3}{сек.}$ витрати річки.

Виконання третьої умови залежить цілком од підготованости персоналу, який провадить аналізу розчинів, старанности й чистоти роботи та наявности першорядних розчинів, посуду і взагалі відповідного устаткування. Як реактив, вживається майже виключно азотан срібла $AgNO_3$ і хромат двокалійний K_2CrO_4.

За Collet'ом, коли через n_1, n_2, n_3 (в $см^3$) означити кількість розчину азотану срібла, яку потрібно для концентрованого розчину соли, добутого з одного літру дестильованої води, для одного літру річкової води в її природному стані і для одного літру річкової води, взятої, як проба, після перемішування з розчином соли, то витрату води в річці визначиться за формулою:

$$Q = q\left(\frac{n_1}{n_3 - n_2} - 1\right),$$

коли через q означимо кількість літрів концентрованого розчину води, що його випускається в річку за 1 секунду,—

[1]) В. И. Владычанский. Гидрометрия. 1922.

ця кількість не повинна бути менша за 0,0001 припущеної витрати (Q).

Щоб визначити концентрацію розчинів, можна скористуватися з вимірювання їхньої електропровідности. Для цього вживають приладу, збудованого за принципом Уітстонового містка (рис. 185). Як відомо, коли позначити опори галузок AB, BD, CD і CA відповідно через x, b, d, c, то, коли стрілка гальванометра вже більше не відхиляється, невідомий опір

$$x = \frac{cb}{d}.$$

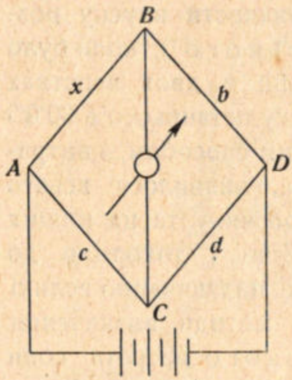

Рис. 185

Розрізавши тепер одну з галузок, наприклад AB, і розрізані кінці сполучивши провідниками з двома мідними нікльованими платівками, скріпленими паралельно з якимись ізоляторами, можна, затоплюючи ці платівки поперемінно в чисту воду й розчини різних, раніш відомих концентрацій, поділкувати прилад так, що, навпаки, за затоплювання платівок у розчин невідомої концентрації, після відхилення стрілки гальванометра легко визначити концентрацію даного розчину.

СПИСОК КНИГ

з гідравліки та гідродинаміки, що з них автор користувався, складаючи цього підручника *)

Астров, А. И. Гидравлика, Москва, 1911.

Бахметев, Б. А. Гидравлика, Ч. I й II, Петроград, 1913.

Бахметев, Б. А. О неравномерном движении жидкостей в открытых каналах и руслах, Петроград, 1912.

Максименко, Ф. Е. Курс Гидравлики, Москва, 1921.

Павловский, Н. Н. Гидравлический справочник, Ленінград, 1924.

Саткевич, А. А. Аэродинамика, как теоретическая основа авиации, Ленінград, 1923.

Allievi, L. Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Leitungen, Berlin, 1909.

Appel, P. Traité de Mécanique Rationelle, T. 3, Paris, 1909.

Banki, D. Energie-Umwandlungen in Flüssigkeiten, Bd. I, Berlin, 1922.

Boulanger, A. Hydraulique Générale, Paris, 1900.

Bubendey, J. F. et Engels, H. Praktische Hydraulik, Leipzig, 1923.

Budau, A. Kurzgefasstes Lehrbuch der Hydraulik, Wien, 1921.

Flamant, A. Hydraulique, Paris, 1923.

Forchheimer, Ph. Hydraulik, Leipzig, 1914.

Gibson, A. H. Hydraulics and its Applications, London, 1925.

Th. v. Kàrmàn und T. Levi-Civita, Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik, Berlin, 1924.

Lorenz, H. Technische Hydrodynamik, Berlin, 1910.

Mises, R. Elemente der Technischen Hydromechanik, T. 1, Leipzig, 1914.

Pöschl, Th. Lehrbuch der Hydraulik, Berlin, 1924.

Prasil, Fr. Technische Hydrodynamik, Berlin, 1913.

Weil, L. W. Neue Grundlagen der technischen Hydrodynamik, Berlin, 1920.

Weyrauch, R. Hydraulisches Rechnen, Stuttgart, 1921.

---

*) Журнальну літературу зазначено на сторінках підручника.

ЗМІСТ

Вступ

РОЗДІЛ I

Рівновага плинних тіл

РОЗДІЛ II

Рух ідеальних та реальних рідин

РОЗДІЛ III

Рівномірна течія води в трубах

РОЗДІЛ IV

Рівномірна течія води в річках і каналах

РОЗДІЛ V

Течія усталена, або поволі змінювана (або нерівномірна)

РОЗДІЛ VI

Течія усталена, але швидко мінлива

РОЗДІЛ VII

Неусталена течія рідини

РОЗДІЛ VIII

Тиск рухомої рідини на стінки, що вона їх обтікає

РОЗДІЛ IX

Гідравлічні виміри