

**Похильчук І. О., к.т.н., старший викладач, Тимейчук О. Ю., к.т.н., доцент, Костюк О. П., к.т.н., доцент** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

### **ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ВИТІКАННЯ РІДИНИ ІЗ ВЕРТИКАЛЬНО РОЗМІЩЕНОЇ ПОРОЖНИНИ ДЕТАЛІ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ**

Для дослідження руху рідини у вертикальній порожнині деталі, що обертається, була наведена розрахункова схема. Побудована математична модель та виведене лінійне диференціальне рівняння першого порядку, яке описує процес руху рідини. Для розв'язку цього рівняння було використано метод Бернуллі.

Проведено математичне та комп'ютерне моделювання розподілу швидкості елементарного об'єму рідини вздовж порожнини циліндричної та конфузornoї форм для різних перепадів тиску. Для порожнини циліндричної та конфузornoї форм визначено залежність швидкості рідини на виході від їх кута повороту відносно вертикальної осі.

Результати комп'ютерного моделювання показали, що при заданих параметрах відвід рідини можливий при «від'ємному» перепаді тиску (тиск на виході із порожнини більший тиску на вході в порожнину) не більше 0,7 МПа, а конфузornoість порожнини не сприяє руху рідини через порожнину.

З побудованих графіків розподілу швидкості елементарного об'єму рідини вздовж циліндричної та конфузornoї порожнини видно, що при збільшенні частоти обертання вплив перепаду тиску на величину швидкості руху рідини в порожнині зменшується.

**Ключові слова:** розрахункова схема; циліндрична порожнина; конфузorno порожнина; метод Бернуллі.

**Розрахункова схема руху рідини** через вертикальну порожнину деталі, що обертається, показана на рис. 1.

Для дослідження руху рідини розглянемо випадок, коли у втулці виконано чотири такі порожнини.

Для елементарного об'єму рідини, що рухається вздовж порожнини, запишемо **рівняння відносного руху** вздовж осі  $z$ :

$$ma_z = F_p + F_B^n - F_G \cos \varphi - F_T. \quad (1)$$

Тут  $\cos \varphi$  враховує зміну положення каналу відносно вертикальної осі під час обертання.

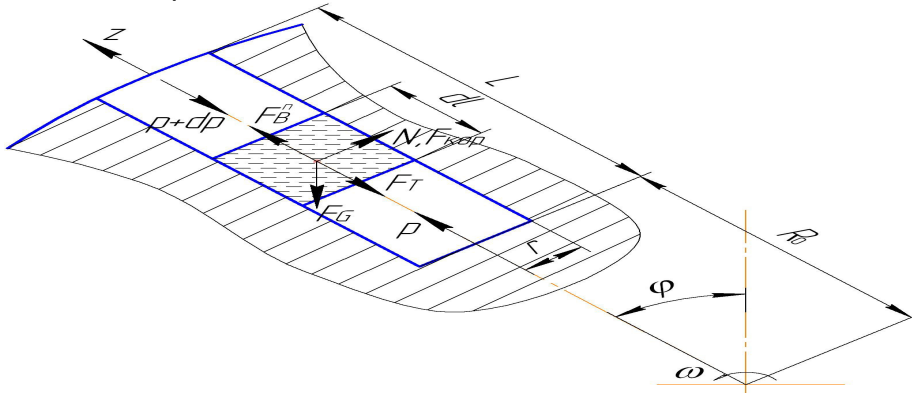


Рис. 1. Розрахункова схема руху рідини

**Визначимо сили, що входять у рівняння (1):**

- сила, яка виникає від різниці тисків,  $F_p$ :

$$F_p = -\frac{\partial p}{\partial l} Sdl; \quad (2)$$

- сила тяжіння  $F_G$ :

$$F_G = \rho g Sdl; \quad (3)$$

відцентрова сила, що виникає від переносної кутової швидкості при обертанні циліндричної порожнини заповненою вловленою рідиною,  $F_B^n$ :

$$F_B^n = \omega^2 \rho S(R_0 + l)dl; \quad (4)$$

- сила тертя  $F_T$ , яка виникає від дотичних напружень,  $F_{T\tau}$  та маси рідини  $F_{TG}$ :

$$F_T = F_{T\tau} + F_{TG}; \quad (5)$$

- сила тертя від дотичних напружень  $F_{T\tau}$ :

$$F_{T\tau} = \frac{\pi}{4} \rho \lambda r v^2 dl; \quad (6)$$

- сила тертя, яка враховує масу рідини, що рухається вздовж порожнини  $F_{TG}$ , дорівнює

$$F_{TG} = \lambda N, \quad (7)$$

де  $N = F_G \sin \varphi - F_{\text{кор}}$  – сумарна реакція на стінки каналу;  $\varphi$  – кут по-

вороту порожнини відносно вертикальної осі ( $0 \leq \phi \leq \pi$ ) ;  
 $F_{кор} = ma_{кор} = \rho Sdl 2\omega v_z$  – сила, що виникає від коріолісового прискорення  $a_{кор} = 2\omega v_z$ ;  $v_z$  – відносна швидкість вздовж осі порожнини.

Врахувавши, що  $a_z = v_z \frac{dv_z}{dl}$ , підставимо вирази (2)–(5) у рівняння (1)

$$v_z \frac{\partial v_z}{\partial l} \rho Sdl = - \frac{\partial p}{\partial l} Sdl + \omega^2 (R_0 + l) \rho Sdl - g \rho Sdl \cos \varphi - \rho \lambda dl \left( \frac{\pi}{4} r v_z^2 + S(g \sin \varphi - 2\omega v_z) \right). \quad (8)$$

Розділимо ліву та праву частини рівняння (8) на  $m = \rho Sdl$

$$v_z \frac{\partial v_z}{\partial l} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + \omega^2 (R_0 + l) - g \cos \varphi - \lambda \left( \frac{v_z^2}{4r} + g \sin \varphi - 2\omega v_z \right). \quad (9)$$

Домножимо ліву та праву частини рівняння (9) на “2”, отримаємо диференціальне рівняння відносно ( $v_z^2$ ):

$$2v_z \frac{\partial v_z}{\partial l} = Q(l) + E v_z^2,$$

або

$$\frac{\partial}{\partial l} (v_z^2) = Q(l) + E v_z^2, \quad (10)$$

де  $E = -\frac{\lambda}{2r}$ ,  $Q(l) = -\frac{2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + 2\omega^2 (R_0 + l) - 2g(\cos \varphi + \lambda \sin \varphi - 2\omega)$ .

Для спрощення запису, зробимо заміну  $v_z^2 = z$ , тоді диференціальне рівняння (10) запишемо у вигляді

$$\frac{dz}{dl} = Q(l) + Ez,$$

або

$$\frac{dz}{dl} - Ez = Q(l). \quad (11)$$

Як ми бачимо, в загальному випадку, рівняння (11) – це лінійне рівняння першого порядку. Для його розв'язку застосуємо метод Бернуллі.

Нехай

$$z = f(x, y) = xy, \quad \text{а} \quad \frac{dz}{dl} = x \frac{dy}{dl} + y \frac{dx}{dl}. \quad (12)$$

Підставимо (12) в (11) і отримаємо

$$x \left( \frac{dy}{dl} - Ey \right) + y \frac{dx}{dl} = Q(l). \quad (13)$$

Виберемо таку функцію  $y(l)$ , щоб

$$\frac{dy}{dl} - Ey = 0. \quad (14)$$

Розділимо змінні

$$\frac{dy}{y} = Edl. \quad (15)$$

Після інтегрування отримаємо

$$y = e^{El+C_1}. \quad (16)$$

Так як нам достатньо якого-небудь відмінного від нуля розв'язку (16), то можемо прийняти  $C_1 = 0$ , тобто

$$y = e^{El}. \quad (17)$$

Підставляємо (17) в (13), отримаємо

$$dx = e^{-El} Q(l) dl. \quad (18)$$

Приймаємо  $\frac{\partial p}{\partial l}$  рівним градієнту тиску, тобто  $\frac{\partial p}{\partial l} = \text{const}$ , і проінтегруємо (18), отримаємо

$$x = -e^{-El} \left( \frac{C_3}{E} + \frac{C_4}{E} \left( l + \frac{1}{E} \right) \right) + C_5, \quad (19)$$

де  $C_3 = -\frac{2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + 2\omega^2 R_0 - 2g(\cos \varphi + \lambda \sin \varphi - 2\omega)$ ,  $C_4 = 2\omega^2$ .

Підставимо (17) і (19) у перше рівняння (12)

$$z = e^{El} C_5 - \frac{1}{E} \left( C_3 + C_4 \left( l + \frac{1}{E} \right) \right). \quad (20)$$

Врахуємо початкову умову  $z(0) = 0$  і знайдемо  $C_5$

$$C_5 = \frac{C_3}{E} + \frac{C_4}{E^2}. \quad (21)$$

Остаточно отримаємо

$$z = \frac{1}{E} \left( e^{El} \left( C_3 + \frac{C_4}{E} \right) - \left( C_3 + \frac{C_4}{E} (El + 1) \right) \right),$$

або

$$v = \sqrt{\frac{1}{E} \left( e^{El} \left( C_3 + \frac{C_4}{E} \right) - \left( C_3 + \frac{C_4}{E} (El + 1) \right) \right)}. \quad (22)$$

Користуючись виразом (20) визначимо залежність швидкості робочого середовища на виході із радіальної порожнини від її кута повороту відносно вертикальної осі  $v = f(\varphi)$  (таблиця), для таких значень робочих параметрів: частота обертання  $n = 955 - 2800 \text{ об/хв}$  ( $\omega = 10001 - 29322 \text{ рад/с}$ ), перепад тиску  $dp = 0 \text{ МПа}$ , довжина порожнини  $L = 0,02 \text{ м}$ , радіус обертання  $R_0 = 0,07 \text{ м}$ , радіус циліндричного порожнини  $r = 0,005 \text{ м}$ , гідравлічний коефіцієнт  $\lambda = 0,11$  (для  $Re = 580$ , густина  $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$ ).

Таблиця

Швидкість робочого середовища при виході  
із радіальної порожнини

Кут $\varphi$ , °	$n$ , об/хв			
	955	1550	2200	2500
0	13,01	21,14	30,01	34,11
45	13,01	21,14	30,01	34,11
90	13,03	21,15	30,02	34,11
135	13,05	21,16	30,03	34,12
180	13,06	21,17	30,03	34,13

**Отримані результати досліджень** показують, що в цілому кут повороту радіальної порожнини відносно вертикальної осі не впливає на величину швидкості робочого середовища (різниця в значеннях незначна), але у вертикальному положенні вона найменша. Тому дослідження руху рідини через радіальну порожнину достатньо провести для одного положення (при  $\varphi = 0$ ).

Для конфузорної порожнини можемо використати (9), з врахуванням того, що  $r = f(l) : r = \frac{R_2 - R_1}{L} l + R_1$ , або  $r = Al + R_1$ , де

$$A = \frac{R_2 - R_1}{L}.$$

У цьому випадку рівняння розподілу швидкості має такий вигляд

$$v = \sqrt{(Al + R_1)^k [F(l) - F(0)]}. \quad (23)$$

Користуючись виразами (22) та (23), за допомогою ПК, для різ-

них перепадів тиску  $dp = 0 - 0,7 \text{ МПа}$ , при  $\varphi = 0$  побудуємо графіки розподілу швидкості елементарного об'єму рідини вздовж циліндричної та конфузорної порожнини  $v = f(l)$ , відповідно (див. рис. 2 – рис. 5). Частота обертання  $n = 955 - 2800 \text{ об/хв}$  ( $\omega = 100,01 - 293,22 \text{ рад/с}$ ), довжина порожнини  $L = 0,02 \text{ м}$ , радіус обертання  $R_0 = 0,07 \text{ м}$ , радіус циліндричної порожнини  $r = 0,005 \text{ м}$  (для конфузорної порожнини – початковий радіус  $R_1 = 0,01 \text{ м}$ , радіус вихідного отвору  $R_2 = 0,005 \text{ м}$ ), гідравлічний коефіцієнт  $\lambda = 0,11$  (для  $Re = 580$ , густина  $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$ ).

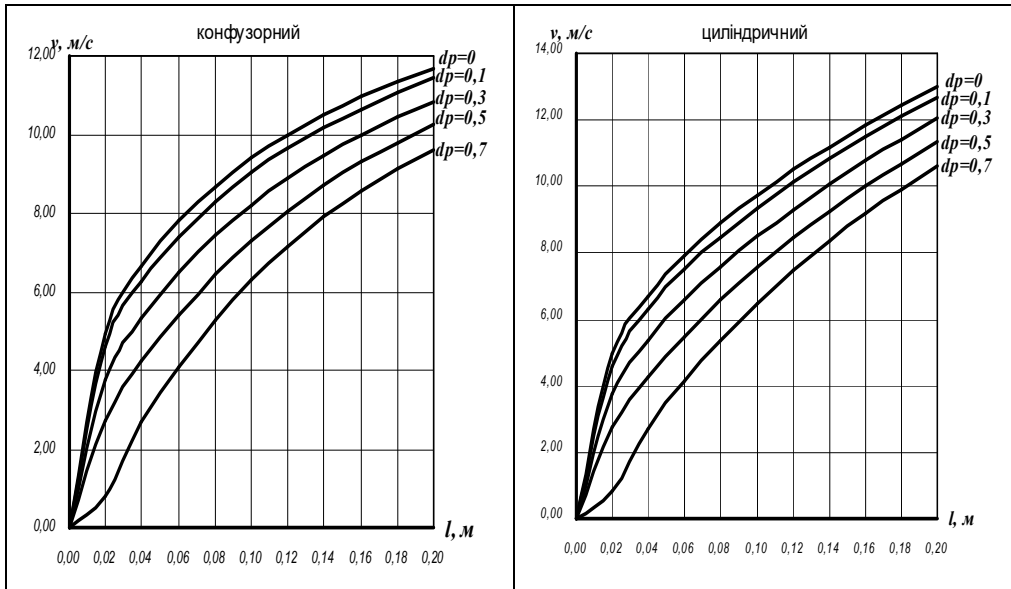


Рис. 2. Графіки розподілу швидкості елементарного об'єму рідини вздовж каналу  $v = f(l)$  при частоті обертання  $n = 955 \text{ об/хв}$  ( $\omega = 100,01 \text{ с}^{-1}$ )

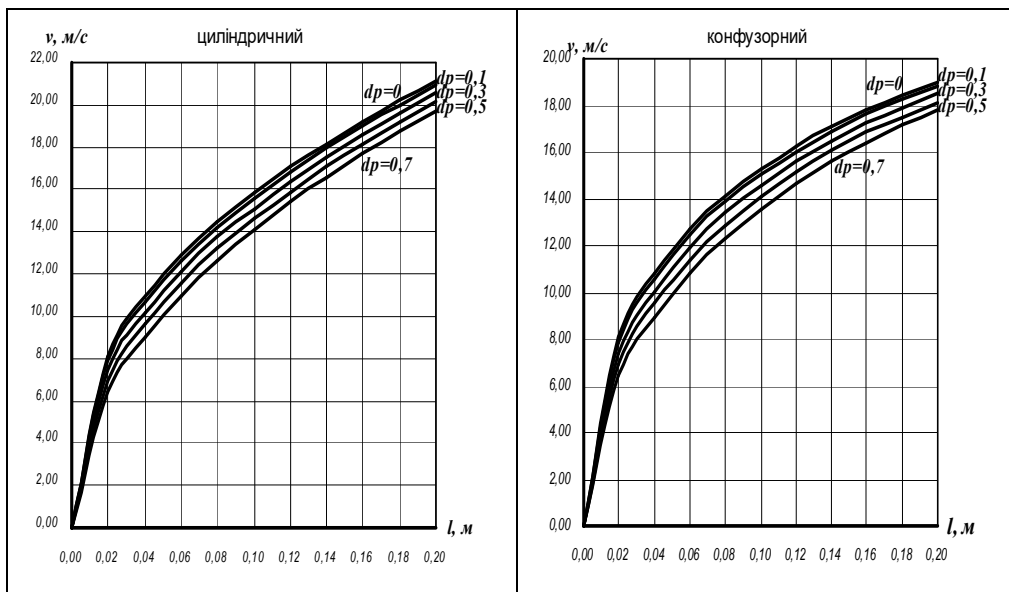


Рис. 3. Графіки розподілу швидкості елементарного об'єму рідини вздовж каналу  $v = f(l)$  при частоті обертання  $n = 1550 \text{ об/хв}$  ( $\omega = 157,08 \text{ с}^{-1}$ )

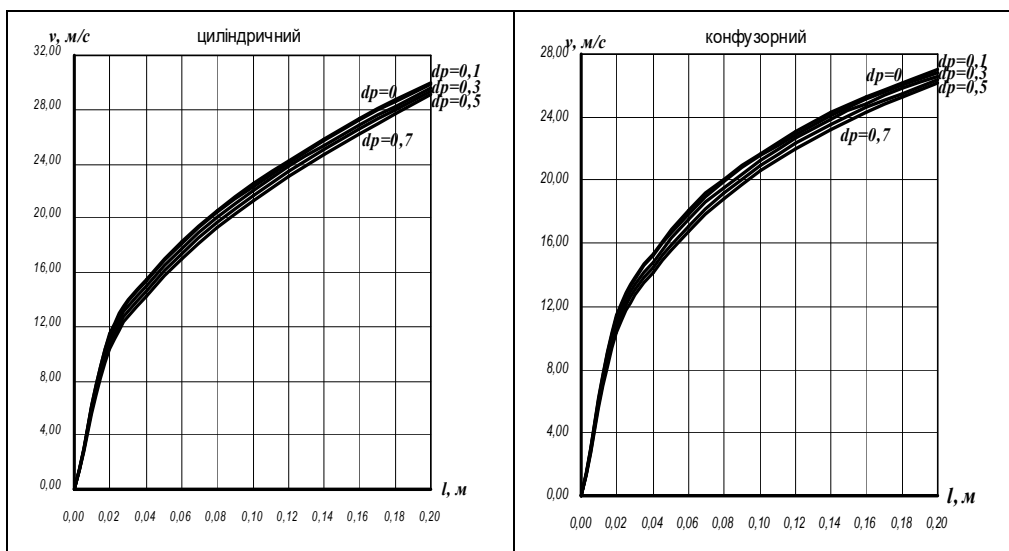


Рис. 4. Графіки розподілу швидкості елементарного об'єму рідини вздовж каналу  $v = f(l)$  при частоті обертання  $n = 2200 \text{ об/хв}$  ( $\omega = 209,44 \text{ с}^{-1}$ )

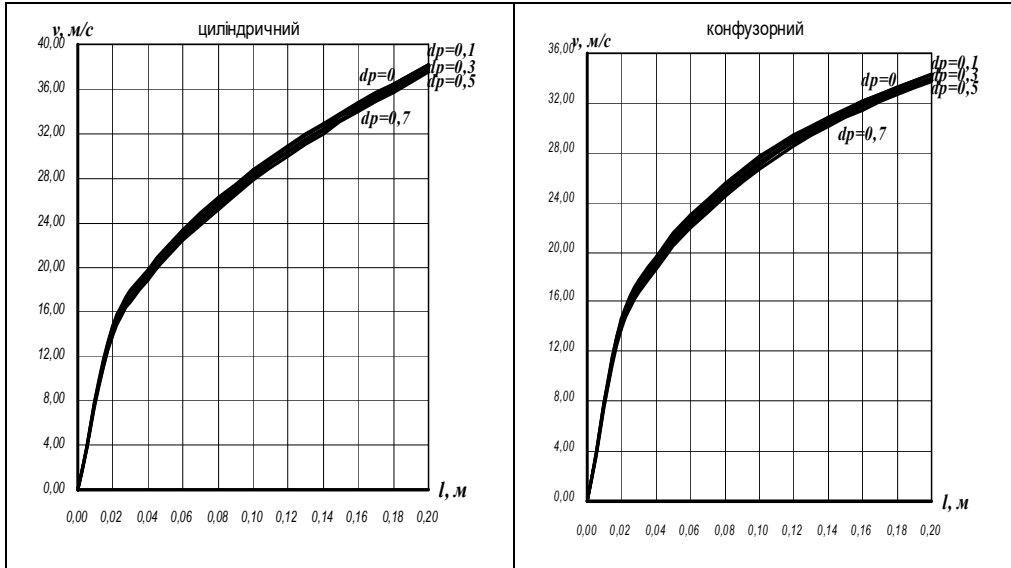


Рис. 5. Графіки розподілу швидкості елементарного об'єму рідини вздовж каналу  $v = f(l)$  при частоті обертання  $n = 2800 \text{ об/хв}$  ( $\omega = 293,22 \text{ с}^{-1}$ )

**Проаналізувавши отримані результати** можемо зробити висновок, що при заданих параметрах відвід рідини можливий при «від'ємному» перепаду тиску (тиск на виході із порожнини більший тиску на вході в порожнину) не більше  $0,7 \text{ МПа}$ , а конфузорність порожнини не сприяє руху рідини через порожнину. Також з графіків видно, що при збільшенні частоти обертання вплив перепаду тиску на величину швидкості руху рідини зменшується.

1. Гликман Б. Ф. Математические модели пневмогидравлических систем. М. : Наука, 1986. 368с. 2. Жалдак М. И., Рамский Ю. С. Численные методы в математике. Киев : Радянська школа, 1984. 206 с. 3. Коднир Д. С., Жильников Е. П., Байбородов Ю. И. Эластогидродинамический расчет деталей машин. М. : Машиностроение, 1986. 224 с. 4. Малащенко В. О., Похильчук І. О., Стрілець В. М. Торцеві ущільнення підвищеної герметичності : монографія. Рівне : НУВГА, 2014. 128 с. 5. Марцинковский В. А. Гидродинамика и прочность центробежных насосов. М. : Машиностроение, 1970. 272 с. 6. Науменко І. І. Технічна механіка рідини та газу : підручник для вищих навчальних закладів. Рівне : Видавництво Рівненського державного технічного університету, 2000. 528 с. 7. Попов Д. Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. М. : Машиностроение, 1987. 464 с. 8. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М. : Наука, 1978. 269 с. 9. Середюк М. Д., Якимів Й. В., Лісафін В. П. Трубопровідний транспорт нафти і на-



фтопродуктів : підручник. Івано-Франківськ. 2001. 517 с. ISBN 966-7327-38-8. **10.** Уплотнения и уплотнительная техника : справочник / Л. А. Кондаков и др. ; под ред. Л. А. Кондакова и А. М. Голубева. М. : Машиностроение, 1986. 464 с.

## REFERENCES:

1. Hlykman B. F. Matematycheskye modely pnevmohydravlycheskykh system. M. : Nauka, 1986. 368s.
2. Jaldak M. I., Ramskiy Yu. S. CHislennyye metody v matematike. Kyev : Radianska shkola, 1984. 206 s.
3. Kodnir D. S., Jilnikov E. P., Bayborodov YU. I. Elastogidrodinamicheskyy raschet detaley mashin. M. : Mashinostroenie, 1986. 224 s.
4. Malashchenko V. O., Pokhylchuk I. O., Strilets V. M. Tortsevi ushchilnennia pidvyshchenoi hermetychnosti : monohrafiia. Rivne : NUVHP, 2014. 128 s.
5. Martsinkovskiy V. A. Gidrodinamika i prochnost tsentrobenzhih nasosov. M. : Mashinostroenie, 1970. 272 s.
6. Naumenko I. I. Tekhnichna mekhanika ridyny ta hazu : pidruchnyk dlia vyshchyykh navchalnykh zakladiv. Rivne : Vydavnytstvo Rivnenskoho derzhav-noho tekhnichnoho universytetu, 2000. 528 s.
7. Popov D. N. Dinamika i regulirovanie gidro- i pnevmosistem. M. : Mashinostroenie, 1987. 464 s.
8. Samarskiy A. A., Nikolaev E. S. Metodyi resheniya setochnyykh uravneniy. M. : Nauka, 1978. 269 s.
9. Serediuk M. D., Yakymiv Y. V., Lisafin V. P. Truboprovodnyy transport nafty i naftoproduktiv : pidruchnyk. Ivano-Frankivsk. 2001. 517 s. ISBN 966-7327-38-8.
10. Uplotneniya i uplotnitelnaya tehnika : spra-vochnik / L. A. Kondakov i dr. ; pod red. L. A. Kondakova i A. M. Golubeva. M. : Mashinostroenie, 1986. 464 s.

---

**Pokhylchuk I. O., Candidate of Engineering (Ph.D.), Senior Lecturer, Tymeichuk O. Yu., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor, Kostiuk O. P., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor** (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

### INVESTIGATION OF THE PROCESS OF LEAKING LIQUID FROM VERTICAL CAVITY OF A ROTATING PART

**To study the movement of fluid in the vertical cavity of a rotating part, a calculation scheme was given. A mathematical model is constructed and a linear differential equation of the first order is derived, which describes the process of fluid motion. Bernoulli's method was used to solve this equation.**

**Mathematical and computer modeling of the velocity distribution of the elementary volume of a liquid along the cavities of cylindrical and confusing shapes for different pressure drops is carried out. For cavities of cylindrical and confusing shapes, the dependence of the fluid velocity at the outlet on their angle of rotation relative to the vertical axis is determined.**

**The results of computer simulations showed that at the given parameters the removal of fluid is possible with a "negative" pressure drop (pressure at the outlet of the cavity is greater than the pressure at the inlet to the cavity) no more than 0.7 MPa, and the confusion of the cavity does not contribute to fluid movement cavity.**

**From the plots of the distribution of the velocity of the elementary volume of the fluid along the cylindrical and confusing cavities, it is seen that with increasing rotational speed, the effect of the pressure drop on the velocity of the fluid in the cavity decreases.**

***Keywords:* calculation scheme; cylindrical cavity; confusing cavity; Bernoulli method.**

---

**Похильчук И. А., к.т.н., старший преподаватель, Тимейчук О. Ю., к.т.н., доцент, Костюк А. П., к.т.н., доцент (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)**

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА УТЕЧКИ ЖИДКОСТИ С ВЕРТИКАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННОЙ ПОЛОСТИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ДЕТАЛИ**

**Для исследования движения жидкости в вертикальной полости вращающейся детали, была приведена расчетная схема. Построена математическая модель и выведено линейное дифференциальное уравнение первого порядка, описывающее процесс движения жидкости. Для решения этого уравнения был использован метод Бернулли.**

**Проведено математическое и компьютерное моделирование распределения скорости элементарного объема жидкости вдоль полостей цилиндрической и конфузорной форм для различных перепадов давления. Для полостей цилиндрической и конфузорной форм определена зависимость скорости жидкости на выходе от их угла поворота относительно вертикальной оси.**

**Результаты компьютерного моделирования показали, что при заданных параметрах отвод жидкости возможен при «отрицательном» перепаде давления (давление на выходе из полости больше давления на входе в полость) не более 0,7 МПа, а конфузорность полости не способствует движения жидкости через полость.**

**Из построенных графиков распределения скорости элементарного объема жидкости вдоль цилиндрической и конфузорной полости, видно, что при увеличении частоты вращения влияние перепада давления на величину скорости движения жидкости в полости уменьшается.**

***Ключевые слова:* расчетная схема; цилиндрическая полость; конфузорная полость; метод Бернулли.**

---