Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки
Кафедра вищої математики

04-02-51М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Алгебра та геометрія» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» галузі знань 12 «Інформаційні технології», за освітньо-професійною програмою «Прикладна математика» спеціальності 113 «Прикладна математика» галузі знань 11 «Математика та статистика», за освітньо-професійною програмою «Інтернет речей» спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» галузі знань 12 «Інформаційні технології»

Рекомендовано науково-методичною радою з якості ННІАКОТ
Протокол № 2 від 23.12.2021 року

Рівне – 2022

Методичні вказівки для виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Алгебра та геометрія» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» галузі знань 12 «Інформаційні технології», за освітньо-професійною програмою «Прикладна математика» спеціальності 113 «Прикладна математика» галузі знань 11 «Математика та статистика», за освітньо-професійною програмою «Інтернет речей» спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» галузі знань 12 «Інформаційні технології» [Електронне видання] / Тадеєв П. О., Дейнека О. Ю., Кушнір В. П. – Рівне : НУВГП, 2022. – 52 с.

Укладачі:

Тадеєв П. О. – к.фіз.-мат.н., д.п.н., професор, завідувач кафедри вищої математики;

Дейнека О. Ю. – к.т.н, доцент кафедри вищої математики;

Кушнір В. П. – к.фіз.-мат.н, доцент кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск:

Тадеєв П. О., к.фіз.-мат.н., д.п.н., професор, завідувач кафедри вищої математики.

Протокол кафедри вищої математики №6 від 16.12.2021 року)

Директор ННІАКОТ Мартинюк П. М.

© Тадеєв П. О., Дейнека О. Ю., Кушнір В. П., 2022
© НУВГП, 2022

ЗМІСТ

Вступ……...4

1. Тема 1. Комплексні числа……6
2. Тема 2. Многочлени однієї змінної……9
3. Тема 3. Лінійні простори……23
4. Тема 4. Дійсні евклідові простори……...….. 28
5. Тема 5. Квадратичні форми……33
6. Тема 6. Тензори……....38
7. Тема 7. Групи. Кільця. Поля……...47

Список використаної літератури……52

Вступ

Метою вивчення навчальної дисципліни «Алгебра та геометрія» є послідовне вивчення основних положень, методів і результатів алгебри та геометрії, які складають основу фундаментальної підготовки фахівців з інформаційних технологій та прикладної математики, формування у студентів широкого погляду на основні методи алгебри та геометрії та на застосування цих методів для дослідження плоских і просторових об'єктів, що дозволить розвинути математичну культуру і мислення студентів.

Навчальна дисципліна «Алгебра та геометрія» надає основні теоретичні відомості стандартного курсу аналітичної геометрії, лінійної та вищої алгебри, які складають невід'ємну частину загально математичної освіти студента; узагальнює відомі поняття алгебри та геометрії; дає можливість простежити взаємозв'язок предметів алгебри та геометрії та логіку розвитку теоретичних побудов в цих дисциплінах; продемонструє застосування теоретичних відомостей до розв'язку практичних задач.

Основне завдання навчальної дисципліни «Алгебра та геометрія»: формування сучасних теоретичних знань в галузі алгебри та геометрії і практичних навичок застосування алгебраїчних і геометричних методів розв'язування математичних задач

Іншими важливими завданнями вивчення студентами дисципліни «Алгебра та геометрія» є: навчити виконувати операції над комплексними числами, володіти теорією многочленів, досліджувати лінійні простори та багатовимірні точкові простори, володіти технікою тензорного числення та бути ознайомленим з основними алгебраїчними структурами

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен знати основні поняття, факти, методи та теореми лінійної та вищої алгебри; вміти застосовувати основні поняття, твердження та теореми до розв'язку задач; наводити приклади, які демонструють суттєвість теоретичних понять чи фактів, або спростовують хибні твердження; застосовувати елементи алгебри до розв'язання задач геометрії, та використовувати матеріал попередніх тем при вивченні наступних; розв'язувати типові задачі кожної з вивчених тем.

Засвоєнню студентами навчальної дисципліни «Алгебра та геометрія» сприятимуть запропоновані методичні вказівки, в яких розглянуті такі теми, як комплексні числа, многочлени з однією змінною, лінійні простори, евклідові простори та тензори. В кінці кожної теми студентам запропоновано задачі для самостійного розв’язання.

Тема 1. Комплексні числа

Комплексне число позначається символом $a+bi$, де *a* і *b* – дійсні числа, які називаються *дійсною і уявною частинами* комплексного числа $a+bi$ і позначають $\operatorname{Re} z$ і $\operatorname{Im} z$ відповідно, а символ *i*, визначений умовою $i^2 = -1$, називається *уявною одиницею.* Подібно до того, як дійсні числа можна зображати точками числової прямої, комплексні числа можна зображати точками площини. Можливість такого зображення ґрунтується на ототожненні множини комплексних чисел $a+bi$ множини пар дійсних чисел $(a,\ b)$, які в прямокутній системі координат *OXY* можна трактувати як координати точок площини.

Число $\sqrt{a^2+b^2}$ називається *модулем* комплексного числа $z=a+bi$. Модуль комплексного числа позначають |*z*|. Комплексне число $a-bi$ називається *комплексно спряженим* з числом $a+bi$ та позначають $\bar{z}$. $|z|^2 = z\bar{z}$. Полярній системі координат відповідає тригонометрична форма запису комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, де $r=\sqrt{a^2+b^2}$ а кут φ визначається з умов $\sin\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}$ $\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$. Зазвичай для того, щоб уникнути неоднозначності, яка виникає при обчисленні аргументу φ комплексного числа, використовують поняття *головного значення* аргументу комплексного числа, вважаючи, що $\arg z\in(-\pi;\pi]$. Згідно із формулою Ейлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, використовується показників запис комплексного числа $z=re^{i\varphi}$.

Для комплексних чисел $z_1=a_1+b_1i$ і $z_2=a_2+b_2i$

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$

$$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$$

$$z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+{}_1a_2b_1)i$$

$$z_1/z_2=(a_1a_2-b_1b_2)/(a_2^2+b_2^2)+(a_2b_1-a_1b_2)i/(a_2^2+b_2^2).$$

Якщо числа записані в тригонометричній формі $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

$$z_1 / z_2 = r_1 / r_2[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \text{ (формула Муавра)},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos(\varphi + 2\pi k)/n + i\sin(\varphi + 2\pi k)/n),$$

де $k = 0, 1, 2, ..., n-1$; $\sqrt[n]{r}$ – арифметичний корінь.

В показниковій формі записані вище дії видозмінюються відповідно до формули Ейлера.

Завдання для самостійного розв'язування.

1. Виконати додавання віднімання множення та ділення комплексних чисел:

1) $z_1 = 2+5i,\ z_2 = 4-5i;$ 2) $z_1 = 2+8i,\ z_2 = 2-5i;$

3) $z_1 = 3-5i,\ z_2 = 6-5i;$ 4) $z_1 = 7+5i,\ z_2 = 2-5i;$

5) $z_1 = 3-4i,\ z_2 = 6-7i;$ 6) $z_1 = 2+9i,\ z_2 = 2-5i;$

7) $z_1 = 1-5i,\ z_2 = 9-5i;$ 8) $z_1 = 3-5i,\ z_2 = 8-5i;$

9) $z_1 = 2-8i,\ z_2 = 1-5i;$ 10) $z_1 = 3-7i,\ z_2 = 4+5i;$

11) $z_1 = 4-7i,\ z_2 = 6-5i;$ 12) $z_1 = 7+3i,\ z_2 = 2-3i;$

13) $z_1 = 5-2i,\ z_2 = 3-5i;$ 14) $z_1 = 4+3i,\ z_2 = 5-3i;$

15) $z_1 = 4-9i,\ z_2 = 6-2i;$ 16) $z_1 = 7+5i,\ z_2 = 2-3i;$

17) $z_1 = 4-8i,\ z_2 = 1-5i;$ 18) $z_1 = 8+3i,\ z_2 = 8-3i;$

19) $z_1 = 3 - 7i,\ z_2 = 9 - 5i;$ 20) $z_1 = 9 + 3i,\ z_2 = 2 - i;$

2. Обчислити z^k та $\sqrt[n]{z}$ комплексного числа z :

1) $z = 2 - 2i,\ k = 5,\ n = 4;$ 2) $z = 2 + 2i,\ k = 6,\ n = 4;$

3) $z = 3 - 3i,\ k = 6,\ n = 5;$ 4) $z = -4 + 4i,\ k = 5,\ n = 6;$

5) $z = \sqrt{3} - i,\ k = 5,\ n = 4;$ 6) $z = 2 - 2\sqrt{3}i,\ k = 5,\ n = 4;$

7) $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}i,\ k = 5,\ n = 3;$ 8) $z = 1 - \sqrt{3}i,\ k = 8,\ n = 5;$

9) $z = 1 + \sqrt{3}i,\ k = 5,\ n = 4;$ 10) $z = -\sqrt{3} - i,\ k = 5,\ n = 4;$

11) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i,\ k = 8,\ n = 6;$ 12) $z = 2 + 2i,\ k = 9,\ n = 5;$

13) $z = 5 - 5i,\ k = 6,\ n = 5;$ 14) $z = -3 - 3i,\ k = 7,\ n = 6;$

15) $z = \sqrt{3} - i,\ k = 9,\ n = 5;$ 16) $z = 3 - 3\sqrt{3}i,\ k = 5,\ n = 4;$

17) $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}i,\ k = 6,\ n = 4;$ 18) $z = 1 - \sqrt{3}i, k = 9, n = 5;$

19) $z = -1 - \sqrt{3}i,\ k = 7,\ n = 5;$ 20) $z = \sqrt{3} + i,\ k = 6,\ n = 4;$

3. Побудувати геометричне зображення чисел:

1) 1; 2) -1; 3) i; 4) $-i$; 5) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

7) $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) $4 + 3i$; 9) $4 - 3i$; 10) $1 + i$;

11) $1 - i$; 12) $-\sqrt{3} + i$; 13) $2i$; 14) $-3i$; 15) πi; 16) $-\pi i$;

17) $2 - i$; 18) $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 19) $3 - 4i$; 20) $-1 - \sqrt{3}i$.

Тема 2. Многочлени з однією змінною

Нехай K – довільна область цілісності (асоціативне комутативне кільце з одиницею) і R – її підкільце з одиницею.

Означення 1. Елемент $x \in K$ називається ***алгебраїчним*** над кільцем R, якщо в R існують такі елементи $a_0, a_1, \ldots, a_n$, які не всі дорівнюють 0, що $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$.

Елемент, який не є алгебраїчним над R, називається ***трансцендентним*** над R.

Означення 2. Мінімальне розширення кільця R, яке містить трансцендентний над R елемент x, називається ***простим трансцендентним розширенням*** кільця R, або ***кільцем многочленів*** від однієї змінної над R, позначається через $R[x]$.

Елементи цього кільця називають ***многочленами*** від x над R, позначають символами $f(x)$, $g(x)$ і т. д.

Нуль кільця $R[x]$ називають ***нульовим многочленом*** або нуль-многочленом.

Будь-який ненульовий многочлен $f(x)$ можна подати у вигляді:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0;\ a_i \in R,\ a_n \neq 0.$$

Кільце многочленів $R[x]$ є областю цілісності.

Алгебраїчна рівність многочленів: Два многочлени з кільця $R[x]$ рівні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакові степені і попарно рівні відповідні коефіцієнти.

Кожен многочлен $f(x)$ з кільця $R[x]$ визначає відображення $\varphi_f : R \to R$ таке, що $\varphi_f(a) = f(a)$.

Функціональна рівність многочленів: Якщо область цілісності R має характеристику 0, то многочлени $f(x), g(x) \in R[x]$ рівні тоді і тільки тоді, коли рівні функції φ_f і φ_g, які вони визначають.

Алгебраїчне і функціональне тлумачення многочленів рівносильні над областю цілісності характеристики 0.

Нехай P – поле.

Означення 3. Многочлен $f(x) \in P[x]$ ***ділиться*** на $g(x) \in P[x]$, якщо існує многочлен $s(x) \in P[x]$ такий, що $f(x) = g(x)\ s(x)$, позначається $f(x) \vdots g(x)$, або $g(x)/f(x)$.

Означення 4. Многочлен $f(x) \in P[x]$ ***ділиться з остачею*** на многочлен $g(x) \in P[x]$, $g(x) \neq 0$, якщо в $P[x]$ існують такі многочлени $s(x)$ і $r(x)$, що $f(x) = g(x) \cdot s(x) + r(x)$; причому $r(x)=0$, або степінь $r(x)$ менше степені $g(x)$.

Теорема (***про ділення з остачею***). Довільний многочлен $f(x) \in P[x]$ ділиться з остачею на будь-який ненульовий многочлен $g(x)$ з цього кільця, причому частка і остача визначаються однозначно.

Кільце $P[x]$ многочленів над полем P є кільцем головних ідеалів.

Кільце многочленів $P[x]$ над полем P є евклідовим.

Теорема Безу. Для будь-якого елемента α з поля P остача при діленні многочлена $f(x) \in P[x]$ на $(x - \alpha)$ дорівнює $f(a)$.

Означення 5. Якщо многочлен $d(x)$ – дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$, то він називається ***спільним дільником*** цих многочленів.

Означення 6. Спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$, який ділиться на будь-який спільний дільник цих многочленів, називається ***найбільшим спільним дільником*** (НСД) многочленів $f(x)$ і $g(x)$, позначається (f, g).

Для знаходження НСД f і g застосовується алгоритм ділення з остачею (***алгоритм Евкліда***):

$F = g\, q_1 + r_1$;

$G = r_1\, q_2 + r_2$;

……

$r_{k-2} = r_{k-1}\, q_k + r_k$;

$r_{k-1} = r_k\, q_{k+1}$.

r_k є НСД многочленів f і g.

Означення 7. Спільним кратним мгочленів f, $g \in P[x]$ називається будь-який многочлен $s(x) \in P[x]$ такий, що $s(x) \vdots f(x)$ і $s(x) \vdots g(x)$.

Означення 8. Найменшим спільним кратним многочленів f і g називається спільне кратне f і g, яке ділить будь-яке спільне кратне цих многочленів, позначається НСК або $[f, g]$.

Для будь-яких многочленів f і $g \in \mathrm{P}[x]$

$$[f, g] = \frac{f \cdot g}{(f, g)}.$$

Означення 9. Многочлен $f(x)\in P[x]$ називається ***звідним*** в $P[x]$, якщо степінь $f \geq 1$ і існують такі многочлени g, $s\in P[x]$, що $f=g\cdot s$, причому степінь $g\geq 1$ і степінь $s\geq 1$.

Означення 10. Многочлен $f(x)\in P[x]$ називається ***незвідним*** в $P[x]$, якщо він не є многочленом нульового степеня і немає в $P[x]$ дільників, відмінних від елементів поля P та асоційованих з ним, тобто дільників вигляду cf, $c\in P$.

Схема Горнера ділення многочлена f(x) на двочлен x-a

Нехай $f(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$,
$g(x) = x-a$.

За теоремою про ділення з остачею маємо:

$$f(x) = (x-a)\, q(x)+r(x),\ r(x) = 0 \text{ або } r\neq 0, \qquad (*)$$
$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0.$$

Рівність $(*)$ запишемо у вигляді таблиці,

	a_n	a_{n-1}	…	a_1	a_0
α	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2}= \alpha\, b_{n-1}+a_{n-1}$	…	$b_0= \alpha\, b_1+a_1$	$r= \alpha\, b_0+a_0$

яка називається ***схемою Горнера*** ділення многочлена $f(x)$ на двочлен $x-a$.

Означення 11. Число α називається ***коренем многочлена*** $f(x)$, якщо він при $x = \alpha$ дорівнює нулю, тобто $f(\alpha)= 0$.

Означення 12. Число α називається ***кратним коренем*** многочлена $f(x)$, (k>1), якщо $f(x)$ ділиться на многочлен $(x-\alpha)^k$, але не ділиться на многочлен $(x-\alpha)^{k+1}$ (при $k = 1$ корінь α називається ***простим***).

Означення 13. Похідною многочлена $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ називають многочлен $f'(x) =na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+2a_2x+a_1$.

Похідна многочлена нульового степеня і нуль-многочлена дорівнює нулю. Для кожного многочлена $f(x)\in P[x]$ такого, що має

степінь більший або рівний 1, виконується рівність: степінь $f'(x)$ рівний степеню на одиницю меншому.

Означення 14. Елемент $\alpha \in P$ називається ***коренем*** многочлена $f(x) \in P[x]$, якщо $f(x)$ ділиться на $x - \alpha$.

Означення 1) і 4) рівносильні.

Для того, щоб елемент $a \in P$ характеристики нуль був коренем кратності $к$ для многочлена $f(x) \in P[x]$ необхідно і достатньо, щоб

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a);\ f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Якщо $a \in P$ – корінь кратності $k>1$ многочлена $f(x) \in P[x]$,то він є коренем кратності $(k-1)$ многочлена $f'(x)$.

Многочлен $f(x)$ має корінь кратності $k>1$ тоді і тільки тоді, коли $(f,\ f') = 1$.

Теорема про спряжені корені многочлена. Якщо комплексне число α є коренем многочлена $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то коренем для $f(x)$ буде і спряжене число $\overline{\alpha}$.

Відокремлення кратних множників

Кожний многочлен f над полем P можна представити у вигляді

$$f = \Phi_1 \cdot \Phi_2^2 \cdot \Phi_3^3 \cdot \ldots \cdot \Phi_m^m,$$

де Φ_i – добуток тих многочленів, кратність яких в f дорівнює i.

Якщо f кратних множників немає, то $f = \Phi_1$.

Похідна f, в загальному випадку набуває вигляду

$$f' = \Phi_2 \cdot \Phi_3^2 \cdot \ldots \cdot \Phi_m^{m-1} \cdot \Psi_1,$$

де Ψ_1 не ділиться на $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$.

Знаходимо НСД многочленів f і f':

$$d_1 = \text{НСД}(f,\ f') = \Phi_2 \cdot \Phi_3^2 \cdot \ldots \cdot \Phi_m^{m-1}.$$

Знаходимо $d_1' = \Phi_3 \cdot \Phi_4^2 \cdot \ldots \cdot \Phi_m^{m-2} \cdot \Psi_2$ і т. д.

Одержуємо рівності:

$$f = \Phi_1 \cdot \Phi_2^2 \cdot \Phi_3^3 \cdot \ldots \cdot \Phi_m^m;$$

$$d_1 = \Phi_2 \cdot \Phi_3^2 \cdot \Phi_4^3 \cdot \ldots \cdot \Phi_m^{m-1};$$

$$d_2 = \Phi_3 \cdot \Phi_4^2 \cdot \ldots \cdot \Phi_m^{m-2}$$

$$d_{m-2} = \Phi_{m-1} \cdot \ldots \cdot \Phi_m^2$$

$$d_{m-1} = \Phi_m$$

$$d_m = 1$$

Для знаходження Φ_i $i = 1,2,3,\ldots,m$ побудуємо многочлени:

$$q_1 = \frac{f}{d_1} = \Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot \Phi_3 \cdot \ldots \cdot \Phi_m,$$

$$q_2 = \frac{d_1}{d_2} = \Phi_2 \cdot \Phi_3 \cdot \ldots \cdot \Phi_m,$$

$$q_3 = \frac{d_2}{d_3} = \Phi_3 \cdot \ldots \cdot \Phi_m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$q_{m-1} = \frac{d_{m-2}}{d_{m-1}} = \Phi_{m-1} \cdot \ldots \cdot \Phi_m,$$

$$q_m = \frac{d_{m-1}}{d_m} = \Phi_m.$$

звідси,

$$\Phi_1 = \frac{q_1}{q_2};\ \Phi_2 = \frac{q_2}{q_3};\ \ldots;\ \Phi_m = q_m.$$

Теорема. Будь-який многочлен $f(x)$ степеня n над полем комплексних чисел C має n коренів з урахуванням їх кратності.

Теорема Кронекера. Якщо $f(x)$ – будь-який многочлен над полем P, степінь якого перевищує 0, то існує розширення K поля P, в якому міститься деякий корінь $f(x)$.

Теорема. Для будь-якого многочлена $f(x) \in P[x]$, степінь якого перевищує 0, існує таке розширення L поля P, що $f(x)$ в $L[x]$ можна представити у вигляді добутку лінійних множників.

Означення 15. Поле L називається ***полем розкладу*** многочлена $f(x)$, якщо $f(x)$ в $L[x]$ розкладається на лінійні множники.

Многочлен $f(x) \in P[x]$ n-го степеня має в полі розкладу n коренів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

В полі розкладу многочлена $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ його канонічний розклад має вигляд

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_m)^{k_m}\ (k_1+k_2+\ldots+k_m = n).$$

Теорема Вієта. Якщо $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ – корені многочлена

$$f(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\in P[x], \text{ то}$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

.....

$$\sum_{C_n^k}\alpha_{j_1}\cdot\alpha_{j_2}\ldots\alpha_{j_k} = (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$

.....

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

Означення 16. Поле P називається ***алгебраїчним***, якщо воно є полем розкладу для будь-якого многочлена $f(x)\in P[x]$ ненульового степеня.

Інакше, P – алгебраїчно замкнене поле, якщо всі корені будь-якого многочлена $f(x)\in P[x]$ належать цьому полю.

Поле комплексних чисел C є полем розкладу будь-якого многочлена $f(x)\in C[x]$, тобто поле C алгебраїчно замкнене.

Максимальна степінь незвідного в кільці $C[x]$ многочлена дорівнює одиниці.

Нехай $f(x)$ – деякий многочлен над полем P. Якщо для $f(x)$ степінь $n\geq 1$, то існує розширення K поля P, в якому міститься деякий корінь многочлена $f(x)$.

Звідси випливає, що для будь-якого многочлена $f(x)\in P[x]$ степеня $n\geq 1$ існує таке розширення L поля P, що $f(x)$ можна подати в $L[x]$ у вигляді добутку лінійних многочленів.

Означення 17. Поле *P* називається ***алгебраїчно замкненим***, якщо кожний многочлен із кільця $P[x]$ розкладається на лінійні множники.

Отже, поле *P* алгебраїчно замкнене, якщо незвідними над полем *P* є лише многочлени першого степеня.

Якщо, будь-який многочлен $f(x) \in P[x]$ має в *P* хоч один корінь, то поле *P* алгебраїчно замкнене.

Теорема. Поле комплексних чисел *C* алгебраїчно замкнене.

Теорема. Многочлен непарного степеня над полем *R* дійсних чисел має хоча б один дійсний корінь.

Теорема. Кожний многочлен степеня $n \geq 1$ з дійсними коефіцієнтами має хоч би один комплексний корінь.

Теорема. (***Основна теорема алгебри комплексних чисел***). Кожний многочлен ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами має хоч би один комплексний корінь.

Теорема. Кожний многочлен степеня $n \geq 1$ є звідним над полем комплексних чисел.

Теорема. Кожний многочлен *n*-го степеня над полем комплексних чисел єдиним способом розкладається у добуток лінійних множників над цим полем:

$f(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$, де z_1, z_2,..., z_n – корені, a_n – старший коефіцієнт *f*(*z*).

Теорема. Многочлен *n*-го степеня в полі комплексних чисел має точно *n*- коренів.

Оскільки дійсні числа є підполем поля *C* комплексних чисел, то всі вище перераховані результати стверджуються і для многочленів з дійсними коефіцієнтами, тобто будь-який многочлен *n*-го степеня з дійсними коефіцієнтами має точно *n* комплексних коренів.

Теорема. Кожний многочлен з дійсними коефіцієнтами, степінь якого перевищує 2, звідний над полем *R* дійсних чисел.

Теорема. Кожний многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами єдиним способом розкладається над полем *R* у добуток з використанням лінійних многочленів і квадратних трьохчленів:

$$f(z) = a_n(z - z_1)^{k1}...(z - z_i)^{ki}(z^2 + p_{i+1}z + q_{i+1})^{k+1}...(z^2 + p_m z + q_m)^{km}$$

Розв'язання рівнянь третього степеня

$$\boxed{x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0}$$

Підстановкою $x = y - \frac{a_2}{3}$ перетворюємо це рівняння до вигляду:

$$y^3 + \left(-\frac{a_2^2}{3} + a_1\right)y + \left(\frac{2}{27}a_2^3 - \frac{a_1 a_2}{3} + a_0\right) = 0,$$

в якому відсутній член з y^2. Достатньо вміти розв'язувати кубічне рівняння $x^3 + px + q = 0$. $(*)$

Нехай $x = u + v$, тоді одержуємо рівняння:

$$(u^3 + v^2 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0.$$

Накладаємо на u і v додаткову умову: $uv = -\frac{p}{3}$, одержуємо рівняння: $u^3 + v^3 + q = 0;$

Знаходження коренів звелося до розв'язання системи

рівнянь $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}},$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}},$$

де $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ – дискримінант кубічного рівняння $(*)$.

Тоді $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$ – ***формула Кардано*** для знаходження коренів кубічного рівняння.

Розв'язання рівняння четвертого степеня

$$\boxed{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.}$$

Метод Феррарі розв'язування рівняння четвертого степеня.

До обох частин рівняння додаємо $\frac{a^2x^2}{4}$:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d\,.$$

До обох частин одержаної рівності додамо ще $\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)t + \frac{t^2}{4}$, де t – допоміжне невідоме:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{t}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + t\right)x^2 + \left(\frac{at}{2} - c\right)x + \frac{t^2}{4} - d\,.$$

Підберемо значення t так, щоб права частина останнього рівняння стала новим квадратом вигляду $(Ax + B)^2$.Для цього треба виконання умов:

$$A^2 = \frac{a^2}{4} - b + t;\ 2AB = \frac{at}{2} - c;\ B^2 = \frac{t^2}{4} = d\,.$$

Після перетворень одержуємо рівняння:

$$t^3 - bt^2 + (ac - 4d)t - (da^2 - 4db + c^2) = 0\,,$$

яке є кубічною резольвентою даного рівняння четвертого степеня. Якщо t_0 – будь-який корінь останнього рівняння, то одержуємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+\dfrac{ax}{2}+\dfrac{t_0}{2}=Ax+B, \\ x^2+\dfrac{ax}{2}+\dfrac{t_0}{2}=-Ax-B. \end{array}\right.$$

Корені цих рівнянь дають всі розв'язки рівняння $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$

Локалізація коренів многочлена

Нехай $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$ – многочлен з комплексними коефіцієнтами;

$$A=\max\{|a_{n-1}|,|a_{n-2}|,...,|a_1|,|a_0|\},$$
$$N_0=1+\frac{A}{|a_n|}.$$

Тоді всі корені многочлена *f*(*z*) знаходяться в середині круга з центром у початку координат і радіусом N_0.

Якщо *f*(*z*) має дійсні корені то вони розміщені в інтервалі]–N_0; N_0[.

Число N_0 дає одночасно верхню межу додатних коренів многочлена і нижню межу від'ємних коренів многочлена *f*(*z*).

Метод Ньютона знаходження верхньої межі додатних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами:

Число *M* є ***верхньою межею*** додатних коренів многочлена *f*(*z*), якщо при *x*=*M* многочлен *f*(*x*) має додатне значення, а всі його похідні – невід'ємне значення.

Якщо N_0, N_1, N_2 і N_3 – верхні межі відповідно додатних коренів многочленів з дійсними коефіцієнтами *f*(*x*), $x^nf(1/x)$, $f(-x)$, $x^nf(-1/x)$, то додатні корені многочлена *f*(*x*)

знаходяться в проміжку $\left]\frac{1}{N_1}, N_0\right[$, а від'ємні – в проміжку $\left]-N_2; -\frac{1}{N_3}\right[$

Нехай $c_1, c_2, ..., c_m$ – деяка впорядкована послідовність дійсних чисел.

Означення 17. Кількість пар сусідніх чисел цієї послідовності, які мають протилежні знаки, називають ***кількістю змін знаків*** даної послідовності.

Правило Декарта. Число додатних коренів многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ з дійсними коефіцієнтами, із врахуванням їх кратності дорівнює або на парне число менше кількості змін знаків у послідовності його коефіцієнтів.

Задача відокремлення дійсних коренів многочлена *f*(*x*) полягає в знаходженні тих інтервалів, у кожному з яких лежить тільки один корінь.

Метод Штурма відокремлення дійсних коренів многочлена *f*(*x*).

Нехай *f*(*x*) не має кратних коренів. Для многочлена *f*(*x*) будуємо ряд Штурма:

$$f(x), f'(x); F_1(x); F_2(x), ..., F_{m-1}(x), F_m.$$

Для знаходження многочленів $F_i(x)$, $1 \le i \le m$, застосовуємо алгоритм аналогічний алгоритму Евкліда:

$$\begin{aligned}
&f(x) = f'(x)\Phi_1(x) - F_1(x),\\
&f'(x) = F_1(x)\Phi_2(x) - F_2(x),\\
&F_1(x) = F_2(x)\Phi_3(x) - F_3(x),\\
&\vdots\\
&F_{m-2}(x) = F_{m-1}(x)\Phi_m(x) - F_m,\\
&F_{m-1}(x) = F_m \Phi_{m+1}(x),
\end{aligned}$$

де $F_k(x) = -r_k(x)$, тобто всі остачі беруться з протилежним знаком.

Теорема Штурма. Якщо a, b – довільні дійсні числа, які не є коренями многочлена $f(x)$, то число p дійсних коренів многочлена $f(x)$ в інтервалі]a, b[дорівнює $p=S(a) - S(b)$, де $S(a)$; $S(b)$ – кількість змін знаків у ряді Штурма відповідно при $x=a$ і $x=b$.

Існують многочлени з раціональними коефіцієнтами довільного степеня, які є незвідними над полем раціональних чисел. Будь-яке алгебраїчне рівняння з раціональними коефіцієнтами множенням на спільний знаменник усіх коефіцієнтів можна звести до рівносильного рівняння з цілими коефіцієнтами.

Означення 18. Многочлен $p(x)$ з цілими коефіцієнтами називається ***примітивним***, якщо його коефіцієнти не мають спільних дільників, відмінних від ± 1.

Лема. Добуток двох примітивних многочленів є примітивний многочлен.

Теорема 1. Для того, щоб многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами був звідним над полем раціональних чисел, необхідно і достатньо, щоб він був звідним над кільцем Z цілих чисел, тобто, щоб існували многочлени $f_1(x)$ і $f_2(x)$ ненульового степеня з цілими коефіцієнтами такі, що $f(x) = f_1(x)\ f_2(x)$.

Теорема 2 (***Ейзенштейна***)**.** Якщо в многочлені з цілими коефіцієнтами $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ коефіцієнти $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ діляться на деяке просте число p, причому a_0 не ділиться на p^2, а старший коефіцієнт a_n не ділиться на p, то многочлен $f(x)$ незвідний над полем раціональних чисел.

Теорема 3. В кільці многочленів над полем раціональних чисел існують незвідні многочлени будь-якого степеня.

Терема 4. Якщо многочлен 3-го степеня $f(x)$ з раціональними коефіцієнтами немає раціональних коренів, то він є незвідним над полем раціональних чисел.

Теорема 5. Якщо $\frac{p}{q}$, де p і q – взаємно прості числа, є коренем рівняння $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ з цілими коефіцієнтами, то $a_0 \vdots p;\ a_n \vdots q$.

Якщо старший коефіцієнт рівняння з цілими коефіцієнтами дорівнює 1, то всі раціональні корені цього рівняння є цілими числами і дільниками вільного члена.

Теорема 6. Для того, щоб число $\frac{p}{q}$, де $(p, q)=1$, було коренем многочлена з цілими коефіцієнтами $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, необхідно, щоб при довільному цілому $к$ число $f(к)$ ділилося на $p - qk$ $(p-q \neq 0)$.

Завдання для самостійного розв'язування.

1. Розв'язати за формулою Кардана рівняння:

1) $x^3 - 6x + 9 = 0;$ 2) $x^3 + 9x^2 + 18x + 26 = 0;$

3) $x^3 - 6x + 4 = 0;$ 4) $x^3 + 18x + 15 = 0;$

5) $x^3 + 24x - 56 = 0;$ 6) $x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0;$

7) $x^3 - 3x - 2i = 0;$ 8) $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0;$

9) $x^3 + 12x + 63 = 0;$ 10) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0;$

11) $x^3 + 6x + 2 = 0;$ 12) $x^3 - 3x^2 - 3x + 11 = 0;$

13) $x^3 + 9x - 26 = 0;$ 14) $x^3 + 45x - 98 = 0;$

15) $x^3 + 24x - 56 = 0;$ 16) $x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0;$

17) $x^3 - 6ix + 4(1-i) = 0;$ 18) $x^3 - 6x^2 + 57x - 196 = 0;$

19) $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0;$ 20) $x^3 - 4x - 1 = 0.$

2. Скласти поліноми Штурма та відділити корені полінома:

1) $x^3 - 3x - 1 = 0;$ 2) $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0;$

3) $x^3 - 7x - 7 = 0;$ 4) $x^3 - x + 5 = 0;$

5) $x^3 + 3x - 5 = 0;$ 6) $x^4 + x^2 - 1 = 0;$

7) $x^4 - x - 1 = 0;$ 8) $x^4 + 4x^3 - 12x + 9 = 0;$

9) $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 5 = 0;$ 10) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0;$

11) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0;$ 12) $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0;$

13) $x^4 - x^3 + x^2 - x - 1 = 0;$ 14) $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0;$

15) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 1 = 0;$ 16) $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 = 0;$

17) $x^4 - 4x^2 + x + 1 = 0;$ 18) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 8 = 0;$

19) $x^4 - 6x^2 - 4x + 2 = 0;$ 20) $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0.$

Тема 3. Лінійні простори

Означення 1. Множина L елементів x, y, z довільної природи називається *дійсним лінійним простором*, якщо справджуються такі три умови:

I. Існує правило, за допомогою якого будь-яким двом елементам x і y множини L ставиться у відповідність третій елемент z цієї множини, що називається *сумою елементів* x та y і позначається символом $z = x + y$.

II. Існує правило, за допомогою якого будь-якому елементу x множини L і будь-якому дійсному числу λ ставиться у відповідність елемент u цієї множини, що називається *сумою елемента* x на число λ і позначається символом $u = \lambda x$.

III. Вказані два правила підпорядковані таким восьми аксіомам:

1. $x + y = y + x$ (комутативність суми).

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (асоціативність суми).

3. $\exists 0:\ x + 0 = x,\ \forall x \in L$.

4. $\forall x \in L\ \ \exists x':\ x + x' = 0$.

5. $\forall x \in L\ \ 1 \cdot x = x$.

6. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (асоціативність відносно числового співмножника).

7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (дистрибутивність відносно суми чисел).

8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (дистрибутивність відносно суми елементів).

Властивості лінійного простору.

1) у довільному лінійному просторі існує єдиний нульовий елемент і для кожного елемента існує єдиний протилежний.

2) $\forall x \in L\ \ x \cdot 0 = 0$.

3) $\forall x \in L\ \ x' = -1 \cdot x$.

Означення 2. Вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо знайдуться такі дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, з яких хоча б одне відмінне від нуля, що лінійна комбінація векторів

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ з цими числами дорівнює нулю, тобто $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + ... + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0}$.

Означення 3. Вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ називаються *лінійно незалежними,* якщо рівність $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + ... + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0}$ можлива лише у випадку, коли всі $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ дорівнюють нулю.

Означення 4. Число n, що дорівнює максимальній кількості лінійно незалежних векторів простору L називається *розмірністю простору*.

Означення 5. Сукупність лінійно незалежних векторів простору L, рівних за кількістю розмірності цього простору утворюють його *базис*.

Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ і $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ – два довільних базиси n–вимірного лінійного простору L^n і вектори $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ виражаються через вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ за допомогою формул:

$$\vec{e}_1' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_2' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\vec{e}_n' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)\begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця складена з коефіцієнтів цих формул

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею переходу* від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$. За допомогою матриці C перехід від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ запишеться у вигляді

$$(\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)C.$$

Нехай відомо, що в «старому» базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ вектор $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$, а «новому» базисі $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ вектор $\vec{x} = x_1'\vec{e}_1' + x_2'\vec{e}_2' + ... + x_n'\vec{e}_n'$. Тоді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix},$$

або

$$X = CX', \text{ де } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного розв’язування.

1. Перевірити, чи є лінійними просторами такі множини:

1) Множина матриць-рядків довжиною n;

2) Множина квадратних матриць n-го порядку;
3) Множина всіх многочлені степеня $\le n$;
4) Множина всіх многочлені степеня n;
5) Множина всіх многочлені степеня $\ge n$;
6) Множина, що складається тільки з одного елемента x і $x + x = x,\ \lambda x = x$;
7) Всі вектори, кінці яких лежать на заданій прямій;
8) Всі вектори, координати яких задовольняють рівнянню $x + y = 0$;
8) Всі вектори, координати яких задовольняють рівнянню $x + y = a,\ a \ne 0$;
9) Множина $C[a, b]$;
10) Множина $C^1[a, b]$;
11) Множина всіх функцій інтегрованих на $[a, b]$;
12) Множина всіх збіжних послідовностей;
13) Множина всіх розбіжних послідовностей;
14) Множина всіх векторів лінійного простору без виключеного вектора;
15) Множина всіх векторів лінійного простору без виключеної нескінченної кількості векторів;
16) Всі вектори, кінці яких лежать на заданому промені;
17) Всі вектори, кінці яких лежать на заданому відрізку;
18) Всі вектори, кінці яких лежать в заданій опуклій фігурі;
19) Всі вектори, кінці яких лежать в заданій довільній фігурі;
20) Множина, що складається тільки з двох елементів x, y і $x + y \overset{def}{=} xy,\ \lambda x \overset{def}{=} x^{\lambda}$?

2. Показати, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ утворюють базис та знайти координати вектора $\vec{x}$ в цьому базисі.

1) $\vec{e}_1 = (1,1,1),\ \vec{e}_2 = (1,2,1),\ \vec{e}_3 = (0,0,1),\qquad \vec{x} = (-1,0,-4)$;
2) $\vec{e}_1 = (1,2,1),\ \vec{e}_2 = (1,1,1),\ \vec{e}_3 = (0,0,1),\qquad \vec{x} = (1,0,4)$;
3) $\vec{e}_1 = (-1,2,1),\ \vec{e}_2 = (-1,1,1),\ \vec{e}_3 = (0,0,1),\qquad \vec{x} = (-2,3,3)$;

4) $\vec{e}_1=(-1,-2,1)$, $\vec{e}_2=(-1,-1,1)$, $\vec{e}_3=(0,0,1)$, $\vec{x}=(-2,3,3)$;

5) $\vec{e}_1=(0,0,1)$, $\vec{e}_2=(1,1,1)$, $\vec{e}_3=(1,2,1)$, $\vec{x}=(1,0,4)$;

6) $\vec{e}_1=(0,0,1)$, $\vec{e}_2=(1,1,1)$, $\vec{e}_3=(1,2,1)$, $\vec{x}=(2,3,7)$;

7) $\vec{e}_1=(3,2,1)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(1,2,-1)$, $\vec{x}=(2,0,2)$;

8) $\vec{e}_1=(3,2,1)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(1,2,-1)$, $\vec{x}=(2,5,-2)$;

9) $\vec{e}_1=(3,2,1)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(1,2,-1)$, $\vec{x}=(6,5,2)$;

10) $\vec{e}_1=(-3,2,1)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(-1,2,-1)$, $\vec{x}=(-6,5,-2)$;

11) $\vec{e}_1=(-3,0,0)$, $\vec{e}_2=(1,1,2)$, $\vec{e}_3=(-4,2,-1)$, $\vec{x}=(-12,1,2)$;

12) $\vec{e}_1=(-4,2,1)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(-1,2,-1)$, $\vec{x}=(-5,4,0)$;

13) $\vec{e}_1=(-3,2,-1)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(-6,2,-1)$, $\vec{x}=(-9,4,-2)$;

14) $\vec{e}_1=(-3,2,4)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(-1,2,-1)$, $\vec{x}=(-3,7,4)$;

15) $\vec{e}_1=(3,-1,4)$, $\vec{e}_2=(3,1,4)$, $\vec{e}_3=(0,2,0)$, $\vec{x}=(6,0,8)$;

16) $\vec{e}_1=(0,0,4)$, $\vec{e}_2=(3,1,0)$, $\vec{e}_3=(-1,2,-1)$, $\vec{x}=(2,3,-1)$;

17) $\vec{e}_1=(-1,3,4)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(-1,2,-1)$, $\vec{x}=(-2,5,3)$;

18) $\vec{e}_1=(0,0,4)$, $\vec{e}_2=(3,1,0)$, $\vec{e}_3=(-5,2,-1)$, $\vec{x}=(3,1,12)$;

19) $\vec{e}_1=(5,0,0)$, $\vec{e}_2=(3,1,5)$, $\vec{e}_3=(-1,2,-1)$, $\vec{x}=(0,7,2)$;

20) $\vec{e}_1=(4,1,4)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(1,2,-1)$, $\vec{x}=(6,5,2)$.

3. Дано як новий базис пов'язаний із старим, Розкласти вектор $\vec{x}$. За новим базисом.

1) $\vec{e}_1'=(-3,0,0)$, $\vec{e}_2'=(1,1,2)$, $\vec{e}_3'=(-4,2,-1)$, $\vec{x}=(-12,1,2)$;

2) $\vec{e}_1'=(-4,2,1)$, $\vec{e}_2'=(0,1,0)$, $\vec{e}_3'=(-1,2,-1)$, $\vec{x}=(-5,4,0)$;

3) $\vec{e}_1'=(-3,2,-1)$, $\vec{e}_2'=(0,1,0)$, $\vec{e}_3'=(-6,2,-1)$, $\vec{x}=(-9,4,-2)$;

4) $\vec{e}_1'=(-3,2,4)$, $\vec{e}_2'=(0,1,0)$, $\vec{e}_3'=(-1,2,-1)$, $\vec{x}=(-3,7,4)$;

5) $\vec{e}_1=(3,-1,4)$, $\vec{e}_2=(3,1,4)$, $\vec{e}_3=(0,2,0)$, $\vec{x}=(6,0,8)$;

6) $\vec{e}_1'=(0,0,4)$, $\vec{e}_2'=(3,1,0)$, $\vec{e}_3'=(-1,2,-1)$, $\vec{x}=(2,3,-1)$;

7) $\vec{e}_1'=(-1,3,4)$, $\vec{e}_2'=(0,1,0)$, $\vec{e}_3'=(-1,2,-1)$, $\vec{x}=(-2,5,3)$;

8) $\vec{e}_1'=(0,0,4)$, $\vec{e}_2'=(3,1,0)$, $\vec{e}_3''=(-5,2,-1)$, $\vec{x}=(3,1,12)$;

9) $\vec{e}_1' = (5,0,0)$, $\vec{e}_2' = (3,1,5)$, $\vec{e}_3' = (-1,2,-1)$, $\vec{x} = (0,7,2)$;

10) $\vec{e}_1' = (4,1,4)$, $\vec{e}_2' = (0,1,0)$, $\vec{e}_3' = (1,2,-1)$, $\vec{x} = (6,5,2)$;

11) $\vec{e}_1' = (1,1,1)$, $\vec{e}_2' = (1,2,1)$, $\vec{e}_3' = (0,0,1)$, $\vec{x} = (-1,0,-4)$;

12) $\vec{e}_1' = (1,2,1)$, $\vec{e}_2' = (1,1,1)$, $\vec{e}_3' = (0,0,1)$, $\vec{x} = (1,0,4)$;

13) $\vec{e}_1' = (-1,2,1)$, $\vec{e}_2' = (-1,1,1)$, $\vec{e}_3' = (0,0,1)$, $\vec{x} = (-2,3,3)$;

14) $\vec{e}_1' = (-1,-2,1)$, $\vec{e}_2' = (-1,-1,1)$, $\vec{e}_3' = (0,0,1)$, $\vec{x} = (-2,3,3)$;

15) $\vec{e}_1' = (0,0,1)$, $\vec{e}_2' = (1,1,1)$, $\vec{e}_3' = (1,2,1)$, $\vec{x} = (1,0,4)$;

16) $\vec{e}_1' = (0,0,1)$, $\vec{e}_2' = (1,1,1)$, $\vec{e}_3' = (1,2,1)$, $\vec{x} = (2,3,7)$;

17) $\vec{e}_1' = (3,2,1)$, $\vec{e}_2' = (0,1,0)$, $\vec{e}_3' = (1,2,-1)$, $\vec{x} = (2,0,2)$;

18) $\vec{e}_1' = (3,2,1)$, $\vec{e}_2' = (0,1,0)$, $\vec{e}_3' = (1,2,-1)$, $\vec{x} = (2,5,-2)$;

19) $\vec{e}_1' = (3,2,1)$, $\vec{e}_2' = (0,1,0)$, $\vec{e}_3' = (1,2,-1)$, $\vec{x} = (6,5,2)$;

20) $\vec{e}_1' = (-3,2,1)$, $\vec{e}_2' = (0,1,0)$, $\vec{e}_3' = (-1,2,-1)$, $\vec{x} = (-6,5,-2)$.

Тема 4. Дійсні евклідові простори

Дійсний лінійний простір L називається *дійсним евклідовим простором* E (або просто евклідовим простором), якщо справджуються такі умови:

I. Існує правило, за допомогою якого будь-яким двом елементам (векторам) цього простору $\vec{x}$ і $\vec{y}$ ставиться у відповідність дійсне число, що називається *скалярним добутком* цих елементів і позначається символом $(\vec{x}, \vec{y})$.

II. Вказане правило підпорядковане таким чотирьом аксіомам:

1. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$.

2. $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y})$.

3. $(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$.

4. $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$, якщо $\vec{x} \neq 0$, $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$. якщо $\vec{x} = 0$.

Приклад 1. У n - вимірному лінійному просторі L_n матриць-рядків довжини n скалярний добуток двох будь-яких векторів

$\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ і $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$ може бути значеним, наприклад за допомогою рівності

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n .$$

Приклад 2. У нескінченновимірному лінійному просторі $C[a, b]$ скалярний добуток двох будь-яких функцій $x(t)$ і $y(t)$ можна означити, як інтеграл від їх добутку:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \int_a^b x(t) y(t) dt .$$

Означення. Довжиною вектора $x \in E$ називається величина $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$.

Так, в евклідовому просторі E_n $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$.

Теорема. Для будь-яких двох векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ в довільному евклідовому просторі E справедлива нерівність Коші-Буняковського

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \le (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2 .$$

Наприклад, в евклідовому просторі E_n ця нерівність має вигляд

$$(x_1 y_1 + ... + x_n y_n)^2 \le (x_1^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + ... + y_n^2)$$

а в евклідовому просторі $C[a, b]$ –

$$\left(\int_a^b x(t) y(t) dt \right)^2 \le \int_a^b x^2(t) dt \int_a^b y^2(t) dt .$$

Кутом φ між двома ненульовими векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$ в евклідовому просторі E називається той кут ($0 < \varphi < \pi$), косинус якого визначається співвідношенням

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x},\, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \frac{(\vec{x},\, \vec{y})}{\sqrt{(\vec{x},\, \vec{x})(\vec{y},\, \vec{y})}}.$$

Означення 1. Вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ n-вимірного евклідового простору E_n утворюють ортонормований базис цього простору, якщо ці вектори попарно ортогональні і модуль кожного із них дорівнює одиниці. тобто, якщо

$$(\vec{e}_i,\, \vec{e}_j) = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j, \ \ (i,\ j = \overline{1,\, n}). \end{array}\right.$$

Теорема. У кожному n-вимірному евклідовому просторі E_n існує ортонормований базис.

Алгоритм побудови за даною системою базисних векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ ортогонального базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ (*процес ортогоналізації*), має наступний вигляд:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\,\vec{a}_1\,|};$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_2}{|\,\vec{b}_2\,|}, \text{ де } \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - (\vec{a}_2,\, \vec{e}_1)\vec{e}_1;$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_3}{|\,\vec{b}_3\,|}, \text{ де } \vec{b}_3 = \vec{a}_3 - (\vec{a}_3,\, \vec{e}_2)\vec{e}_2 - (\vec{a}_3,\, \vec{e}_1)\vec{e}_1;$$

……

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{b}_n}{|\,\vec{b}_n\,|}, \text{ де } \vec{b}_n = \vec{a}_n - (\vec{a}_n,\, \vec{e}_{n-1})\vec{e}_{n-1} - ... - (\vec{a}_n,\, \vec{e}_1)\vec{e}_1.$$

Якщо, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ та $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ два ортонормовані базиси в E_n і

$$\vec{e}_1' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_2' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\vec{e}_n' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)\begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix},$$

тобто, перехід від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ задається матрицею

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 2. Квадратна матриця A називається *ортогональною*, якщо вона невироджена і $A^{-1} = A^T$.

Теорема 2. Квадратна матриця P порядку n є ортогональною тоді і тільки тоді, коли вона здійснює перехід від одного ортонормованого базису до іншого ортонормованого базису.

Завдання для самостійного розв'язування.

Використовуючи процес ортогоналізації із заданих векторів побудувати ортонормований базис.

1) $\vec{a}_1 = (5,0,0)$, $\vec{a}_2 = (3,0,4)$, $\vec{a}_3 = (-1,2,-2)$;

2) $\vec{a}_1 = (2,0,0)$, $\vec{a}_2 = (-3,0,4)$, $\vec{a}_3 = (1,2,-2)$;

3) $\vec{a}_1 = (1,0,0)$, $\vec{a}_2 = (-3,0,-4)$, $\vec{a}_3 = (1,-2,-2)$;

4) $\vec{a}_1 = (2,0,0)$, $\vec{a}_2 = (-3,0,4)$, $\vec{a}_3 = (2,4,-4)$;

5) $\vec{a}_1 = (0,1,0)$, $\vec{a}_2 = (-3,0,-4)$, $\vec{a}_3 = (2,4,4)$;

6) $\vec{a}_1 = (0,3,0)$, $\vec{a}_2 = (0,3,-4)$, $\vec{a}_3 = (-2,4,4)$

7) $\vec{a}_1 = (0,6,0)$, $\vec{a}_2 = (0,-3,-4)$, $\vec{a}_3 = (-2,-4,4)$;

8) $\vec{a}_1 = (0,4,0)$, $\vec{a}_2 = (0,3,4)$, $\vec{a}_3 = (-2,4,-4)$;

9) $\vec{a}_1 = (0,5,0)$, $\vec{a}_2 = (4,3,0)$, $\vec{a}_3 = (2,-4,4)$;

10) $\vec{a}_1 = (0,5,0)$, $\vec{a}_2 = (-4,3,0)$, $\vec{a}_3 = (2,3,6)$;

11) $\vec{a}_1 = (0,3,0)$, $\vec{a}_2 = (5,12,0)$, $\vec{a}_3 = (2,4,4)$;

12) $\vec{a}_1 = (0,5,0)$, $\vec{a}_2 = (-5,12,0)$, $\vec{a}_3 = (2,6,3)$;

13) $\vec{a}_1 = (0,-3,0)$, $\vec{a}_2 = (5,0,12)$, $\vec{a}_3 = (-2,4,4)$;

14) $\vec{a}_1 = (0,0,2)$, $\vec{a}_2 = (5,0,-12)$, $\vec{a}_3 = (6,2,3)$;

15) $\vec{a}_1 = (0,0,-2)$, $\vec{a}_2 = (-5,0,-12)$, $\vec{a}_3 = (6,2,3)$;

16) $\vec{a}_1 = (0,0,-3)$, $\vec{a}_2 = (15,0,8)$, $\vec{a}_3 = (-6,2,3)$;

17) $\vec{a}_1 = (0,0,3)$, $\vec{a}_2 = (0,15,8)$, $\vec{a}_3 = (-6,-2,3)$;

18) $\vec{a}_1 = (4,0,0)$, $\vec{a}_2 = (0,6,8)$, $\vec{a}_3 = (-6,-2,-3)$;

19) $\vec{a}_1 = (4,0,3)$, $\vec{a}_2 = (0,6,0)$, $\vec{a}_3 = (6,-2,-3)$;

20) $\vec{a}_1 = (-4,0,3)$, $\vec{a}_2 = (2,0,0)$, $\vec{a}_3 = (6,-2,3)$.

Тема 5. Квадратичні форми

Означення. Квадратичною формою називається нелінійна функція (многочлен) виду

$$\begin{gathered} Q(\mathbf{x}) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \\ = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots \\ \ldots + a_{n1}x_4x_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_nx_n, \end{gathered} \tag{1}$$

де коефіцієнти a_{ij} та змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — дійсні числа.

Нехай матриця коефіцієнтів A, вектор $\mathbf{x}$ та транспонований до нього вектор $\mathbf{x}'$ подаються відповідно у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Тоді квадратичну форму можна записати так:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' A \mathbf{x}. \tag{2}$$

Кожній квадратичній формі можна поставити у відповідність нескінченну множину різних матриць A, для яких ця форма дорівнює $\mathbf{x}' \cdot A\mathbf{x}$. Серед них одна матриця є симетричною ($a_{ij} = a_{ji}$). Звичайно квадратичну форму записують саме за допомогою цієї матриці, а отже, кожна квадратична форма є симетричною.
Вираз $Q(\mathbf{x})$ — скаляр, причому знак його — на підставі властивостей матриці A.

Означення. Квадратична форма $Q(\mathbf{x})$ називається **додатно визначеною**, якщо для всіх дійсних значень $\mathbf{x} \neq 0$ виконується нерівність $Q(\mathbf{x}) > 0$, і **невід'ємною**, якщо для всіх дійсних значень $\mathbf{x} \neq 0$ виконується нерівність $Q(\mathbf{x}) \geq 0$.

Невід'ємна квадратична форма називається також **додатно напіввизначеною**.

Означення. Якщо $Q(\mathbf{x})$ — додатно визначена форма, то квадратична форма $-Q(\mathbf{x})$ називається **від'ємно визначеною**. Якщо $Q(\mathbf{x})$ — невід'ємна квадратична форма, то знак «мінус» $Q(\mathbf{x})$ називається **недодатною квадратичною формою**.

Означення. Якщо квадратична форма $Q(\mathbf{x})$ може набувати від'ємних і додатних значень, то вона називається **невизначеною**.

Оскільки кожній квадратичній формі $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$ відповідає симетрична матриця A, то перенесемо означення визначеності квадратичної форми на відповідні симетричні матриці: говоритимемо про додатно визначені, невід'ємні, від'ємно визначені, недодатні і невизначені матриці.

Властивості квадратичної форми $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$ пов'язані з власними числами матриці A.

Теорема 1. Власні числа симетричної матриці з дійсними елементами дійсні.

Теорема 2. Нехай симетрична матриця A має власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ і відповідні власні вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Якщо $\lambda_j \neq \lambda_k$, то вектори $\mathbf{x}_j$ і $\mathbf{x}_k$ ортогональні, тобто $\mathbf{x}_j'\mathbf{x}_k = 0$.

Якщо всі власні числа матриці A різні, то всі її власні вектори взаємно ортогональні.

Теорема 3. Дійсна симетрична матриця A з різними власними числами ортогонально подібна до діагональної матриці.

Розглянемо довільну квадратичну форму

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x}, \quad A' = A. \tag{1}$$

Знайдемо ортогональну матрицю T ($T' = T^{-1}$), стовпцями якої є власні вектори матриці A:

$$T = (\mathbf{x}_1\, \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n),$$

а далі зробимо заміну змінної:

$$\mathbf{x} = T\mathbf{y}\,,\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \dots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix}.$$

У результаті дістанемо квадратичну форму

$$Q(T\mathbf{y}) = \mathbf{y}'T'AT\mathbf{y} = \mathbf{y}'\Lambda\mathbf{y} = \lambda_1\mathbf{y}_1^2 + \lambda_2\mathbf{y}_2^2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{y}_n^2. \quad (2)$$

З (2) випливає така теорема.

Теорема 4. Нехай A — дійсна симетрична матриця з власними числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ і $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$ — квадратична форма. Тоді виконуються такі властивості:

1. Квадратична форма $Q(\mathbf{x})$ є додатно (від'ємно) визначеною, якщо всі власні числа $\lambda_j > 0$ $(\lambda_j < 0)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

2. Квадратична форма $Q(\mathbf{x})$ є невід'ємною (недодатною), якщо всі власні числа $\lambda_j \geq 0$ $(\lambda_j \leq 0)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

3. Якщо власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ мають різні знаки, то квадратична форма є невизначеною.

Теорема 5. Якщо квадратична форма $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$ додатно (від'ємно) визначена, то й квадратична форма $\mathbf{x}'A^{-1}\mathbf{x}$ додатно (від'ємно) визначена.

Доведення. Якщо матриця A має власні числа $\lambda_j\,(j = 1, 2, \ldots, n)$, то матриця A^{-1} має власні числа $\lambda_j^{-1}(j = 1, 2, \ldots, n)$. Коли $\lambda_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то $\lambda_j^{-1} > 0$ $(j - 1, 2, \ldots, n)$, звідки й випливає правильність теореми.

Умови додатної визначеності симетричної матриці пов'язані з її головними мінорами.

Означення. *Головними мінорами* матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називаються ті мінори цієї матриці, які розміщені в лівому верхньому її куті:

$$\det A_1 = a_{11},\ \det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \det A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\det A_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема 4. **(*Критерій Сільвестра*).** Для того щоб квадратична форма $Q(\mathbf{x})$ була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори відповідної матриці квадратичної форми були додатними. Для того щоб квадратична форма $Q(\mathbf{x})$ була від'ємно визначеною, необхідно і достатньо, щоб знаки головних мінорів відповідної матриці квадратичної форми чергувалися, причому $\Delta_1 < 0$.

Теорема стає очевидною в разі, коли матриця A є діагональною:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тоді,

$$\det A_1 = \lambda_1,\ \det A_2 = \lambda_1\lambda_2,\ \ldots,\ \det A_n = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n,$$

причому умови (4) необхідні і достатні для того, щоб усі власні числа матриці A були додатні.

Квадратична форма, якій відповідає матриця 3-го порядку

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$$

є від'ємно визначеною, якщо знаки її головних мінорів чергуються:

$$\det A_1 = a_{11} < 0,\ \det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \det A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

Завдання для самостійного розв'язування.

Для відомої матриці квадратичної форми записати квадратичну форму та звести її до канонічного вигляду і вказати знаковизначеність.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 8 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 7 \\ -8 & -2 & -3 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

11) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

12) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

13) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

14) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

15) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 \\ 8 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

7) $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

9) $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

10) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

16) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

17) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 1) 8)

18) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

19) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

20) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Тема 6. Тензори

Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – довільний базис E_n.

Теорема 1. Сукупність векторів $\vec{e}^1, \vec{e}^2, ..., \vec{e}^n$ в E_n, означених рівностями

$$(\vec{e}_i, \vec{e}^{\,j}) = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j, \ \ (i,\ j = \overline{1, n}) \end{array}\right.$$

утворюють базис у E_n і визначаються однозначно по відношенню до векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$.

Означення 1. Базиси $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ і $\vec{e}^1, \vec{e}^2, ..., \vec{e}^n$ називаються *взаємними.*

Нехай $\vec{x}$ – довільний вектор в E_n. Тоді, очевидно, що $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + ... + x^n\vec{e}_n = x_1\vec{e}^1 + x_2\vec{e}^2 + ... + x_n\vec{e}^n$.

Означення 2. Координати $x^1, x^2, ..., x^n$ вектора $\vec{x}$ в початковому базисі називаються *контраваріантними координатами* $\vec{x}$, а координати $x_1, x_2, ..., x_n$ того самого вектора у взаємному базисі $\vec{e}^1, \vec{e}^2, ..., \vec{e}^n$ *коваріантними координатами* $\vec{x}$.

Зауваження. У випадку, коли $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – ортонормований базис $x_i = x^i$, $\vec{e}_i = \vec{e}^i \quad (i = \overline{1, n})$.

Означення 3. Матриця $G = \|g_{ij}\|, \quad i, j = \overline{1, n},$ де $g_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, називається *метричною матрицею* в E_n, а її коефіцієнти g_{ij} – *метричними коефіцієнтами* базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ в E_n.

Теорема 2. Матриця $G^* = \|g^{ij}\|, \ i, j = \overline{1, n},$ де $g^{ij} = (\vec{e}^i, \vec{e}^j)$ є оберненою до матриці G, тобто $G^* = G^{-1}$.

Зауваження. Коли $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – ортонормований базис G є одиничною матрицею.

Теорема 3. Коваріантні і контрваріантні координати вектора $\vec{x}$ пов'язані рівностями:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = (x^1, x^2, ..., x^n)G, \ (x^1, x^2, ..., x^n) = (x_1, x_2, ..., x_n)G^{-1}$$

Припустимо, що в E_n поряд з базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ взято новий базис $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, ..., \dot{\vec{e}}_n$, зокрема формула переходу від $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ до $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, ..., \dot{\vec{e}}_n$ має вигляд

$$(\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, ..., \dot{\vec{e}}_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)C,$$

де

$$C=\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \\ c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix},$$

тоді, справедливе твердження.

Теорема 4. Якщо $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, \dots, \dot{\vec{e}}_n$ – базис, взаємний до $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \dots, \vec{e}^n$, то

$$(\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, \dots, \dot{\vec{e}}_n) = (\vec{e}^1, \vec{e}^2, \dots, \vec{e}^n)\left(C^{-1}\right)^T.$$

Теорема 5. Якщо $\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dots, \dot{x}^n$ – контраваріантні, а $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ – коваріантні координати вектора $\vec{x}$ базисі $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, \dots, \dot{\vec{e}}_n$, то

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)C,$$
$$(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dots, \dot{x}^n) = (x^1, x^2, \dots, x^n)\left(C^{-1}\right)^T.$$

Зауваження. У випадку, коли $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – ортонормований базис, а C – ортогональне перетворення, то $C = \left(C^{-1}\right)^T$.

Означення тензора

Для скорочення запису використовуємо правило Ейнштейна $x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i = x^i e_i$ зміст, якого полягає в тому, що під індексом, який зустрічається двічі (один раз зверху а інший раз знизу) розуміють сумування.

Означення. *Тензором A рангу* $k\,(k \in \mathbb{N})$ типу (p, q) в E_m $(p+q=k, \quad p \ge 0, q \ge 0)$ називаєсь геометричний об'єкт, який в кожному базисі $\boldsymbol{e}$ визначається заданням n^k чисел $a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$, що

називються координатами тензора A та змінюються у разі переходу до нового базису $\dot{\boldsymbol{e}}$ за формулами

$$\dot{a}_{i_1..i_p}^{j_1...j_q} = a_{k_1..k_p}^{l_1..l_q} c_{i_1}^{k_1} ... c_{i_q}^{k_p} d_{l_1}^{j_1} ... d_{l_p}^{j_q} .$$

Тензори класифікуються за їхніми рангами і будовою. Розрізняють тензори нульового, першого, другого тощо рангів. Ранг тензора визначається відповідно до формул перетворення і за кількістю компонентів тензора.

Рангом тензора є число, що показує вимір членів у формулах перетворення, щодо коефіцієнтів перетворення базисних векторів. Або ранг тензора дорівнює кількості індексів у його компонентах.

Наприклад, скалярні величини, являють собою тензори нульового рангу, вектори – тензори першого рангу.

За своєю будовою компоненти тензорів поділяються на контраваріантні, коваріантні і змішані. Таким чином, будова тензора характеризує кількість контраваріантних і коваріантних індексів у відповідних виразах. Тензор рангу k типу (p,q) зазвичай називають p разів коваріантним та q разів контраваріантним. Тому надалі індекс, що вказує на ранг тензора, будемо опускати.

Тензорна алгебра

Рівність тензорів

Два тензори вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли вони однакового типу і мають рівні відповідні координати в деякому базисі.

Множення тензора на скаляр

Добутком тензора A на скаляр λ називається тензор $B = \lambda A$, компоненти якого в деякій системі координат дорівнюють добутку компонент тензора А на скаляр λ.

Перестановка індексів

Нехай тензор задано своїми контраваріантними компонентами t^{ij}. Змінюючи місцями індекси, одержуємо новий тензор – t^{ji}, якому відповідає матриця, транспонована відносно матриці тензора, заданого компонентами t^{ij}.

У випадку, якщо t^{ij} є симетричним, то перестановка індексів зводиться до тотожного перетворення і має місце рівність:

$$t^{ij} = t^{ji}.$$

Додавання тензорів

Додавання тензорів можна виконувати тільки для тензорів однакового рангу і будови. Додати кілька тензорів, означає, що необхідно додати їхні однойменні компоненти.

Наприклад, сумою двох тензорів, заданих своїми контраваріантними компонентами r^{ij}, s^{ij}, буде тензор

$$t^{ij} = r^{ij} + s^{ij} = s^{ij} + r^{ij}.$$

Операція додавання тензорів інваріантна, тобто тензор, дорівнює сумі тензорів у деякій системі координат, буде дорівнювати сумі цих тензорів у будь-якій іншій координатній системі. Тензорні властивості t^{ij} очевидні, тому що формули перетворення компонент тензорів лінійні відносно компонент.

Саме ці властивості формул перетворення не дозволяють поширювати дії додавання на тензори різних рангів і будови.

Опускання і підняття індексів

Опускання і підняття індексів у тензорів будь-якого рангу і будови виконується за допомогою метричного тензора.

Нехай, наприклад, маємо тензор, заданий своїми контраваріантними компонентами t^{sk}. За допомогою коваріантних компонент метричного тензора g_{si} контраваріантні компоненти даного тензора перетворяться в змішані:

$$g_{si} t^{sk} = t_{i\cdot}^{\cdot k}.$$

Застосовуючи ще один раз цю ж операцію

$$t_{ij} = g_{si} g_{jk} t^{sk},$$

компоненти вихідного тензора перетворяться в коваріантні. Таким чином, ми опустили контраваріантні індекси.

Аналогічно можна по черзі підняти індекси у тензора, що заданий коваріантними компонентами

$$t_{\cdot k}^{i\cdot} = g^{si} t_{sk} ,$$
$$t^{ij} = g^{si} g^{jk} t_{sk} .$$

Добуток тензорів

Операція добутку тензорів поширюється на тензори будь-якого рангу і будови.

Добутком декількох тензорів називається новий тензор з компонентами, рівними добутку компонентів тензорів, що перемножуються, розташованими у визначеному порядку.

Ранг добутку підвищується і дорівнює сумі рангів співмножників, а його будова визначається послідовністю розташування індексів у добутку.

Наприклад, розглянемо добуток тензора другого рангу з компонентами t_{sk} і тензора першого рангу (вектора) з компонентами a^r. Результатами добутку цих тензорів будуть тензори третього рангу:

$$t_{sk\cdot}^{\cdot\cdot r} = t_{sk} a^r ,$$
$$t_{\cdot sk}^{r\cdot\cdot} = a^r t_{sk} .$$

Ці два добутки різні. Вони відрізняються порядком індексів. Тому, тензорний добуток некомутативний.

Згортання тензорів

Операція згортання виконується тільки над тензорами, заданими змішаними компонентами.

Операція згортання над вихідним тензором, заданим змішаними компонентами, полягає в прирівнюванні одного з контраваріантних індексів одному з коваріантних і розглядаються суми по прирівняних індексах.

Отримані суми утворять тензор, який має ранг на дві одиниці менше рангу тензора, що згортається.

Розглянемо тензор, заданий змішаними компонентами $t^{r}_{\cdot sk}$. Виконуючи вимоги згортання, одержимо:

$$q^{\cdot\cdot\cdot}_{k\cdot\cdot} = t^{r\cdot\cdot}_{\cdot rk}.$$

Завдання для самостійного розв'язування.

Знайти вектор, що утворюється множенням тензора T^{ij} на вектор A_k з наступним згортанням по першому (другому) індексу тензора й індексу вектора в базисі простору E_3, якщо

1) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad A_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

2) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad A_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

3) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -4 & 8 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad A_k = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

4) $T^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad A_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

5) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 5 \\ -2 & -4 & 8 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad A_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

6) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $\qquad A_k = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

7) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$, $\qquad A_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

8) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\qquad A_k = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

9) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\qquad A_k = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

10) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & -4 & 8 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\qquad A_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$;

11) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $\qquad A_k = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

12) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $\qquad A_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$;

13) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 11 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};$

14) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};$

15) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix};$

16) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix};$

17) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & -4 & 8 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

18) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 5 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix};$

19) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$

20) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Тема 7. Групи. Кільця. Поля

Означення 1. Множина X із заданою на ній бінарною асоціативною операцією називається ***напівгрупою***.

Означення 2. Напівгрупа з одиничним (нейтральним) елементом називається ***моноїдом***.

Означення 3. Моноїд G, всі елементи якого мають обернені, називається ***групою***.

Іншими словами, передбачається, що виконуються наступні аксіоми:

1. На множині G визначена бінарна операція:
$(x, y) \to x*y$.

2. Операція асоціативна: $(xy)z = x(yz)$ для всіх $x, y, z \in G$.

3. Для всіх $x \in G$ існує нейтральний елемент e:
$xe = ex = x$.

4. Для кожного елемента $x \in G$ існує обернений x^{-1}:
$x^{-1}*x = x*x^{-1}=e$.

Означення 4. Групою називається півгрупа, в якій виконуються обернені операції, тобто для будь-яких елементів a і b кожне з рівнянь $ax = b$, $ya = b$ має єдиний розв'язок.

Означення 5. Кількість елементів групи називається її ***порядком***: $|G| = n$.

Означення 6. Група з комутативною операцією називається ***комутативною*** (абелевою).

Означення 7. Мінімальне натуральне число n таке, що $x^n=e$, називається ***порядком елемента*** x: $|x| = n$.

Означення 8. Підмножина $H \subset G$ називається підгрупою групи G, якщо

а) $e \in H$;

б) $h_1, h_2 \in H \to h_1 \cdot h_2 \in H$;

в) $h \in H \to h^{-1} \in H$.

Підгрупа $H \in G$ – власна, якщо $H \neq e$: $H \neq G$.

Означення 9. Група G називається ***циклічною групою***, якщо вона складається із степенів одного із своїх елементів a, тобто співпадає з однією із своїх циклічних підгруп $\{a\}$.

Елемент a називається в цьому випадку ***твірним елементом*** групи G.

Теорема 1. Переставні елементи a, b будь-якої групи G, що мають взаємно прості порядки s, t, породжують в G циклічну підгрупу порядку st

$$\{a, b\}=\{ab\}.$$

Теорема Лагранжа. В будь-якій скінченій групі G порядок будь-якої підгрупи є дільником порядку самої групи.

Наслідки:

1) Порядок будь-якого елементу скінченої групи є дільником порядку самої групи;

2) Будь-яка скінчена група, порядок якої є просте число, є циклічною.

Означення 10. Відображення f: $G \to G^{\iota}$ групи $(G, *)$ в $(G^{\iota}, \circ)$ називається гомоморфізмом, якщо $f(a * b)=f(a) \circ f(b)$, $\forall$ $a, b \in G$.

Означення 11. Дві групи G і G^{ι} з операціями $*$ і $\circ$ називаються ізоморфними, якщо існує відображення f: $G \to G^{\iota}$ таке, що

1. $f(a*b)=f(a)\circ f(b)$, для усіх $a, b \in G$;
2. f –взаємнооднозначні.

Факт ізоморфізму груп позначається $G \cong G^{\iota}$.

Простіші властивості ізоморфізму:

1. Одиниця переходить в одиницю;
2. $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$;
3. Обернене відображення f^{-1}: $G \to G^{\iota}$ (яке існує за означенням) також є ізоморфізмом.

Теорема 2. Усі циклічні групи одного і того ж порядку (в тому числі і нескінченні) ізоморфні.

Теорема Келі. Будь-яка скінчена група порядку n ізоморфна деякій підгрупі симетричної групи S_n.

Якщо в означенні ізоморфізму покласти $G=G^{\iota}$, ми одержимо ізоморфне відображення ϕ: $G \to G$ групи G на себе. Воно називається *автоморфізмом групи G* (позначається Aut(G)).

Означення 12. Нехай K – непорожня множина, на якій задані дві бінарні операції + (додавання) та $*$ (множення), які задовольняють наступним умовам:

1) $(K,+)$ – абелева група;

2) $(K, *)$ – напівгрупа;

3) Операція множення пов'язана дистрибутивними законами: відносно операції додавання:

$$(a+b)*c=a*c+b*c, \qquad c*(a+b)=c*a+c*b$$

для всіх $a, b, c \in K$.

Тоді $(K, +, *)$ називається *кільцем*.

Якщо $(K, *)$ – моноїд, то $(K, +, *)$ – *кільце з одиницею*.

Означення 13. Кільце називається *комутативним*, якщо $xy = yx$, для $x, y \in K$.

Означення 14. Кільце, елементами якого є деякі комплексні числа із звичайними операціями додавання і множення, називається *числовим кільцем*.

Означення 15. Підмножина I кільця K називається ідеалом в K, якщо вона замкнута відносно операції множення на елементи кільця.

Ідеал породжений одним елементом називається головним.

Означення 16. Комутативне кільце P називається ***полем***, якщо в ньому є як найменше один елемент, відмінний від нуля і виконується операція ділення, крім ділення на нуль, тобто для $\forall\, a,b \in P$, $a \neq 0$ існує в P елемент q, такий що: $aq = b$. Елемент q називають *часткою* елементів a і b записують $q = \dfrac{b}{a}$.

Отже, P (поле) – це комутативне кільце з одиницею, в якому кожен відмінний від нуля елемент має обернений відносно операції множення. Іншими словами комутативне кільце з одиницею P є полем, коли сукупність його відмінних від нуля елементів утворює абелеву групу відносно операції множення.

Завдання для самостійного розв'язування.

Перевірити, чи:

1) Множина дійсних чисел R з заданою на ній операцією додавання "+" утворює групу (R,+);

2) Множина дійсних чисел без нуля $R\setminus\{0\}$ з заданою на ній операцією множення утворює групу ($R\setminus\{0\}$,$*$);

3) Множина цілих чисел Z з заданою на ній операцією додавання “+” утворює групу (Z,+);

4) Множина дійсних додатних чисел без нуля R^+ з заданою на ній операцією множення утворює групу (R^+,$*$);

5) Множина з двох елементів M={a,b} з операцією, заданою наступним чином: $a*a=b*b=a,\ a*b=b*a=b$;

6) Множина S самосуміщень трикутника утворює групу відносно композиції відображень;

Які з наступних множин утворюють кільце відносно стандартних операцій додавання та множення:

7) $\{a+b\sqrt{6} \mid a,\ b\in\mathbb{Z}\}$;

8) $\{a+b\sqrt{6}+c\sqrt{2} \mid a,\ b,\ c\in\mathbb{Q}\}$;

9) $\{a+b\sqrt{6}+c\sqrt{3}+d\sqrt{2} \mid a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Q}\}$;

10) $\{a+b\sqrt{3} \mid a,\ b\in\mathbb{Z}\}$;

11) $\{a+b\sqrt[4]{6} \mid a,\ b\in\mathbb{Q}\}$;

12) $\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,\ b,\ c\in\mathbb{Q}\}$;

13) $\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}\}$?

Які з наступних множин утворюють поле відносно стандартних операцій додавання та множення:

14) $\{a+b\sqrt{6} \mid a,\ b\in\mathbb{Z}\}$;

15) $\{a+bi\sqrt{3} \mid a,\ b\in\mathbb{Z}\}$;

16) $\{a+bi\sqrt{6} \mid a,\ b\in\mathbb{Q}\}$;

17) $\{a+b\sqrt{5} \mid a,\ b\in\mathbb{Q}\}$;

18) $\{a+b\sqrt{2} \mid a,\ b\in\mathbb{R}\}$;

19) $\{ai+b\sqrt{5} \mid a,\ b\in\mathbb{Q}\}$;

20) $\{ai+b\sqrt{2} \mid a,\ b\in\mathbb{R}\}$?

Список використаної літератури

1. Тадеєв П. О., Дейнека О. Ю. Кушнір В. П. Методичні вказівки і завдання до виконання самостійної роботи з дисципліни “Алгебра та геометрія” частина І. Рівне : НУВГП, 2017. 32 с. (04-02-18).
2. Тадеєв П. О., Дейнека О. Ю. Кушнір В. П. Методичні вказівки і завдання до виконання самостійної роботи з дисципліни “Алгебра та геометрія” частина ІІ. Рівне : НУВГП, 2017. 29с. (04-02-19).
3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / М. : Физматлим, 2001. 496 с.
4. Білонога Д. М., Каленюк П. І. Алгебра та геометрія. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2016. 380 с.
5. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / В. І. Діскант, Л. Р. Береза, О. П. Грижук, Л. М. Захаренко. К. : Вища школа, 2001. 303 с.
6. Завало С. Т. Курс алгебри. К. : Вища школа, 1988. 502 с.
7. Калужнін Л. А., Вишенський В. А., Шуб Ц. О. Лінійні простори. К. : Вища школа,1Л971. 343 с.
8. Кованцов М. І. Проективна геометрія. К. : Вища школа, 1985. 368 с.
9. Рудавський Ю. К, Костробій П. П., Луник Х. П, Уханська Д. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Л. : Бескид Біт, 2002. 261 с.
10. Збірник задач з лінійної алгебра та аналітичної геометрії / Рудавський Ю. К. та ін. Л. : Бескид Біт, 2002. 256 с.
11. Фадеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. М. : Наука, 1977. 316 с.
12. Чарін В. С. Лінійна алгебра. К. : Техніка, 2004. 413 с.