Проф. М. М. АБРАМОВ

ТЕХНІЧНІ ОБЧИСЛЕННЯ

АЙГОЛОВНІШІ МЕТОДИ
СПОСОБИ ТЕХНІЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ
А ЕЛЕМЕНТАРНІ ОСНОВИ ЇХ ТЕОРІЇ

УСРР
НІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО

ПРОФ. АБРАМОВ, М. М.
ІНЖЕНЕР ШЛЯХІВ

ТЕХНІЧНІ ОБЧИСЛЕННЯ

НАЙГОЛОВНІШІ МЕТОДИ Й СПОСОБИ ТЕХНІЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ТА ЕЛЕМЕНТАРНІ ОСНОВИ ЇХ ТЕОРІЇ

ПІДРУЧНИК ДЛЯ СТУДЕНТІВ, ТЕХНІКІВ І ІНЖЕНЕРІВ

З 183 РИС. В ТЕКСТІ

Державний Науково - Методологічний Комітет Наркомосвіти УСРР дозволив до вжитку за посібник по бібліотеках ВТШ'ів

ДВОУ. ТЕХНІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО
ХАРКІВ • 1931 • ДНІПРОПЕТРОВСЬКЕ

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літопису Укр. Друку“, „Картковому репертуарі“ та інших покажчиках Української Книжкової Палати

Дніпропетровське. Друкарня пам. „Перекопу“—Поліграфтр. Зам. № 1111.

Укрголсвіт № 601/Д. Тираж 6.000. Ост. 364 А5.

ПЕРЕДМОВА ДО УКРАЇНСЬКОГО ВИДАННЯ

Це видання українською мовою зовсім не є тільки переклад російського видання, що його видрукував Держтехвидав РСФРР 1928 року. У новім виданні є чимало додатків і змін, зроблених на підставі уваг та побажань читачів російського видання.

Суттєва особливість українського видання — те, що книжку розбито на дві частини. У першій частині залишено всі основні теоретичні засади, у другу ж, практичну, частину винесено всі додатки, що складали в російськім виданні IV відділ, а також дано приклади, вправи й задачі з обсягу техніки до відповідних відділів книжки. Мені здається, що друга частина корисна буде для кращого засвоєння методів технічних обчислень, бо вона дає читачеві матеріял, щоб самостійно вправлятися в виконанні технічних обчислень.

Через збільшення матеріялу обсяг книжки збільшився майже в півтора рази проти російського видання, а так само чимало збільшилося й число рисунків.

На закінчення, беручи до уваги прихильні оцінки російського видання, що їх я дістав від техніків і від математиків, мені лишається побажати, щоб і це українське видання так само прихильно прийняли українські техніки, як і російські, і щоб воно стало їм за корисний порадник в їхній практичній діяльності.

Проф. інж. шляхів М. М. Абрамов

Дніпробуд
Червень 1930 р.
№ 158

ПЕРЕДМОВА ДО РОСІЙСЬКОГО ВИДАННЯ

Діставши 1908 року в своє завідування щойно відкриту тоді в Донськім Політехнічнім Інституті катедру будівної механіки, я під свіжими враженнями закордонного відрядження до Ґетинґенського Університету, у зв'язку з іще не згаслими споминами про роки шкільного навчання та перші кроки на практичній інженерній діяльності, почав читати лекції викладом з інженерного погляду найголовніших основних відомостей з фізично-математичних наук, а також практичних способів застосовувати їх у зв'язку з основами теорії наближених обчислень. Хоча відомості ці й не стосувалися, в суті, до курсу будівної механіки, проте я вважав за корисне й доконечне попередити ними (і, головно, правилами та способами наближених обчислень) свої лекції на тій підставі, що при практичнім розв'язанні різних технічних задач головна мета є можливо швидше й легше знаходити розв'язки з достатньою для практики точністю. Бувши, отже, одним із лекторів, що їм випадає зустрічати молодих студентів на порозі циклу інженерних знань та, підготувавши їх до засвоєння цих наук, ввести в лави техніків, я вважав за особливо корисне на перших лекціях зі своєї дисципліни з'ясувати їм з погляду інженера всю цінність для дальшої їхньої діяльности якраз оцих основних відомостей з фізично-математичних наук і познайомити їх зі способами застосовувати ці знання в питаннях будівної механіки. Усі ці відомості я виклав у першім (допоміжнім) випуску тоді ж таки виданих моїх записок лекцій з курсу будівної механіки.

Така, як на той час, велика новина збила цілу бурю нападів на мене з усіх боків. Представники теоретичних фізично-математичних наук ладні були вбачати в цім втручання до їхньої компентенції і ледве чи не профанацію високих істин „чистих наук", а інженери мали це за непотрібне, стороннє, переобтяження курсу. Лише деякі окремі особи похваляли мою новину, проте, загальне ставлення до неї було таке неґативне, а затверджені від відповідної влади програмові вимоги такі категоричні, що, видаючи курс другим виданням, я вже не наважився друкувати в нім цю допоміжну частину і, зачисливши її до вправ умістив найголовніші витяги з неї в задачнику, як допоміжні формули і вказівки, потрібні для розв'язання вправ та задач.

Проте, досвід викладання й думка моїх колишніх учнів, які вивчали курс, користуючися з першого видання, довели мене до переконання, що в третім виданні курсу треба знову вмістити всі оті відомості, хоча б як додаток. У цім напрямі я й переробив курс, готуючи його до перевидання. Обставини нашого державного життя, що утворилися з 1917 року, не дали мені змоги перевидати курс, і рукопис лежав, очікуючи сприятливіших обставин.

Першою такою сприятливою обставиною було запровадження влітку 1923 року від Головпрофосу нових навчальних плянів для ВИШ'ів. За цими новими плянами, опрацьованими в комісії для реформи вищої освіти і затвердженими від Державної Вченої Ради, на механічних факультетах Вищих Технічних Шкіл належало читати курс „Технічні обчислення".

Взявши це до керування та виконання, відповідна предметова комісія Донського Політехнічного Інституту доручила мені читати зазначений курс. Оця друга сприятлива обставина спонукала мене знову переробити присвячений обчисленням випуск мого курсу будівної механіки, відповідно до нового навчального пляну, вже не з погляду потреб самої будівної механіки, а й узагалі потреб техніки і всяких технічних робіт, бо при тих роботах завжди доводиться робити обчислення, а спеціяльних підручників, як їх робити, на жаль, російською мовою немає, що раз-у-раз дається в знаки. Тимчасом, як за кордоном, крім того, що існують спеціяльні підручники обчислювальної техніки, знайомлять з практичними способами обчисляти не тільки в вищих, а й у середніх школах, наша середня школа не давала своїм вихованцям жодних навичок робити обчислення, і викладачі вищих спеціяльних шкіл добре знають, скільки великих помилок роблять молоді фахівці-студенти в найелементарніших способах обчислення.

Питання про це і взагалі про характер та якість математичного підготування студентів у зв'язку з поставою викладання математики в вищих спеціяльних технічних школах не раз обговорювано і в літературі, і на з'їздах та нарадах. Спробу висвітлити та з'ясувати це питання зробив і я в доповіді XII з'їздові натуралістів і лікарів у Москві, що відбувався з 28 грудня 1909 р. до 6 січня 1910 р. („К вопросу о постановке преподавания математических наук вообще и в технических школах в частности"). Реальних наслідків, звісно, не досягнуто. Не краща справа й тепер, у новій єдиній трудовій школі, а тому запровадження по ВИТШ'ах обов'язкового курсу „Технічні обчислення" треба було тільки щиро вітати.

З радістю, отже, взяв я на себе обов'язок читати курс „Технічні обчислення“ в ДПІ, і, не мріючи, звичайна річ, надолужити прогалину в нашій технічній літературі, а тільки воліючи по силі допомогти справі й дати студентам посібник для засвоєння моїх лекцій, я вважав за свій обов'язок скласти відповідний підручник, що й зробив іще 1923 року. На жаль, доки цей підручник лежав у мене рукописом, бо не можна було його видрукувати, 1926 року, коли запроваджували нові так звані, уніфіковані навчальні пляни, з них знову виключили такій потрібний технікам курс „Технічних обчислень“, і потреба на відповідний підручник ніби відпадала. Та я все ж вважаю за потрібне видрукувати свій підручник, гадаючи, що він може бути корисний для попереднього обізнання й збудження інтересу до даного питання не тільки серед студентів ВИШ'ів, а й техніків узагалі, бо вони часто не мають ні часу, ні змоги ритися по спеціяльних працях, чужими мовами писаних, або в поясненнях і порадниках до користування різними таблицями, щоб дістати відповідь на питання з поля обчислювальної техніки.

Хоча, складаючи цей підручник, я намагався використати ввесь свій 25-річний досвід на науково-технічній ниві, проте, свідомий того, що пропонована книжка, як перша спроба систематично викласти предмет, не вільна від прогріхів і хиб, які виявляються при користуванні з неї на практиці, я прошу всіх читачів зробити мені відповідні вказівки та поради. Такі вказівки й уваги можуть стати за матеріял для доповнень, виправ і поліпшень мого підручника, коли йому судилося, знайшовши прихильну зустріч у технічних колах, бути перевиданим.

Проф. інж. шляхів М. М. Абрамов

P. S. Вважаю за потрібне зазначити, що всі оригінали рисунків для кліше до цього підручника виконав студ. ДПІ *) М. М. Абрамов, за віщо складаю йому подяку.

Новочеркаськ
1926 р.

---

*) Нині інженер.

ВСТУП

„... Nur die wiederholte Anwendung der Methode kann... zur Beherrschung des Gegenstandes verhelfen. Denn es genügt nicht, die zu Grunde liegenden Gedanken erfasst zu haben, es ist vielmehr notwendig, sich eine gewisse Leichtigkeit in der Anwendung anzueignen. Man könnte ebenso gut das Klavierspiel nur durch Konzertbesuch, wie die graphischen Methoden nur durch Hören von Vorlesungen zu erlernen hoffen".

Prof. *C. Runge*. „Graphische Methoden" S. 3.

Розв'язуючи всяку технічну задачу, доводиться робити різні розрахунки. Ці розрахунки звичайно складаються з цілого ряду часто дуже довгих, складних та втомливих математичних викладок і обчислень.

Тим що основне завдання техніки — домагатися найвигіднішого результату, витрачаючи якнайменше часу, праці й коштів, то натурально, техніка виробила спеціяльні способи, так званих, „технічних обчислень", що полегшують і прискорюють виконання потрібних розрахунків, часом навіть на шкоду математичній їхній точності. Ознайомлення з методами й способами таких технічних обчислень, з їхньою теорією та практикою і становить предмет цього підручника.

При всяких обчисленнях, отже й при технічних, треба мати якісь числа, що визначають розміри тіл або характеризують їхні властивості чи певні явища, а числа можна дістати тільки виміряючи зазначені тіла й явища. Природно, отже, що питання про одиниці мір є суттєве для техніка при технічних розрахунках, тому з нього й починаємо даний підручник.

Відомо, проте, що всякий вимір із природи своєї не вільний від помилок, а при всіх технічних обчисленнях доводиться мати діло з числами, одержаними через вимір. Природна річ, отже, що результати технічних обчислень ніколи не вільні від помилок. Крім того, часто для спрощення та прискорення технічних обчислень користуються з свідомо невірних, неточних величин. Тоді треба заздалегідь знати можливу помилку в результаті обчислення, щоб узяти її до уваги, здійснюючи на практиці той чи той технічний розрахунок. Тому технік, що починає робити обчислення, мусить знати засади так званої „теорії помилок“.

Далі, всяке обчислення можна робити або безпосередньо, за допомогою відомих математичних дій, або, користуючися з певних допоміжних таблиць, лічильних машин та інших приладів. Обчислення можна при тім робити або цілком точними способами, або спеціяльно скороченими, спрощеними способами, або навіть наближено, свідомо припускаючи деякі помилки —„огріхи“.

Нарешті, мавши підруч рисівні струменти, можна ті величини, над якими треба виконати різні обчислення, подати графічно, як відтинки ліній, та, робивши ті чи ті геометричні побудови, одержати результат обчислення суто геометричним способом, графічно теж відтинками ліній тощо. Інакше сказавши, можна, розв'язуючи технічну задачу, зробити потрібні обчислення графічним способом. Такі графічні обчислення можуть дати або результат, придатний для одного даного випадку, або результат, придатний для цілого ряду однакових випадків, у вигляді графіка, діяграми тощо.

Добрати той чи той спосіб обчислення — в волі техника й залежить від умов та характеру його роботи, а тому всі ці способи належать до обсягу „технічних обчислень“.

Відповідно до сказаного, цей підручник поділено на три відділи:

I. Допоміжний — містить основні поняття про одиниці мір у техніці та всі звя'зані з ними допоміжні поняття, а також елементарні основи теорії помилок;

II. Числові обчислення — охоплює загальні поняття про теорію числових обчислень і техніку точних спрощених і наближених обчислень, безпосередніх і посередніх, за допомогою таблиць та машин;

III. Графічні обчислення — охоплює елементарні основи графічних обчислень у вузькім розумінні слова, тобто, так звану, аритмографію, а також основи номографії та основи векторіяльного числення.

Ці три відділи становлять теоретичну частину курсу.

До неї додано короткий показник літератури для осіб, що бажали б заглибитися в деталі того чи того питання, порушеного в підручнику.

Друга частина — практична — містить усякі додаткові відомості й пояснення. Коли б їх умістити в тексті підручника, вони дуже переобтяжили б його, а тимчасом ці відомості можуть бути корисні й потрібні для засвоєння курсу та й для практичного застосування його.

Слід іще сказати, що вивчання технічних обчислень потребує не тільки ґрунтовно засвоїти теорію їх, а й повсякчасно вправлятися в них. Цю думку добре відзначив професор Рунґе в словах, що їх я взяв за епіграф до даного підручника. Хоча слова ці Рунґе й сказав у передмові до свого курсу графічних обчислень, але вони повною мірою стосуються до всього обсягу технічних обчислень. Навчитися технічних обчислень можна тільки на практиці. Тільки вживаючи описаних тут способів в усіх царинах техніки щоразу, як доводиться робити обчислення, впродовж усієї технічної практичної діяльности, можна досконало опанувати технічні обчислення подібно, як — розвиваючи порівняння Рунґе — найвидатнішим, цілком викінченим музикам, що дають блискучі концерти, доводиться повсякчас грати етюди та вправи, щоб підтримувати й розвивати свою техніку.

З цих міркувань у практичній частині підручника зміщені приклади, вправи та задачі з обсягу техніки, призначені для самостійних вправ на виконання технічних обчислень.

З цими попередніми увагами та вказівками і з палким бажанням по силі допомогти новому поколінню техніків та інженерів, я випускаю в світ цей підручник.

ЧАСТИНА І

(ТЕОРЕТИЧНА)

НАЙГОЛОВНІШІ МЕТОДИ Й СПОСОБИ ТЕХНІЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ТА ЕЛЕМЕНТАРНІ ОСНОВИ ЇХ ТЕОРІЇ

ВІДДІЛ І

ДОПОМІЖНИЙ

Розділ І. Одиниці мір і одноманітні позначення в техниці

§ 1. Загальні уваги про значення мір для техніки. Технікою ми звемо пляновий ужиток всякого знаряддя в боротьбі за існування, в прагненні перемогти сили природи та використати їх на задоволення потреб життя.

З давних, первісних часів людство почало вживати різного знаряддя, і тому можна сказати, що техніка існує, відколи існують люди.

Усі майже дари й багатства природи треба спершу розшукати, а потім доставити на місце споживання. Крім того, треба ще ці дари природи обробити, зробити годящими для тої чи тої мети. На ці роботи доводиться витрачати певну силу. Поперวах людина використовувала для цього силу своїх м'язів, а в міру розумового свого розвитку за допомогою техніки переклала витрату сил із себе на тварини, а є далі й на сили самої природи. Людський розум сзброїв руку робітника молотком, сокирою та іншим знаряддям, справував воду струменю на млинове колесо, підставив під вітер вітрило тощо і таким способом у міру свого розвитку удосконалив техніку. Тому технічна робота є в суті розумова робота людини в цілковитім значенні слова. І що далі розвивалося людство, то далі розвивалася техніка, то досконалішим ставало технічне знаряддя, то частіш людина перемагала сили природи й примушувала їх служити собі.

Для того, щоб навкружні сили природи використати на задоволення своїх потреб, технічно розвинена людина мусіла навчитися розуміти їх. Вона мусіла пізнати сили природи, вивчити їх, виявити закони їхнього чину. Нарешті, вона мусіла навчитися виміряти їх, бо, тільки вмівши це робити, можна розумно й пляново використати сили природи. Для того треба було завести якісь міри. І тому людство працювало над цим завданням техніки, відколи почалося культурне життя.

Немало праці покладено на це діло, та тільки наприкінці XVIII століття завдання розв'язано успішно, а вкупі з тим техніка дістала в свої руки могутній допоміжний засіб і неймовірно хутко дійшла свого теперішнього разливого розвитку.

Ось чому для техніки надзвичайну мають вагу такі, на перший погляд, прості речі, як одиниці мір, бо, тільки мавши їх, можна вивчити й виміряти всі, що навколо нас, сили природи та використати їх для технічної мети. Адже тільки тоді, коли щось ми виміряли та виразили числом, тільки тоді можна виявити між цими числами відповідні математичні співвідношення, встановити, так звані, формули, що виражають математичний закон явища або чину сили. Піддавши далі результати виміру різним математичним дослідам та ставши таким способом на суто науковий ґрунт, можна за допомогою тих чи тих розрахунків одержати результат практичного значення, можна практично застосувати технічні знання.

З цього погляду, вибір одиниці виміру має надзвичайну вагу в техніці, а, значить, і в промисловім житті, і в неподільно зв'язаній з ним економіці.

Для розвитку техніки велико важить, щоб можливо більше людей, навіть без спеціяльної підготови, уживало чисел, тобто вживало кількісного способу визначати співвідношення між різними величинами, а не якісних маловартісних означень, як от: тонкий, легкий тощо.

Тому вся система мір має бути ясна й зрозуміла щонайбільшій кількості людей; вона має бути побудована за найпростішим пляном. Інакше сказавши, раціональна система мір має відповідати таким вимогам:

а) основні одиниці мір повинні бути точно визначені — і

б) в разі потреби, легко відновні.

При цих умовах раціональний вибір основних одиниць виміру може вельми прислужитись розвиткові техніки, промисловости та економіки першої ліпшої країни.

Ось чому чітко знати одиниці мір та вміти вживати їх має таку вагу для всякого техніка.

На довід сказаного подамо цікавий епізод з російської історії часів Петра Першого.

Намисливши йти походом на Азов та бажаючи спорудити для цього річкову фльоту на корабельні в Воронежі, Петро видав наказ заготувати по всіх лісових просторах на верхоріччі ріки Дону дерево певних розмірів, позначених аршинами й вершками

(Тоді вже, з наказу Петрового батька Олексія Михайловича, ці міри взаконені були в Росії, замість різноманітних ліктів, п'ядей та інших мір).

Коли доставили дерево у Вороніж, виявилося, що розміри його не відповідали одні одним.

Пильний розслід справи, яка загрожувала зірвати ввесь Петрів плян, виявив, що лихого наміру не було: наказ грізного царя виконали якнайстараніше, але розміри аршина (тоді ще не було певного зразка — етальона) в різних місцях були неоднакові. Звідси, до речі, пішло російське народнє прислів'я, вживане досі: „Мерить на свой аршин".

Ця наука не пройшла для Петра марно. Поїхавши закордон, він пильно шукав зразка мір. Але виявилося, що тоді в кожнім великім місті Европи так само, як і в Росії, був свій фут, свій цаль тощо.

Тільки в Англії Петро знайшов заведену за Кромвеля єдину міру — лондонський фут і лондонський цаль; їхні зразки взаконив парлямент.

Петро, порівнявши російський аршин з англійським цалем, визнав за можливе взяти довжину російського аршина в 28 лондонських цалів і дав замовлення в Англії виготувати російські аршини. Одержаний з Англії аршин він узаконив 1701 року, як зразковий для Росії.

Щодо другої важливої міри старої російської системи, міри ваги (певніше, маси) — фунта, то тут Петро був новатором. Він не волів копіювати англійського фунта, а вирішив зв'язати фунт з основною одиницею довжини — цалем. Російський фунт мав дорівнювати на вагу 25 куб. цалям чистої води при хатній температурі.

Правда, завдання виготувати такий фунт було надсилу російським ученим часів Петра, і тільки 1747 року, через 22 роки після заснування кол. Петербурзької Академії Наук, виготували точний, як на той час, зразок — етальон — російського фунта. Цим і закінчили *російську систему мір, першу в Европі справжню систему мір, де кожна міра випливає з основної*, як це тепер маємо в міжнародній метричній системі мір.

Наведений історичний приклад якнайкраще доводить важливість для техніки й економіки існування твердо встановлених певних мір.

Цим же пояснюється й те, що по всіх культурних країнах є спеціяльні наукові установи, що мусять зберігати зразки — етальони — мір та перевіряти й контролювати їхні зразки, вживані в країні.

§ 2. Про фізичні величини взагалі. *Усі* тіла, усі явища, що їх доводиться вивчати технікові в навколішній природі, належать до категорії, так званих, фізичних, реальних, дійсних.

Усі ці фізичні тіла й явища мають різні притаманні їм властивості й ознаки. Ото їх і доводиться технікові вивчати та досліджувати. Якщо при тім якась властивість чи ознака може змінюватися, то, коли ми її вивчаємо, вона й є для нас те, що звичайно звуть **фізичною величиною**.

Зміну всяких таких фізичних величин ми можемо спостерігати, досліджувати.

Коли нам удасться цю величину виміряти, ми можемо, виразивши її числом, піддати результат виміру математичній аналізі, отже, зробити його предметом наукового технічного досліду.

Отож, фізичною величиною звуть всякі властивості чи ознаки тіла або явища природи, які можуть кількісно змінюватися.

Коли такі властивості речовини чи особливості явищ дуже різноманітні, то, вивчаючи фізичні тіла й сили природи та визначаючи закони, яким вони підпорядковані, доводиться вживати понять про дуже велике число різних величин.

Поняття чи уявлення про одні величини притаманні всім людям і значення їх само з себе ясне для кожного, а інші величини ми заводимо в науку, вивчаючи явища.

Величини першого роду відповідають поняттям первісним вихідним, прирожденим людям, а тому й звуть їх **первісними** або **основними**. Ці величини не можна ніяк означити, тобто не можна зформулювати, що треба розуміти під їхніми назвами, бо всяке означення можна зробити, тільки показавши залежність означуваної величини від чогось, уже відомого. Властивості цих величин цілком означаються уявленнями, які постають у розумі кожної людини при назві величин.

Величини, що про них поняття не притаманні людям і що їх ми заводимо в науку, потребують означень, і на точність означень треба звертати найпильнішу увагу. Такі величини звуть **похідними** або **складними**. Означення таких величин має бути повне й точне, щоб воно не породжувало ніякісінького непорозуміння чи двозначности; воно мусить вмістити в собі все, що може бути відмінною ознакою означуваної величини.

Величини, які відповідають тим самим означенням, а різняться одна від одної тільки кількісно, мають назву **однорідних**. Такі величини можна порівняти одну з одною або, як кажуть, виміряти, тобто визначити, скільки разів у даній величині міститься якась однорідна з нею величина, яку ми взяли за **одиницю** величин цього роду. Порівняння однорідних величин можна робити подвійним способом: або кожну з них виміряти встановленою одиницею і тоді порівнювати одержані результати, або порівнювати величини безпосередньо, тобто одна з них відограє ролю одиниці міри.

Хоча вибирати одиниці для кожного роду величин можна цілком довільно, та звичайно вважають за краще підпорядковувати вибір певному правилу, що забезпечує можливість зв'язувати одиниці цих величин в одне ціле, зване системою одиниць.

Виміряють фізичні величини спеціяльними струментами за певними методами; точність одержаного від виміру результату залежить не тільки від зазначених чинників, а й від уміння та навички особи, що виміряє. Від виміру, як його результат, дістають число, що показує, скільки разів вибрана одиниця міститься в даній величині.

Досліджуючи та визначаючи закон якогось явища, вживають звичайно альґебричного методу й ці числа заміняють літерами; треба завжди пам'ятати, що тії літери позначають не самі величини, а тільки їхні числові вартості. Зрозуміла річ, що, збільшуючи одиницю в n разів, ми тим самим зменшуємо в n разів число, яке показує, скільки разів дана величина містить у собі цю одиницю, а тому числова вартість всякої величини обернено пропорційна до вибраної одиниці.

Виражаючи закон вивченого явища математично, як певну математичну залежність одної величини від іншої, ми побачимо, що в вираз фізичного закону увійдуть одно чи кілька чисел, яких величина ніяк не характеристична для даного закону і залежить тільки від вибору одиниць. Такі числа звуть коефіцієнтами, а коефіцієнт, спільний для всіх членів виразу, звуть коефіцієнтом пропорційности. Якщо ми надамо йому деяку певну числову вартість, ми втратимо можливість довільно вибирати одиницю всіх величин, які входять у нашу формулу: одна з них буде цілком визначена і дещо залежатиме від узятої величини коефіцієнта.

Часто беруть коефіцієнт пропорційности рівним з одиницею і тоді дістають вираз залежности між двома величинами A та B у формі $a = в$, де a й $в$ — числові вартості їх. Формул такого вигляду не слід плутати з тотожностями: вони тільки показують, що при певнім виборі одиниць чи коефіцієнта пропорційности числові вартості двох величин можуть бути рівні, або, як кажуть, одна величина виміряється другою.

§ 3. Основні величини. Розглядаючи найважливіші фізичні ознаки тіл, ми бачимо, що всі тіла здатні посідати певне місце в просторі або, як кажуть у фізиці, їм властива просторовість. Вивчання просторовости тіла в загальнім вигляді, тобто здатности його займати певний об'єм, у геометрії зводять до вивчання розміру ліній або їхньої довжини.

Друга суттєва ознака фізичних тіл є їхня речовинність чи матеріяльність. Кількість матерії тіла характеризується, як кажуть, його масою, вимір якої звичайно на практиці заміняють виміром ваги тіла.

Нарешті, всі явища природи відбуваються в ч а с і.

Ось оці три величини, притаманні й характеристичні для всіх тіл та явищ природи, і взято за основні, а разом із тим і за одиниці мір. За допомогою їх, як довела практика, ми можемо виміряти, отже, й порівняти одні з одними всі сили, що навколо нас, бо величину всякої з них можна визначити за допомогою трьох основних мір: довжини, маси й часу.

Отож, основні величини, з якими доводиться мати діло в фізичних науках і в технічних застосуваннях їх, є д о в ж и н а, ч а с та м а т е р і я або маса тіла.

Ці величини, як сказано вже, означити ніяк не можна, але їх можна виміряти.

Д о в ж и н а. Довжина, ми вже казали, є величина, що характеризує першу, найпростішу, але разом і найважливішу властивість фізичного тіла — просторовість; характеризується просторовість об'ємом, що залежить від головних розмірів тіла та їхньої довжини. Довжину лінійних розмірів тіла звичайно ми й виміряємо при наших наукових та технічних роботах.

Вибравши якийсь відтинок за одиницю довжини і знайшовши через вимір число, яке визначає відношення даної довжини до цього відтинка, ми можемо за допомогою їх виразити розмір шуканої довжини. А саме, коли це число дорівнює l, а одиницю довжини символічно позначимо через L, то ми можемо яку завгодно довжину символічно виразити формулою:

$$L' = l . L \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Зручність так позначати результат виміру виявляється, як побачимо далі, при переході від виразу даної довжини одною одиницею до виразу її іншою одиницею.

При фізичних вимірах за одиницю довжини (або, як інакше кажуть, за лінійну одиницю) беруть с а н т и м е т р, а при технічних — м е т р.

Ч а с. Вимір проміжного часу між двома моментами зводять до виміру кутів або дуг, виходивши з періодичности позірного добового обертання неба. Мавши цілком визначений протяг часу, що відповідає повному обертові неба, тобто з о р я н у д о б у, можна які завгодно рівні протяги часу уявляти собі, як протяги, що відповідають тому самому кутові поверту якоїсь точки неба. Таким способом, взявши зоряну добу за одиницю часу, можна який завгодно протяг часу, що відповідає повертові неба на n^o, виразити числом $\frac{n}{360}$, бо зоряна доба відповідає повертові на 360^o.

При фізичних і технічних вимірах за одиницю часу беруть звичайно с е к у н д у с е р е д н ь о г о ч а с у, звану просто секундою, при чім залежність її від зоряної доби визначається рівністю:

$$\text{зоряна доба} = 86164{,}89 \text{ секунд.}$$

Позначивши взагалі одиницю часу символом T, ми кожний протяг часу, за нашою умовою, можемо виразити формулою

$$T' = t\,T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

де t — абстрактне число, а T — символ вибраної одиниці часу.

Маса. Розуміючи під назвою матеріяльне тіло, що має просторовість, геометричне тіло, заповнене матерією або речовиною, і не відрізняючи фізичних, хемічних і інших властивостей таких тіл, ми визнаємо їм одну спільну властивість: поривання падати поблизу поверхні землі (в порожні) та тиснути на опори, що перешкоджають їм падати, або, як кажуть, мати вагу.

Кількість матерії, що її містить матеріяльне тіло, звуть масою тіла. Заведено вважати маси дестильованої води при $4^\circ C$ за пропорційні до зайнятих ними об'ємів, а маси всіх інших тіл вважати за рівні, коли рівна їхня вага в порожні.

Вимір маси на практиці заміняють звичайно виміром ваги, тому міру для маси встановлюють залежно від міри ваги.

Беручи, отже, масу певного об'єму дестильованої води при $4^\circ C$ за одиницю маси, ми зводимо вимір маси якого завгодно тіла:

1) до знаходження такого об'єму зазначеної води, якого вага в порожні дорівнює вазі даного тіла, і

2) до визначення відношення одержаного об'єму води до об'єму води, що відповідає вибраній одиниці маси.

Звичайно при фізичних вимірах за одиницю маси беруть грам, тобто масу кубічного сантиметра дестильованої води при 4^0 C, а при технічних — кілограм, що дорівнює 1000 грамів, тобто масі одного кубічного дециметра такої ж води.

Слід окремо зауважити, що в фізиці заведено вважати кілограм просто за одиницю маси, у техніці ж ми вважаємо кілограм за одиницю ваги. Отже, тут з'являється певний коефіцієнт пропорційности, який треба вводити, переходивши від одного способу виміряти до іншого.

Позначаючи одиницю маси символом M, ми масу кожного тіла можемо, на підставі сказаного вище, виразити формулою:

$$M' = m \cdot M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

де m — абстрактне число, а M — вибрана одиниця маси.

§ 4. Складні або похідні величини й визначення їхніх розмірів. Однорідність формул. Вибравши одиниці для довжини, маси й часу, ми тим самим установлюємо, так звані, основні одиниці, за допомогою яких можемо виміряти всі інші величини. Так, з геометрії ми знаємо, що вимір площі і об'ємів зводиться до виміру ліній. Усі такі величини, подібні до площі, об'єму, звуть відмінно від інших **похідними** або **складними**.

У техніці доводиться мати діло з силою-силенною таких величин. Отже, визначаючи поняття про них, треба вміти знаходити й одиниці їхніх вимірів і їхні символи, тобто символічні формули, що показують залежність їхніх одиниць від трьох основних. Усякий такий символ складної одиниці звуть її **виміром** або **розміром**.

Загальний вигляд таких символічних формул є:

$$A = L^p\ M^q\ T^r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

і визначає, що одиниця, якою виміряємо величину A, міниться пропорційно до p-ого степеня довжини, q-ого степеня одиниці маси та r-ого степеня одиниці часу, або, що одиниця величини A — розміру p відносно одиниці довжини, розміру q відносно одиниці маси і розміру r відносно одиниці часу.

Показники степеня можуть бути цілі, дробові, додатні й від'ємні.

Якщо похідна одиниця A зовсім не залежить від якоїсь основної одиниці, то кажуть, що одиниця A нульового виміру відносно неї.

Спосіб виписувати числові вартості величин за наведеною формулою дуже зручний, бо він показує, які маємо основні одиниці, і як залежить від них похідна, а це **полегшує переходити від одної системи їх до іншої.**

Позначивши числові вартості величин маленькими літерами, а їхні одиниці великими, ми можемо довести оцю теорему, вживану при виводі формул для виміру величин, а саме: **символічна формула розміру величини A складається з символічних формул розмірів величин B і C так, як складається добуток або частка двох одночленів, що виражають розмір величин B та C**, тобто, коли числова вартість a одної величини дорівнює добуткові або частці числових вартостей $в$ та c двох інших величин, тобто $a = вc$ або $a = \frac{в}{c}$, і коли формули розміру одиниць B та C є:

$$B = M^p L^q T^r \quad \text{і} \quad C = M^x L^y T^z,$$

то формула розміру одиниці A величини a буде:

$$A = M^{p+x} L^{q+y} T^{r+z} \text{ або } A = M^{p-x} L^{q-y} T^{r-z} \quad \ldots \quad (5)$$

Справді, якщо $a = вc$ або $a = \frac{в}{c}$, то $a = 1$, коли $в = 1$ і $c = 1$; звідси ясно, що одиниця A пропорційна до B і прямо чи обернено пропорційна до C. Але B міниться пропорційно, наприклад, до p-ого степеня основної одиниці M, а C — пропорційна до x-ого степеня її. Значить, при $a = вc$ одиниця A міниться пропорційно до $(p + x)$-ого степеня одиниці M, що й виражено символічною формулою (5).

Користуючися з цієї теореми, легко, на підставі закону геометрії, скласти формули розміру для згаданих вище величин площі й об'єму, а саме:

$$P = L^2 \text{ і } O = L^3,$$

на підставі яких ми й кажемо, що обидві величини — нульового виміру відносно M та T.

Дуже важливо завжди пам'ятати, що символи (5) — не дійсні величини, які складаються з множників та дільників; те, що записане поруч числової вартости величини, є тільки символ, який заступає собою назву одиниці виміру.

Вище вже казано, що величини одного виміру є величини однорідні. Казано також, що всі величини, віднесені до своїх одиниць, виражаються числами, які виміряють їх, і що ці числа залежать від вибору основних одиниць, тобто зміню-ються зі зміною їх. На цій підставі всі рівності й формули, які виражають залежність між різними величинами, при довільних основних одиницях, неодмінно повинні бути **однорідними**, тобто всі члени їх повинні бути того самого розміру, інакше бо зі зміною основних одиниць різні члени цих формул зміняться в різне число разів, і рівності будуть зламані. Більшість, так званих, емпіричних формул у техніці є якраз формули неоднорідні; тут і полягає трудність обертати їх з одних мір в інші. На означі однорідности ґрунтується простий і зручний спосіб перевіряти формули техніки. Наприклад, формула, що виражає площу крадрата залежно від довжини його боку, цілком однорідна, бо від зміни основної одиниц обидві частини формули зміняться в однакове число разів; але, коли розв'язуючи задачу — визначити якийсь відтинок простої за двома заданими a і c, — ми дістанемо відповідь на свою задачу в вигляді формули:

$$x = 2a + \frac{c^2}{3},$$

то, не цікавлячись ні умовою задачі, ні способом та перебігом розв'язання її, ми можемо твердо сказати, що розв'язка невірна: справді, від зміни лінійної одиниці, скажім, втроє, числа, що виміряють x та a, зміняться втроє, а число, що виміряє c^2, — вдев'ятеро, і рівність буде зламана.

§ 5. Абсолютна й практична система основних одиниць та перехід від одної системи до другої. Для простоти маніпуляції нині умовилися вибрати три основні одиниці і при всіх фізичних вимірах беруть сантиметр-грам-секунду, так звану, *CGS* систему основних одиниць, що має також назву абсолютної системи одиниць.

Кожна основна й похідна одиниці *CGS* системи сталі на всякій широті й на всякій висоті місця; це велико важить для наукових вимірів і становить головну вартість даної системи. Початок *CGS* системі поклали 1833 року Ґавс і Вебер.

У технічних задачах, як уже зазначалося, користуються з основних одиниць практичної системи, а саме: одиниця довжини — метр, одиниця сили — кілограм (тобто вага літра дестильованої води при 4° *C* на широті 45° і на рівні моря) і одиниця часу — секунда. Як бачимо, суттєва ріжниця між системою *CGS* і практичною *MKS* та, що за величину одної з одиниць у першій системі править маса, а в другій — вага. Але вага в різних місцях землі неоднакова. Тому при ваговім вимірі сил одиниця, якою ми виміряємо сили, не стала, отже, числові вартості похідних величин будуть у практичній системі неоднакові в різних місцях земної кулі. Ріжниця ця невелика й для практичної мети на неї можна не зважати, але для наукової мети вона є неабияка хиба. Це й спонукало завести *CGS* систему, хоча для полегшення математичних викладок у технічних вимірах зручніше користуватися з системи метр-кілограм-секунда. У різних окремих випадках вигідно буває брати й інші системи. З цієї от причини дуже важливо вміти переходити від числової вартости даної величини при одній системі одиниць до числової вартости її при іншій системі.

Умовившися за символічне позначення розмірів величин і знавши такі символи, не важко розв'язати цю задачу, а саме. Дано певну величину a і її числову вартість n, коли величина вимірена абсолютною одиницею, побудованою на основних одиницях λ, μ, τ. Треба знайти її числову вартість n_1 при вимірі її абсолютною одиницею, побудованою на інших основних одиницях λ_1, μ_1, τ_1 знавши, що залежність між старими і новими одиницями виражається рівнянням $\lambda = x\lambda_1$, $\mu = y\mu_1$, $\tau = z\tau_1$, і що символ одиниці A величини a є:

$$A = L^p M^q T^r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Щоб розв'язати задачу, треба зробити так:

1) Написати величину a за певною схемою з символом, складеним із старих основних одиниць, тобто:

$$a = n\lambda^p \mu^q \tau^r.$$

2) У символі старі основні одиниці виразити новими, тобто:

$$a = n(x\lambda_1)^p \cdot (y\mu_1)^q \cdot (z\tau_1)^r.$$

3) Тимчасово, розглядаючи символ, як сполуку чинників, вивести всі коефіцієнти, що зв'язують старі основні одиниці з новими. Одержаний від цього вираз

$$a = nx^p y^q z^r \lambda_1{}^p \mu_1{}^q \tau_1{}^r$$

і є розв'язка задачі, бо шукана нова числова вартість n_1 якраз дорівнює:

$$n_1 = nx^p y^q z^r, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

а вираз поруч неї $\lambda_1{}^p \mu_1{}^q \tau_1{}^r$ є тільки символ абсолютної величини a в новій системі.

Щоб довести правильність одержаного результату, досить довести, що від заміни одиниці довжини λ новою одиницею λ_1 числова вартість n збільшиться в x^p разів. Ми знаємо, що $\lambda = x\lambda_1$, отже, замінивши λ через $x\lambda_1$, ми зменшили лінійну одиницю в x разів. На підставі (6) ми бачимо, що при цім одиниця A величини a зменшується в x^p разів. Це цілком відповідає всьому сказаному раніш, отже, формула (7) вірна відносно одиниці довжини, а, значить, і відносно інших одиниць, з якими ми проробили те саме.

Пояснім сказане найпростішим прикладом:

$$3 \text{ (арш.)} = 3\left(\frac{1}{3} \text{ саж.}\right) = 1 \text{ (саж.)} = 1 \quad (7 \text{ фут.}) = 7 \text{ (фут) і т. д.}$$

Щойно показане розв'язання задачі про перехід від одної системи одиниць до іншої можна застосувати для виводу формули, що зв'язує числові вартості якої-небудь величини в системі CGS і в практичній MKS.

Нехай дано величину a, числова вартість якої за системою CGS дорівнює n. Для ясности замінятимемо одні одиниці іншими послідовно.

Спершу знайдім нову числову вартість при заміні одиниці довжини — сантиметра L метром L_1.

На підставі сказаного вище маємо:

$$A = L^p M^q T^r \text{ і } a = nA = nL^p M^q T^r = n\frac{L_1{}^p}{100^p} M^q T^r - \frac{n}{100^p} L_1{}^p M_1 T$$

звідки бачимо, що числова вартість величини a, при заміні сантиметра метром, зменшилася в 100^p разів.

Тепер знайдім числову вартість тієї ж таки величини, рівну $\frac{n}{100^p}$ за системою метр, грам-маса, секунда, при системі метр, кілограм-маса, секунда. Маємо:

$$a = \frac{n}{100^p} L_1{}^p M^q T^r = \frac{n}{100^p \,.\, 1000^q} L_1{}^p M_1{}^q T^r, \text{ бо } M = \frac{M_1}{1000}$$

Нарешті, числову вартість $\frac{n}{100^p \, . \, 1000^q}$ величини a переведімо з системи метр, кілограм - маса, секунда на систему метр, кілограм - вага, секунда.

Якщо кілограм - вагу позначимо через P, то на підставі формули, що виражає залежність між силою, масою і пришвидшенням точки, беручи пришвидшення сили тягару, як рівне $g = 9{,}81$ *м/сек.*, дістанемо, що $P = 9{,}81\ M_1$ звідки

$$M_1 = \frac{P}{9{,}81},$$

а тому для числової вартости величини одержимо:

$$a = \frac{n}{100^p \, . \, 1000^q \, . \, 9{,}81^q} L_1^p P^q T^r \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Користуючися з одержаної формули, не важко робити перехід з системи CGS на практичну MKS.

§ 6. Формули вимірів найголовніших величин, що трапляються в техніці. Якщо, не фіксуючи системи основних одиниць, ми позначимо взагалі одиниці довжини, маси й часу символами L, M та T, то ф о р м у л и р о з м і р у одиниці найголовніших величин, що трапляються в техніці, будуть такі:

Поверхня або площа . . . . L^2 $(L_1^2 M^0 T^0)$
Об'єм . . . . L^3
Кут нулевого виміру відносно . . . . . L, M і T
Густина . . . . ML^{-3}
Швидкість: а) лінійна . . . . LT^{-1}
б) кутова . . . . T^{-2}
Пришвидшення: а) тангенційне і нормальне LT^{-2}
б) кутове . . . . T^{-2}
Сила . . . . MLT^{-2}
Робота . . . . $ML\,T^{-2}$
Потужність . . . . $ML\,T^{-2}$
Енерґія рухова (жива сила) . . . . . . ML^2T^{-2}
Імпульс сили . . . . $ML\,T^{-1}$
Кількість руху . . . . MLT^{-1}
Момент сили (пари сил або статичний момент) . . . . ML^2T^{-2}
Момент інерції . . . . ML^2
Напруга сил пружности . . . . $ML^{-1}T^{-2}$
Модуль пружности . . . . $ML^{-1}T^{-2}$

§ 7. Метрична система мір і співвідношення її зі старою російською. Обертання формул з одних мір в інші має велике значення для російських техніків, особливо тепер, коли в нас, за декретом 14 вересня 1918 року, взаконена метрична система мір.

Наша стара система мір — в суті система англійських мір, бо в ній за основну одиницю довжини беруть сажень, що дорівнює, на підставі закону Петра Першого, 7 англійським футам Сажень поділяється потрійно:

1) на фути, цалі й лінії,

2) на аршини та вершки й

3) на сотки.

Крім цієї різноманітности мір, наша система тим незручна, що вона залежить від англійських мір, і наші етальони готували, рівняючи до англійських. З часом, в міру збільшення точности виготовлюваних етальонів, виявилася ріжниця між ними, і постало питання, що вважати за дійсний сажень: останній російський етальон, а чи 7 англійських футів, що їм повинен сажень дорівнювати? Це питання набрало особливої гостроси 1893 року, по заснуванні Головної Палати мір і ваги, коли виникла потреба уґрунтувати законний перехід до метричної системи, встановивши точне співвідношення між метром та нашим аршином з одного боку і англійським ярдом — з другого.

Завдання це розв'язали праці проф. Д. І. Менделєєва та його співробітників у Палаті мір і ваги; остання має тепер у себе визначну наукову коштовність: півсажень з іридистої плятини, на якім позначені риси на віддалі метра і на віддалі ярда (3 фути), при чім ці віддалі якнайстаранніше порівняні з відповідними еталоном метра та англійським прототипом, спеціяльно для цього вимурованим із муру Тоуера в Лондоні.

Щоб дати уявлення, як дбайливо готували цей наш еталон, досить сказати, що фірма Джансон. Маттеї і К-о, яка виливала його, мусіла десять разів його перетоплювати, доки уповноважений нашої Палати мір і ваги Ф. І. Блюмбах не задовольнився цілком виготовленим еталоном. Риски ж на цім еталоні тонші, ніж на будь-якім сучаснім еталоні інших країн,— вони завгрубшки всього кілька мікронів. Цей півсажень, як пізніше в часі виготовлений еталон і тому найдосконаліший, має не тільки практичне значення, а й велике наукове, бо: 1) дає найточнішу, яка тільки можлива за сучасного стану науки й техніки метрології, вартість відношення між метром, ярдом і сажнем, а 2) з часом — при повторних порівняннях з прототипами метра та ярда — дасть матеріял для розсуду про те, чи не міниться від часу довжина прототипів.

За цим півсажнем визначено те відношення аршина до метра, яке узаконила „Устава про міри й вагу“ 4 червня 1899 р. разом з еталонами аршина та фунта, що зберігаються в Головній Палаті мір і ваги. Копії з цих аршина й фунта

19 лютого 1901 року, з додержанням спеціяльно затвердженого церемоніялу, замурували в стіні будинку кол. Правуючого Сенату.

Згідно з арт. 11 Устави 1899 року, „міжнародні метр і кілограм, їхні підподіли, а так само інші метричні міри дозволялося вживати в імперії нарівні з основними російськими мірами у торговельних та інших зладах, контрактах, кошторисах, підрядах тощо, за обопільною згодою договірних сторін“. Отже, з 1899 року, завдяки цій Уставі, метрична система була в Росії під захистом закону, а зазначені вище наукові роботи дали твердий ґрунт для переходу від російської системи мір до метричної. Зручність метричної системи така велика, що ще перед декретом 14 вересня 1918 року ця система в багатьох царинах техніки, на підставі закону 1899 року, уже витиснула російську систему.

Досить для прикладу зазначити, що наш російський сортамент заліза — метричний, а тому всі металеві інженерні конструкції залізних мостів давно вже виготовляють у метричній системі мір. Так само метрична система давно вже має повні права у нас в галузі кравецтва й в аптеках.

На основі закону 4 червня 1899 року, встановлено при переході від російської системи мір до метричної брати:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ аршин} = 0{,}711200 \ \text{м} \\ 1 \text{ фунт} = 0{,}40951241 \ \text{кг} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

а місткістю:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ гарнець} = 8 \text{ фунт.} \\ 1 \text{ відро} = 30 \quad „ \end{array}\right\} \text{ дестильованої води при } 16^2/_3{}^\circ C \ . \ (10).$$

На підставі цих узаконених співвідношень для обертання російських мір на метричні не важко скласти таблицю співвідношень; її і вміщено в частині II, розд. I.

Початок метричної системи мір, як сказано, покладено підчас Великої Французької Революції. Саме 23 березня 1791 року Національні Збори ухвалили виміряти Паризький меридіян і взяти одну десятимільйонну частину чверти цього меридіяна за одиницю довжини. У цих роботах брали участь першорядні вчені того часу, і на основі робіт виготовлено перший зразок е т а л ь о н у встановленої одиниці довжини, названої м е т р о м. На цім першім еталоні метра, що зберігається в Парижі, виритувані слова: „A tous les temps — á tous peuples“ (на всі часи — усім народам); декретом Національних Зборів 10 грудня 1799 р. його заведено, як основну одиницю довжини, до обов'язкового вжитку.

Цей же еталон, дарма що він, як доводять новітні досконаліші й точніші виміри довжини земного меридіяна, уже не дорівнює $^1/_{40\,000\,000}$ частині його, все ж визнали, за взаємною згодою, майже всі цивілізовані країни; він і є основна одиниця довжини міжнародньої метричної системи мір та ваги.

Отже, в основі метричної системи лежить метр, що має таке співвідношення зі старими російськими мірами довжини:

1 *м* = 1,40670 арш. = 0,468691 саж. = 3,28084 фута = = 22,4972 вершка = 39,3701 цаля.

За поземельну одиницю поверхні правив ар = 100 *кв. м*

За одиницю місткости — літр.

За одиницю ваги — грам.

Усі ці одиниці зв'язані одна з одною простою залежністю.

Одиниці мір вищого й нижчого порядку утворюються за десятковою системою, тобто в 10, 100, 1000 тощо разів більше або менше від основної одиниці, і назви дістають через додавання перед назвою основної одиниці:

деці — для $\frac{1}{10}$ дека — для 10-кратних величин

санти — для $\frac{1}{100}$ гекто — для 100-кратних величин

мілі — для $\frac{1}{1000}$ кіло — для 1000-кратних величин

мірія — для 10000-кратних величин

Отже, є міри:

Виміряти протяг — довжину:

Основна — метр.

1 дециметр = $\frac{1}{10}$ *м* 1 декаметр = 10 *м*

1 сантиметр = $\frac{1}{100}$ *м* 1 гектометр = 100 *м*

1 міліметр = $\frac{1}{1\,000}$ *м* 1 кілометр = 1000 *м*

1 мікрон = $\frac{1}{10000}$ *м*

Виміряти площі:

1 квадратовий метр

1 „ дециметр

1 „ міліметр

1 ар = квадратовому декаметрові = 100 *кв. м*

1 гектар = 100 арам = 10000 *кв. м* = 0,91530 десятини = = 2196,72 квадратового саж.

Виміряти об'єми та місткість посуду:

1 стер . . = 1 *куб. м* = 0,102958 куб. сажня 1 декалітр = 10 *ст*

1 літр . . = 1 *куб. дм* = 61,0271 куб. цаля 1 декалітр = 10 *л*

1 децилітр = $\frac{1}{10}$ *л* 1 гектолітр = 100 *л*

Виміряти вагу — грам = 0,234425 золотника, що становить вагу 1 *куб. см* дестильованої води при температурі найбільшої густини, тобто 4° Цельсія.

1 дециграм = $\frac{1}{10}$ *г*

1 сантиграм = $\frac{1}{100}$ *г*

1 міліграм = $\frac{1}{1000}$ *г*

1 декаграм = 10 *г*

1 гектограм = 100 г

1 кілограм = 1 000 *г* = 2 ф. 423 зол.

Тонна = 1 000 *кг* = 61,0482 пуд.

За постановою Палати мір і ваги, ухвалено вживати такі скорочені позначення метричних мір:

	Російські	Чужоземні.
кілометр	*км*	*km*
метр	*м*	*m*
дециметр	*дм*	*dm*
сантиметр	*см*	*cm*
міліметр	*мм*	*mm*
мікрон	—	μ
гектар	*га*	*ha*
ар	*а*	*a*
тонна	*т*	*t*
кілограм	*кг*	*kg*
грам	*г*	*g*
міліграм	*мг*	*mg*
літр	*л*	*l*

Важливо звернути увагу, що в середині речення крапки після скороченої назви не ставиться. Крапку після символів ставлять тільки для позначення часу:

s. — секунда; *m.* — хвилина; *h.* — година.

Для позначення „квадратових" та „кубічних" мір або пишуть „*кв.*" та „*куб.*" (з крапкою) або ставлять при позначенні міри цифри 2 і 3 за правилами альґебри в формі показників степеня, напр., *см*², *м*³.

Треба ще сказати, що сучасне уточнення вимірів виявило потребу запровадити нові додатки в метричній системі.

Так, незабаром після заведення метричній системи почали додавати слово „мега“ при збільшенні міри в 1 000 000 разів.

Тепер уже для збільшення або зменшення основної міри в мільярд разів заведено нові додатки: при збільшенні „гіга“ (від грецького слова „гігас“ — велетень), а при зменшенні „нано“ (від грецького слова „нанос“ — карлик).

Отже, „гігаом“ визначає величину, що дорівнює одному мільярдові омів; один „наном“ = одній мільярдній частині метра або одній тисячній частині мікрона.

Наприклад, довжина хвилі жовтого світла, що дорівнює 0,5896 мікрона, за новим позначенням, становить 589,6 нанометрів (*nm*); одиниця Анґштіма (1 *A*) = 10 *nm*.

§ 8. Ступінь точности й незмінности основних одиниць мір. Хоча яких зусиль вживало людство, щоб мати нормальні одиниці мір, не штучно утворені, а взяті безпосередньо з природи, все ж бачимо, що теперішні основні одиниці мір не вільні від певної умовности.

Так, метр, який править нині за етальон для всіх країн і дорівнював 1799 року, за вимірами Мешена та Делямбера, одній десятимільйонній частині чверти Паризького меридіяна, за новітніми градусними вимірами досконалішими приладами й досконалішими методами, не відповідає дійсності, а містить у собі помітний огріх.

Саме, за дослідом Бесселя, $^1/_4$ земного меридіяна дорівнює не 10 000 000 *м*, а 10 000 885 *м*.

Дальші ж іще точніші виміри, серед них і наші російські — відомого геодезиста Стебницького — на протязі від Ляпиляндії до гирла Дунаю, дають уже іншу величину. І, звичайна річ, у міру того, як розвиватиметься техніка виміру, результат обчислення довжини земного меридіяна чимраз більше змінюватиметься. Отож, паризький етальон метра, як і всяка міра, позбувається своєї „натуральности“ і є просто умовна одиниця довжини. Тому серйозно виникає питания, чи можна метр відновити в разі утрати його, і чи зберігає він незмінною свою величину. Інакше сказавши, постає питання про ступінь точности та незмінности метра.

З цього приводу треба сказати, що, хоча паризький етальон так само, як і пізніші копії його, виготовлено з надзвичайно твердих матеріялів, які не змінюються від впливу повітря й води, проте дуже ймовірно, що вони не зберігають незмінними своїх розмірів, через якінебудь зміни внутрішньої будови їхньої речовини. Далі, як уже казано, метр не є довжина, визначувана дійсними розмірами земної кулі; та й про останню ми так само не маємо певности, що вона зберігає розміри без зміни. Нарешті, не виключена й можливість утрати через якесь стихійне лихо або попсув нашого основного етальону.

З цієї от причини Міжнароднє Бюро мір і ваги в Парижі, також і інші метрологічні установи, як от Фізично-технічна державна установа в Берліні і наша Головна Палата мір і ваги в Ленінграді, виготували цілий ряд копій метра. Отже, тепер за прототип одиниці довжини править, власне, вся сукупність цих етальонів. Час від часу їх порівнюють один з одним, і це дає можливість бачити, чи не змінюють деякі з них своєї довжини. Та може трапитися, що всі вони однаково змінюють розміри, і тоді, звісно, таке порівняння не виявить зміни основної одиниці.

На цій підставі давно вже виникла думка про те, щоб узяти за одиницю довжини таку довжину, яка не залежала б ні од величини земної кулі, ні од будь-якої штучно зробленої речі. Пропонували, наприклад, взяти для цього довжину хвилі світла. Проте, незначна величина її — кілька десятих мікрона — та трудність визначати її стали цьому на перешкоді. Зате, як наслідок такого намагання, пощастило американському фізикові Майкельзону встановити надзвичайно точне співвідношення між довжиною етальону метра і довжиною зеленої світлової хвилі пари кадмію. Тим що довжина цієї світлової хвилі незмінна, то можна, знавши згадане співвідношення, в разі втрати основного етальону метра, відновити його далеко точніше, ніж за градусними вимірами.

Такі порівнювання довжини основного етальону з іншими існими з житті незмінними величинами роблять і далі; тож є цілковита підстава сказати, що від усіх тепер визнаний метр, не вважаючи на його, в суті, штучність і умовність, має достатню для техніки й науки точність та незмінність. А тому можна вважати за незмінну й другу, залежну від нього, одиницю міри — масу.

Переходячи тепер до часу, згадаймо, що тут ми теж зв'язані з земною кулею, бо якраз обертання її навколо осі, або доба, дає нам одиницю часу.

Якщо обмежуватися самою добою, то ми не матимемо досить підстав, щоб зробити висновок про її незмінність. Доводиться, отже, користуватися з інших, періодів, що їх дають астрономічні спостереження, наприклад з довгочасности тропічного року, яка зовсім не залежить від величини доби. Із сукупности всіх зроблених досі спостережень бачимо, що відношення між добою і тропічним роком, коли й змінюється, то зовсім мало та ще й упродовж тисячоліть. Американський астроном С. Ньюком гадає, що на протязі 1900 років нашої ери довжина року зменшилася на 0 000 117 доби, тобто на 10,1 секунди, або на $\frac{1}{3\,000\,000}$ своєї величини.

Що тут змінюється — доба чи рік, — не можна сказати, та у всякім разі зміна така мала, що ми можемо вважати й одиницю часу за незмінну, сталу й точну.

І тут так само є пропозиція звільнитися від земної кулі, як речі, що дає одиницю часу, а замінити її етером. Саме, виводять одиницю часу зі швидкости поширення збурень в етері. Цю швидкість тепер можна вважати за відому з точністю до $\frac{1}{100}\%$.

Проте, і ця пропозиція, як і пропозиція про одиницю довжини, має суто теоретичний інтерес, бо величина зміни тривалости доби, якщо зміна є, в усякім разі далеко менша, ніж неточність, яку можна зробити при найдосконалішим вимірі швидкости поширення збурень в етері.

§ 9. Нова система практичних одиниць. Як уже пояснено вище, в абсолютній системі одиниць мір, уживаній у фізиці, тобто в системі *CGS*, грам є одиниця маси, або кількість речовини, що міститься в одиниці тіла. Для потреб техніки цю систему змінили так, що, лишивши одиницю часу секунду, за одиницю довжини взяли метр, а за одиницю сили взяли вагу маси в 1 кілограм і назвали цю силу так само кілограмом, тобто прийняли систему *MKS*.

Пояснється це тим, що при заведенні метричної системи мір наприкінці XVIII століття, через недостатній розвиток науки, не дуже чітко розумілися на поняттях та багатьох величинах механіки й фізики і легко переплутували такі поняття, як маса, сила, енерґія тощо.

Від такого переплутування понять і сталося непорозуміння з вибором практичних одиниць виміру, і утворилося дуже незручне становище, бо та сама назва позначає різні величини: масу в одній системі мір і силу в другій. Не казавши вже, що таке позначення кілограм-сили неправильне, бо та сама маса має різну вагу в різних місцях земної кулі, і навіть погоджуючися, з достатньою для практики точністю, не зважати на цю ріжницю, якщо вона не більша за 0,1%, не можна не звернути уваги на те, що такий вибір одиниці маси чимало затемнює фізичний зміст основних формул механіки, а це своєю чергою утрудняє застосовувати найпростіші формули.

Оця незручність теперішньої практичної, технічної системи мір давно вже привертала до себе увагу, і в Західній Европі давно вже піднесено питання про те, щоб виправити її або завести нову практичну систему одиниць.

Особливо серйозно заходилися біля цього 1912 року творці метричної системи — французи. У Парижі утворили особливий Комітет з високо авторитетних учених, щоб обміркувати реформу практичної системи одиниць виміру. Опрацьований надзвичайно дбайливо й розважно проект нової системи розглянули й ухвалили Французька Академія Наук, Товариство французьких цивільних інженерів, Французьке фізичне товариство, Міжнародне товариство електриків, Товариство поохочення національної промисловости Франції та величезна більшість торговельних палат Франції. Нарешті, на користь проекту висловився найвищий у даній царині авторитет—Загальна міжнародня конференція мір і ваги, що засідала в Парижі в жовтні 1913 року. А тому в листопаді 1913 року проект нової практичної системи одиниць подали до французької палати депутатів; палата ухвалила його 1914 року. Виникла влітку 1914 року загальноевропейська війна затримала оголошення закону, тільки 5 серпня 1919 року закон цей був оголошений у Франції, а через рік, тобто 5 серпня 1920 р., набрав сили.

Хоча закон має обов'язкову силу для Франції, і спеціяльна його мета була упорядкувати одиниці мір у торговельних та торговельно - промислових зладах, проте, через тісний зв'язок зазначеної галузі з промисловістю й технікою в цілом їх обсязі, закон мусить відбитися на всій економіці країни, на всіх її життевих потребах. Крім того, він стосується до цілої метричної системи, дає їй нову, досконалішу будову та усуває з неї перекручення й наслідки їх, які поробила в ній стара практична система одиниць мір.

Тим що метричної системи вживають тепер майже всюди, то, безперечно, ближчим часом і нова, досконаліша, практична система мір дістане загальне визначення та поширення. Вона стане надбанням усіх цивілізованих країн, як система науково обґрунтована й легка для практичного вжитку, тим паче, що нова система дає надзвичайно зручні одиниці для всіх тих величин, які за сучасного розвитку техніки й промисловости відограють ролю в промисловості, торгівлі і взагалі в житті людей.

Коли зважити, що в деяких новітніх технічних книжках, виданих у Франції після запровадження цього закону, уже доводиться подибувати нову систему практичних одиниць, то стане цілком зрозуміла потреба ознайомити з нею наших техніків.

Новій системі надано символ „*MTS*", бо в основу її покладені такі основні одиниці: м е т р — одиницю довжини, т о н н у — дорівнює 1 000 кілограмів — одиницю м а с и і с е к у н д у — одиницю часу.

Установлені на підставі їх обов'язкові, згідно з законом 5 серпня 1919 р., похідні одиниці дано в доданій до закону таблиці в формі гармонійної десяткової метричної системи, при чім система *MTS* цілком еквівалентна з системою *CGS* щодо застосовности тих самих формул при розрахунках, бо в ній, як і в абсолютній системі, всі похідні одиниці виводять з основних без всяких коефіцієнтів. Усі ці одиниці є просто многократні відповідних одиниць абсолютної системи, при чім відношення їх завжди є цілий степінь десятьох. Тому формули, написані в системі *CGS*, можна без зміни приймати і в системі *MTS*.

Будова нової системи практичних одиниць така. Усі одиниці розбито на сім категорій:

1) одиниці ґеометричні
2) „ маси
3) „ часу
4) „ механічні
5) „ електричні
6) „ теплові
7) „ оптичні.

1. Геометричні одиниці

а) Одиниця довжини — метр — довжина при 0° звичайного міжнароднього етальону метра з усіма загальновизнаними в метричній системі кратними величинами та підподілами, поданими вище.

б) Одиниця поверхні — квадратовий метр із звичайними кратними й підподілами, а для виміру польових поверхонь: гектар — *га* і сантиар = *1 кв. м.*

в) Одиниця об'єму — кубічний метр із звичайними кратними та підподілами; для течних і сипких тіл, поміж них і для зерна — літр [1]) із звичайними практичними підподілами; для дров — стер та децистер

г) Одиниця кута — прямий кут (*D*) або зі звичайними підподілами його на градуси (*d* чи), мінути та секунди, або на соті, тисячні, десятитисячні та стотисячні частини, звані відповідно градом (*g*), дециградом, сантиградом і міліградом.

2. Одиниці маси

а) Тонна = 1000 кілограмам - маси міжнароднього прототипу зі звичайними кратними та підподілами; для вжитку в торгівлі самоцвітами заведено карат = 2 дециграмам.

---

[1]) Закон дозволяє назвати *куб. дм* літром і вважати літр за рівний 1 *куб. дм*, бо огріх не перевищує $^{1}/_{300}\%$.

б) Одиниця густини — градус густини (degré densimetrique). Густину тіл виражають числами десятерної системи від густини тіла, взятої за одиницю, що її „має маса в одну тонну при об'ємі в один кубічний метр". Таку густину з огріхом близько $^1/_{3000}$ має вода, позбавлена повітря при 4° Цельсія під нормальним барометричним тиском стовпа живого срібла, 76 *см* заввишки.

До цього ж розряду одиниць належить градус стоградусної алькогольометричної скалі за Ґе-Люсаком (градуси Боме із вжитку вилучені).

3. Одиниці часу

Секунда $(s) = {}^1/_{86400}$ середньої соняшної доби і кратні від неї:

хвилина *(mn)*,
година *(h)*,
доба *(j)*.

4. Одиниці механічні

а) Одиниця сили — стен *(sn)* — сила, що за одну секунду часу надає одиниці маси, тобто одній тонні (1000 *кг*), пришвидшення в один метр за секунду[1]). Її вимір — $T\,M\,S^{-2}$.

Для десяткових кратних та підподілів стена є одиниці від кілостена до мілістена.

б) Одиниця роботи чи енерґії — кілоджавл *(KJ)*, або стенметр, тобто „робота, яку виконує один стен при переміщенні його точки приложення на один метр в напрямі сили". Символ виміру — $M\,T\,S^{-2}$. Його кратні та підподіли — мегаджавл і джавл.

в) Одиниця потужности — кіловат *(kw)*, або стенметр за секунду, тобто „потужність, що витворює один кілоджавл за секунду" — розмір $(M^2T^1S^{-3})$ — з підподілами гектоват та ват.

г) Одиниця тиску — п'єза *(pz)*, має вимір — $M^{-1}\,TS^{-2}$, тобто „рівномірно розподілений по поверхні в 1 *кв. м* тиск в 1 стен" з кратними — міріяп'єза, гектоп'єза і підподілами — сантип'єза та барія $= 10^{-1}$ п'єзи.

5. Одиниці електричні

Звичайні скрізь уживані міжнародні одиниці:

ом *(o)* з мегомом та мікромом,

[1]) З цього означення ясно бачимо цілковиту тотожність виводу похідних одиниць у системі MTS з виводом їх у CGS системі

а м п е р (A) з кілоампером, міліампером та мікроампером.
в о л ь т (v) з мілівольтом і мікровольтом,
к у л ь о н (C) з кілокульоном.

6. Одиниці теплові

а) Одиниці ріжниці тепла. Градус стоградусної скалі, названої degré centesimal, замість degré centigrad, щоб запобігти переплутуванню з назвою сотої частини одиниці кута.

б) Одиниці кількости тепла. Термія (th) — „кількість тепла, потрібна на те, щоб підвищити на 1° температуру маси тіла, якого питома теплоємність дорівнює питомій теплоємності води при 15° під нормальним атмосферним тиском (= 1,013 гектоп'єзи)".

Разом із цим установлені мілітермія, або велика кальорія, і мікротермія, або мала кальорія, при чім в охолоднім ділі великій кальорії дають назву фригорія.

7. Одиниці оптичні

Не зупиняючись на докладнім з'ясуванні та означенні цих одиниць [1], ми для закінчености опису загальної будови одиниць нової системи зазначимо тільки, що в цій категорії одиниць встановлені:

а) одиниця сили світла — децимальна свічка (bd)
б) одиниця світлового потоку — люмен (ln),
в) одиниця освітлености поверхні — люкс (lx),
г) одиниця сили оптичних стекол — діоптрія.

Така загальна будова нової практичної системи одиниць, що усуває всі непорозуміння й труднощі, які траплялися від переплутання в попередній системі понять сили й маси. Хоча, як сказано, нову систему запровадили покищо тільки у Франції, але зазначені вгорі вигоди її й переваги, а також тісні стосунки між собою культурних країн та органічний зв'язок між технікою й економікою життя, певно, дуже швидко примусять і інші країни прийняти її, тим паче, що нові одиниці дуже мало відмінні від старих, як це бачимо з порівняльної таблиці, поданої в II частині. Так, один стен дорівнює 102 кілограмам-силам і тільки на 2% різниться від круглого числа в 100 *кг*. Інакше сказавши, в багатьох технічних розрахунках з допускною на практиці точністю можна на цю помилку в 2% не зважати і виражати стенами та п'єзами числа, дані кілограмами й атмосферами. Таким способом можна непомітно,

---

[1]) Означення їх див. у частини II розд. II, де дано також і таблицю для порівнання вс х одиниць нової системи зі старими.

без особливо дошкульних незручностей і труднощів, досить легко пристосуватися до нової системи вимірів та перейти до неї в усіх галузях техніки.

§ 10. Одноманітні позначення в техніці. З питанням при значення односли мір у техніці безпосередньо зв'язане інше, почасти вже згадане вище, питання, а саме про одноманітні позначення в техніці.

Дійсно, одність мір дає спільне для техніки всіх країн і часів мірило, певну числову вартість якої завгодно величини і тим полегшує міжнародні стосунки техніків та робить результати успіхів і розвитку техніки й промисловости в одній країні надбанням усіх інших культурних країн. Інакше сказавши, одність мір робить успіхи техніки міжнароднім надбанням. Та як кожному не можна знати мов усіх народностей, щоб розуміти технічні книжки, писані часом невідомою мовою, а одночасно ніколи не виключена потреба користуватися з технічної літератури чужими мовами, то техніки, прагнучи полегшити стосунки між собою, давно вже усвідомили конечну потребу разом з одністю системи мір, запровадити одноманітність позначень спільних для всіх понять та величин техніки.

Першим кроком у цім напрямі була здавен заведена і скрізь уживана одноманітність математичних символів. Запровадження її дало величезну зручність та полегшило користуватися літературою з цієї галузі знання, бо заведені одноманітні позначення математичних символів утворили ніби спільну міжнародню мову для математиків.

З цього погляду і встановлені подані вище одноманітні загальновизнані скорочені позначення мір, що ними тепер користуються всі на письмі. Порушення та відхили від цих скорочень не тільки можуть бути незрозумілі різним людям навіть одної країни, але можуть стати за причину непорозумінь та помилок, бо довільно вибрані однакові символи в різних авторів можуть позначати різні поняття. Нарешті, і з погляду друкарської справи, як засобу для поширення знань, має велику вагу полегшити працю складачів та коректорів, які, засвоївши позначення певної системи, легше розбирають рукопис і з меншими помилками складають текст та легше правлять коректу.

Усе сказане про позначення мір ще більше важить для техніки за сучасного її розвитку.

Можна сміливо сказати, що одноманітні позначення в техніці, разом з усюди вживаними математичними формулами та правильно виконаними, згідно з законами нарисної геометрії, рисунками, становлять ніби міжнародню мову техніки.

Тому нині питання про одноманітні позначення в усіх царинах техніки є одне з чергових і першорядних.

Залежно від мети та значення цього питання: „полегшити порівнювання даних, результатів дослідів і розрахунку в технічній літературі“ — воно в суті розпадається на дві частини:

1) завести одноманітні математичні позначення для найголовніших величин, що трапляються в описах і розрахунках у певній галузі технічних вартостей,

2) завести одноманітні схеми зіставлення даних і результатів дослідів.

У цім напрямі й працює нині технічна думка.

Ініціятива тут, видимо, належить кол. Міжнародньому товариству випроби матеріялів, власне, його комісії з залізобетону, що її заснував IV Міжнародній Конгрес названого товариства для вивчання залізобетону та розвитку його теорії [1]).

Ця комісія, почавши виконувати покладені на неї завдання, насамперед визнала за надзвичайно важливе встановити одноманітні позначення й схеми.

Запропонований від неї проєкт ухвалив V Конгрес товариства, і практика роботи цієї комісії довела всю корисність, доцільність та вигоду даного заходу: він надзвичайно полегшив порівнювання даних теорії і результатів досліду в літературі про залізобетон та дав змогу комісії хутко дійти кінцевої її мети, а разом із тим надзвичайно посунув уперед опрацювання теорії й практики залізобетону.

Нині вже в багатьох інших царинах техніки є такі самі умовні одноманітні позначення. З них треба згадати:

1) міжнародні символи, що їх ухвалила Міжнародня електротехнічна комісія,

2) одноманітні позначення для проектів інженерного будівництва, що їх запропонувала 13 травня 1923 р. комісія, яку утворило товариство німецьких інженерів 16 грудня 1922 року.

В основі всіх загальновживаних і найбільш поширених нині позначень у техніці лежать насамперед:

1) П о з н а ч е н н я м а т е м а т и ч н и х в е л и ч и н

Ці позначення такі:

$=$ — визначає „дорівнює“,
$\equiv$ — ідентично (тотожньо, збігається у всіх подробицях і якостях)
$\neq$ — не дорівнює,
$\approx$ — приблизно дорівнює,
$\cong$ — конґруентно (конґруентність у ґеометрії — властивість деяких геометричних фіґур зливатися всіма своїми точками при накладенні одної на одну),
$\backsim$ — подібен,
$<$ — менше,
$>$ — більше,

---

1) Див. Н. М. Абрамов. „Однообразные обозначения и схема сопоставления данных в литературе по железобетону“ — „Зодчий“, 1910 г.

$\parallel$ — рівнобіжно,
$\#$ — дорівнює й рівнобіжно,
$\perp$ — нормально,
$\measuredangle$ — кут (величину кута позначають малими грецькими літерами, напр. $\measuredangle\alpha$),
$\sqrt{}$ — знак кореня,
Δ — малий конечний приріст,
d — цілковита диференціяля,
∂ — частинна диференціяля,
Σ — сума,
$\int$ — інтеґраля,
, — кома внизу, щоб відокремити знаки десяткових дробів,
$+$ — плюс (знак додавання),
$-$ — мінус (знак віднімання),
$\cdot$ або $\times$ знак множення,
— або : — знак ділення,
i — уявне число $\sqrt{-1}$
e — основа Неперових логаритмів,
π — відношення обводу кола до діяметра,
$\overline{AB}$ — відтинок AB,
$\overset{\frown}{AB}$ — дуга AB,
$^{\circ}$ — градус
$'$ — мінута — при діленні кола на 360°,
$''$ — секунда
$\%$ — відсоток (на сто),
$‰$ — на тисячу.

2. Позначення одиниць мір

Ці позначення докладно наведено вже вище, коли трактовано питання про одиниці міри: отже, тут подамо деякі, що повсякчас трапляються в техніці, позначення, а саме:

kg/cm^2	— кілограм на квадратовий сантиметр;	українське позн.	$кг/см^2$,
t/m^2	— тонна на квадратовий метр	„ „	$т/м^2$,
$kgcm$	— кілограмо-сантиметр	„ „	$кгсм$,
tm	— тонно-метр	„ „	$тм$

3. Позначення величин механіки

g — пришвидшення сили тягару,
m — маса,
E — модуль нормальної пружности,
W — момент опору
J — момент інерції,
S — статичний момент,
M — момент,
Q — поперечна перетинна сила.

Щодо рекомендованих для запровадження на практиці технічних позначень, то в основу їх покладені нині такі засади:

1) довжини та вантаги на подовжину одиницю позначають малими латинськими літерами,

2) площі й зосереджені сили — великими латинськими літерами.

3) коефіцієнти та напруги (зусилля й вантаги на одиницю площі) — малими грецькими літерами.

Деталі й подробиці позначень, уживаних на цих засадах, залежать від характеру відповідної царини технічних знань; їх ми звичайно подаємо в відповідних місцях, а через те тут на них не зупинятимемося.

На кінець зазначмо тільки, що практика раз - у - раз дає доказ надзвичайної важливости й серйозности для техніки цього питання. Тому нам іще раз доведеться говорити про нього в розділі про техніку виконання числових обчислень та з'ясувати корисність його з цього погляду, як засобу полегшити провадження обчислень і зменшити можливість помилок у них.

Розділ II. Елементарні основи теорії помилок

§ 11. Попередні загальні уваги. Усі величини, з якими доводиться мати діло в техніці, одержуємо, як уже знаємо, або обчисленнями, або вимірами. Хоча в розділі про одиниці мір ми з'ясували, що не тільки для практичного застосування техніки, а й для наукових дослідів можна вважати основні одиниці за незмінні й точні, проте вживаних на практиці їхніх етальонів ніколи не можна вважати за абсолютно точні. Крім того, ми знаємо, що навіть тоді, коли користуватися з абсолютно точних етальонів мір, наслідки вимірів якоїсь величини, роблених не тільки різними людьми, ба навіть тією самою людиною, при повторних вимірах завжди одні від одних відмінні. Це ясно свідчить про те, що, навіть виміряючи основні величини, ми неминуче дістаємо вочевидь неточні, помилкові дані, а, значить, і наслідки обчислень, виконуваних над цими даними, теж не вільні від огріхів і помилок.

Скажім заразом, що взагалі виміряти довжину — справа надзвичайно трудна, потребує великої навички й спеціяльних знань. При цім довжини на папері можна виміряти далеко точніше, ніж на поверхні землі, а кути, навпаки, точніше можна виміряти на землі, ніж на папері. Тим то на практиці при точних геодезичних роботах уживають особливого способу, званого тріянґуляцією (від грецького слова „тріянґулос“ — трикутник). А саме віддаль між двома точками, яку треба виміряти, покривають мережею трикутників і виміряють якнайточніше саму основу одного з них (базу), а далі, виміряючи кути трикутників, обчисляють, користуючись із вимірів, віддаль між заданими точками. Коли ж рисують на папері, то воліють будувати кути за допомогою синусів і тангенсів їх, коротше сказавши, по координатах.

Отже, в основі всіх технічних обчислень лежать свідомо неточні величини. Коли взяти до уваги, що часто й при самих обчисленнях доводиться, за умовою задачі, припускати певні спрощення та огріхи, то, очевидячки, ми можемо сказати, що завжди в техніці припадає мати діло з вочевидь неточними даними й робити над ними неточні обчислення. Але для певности того, що результат технічних обчислень ґарантує достатні для практики придатність і безпечність його, завжди треба знати ступінь його огріху, тобто знати, як різниться цей результат від точного, і залежно від цього робити висновок про придатність результату.

Такі от огріхи облічує та визначає їхню величину і вплив на результат обчислень, так звана „теорія помилок". Вона є практичне застосування спеціяльної галузі математичних знань, званої „теорією ймовірностей".

Як ми вже казали, важливо знати ступінь точности результатів технічних обчислень. Отже тут познайомимося з елементарними основами питання про помилки спостережень і про те, як зважувати їх, обчисляюючи результати спостережень, або про те, як зрівнювати чи з р і в н о в а ж у в а т и с п о с т е р е ж е н н я й в и м і р и. Інакше сказавши, ми познайомимося з основами науки про те, як не тільки, по змозі, усувати вплив помилок на остаточні результати, а як і знаходити наближені величини самих помилок та на підставі їх визначати ступінь точности одержаного результату і зв'язаних з ними через обчислення величин.

§ 12. Загальні уваги про те, як провадити технічні виміри. Усяке технічне питання, як і взагалі всяке явище природи, можна вивчити спостереженням і дослідом. Явище можна вивчати або я к і с н о або к і л ь к і с н о; якраз при останнім способі можна точно визначити всі умови питання й закони, яким воно підлягає. Оцю закономірність питання визначають, вивчаючи його кількісний бік, виміряючи різні величини, що всебічно впливають на питання. Тому вимір різних величин і відограє першорядну ролю в технічних розвідах та дослідах.

Щоб робити такі виміри, треба, вважаючи на їхню важливість, мати не тільки великі з н а н н я й у м і н н я, а й с у м л і н н і с т ь, т е р п е ц ь та п р а ц ь о в и т і с т ь.

Усякий вимір слід робити дуже обережно в широкім розумінні слова і цілком о б а ч н о.

Щоб робити всякі технічні виміри, потрібні, як ми вже знаємо, відповідні етальони. Якщо ці етальони — загальновживані, точно визначені одиниці мір, то ми одержуємо виміри а б с о л ю т н і; якщо ж етальони взято довільно, і вони дають змогу при вимірі вчявити тільки порівняльне співвідношення вартости якоїсь величини з тою, яку ми взяли, то одержуємо вимір релятивний.

Крім етальонів, треба також мати відповідні вимірові прилади. Через різноманітність вимірів, і прилади ці можуть бути дуже різноманітні та залежати:

1) від роду величин, які ними виміряють;
2) від методу самих вимірів ними;
3) від конструкції, яку їм надає майстер.

У всякім разі ці прилади повинні відповідати своєму призначенню і мати найбільшу можливу для них точність.

Здебільшого всі вимірові прилади мають спеціяльні назви, що звичайно закінчуються одним із таких слів: „скоп“ (від грецького слова „скопео“ — дивлюсь), „метр“ (від грецького слова „метр“ — міра), або „граф“ (від грецького слова „графо“ — пишу); наприклад, „електроскоп“, „мікрометр“, „барограф“.

Прилади першого роду, власне, не є вимірові прилади, бо вони здебільшого відзначають характер явища чи якісь величини лише якісно, але не кількісно. Вони часто визначають тільки знак даної величини та встановлюють факт існування її.

Прилади другого роду — вимірові в цілковитім значенні цього слова і завжди дають змогу визначити числову вартість вимірюваної величини.

Прилади третього роду становлять окрему групу, так званих, „самописних“ приладів, що дають можливість виміряти абсолютну чи релятивну зміну розміру даної величини з часом.

Робивши всякі виміри та вживаючи для того відповідних вимірових приладів, доводиться виконувати цілий ряд певних дій, або, як кажуть, маніпуляцій.

Ці маніпуляції бувають вельми різноманітні, залежно від зазначених вгорі причин, що від них залежить і різноманітність вимірових приладів; але здебільшого всі вони сходять до трьох основних:

1. Уставлення приладу, тобто правильне приміщення й розміщення приладів з додержанням усіх умов, які залежать від конструкції та властивостей самих приладів і від особливостей виучуваного явища чи величини.

Надзвичайну вагу має тут зважити всі зовнішні умови, що можуть вплинути на показ приладу, і, по змозі, їх усунути.

2. Спостереження, тобто відповідне переміщення приладу або його частин для того, щоб виконати самий факт виміру виучуваної величини.

3. Прочит, тобто визначення числової вартости вимірюваної величини чи якихось інших даних, на підставі яких можна обчислити шукану величину.

Щоб одержати можливо точні результати виміру від цих дій, треба взагалі додержувати таких правил:

1. Теоретично заналізувати чи вивчити вибраний метод виміру, щоб виявити умови, коли він буває найточніший і найпродуктивніший, та знати, коли навіть дуже малі зміни вимірюваної величини будуть найбільш помітні для приладу.

2. Пильно вивчити якості й властивості приладів та на підставі цього визначити той спосіб користуватися з них, який може ґарантувати найбільшу точність показу даного приладу.

3. Можливо більше разів поспіль повторювати самий вимір.

4. Можливо більше змінювати умови, що впливають на результат виміру, і повторювати та навперемінки чергувати їх.

5. Старанно записувати всі обставини, за яких провадиться вимір, тобто, що і яким методом вимірювано, місце та час виміру, а в разі потреби,—то й інші зовнішні обставини, як от температуру, барометричний тиск тощо.

6. По змозі, зразу після прочиту робити відповідні обчислення для визначення розміру вимірюваної величини, бо здебільшого та й майже ніколи прилад не дає безпосередньо числової вартости вимірюваної величини, а її доводиться обчисляти. Це часто дає можливість відразу помітити помилку, дає важливі вказівки про вади приладу, методу, зовнішніх обставин тощо, і залежно від того можна зразу ж поробити відповідні виправи, зміни і т. д., а також негайно повторити вимір.

7. Відшукати всі побічні обставини, що можуть впливати на результат виміру, відповідно їх зважити й визначити потрібні поправки та поробити їх у результатах виміру.

8. Залежно від різних визначених, зважених і пороблених поправок визначити ступінь точности остаточного результату вимірів.

Взагалі, щоб усунути помилки й мати можливо точний результат виміру, дуже корисно, коли є змога, вживати послідовно різних приладів та застосовувати різні методи і в цілому і в деталях виміру виучуваної величини.

§ 13. Загальні поняття про помилки й огріхи спостережень і вимірів та клясифікація їх. Як уже знаємо, результати спостережень і вимірів більш-менш відрізняються від *дійсної* величини невідомої, що її бажано визначити.

Інакше сказавши, ці результати містять у собі деякі помилки, неминучі навіть тоді, коли спостереження й виміри робити щонайпильніше.

Тому разом з питанням, як визначати дійсну величину невідомої, конче треба мати змогу виявити ступінь неточности її виміру.

Ці неточності бувають двох типів: *помилки* й *огріхи*.

Помилки — це грубі неточності, яких, безперечно, не можна припускати в остаточних результатах виміру. Це ті неточності, що залежать від недодержання зазначених вище восьми основних вимог для здобуття точних результатів виміру; їх можна й треба усунути цілком.

А огріхи — це помилки, що залежать від приладів та від органів нашого чуття, далеко не ідеально й не абсолютно досконалих.

Тим то завжди треба виявити причини, що породжують помилки.

Деякі з цих причин відомі всім і залежать від суто фізичних явищ, наприклад, від температурних та атмосферних явищ, від конструкції приладів, нарешті, навіть від персональних властивостей спостерігача. Ці причини за всяких обставин впливають на результат.

Помилки від таких причин звуть неминучими.

Одні з цих помилок можуть виникати лише іноді, при певних умовах, випадково, інші трапляються завжди, за всяких обставин, тобто мають сталий, систематичний характер.

Тому серед неминучих помилок розрізняють помилки випадкові і помилки систематичні або сталі.

Випадкові помилки — це ті маленькі неточності, що залежать від причин непостійних, які впливають неправильно й незакономірно.

Такі неточності чи помилки можуть трапитися випадково і можуть мати знаки й „+" і „—". Наприклад, оцінюючи на око покази на скалі струменту, можна помилитися і в той, і в той бік однаково, тобто взяти прочит то більший, то менший за дійсний; ці помилки мають явно характер випадковий, бо немає підстав припускати, що прочит неодмінно мусить бути більший, або неодмінно менший за дійсний.

Систематичні чи сталі помилки залежать від якоїсь відомої або невідомої нам постійної однобічної й закономірно чинної причини.

Оця закономірність помилок є типова їхня властивість, при чім помилки ці теж можуть бути або сталими, або змінними.

Наприклад, вимір довжини трохи прикороченою чи видовженою мірною стрічкою з неточністю, якої не можна безпосередньо виміряти, завжди даватиме, якщо користуватись цією стрічкою, повсякчас накопичувану, збільшувану в один бік помилку, тобто помилку сталу.

Приклад систематичного змінного огріху є, наприклад, помилка, що залежить від незбігу центра лімба і центра альгідади (ексцентриситета) в кутомірі.

Вплив усіх причин, від яких залежать сталі й систематичні помилки, можна вивчити, а тому такі помилки можна усунути чи зважити.

Складніша справа з помилками випадковими.

Причини, що породжують їх, несталі, непевні, безмежно різноманітні і часто навіть зовсім невідомі. Випадкові помилки виникають без певного порядку, то в бік мінуса, то в бік плюса. Ці випадкові помилки, як залежні від причин невідомих, важко вивчати, і в данім разі на допомогу приходить теорія ймовірностей — наука, що розглядає та числово оцінює явища, які залежать від причин невідомих.

Тим що вплив сталих помилок, а також грубих помилок від недогляду та інших причин можна при певній обережності й певних способах спостереження зважити, отже, й усунути, то далі ми матимемо на увазі тільки помилки випадкові; вони становлять різницю між дійсною величиною і спостереженою. Вони й є предмет теорії помилок, як одного з прикладних відділів теорії ймовірностей.

Слід сказати ще, що спостереження й виміри можна робити за однакових або за різних умов. Перші, тобто роблені кілька разів одною людиною за допомогою тих самих струментів, за однакових обставин, з однаковими засобами і з додержанням однакової обережности, називають звичайно в теорії помилок рівноточними, відмінно від других, званих нерівноточними.

Зрозуміло само по собі, що, коли результати виміру при наших помилках рівноточних усі мають однакову цінність, то цього не можна сказати про результати виміру при помилках нерівноточних.

В останнім разі результати матимуть різний ступінь певности. Щоб їх зіставити, порівняти одні з одними й вивести з них певний висновок, треба кожному з результатів приписати якийсь ступінь певности або, як кажуть, надати йому особливу вагу.

Звичайно під поняттям вага результату або вага помилки розуміють число, що характеризує вартість чи ступінь певности кожного даного результату спостереження або виміру.

Часто-густо доводиться визначати вагу на свою волю, вважаючи на різні обставини, що супроводять вимір, але в теорії помилок є спосіб математично визначати вагу помилки. З цим способом ми познайомимося далі.

Тільки помноживши результати нерівноточних вимірів на числа, що характеризують їхню вагу, і можна порівняти їх один з одним та користуватися з них для виводу тих чи тих даних.

Щоб скінчити виясняти поняття про помилки, скажемо ще, що й для розуміння взагалі науки про огріхи і для з'ясування причин їх часто корисно буває вживати графічних методів.

Перший спосіб графічного вивчання помилок такий.

Коли в нас велике число вимірів і коли огріхам із знаком „+" можуть відповідати рівні їм огріхи із знаком „—", то беруть просту XX (рис. 1) і по обидва боки від точки 0, що відповідає нулевій вартості огріхів, або, інакше сказавши, точній величині, відкладають довільним мірилом рівні частини, що відповідають величинам $+1$ та -1, $+2$ та -2 і т. д., які є в ряді вимірів і огріхів. На ординатах, у відповідних точках,

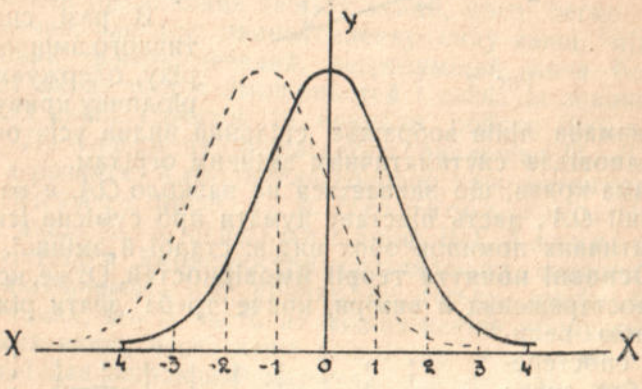


Рис. 1

відкладають відтинки, пропорційні до цифр, що показують, скільки разів огріх даної величини повторюється в ряді вимірів. Як наслідок, повинна вийти дзвонувата крива, розташована симетрично відносно нулевої ординати.

Якщо ж маємо систематичний огріх, то крива буде зсунута відносно нулевоі ординати вліворуч або вправоруч від неї й займе, наприклад, положення, показане на рис. 1 крапчаком.

Будова таких кривих розподілу помилок дуже допомагає викривати існування систематичного огріху, якого величину й знак визначає зсунутість кривої з положення, позначеного суцільною лінією, в положення, показане крапчаком.

Дуже практичний також оцей спосіб.

На лінії OA рис. 2 відкладаємо рівні відтинки, що відповідають 1-му, 2-му, 3-му тощо спостереженням. З одержаних точок ставимо нормалі до OA. На першій нормалі відкладаємо яким завгодно мірилом відтинок $(1-a)$, що виражає величину помилки 1-го виміру — результат спільного впливу огріхів випадкових і систематичних.

На другій нормалі відкладаємо величину $(2 - b)$, що дорівнює сумі помилок 1-го й 2-го спостережень, і т. д. У наслідок одержуємо криву $Oabcd$, яка звивається навколо якоїсь простої OA'.

Відтинки $1 - a'$, $2 - b'$, тощо показують вплив систематичних помилок, відтинки $a - a'$, $b - b'$ тощо виявляють огріхи випадкові. Величина ж $\measuredangle\ \alpha$ характеризує величину впливу систематичних помилок, що їх немає при $\alpha = 0$.

Рис. 2

В разі систематичного змінного огріху, одержуємо періодичну криву. Так, на рис. 3 ламана лінія зображає спільний вплив усіх огріхів, а крива відповідає систематичним змінним огріхам.

Така сама крива, що звивається не навколо OA, а навколо похилої лінії OA', дасть підставу думати про сумісне існування систематичних помилок обох видів: сталої й змінної.

§ 14. Основні поняття теорії ймовірностей. Отже, коли ми робимо спостереження й виміри, конче треба знати ріжницю між дійсною величиною і спостереженою, тобто знати помилки спостереження чи виміру. Їх і виявляє теорія помилок або наука про врівноважування спостережень та вимірів.

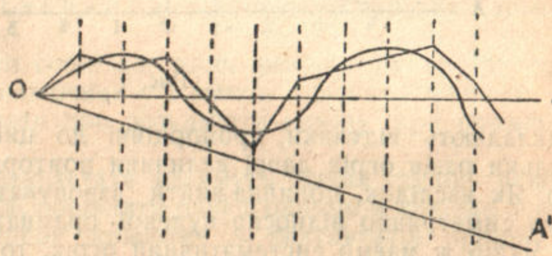


Рис. 3

Ця наука за завдання має не тільки можливо усувати вплив випадкових помилок на остаточний результат, а й знаходити наближені величини самих помилок та визначати, на підставі їх, ступінь точности одержаного результату, а, значить, і зв'язаних із ним через обчислення величин.

Проте, знайти дійсну величину випадкових помилок — завдання неможливе, бо невідомі причини, що спричиняють ці помилки. Тому неможливо в суті знайти й дійсну вартість вимірюваної величини.

Отже, теорія помилок мусить обмежуватися тим, що знаходить лише найімовірнішу вартість вимірюваної величини, вплив на яку неминучих випадкових помилок доведено до мінімальних розмірів, а також тим, що знаходить найімовірнішу величину випадкових помилок, користуючись для цього з засад теорії ймовірностей.

Теорія ймовірностей є прикладна математична наука: її широко вживають у всіх майже відділах природознавства, у різних інженерних науках, усоціяльних (зокрема в статистиці і в страховім ділі) та взагалі в дуже багатьох галузях знання.

В основі теорії ймовірностей лежить загальновизнана істина — „немає дії без причини“. Усяке явище, всяка подія є наслідок попередніх явищ.

Коли цей причиновий зв'язок ясний, його легко виразити математично, але досі маємо силенну силу явищ, між якими причиновий зв'язок неясний, незрозумілий, хоча безперечно існує. От якраз теорія ймовірностей і визначає закономірність для таких явищ. Початок їй поклали роботи Якова Бернуллі, Ляпляса та російського академіка П. Л. Чебишова, а розвитку її допомогли, головно, наші математики: акад. А. М. Ляпунов, проф. П. А. Некрасов, проф. Н. В. Бугайов, акад. А. А. Марков і проф. В. Г. Алексєєв.

Отже, теорія ймовірностей розглядає та числово оцінює явища, які залежать від причин, не тільки зовсім невідомих, а таких, що їх часто не можна навіть припустити. Ряснота таких явищ, через наше далеко ще недосконале знання природи, і дає багатющий матеріял для дослідів теорії ймовірностей та пояснює широкий ужиток її по всіх майже галузях людського знання.

Звичайно, не знавши всіх обставин, від яких залежить дане явище, ми розглядаємо вплив на нього лише обставин відомих і обмірковуємо, якою мірою кожна з них сприяє постанню даного явища.

Таким способом дістаємо ряд розв'язок. Роз'вязку, що повторюється частіш за інші, ми звемо правдоподібною, тобто найбільш наближеною до дійсної. Ця правдоподібність буде тим більша, що менш обставин незважених і що менш впливають вони на дане явище.

Правдоподібність розв'язки або правдоподібність явища чи події в різних випадках може бути більш або менш велика, а значить, її можна виміряти. Одиницю міри ступеня правдоподібности події звичайно й звуть імовірністю події, а обчисляє їх теорія ймовірностей.

Називаючи всі випадки, де подія рівною мірою чи в рівнім числі разів може бути й не бути,— випадками рівноможливими, а ті випадки, де подія обов'язково буває,— випадками, сприятливими,— ось так звичайно означують імовірність події.

Імовірність події є дріб, де чисельник дорівнює числу випадків сприятливих, а знаменник — числу випадків рівноможливих.

Мавши, наприклад, колоду з 52 карт і знавши, що в колоді 12 фігур, а 40 звичайних карт, ми можемо сказати, що маємо 52 рівноможливих випадки витягти з колоди одну якусь карту. Щодо фігури, то сприятливих випадків витягти її було тільки 12, щождо простої карти, то буде 40 сприятливих випадків. На цій підставі можна сказати, що ймовірність висмикнути з колоди карт фігуру дорівнює $\frac{12}{52}$, а ймовірність висмикнути просту карту дорівнює $\frac{40}{52}$.

Якщо всі рівноможливі випадки одночасно й сприятливі для даної події, то ми можемо сказати, що подія безумовно певна, що ця подія безумовно трапиться. Очевидячки, в цім разі ймовірність події дорівнює одиниці, бо чисельник і знаменник її рівні, а, значить, якщо ймовірність події дорівнює одиниці, то така подія певна.

Якщо ж між рівноможливими випадками немає жодного випадку сприятливого, то ймовірність такої події дорівнює нулеві, тобто безумовно подія не трапиться, або, сказавши інакше, подія неможлива.

Досвід свідчить, що визначати ймовірність події далеко легше при можливо більшім повторенні події або при повторенні випроб.

Виявляється, що коли збільшується число випроб, то стає помітна певна правильність і закономірність повторення вивчуваної події. Ця закономірність полягає в тім, що відношення між числами повторення подій і числом випроб дорівнює відношенню між їхніми ймовірностями.

Таку залежність між числами повторення подій і їхніми ймовірностями справджує багато спостережень; у науці вона відома під назвою закону великих чисел. Закон має форму теореми, яку можна довести математично. Це вперше зробив XVII століття Яків Бернуллі, від імени якого часто закон великих чисел називають також теоремою Якова Бернуллі. Пізніш у загальнішій формі цю теорему довів XIX століття академік П. Л. Чебишов.

Названа теорема має вельми важливе значення в теорії ймовірностей, можна сказати, лежить в основі її. Робивши багато випроб та лічивши, скільки разів трапляється кожна подія, і знавши, на підставі цієї теореми, що числа повторення події пропорційні до чисел випадків, сприятливих події, можна визначити релятивну ймовірність події, а на підставі її визначити й найімовірнішу подію.

Коли ми можемо наперед безпосередньо перелічити всі сприятливі й рівноможливі випадки, то ми легко можемо визначити ймовірність події наперед же, заздалегідь, без дослідних даних, або, як кажуть, à priori.

Якщо ці числа нам невідомі, і їх можна знайти, повторюючи випроби чисел, пропорційних до них, або в крайнім разі близьких до пропорційности, ймовірність події визначимо після досліду, на підставі його, або, як кажуть, á posteriori.

Не вадить іще зазначити, що звичайно в теорії ймовірностей розрізняють події сумісні й несумісні, залежно від того, чи можуть вони траплятися одночасно, чи ні.

Далі, сумісні події вважають за залежні й незалежні, як до того, чи впливають одна на одну появи цих подій, чи ні.

Нарешті, подія, що складається із збігу кількох сумісних подій, має назву складної події, а ті події, з яких вона складається, мають назву простих подій.

У зв'язку з поняттям про сумісні, залежні чи незалежні і складні події, стоїть дуже важливе поняття про абсолютні й релятивні ймовірності

Абсолютними ймовірностями називають імовірності подій, якщо події незалежні, і ймовірність одної з них не зміниться від того, чи трапиться друга подія, чи ні.

Релятивними ймовірностями називають імовірності подій, якщо події залежні, і ймовірність одної з них можна визначити, припустивши, що інші події трапилися.

На закінчення підкреслімо користь знати дробі, які виражають ймовірності. Це буде ясно, коли звернемо увагу на те, що, не вважаючи на ніби великий розвиток науки, ми знаємо надто мало істин певних і ще не опанували всіх шляхів до відкриття нових істин.

Не перебільшуючи, можна сказати, що всі наші знання переважно тільки приблизні й тільки ймовірні і що більшість питань цілого життя належить до обсягу ймовірности. Навіть у найточніших математичних науках нові істини знаходять за допомогою індукції та аналогії, що ґрунтуються на ймовірностях. Отже, всі наші міркування про речі здебільшого лише ймовірні, а тому потреба й користь знати ймовірності подій зрозумілі самі з себе, бо знати їх—це й є єдиний спосіб міркувати про те, якої з подій слід сподіватися з більшою ймовірністю.

§ 15. Основні поняття, засади й теореми теорії помилок. Користуючися з наукових даних і висновків теорії ймовірностей, теорія помилок, як її прикладний відділ, встановлює такі властивості випадкових помилок рівноточних спостережень:

1. Що більша абсолютна величина помилки, то ймовірність її менша, і навпаки.

2. Рівні абсолютною величиною і противні знаком помилки рівноймовірні.

3. Імовірність помилок, що переходять певні межі, дорівнює нулеві.

4. Імовірність помилок є безперервна функція помилок.

Ці властивості можна довести й пояснити рядом відповідних міркувань та доказів, заснованих на теорії ймовірностей; їх цілком потверджує досвід, коли провадиться велике число спостережень і вимірів для визначення дійсної вартости невідомої величини. Вони, а особливо перші дві, лежать в основі зазначеного вище першого графічного способу досліджувати огріхи вимірів, від них же залежить дзвонувата форма виучуваної кривої.

Беручи до уваги ці властивості рівноточних помилок і проводячи методом повторення ряд вимірів, ми одержимо для якоїсь величини, що її дійсна вартість є A, деяку кількість, наприклад, n, вартостей B, кожну з певною рівноточною помилкою $\pm \Delta i$. За їх допомогою ми напишемо n рівнянь такого вигляду:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ A = B_1 + \Delta_1 \\ 2.\ A = B_2 + \Delta_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ n.\ A = B_n + \Delta_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (11\,^{1})$$

Сумуючи рівності (11), дістанемо:

$$nA = \Sigma B_i + \Sigma \Delta_i, \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

звідки

$$A = \frac{\Sigma B_i}{n} + \frac{\Sigma \Delta_i}{n} \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

або

$$A = B_0 + \Delta_0, \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

де A дійсна вартість величини;

$$B_0 = \frac{\Sigma B_i}{n} \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

середнє аритметичне з результатів окремих вимірів, або аритметична середня результатів виміру;

$$\Delta_0 = \frac{\Sigma \Delta_i}{n} \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

---

[1]) Тут знак $+$ визначає додавання альгебричне, бо Δ може мати або знак $+$, або знак $-$.

середня аритметична з усіх помилок усіх вимірів, або аритметична середня помилка виміру, отже, середня аритметична помилка середніх вимірів, інакше – помилка аритметичної середини.

На підставі другої властивости рівноточних помилок, при великім n, тобто при великім числі повторних вимірів, $\Sigma\Delta_i$ теоретично повинна дорівнювати нулеві, тобто вираз (16), або аритметична середина помилок виміру Δ_0, так само повинна дорівнювати нулеві, а, значить, аритметична середина вимірів B, тобто вираз (15), повинна дати дійсну вартість вимірюваної величини.

Навсправжки, звісно, Δ_0 не дорівнює нулеві; проте, що менше воно, то B_0 ближче до дійсної вартости A, а тому можна сказати, що аритметична середина результатів виміру B_0, є найімовірніша вартість вимірюваної величини. І це тим правильніше, що ближче до нуля, тобто що менша вартість Δ_0 — аритметична середина помилок вимірів.

У дійсності ми ніколи не знаємо A, а тому на практиці користуємося з величини B_0.

Віднімаючи спостережені числа B_i від аритметичної середини B_0, ми одержимо, так звані, відхили окремих вимірів од аритметичної середини, а саме:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \ B_0 - B_1 = \delta_1 \\ 2.\ \ B_0 - B_2 = \delta_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ n.\ \ B_0 - B_n = \delta_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Альґебрична сума всіх вартостей δ з рівностей (17) дорівнює, звичайна річ, нулеві.

Як ясно зі щойно сказаного, величина Δ_0, тобто аритметична середина помилок виміру, є характеристика ступеня точности виміру. Проте, на підставі тієї ж таки другої зазначеної вище властивости рівноточних помилок та прямування вартости Δ_0, з самої суті її, до нуля, ця характеристика, бувши конечною, не є достатня, через вплив взаємної компенсації знаків помилок.

Тим то, щоб з'ясувати ступінь точности зроблених вимірів, користуються для характеристики другою величиною, яка залежить тільки від абсолютної величини окремих помилок виміру і зовсім вільна від впливу знаків їх.

Для цього з рівностей (11) та (12) дістають вираз:

$$\Sigma\Delta_i = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n \ \ldots\ldots \quad (18)$$

Квадратуючи рівність (18), одержують:

$$(\Sigma\Delta_i)^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdot\cdot\cdot + \Delta_n^2 + 2\Delta_1\Delta_2 + 2\Delta_1 + 2\Delta_1\Delta_3 + \ldots (19)$$

При $n = \infty$, очевидячки, сума подвоєних добутків окремих помилок на підставі другої властивости їх дорівнює нулеві, а тому з достатньою для практики точністю і при достатньо великім конечнім n вважають, що

$$(\Sigma\Delta_i)^2 = \Sigma\Delta_i^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

або що

$$\Sigma\Delta_i = \sqrt{\Sigma\Delta_i^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Поширюючи ці рівності (20) та (21) на δ_i, тобто на відхил окремих вимірів від аритметичної середини, одержуємо:

$$\Sigma\delta_i = \sqrt{\Sigma\delta_i^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Якщо припустимо такий випадок (а він цілком імовірний), що:

$$\delta_1 = \delta_2 = \cdot\cdot\cdot = \delta_n = \delta_0, \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

то тоді рівність (22) набере вигляду

$$\Sigma\delta_i = \delta\sqrt{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

або, на підставі рівности (22),

$$\sqrt{\Sigma\delta_i^2} = \delta\sqrt{n}, \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

звідки

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\Sigma\delta_1^2}{n}} \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

Цей вираз називають **середньою квадратичною помилкою** окремого виміру, і вона ото, як величина, незалежна від знаків помилок, а залежна тільки від їхньої абсолютної величини, і є найкраща характеристика ступеня точности зроблених вимірів.

Покажім це на числовім прикладі.

Нехай маємо два ряди вимірів тієї самої величини, що дали такі помилки:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1-й ряд} & -2, +3, -4, +5 \\ \text{2-й ряд} & +0{,}5, +1, +0{,}35, +0{,}15 \end{array}\right\} \ldots\ldots (27)$$

Середні аритметичні цих вимірів за формулою (16) дорівнюють:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Для 1-го ряду} & \Delta_0 = \dfrac{-2+3-4+5}{4} = +\dfrac{1}{2} \\ \text{Для 2-го ряду} & \Delta_0 = \dfrac{+0{,}5+1+0{,}35+0{,}15}{4} = +\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \ldots (28)$$

Порівнюючи аритметичні середини помилок обох вимірів за виразом (28), можна зробити висновок про однакову вартість обох вимірів. Проте, визначивши для них, на підставі сказаного вище, середні квадратичні помилки, дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Для 1-го ряду} \quad \delta_0 = \sqrt{\frac{2^2+3^2+4^2+5^2}{4}} = 3{,}7 \\ &\text{Для 2-го ряду} \quad \delta_0 = \sqrt{\frac{0{,}5^2+1^2+0{,}35^2+0{,}15^2}{4}} = 0{,}6 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (29)$$

Числа середніх квадратичних помилок за виразами (29) ясно показують, що вимір другого ряду далеко кращий, ніж вимір першого ряду.

З цього прикладу яскраво бачимо, що середня квадратична помилка окремого виміру є краща міра вартости виміру, бо:

1) більші абсолютною величиною помилки мають на неї більший вплив — і

2) при квадратуванні помилок зникає вплив їхніх знаків.

На цій підставі й обчисляють на практиці середню квадратичну помилку та користуються з неї при всіх обчисленнях.

Ми не будемо далі докладно викладати теорії помилок; зазначім тільки, що в ній суто математично, на підставі теорії ймовірностей, доводиться та встановлюється такі, надзвичайно важливі для практичного обчислення результатів виміру, формули:

Середній огріх окремого виміру:

$$m = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\delta_i^2}{n-1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30)$$

Середня помилка аритметичної середини:

$$M = \pm\frac{m}{\sqrt{n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

Найімовірніша помилка середнього огріху окремого виміру та відповідно аритметичної середини:

$$\left.\begin{aligned} r &= 0{,}6745\, m \\ R &= 0{,}6745\, M \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (32)$$

або, як звичайно беруть на практиці, приблизно:

$$\left.\begin{aligned} r &= \pm\frac{2}{3}m \\ R &= \pm\frac{2}{3}M \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (32a)$$

Границі найімовірнішої величини шуканої вимірюваної невідомої:

$$A=\begin{cases} B_0+R \\ B_0-R \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Мавши зазначені вище формули теорії помилок, і можна робити, так зване, вирівнювання результатів спостереження та виміру при рівноточності їх.

Так, коли в нас є n результатів рівноточних вимірів x_1, x_2 . . x_n якоїсь шуканої величини x і треба знайти найімовірнішу вартість цієї величини, робимо так:

1) обчисляємо за формулою (15) аритметичну середину x_0 результатів виміру;

2) обчисляємо відхили окремих вимірів δ_i від аритметичної середини за формулами (17);

3) обчисляємо середню квадратичну помилку δ_0 за формулою (26);

4) обчисляємо середній огріх окремого виміру m за формулою (30);

5) обчисляємо середню помилку аритметичної середини M за формулою (31);

6) обчисляємо найімовірнішу помилку аритметичної середини R за формулою (32) або (32а);

7) визначаємо за формулою (33) найімовірнішу граничну вартість шуканої величини.

Покажім застосування цього ходу на прикладі.

Нехай зроблено десять рівноточних вимірів метрами якоїсь простої і одержано результати, зіставлені в оцій таблиці:

№№ вимірів	B_i	$\delta_i = B_0 - B_i$	δ_i^2
1	200,00	−0,032	0,001024
2	199,95	+0,018	324
3	199,90	+0,068	4624
4	199,95	+0,018	324
5	199,99	—0,022	484
6	199,96	+0,008	64
7	199,98	—0,012	144
8	199,97	—0,002	4
9	199,98	—0,012	144
10	200,00	—0,032	1024
	$B=199{,}968$	$\Sigma\delta_i=0{,}000$	$\Sigma\delta_i^2=0{,}008160$

На підставі цієї таблиці маємо:

1. Аритметичну середину

$$B_o = 199{,}968 \text{ м.}$$

2. Середню помилку окремого виміру

$$m = \pm\sqrt{\frac{0{,}00816}{9}} = \pm 0{,}03 \text{ м.}$$

3. Середню помилку аритметичної середини

$$M = \pm\frac{0{,}03}{\sqrt{10}} = \pm 0{,}0095 \text{ м.}$$

4. Імовірну помилку аритметичної середини

$$R = \pm 0{,}6745 \times 0{,}0095 = \pm 0{,}0064 \text{ м.}$$

5. Граничні найімовірніші вартості шуканої величини

$$A = B_o + R = 199{,}968 + 0{,}0064 = 199{,}9744 \text{ м.}$$
$$A = B_o - R = 199{,}968 - 0{,}0064 = 199{,}9616 \text{ м.}$$

Дещо складніша справа при нерівноточних спостереженнях і вимірах.

Як уже вище з'ясовано, коли числову вартість величини визначено кількома рядами спостережень або вимірів, зроблених різними методами, за різних обставин, різними приладами чи, нарешті, різними спостерігачами, то числові результати цих рядів спостережень або вимірів взагалі заслуговують на різну міру довіри. Було б, отже, неправильно взяти просто аритметичну середину середніх чисел B_i, одержаних в окремих рядах, бо це значило б, що всі вони мають однакову вартість, однакову цінність. Тому, як ми вже знаємо, треба до кожного результату приписати, як то кажуть, особливу вагу, тобто число, що характеризує вартість чи ступінь певности результату кожного ряду спостережень.

Найпростіше означення поняття про вагу, яку часто позначають літерою p, теорія помилок дає таке: спостереження з вагою p рівноцінне p спостереженням з вагою, що дорівнює 1 одиниці.

Називаючи спостереження або виміри з вагою, що дорівнює одиниці, нормальними, можна, отже, сказати, що вага спостереження чи виміру показує, скільки треба взяти нормальних спостережень, щоб аритметична середина цих нормальних вимірів мала точність, рівну з точністю даного спостереження.

На цій підставі теорія помилок дає при нерівноточних вимірах з вагою p_i таку формулу для обчислення остаточного результату B_o :

$$B_o = \frac{\Sigma p_i B_i}{\Sigma p_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

т о б т о, щ о б в и в е с т и о с т а т о ч н и й с е р е д н і й р е з у л ь т а т п р и н е р і в н о т о ч н и х в и м і р а х, т р е б а к о ж н и й з р е з у л ь т а т і в B_i п о м н о ж и т и н а й о г о в а г у p_i і с у м у ц и х д о б у т к і в п о д і л и т и н а с у м у в а г о к р е м и х р е з у л ь т а т і в.

У теорії помилок доводиться, що в а г а нерівноточного виміру п р я м о п р о п о р ц і й н а д о ч и с л а в и м і р і в і о б е р н е н о п р о п о р ц і й н а д о к в а д р а т а с е р е д н ь о ї п о м и л к и о к р е м о г о в и м і р у m, тобто

$$p = \alpha \frac{n}{m^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

де α — є коефіцієнт пропорційности.

Часто-густо цей коефіцієнт пропорційности, вважаючи на цілковиту довільність його вартости, беруть, як рівний

$$\alpha = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

і тоді, на підставі формул (31) та (32a), дістають простішу й зручнішу для практичного обчислення вартість ваги

$$p = \frac{1}{R^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35a)$$

тобто просто вважають, що в а г а ряду вимірів о б е р н е н о п р о п о р ц і й н а д о к в д р а т а й м о в і р н о ї п о м и л к и й о г о а р и т м е т и ч н о ї с е р е д и н и.

Пояснім сказане прикладом.

Припустім, що для виміру якоїсь довжини зроблено три ряди вимірів стрічками, різними завдовжки, а саме: 1) в 20 *м*, 2) в 10 *м* і 3) в 5 *м*. У кожнім ряді було близько 10 вимірів. Треба дізнатися, яка вага цих вимірів.

Результати зазначених вимірів зіставлені, на підставі сказаного вище, в оцій таблиці:

Ряди вимірів	Довжина стрічки	Число вимірів	Аритмет. середина вимірів B_0	Середні помилки окрем. вимірів m	Середня помилка аритмет. середини R	Формула ваги	Вага
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	20 *м*	10	300,027	0,053	0,017	$p_1 = \alpha \frac{10}{(0,053)^2} = \alpha \frac{1000}{28}$	3,03
2	10 *м*	10	300,023	0,076	0,024	$p_2 = \alpha \frac{10}{(0,076)^2} = \alpha \frac{1000}{58}$	1,46
3	5 *м*	10	299,970	0,092	0,029	$p_3 = \alpha \frac{10}{(0,092)^2} = \alpha \frac{1000}{85}$	1,00

При довільності вибору коефіцієнта α візьмім його так, щоб вага одного ряду, наприклад, третього дорівнювала одиниці, тобто визначім вагу решти рядів відносно цього ряду. Для того, очевидячки, треба взяти

$$\alpha = \frac{85}{1000}$$

і тоді одержимо цифри VIII графи.

З цієї графи бачимо, що вага першого ряду вимірів заокруглено втроє, а другого в півтора рази більша проти третього ряду вимірів. Тому можна сказати, що **за однакових обставин лінію можна виміряти довгою стрічкою точніше, ніж короткою.**

Таку саму вагу й такий самий висновок ми одержали б і за формулою (35*a*), при чім обчисляти вагу було б трохи легше.

Якщо тепер побажаємо знайти найімовірнішу середню величину вимірюваної лінії з результатів цих трьох рядів вимірів, то за формулою (34) дістанемо:

$$B_o = \frac{300,027 \times 3,03 + 300,023 \times 1,46 + 299,970 \times 1,00}{3,03 + 1,46 + 1,00} = 300,015.$$

Не зупиняючись більше на теорії врівноважування нерівноточних помилок, додамо, що в теорії помилок виводиться ще одну важливу й інтересну теорему, а саме: зовсім неймовірно, щоб найбільша можлива при спостереженнях або вимірах помилка перевищувала потроєну величину m, тобто потроєний середній огріх виміру.

На цій підставі звичайно на практиці вважають, що **гранична помилка виміру дорівнює потроєній середній помилці окремого виміру.**

§ 16. Спосіб найменших квадратів. Вище ми показали, як знаходять наймовірнішу вартість невідомих величин на підставі результатів декількох безпосередніх спостережень чи вимірів цих самих величин.

У практиці технічних вимірів та спостережень доводиться також дуже часто, особливо провадячи спроби, спостерігати або виміряти не самі невідомі, а деякі функції від них, і за даними виміру цих функцій відшукувати наймовірніші вартості величин самих невідомих. Тоді вживають, так званого, способу найменших квадратів; його запропонували майже одночасно наприкінці XVIII і на початку XIX століття Лежанр у Франції та Ґавс у Німеччині.

Нехай нам треба знайти ряд невідомих величин

$$x, y, z \ldots \ldots \ldots \ldots,$$

число їх дорівнює s.

Нехай ми знаємо ряд функцій від цих невідомих

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y, z, \ldots \ldots) \\ F_2(x, y, z, \ldots \ldots) \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ F_n(x, y, z, \ldots \ldots) \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

число їх n.

Припустім, що ми дослідним способом знайшли величини цих функцій

$$A_1, A_2 \ldots A_n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

Тоді в нас буде n рівнань. У ці рівнання входять наші s невідомих і різні числові параметри a, b $c \ldots$, у вигляді коефіцієнтів, степеневих показників тощо; отже, ми матимемо n виразів

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y, z, \ldots a, b, c, \ldots) = A_1 \\ F_2(x, y, z, \ldots a, b, c, \ldots) = A_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ F_n(x, y, z, \ldots a, b, c, \ldots) = A_n \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

Очевидячки, тут можуть трапитися три випадки:

1) Число невідомих більше, ніж число спостережень, тобто $s > n$.

У цім випадку, видима річ, розв'язати задачу неможливо.

2) Число невідомих дорівнює числу спостережень, тобто $s = n$.

У цім випадку маємо звичайне розв'язання рівнань з багатьма невідомими.

3) Число невідомих менше, ніж число спостережень, тобто $s > n$.

Тут взагалі не можна підшукати таких величин невідомих, які тотожньо справджували б усі n рівнання (38), і доводиться задовольнитися знаходженням найімовірніших величин шуканих, які щонайкраще справджували б усі ці рівнання.

Звичайно на практиці якраз і трапляється цей третій випадок; він от і становить задачу способу найменших квадратів.

Вигляд функції F (36) можна або вивести теоретично, або взяти навмання, або, нарешті, визначити емпірично — дослідами. У всіх цих випадках нам треба визначити сталі параметри $a, b, c, \ldots$ так, щоб усякі спостережені вартості $x, y, z, \ldots$ справджували функцію F.

Інакше сказати, ми, знайшовши спостереженняа числові вартості величин x, y, z,і... та підставивши їх до рівнання (38), повинні мати в них так вартості параметрів $a, b, c, \ldots$, щоб альґебрична залежність, яку виражає функція F (36), можливо більше збігалася, узгоджувалася зі знайденими дослідним способом числовими вартостями їх (37).

Отож, мавши рівнання (38) і ряд дослідами одержаних спряжених вартостей шуканих величин, ми повинні розглядати в них величини $x, y, z, \ldots$ як певні коефіцієнти, а параметри $a, b, c, \ldots$, як якісь невідомі.

Коли б функція F (36) виражала дійсний закономірний зв'язок (закон природи) і коли б наші виміри були абсолютно точні, то, мавши, наприклад, m параметрів, досить було б зробити m спостережень, тобто, склавши m рівнань (38), розв'язати їх звичайним способом. Знайдені параметри безперечно справдили б усі n рівнання (38).

Але спостереження ніколи не вільні від помилок і огріхів, а функція F (36), особливо, коли вона емпірична, лише приблизно виражає закономірну залежність між шуканими величинами.

Отож, вибираючи різні групи по m рівнань з усіх наявних n, або, інакше сказати, робивши різні ряди спостережень чи вимірів по m в кожнім ряді, ми щоразу одержуватимемо різні числові вартості параметрів.

Природно, постає питання, на яких же з обчислених параметрів треба зупинитися, тобто які їхні числові вартості найімовірніші?

Теорія ймовірностей дає на це питання таку відповідь: треба взяти такі вартості параметрів коли сума квадратів ріжниць між спостереженими вартостями A (37) і обчисленими функціями F (36) буде найменша, тобто величина

$$S = \Sigma \{ A_i - F_i (x, y, z, \ldots a, b, c, \ldots) \}^2 \quad \ldots (39)$$

має найменшу вартість.

З цієї причини зазначений спосіб розв'язувати питання й має назву способу найменших квадратів.

Теорія диференціяльного числення навчає, що умова існування найменшої числової вартости величина S (39) справджується при деяких вартостях параметрів a b, $c, \ldots$ тоді коли

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0; \frac{\partial S}{\partial b} = 0; \frac{\partial S}{\partial c} = 0 \text{ і т. д.} \quad \ldots \ldots \ldots (40)$$

Очевидячки, коли ці умови справджені, ми дістанемо стільки рівнань (38), скільки в нас невідомих параметрів, і, щоб знайти їх, лишається тільки розв'язати цю систему m рівнань з m невідомими та одержати, як це знаємо з альґебри, однозначну систему коренів цих рівнань, тобто знайти параметри, що якнайкраще справджують рівнання (38).

Покажім, як застосовувати спосіб найменших квадратів на прикладі визначення коефіцієнтів у вживаній у теорії опору матеріялів емпіричній формулі залежности між деформацією і напругою при стиску матеріялів, що не підлягають законові Гука, тобто законові простої лінійної залежности.

Коли позначимо: i — релятивне прикорочення зразка при стиску, а p — відповідна цілковита стискна напруга, то, як установив Бюльфінґер і потвердили Бах та Шюле, залежність між цими величинами, або, як кажуть, закон пружности, можна з достатньою точністю виразити формулою:

$$i = \alpha p^m, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (41)$$

де m — абстрактне число, а $\alpha = \frac{1}{E}$ — коефіцієнт стиску, тобто величина зворотна до модуля нормальної пружности.

Припустім, що зроблено n випроб і є n пар вартостей i та p.

Застосовуючи спосіб найменших квадратів, надаймо рівнанню (41) трохи іншого, зручнішого для обчислення, вигляду, а саме, прологаритмуймо його і, позначивши для зручности й короткости

$$\lg \alpha = a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (42)$$

дістанемо

$$\lg i = a + m \lg p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (43)$$

Вираз S (29) набере тоді вигляду

$$S=\sum_1^n\left\{\lg i-(a+m\lg p)\right\}^2, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

а рівнання (40), що правлять для визначення a та p, тобто

$$\frac{\partial S}{\partial a}=0 \text{ і } \frac{\partial S}{\partial p}=0,$$

будуть:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^n(\lg i-a-m\lg p)=0\\&\sum_1^n(\lg i-a-m\lg p)\lg p=0\end{aligned}\right| \quad \ldots \ldots \quad (45)$$

або, якщо знести дужки:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^n \lg i-\sum_1^n a-m\sum_1^n\lg p=0\\&\sum_1^n \lg i\lg p-a\sum_1^n\lg p-m\sum_1^n(\lg p)^2=0\end{aligned}\right| \quad \ldots \quad (45a)$$

коли для короткости й простоти вигляду рівнань (45a) покласти, що

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^n\lg i=J; \sum_1^n\lg p=P;\\&\sum_1^n\lg i\ \lg p=J_p \text{ і } \sum_1^n(\lg p)^2=P_p\end{aligned}\right| \quad \ldots \ldots \quad (46)$$

і взяти до уваги, що

$$\sum_1^n a=na,$$

то наші рівнання (45a) можна переписати, надавши їм такого вигляду:

$$\begin{cases}na+Pm=J\\Pa+P_pm=J_p\end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (45б)$$

Розв'язуючи цю систему рівнань, дістанемо

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{JP_p-PJ_p}{nP_p-P^2}\\m&=\frac{nJ_p-JP}{nP_p-P^2}\end{aligned}\right| \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

А знавши a, ми, на підставі формули (42), знайдемо й величину коефіцієнта α.

Ще ясніше бачимо застосування цього способу на числовім прикладі, поданім у частині II [1]).

Закінчуючи розділ про теорію помилок, мусимо сказати, що, користуючись із цієї теорії, можна визначити не тільки помилку одної якоїсь величини, а й помилку функції від кількох величин, знайдених з помилкою.

Загальними рисами хід розв'язання цієї задачі подано в частині II [2]).

---

[1]) Див. розділ XII.
[2]) Див. розділ III.

ВІДДІЛ II

ЧИСЛОВІ ОБЧИСЛЕННЯ

Розділ III. Основи техніки числових обчислень

§ 17. Значення й завдання технічних обчислень. Кінцева мета технічних розрахунків — представити числово й графічно співвідношення, що існують між різними елементами. Здебільшого цієї мети можна дійти, тільки обробивши більш-менш довгочасними обчисленнями матеріял, одержаний від безпосередніх вимірів. І це тому, що більшість шуканих у техніці величин не можна виміряти безпосередньо, а можна визначити лише посередньо, як функції вимірюваних величин. Співвідношення між вимірюваними й шуканими величинами визначають або теоретично, або дослідами і виражають формулами.

Отже, обчислення, як і безпосередні роботи, відограють у техніці вельми важливу, хоча й підлеглу ролю. Виконуючи їх, доводиться прямувати до того, щоб хуткість провадження обчислень сполучити з точністю їх. Хоча надати обидві зазначені якості обчисленням велико залежить від індивідуальних особливостей обчислювача, проте й теорія, і досвід опрацювали цілий ряд способів, винайшли численні допоміжні засоби знаходити кінцевий результат найкоротшим шляхом і незалежно від властивостей обчислювача.

§ 18. Величини, що трапляються в технічних обчисленнях. Величини одержують вимірами, разом із тим величини дає теорія, і вони входять у склад формул, як якісь сталі; приклад останніх є відношення обводу кола до діяметра — π, відношення боків уписаних многокутників до радіюса, величина радіяна, логаритмічний модуль тощо.

Усі величини, одержані від виміру, мають у собі більшу чи меншу помилку, що залежить від вимірового струменту, від зовнішніх обставин, від способів виміру та вмілости вимірювача. Такі величини звуть *наближеними*; при діях над ними треба брати до уваги їхню помилку, яку звичайно подають у формі або *середньої квадратичної* або *граничної* помилки.

Сталі чи константи вважають за абсолютно точні; проте чимало є випадків, де константи представляють іраціональні кількості, неспільномірні з одиницею, що їх у десятковій системі числення звичайно виражають безконечними десятковими дробами Користуючись з іраціональних констант, доводиться обмежувати в них число десяткових знаків, тобто виражати їх наближено; наближене зображення іраціональних сталих звуть заокругленням їх до певного десяткового знака. Зрозуміла річ, що заокруглення вносить в заокруглювану величину певну помилку, а через те ріжниця між заокругленими і виміряними величинами при обчисленнях великою мірою зменшується й лишається, головно, в обліку помилок: у той час, як для вимірюваної величини ми маємо середню квадратичну або граничну помилку, в заокругленій сталій нам відома буває заокруглена дійсна або гранична помилка, при чім зв'язок між середньою квадратичною і граничною інший, ніж між дійсною і граничною. На практиці, проте, часто-густо не роблять і цієї ріжниці між виміряною і заокругленою сталою величинами, а вважають взяті помилки обох за однорідні.

§ 19. **Правила заокруглення**. Уперше заокруглення чисел на підставі певного правила знаходимо в Кеплера 1623 р. Подані тут правила заокруглення визначено трохи пізніше, приблизно наприкінці XVII століття.

При заокругленні замість даного числа беруть інше, наближене, що різниться від даного в той чи той бік на більшу або меншу величину.

Якщо наближена величина менша, ніж дана, то першу звуть наближеною величиною з недостачею; у противнім разі матимемо наближену величину з лишком.

Ріжниця між дійсною величиною і її заокругленою вартістю показує дійсну помилку заокруглення; тим що й дійсна помилка буде теж іраціональна, як і початкова величина, то для практичної мети її виражають десятковим дробом з певним заокругленням.

Правила заокруглення ґрунтуються на тім, що всяку іраціональну кількість, виражену безконечним десятковим дробом, можна представити, як суму раціональної кількости з якоюсь іраціональною. Наприклад:

$$\left.\begin{array}{l}\pi = 3{,}141592653\ldots, \pi = 3{,}12 + 0{,}021592653\ldots \\ \pi = 3{,}081 + 0{,}06059253\ldots \text{ і т. д.} \ldots\ldots\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (48)$$

Першому, раціональному, доданкові можна надати якої завгодно величини, меншої, проте, ніж дана іраціональна кількість. На практиці заведено брати за раціональний доданок якесь число десяткових знаків основної кількости, почавши з першої цифри; наприклад:

$$\left.\begin{array}{l} \pi = 3{,}1 \qquad\quad + 0{,}041592653\ldots\ldots \\ \pi = 3{,}1415 \qquad + 0{,}000092653\ldots\ldots \\ \pi = 3{,}14159265 + 0{,}000000003\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (48a)$$

Тут у другім, іраціональнім, доданку на місці розрядів, яких цифри ввійшли в склад першого доданку, стоять нулі.

Заокруглюють іраціональне число, розкладаючи його на два доданки за поданим вище правилом та відкидаючи іраціональний доданок; при цім, коли відкиданий доданок більший, ніж половина одиниці залишеного в числі (у першім доданку) останнього десяткового знака, то цей десятковий знак збільшують на одну одиницю, якщо менший, то знак лишають без зміни. Так, для першого розкладу π, в рівності (48a), заокруглена величина π буде — 3,1, для другого — 3,1416, для третього — 3,1414265; у першім і в третім випадку ми маємо заокруглену вартість π з недостачею, у другім випадку — з лишком; дійсні помилки заокруглення в наведених прикладах будуть:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{для першого випадку} & \pi - 3{,}1 & = + 0{,}04159263\ . \\ \text{„ другого „} & \pi - 3{,}1416 & = - 0{,}000017346\ . \\ \text{„ третього „} & \pi - 3{,}14159265 & = + 0{,}000000003\ . \end{array}\right\} . (49)$$

У всіх випадках помилки були менші, ніж половина одиниці останнього знака в заокругленім числі. Легко зрозуміти, що це правило буде загальне для всіх випадків заокруглення, якщо тільки його робити описаним вище порядком.

Заокруглення можна робити не тільки в іраціональних, а й в усяких числах. На підставі вищеподаного принципу, заокругляти можна лише числа, виражені десятковим дробом. Наприклад, замість числа 345,71896 можна взяти такі заокруглені вартості:

300; 350; 346; 345,7; 345,72; 345,719; 345,7190.

При заокругленні раціональних величин може трапитися випадок, неможливий для іраціональної кількости, коли відкиданий доданок точно дорівнює половині одиниці останнього десяткового знака заокругленого числа. Наприклад:

$$\left.\begin{array}{l} 8{,}675 = 8{,}67 + 0{,}005\ . \\ 11{,}3265 = 11{,}326 + 0{,}0005\ . \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (50)$$

Очевидячки, тут не можна застосувати поданого вище правила заокруглення, бо цей випадок буде серединний. В суті байдуже було б, чи зробити заокруглення з недостачею, а чи з лишком. Проте, на практиці умовилися робити за певним правилом і тут, а саме: якщо остання цифра першого доданку парна, то її скорочують в заокруглюванім числі без зміни, а коли непарна, то при заокругленні її збільшують на одиницю і роблять теж парною. Так у виразі (50) замість першого числа довелося б узяти:

$$8{,}68 \text{ з помилкою } (-0{,}005) \quad \ldots\ldots \quad (50a)$$

для другого:

$$11{,}326 \text{ з помилкою } (+0{,}0005) \quad \ldots\ldots \quad (50в)$$

Останнє правило подиктоване тим, що багато дій з парними числами можна робити простіш, ніж з непарними; разом із тим імовірність того, що відкиданій п'ятірці передує парна чи непарна цифра, однакова, тому помилки $+0{,}5$ (в одиницях останнього десяткового знака) і $-0{,}5$ траплятимуться однаково часто; отже, при досталь великім числі доданків вплив помилок заокруглення вигляду $\pm 0{,}5$ повинен компенсуватися в сумі; це особливо важно тому, що розгляданий випадок заокруглення супроводиться максимальною помилкою.

Щоб точніше зважити помилки в діях з заокругленими величинами, а часом і щоб зменшити самі помилки, радять відзначати особливими значками характер зробленого заокруглення — „з лишком" чи „з недостачею". Значки ці можуть бути найрізноманітніші. Найбільш поширені в технічних обчисленнях значки, що їх запропонував Гавс: заокруглення „з лишком" відзначають крапкою, поставленою над останньою цифрою заокругленого числа; заокруглення „з недостачею" відзначають мінусом над такою ж цифрою. У прикладі (48) вартість π довелося б за цим правилом написати так:

$$3{,}\bar{1};\ 3{,}141\dot{6};\ 3{,}1415926\bar{5} \quad \ldots\ldots \quad (49a)$$

Щоб відзначити при обчисленні заокруглених величин, до якого десяткового знака зроблено заокруглення, умовилися лишати в десятковій частині нулі, хоча б вони стояли на останніх місцях з правого боку і не впливали на цифровий склад числа. Наприклад, відношення сажня до метра, заокруглене до десятимільйонних частин, треба написати так:

$$\frac{1 \text{ сажень}}{1 \text{ метр}} = 2{,}1336000 \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

§ 20. Види і склад обчислень. *Усякі обчислення можна поділити на два окремі: види — точні й наближені.*

При точних обчисленнях шукають повний цифровий склад кінцевого результату дій, виконуваних над даними числами;

у наближених обчисленнях намагаються знайти кінцевий результат, уже заокруглений до певного, заздалегідь наміченого, десяткового знака. Тим що число шуканих цифр результату дії менше в наближених обчисленнях, виконувати їх простіше й швидше, ніж точні; противно цьому зменшується точність результату обчислення.

При діях з наближеними чи заокругленими величинами в результаті обчислення, навіть тоді, коли визначають повний цифровий його склад, неминуче є огріх, і він може доходити таких розмірів, що ряд цифр результату буде фіктивний. У цих випадках особливо цінно застосовувати методи наближених обчислень.

Іноді до обчислення з наближеними величинами застосовують метод точного обчислення для потомного контролю виконаних обчислювальних дій.

І точне, і наближене обчислення обчислювач може робити або безпосередньо, за допомогою набутих навичок та знань, або посередньо, за допомогою різних допоміжних засобів — таблиць, діяграм, лічильних приладів і машин. Допоміжних засобів обчисляти винайдено досі так багато, що їх не можна розглянути й описати в одній роботі: самих лічильних машин збудовано на даний момент понад 4.000. У цім відділі ми зупинимося лише на найбільш пристосованих до технічної практики та найзручніших для неї допоміжних засобах обчисляти.

Які б складні ні були обчислення, усі вони кінець - кінцем сходять до шістьох основних дій: додавання, віднімання, множення, ділення, степенювання та коренювання. Логаритмування, диференціювання й інтеґрування є попередні дії, спрямовані на перетвір формул, і не визначають числового розміру їхніх частин, отже їх і не можна вважати за обчислювальні дії.

Усякі обчислення складаються з таких частин: 1) виконання зазначених у формулі обчислювальних дій; 2) перевірка правильности кінцевого результату обчислення і 3) визначення його точности або помилки.

Питання про оцінку точности результату виникає або при обчисленнях з наближеними величинами, або при наближених обчисленнях. На практиці часом не підраховують точности результату, чи тому, що мають теоретичний дослід точности обчислюваної формули, чи тому, що підрахунок точности або помилки забарний, потребує багато часу.

§ 21. Техніка обчислень. Найголовніші вимоги до обчислення — хуткість і правильність — дещо суперечать одна одній: від усякого збільшення хуткости обчислення збільшуються шанси прорахунків, помилок при письмі та інших помилок, що ламають правильність результату. Досвід виробив цілий ряд способів і правил, як збільшити хуткість обчислення, зберігши правильність одержуваних результатів. Більшість цих способів і правил спрямована на те, щоб запобігти потреби для обчислювача розвіювати свою увагу на речі й обставини, які не мають безпосереднього зв'язку з самим процесом визначення кінцевого результату дії. Для того рекомендується заздалегідь передбачити всяку дрібницю в усіх проміжних ланках обчислення, добрати для нього форму й додержувати її при всіх обставинах. Від цього утвориться звичка автоматично виконувати окремі дії при обчисленні, і ці дії вже не забиратимуть уваги обчислювача. Разом із тим велико важить усунути все, що могло б сприяти швидшій утомі окремих органів обчислювача, а, головно, органів зору.

Окремі частини встановленою практикою техніки обчислення, стосуючись, як сказано вже, до дрібниць та деталів, можуть на перший погляд здаватися несуттєвими, але справді вони дуже помітно впливають на успішність обчислення.

Основи застосування техніки обчислень такі:

1) Щоб дійти цілковитої одноманітности й найбільшої простоти в виконанні дій, заведено **всі величини, які беруть участь в обчисленні, представляти десятковими дробами**, якщо, звісно, в величині є дробова частина. Тим що більшість звичайних дробів не можна обернути на кінцевий десятковий дріб, то тут доводиться користуватися з заокруглених вартостей дробів. Коли з дробовими величинами треба виконати послідовний ряд множень та ділень, а більшість величини зображена звичайними дробами, що не обертаються на десяткові, то, щоб уникнути складного підрахунку точности кінцевого результату дії з заокругленими величинами, краще поперетворювати всі чинники й дільники в неісті дроби і, застосувавши до них загальні правила дій із звичайними дробами, звести обчислювальний вираз до єдиного ділення якогось добутку на інший. Наприклад:

$$\frac{5\frac{1}{3}\times 6\frac{2}{7}\times 2\frac{1}{2}}{3\frac{5}{9}}=\frac{\frac{16}{3}\times\frac{44}{7}\times\frac{5}{2}}{\frac{32}{9}}=\frac{16\times 44\times 5\times 9}{3\times 7\times 2\times 32}\ . \quad (52)$$

2) Багато обчислювачів пропонує **десяткову частину числа відокремлювати від цілої його частини неодмінно комою**. Тимчасом **при логаритмічних обчисленнях відокремлюють характеристику від мантиси крапкою**. Тим що здебільшого в обчисленнях разом із величинами беруть участь і їхні логаритми, то ці

правила чимало запобігають можливості плутанини між ними; а це має особливу вагу, вважаючи на суттєву ріжницю в виконанні дій над числами й над логаритмами. Наприклад:

$$\lg 3{,}45 = 0.53782 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

3) При діях з многозначними числами дуже важить хутко розрізняти окремі розряди цифр; тому **при обчисленнях слід числа розбивати на дільниці, по три цифри в кожній**, лишаючи між дільницями одноманітний проміжок; поділ на дільниці роблять по обидва боки коми, яка відокремлює цілу частину від дробової. Наприклад:

$$507\ 365{,}421\ 07 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

4) Зважаючи на те, що мантиси логаритмів завжди містять певне число цифр,— при звичайних обчисленнях не більше, як сім,—запропоновано **всяку мантису розбивати завжди на дві дільниці**; в тризначних логаритмах у першій дільниці лишають одну цифру, у другій — дві; в чотиризначних — дві й дві; в п'ятизначних — дві й три; в шестизначних — три й три; в семизначних — три й чотири. Наприклад:

$$\left.\begin{aligned} &= 2.1\ 34 \\ &= 1.01\ 35 \\ &= 9.24\ 786 \\ &= 3.675\ 178 \\ &= 0.304\ 2785 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54a)$$

Так само відмінно розподіляють на дільниці повні квадрати чисел: в них кожну дільницю становить лише дві цифри. Наприклад:

$$136^2 = 1\ 84\ 96 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54a)$$

Ділити числа на дільниці завели в практику німці при геодезичних обчисленнях, відповідно до вимог їхніх технічних інструкцій.

5) Дуже корисно також спрощувати зображення чисел з багатьма нулями.

Коли ціле число закінчується багатьма нулями, або багато нулів передує вартісній частині в істім десятковім дробі, то багато математиків радить для скорочення письма зображати такі числа, як добуток цілого числа, написаного тими ж таки цифрами, що стоять у данім числі перед або після нулів, на якийсь додатній чи від'ємний степінь десятьох. Степінь десятьох добирають так, щоб була рівність між даним числом і добутком, який його заміняє.

Наприклад, числа:

$$137\,000\,000;\ 670\,000;\ 0{,}000\,000\,079\,81;\ 0{,}000\,000\,000\,007\,36 \quad . \quad (55)$$

можна представити у відповіднім порядку такими добутками:

$$137 \cdot 10^6;\ 67 \cdot 10^4;\ 7\,981 \cdot 10^{-7};\ 736 \cdot 10^{-11} \quad . \ . \ . \ . \quad (55a)$$

Це скорочене зображення числа можна зберігати в діях множення та степенювання; тут чинники, зображені вартісними цифрами, множать або степенюють окремо від перемноження чи степенювання степенів десятьох і добуток дістають у тій самій формі, як і дані числа.

Отже, перемножаючи

$$(21 \cdot 10^5) \times (3 \cdot 10^{-6}) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (56)$$

матимемо

$$(21 \cdot 3) \times (10^5 \cdot 10^{-6}) = 63 \cdot 10^{-1} = 6{,}3 \quad . \ . \ . \ . \quad (56a)$$

В діленні, коли діленик і дільник обидва зображені зазначеним скороченим способом, треба перше, ніж ділити, спростити обидва компоненти на степінь 10, що входить у дільник, а потім, виконуючи дію, зображати обидва дані числа звичайним способом.

Наприклад, щоб знайти частку:

$$(78 \cdot 10^6) : (6 \cdot 10^5) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (57)$$

спрощуємо діленик і дільник на 10^5; дістаємо:

$$(78 \cdot 10) : 6 = 780 : 6 = 130 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (57a)$$

Добуваючи корінь із числа, зображеного, як добуток цілого числа на степінь 10, вилучають з останнього чинник і з нього добувають корінь точно, а потім добувають окремо корінь із вилученого степеня десятьох, помноженого на решту чинників.

Так, щоб знайти корінь

$$R = \sqrt[3]{387 \cdot 10^{14}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (58)$$

даний вираз перетворюємо так:

$$R = \sqrt[3]{(387 \cdot 10^{2}) \cdot 10^{12}} = 10^4 \cdot \sqrt[3]{38\,700} \quad . \ . \ . \ . \quad (58a)$$

і потім добуваємо за загальними правилами корінь з 38 700.

Якщо всі компоненти дій додавання й віднімання зображені описаним вище порядком, то кінцевий результат можна знаходити таким способом: вилучають у кожнім компоненті степінь десятьох, найменшу з усіх, що входять в дані доданки та від'ємники; зосталу частину представляють звичайним порядком у десятковій системі й роблять над нею зазначені дії; до результату долучають вилучений степінь 10.

За цими вказівками, визначаючи вираз:

$$A = 33 \cdot 10^3 - 12 \cdot 10^2 + 34 \cdot 10^4 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (59)$$

можна представити його так:

$$A = 10^2 (33 \cdot 10^1 - 12 + 34 \cdot 10^2) = 10^2 (330 - 12 + \\ + 3\,400) = 10^2 \cdot 3\,718 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (59a)$$

Правильність усіх зазначених перетворів відома з альґебри і доказів не потребує.

6) Щоб, обчисляючи, не записувати всього зайвого, позначають назви іменованих величин скороченими символами. Опрацьований для метричної системи скрізь уживаний порядок позначати їх, а так само й інші символи та рекомендовані в техніці позначення подано вище, у відділі I, де докладно з'ясовано й значення цих скорочень і позначень, а тому тут зупинятися на них не будемо.

7) При обчисленні треба особливу увагу звертати на чітке письмо математичних знаків та цифр так щоб, жодної з них не можна було сплутати з іншою; коли цифри завбільшки однакові, коли вони правильно розташовані одні під одними, то не відволікається уваги обчислювача на читання цифр, і останнє він робить автоматично [1])

8) Писати обчислення треба атраментом. Тоді цифри помітніші для ока, отже не так напружується й утомлюється зір. Крім того, обчислювач, знавши, що написану атраментом цифру важко виправляти, мимоволі зосереджує більше уваги на тім, щоб запобігти можливим помилкам, прорахункам тощо, і ці помилки трапляються рідше.

Щоб виділяти окремі результати, потрібні для дальшого обчислення, корисно вживати кольорового атраменту — червоного, синього й інш.

---

[1]) На потвердження цього дозволю собі послатися на свій особистий досвід. Його я виробив собі ще з гімназіяльних часів, завдяки зусиллям небіжчика - викладача математики П. І. Гайдукова, добру пам'ять про кого зберігають досі всі його учні, як про видатного знавця математики і незвичайного в ті тяжкі часи панівного за царату шкільного режиму педагога — людину. П. І. Гайдуков раз - у - раз казав: „Якщо не хочете наробити помилок, вимальовуйте цифри й інші математичні знаки". Він настійно вимагав від нас цього „вимальовування", і ввесь мій практичний досвід у провадженні обчислень від того часу й до сьогодні впевняє мене в правильності й доцільності такої вимоги. Завдяки П. І. Гайдукову я й мої гімназіяльні товариші, що обрали, собі, може, не без впливу П. І. Гайдукова, інженерну стежку, засвоїли цю вимогу, і не раз стала вона нам у пригоді на практиці. Отже й я, пам'ятаючи заповіт свого вчителя, що всилів мені любов до математики, раджу читачів звернути серйозну увагу на таку ніби дрібницю, як „вимальовування" математичних знаків, бо цього тепер, на жаль, ніде серйозно не навчають.

9) Тим що здебільшого в діях окремі числа доводиться розміщати одне під одним, додержуючи розміщення різних розрядів цифр, то, щоб полегшити за такого розташування саме обчислення, слід робити його на картатім папері. Квадратова карта не зовсім зручна, бо не відповідає звичайній довгастій формі цифр; отже, для обчислень краще брати папір з довгастою вузькою картою.

10) Коли доводиться робити численні повторні обчислення тих самих формул, уживають так званих схем — спеціяльно налініяних сіток з певним місцем для кожного числа, яке бере участь в обчисленні; назначаючи місця, пильнують того, щоб виконувати обчислювальні дії було якнайпростіше, найзручніше й якнайшвидше.

Уживання схем допомагає обчислювачеві зосереджувати увагу і тим зменшує можливість помилок.

У схеми записують тільки найголовніші дії та їхні результати; всякі побічні обчислення виконують на окремих допоміжних аркушах.

11) Тим що багато глянсових сортів паперу дає відблиск, а це втомлює око й утрудняє читати цифри, то для обчислень зручно брати густий гладкий матовий папір.

12) Щоб не переносити обчислень на зворіт аркуша, бо це незручно, рекомендується переносити відразу обчислення на другий аркуш, залишаючи чистими звороти паперу. З цього правила роблять виняток, особливо для тих випадків, коли в схему вписують численні однорідні обчислення, яких результати одержуть незалежно один від одного.

13) Коли обчислювач користується з таблиць, то звичайно одна його рука (лівиця) перегортає сторінки, щоб вибрати з таблиць потрібні величини; тоді писати на обчислювальних аркушах трохи важко: аркуш можна зсунути, бо його не притримує вільна рука; щоб запобігти можливості такого зсову, радять накладати поверх аркуша важкі бруски прямокутнього перекрою, зроблені з олува й обклеєні папером.

14) Крім поданих тут заходів, що допомагають хутко й правильно робити обчислення, кожний обчислювач мусить зважити свої індивідуальні особливості й їх використати для більшої успішности обчислень.

Розділ IV. Безпосередні точні обчислення і практичні спрощені способи робити їх

§ 22. **Додавання й віднімання**. Вважаючи на те, що особи, які вивчають даний курс, мусять бути добре обізнані з основами математики, ми в цім відділі не повторюватимемо ні означень, ні теоретичних обґрунтовань тої чи тої математичної обчислювальної дії, ані доказів правильности її, ні тих елементарних правил виконувати дії, як-от порядок писання цифр та чисел тощо, що повинні, як ми вже сказали, бути відомі з основ математики.

Ми тут подаватимемо лише спрощені, практикою вироблені, способи, що полегшують і прискорюють виконання обчислень, зберігаючи цілковиту точність їхніх наслідків.

В основі спрощених способів виконувати додавання лежать усім відомі теореми про властивості суми.

1) Перший спосіб — змінити порядок доданків, розташувавши їх так, щоб суми двох поруч цифр дорівнювали одиниці з нулями, тобто 10, 100 і т. д.

Цей спосіб особливо придатний при однозначних та двозначних доданках.

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{l} 7+4+3=7+3+4=10+4=14 \\ 37+54+63=37+63+54=100+54=154 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (60)$$

2) Якщо один з доданків наближається до 10^n, його розкладають на суму або ріжницю двох доданків.

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{l} 513+432=500+13+432=500+432+13=932+13=946 \\ 562+396=562+400-4=962-4=958 \end{array}\right\} \quad (61)$$

Цей спосіб спрощеного виконання дії додавання зручно застосовувати, розглядаючи віднімання, як альґебричну суму додаткового й від'ємного чисел.

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{l} 973-506=973-(500+6)=973-500-6=473-6=467 \\ 637-496=637-(500+4)=637-500-4=137+4=141 \end{array}\right\} \quad (61a)$$

3) Якщо треба знайти суму альґебричну, тобто суму многочлена з додатніми й від'ємними числами, то треба сумувати всі члени додатні, потім усі члени від'ємні і одну суму відняти від другої, приписавши до неї відповідний знак.

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{l} 48-32-10+30+16-8=48+30+16-32-10- \\ \qquad\qquad -8=94-50=44 \end{array}\right\} \quad (62)$$

4) Щоб спростити при цім виконання дії віднімання, усі числа, що їх треба віднімати, заміняють ріжницею між найближчим більшим числом від 10^n і їхніми доповненнями до нього.

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{c} 4\,345 - 238 - 1\,510 + 512 = \\ = 4\,345 - (1\,000 - 762) - (10\,000 - 8\,490) + 512 = \\ 4\,345 + 762 + 8\,490 + 512 - 1\,000 - 10\,000 = \\ = 14\,109 - 11\,000 = 3\,109 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (63)$$

Щоб простіше й зручніше виконувати дії, звичайно підписують числа одне під одним, як при додаванні, при чім ставлять замість віднімaних чисел їхні доповнення до 10^n, а замість 10^n — знак „$\times$“ спереду цього числа, і додають їх звичайним порядком, беручи знак „$\times$“ при сумуванні відповідного стовпчика за „— 1“.

Наприклад, шукаючи суму чисел, поданих у прикладі (63), роблять так:

$$\left.\begin{array}{r} 4\,345 \\ \times \;\; 762 \\ \times\, 8\,490 \\ 512 \\ \hline 3\,109 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (63a)$$

Мавши відповідну навичку, можна надзвичайно прискорити й спростити знаходження альґебричної суми.

Дуже важливу операцію — перевірку правильности результату зробленого додавання чи віднімання — можна робити чотирма способами:

1) переміняючи порядок доданків і застосовуючи при цім сумування частинами або групами,

2) зворотною дією, тобто перевірюючи додавання відніманням і навпаки,

3) за допомогою 9,

4) однозначною сумою цифр заданих чисел та їхньої суми й різниці.

Перевіряють п о в т о р е н н я м д і ї так: коли за першим разом сумувати кожний стовпчик згори вниз або числа з лівого боку на правий, то за другим разом сумують стовпчик знизу вгору або з правого боку на лівий.

Часом друге сумування роблять частинами, окремо сумуючи два, три, кілька перших по черзі доданків, потім два, три ... дальших і т. д., а кінець-кінцем сумують одержані частинні суми й дістають знову шукану суму.

Такий спосіб повторювати дію хоч і потребує більше праці та обчислень, але дає цілковиту незалежність другого сумування від першого й усуває можливість повторення тієї самої помилки. Коли як слід добрати доданки для частинного додавання одним із зазначених вище способів та зменшити їх число, можна набагато прискорити виконання перевірки, а вживаючи допоміжного аркуша, скоротити письмо. Найпростіший й найшвидший спосіб одержати результати додавання — поділити доданки парами.

Самий порядок дії при цім такий. Верхній край допоміжного аркуша прикладають під другим доданком і на аркуші виписують суму перших двох доданків. Потім частину аркуша з написаною сумою загинають і верхню частину краю перегнутого аркуша прикладають під четвертим доданком. Виписують на аркуші суму третього й четвертого доданків. Знову загинають аркуш і т. д. Одержавши таким способом усі частинні суми, аркуш розгинають і, сумуючи написані на нім числа, дістають заново шукану суму заданих чисел.

Зворотною дією перевіряють при додаванні так: з одержаної суми послідовно віднімають кожний доданок; коли сума правильна, то в результаті одержують нуль.

При відніманні додають остачу до від'ємника і в результаті дістають зменшеник, якщо віднімання зроблене правильно.

І перший, і другий способи перевірки особливо зручно робити за допомогою російської „рахівниці“, про яку скажемо далі, в розділі про посередні обчислення.

Спосіб перевіряти дев'яткою спирається на дві теореми, — ми подамо їх тут без доказів:

1. Остача від ділення всякого числа на 9 дорівнює остачі від ділення на 9 суми цифр діленого числа.

2. Дев'яткова остача [1]) суми кількох доданків дорівнює сумі дев'яткових остач усіх доданків.

Самий спосіб перевіряти можна уявити з такого прикладу:

Доданки й сума	Сума цифр чисел	Дев'яткова остача
345 673	28	1
23 012	8	8
+ 433 408	22	4
36 298	28	1
4 156	16	7
		21 — сума дев'ятков. остач.
842 547	30	3

. . . . . (64)

Сума дев'яткових остач доданків дорівнює 21, а її дев'яткова остача дорівнює 3. Сума цифр суми — 30 і її дев'яткова

[1]) Тобто остача від ділення на 9.

остача теж дорівнює 3. Отже, дію додавання в данім прикладі виконано вірно.

Перевіряючи дев'яткою, можна не виявити помилки тільки тоді, якщо ця помилка не змінює цифрового складу суми, а лише переміщає місця цифр у ній, або коли помилкове збільшення одної з них чи кількох компенсується зменшенням на таке саме число одиниць інших цифр суми. Обидва ці випадки на практиці дуже мало ймовірні, а тому перевірку дев'яткою вважають за надійнішу й хуткішу, ніж попередні.

4. Ще простіша перевірка за допомогою однозначної суми цифр,— відміна перевірки дев'яткою.

При цім способі знаходять однозначну суму цифр суми однозначних сум цифр доданків і однозначну суму цифр суми даних доданків. Коли немає помилки в зробленім додаванні, то обидві ці однозначні суми повинні бути рівні.

Наприклад:

Доданки й сума	Сума цифр	Однозначні суми	
2 715 + 1 061 4 687	15 8 25	6 8 7	сума 21, однозн. сума — 3. . . . . (65)
8 463	21	3	

Так само перевіряють і віднімання.

Наприклад:

	Сума цифр	Однозначні суми	
− 3 248 1 342	17 10	8 1	ріжниця 8 − 1 = 7 . . . . (66)
1 906	16	7	

Якщо однозначна сума цифр зменшеника буде менша, ніж однозначна сума цифр від'ємника, то до першої додають 9,— від того однозначна сума цифр зменшеника не змінюється, як бачимо з цього прикладу:

	Сума цифр	Однозначні суми	
− 1 203 962	6 17	6 + 9 = 15 8	ріжниця 15 − 8 = 7 . . . . (67)
241	7	7	

Застосуймо цю перевірку для доказу правильности віднімання у прикладах (62) та (63*a*). Матимемо:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}48-3\\ +\ 30-3\\ 16-7\end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{сума 13, однозначная}\\ \text{сума 4,}\end{array}\\ \hline 94-4\\ \left.\begin{array}{r}32-5\\ +\ 10-1\\ 8-8\end{array}\right\}\ \text{сума 14, однозн.}-5.\\ \hline 50-5\end{array}\right\}\ \text{ріжн. } 4+9-5=8$$

$$\left.\begin{array}{r}94\\ -\ 50\\ \hline 44-8\end{array}\right\}\quad \ldots\ (62a)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}4\ 345-7\\ \times\ 762-5\\ \times\ 8\ 490-2\\ 512-8\end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{сума 22, однозначна}\\ \text{сума}-4,\end{array}\\ \hline \quad 3\ 109-4\end{array}\right\}\quad \ldots\ (63б)$$

тобто, значить, обидва обчислення зроблено правильно.

Якщо, робивши додавання чи віднімання, ми маємо числа, вочевидь не вільні від огріхів, бо їх одержано або виміром, або заокругленням, то не трудно, знавши помилки кожного доданку, обчислити, за допомогою зазначених вище формул теорії помилок, квадратичну помилку суми, отже й граничну помилку.

§ 23. **Множення.** Замість звичайного, дуже довгого і втомного перемноження цифр множеника на цифри одиниць, десятків тощо множника, замість виписувати одержані добутки один під одним, відступаючи в правий бік чи в лівий на одну цифру, та замість складати всі частинні добутки, для спрощеного виконання точних обчислень уживають п'ятьох способів:

1. Способу перемноження навхрест.
2. Способу зворотного порядку цифр множника з застосуванням рухомого аркуша.
3. Способу зміни порядку чинників.
4. Способу користання з альґебричних формул.
5. Способу запровадження додаткового чинника.

1. Спосіб перемноження навхрест такий: виписують не частинні, а тільки остаточні добутки, задержуючи в

пам'яті числа, що їх треба додавати. Процес такого перемноження для випадку тризначних чисел

показано на оцім рисунку і можна засвоїти з такого прикладу:

$$\begin{array}{r} 425 \\ 342 \\ \hline 145\ 350 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68a)$$

де хід обчислення такий:

$2 \times 5 = 10$ (пишемо 0 і задержуємо в пам'яті 1);

$2 \times 2 = 4$ та 1 дає 5, та 20[1]) дає 25 (5 пишемо, 2 затямлюємо);

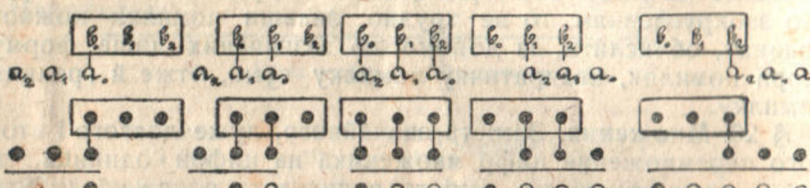
$2 \times 4 = 8$ та 2 дає 10, та 15[1]) дає 25, та 8 дає 33 (3 пишемо, 3 затямлюємо);

$4 \times 4 = 16$ та 3 дає 19, та 6[1]) дає 25 (5 пишемо, 2 затямлюємо);

$3 \times 4 = 12$ та 2 дає 14 (пишемо 14).

2. Спосіб зворотного порядку цифр множника такий: щоб помножити число $a\,a\,a_0$ на число $в_2в_1в_0$, переписують множник зворотним порядком, тобто $в_0в_1в_2$, і виписують його на аркуші чи на стьожці паперу; пересуваючи папір, послідовно перемножають цифри по вертикалі, виконуючи в умі частинне складання, а під числами записують кінцеву цифру.

Процес виписування показано на оцім рисунку:



і можна засвоїти його з прикладу перемноження чисел:

438×324

423	423	423	423	423	
438	438	438	438	438	(69a)
2	12	912	1 912	141192	
3[2])	3[2])	4[2])	2[2])		

---

[1]) Щоб одержати цей добуток, рекомендується множити в умі, не називаючи чинників.

[2]) Цифра частинного добутку, яку задержуємо в умі й прикладаємо до дальшого частинного добутку.

Описанний спосіб перемножіння знали індуси ще в VI віці; в Европі його описав уперше Леонард Пізанський у XIII віці.

Особливо практичний цей спосіб, коли вживати російської рахівниці.

Взагалі, мавши деяку навичку, можна зазначеними способами, надто другим, надзвичайно хутко перемножати які завгодно многозначні числа

Щодо перевірки множення, то її роблять або повторною дією, тобто діленням, а найшвидше й найпростіше перевіряють способом однозначної суми цифр чинників і добутку. Саме, однозначна сума цифр добутку однозначних сум цифр множенника і множника повинна дорівнювати однозначній сумі їх добутку.

Так, для розглянутого прикладу (69 *a*) маємо:

$$\begin{array}{r} 438-6 \\ \times\, 324-9 \\ \hline 141\,912-9 \end{array} \Big\} \text{ добуток } 6\times 9=54, \text{ однозначна сума} - 9\,. \quad (69a)$$

3-й спосіб. Коли чинників більше, ніж два, наприклад, три тощо, можна спростити й прискорити одержання добутку, мінивши порядок чинників; особливо це зручно, коли деякі з них можуть дати добуток вигляду 10^n.

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{l} 2\times 53\times 5=2\times 5\times 53=10\times 53=530 \\ 2\times 237\times 25=4\times 25\times 237=100\times 237=23\,700 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (70)$$

4-й спосіб. Часто-густо можна помітно спростити й прискорити одержання добутку заданих чисел, користуючись із загальновідомих формул альґебри, розбиваючи чинники на суму або ріжницю двох чисел, яких добуток легко знайти.

Ці альґебричні формули такі:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ a\times b=a\times(a_1\pm b_2)=ab_1\pm ab_2, \\ 2)\ a\times b=(a_1\pm a_2)\times(b_1\pm b_2)=a_1b_1\pm a_1b_2\pm a_2b_1\pm a_2b_2 \end{array}\right\} (71)$$

Спосіб користуватися ними ясний із таких ось прикладів:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \mathbf{4\times 58}=4\times(50+8)=4\times 50+4\times 8=200+ \\ & +32=\mathbf{232}, \\ 2) & \mathbf{6\times 97}=6\times(100-3)=6\times 100-6\times 3=600- \\ & -18=\mathbf{582}, \\ 3) & \mathbf{42\times 61}=(40+2)\times(60+1)=40\times 60+40\times 1+ \\ & +2\times 60+2\times 1=2\,400+40+120+2= \\ & =\mathbf{2\,562}, \\ 4) & \mathbf{98\times 21}=(100-2)\times(20+1)=100\times 20+100\times \\ & \times 1-2\times 20-2\times 1=2\,000+100-40- \\ & -2=2\,100-42=\mathbf{2\,058}, \end{array}\right\} \ . \ (71a)$$

Якщо при користуванні другою з формул (71) виявиться, що одно число, наприклад, a, на y більше, а друге, тобто b, на y менше, ніж якесь число x, і якщо при цім x буде многократь 10^n, то можна, використовуючи другу з цих формул (71), звести множення даних чисел до відшукання ріжниці квадратів чисел x та y, як це бачимо з формули:

$$a \times b = (x + y) \times (x - y) = (x^2 - y^2) \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

Наприклад:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \mathbf{62 \times 58} = (60 + 2) \times (60 - 2) = 60^2 - 2^2 = \\ &\quad = 3\,600 - 4 = \mathbf{3\,596} \\ &2)\ \mathbf{104 \times 96} = (100 + 4) \times (100 - 4) = 100^2 - 4^2 = \\ &\quad = 10\,000 - 16 = \mathbf{9\,984} \end{aligned}\right\} \quad . \ (72a)$$

5-й спосіб — запровадження додаткового чинника — зручний, коли одно число a можна спростити множенням на якесь число n, а друге b — діленням на це саме число.

Суть способу бачимо з альґебричної формули:

$$a \times b = na \times \frac{b}{n} = \frac{a}{n} \times nb, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

а застосування його ясне з оцих прикладів:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \mathbf{45 \times 86} = 2 \times 45 \times \frac{86}{2} = 90 \times 43 = \mathbf{3\,870} \\ &2)\ \mathbf{74 \times 0{,}25} = \frac{74}{4} \times 4 \times 0{,}25 = 18{,}5 \times 1 = \mathbf{18{,}5} \\ &3)\ \mathbf{0{,}5 \times 248} = 2 \times 0{,}5 \times \frac{248}{2} = 1 \times 124 = \mathbf{124} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (73a)$$

Щодо визначення помилки при виконанні множення, то з цього приводу треба сказати таке.

Знаходження добутку, зв'язаного з численними проміжними діями, як-от складання частинних добутків та їх сумування, спричиняє помилку в кінцевім результаті далеко більшу, ніж при додаванні та відніманні.

Тому, перевіряти одержаний добуток у скільки-будь складнім випадку треба неодмінно. Отже, подаємо тут іще два додаткові способи перевіряти множення, засновані на таких формулах альґебри:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ a \times b = (10^n - a)(10^m - b) - 10^{n+m} + 10^m a + 10^n b \\ &2)\ a \times b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (74)$$

Правильність способів бачимо з оцих найпростіших числових прикладів:

$$\left.\begin{array}{l}1)\ \mathbf{6}=3\times2=(10-3)\times(10-2)-10^2+10\times3+10\times2=\\ \quad=7\times8-100+30+20=56+30+20-100=\mathbf{6}\\ 2)\ \mathbf{15}=5\times3=\left(\frac{5+3}{2}\right)^2-\left(\frac{5-3}{2}\right)^2=\left(\frac{8}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2=\\ \qquad\qquad=\frac{64}{4}-\frac{4}{4}=\frac{60}{4}=\mathbf{15}\end{array}\right\} \quad .\ (74a)$$

До речі скажемо, що множення способом зворотного порядку цифр множника великою мірою вільне від можливости грубих помилок, і перевірка його однозначною сумою цифр є достатня ґарантія того, що одержаний добуток правильний.

Щождо величини помилки, якщо треба її знати, то визначаємо її за допомогою квадратичної помилки, способом, описаним вище, в теорії помилок. Помилки чинників помітно відбиваються на добутку й перекручують його в багатократ більше проти своєї величини. З цього погляду множення — одна з дуже невигідних математичних обчислювальних дій.

При точнім обчисленні добутку наближених або заокруглених величин, чимала частина цифр нижчих розрядів у добутку буває вочевидь неточна. Звідси виходить, що перемножати точним способом наближені та заокруглені величини дуже непрактично, і далеко вигідніше вживати методу наближених обчислень, що його ми опишемо далі.

§ 24. Ділення. Як відомо, ділення чисел одного на одне засноване на тім, що діленик можна представити, як суму кількох доданків; воно полягає в послідовнім, почавши від вищого розряду, обчисленні однозначних часток, що являють собою цифри послідовних розрядів многозначної частки за формулою:

$$a:b=(a_1+a_2+a_3+\ .\ .\ .\ ):b=\frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{b}+\frac{a_3}{b}+\ .\ .\quad (75)$$

Наприклад:

$$4\,368:12=(3\,600+720+48):12=300+60+4=364\quad .\ .\ (75a)$$

або, як звичайно пишуть:

$$\left.\begin{array}{r|l} 4368 & 12 \\ \cline{2-2} -\ 36 & 364 \\ \cline{1-1} 76 & \\ -\ 72 & \\ \cline{1-1} 48 & \\ -\ 48 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (75b)$$

При цім, крім таблиць множення, треба знати ознаки подільности чисел на первісні величини: 2, 3, 5, 7, 11.

Ділення перевіряють або повторним діленням ділениκа на частку, при чім одержують дільник, або зворотною дією, тобто помножають частку на дільник і одержують діленик, або, ще простіше й практичніше, за допомогою однозначних сум цифр діленика, дільника та частки, бо співвідношення останніх повинно бути те саме, як і співвідношення заданих чисел.

Наприклад:

$$43\,643 : 23 = 1\,897 + 10$$
$$23 \times 1\,897 + 10 = 43\,643 \text{ — однозн. сума цифр. } \mathbf{9} \quad \ldots (76)$$

Відповідно

$$5 \times 7 \quad + 1 = 36 \quad \text{— „ „ „} \quad 9$$

однозн. суми.

Способи спрощеного ділення ґрунтуються на такій теоремі:

Від одночасного множення чи ділення діленика й дільника на те саме число величина частки не змінюється, а остача виходить помножена або поділена на те саме число, тобто

$$x = a : b = na : nb = \frac{a}{n} : \frac{b}{n} \quad \ldots\ldots\ldots (77)$$

На цій підставі дуже корисно перед тим, як ділити многозначні числа, спростити їх на спільних чинників. Після такого спрощення часто-густо задані многозначні числа перетворюються на однозначні або, в крайнім разі, на двозначні, і тому частину ділення можна робити в умі. Особливо зручно користуватися з цього способу, якщо дільник, помножаючи його на якийсь чинник, можна звести до числа вигляду 10 чи його многократі.

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \mathbf{637 : 25} = 4 \times 637 : 4 \times 25 = 2\,548 : 100 = \mathbf{25{,}48} \\ 2)\ \mathbf{238 : 35} = 2 \times 238 : 2 \times 35 = \ \ 476 : \ 70 = \ \mathbf{6{,}8} \end{array}\right\} \ldots (77а)$$

Інші способи спрощувати ділення дають здебільшого неточну величину частки; їх ми подамо в розділі про наближені обчислення.

Щодо величини помилки при діленні, її обчисляємо за допомогою квадратичних помилок діленика й дільника, згідно з правилами теорії помилок; за допомогою останньої можна довести, що взагалі точність частки не менша, ніж точність діленика й дільника.

Отже, щоб одержати частку до певного десяткового знаку, треба брати до того ж таки знаку й ділених та дільник.

§ 25. Степенювання й коренювання. Як відомо, степенювання різниться від звичайного множення тільки тим, що чинники один з одним рівні. На цій підставі при степенюванні можна цілком застосувати всі способи, пропоновані для спрощення множення.

Проте, залежно від деякіх деталів є й спеціяльні способи спрощувати степенювання, на підставі формул альґебри.

Ці способи такі:

1-й спосіб — замінити задані числа сумою або ріжницею двох інших чисел; даний спосіб ґрунтується на формулі:

$$a^2 = (x \pm y)^2 = x^2 + y^2 \pm 2\,xy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (78)$$

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & 52^2 = (50+2)^2 = 2\,500 + 4 + 200 = \mathbf{2\,704} \\ 2) & \mathbf{135}^2 = (130+5)^2 = 16\,900 + 25 + 1\,300 = \mathbf{18\,225} \\ 3) & \mathbf{79}^2 = (80-1)^2 = 6\,400 + 1 - 160 = \mathbf{6241} \\ 4) & \mathbf{147}^2 = (150-3)^2 = 22\,500 + 9 - 900 = \mathbf{21\,609} \end{array}\right\} \quad . \; . \; (78a)$$

2-й спосіб — замінити дане число добутком двох чинників за формулою

$$\left.\begin{array}{ll} & a^n = (xy)^n = x^n y^n \\ \text{або} & a^n = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (79)$$

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \mathbf{60}^2 = (6 \times 10)^2 = 6^2 \times 10^2 = 36 \times 100 = \mathbf{3\,600} \\ 2) & \mathbf{40}^3 = (4 \times 10)^3 = 4^3 \times 10^3 = 64 \times 1\,000 = \mathbf{64\,000} \\ 3) & \mathbf{33}^2 = (3 \times 11)^2 = 3^2 \times 11^2 = 9 \times 121 = \mathbf{1\,089} \\ 4) & \mathbf{45}^2 = \left(\dfrac{90}{2}\right)^2 = \dfrac{90^2}{2^2} = \dfrac{8\,100}{4} = \mathbf{2025} \end{array}\right\} \quad . \; . \; (79a)$$

3-й спосіб застосовують при піднесенні до n степеня однозначних чисел, якщо число можна замінити сумою двох менших, тобто, якщо $n = x + y$ за формулою:

$$a^n = a^{x+y} = a^x \times a^y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (80)$$

Наприклад:

$$3^5 = 3^3 \times 3^2 = 27 \times 9 = \mathbf{243} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (80a)$$

4-й спосіб — для квадратування чисел — заснований на формулі:

$$a^2 = (a + x)(a - x) + x^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (81)$$

і придатний тоді, коли $a + x$, $a - x$ та x^2 можна легко обчислити.

Наприклад:

$$\left.\begin{aligned}&1)\ \mathbf{5\,996^2} = (5\,996 + 4) \times (5\,996 - 4) + 4^2 = \\ &\quad = 6\,000 \times 5992 + 16 = 35\,952\,000 + 16 = \mathbf{35\,952\,016} \\ &2)\ \mathbf{803^2} = (803 + 3) \times (803 - 3) + 3^2 = \\ &\quad = 806 \times 800 + 9 = 644\,800 + 9 = \mathbf{644\,809}\end{aligned}\right\} \; . \; . \quad (81a)$$

5-й спосіб ґрунтується на застосуванні формули Ньютонового бінома, а саме:

$$\left.\begin{aligned}&1)\ A^n = (a + x)^n = a^n \left(1 + \frac{x}{a}\right)^n = a^n \left\{1 + \binom{n}{1}\frac{x}{a} + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \ldots\right\} \\ &\text{або} \\ &2)\ A^n = (a - x)^n = a^n \left(1 - \frac{x}{a}\right)^n = a^n \left\{1 - \binom{n}{1}\frac{x}{a} + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \binom{n}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \ldots\right\}\end{aligned}\right| \; . \; . \; . \quad (82)$$

Цей спосіб вельми придатний, коли a можна виразити числом вигляду 10^n.

Наприклад:

$$\left.\begin{aligned}&1)\ \mathbf{103^4} = (100 + 3)^4 = 100^4\left(1 + \frac{3}{100}\right)^4 = 100^4\left(1 + 4\,\frac{3}{100} + \right. \\ &\left. + 6\,\frac{9}{10\,000} + 4\,\frac{27}{1\,000\,000} + 1\,\frac{81}{100\,000\,000}\right) = 100\,000\,000 + \\ &\qquad + 12000000 + 540000 + 10800 + 81 = \mathbf{112\,550\,881} \\ &2)\ \mathbf{98^3} = (100 - 2)^3 = 100^3\left(1 - \frac{2}{100}\right)^3 = 100^3\left(1 - 3\,\frac{2}{100} + \right. \\ &\qquad \left. + 3\,\frac{4}{10\,000} - 1\,\frac{8}{1\,000\,000}\right) = 1\,000\,000 - \\ &\qquad - 60\,000 + 1\,200 - 8 = 1\,001\,200 - 60\,008 = \mathbf{941\,192}\end{aligned}\right\} \quad (82a)$$

До речі зауважмо, що при степенюванні числа описаними вище спрощеними способами дуже корисно вживати „російської рахівниці“.

Щодо коренювання, то його або можна замінити піднесенням до від'ємного степеня, або звести до розв'язання рівнання вигляду $x^n - a = 0$.

Проте, всі спрощені способи обчисляти корінь якого завгодно степеня здебільшого дають результати, точні тільки до певного знаку, тобто дають результати наближені, а тому способи добувати корінь ми подамо в розділі про наближені обчислення.

Про помилки треба сказати, що все, зазначене про помилки при множенні, цілком стосується й до степенювання. Зате, при коренюванні помилка, як це ми виведемо в розділі про наближені обчислення, набагато зменшується.

Розділ V. Безпосередні наближені обчислення

§ 26. Попередні загальні уваги, основні поняття й означення. Як ми не раз уже казали, при технічних обчисленнях доводиться мати діло з величинами або наближеними, або заокругленими, тобто величинами вочевидь неточними, що мають певний огріх проти точних величин. У такім разі, як ми теж уже зазначали, навіть уживаючи точних способів обчислення при всіх математичних обчислювальних діях, а особливо, наприклад, при множенні та степенюванні, можна одержати вочевидь неточний результат з дуже великою помилкою проти дійсної вартости його.

Крім того, у всіх технічних задачах всяку величину визначають звичайно на те, щоб здійснити її на ділі; але всякому відомо, що тут неминучі огріхи в виконанні і що ними й пояснюються, так звані, „допусти“, тобто границі огріхів, за яких виріб визнають годящим. Отже, у всіх технічних задачах цікавий не процес обчислення, а результат його; тому бажано одержати результат щонайпростіше й щонайшвидше, з найменшою витратою праці та часу, але з достатньою для практики точністю.

Отож, у технічних задачах часто немає потреби обчисляти за абсолютно точними формулами й з досконалою точністю; навпаки, можна часом користуватися з вочевидь неточних формул або способів, аби тільки можна було мати певність, що огріхи від цього не перевищать тих меж, які в данім разі припустимі без шкоди для того чи того виробу або конструкції.

Зі сказаного ясно, що для техніки наближені способи обчислення відограють першорядну ролю при вивченні методів технічних обчислень, а тому рекомендується, вивчаючи даний курс, особливу увагу звернути на оцей і на дальші розділи.

Користуючись, на підставі сказаного, з різних методів наближеного обчислення, безперечно треба вміти визначати ступінь огріху одержуваних результатів. Але перше, ніж перейти до того, як визначати огріхи, треба з'ясувати деякі основні поняття та означення.

Ріжницю між дійсною і наближеною вартістю якоїсь величини звуть *абсолютним огріхом*.

Але зазначення абсолютного огріху не характеризує вартости результату, тобто ступеня його точности. Далеко кращий показник точности результату є, так званий, *релятивний огріх*, тобто відношення абсолютного огріху до самої вартости величини.

Зрозуміла річ, що *релятивний огріх завжди виражається абстрактним числом, і чим останнє менше, тим з більшою точністю обчислено шукану величину.*

Тому *релятивний огріх*, який можна також виражати відсотками, і є *міра точности результату.*

Тим що результат всякого виміру чи обчислення виражають числом, то треба умовитися про спосіб писати ці числа так, щоб із самого нарису можна було бачити ступінь точности даного числа.

Як правило, ведеться писати число так, щоб у нім усі вартісні цифри, *крім останньої*, були вірні. Остання ж цифра може бути помилкова, але не більш, як на одиницю в той чи той бік від дійсної.

Залежно від заведеного правила, слід звернути увагу на спосіб писати великі числа. Нехай, наприклад, у числі 752 329 516 четверта (з лівого боку) цифра вже сумнівна; тоді ми маємо право писати це число так: $7\,523 . 10^5$. Коли б сумнівна була п'ята цифра, то ми могли б написати: $75\,233 . 10^4$, збільшивши останню цифру на одиницю тому, що перша відкинута цифра більша від 5.

Так само, щоб показати, що в числі 52, яке виражає розмір якоїсь величини, помилкова чи сумнівна лише шоста цифра, ми повинні написати це число так: 52,0000.

Ступінь точности результатів вимірів цілком залежить, як уже сказано, від методів виміряти й точности приладів і зумовлюється звичайно значенням та метою виміру. Для величезної більшости практичних технічних задач точність в $\frac{1}{1\,000}$ цілком достатня, отже, всі числа можна обчисляти з чотирма вартісними цифрами. На цій підставі, за визначеним вище способом писати числа, число 5 278 142 в технічній задачі практичного характеру можна написати так: $5\ 278 . 10^3$, а число 18 — так: 18,00.

Гляньмо тепер, який може бути огріх у результаті обчислення, якщо ми виконуватимемо аритметичні дії над наближеними числами.

Додавання. Коли ми додаватимемо числа $N_1, N_2, \ldots N_n$ з абсолютними огріхами $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ і з релятивними огріхами

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{N_1}; \ \varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{N_2}; \ldots \ldots \varepsilon_n = \frac{\delta_n}{N_n}, \ldots \ldots \quad (82)$$

то релятивний огріх їхньої суми ε міститиметься між найбільшим і найменшим огріхом ряду (82).

Справді, ясно, що

$$\varepsilon = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n}{N_1 + N_2 + \ldots + N_n} \ldots \ldots \quad (83)$$

Тим що всі дроби ряду (82) розглядаємо лише в абсолютній величині, то дріб (83), що являє собою відношення суми чисельників до суми знаменників дробів (82), очевидячки, міститься між найбільшим і найменшим із них.

Отже, вірних знаків у сумі буде стільки, скільки їх у всіх доданках. Тому на практиці, додаючи приблизно однакові величини (відношення найбільшої до найменшої менше від 10), пишуть їх усі з однаковим числом вірних знаків і стільки ж знаків одержують у сумі.

Коли ж доводиться додавати числа, хоча й визначені з однаковою точністю, але дуже відмінні величиною, то можна спростити дію, відкинувши деякі знаки.

Наприклад, додаючи числа 25, 76; 30, 88; 26, 05, де у всіх сумнівна лише цифра сотих частин, ми дістаємо в сумі число 82, 69, де теж сумнівна буде цифра сотих частин.

Варто зазначити, що тут може постати питання, чи не можуть огріхи взаємно компенсуватися, бо в одних доданків, особливо, коли їх багато, огріхи будуть додатні, а в других від'ємні. Це питання розв'язує теорія ймовірностей. Ми розглядали його в розділі про теорію помилок, отже, тут знову розглядати не будемо.

Коли ж нам дано для додавання числа, знайдені всі з неоднаковою точністю, наприклад: 5876,1; 25,827; 1,9025; 0,001 2492, то ясно, що переважний вплив на точність результату матиме найбільше число, і в сумі вірних знаків буде лише стільки, скільки їх у цього найбільшого числа; в данім разі сумнівна буде вже цифра десятих частин; щождо решти, то, хоча в інших числах і є вірні цифри сотих, ба навіть стотисячних частин, але їх доведеться додавати до вочевидь невірних цифр найбільшого числа. Отож, немає потреби робити додавання так:

$$\left.\begin{array}{r|l} 5876,1 & \\ 25,8 & 27 \\ 1,9 & 025 \\ 0,0 & 012492 \\ \hline 5903,8 & 307492 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$

бо всі цифри праворуч від прямовисної лінії уже сумнівні, а щоб зменшити працю й час, слід додавати отак:

$$\left.\begin{array}{r} 5876,1 \\ 25,8 \\ 1,9 \\ 0,0 \\ \hline 5903,8 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (84a)$$

тобто треба написати найбільший доданок і під ним підписувати решту, залишаючи в кожнім з них лише стільки знаків, скільки їх у найбільшім.

Слід також пам'ятати, що, відкидаючи цифри, треба останню з залишених збільшувати на одиницю, якщо перша відкинута цифра 5 або більше.

Множення та ділення. Коли маємо чинники N_1 та N_2 і їхні релятивні огріхи ε_1 та $\varepsilon_2 \ldots$, то дійсні величини цих чинників будуть:

$$N_1' = N_1\,(1 + \varepsilon_1) \text{ і } N_2' = N_2\,(1 + \varepsilon_2) \quad \ldots \quad (85)$$

отже, дійсна величина добутку дорівнюватиме:

$$N_1'N_2' = N_1N_2\,(1 + \varepsilon_1)\,(1 + \varepsilon_2) = N_1N_2\,[1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_1\varepsilon_2]. \quad (86)$$

Тим що ε_1 та ε_2 звичайно дуже малі дроби і в технічних задачах не перевищують $\frac{1}{1\,000}$, то, очевидячки, добуток $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ буде дуже малий проти їхньої суми $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, а тому на нього можна не зважати, тобто взяти дійсну величину добутку за рівну:

$$N_1'\,N_2' = N_1N_2\,(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = N_1\,N_2\,(1 + \varepsilon) \quad . \; . \quad (86a)$$

де

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (87)$$

Інакше сказавши, огріх результату при множенні двох даних величин дорівнює сумі їхніх огріхів.

Очевидна річ, що таке співвідношення між огріхами добутку і чинників поширюється на яке завгодно їх число, а тому можемо визначити, як засаду, що „релятивний огріх добутку дорівнює сумі релятивних огріхів чинників“.

Розглядаючи ділення чисел $\frac{N_1}{N_2}$, як множення числа N_1 на число $\frac{1}{N_2}$, можна бачити, що й при діленні релятивний огріх частки дорівнює сумі релятивних огріхів діленика та дільника.

Таке твердження здається трохи дивним, особливо, коли виконати дію ділення над дійсними величинами, вираженими через їхні наближені вартості й огріхи. Справді:

$$\frac{N_1'}{N_2'} = \frac{N_1(1+\varepsilon_1)}{N_2(1+\varepsilon_2)} = \frac{N_1}{N_2}[1+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)] \quad . \; . \; . \quad . \; (83)$$

звідки на перший погляд здається, що огріх частки дорівнює ріжниці огріхів діленика й дільника, і що ніби точність частки більша за точність діленика. Але треба пам'ятати, що знак $+$ у виразах $(1+\varepsilon_1)$ та $(1+\varepsilon_2)$ є знак додавання альґебричного, тобто, що ε_1 та ε_2 можуть бути і додатні й від'ємні, а тому коли ε_1 та ε_2 противні знаком, доведеться не віднімати їх одне від одного, а навсправжки додати.

Отож, коли огріх діленика дорівнює $^1/_2$%, а огріх дільника дорівнює 1%, то огріх частки взагалі не буде більший за $1^1/_2$%.

Степенювання й коренювання. Розглядаючи степенювання, як перемноження рівних величиною чинників, можна сказати, що „при степенюванні огріх помножається на показник степеня“.

Це легко довести, піднісши до степеня дійсну величину, виражену через її наближену вартість та огріх. Справді:

$$(N_1')^p = N_1^p\,(1+\varepsilon_1)^p = N_1^p\left(1+p\varepsilon_1+\frac{p\,(p-1)}{1\,.\,2}\varepsilon_1^2+\ldots\right) . \; (89)$$

звідки, лишаючи поза увагою малі величини вищих порядків проти ε_1, знайдемо

$$(N_1')^p = N_1^p\,(1+p\varepsilon_1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (89a)$$

тобто що

$$\varepsilon = p\varepsilon_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (90)$$

Тим що вираз (89) правдивий за всякого показника, і цілого й дробового, то з виразу (90) одночасно можна зробити висновок, що „при коренюванні треба огріх поділити на показник кореня“.

Отож, коли число знайдено з точністю до $1/2\%$, то результат квадратування його матиме огріх в 1%, а результат коренювання — огріх лише $1/4\%$. Звідси бачимо, що коренювання є едина дія, яка збільшує точність обчислень.

На підставі визначених у цім параграфі засад, можна встановити такий практичний спосіб знаходити квадрати й куби чисел за таблицями в довідниках, но виписуючи зайвих знаків.

Наприклад, треба обчислити $(957)^2$.

Тим що, за вживаним способом писати числа, остання цифра може бути помилкова на 1, то дійсна вартість шуканої величини лежить у межах між

$$\left.\begin{array}{l}(956)^2 = 913\,936 \\ (958)^2 = 917\,764\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

Звідси бачимо, що в результаті вже третя цифра може бути помилковою, а тому немає ніякої потреби виписувати всі дальші за нею цифри й треба просто замінити їх нулями. На цій підставі, користуючись із таблиць при наближених обчисленнях, маємо право написати, що

$$(957)^2 = 916 \,.\, 10^3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

а не 915 849, як це показано в таблицях.

Віднімання. Віднімання — найневигідніша дія при наближених обчисленнях, особливо, якщо одержувана ріжниця мала проти зменшеника від'ємника. Так, нехай треба знайти ріжницю між числами 31,689 і 30,945. Помилка в кожнім із цих чисел не перевищує одиниці в останній цифрі, тобто релятивний огріх їх у всякім разі не більший за $\frac{1}{30\,000}$. У різниці цих чисел, що дорівнює 0,743, остання цифра, очевидячки, може бути невірна на 2 одиниці. Отже, релятивний огріх може дорівнювати:

$$\frac{2}{744} \text{ або } \frac{1}{372} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (94)$$

Отож, виходить, що огріх результату більше, ніж у 80 разів, перевищує огріх даних величин.

У різних окремих випадках збільшення огріху результату віднімання може бути далеко більше, а тому „при наближених обчисленнях стараються перетворювати формулу так, щоб малі різниці двох величин обчисляти безпосередньо, без обчислення самих величин“.

Наприклад, щоб обчислити площу поперечного перекрою труби завгрубшки δ, з унутрішнім радіюсом труби, рівним R, далеко вигідніше знаходити цю площу не за формулою

$$\omega = \pi\,[(R+\delta)^2 - R\,] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (95)$$

а за формулою

$$\omega = 2\,\pi R\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (96)$$

На підставі сказаного, коли треба знайти ряд вартостей якоїсь величини, мало відмінних одна від одної, „визнають за найвигідніше обчисляти безпосередньо тільки одну з її вартостей, а для одержання решти — обчисляти самі поправки, які треба додати до знайденої вартости, щоб одержати решту". Такий спосіб зручний особливо тим, що ці поправки можна обчисляти з тим меншою релятивною точністю, що менші вони від самої величини.

Зведення правил наближених обчислень. На підставі всього сказаного вище можна визначити такі основні правила, що їх треба додержувати при наближених обчисленнях:

1) За міру точности результату править його релятивний огріх.

2) Точність обчислень треба пристосовувати до точности даних, а точність даних — до тої практичної мети, для якої потрібен результат обчислень.

3) При обчисленнях не треба виписувати зайвих знаків, що йдуть після першої сумнівної цифри.

4) При додаванні кількох чисел, дуже відмінних величиною, хоча й відомих з однаковою точністю, слід виписати спершу найбільше число і, підписуючи під ним інші, залишати в них після коми лише стільки знаків, скільки їх у найбільшім числі.

5) Малі ріжниці обчисляти безпосередньо, не обчисляючи самих чисел.

6) Щоб знайти ряд вартостей якоїсь величини, треба, відшукавши безпосередньо одну з її вартостей, для знаходження решти обчислити самі „поправки". Точність вартостей сталої може бути тим менша, що менша поправка проти величини.

7) Починаючи обчисляти, треба з самого початку визначити бажану точність результату і, додержуючись поданих вище правил, визначити точність даних. Потім треба скласти схему обчислень, пильнуючи того, щоб у діях над рядом чисел один одноманітний процес змінювати іншим, теж одноманітним, робленим над усіма числами ряду. Інакше сказавши, треба уникати того, щоб одна якась дія йшла навперемінки з іншими, наприклад, додавання, далі множення, потім знову додавання, потім степенювання, додавання й т. д.

На пояснення п. 7 подамо приклади:

Приклад 1. З якою точністю треба виготувати руби кубічного бака для води, місткістю в 1 *куб. м*, якщо допускний огріх в об'ємі — в межах до 3 *л*?

3 літри $=$ 3 *куб. дм* — такий абсолютний огріх; релятивний огріх дорівнює $\frac{3}{1\,000}$; його одержимо, підносячи до куба огріхи в довжині руба куба. Отже, огріх у довжині боку не повинен перевищувати $\frac{1}{1000}$. Тим що довжина ребра мусить дорівнювати 1 *м*, то, значить, абсолютний огріх у вимірі довжини руба кубічного бака не повинен перевищувати $\frac{1}{1000} \cdot 1\ м = 1\ мм$.

Приклад 2. Яка буде помилка в визначенні довжини обводу кола діяметром 2 *см*, якщо число $\pi = 3{,}14$, а огріх виміру діяметра не більший за $\frac{1}{10}$ *мм?*

Огріх в обчисленні π не перевищує $\frac{1}{300}$. Релятивний огріх у величині діяметра не більший за $\frac{0{,}1}{20} = \frac{1}{200}$. Користуючись із формули $S = \pi D$, ми, очевидячки, при обчисленні матимемо в остаточнім результаті число з огріхом, меншим від $\frac{1}{300} + \frac{1}{200} = \frac{5}{600} = \frac{1}{120}$, тобто заокруглено 0,85%.

Зазначім іще, що визначати огріх наближених обчислень можна також, користуючись із формули II, даної в частині II, і з виведених на основі її частинних формул III[1]).

Зауважмо ще, що, як бачимо з наведених двох прикладів, при наближених обчисленнях доводиться звичайно мати діло з двома питаннями:

1. Знавши помилку заданих величин, визначити огріх результату виконаного з ними обчислення.

2. На підставі заданої допускної помилки остаточного результату визначити допускну помилку в тих величинах, обчисленням з якими цей результат одержуємо.

§ 27. Наближене множення. Виконуючи наближені обчислення, можна цілком застосовувати всі спрощені способи точних обчислень, описані в попереднім IV розділі. Проте, залежно від характеру й мети цих наближених обчислень, практика виробила деякі ще більші спрощення.

Не зайво буде, до речі, сказати, що способи наближених обчислень зайшли в практику одночасно з тим, як відкрито

---

[1]) Див. частина II, розд. III.

способи виконувати обчислення над десятковими дробами. Йост Бюрґі (швайцарець, 1552—1632), один із винахідників логаритмів, що мав суттевий вплив на розвиток користування десятковими дробами, уже 1592 року робив наближені обчислення. Незабаром після нього, на початку XVII століття, цим способом широко користувався Кеплер; він і поклав деякі основи теорії наближених обчислень[1]). Дальшого століття цей спосіб обчисляти набагато розвинуто й практично досліджено для того, щоб виробити правила користування ним та дійти найбільшої достатньої для практики точности його. Нині є вже в математичній літературі капітальні праці про наближені обчислення; деякі з тих праць зазначено в доданім списку.

Переходивши тепер до опису самих способів наближених обчислень, зауважмо, що при додаванні й відніманні наближених величин цілком досить уживати спрощених способів виконання цих дій при точних обчисленнях, описаних у § 22 IV розділу. Якщо взяти ще до уваги вказівки про додавання й віднімання наближених величин, подані в попереднім § 26 при викладі загальних правил, як виконувати наближені обчислення, то можна вважати питання про наближене додавання й віднімання за вичерпане сповна, тим паче, що ці дії особливої ролі в наближених обчисленнях не відограють.

Далеко більшу вагу в цій царині мають такі дії, як множення, ділення, степенювання та коренювання, бо ці математичні дії складні й результат їх дуже залежить від помилок чисел, над якими дії виконують.

1-й спосіб — спосіб зворотного порядку цифр множника. Найпошореніший і найпридатніший для практики виконання наближеного множення є вже вищеописаний спосіб зворотного порядку цифр множника[2]).

Спосіб цей, що його основна ідея належить W. Oughtred (1574—1660), особливо надається при виконанні дій над числами з великим числом цифр.

Нехай, наприклад, треба знайти добуток чисел 78, 9657 × × 62, 8598 так, щоб перші три цифри добутку були вірні.

Робимо для цього таке. Беремо множеник, закреслюємо в нім усі зайві цифри й підписуємо під ним зворотним порядком від правої руки до лівої цифри множника, починаючи з першої й відкидаючи всі зайві цифри.

При відкиданні цифр керуємося таким правилом: якщо добуток від перших цифр множеника й множника дає одну

---

[1]) Кеплер у листі до Філіппа, ляндграфа Гессенського, в грудні 1623 р. пише, що він ужив спрощеного множення.

[2]) Викладаючи методи, ми облишаємо докази їх правильности, що належать до обсягу математики.

лише цифру, то в множенику слід узяти *на дві цифри більше*, ніж треба; якщо дві цифри — то на одну більше.

Тим що від множення перших цифр заданих чисел (7×6) одержимо дві цифри, то беремо в множенику лише *на одну цифру більше*, ніж треба, викреслюємо всі інші й підписуємо множник під цими цифрами зворотним порядком, *почавши від правого краю*. Для 9 й 8 вже місця не буде і ми їх не пишемо. Таким способом одержуємо:

$$\left.\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 78{,}9657 \\ 58{,}26 \end{array} \\ \hline 47\,376 \\ 1\,578 \\ 624 \\ 35 \\ \hline 49\,613 \text{ або } 4\,960 \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (97)$$

Помножаємо множеник на 6, як звичайно, потім перекреслюємо цифри 6 і 6, бо вони нам більш не потр бні; далі множимо 789 на 2 й підписуємо добуток під цифрами першого одержаного числа, починаючи від правого краю; знову перекреслюємо цифри 9 і 2 й помножаємо 78 на 8, підписуючи результат під цифрами перших двох добутків, почавши від правого краю; перекресливши 8 і 8, множимо 7 на 5, підписуємо відповідний добуток і додаємо один до одного всі частинні добутки, відкидаючи всі цифри, почавши з четвертої.

Коли б треба було знайти добуток тих же цифр із точністю до сотих частин включно, то треба було б робити так:

$$\left.\begin{array}{r} 789{,}6570 \\ 89582{,}6 \\ \hline 47\,379\,420 \\ 1\,579\,314 \\ 631\,720 \\ 39\,480 \\ 7\,101 \\ 624 \\ \hline 4963{,}7659 \text{ або } 4963{,}77 \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (98)$$

тобто насамперед перетворити *множник* у *десятковий дріб*, де *ціле* складається тільки з *одної* цифри:

$$6{,}28598,$$

а тому, очевидячки, щоб добуток не змінився, множеник треба перетворити в

$$789{,}657.$$

Щоб дістати бажані результати, беремо в множенику десяткових знаків *на два більше*, ніж треба, тобто

$$789{,}6570$$

і, підписавши під цим числом цифри множника зворотним порядком, одержуємо таким же способом, як і вище:

4963,77.

Як такий спосіб зменшує працю — а це надзвичайно багато важить при практичних наближених обчисленнях,— побачимо, порівнявши подані вище приклади з виконанням множення звичайним способом:

$$
\begin{array}{r}
\times \begin{array}{r} 78,9657 \\ 62,8598 \end{array} \\
\hline
6317256 \\
7106913 \\
3948285 \\
6317256 \\
1679314 \\
4737942 \\
\hline
4963,76810886
\end{array}
$$

На практиці, застосовуючи описаний спосіб, дуже корисно вживати рухомого аркуша з написаним на нім зворотним порядком множником. Тоді набагато зменшується кількість виписуваних цифр і прискорюється виконання обчислення.

Застосовуючи це спрощення до розгляданого прикладу, матимемо:

$\boxed{58,26}$	$\boxed{58,26}$	$\boxed{58,26}$	$\boxed{58,26}$	
78,96	78,96	78,96	78,96	. . . . (97)
3	13	6,13	4961,3	
15	14	7		

2-й спосіб — відсоткової зміни множника (спосіб проф. А. Д. Романова). Цей спосіб запропонував і опрацював проф. інж. шляхів А. Д. Романов. Він дає іноді цілком точні результати, саме, коли відсоткові зміни в числах зовсім однакові; якщо ж зміни не однакові, то огріх буває тим менший, що менша відсоткова зміна.

Можна, проте, робити зміни й досить великі, у межах, звичайна річ, залежних від бажаного ступеня точности результату.

Для практичної мети часто буває досить знати результат з точністю до 1%.

Спосіб відсоткової зміни визначається тим, що він дуже простий і натуральний. Досить проробити ним кілька прикладів, щоб цілком його засвоїти й пересвідчитися надзвичайної його гнучкости, бо він дає змогу легко одержати результати бажаного ступеня точности. Коли є деяка навичка користуватися з цього способу, він часто набагато зменшує працю та заощаджує час при обчисленнях. Суть способу така.

Нехай треба перемножити кілька великих чисел, наприклад: A, B, C. Замінивши їх іншими M, N, P вигляду $\xi\, 10^k$, де ξ одна з цифр від 1 до 9 включно, а k — число нулів після ξ, такими, що

$$\left.\begin{aligned} M &= A + M\frac{m}{100} \\ N &= B + N\frac{n}{100} \\ P &= C + P\frac{p}{100} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (99)$$

одержимо:

$$ABC = MNP\left(1 - \frac{m+n+p}{100} + \frac{nm+mp+np}{100^2} - \frac{mnp}{100^3}\right) \ldots (100)$$

Позначаючи для короткости добуток MNP через T та лишаючи без уваги 3-й і 4-й члени в дужках (100), ми можемо сказати, що шуканий добуток дорівнює приблизно:

$$ABC \approx T - \frac{T}{100}(m+n+p) \quad \ldots\ldots \quad (101)$$

де $\frac{T}{100}(m+n+p)$ — поправка, яку легко обчислити, б о в і д с о т к о в і з м і н и б е р е м о в і д н о с н о н о в и х в е л и ч и н.

Якщо абсолютна величина виразу $mn\left(1 - \frac{p}{100}\right) + p(m+n$ не більша від 100 і навіть не більша від $99 - (m+n+p)$, то огріх буде не більший від 1%.

Якщо ж зміни роблять тільки в двох чинниках і до того такі, що абсолютна величина їхнього добутку не більша за $10 - 0{,}1\,(m+n)$, то огріх буде не більший від $0{,}1\%$.

Для прикладу знайдім добуток тих самих чисел, що й вище, при чім над змінюваним чинником (або під ним) пишемо тільки прибавки (доповнення), а того, що відкидаємо, не пишемо зовсім:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{1{,}0343}{78{,}9657} \times 62{,}8598 = \begin{array}{ll} \text{Огріх} +1{,}3\% - 4{,}8\% & -3{,}5\% \\ 80 \times 60 = & 4\,800 \\ \text{Поправка} & +\,168 \\ \hline \text{Результат} \;\ldots & 4\,968 \end{array} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (97б)$$

точніший результат, як ми бачили, був 4963,8, отже, огріх дорівнює

$$\frac{(4\,968 - 4\,963{,}8)\,100}{4963{,}8} < 0{,}1\%.$$

3. Дальші способи наближеного множення засновані на застосуванні відомої з альґебри формули про множення многочленів, а саме, на формулі

$$AB = (a \pm x)\,(b \pm y) = ab \pm ay \pm bx \pm xy \quad \ldots \quad (102)$$

Якщо x та y дуже малі, то можна не вважати на величину їхнього добутку xy, і тоді для наближеного добутку маємо формулу

$$AB \approx ab \pm ay \pm bx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (102a)$$

Цей спосіб особливо корисний і зручний, коли числа A та B близькі до 10^n або його кратних.

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\; \mathbf{1{,}0073} \times \mathbf{1{,}0021} = (1 + 0{,}0073) \times (1 + 0{,}0021) \approx \\ \quad \approx 1 + 0{,}0073 + 0{,}0021 \approx \mathbf{1{,}0094} \\ 2)\; \mathbf{1{,}004} \times \mathbf{9{,}98} = (1 + 0{,}004) \times (10 - 0{,}2) \approx \\ \quad \approx 10 + 0{,}04 - 0{,}02 \approx \mathbf{10{,}02} \end{array}\right\} \; . \; . \; (103)$$

Помилка результату в першім випадку $0{,}007 \times 0{,}002 = 0{,}000014$, а в другом $0{,}004 \times 0{,}02 = 0{,}0008$.

З цього способу зручно користуватися й тоді, коли чинників, близьких до одиниці, більше, ніж 2.

Так, коли треба знайти $abc...$ і тут

$$a = 1 \pm x; \; b = 1 \pm y; \; c = 1 \pm z \cdot \cdot \cdot$$

то

$$\cdot \cdot \cdot abc \cdot \cdot \cdot = (1 \pm x)\,(1 \pm y)\,(1 \pm z) \cdot \; \cdot \approx 1 \pm x \pm y \pm z \pm . \; (104)$$

Наприклад:

$$\begin{array}{l} \mathbf{1{,}0063} \times \mathbf{0{,}9978} \times \mathbf{0{,}9962} = \\ = (1 + 0{,}0063) \times (1 - 0{,}002) \times (1 - 0{,}0038) \approx \\ \approx 1 + 0{,}0063 - 0{,}0022 - 0{,}0038 \approx \mathbf{1{,}0003} \quad . \; . \; . \quad (104a) \end{array}$$

Слід сказати, що при наближенім множенні, так само, як і при інших наближених обчисленнях, не можна перевіряти результату однозначною сумою цифр чисел, бо результат добутку у всякім разі не дорівнює точно дійсному добуткові заданих чисел.

§ 28. Наближене ділення. 1-й спосіб. Щоб одержати наближену величину частки від ділення двох чисел одного на одне, вживають насамперед, так званого, способу скороченого ділення.

Спосіб цей такий. Якщо треба знайти частку з n точними цифрами, тобто таку, де сумнівна $n+1$ цифра, то, відкидаючи в числах коми, що відокремлюють цілі від дробів, якщо дроби є, виписують діленик і залишають у нім, починаючи з лівого боку, $n+1$ вартісну цифру, коли перша цифра дільника менша від першої цифри діленика, або $n+2$ вартісних цифр, коли перша цифра дільника більша за першу цифру діленика. Далі виписують дільник і залишають у нім стільки цифр, щоб від ділення наближено взятого діленика з $n+2$ вартісними цифрами вийшла однозначна частка в межах від 1 до 9 включно. Усі інші цифри і в діленику, і в дільнику відкидають.

Поділивши спрощений діленик на спрощений дільник, одержують першу цифру частки.

Знайшовши остачу від цього ділення, закреслюють останню цифру дільника й ділять першу остачу на вдруге спрощений дільник. Одержують другу цифру частки.

Знаходять остачу від цього другого ділення, знову закреслюють іще одну цифру дільника й знову ділять другу остачу на цей ще раз спрощений дільник. І т. д. до кінця.

Частка матиме задане число вірних знаків.

Ми не подаватимемо тут доказів правильнос и цього способу,—їх викладають у повних курсах наближених обчислень,— а покажемо вживання даного способу на цих двох окремих прикладах, де зіставлено спрощене ділення з повним.

1-й приклад: знайти частку від ділення числа 5478,567865 на 34,7856 з трьома точними й четвертою сумнівною цифрою.

```
        Повне                            Спрощене
 54783678,6  | 347856              54785  6786 | 34785
 347856      |--------             34785        |------
 -------       157,50              -----          1575
 2000007                           20000
 1739280                           17390                 . . . (105)
 -------                           -----
  2609278                           2610
  2434992                           2429
  -------                           ----
   1742866                           181
   1739 80                           170
   -------                           ---
      3586                            11
```

Тим що діленик, коли відкинуто кому, збільшився в 100000 разів, а дільник в 10000, то частку треба зменшити в 10 разів, тобто вона дорівнюватиме 157,5.

2-й приклад. Знайти частку від ділення числа 5 478 567 869 на 847 856 з трьома точними й четвертою сумнівною цифрою.

```
 | 847856
 --------
 6461,68
 5478567865                    547850  7865 | 84785
 5087136                       508710       |------
 -------                       ------         6461
  3914318                       39146
  3391424                       33912
  -------                       -----
   5229946                       5233
   5087136                       5082                 . . . . (106)
   -------                       ----
    1428105                       152
     847856                        84
    -------                       ---
     5802490                       68
     5087136
     -------
      7153540
```

З цих прикладів ясно бачимо, який правильний цей спосіб, і як разом із тим швидше й легше приводить він до мети.

2-й спосіб. Спосіб Романова або відсоткової зміни діленика й дільника.

Якщо число A треба поділити на велике число K, то замість K можна взяти інше число R вигляду $\xi\, 10^k$, де ξ або 1, або 2, або 5 таке, що

$$R = K + R\frac{r}{100}.$$

Тоді

$$\frac{A}{K} = \frac{A}{R} \cdot \frac{1}{1-\frac{r}{100}} = T\left(1 + \frac{r}{100} + \frac{r^2}{100} + \cdots\right) \quad \ldots \quad (107)$$

де $T = \frac{A}{R}$.

Наближена вартість частки

$$\frac{A}{K} \approx T + \frac{T}{100}r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

різнитиметься від точної величини не більш, ніж на $1^0/_0$, якщо абсолютна вартість r не вища від 10 (десятьох).

Коли зміна діленика й дільника одночасна й однакова, якщо не величиною, то бодай знаками, можна допустити й більшу зміну в числах дробу

$$\frac{A}{K} \approx \frac{M}{R} \cdot \frac{1-\frac{m}{100}}{1-\frac{r}{100}} \approx S\left(1 - \frac{m}{100}\right)\left(1 + \frac{r}{100} + \frac{r^2}{100^2} + \cdots\right) \approx$$

$$\approx S - \frac{s}{100}\left(m - r + \frac{mr - r^2}{100} + \frac{mr^2 - r^3}{100^2} + \cdots\right) \quad \ldots \quad (109)$$

де $S = \frac{M}{R}$

Наближена величина частки

$$S - \frac{s}{100}(m - r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (110)$$

буде визначена з огріхом не більшим як $1^0/_0$, коли абсолютна вартість $(m-r)r$ не більша від $100 - m$.

Нехай, наприклад, треба поділити 277 992 на 3 564 з точністю до одного відсотка.

Шоб звести дільник до вигляду $\xi\, 10^k$, де ξ або 1, або 2, або 5, можна, приміром, помножити й діленик, і дільник на $1^1/_2$, тобто додати до цих чисел по половині їх самих.

Одержуємо:

$$\left.\begin{array}{r} 277\,992 : 3\,564 \\ 138\,996 : 1\,782 \\ \text{тобто } 416\,988 : 5\,346 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad (111)$$

Звівши чисельник до вигляду 4.10^5, а знаменник до вигляду 5.10^1 за формулою (110), маємо:

$$\left.\begin{array}{l} \phantom{\frac{416\,988}{5346}=}\;-4{,}2\% + 2{,}7\% \\ \dfrac{416\,988}{5346}=\dfrac{4.10^5}{5.10^3}=80 \\ \phantom{\frac{416\,988}{5346}=\frac{4.10^5}{5.10^3}}\;\;-2{,}16 \text{ (поправка)} \\ \phantom{\frac{416\,988}{5346}=}\;-6{,}9\%\quad\;\; 77{,}84 \text{ (результат)} \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (112)$$

Можна було б також помножити діленик і дільник на 3, тоді за формулою (100) ми одержали б:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{833\,976}{10\,692}=\begin{array}{l} +7\% \quad \text{огріх} \\ \;83{,}3976 \\ -5{,}84 \\ \hline \;77{,}56 \text{ результат} \end{array} \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; (112а)$$

а точна величина частки дорівнює 78.

Не зайво додати, що, спрощуючи дроби звичайним способом, з м е н ш у ю т ь однаковою мірою чисельник і знаменник, ділячи їх на те саме число; в описанім способі майже завжди збільшують чисельник і знаменник, щоб наблизити їх до чисел, які можна при малій в і д с о т к о в і й з м і н і замінити іншими числами вигляду $\xi\, 10^k$, на тій підставі, що, чим менша відсоткова зміна, тим ближчий результат до дійсної величини.

3-й с п о с і б наближеного ділення заснований на вживанні альґебричних формул; з нього користуються тоді, коли числа, що над ними треба робити обчислення, близькі до 1, або до 10^n.

За допомогою закону бінома можна довести, що

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{a}}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^3}{a^3}+\dots\right)=$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\dots\dots\dots \quad (113)$$

За допомогою цієї формули дуже легко наближено знайти, наприклад, вартість дробу $\frac{1}{104}$. Справді, за формулою (113) маємо:

$$\left.\frac{1}{104}=\frac{1}{100+4}=\frac{1}{100}-\frac{4}{100^2}+\frac{4^2}{100^3}-\frac{4^3}{100^4}+\frac{4^4}{100^5}-\dots\right\} . \; (113а)$$

Таке розкладання можна робити з якою завгодно точністю. Самі обчислення найкраще виконувати так:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}01 \\ -\;0{,}0004 \\ \hline 0{,}0096 \\ +\qquad\;\; 16 \\ \hline 0{,}009616 \\ -\qquad\quad 64 \\ \hline 0{,}00961536 \\ +\qquad\qquad 256 \\ \hline 0{,}0096153856 \end{array}\text{ і т. д.}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (113б)$$

Залежно від заданої точности треба тільки зупинитися на відповіднім послідовнім додаванні або відніманні.

Користуючись також із закону бінома, можна знайти вартість дробу для випадку

$$\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^3}{a^4}+\ \dots\dots\dots \quad (114)$$

Справді, за законом бінома

$$(1-z)^n=1-\binom{n}{1}z+\binom{n}{2}z^2 \dots\dots\dots \quad (115)$$

При $n=-1$ одержимо

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\dots$$

Користуючись із виразу закону бінома (115), коли z дуже мале, ми з достатнім ступенем точности можемо зупинитися при розкладанні на другім члені й сказати, що

$$(1\pm z)^n\approx 1\pm nz \dots\dots\dots \quad (116)$$

Якщо треба якесь число a поділити на близьке до нього число b, тобто $b=a\pm x$, де x дуже мале число, то можемо написати:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{a\pm x}=\frac{1}{1\pm\frac{x}{a}}=\left(1\pm\frac{x}{a}\right)^{-1} \dots\dots \quad (117)$$

Якщо x дуже мале, то за формулою (116) можна взяти

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{a\pm x}\approx 1\mp\frac{x}{a}; \dots\dots\dots \quad (118)$$

помилку при цім, на підставі рівнання (115), можна вважати заокруглено рівною $\left[\frac{x}{a}\right]^2$.

Покажім уживання цього способу на прикладі:

$$\frac{40}{40{,}12}=\frac{40}{40+0{,}12}\approx 1-\frac{0{,}12}{40}=1-0{,}003=0{,}997\ . \quad (118a)$$

Якщо дільник близький до одиниці, то, переписавши його під виглядом $1\pm x$, за формулою (116), одержимо:

$$\frac{a}{1\pm x}=(1\pm x)^{-1}\approx a\ (1\mp x) \dots\dots \quad (119)$$

Користуючись із цієї формули, ми можемо знайти вартість таких дробів:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \frac{10}{1,0068}=\frac{10}{1+0,0068}\approx 10\,(1-0,0063)=10-0,068=9,932 \\ &2)\ \frac{100}{0,9926}=\frac{100}{1-0,0074}\approx 100\ (1+0,0074)=100,74 \end{aligned}\right\} \quad (119а)$$

З рівнання (119) при $a=1$ дістанемо таку приблизно формулу:

$$\frac{1}{1\pm x}\approx 1\mp x \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (120)$$

Уживаючи її, можна розв'язати отакі приклади:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \frac{1}{1,008}=\frac{1}{1+0,08}\approx 1-0,008=0,992 \\ &2)\ \frac{1}{0,9957}=\frac{1}{1-0,0043}\approx 1+0,0043=1,0043 \end{aligned}\right\} . \quad (120а)$$

Нарешті, коли a та $в$ обидва близькі до одиниці, то наближено знайти частку від ділення їх одного на одне можна за формулою:

$$\frac{a}{в}=\frac{1\pm x}{1\pm y}\approx (1\mp x)\ (1\pm y)\approx 1\mp x\pm y \ . \quad (121)$$

Наприклад:

$$\frac{0,9962}{0,0045}=\frac{1-0,0038}{1+0,0045}\approx 1-0,0038-0,0045=0,9917 \ (121а)$$

§ 29. Наближене степенювання й коренювання. Розв'язуючи задачу про наближену вартість степеня числа або кореня його, користуються звичайно зі способів, описаних у розділі про точні обчислення, а, головно, з формули Ньютонового бінома.

Зокрема, коли доводиться мати діло з числами, близькими до одиниці вигляду $a=1\pm x$, то за допомогою цього закону дістаємо:

$$a^n=(1\pm x)^n=1\pm\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2\pm\binom{n}{3}x^3+ \ . \ (122)$$

При дуже малім x можна в розкладі (122) не зважати на всі члени, починаючи з третього, тобто вважати

$$a^n=(1\pm x)^n\approx 1\pm nx \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (123)$$

при чім помилка заокруглення дорівнюватиме:

$$\frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

За допомогою цієї формули (123) ми можемо розв'язати такі приклади:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 1{,}007^2 = (1+0{,}007) \approx 1 + 2\times 0{,}007 = 1{,}014 \\ 2)\ 0{,}9991^3 = (1-0{,}0009)^3 \approx 1 - 3\times 0{,}0009 = 0{,}9973 \end{array}\right\} \ldots (123a)$$

Обчисляючи вартість чисел вигляду $\frac{1}{(1\pm x)^n}$, користуються з оцієї наближеної формули:

$$\frac{1}{(1\pm x)^n} \approx \frac{1}{1\pm nx} \approx 1 \mp nx \; . \; . \; . \; . \; . \quad (124)$$

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \frac{1}{1{,}0075^2} = \frac{1}{(1+0{,}0075)^2} \approx 1 - 2\times 0{,}0075 = \\ \qquad = 1 - 0{,}0015 = 0{,}985 \\ 2)\ \frac{1}{0{,}9982^3} = \frac{1}{(1-0{,}0018)^3} = 1 + 3\times 0{,}0018 = 1{,}0054 \end{array}\right\} . \quad (124a)$$

Розглядаючи коренювання, як піднесення до дробового степеня, можна вживати всіх наведених вище формул і для наближеного обчислення кореня.

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \sqrt{1{,}00068} = (1+0{,}00068)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\times 0{,}00068 = 1{,}00034 \\ 2.\ \sqrt[3]{0{,}9874} = (1-0{,}0126)^{\frac{1}{3}} \approx 1 - \frac{1}{3} - 0{,}0126 = 0{,}9958 \\ 3.\ \frac{1}{\sqrt{1{,}058}} = \frac{1}{(1+0{,}058)^{\frac{1}{2}}} \approx 1 - \frac{1}{2}\times 0{,}058 = 0{,}971 \end{array}\right\} \quad (125)$$

Наближене коренювання можна також звести до наближеного розв'язання рівняння.

Справді, якщо треба знайти

$$x = \sqrt[n]{a} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (126)$$

то цей вираз можна переписати під виглядом

$$x^n - a = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (127)$$

і знайти вартість x, як наближену вартість кореня цього (127) рівняння. Робити це треба так:

Нехай x_0 є наближена вартість кореня x даного рівнання (127), при чім вона різниться від дійсної на величину Δx, тобто

$$x = x + \Delta x\text{[1]}) \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (128)$$

Підставляючи вартість x за формулою (128) до рівнання (127), одержимо:

$$(x_0 + \Delta x)^n - a = 0 \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (129)$$

Застосовуючи до цього рівнання (129) розклад за Тайльоровим рядком, що взагалі пишеться так:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{\Delta x}{1} f'(x_0) + \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} f''(x_0) + \; . \; . \; . \; (130)$$

і лишаючи без уваги в рівності (130) усі члени, почавши з третього, бо Δx мале, ми перепишемо рівнання (129) так:

$$(x_0^n - a) + n x_0^{n-1} \Delta x \; 0, \approx \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (131)$$

звідки знаходимо

$$\Delta x \approx - \frac{x_0^n - a}{x n_0^{n-1}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (132)$$

Зробивши цю поправку (132) у вартості кореня x_0 та підставивши виправлену його величину до рівнання (127), повторюємо щойно описане обчислення. Таким способом, послідовно обчисляючи поправку, можна визначити вартість кореня з якою завгодно точністю.

Застосуймо цей спосіб, званий способом Ньютона, до знаходження вартости $X = \sqrt[5]{5}$, тобто до розв'язання рівнання $X^5 - 5 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \mathbf{X_1 = 1};\quad \Delta X = -\dfrac{1-5}{5 \times 1} = +0{,}8;\ X = X_0 + \Delta X = \\
\qquad = 1 + 0{,}8 = \mathbf{1{,}8} \\
2)\ \mathbf{X_0 = 1{,}8};\ \Delta X = -\dfrac{18{,}9-5}{5 \times 10{,}5} = -0{,}25;\ X = X_0 + \Delta X = \\
\qquad = 1{,}8 - 0{,}25 = \mathbf{1{,}55} \\
3)\ \mathbf{X_0 = 1{,}55};\ \Delta X = -\dfrac{8{,}95-5}{5 \times 5{,}77} = -0{,}13;\ X = X_0 + \Delta X = \\
\qquad = 1{,}55 - 0{,}13 = \mathbf{1{,}42} \\
4)\ \mathbf{X_0 = 1{,}42};\ \Delta X = -\dfrac{5{,}774-5}{5 \times 4{,}07} = -0{,}04;\ X = X_0 + \Delta X = \\
\qquad = 1{,}42 - 0{,}04 = \mathbf{1{,}38} \\
5)\ \mathbf{X_0 = 1{,}38};\ \Delta X = -\dfrac{5{,}005-5}{5 \times 3{,}63} = -0{,}0003;\ XX =_0 + \Delta X = \\
\qquad = 1{,}38 - 0{,}0003 = \mathbf{1{,}3797}
\end{array}\right\} \quad (133)$$

---

[1]) Знак плюс визначає додавання альгебричне.

Повторюючи довільне число разів таке обчислення, можна знайти вартість кореня з якою завгодно точністю.

§ 30. Загальні уваги про наближене розв'язування рівнань. Користуючись із щойно описаного способу Ньютона, можна наближено розв'язати рівнання якого завгодно степеня з одною невідомою вигляду

$$f(x)=0.$$

Хід розв'язання цілком аналогічний до оце описаного для знаходження наближеної вартости кореня.

Беруть довільну підхожу вартість для кореня рівнання X_0 і, на підставі Тайльорового закону, дістають на основі формули (130) поправку до цієї вартости кореня

$$\Delta X=\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (134)$$

Увівши цю поправку та знайшовши нову наближену вартість кореня рівнання, вводять її до заданого рівнання й обчисляють нову поправку. Так роблять, доки не одержать вартости кореня з якою завгодно потрібною точністю.

Зауважмо, до речі, що первісну наближену вартість корисно визначати якимось допоміжним способом, наприклад, графічно; про це ми скажемо в відповіднім місці курсу.

Для прикладу розв'яжім рівнання:

$$4\cos\varphi+3\sin\varphi-2=0 \qquad (135)$$

Графічно можна знайти, що наближена вартість буде десь близько 102^0. Щоб визначити її з точністю до мінути, застосуймо Ньютонів спосіб.

Тим що

$$f(\varphi)=4\cos\varphi+3\sin\varphi, \qquad (136)$$

то

$$f'(\varphi)=-4\sin\varphi+3\cos\varphi \qquad (137)$$

Візьмім

$$\varphi=\varphi_0=102^0.$$

Тоді за (136 і 137)

$$f(\varphi_0)=+0{,}103 \qquad (136a)$$

а

$$f'(\varphi_0)=-4{,}54, \qquad (137a)$$

а тому за формулою (134)

$$\Delta\varphi=-\frac{f(\varphi_0)}{f'(\varphi_0)}=+\frac{0{,}103}{4{,}54}=+0{,}023 \qquad (138)$$

Цю величину ми одержали в дугових мірах; щоб обернути їх на градуси, треба (138) помножити на

$$\frac{180^0}{\pi} = 57{,}3^0 = 3438'.$$

Тоді одержимо:

$$\Delta\varphi = 0{,}023 \times 3438 = 78' = 1^0 18', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138a)$$

а, значить,

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi = 102^0 + 1^0 18' = 103^0 18' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139)$$

При новій вартості φ_0 одержимо:

$$f(\varphi_0) = -0{,}0007, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136б)$$

а

$$f'(\varphi_0) = -4{,}58, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (137б)$$

а, значить,

$$\Delta\varphi = -\frac{0{,}0007}{4{,}58} \times 3438 = -0{,}5', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138б)$$

тобто, кут дорівнює

$$\varphi = 103^0 18' - 0{,}5' = 103^0 17{,}5' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139a)$$

Якщо треба розв'язати систему кількох рівнянь, наприклад, трьох із трьома невідомими

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \\ f_3(x,y,z) = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

то, робивши так само, як і при розв'язанні рівнань з одним невідомим, можна, взявши наближені вартості x_0, y_0, z, визначити поправки $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, як корені трьох лінійних рівнань, одержаних на підставі Тайльорового закону (130).

Кількість обчислень тут така велика, що вигідніше буває шукати корені рівнань якимось найлегшим і найпростішим способом.

Такі якраз способи дають обчислення, так звані, посередні та графічні; описуючи їх, ми й покажемо, як застосовувати їх для цієї мети. Тому, щоб не обтяжати курсу зайвим матеріялом, ми обмежмося тут поданими вже загальними увагами про наближений безпосередній спосіб розв'язувати систему рівнянь з кількома невідомими.

Теорія наближених обчислень має багато ще інших, дуже цікавих з математичного погляду, способів наближено знаходити різні величини. Та тим, що вони не завжди практичні й часто потребують великих викладок, а наша мета дати в руки техників найлегші, найпростіші, ужитні в практиці технічні обчислення,— то, відсилаючи тих, хто цікавиться, до відповідної літератури, зазначеної в додатках, ми обмежмося вже зробленим ознайомленням читачів із безпосередніми обчисленнями й перейдемо до найпоширеніших і найпридатніших для практики обчислень посередніх.

Розділ VI. Посередні точні й наближені обчислення за допомогою таблиць та лічильних лінійок

§ 31. Загальні відомості про допоміжні засоби обчислень. Усі описані вище скорочені й спрощені способи безпосередньо робити обчислення точні й навіть наближені потребують для виконання їх цілого ряду допоміжних проміжних підрахунків або в умі, або на окремім допоміжнім аркуші.

Хоч і здаються вони нескладними й нечисленними, але при дуже великих обчислювальних роботах, особливо в техніці, де ці обчислення — не кінцева мета, а лише допоміжна, неминуча, конечна робота, усі ці проміжні обчислення раз-у-раз забирають в обчислювача силу часу, затримують на собі його увагу, а врешті часто від них походять помилки в остаточних результатах обчислень.

Крім того, як уже не раз ми зауважували, викладаючи способи безпосередніх точних і наближених числових обчислень, зручно й вигідно можна виконувати всі проміжні підрахунки, користуючись з якогось допоміжного засобу як-от „російська рахівниця“ тощо.

Це давно вже спонукало обчислювачів до винаходу різних допоміжних засобів, що полегшують та прискорюють роботу й одночасно зменшують кількість помилок при обчисленнях.

Отож, вироблено цілий ряд способів і приладів виконувати, так звані, посередні обчислення; до опису їх ми тепер переходимо.

Усі допоміжні засоби робити обчисленння розпадаються на дві основні групи:

1. Таблиці,
2. Лічильні прилади й машини.

Таблиці теж можна розбити на дві категорії: на таблиці в вузькім розумінні слова і, так звані, рухомі таблиці.

Таблиці в вузькім розумінні слова — це список заздалегідь обчислених результатів певних дій над відповідними числами; за допомогою цих таблиць ми безпосередньо знаходимо потрібне число. Типовий представник цієї категорії допоміжних засобів обчисляти є всім відома „таблиця множення“.

Рухомі таблиці містять списки результатів деяких підготовних обчислень: щоб одержати остаточний результат за допомогою рухомих таблиць, треба відповідно перемістити й зіставити окремі таблички.

Рухомі таблиці, отже, є ніби переходова зв'язна ланка між таблицями в буквальнім розумінні і лічильними приладами.

Щодо останніх, то це — певним способом збудовані машини, де результат обчислення виходить завжди безпосередньо, як наслідок певної механічної їхньої роботи.

§ 32. Основні системи побудови таблиць та найголовніші типи їх. Найпоширеніший допоміжний засіб робити числові обчислення є всякі т а б л и ц і.

Зміст таблиць, уживаних при обчисленнях, становлять або числові величини з певними спільними властивостями, або вартості, що відповідають якомусь послідовному рядові вартостей арґументів.

Матеріял таблиць взагалі розміщають за певним законом і це дає змогу хутко й просто знаходити в таблицях потрібну для обчислень величину. Але система самого розміщення матеріялу може бути дуже різноманітна, задовольняючи то ту, то ту вимогу практики. Звичайно всі таблиці супроводять описом їхньої будови та способу користуватися з них. Тому ми з'ясуємо лише типові види табличних систем.

1) Т а б л и ц і з н у л е в и м в х о д о м а р ґ у м е н т у — коли числові вартості, що входять до таблиць, мають певну, спільну їм усім, властивість, і їх розглядають незалежно від змінної величини арґументів. Цю загальну властивість зазначають у заголовку таблиці, а відповідні їй числові вартості розташовують прямовисними стовпчиками порядком ростучої їх величини; на кожній сторінці містять звичайно кілька стовпчиків один повз один так, щоб кожний сусідній праворуч стовпчик був продовженням стовпчика, що стоїть ліворуч нього.

Таблиці цього типу мають звичайно такий вигляд:

Таблиці величин, що мають (таку - то) властивість

a_0	a_{10}	a_{20}	.	.	.
a_1	a_{11}	a_{21}	.	.	.
a_2	a_{22}	.	.	.	.
a_3	a_{13}	.	.	.	.
a_4	a_{14}	.	.	.	.
a_5	a_{15}	.	.	.	.
a_6	a_{16}	.		.	.
a_7	a_{17}	.	.	.	.
a_8	a_{18}	.	.	.	.
a_9	a_{19}	.	.	.	.

. . . . . (141)

Тут — $a_0 < a_1 < a_2 \ldots . a_{19} < a_{21} \ldots$

За допомогою таблиць з нулевим входом виясняють, чи мають величини, що беруть участь в обчисленні, зазначену в таблицях властивість, а для того порівнюють їх із табличними вартостями. Рівність табличної вартости з досліджуваною величиною покаже, що остання має властивість, яка цікавить нас. Розташовують табличні числа за ростучою їхньою величиною, щоб можна було швидше порівнювати.

До цього типу таблиць належать **таблиці первісних чисел**. У них розміщають, починаючи від одиниці й до певної межі, ростучим порядком усі числа, що діляться тільки на 1 й на самого себе.

Для прикладу подаємо тут таблицю первісних чисел до 100.

2	13	31	53	73
3	17	37	59	79
5	19	41	61	83
7	23	43	67	89
11	29	47	71	97

. . . . (142)

Такі таблиці бувають корисні, коли розв'язується питання, чи можна розкласти число на окремі чинники,— що потрібно, наприклад, при спрощенні діленика і дільника на те саме число.

2) **Таблиці з одним (одиничним) входом арґументу**. У таких таблицях дають вартості функції

$$F = f(x), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (143)$$

що залежить або від одного арґументу, або від якоїсь функції одного чи кількох арґументів.

Обчисляючи, тут намагаються визначити без числових викладок або вартість функції F, на підставі вартости арґументу x, або, навпаки, на підставі вартости функції F, вартість арґументу. Цього й досягають, зіставляючи в таблицях послідовно змінні через певний інтервал вартості арґументу з відповідними їм, заздалегідь обчисленими, вартостями функції. Таке зіставлення роблять за допомогою оцієї системи таблиць:

Вартості арґументу	Вартості функції	Вартості арґументу	Вартості функції
x_1	F_1	x_6	F_6
x_2	F_2	x_7	F_7
x_3	F_3	.	.
x_4	F_4	.	.
x_5	F_5	.	.

. . . . (143*a*)

Вартості арґументу й функції розташовують тут у двох суміжних прямовисних стовпчиках, при чім відповідні вартості арґументу й функції вміщають в однім поземім рядку. У таблицях для точного обчислення арґумент і функція дістають усі вартості, які можуть трапитися при певнім обсязі обчислень. Відшукуючи вартість функції, на підставі вартости арґументу, шукають спочатку у першім стовпчику вартість арґументу і поруч неї, у тім самім поземім рядку, знаходять величину функції. Коли питання ставиться навпаки, то спершу відшукують вартість функції, а поруч неї знаходять шукану вартість арґументу.

Вартості арґументу вміщають у таблицях ростучим порядком так, що

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_4 <$$

Тим що звичайно функція буває ростуча чи спадна на всім протязі таблиць, то її вартості розташовуватимуться в таблицях ростучим або спадним порядком. Таке розташування табличних вартостей допомагає легше відшукувати потрібні величини.

Типовий приклад таблиць з одним входом є так звана Пітагорова таблиця множення.

До цього типу таблиць належать:

а) Таблиця первісних чинників. Як уже знаємо, щоб спростити ділення, треба відшукати для спрощення діленика й дільника їхніх спільних чинників. Для цього користуються або з ознак подільности, або зі щойно описаної таблиці первісних чисел.

Вважаючи на потребу робити самий розклад на чинників діленика й дільника, вигідніше буває користуватися з таблиці первісних чинників.

У цій таблиці за вартість арґументу беруть послідовний ряд цілих чисел до певної межі, а за вартості функції правлять первісні чинники, що на них розпадається арґумент.

Щоб зменшити розміри таких таблиць, зі складу їх викидають числа, які мають чинники 2, 3, 5, бо вилучати їх з числа легко.

Тим що всі такі таблиці виходять досить невкладисті, то більше будують таблиці первісних чинників за типом таблиць із двома входами, як це ми покажемо далі.

Уживаючи таблиць первісних чинників, можна надзвичайно хутко знаходити спільний чинник діленика й дільника і тим спрощувати й прискорювати ділення, як це з'ясовано в розділі про точні обчислення.

б) Далі до таблиць з одним входом належать таблиці добутків довільного числа на однозначні числа.

За змінний арґумент править у них однозначна величина, дев'ять вартостей якої і вміщають у першім стовпчику таблиці типу (143*a*), а в суміжнім стовпчику стоять відповідні добутки даного числа на взяту вартість арґументу. Вартість даного числа завжди стоїть угорі стовпчика добутків проти вартости арґументу, рівної з одиницею.

Такі таблиці складає звичайно сам обчислювач; вигоди обчисляти за її допомогою чималі.

За приклад такої таблиці візьмім таблицю добутків числа 926 на однозначні величини:

$$\left.\begin{array}{lr} 1 \ldots\ldots & 926 \\ 2 \ldots\ldots & 1\,852 \\ 3 \ldots\ldots & 2\,778 \\ 4 \ldots\ldots & 3\,704 \\ 5 \ldots\ldots & 4\,630 \\ 6 \ldots\ldots & 5\,560 \\ 7 \ldots\ldots & 6\,482 \\ 8 \ldots\ldots & 7\,408 \\ 9 \ldots\ldots & 8\,834 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (144)$$

Складання таблиці зводиться або до множення на 2 числа, уже вписаного в таблиці, або до додавання двох чисел таблиці, що стоять одне під одним. Дійсно, добуток на 1 є само дане число; добуток на 2 — подвоєне перше число таблиці; добуток на 3 — сума добутків на 1 і на 2; на 4 — подвоєний добуток на 2 і т. д. Утворити числа таблиці таким способом, безперечно, простіше, ніж безпосередньо перемножати. Таблицю можна скласти ще, послідовно додаючи дане перемножуване число до послідовно одержуваних добутків, почавши з добутку на 1, тобто почавши з самого даного числа. У цім разі треба користуватися з допоміжного аркуша, виписуючи на нім дане число. Останній порядок складати таблицю особливо вигідний, коли вживати рахівниці.

Щоб перевірити, чи правильно табличка складена, треба додатково обчислити добуток на 10, для чого до добутку на 9 додати ще раз дане число. В результаті мусить вийти дане число з додатковим нулем з правого боку.

Уживати таблиці добутків довільного числа на однозначні числа надзвичайно корисно при множенні й діленні. Справді, як ні просто складати добутки на однозначні числа, але, коли у множенику багато цифр, то це складання є найголовніше джерело помилок при множенні й діленні. Тому, перемножавши чи діливши величини з великим числом вартісних цифр, можна чимало спростити дії й запобігти можливості помилок, якщо попереду скласти таблицю добутків множеника чи дільника на однозначні числа і потім з неї виписувати потрібні для виконання дії частинні добутки. Помножаючи, ми в таблиці (144) шукаємо добуток за даною вартістю однозначного чинника; діливши — за діленою частиною числа шукаємо в таблиці найближчий менший проти неї добуток і визначаємо відповідний однозначний чинник, що й буде цифрою частки.

3) Таблиці з подвійним чи більшим числом входів арґументу. Системи з подвійним входом уживають для розташування вартостей функцій вигляду:

$$F = f(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (145)$$

де x та y є або незалежні арґументи, або функції одного чи кількох змінних. Функцію легко представити рядом функцій вигляду (143), для чого дають спершу одному змінному, скажім — y, всі вартості від початкової до кінцевої — від y_0 до y_k; кожній такій вартості відповідатиме свій окремий вигляд функції F:

$$F_0 = f(x, y_0);\ F_1 = f_1(x, y_1);\ F_2 = f_2(x, y_2) \quad . \quad . \quad . \quad (145a)$$

Величини функції (145) залежать тільки від зміни арґументу x; їхні вартості можна розташувати в таблиці вигляду (143), зазначаючи над кожною, якій вартості y кожна з них відповідає. Тим що послідовні вартості для всіх функцій у межах того самого інтервалу однакові, то кілька таблиць вартостей F, що відповідають суміжним вартостям y, можна зручно, а, головно, заощадивши місце, віднести до одного стовпчика вартостей арґументу й розмістити в таблиці за такою системою:

Таблиця з подвійним входом арґументу

Вартості X	Вартості Y					
	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
X_0	$F(^0)$	F_0'	F''	.	.	.
X_1	$F_1(\ )$	F_1'	F_1''	.	.	.
X_2	$F_2(\ )$	F_2'	F_2''	.	.	.
X_3	$F_3(\ )$	F_3'	F_3''	.	.	.
X_4	$F_4(\ )$	F_4'	F_4''	.	.	.

. . (146)

Щоб за такими таблицями відшукати вартості функції $F_k^{(m)}$, яка відповідає даним вартостям арґументів x_k, y_m, треба знайти стовпчик, що стосується до вартости y_m, і рядок, що відповідає вартості x_k; на перетині знайдених рядка й стовпчика стоятиме шукана величина $F_k^{(m)}$.

Обернену задачу розв'язуємо, відшукуючи в прямовисних стовпчиках дану величину $F_k^{(m)}$; шукані вартості арґументів будуть величини x_k та y_m, що стоять в однім з $F_k^{(m)}$ рядку й стовпчику.

Тим що величина функцій F міниться безперервно від зміни обох арґументів, то, взагалі, крім окремих випадків, кожній довільно взятій величині першого арґументу x можна підшукати такі вартості другого арґументу, що надали б функції дану величину. Тому обернену задачу можна розв'язати безконечним числом способів. Щоб зробити її означеною, звичайно заздалегідь беруть певну вартість одного арґументу і, на підставі її, знаходять у таблицях рядок або стовпчик, де стоїть дана вартість функції, а, знайшовши місце її, визначають тоді вартість другого арґументу.

Щоб зручніше розшукувати в таблицях з подвійним входом потрібні вартості арґументів, їх іноді додатково вміщають у правім крайнім прямовиснім стовпчику і в нижнім поземім рядку кожної сторінки.

Коли бажають розмістити в таблицях вартості функції трьох змінних

$$F=f(x, y, z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

то чинять за таким же пляном, як і в попереднім випадку: дають послідовні вартості одному з арґументів, наприклад: z; тоді функція заміниться рядом функцій від двох змінних

$$F_0=f_0(x, y, z_0)\,;\ F_2=f_1(x, y, z_1)\,;\ F_2=f_2(x, y, z_2)\ . \quad (147a)$$

Вартості кожної з таких функцій, одержані від зміни арґументів x та y, розміщають в окремій таблиці з подвійним входом арґументу. Таких таблиць буде, очевидячки, стільки, скільки взято вартостей z, тобто k. Коли число вартостей x, y, z, що для них треба обчислити табличні вартості функцій F, велике, то таблиці часто бувають надзвичайно невкладисті, незручні для користування.

Зважаючи на те, що з рівнання, яке визначає зв'язок між функцією і арґументами (143), (145) та (147), можна знайти вартість тільки одної невідомої з тих, що входять в нього, за даними вартостями решти, і що число входів у таблицю відповідає числу арґументів функції,— можна встановити таке загальне правило користування таблицями:

З таблиць можна знайти потрібну вартість тільки тоді, коли число даних величин відповідає числу входів; якщо число даних буде менше, ніж число входів, то задача відшукати за допомогою таблиць потрібну величину стає неозначена, і з таблиць можна визначити кілька, взагалі безліч, розв'язок.

За типом таблиці з двома входами, як уже сказано, будують таблиці первісних чинників, щоб зменшити обсяг їх. За арґумент y, якого вартості розміщені в верхнім поземім рядку, беруть число сотень, а за арґумент x, якого вартість стоїть у першім і останнім прямовисних стовпчиках, — числа десятків та одиниць. Такий спосіб ґрунтується на тім, що всяке число можна представити у вигляді:

$$A = 100\,y + x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (148)$$

Щоб визначити чинники даного числа за такою таблицею, вилучають спершу з числа усі чинники 2, 3, 5. Далі, на підставі вартости сотень числа, яке лишиться, відшукують у таблиці відповідний прямовисний стовпчик, а на підставі вартости десятків та одиниць — відповідний рядок. На перетині їх знаходять шукані чинники.

За цим же типом будують **таблиці добутків натурального ряду цілих чисел на однозначні чинники.**

Такі таблиці дають вартості функції вигляду (145).

У них одному з арґументів, наприклад, x, надають послідовні вартості натурального ряду від 1 до n, а другому — y — цілі однозначні вартості від 1 до 9. Таблиці ці здебільшого мають вигляд, показаний на зразку (146).

Таких таблиць є чимало. Головна ріжниця між ними — їхній обсяг. Одні таблиці обмежують вартість другого чинника величинами, меншими від 100, в інших — другий чинник доходить до 1 000, 10 000 тощо. Найбільш просторі таблиці склав Крель, їх видано 1836 р. у Берліні під назвою „Erleichterungstafel"; у них дано добутки всіх цілих чисел, менших від 10 000 000, на однозначні чинники від 1 до 10.

До цієї ж категорії таблиць належать поширені в нас Ціммермановi таблиці, зазначені в списку літератури.

За цим же типом побудовані російські таблиці межового інженера П. М. Орлова (Москва, 1910 р.) і відомого російського бухгальтера Ф. Єзерського.

Тим що таблиці цього типу дуже різноманітні і в передмові до них звичайно подається докладний їх опис та вказівки, як користуватися з таблиць, ми тут їх не будемо описувати. А щоб закінчити питання з галузі теорії допоміжних таблиць з кількома входами, згадаймо ще про дуже поширені й вельми зручні таблиці множення інженера шляхів О'Рурка.

Таблиці побудовані на таких міркуваннях.

Щоб розмістити вартості функції

$$L = xy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (149),$$

у таблиці з трьома входами, треба ввести до правої частини рівности (149) третій арґумент так, щоб, наприклад, послідовні вартості одного з чинників одержувати залежно від зміни двох інших величин. Тим що єдине обмеження такої залежности є одержання чинником цілих і послідовних вартостей, то вигляд функції, яка заміняє один із чинників виразу (149), може бути надзвичайно різноманітний. На практиці вибирають найпростіший вигляд і вважають чинник, наприклад, x, за рівний з сумою двох величин:

$$x = x_1 + x_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

Але й у цім виразі лишається неозначеним порядок та межі зміни доданків x_1 і x_2, бо яка завгодно вартість x приводить формулу (150) до неозначеного рівнання, що його справджує безліч комбінацій вартостей x_1 та x_2. Останню неозначеність розв'язують тим, що одному з чинників, скажім x_1, надають тільки цілі однозначні величини, а чинникові x_2 — послідовні вартості десятків, тобто вважають

$$x_2 = 10x'_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (151)$$

тоді формула (150) набирає такого вигляду:

$$x = x_1 + 10x'_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (150\,a)$$

а функція (149) — такого:

$$F = (x_1 + 10x'_2)\,y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (149\,a)$$

У таблицях О'Рурка подано добутки всіх двозначних чисел на всі тризначні. Розкладений на добутки чинник визначено тут двозначною кількістю, чинник y — тризначною. Це кладе межі зміні кожного з арґументів x_1, x'_2 та y, а саме:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{для } x_1 \text{ и } x'_2 \ldots\ldots\ldots & 0 \text{ і } 9 \\ \text{для } y \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \text{ і } 999 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (152)$$

Окремі таблиці з двома входами складено для послідовних вартостей чинника y (149 a).

Вважаючи на тісні межі зміни арґументів x_1 та x'_2, ці окремі таблиці мають дуже невеликі розміри.

Над кожною з них праворуч грубим шрифтом показано відповідну вартість y; у верхнім поземім рядку стоять послідовні десять вартостей величини $10x'_2$, у лівім та правім прямовисних стовпчиках — десять послідовних вартостей чинника x_1; інші величини таблиці є вартості функції F для вибраних вартостей чинників.

Відшукуючи потрібний добуток, знаходять спершу табличку з двома входами, що відповідає даній вартості тризначного чинника, а в ній стовпчик, який відповідає числу десятків двозначного чинника, і ряд, що відповідає числу його одиниць. На перетині цих стовпчика і рядка міститься шукана величина.

Щоб зручніше відшукувати потрібний рядок, кожні три рядки частинної таблиці відокремлені один від одного проміжком; нулевий рядок стоїть окремо.

Визначаючи за даним добутком і одним із чинників другий та припускаючи, що число знаків чинників не може бути більше, ніж два, для одного чинника і більше, ніж три, для другого чинника, слід розрізняти два випадки: коли даний чинник тризначний, а шуканий — двозначний, і коли даний чинник двозначний, а шуканий — тризначний.

1-й випадок. Коли дано вартість тризначного чинника, то відшукують у таблицях відповідну окрему табличку, а в ній — вартість функції, що збігається з вартістю даного добутку. Стовпчик і рядок, де стоятиме вартість функції, визначать десятки та одиниці шуканого чинника.

2-й випадок. Коли дано добуток і двозначний чинник, то насамперед виясняють, скільки знаків має другий чинник; якщо в нім два знаки, то задача зводиться до першого випадку; якщо три знаки, то в умі змірковують цифру сотень шуканого чинника і за її допомогою проглядають таблички, складені для тризначних чинників, що мають знайдену цифру сотень. Тризначний чинник тієї таблички, де даному двозначному чинникові відповідатиме даний добуток, і буде шуканий.

Тим що користуватися з таблиць О'Рурка дуже легко і таблиці портативні, їх, певно, можна вважати за найзручніші й найкорисніші при множенні та діленні чисел.

Не зупинятимемося більше на переліку й опису інших таблиць з кількома входами, бо їх багато; згадаємо ще про один допоміжний засіб при числових обчисленнях, а саме про таблиці квадратів.

Хоча за допомогою різних описаних таблиць добутків можна знаходити й квадрати чисел, проте, коли доводиться квадратувати багато чисел, то користуватися з таблиць добутків буває незручно: треба довго перегортати сторінки. Тому для степенювання і, головно, для квадратування здавен уже складали спеціяльні таблиці. Найдавнішні з відомих таблиць степенів, так звані, „Вавилонські таблиці“, складені не пізніш, як 1600 року перед Р. Х., дають квадрати чисел натурального ряду від 1 до 60 і кубів від 1 до 32. Уперше видано таблиці 1592 р.; їх склав італієць J. A. Maginі; надруковано таблиці в Венеції. І тепер багато таблиць добутків супроводять таблицями квадратів та кубів.

Іноді вони мають один вхід за формулою

$$F = x^2 \qquad (153)$$

Зміна x відповідає натуральному рядові від 1 до невідомої межі. Користуватися з таких таблиць не трудно.

Розташування квадратів у таблиці з одним входом, проте, незручне, бо потребує розмірно більше місця, — для кожного квадрата треба вмістити поруч відповідну вартість арґументу.

Компактніше розташування квадратів у таблицях з двома, трьома або більшим числом входів: при складанні таких таблиць уживають способів, описаних вище:

Коли таблицю квадратів застосовують до перемноження, то користуються з оцих альґебричних співвідношень:

$$\left.\begin{array}{l}(x+y)^2=x^2+2xy+y^2\\ (x-y)^2=x^2-2xy+y^2\end{array}\right\}. \quad \ldots\ldots (154)$$

Віднімаючи від першої рівности (150) другу, одержимо:

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy. \quad \ldots\ldots (155)$$

звідки

$$xy=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4} \quad \ldots\ldots (156)$$

Останню рівність можна написати ще в вигляді:

$$xy=\frac{(x+y)^2}{4}-\frac{(x-y)^2}{4} \quad \ldots\ldots (156a)$$

або

$$xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \quad \ldots\ldots (156б)$$

З рівностей (156), (156*а*) та (156*б*) бачимо, що добутки величин x і y можна знайти за допомогою квадратів величин $(x+y)$ та $(x-y)$, віднімаючи й ділячи на однозначні числа 4 або 2.

Щоб спростити обчислення, складено спеціяльні таблиці чвертей квадратів. Таких таблиць є кілька. Найкращі з них таблиці, що їх видав 1887 р. J. Blater у Відні. Вони дають чверті квадратів для всіх чисел від 1 до 200000. Уживаючи таблиць чвертей квадратів, користуються з формули (156*а*).

А взагалі відшукувати добутки за допомогою таблиць квадратів можна, спираючись на кожну з формул (156), (156*а*) та (156*б*).

На закінчення пояснім вартості й вади різних видів таблиць.

Якість всякої таблиці насамперед виміряється зручністю й швидкістю знаходити в таблиці потрібні величини.

Найпростіше відшукувати в таблицях вартості функції, коли ці вартості стоять безпосередньо близько до відповідної вартости арґументу. Таку вимогу можуть задовольняти тільки таблиці з одним входом. Але, коли зміни арґументів мають межі хоч трохи величенькі, стовпчики вартости арґументів і функцій забирають стільки місця, що таблиці збільшуються обсягом, і відшукувати потрібну їх сторінку — уже справа забарна. Щоб послабити вплив цієї незручности, уживають хлипаків, приклеєних до країв сторінок; вони дають можливість, за допомогою позначок на них, вирізняти потрібні частини таблиць; у межах вирізнених частин користуватися з таблиць знову буває просто. Такі хлипаки є, наприклад, у таблицях Єзерського.

Друга вада таблиць з одним входом виявляється тоді, коли вартості вміщеної в них функції стають многозначні. Стовпчики робляться від того дедалі ширшими і забирають чимраз більше місця. Цю ваду паралізують або тим, що друкують такі частини таблиці дрібнішим шрифтом, або, коли можна, виносять нагору стовпчика загальну частину цифрового складу вартостей функцій, що стоять у стовпчику.

Що більше стають арґументи, отже й число входів, то складніше буває вибирати з таблиць потрібні вартості, і збільшується кількість вартостей функцій, уміщених у таблицях. Спрощують користування з таблиць тим, що вирізняють рядки й стовпчики лініями або інтервалами поміж певними групами рядків; часто ті вартості, які треба знаходити в першу чергу, друкують різним шрифтом. Від умілости складача таблиць залежить доцільно й зручно розмістити матеріял таблиць.

Не вважаючи на розмірну складність таблиць із багатьма входами, часто функції з одним змінним, яких вартості можна розмістити в таблицях з одним входом, перетворюють усе ж на функції з багатьма арґументами; це пояснюється можливістю помітно заощадити місце при розміщенні матеріялу. Поперше, кожна вміщена вартість арґументу обслуговує не одну, а кілька вартостей функцій, подруге, спільні частини вартостей функції часто-густо вміщають тільки раз, а не передруковують кожній вартості функцій.

І, хоча від зменшення обсягу таблиць дещо складніше буває відшукувати в таблицях потрібні величини, але користуватися з таблиць звичайно буває зручніше.

Формат таблиць, шрифт складовини, дрібні додатки, що прискорюють відшукування цифрових величин у таблиці, можуть при вдалій і дотепній комбінації набагато підвищити якість таблиць, а при деяких вадах — погіршити її. Наприклад, через невеликий розмір таблиць О'Рурка користуватися з них дуже зручно.

Оцінюючи користування таблицями, не треба спускати з уваги власних індивідуальних особливостей обчислювача, а також того, що довгочасне користування тими самими таблицями виробляє автоматичність дій обчислювача, затушковує зовнішні вади таблиць, навчає способів обходити ці вади.

Тому не дивно, що про одні й ті самі таблиці на сторінках спеціяльної преси, часом у тім самім органі, трапляються супротивчі думки: одні позитивні, другі — неґативні.

Найважливіша властивість усяких таблиць є надійність поданих у них вартостей величин. Тут домінантну ролю відіграє тривале існування таблиць і широке їх розповсюдження.

Безперечно, багато таблиць здобуло популярність (наприклад, Ґавсові таблиці), головно, через певність, що в них немає помилок.

Тим що помилки часто-густо трапляються тоді, коли переверстують складовину, заміняючи при коректі одні цифри іншими, то видання за допомогою стереотипів (вилитих дощок із текстом кожної сторінки) є спосіб, який найбільш ґарантує від таких випадкових помилок.

За кордоном досить поширений звичай повідомляти автора таблиць, а також подавати до спеціяльних видань про всі помічені при користуванні таблицями друкарські помилки. Деякі автори навіть призначають винагороду за кожну виявлену друкарську помилку. Зважаючи на величезне значення таблиць, легко зрозуміти цінність цього звичаю.

§ 33. Таблиця тригонометричних величин і користування з неї (див. частина II, відділ I, розділ V.). Розв'язуючи технічні задачі, доводиться часто мати діло з тригонометричними або, правдивіше, з гоніометричними (кутомірними) величинами. Для того ми й додали в II частині таблиці тригонометричих величин, де подано вартості їх з достатньою для практики точністю.

Користуючись із таблиць, треба пам'ятати взаємну залежність між тригонометричними величинами того самого кута. Наприклад,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\ \text{і т. д.} \quad (157)$$

Так само треба пам'ятати й залежність між тригонометричними величинами кутів додаткових тощо. Наприклад, при $\alpha = 90^0 - \beta$

$$\cos\alpha = \sin\beta;\ \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,\beta\ \text{і т. д.} \quad (158)$$

Корис о також пам'ятати, що кут, якого дуга рівна з радіюсом, має назву **радіяна** і дорівнює $57^0 17' 44''8 = 57^0,29578$.

Якщо величину кута дано градусами, мінутами й секундами, то, щоб виразити її радіянами, треба спершу секунди та мінути перетворити в градуси, і тоді радіянами кут буде:

$$\alpha = \frac{\alpha^0}{180^0}\pi \quad (159)$$

де $\pi = 3{,}14159265...$, або, як знайшов XVI віку голяндський учений Мецій, приблизно $\frac{355}{113}$, при чім релятивний огріх тут менший від $0{,}0000085\%$, чи $\frac{1}{11{,}76 \, . \, 10^{6}}$, тобто менший від одної одинадцятимільонної [1]).

Якщо за допомогою тригонометричних таблиць нам треба обчислити, наприклад, $\sin 32^\circ 5'$, то беремо з таблиць $\sin 32^\circ$ і $\sin 33^\circ$, їхню ріжницю множимо на $\frac{5}{60}$, тобто ділимо на 12, а одержану величину додаємо до величини $\sin 32^\circ$.

$$\left.\begin{array}{rl} \sin 33^\circ = 0{,}5446 & \\ \sin 32^\circ = 0{,}5299 & \\ \hline 0{,}0147 & \underline{\;12\;} \\ \underline{24} & + 0{,}00122 \\ \underline{30} & \;\;\; \underline{0{,}5299} \\ 6 & \;\;\; \mathbf{0{,}5311 = \sin 32^\circ 5'} \end{array}\right\} \quad \ldots . (160)$$

Коли величина під знаками sin, cos, tg, ctg більша від 360° або $2 \times 3{,}1416$ ($2\pi \doteq 6{,}2832$), то її треба насамперед поділити на 360° чи 6,2832, щоб визначити в кожнім квадранті (чверть кола) кінець дуги. Це дає можливість визначити **знак** (+ або —) шуканої тригонометричної величини, бо

sin в 1 і 2 квадрантах с „+“, в 3 і 4 — с „—“
cos в 1 і 4 „ с „+“ в 2 і 3 — с „—“
tg та ctg в 1 і 3 „ с „+“ в 2 і 4 — с „—“.

Щодо числової вартости, то коли остача відділення заданої дуги на 360° або 6,2832 не більша за 90° чи $\frac{1}{2}\pi$ ($= 1{,}5708$), то шукану вартість беруть просто з таблиць або обчисляють

---

[1]) III віку перед Р. Х. славетний геометр Архімед (257 — 212) обчислив, що відношення між обводом і діяметром кола міститься між $3^{10}/_{70}$ і $3^{10}/_{71}$ (для $\pi = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ огріх менший від $\frac{1}{2480}$ або $0{,}0403\%$), а індійський астроном Ар'ябата (476 — 550) знайшов

$$\pi = \frac{62832}{25000} = 3{,}1416$$

з огріхом меншим, ніж $0{,}00024\%$, або $1 : 4{,}16 \times 10^3$, тобто майже в 168 разів меншим, ніж для $\pi = \frac{22}{7}$.

Спосіб виражати синуси та косинуси частинами радіюса завів у вжиток індійський же вчений Баскара (близько 1150 р.).

за допомогою таблиці, як показано вище. Коли ж остача більша за 90^0 чи $\frac{1}{2}\pi$, її треба замінити; доповненням до 180^0 або до 3,1416, якщо кінець дуги — в 2 квадранті; лишком понад 180^0 чи понад 1,1416, якщо кінець дуги в 3 квадранті; доповненням до 360^0 або до 6,2832, якщо кінець дуги в 4 квадранті.

Наприклад, треба знайти tg 11,5192. За формулою (159)

$$\frac{11{,}5192}{\pi} \cdot 180^0 = 660^0 \quad \ldots\ldots\ldots (161)$$

Остача від ділення на 360^0, тобто 300^0, показує, що кінець дуги лежить у 4 квадранті, де tg від'ємні.

Доповнення до 360^0 дорівнює 60^0; і тому, знайшовши в таблицях, що $\operatorname{tg} 60^0 = 1{,}7321$, ми можемо сказати, що

$$\operatorname{tg} 11{,}5192 = -1{,}7321 \quad \ldots\ldots\ldots (162)$$

Той самий результат можна одержати інакше, поділивши задану дугу на 1,5708 або на 90^0 і скористувавшися з формул для тригонометричних величин від суми двох кутів, а саме

$$\operatorname{tg} 11{,}5192 = \operatorname{tg}(7 \times 1{,}5708 + 0{,}5236) = \operatorname{tg}(3 \times 1{,}5708 + 0{,}5236) =$$

$$= \operatorname{tg}(3 \times 90^0 + 30^0) = \frac{\sin(3 \times 90^0 + 30^0)}{\cos(3 \times 90^0 + 30^0)} = -\frac{\cos 30^0}{\sin 30^0} =$$

$$= -\operatorname{ctg} 30^0 = -1{,}7321 \quad \ldots\ldots\ldots (163)$$

Для наближеного обчислення тригонометричних величин, коли підруч немає тригонометричних таблиць, можна з успіхом користуватися з оціеї формули, — її дав проф. інж. шляхів А. Д. Романов:

$$\cos\alpha = \frac{k - b\alpha^2}{k + \alpha^2} \quad \ldots\ldots\ldots (164)$$

Яка б ні була величина заданого кута, її можна, відшукуючи тригонометричні величини, замінити величиною, що не перевищує половини прямого кута.

Для кутів же α, не більших за половину прямого, зазначена формула Романова при

$$\left.\begin{array}{l} b = 4{,}5815 \\ k = 11{,}1411 \text{ (коли } \alpha \text{ в радіянах не більше від } 0{,}7854) \\ \text{або } k = 36{,}574 \text{ (коли } \alpha \text{ градусами не більше від } 45^0) \end{array}\right\} \quad \ldots (164a)$$

дає величину косинуса з огріхом k, не більшим від $\frac{1}{10^4}$, тобто не більшим від одної десятитисячної або, інакше, не більшим від 0,01%.

Знавши косинус, можна потім знайти яку завгодно тригонометричну величину, наприклад:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha};\ \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}\ .\ .\ .\ .\ (165)$$

Коли така велика точність не потрібна, можна, користуючись із зазначеної формули, брати, за вказівкою академіка А. А. Маркова:

$$\cos\alpha = \frac{12-5a^2}{12+a^2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (166)$$

якщо кут виражений радіянами, при чім α не більше від 1,5708, тобто не виходить за межі прямого кута, і відповідно для випадку, коли α виражене градусами (не більш від 90^0), можна брати

$$\cos\alpha = \frac{40\,500-5a^2}{40\,500+a^2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (166a)$$

Не зайво, до речі, показати, як можна самому скласти таблиці тригонометричних величин з якою завгодно точністю.

Тим що

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (167)$$

то

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (167a)$$

Беручи $2\alpha = 60^0$ і знаючи, що $\cos 60^0 = \sin 30^0 = 0{,}5$, знаходимо:

$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}86603,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (168)$$

а потім знайдемо косинуси кутів в 15^0, $7^0 30'$, $3^0 45^1$ . .

Далі, тим, що $\cos 45^0 = \sin 45^0$ і $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то

$$\cos 45^0 = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}70711,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (169)$$

а, знавши його, можна зазначеним вище способом знайти косинуси кутів в $22^0 30'$, $11^0 15'$, $5^0 37' 30''$, $2^0 48' 45''$; далі, користуючись із формули

$$\cos(a \pm b) = \cos a \sin b \pm \sin a \sin b,\ .\ .\ .\ .\ (170)$$

можна обчислити косинуси кутів між 0° і 90° через різні проміжки, наприклад, через $3^\circ 45'$, $2^\circ 48' 45''$, через половини їх, або через проміжки, що дорівнюють ріжниці між ними.

Нарешті, при достатнім числі крапок, будуючи на картатім папері плавку криву, можна за цією кривою інтерполюванням знайти величини косинусів тих кутів, які бажано вмістити в таблиці.

§ 34. Обчислення за допомогою логаритмів. Один із вельми цінних і практичних допоміжних засобів при обчисленнях є таблиці логаритмів, а тому ми познайомимося з користуванням ними докладніше, бо вони мають надзвичайну вагу і надзвичайно бувають у пригоді при технічних обчисленнях.

Як відомо, логаритмом даного числа n називають показник x степеня, до якого треба піднести якесь інше число a, зване основою, щоб одержати n. Отже, залежність між даним числом n, основою a і логаритмом x числа n виражається формулою:

$$n = a^x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (171)$$

її символічно зображають так:

$$x = \lg_a n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (172)$$

де приписане знизу при символі lg число a показує, для якої основи взято логаритм.

Звичайно вважають, що винайшов логаритми шотляндський геометр Непер, який 1614 року випустив друком твір „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“, присвячений принцеві Валійському (пізніше король Карл I). Але для справедливости треба сказати, що ще раніш від Непера таблиці логаритмів склав швайцарець Бюрґі (1552—1632); тільки він оголосив їх аж 1620 р. у Празі.

Отже, Неперові належить, власне, першість оголошення таблиць.

За основу логаритмів Непер узяв число, близке до відомого трансцендентного числа

$$e = \text{перед} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ при } n = \infty, \; . \; . \; . \; . \; . \quad (173)$$

що приблизно дорівнює

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = 2{,}718\,281\,828\,459 \; . \; (173a)$$

Тимто логаритми, обчислені для цієї основи, звуть — хоч і неправильно — Неперовими, а також гіперболічними або натуральними, — натуральними тому, що вони певною мірою найпростіші, а гиперболічними — тому, що, коли в річнобічній гіперболі, віднесеній до асимптотів, узяти абсцису вершка за одиницю, то площа між гіперболою, віссю абсцис, ординатою вершка і ординатою, що відповідає абсцисі x, дорівнює $\lg x$ у Неперовій системі.

Знавщи логаритм числа m для даної основи a, можна визначити $\lg x$ числа m і для всякої іншої основи b, бо з рівности

$$m = b^x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (174)$$

виходить

$$\lg_a m = x \lg_a b, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (174a)$$

звідки

$$x = \lg_b m = \frac{\lg_a m}{\lg_a b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (175)$$

На підставі формули (175), мавши логаритм числа m для основи a, треба тільки помножити його на

$$M = \frac{1}{\lg_a b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (176)$$

щоб одержати логаритм числа m для основи b.

Чинник M (176) править для переходу від одної системи до іншої і має назву модуля.

Величина модуля M (176), на який треба помножити Неперові логаритми, щоб одержати логаритм з основою 10, дорівнює 0,43429448.

Логаритми з такою саме основою 10 склав Неперів друг Бріґ 1617 р. і надрукував 1624 р. у книзі під назвою „Arithmetica logarithmica“. Ці Бріґові логаритми, відмінно від Неперових, звуть звичайними або десятковими.

Оці якраз Бриґові, десяткові або звичайні, логаритми за нашої десяткової системи числення найзручніші, і тепер є багато таблиць логаритмів з основою 10, де дається логаритми послідовних чисел від 1 до 100.000.

Для основи, що дорівнює 10, тільки логаритми цілих степенів десятьох є цілі числа, а логаритми інших чисел — здебільшого числа іраціональні, наближено представлені десятковими дробами[1]). Цілу частину такого дробу, як відомо, звуть характеристикою, а дробову — мантисою.

Характеристику визначають просто з числа цифр цілої частини числа, а саме: вона дорівнює числу таких цифр без одиниці. Через те, що характеристику так легко визначати, у таблицях подають лише самі мантиси.

[1]) Тим то, як сказано в розділі про наближені обчислення, винахід логаритмів і дав поштовх до розвитку наближених обчислень.

Користування логаритмами при найменшій навичці надзвичайно зменшує працю й час при обчисленнях. Тому нині є цілий ряд всіляких видань таблиць логаритмів, від тризначних, тобто з трьома знаками в мантисі і до двадцятизначних включно.

Для технічних обчислень при розв'язанні різних технічних задач, як уже сказано, достатня буває для практичної мети точність в $\frac{1}{1\,000}$.

З рівностей (171) та (172) і випливають усі властивості логаритмів, що роблять логаритми корисними й лежать в основі їх уживання.

Справді, за допомогою альґебри не трудно визначити на підставі (171) та (172) рівностей такі основні правила логаритмування, отже, й правила користування з логаритмичних таблиць.

Якщо m та n якісь задані числа, то за формулами (171) і (172) можна написати:

$$\left.\begin{array}{l} m = 10^{\lg m} \text{[1]} \\ n = 10^{\lg n} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (177)$$

Тоді, перемноживши числа m і n, одержимо:

$$mn = 10^{\lg m + \lg n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (178)$$

або

$$\lg(mn) = \lg m + \lg n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (178a)$$

тобто таке правило I: логаритм добутку дорівнює сумі логаритмів чинників.

Поділивши число m на число n, одержимо:

$$\lg \frac{m}{n} = \lg m - \lg n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (179)$$

або правило II: логаритм частки дорівнює ріжниці логаритмів діленика й дільника.

Нарешті, піднісши число m до степеня n, дістаємо:

$$m^n = 10^{n \lg m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (180)$$

або

$$\lg m^n = n \lg m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (180a)$$

тобто правило III: логаритм степеня якогось числа дорівнює добуткові з степеневого показника на логаритм цього числа.

[1]) Користуючись із Бріґових логаритмів, основи їх звичайно не зазначають.

Розглядаючи коренювання, як піднесення до дробового степеня, ми одержимо, що логаритм кореня дорівнює логаритмові підкореневої кількости, поділеному на кореневий показник.

Ґрунтуючись на цих правилах, можна за допомогою логаритмів обчислити який завгодно вираз вигляду mnp, $\frac{mn}{rv}$, u^k, де k — яке завгодно дробове, ціле, додатне чи від'ємне число, і подібні вирази, бо логаритми, мавши зазначені властивості, дають можливість звести: множення на додавання, ділення на віднімання, степенювання на множення й коренювання на ділення.

Інакше сказавши, вони спрощують аритметичні дії, а через те мають величезне практичне значення для всіх, кому доводиться мати діло з численними складними й довгочасними обчисленнями.

Коли, робивши обчислення за допомогою логаритмів, користуватися ще з якихось механічних обчислювальних лічильних приладів, наприклад, з російської рахівниці, про яку скажемо далі, то можна, либонь, сказати, що таблиці логаритмів найкорисніші, найцінніші й найпрактичніші таблиці за всі, призначені для прискорення й спрощення всяких обчислень, серед них і технічних.

Щоб закінчити питання про таблиці логаритмів, подивімось, який огріх трапляється, коли вживати їх.

Таблиці логаритмів розташовують завжди так, щоб, шукаючи логаритми чисел, не показаних у таблицях, можна було користуватися з самих лише перших ріжниць, тобто з пропорційних частин. Роблять це тим способом, що ріжницю між двома суміжними арґументами беруть досить малу проти них.

Так, якщо N та $N+h$ є два послідовні арґументи, то ріжниця їхніх звичайних логаритмів буде:

$$\Delta = \lg(N+h) - \lg N = \lg\frac{N+h}{N} = \lg\left(1+\frac{h}{N}\right) \quad . \quad . \quad (181)$$

Остання величина, як відомо, дорівнює:

$$\lg\left(1+\frac{h}{N}\right) = M\left[\frac{h}{N} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{N}\right)^3 - \ldots\right], \quad . \quad . \quad (182)$$

де M = модуль звичайних логаритмів, рівний 0,43429.

Щоб, шукаючи логаритми, можна було користуватися тільки з пропорційних частин, другий і дальші члени формули (182) повинні бути такі малі проти першого, щоб не впливати на останній знак показаного в таблиці логаритму. Тому в чотиризначних логаритмах $\frac{h}{N} < \frac{1}{100}$, отже, вже $\frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2 < \frac{1}{20\,000}$, тобто менше, ніж 5 одиниць п'ятого знаку, тобто не впливають на четвертий знак. З цієї причини в чотиризначних логаритмах арґументи йдуть від 100 до 1 000 через 1.

На підставі сказаного, табличну ріжницю завжди досить точно виражає формула:

$$\Delta = M\frac{1}{N} = 0{,}434\frac{1}{N} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (183)$$

Отож, шукаючи логаритм числа N_1, що міститься між N і $N+1$, та беручи $N_1 = N + h$, дістанемо:

$$\lg N_1 = \lg N + 0{,}434\frac{h}{N} = \lg N + h\Delta \quad . \; . \; . \; . \quad (184)$$

На формулі (184) і засновано користування пропорційними частинами при відшукуванні логаритму числа, і навпаки.

Як сказано вище, усі показані в таблицях логаритми мають огріхи, що доходять до $\frac{1}{2}$ одиниці останнього знаку, а тому навіть для цілком точного числа можна знайти логаритми лише наближено. Якщо ж і саме число знайдено з огріхом $\varepsilon = \frac{h}{N}$, то огріх у логаритмі, як бачимо з формули (184), дорівнюватиме $0{,}43\,\varepsilon$.

Щоб за цих умов огріх у логаритмі не перевищував $\frac{1}{2}$ одиниці останнього знаку його, релятивний огріх числа повинен становити стільки ж, скільки й одна одиниця останнього знаку логаритму, тобто, наприклад, для чотиризначного $\frac{1}{100\,000}$. Інакше сказавши, „треба, щоб у числі було стільки вірних знаків, скільки їх у мантисі логаритму“. На цій підставі зовсім марна річ підшукувати, наприклад, для числа з чотирма вірними знаками семизначний логаритм.

Коли, навпаки, ми шукаємо число за даним логаритмом, якого огріх становить 1 одиницю його останнього знаку, ми зробимо в числі релятивну помилку $\varepsilon = \frac{1}{0{,}43} = 2{,}30$ цієї оди-

ниці, тобто, наприклад, для п'ятизначного логарифму $\frac{2.30}{100\,000} =$
$= \frac{1}{43\,400}$, незалежно від величини числа.

Звідси ясно, що, визначаючи число за його логарифмом, можна одержати в числі лише стільки вірних цифр, скільки їх у мантисі логарифму, якщо перша цифра числа є 4, і на одну цифру менше, якщо ця перша цифра 5 або більше.

Зі сказаного випливає таке практичне правило: „Треба брати логарифми з таким же числом знаків, скільки є їх усіх в обчислюваних числах".

Тим що, як казано вище, для технічних задач цілком достатня точність в $\frac{1}{1\,000}$, то, розв'язуючи такі задачі, досить буде вживати чотиризначних таблиць логарифмів, а часом і тризначних.

На цій підставі ми настійно радимо виробити звичку користуватися з чотиризначних таблиць логарифмів і антилогаритмів (див. частину II, відділ I, розділ VI), бо вони компактні й прості.

Щоб з'ясувати спосіб, як користуватися таблицями, знайдім добуток тих самих чисел, що їх ми брали, описуючи наближені способи множення на стор. 96 у прикладі (97).

Отже, знайдім добуток чисел $78{,}9657 \times 62{,}8598$.

Тим що названі таблиці складені тільки для чисел від 1 до 1 000 (10^3) з поправками або пропорційними частинами для чисел до 10 000 (10^4), тобто для таких, що мають тільки чотири цифри, то, замість заданих чисел, беремо $78{,}97 \times 62{,}86$ і за першим правилом знаходимо суму їхніх логаритмів.

Спершу знаходимо у лівім стовпчику таблиці, позначеної літерою *Ч*, дві перші цифри 78 числа 78 97, потім третю його цифру 9 у верхнім рядку і в напрямі вниз від цієї цифри в однім рядку з 78 знаходимо цифри 89 71, що відповідають числу 789; якщо до цього числа приставити 7, то в напрямі вниз від цифри 7, яка стоїть у верхнім правім кутку, знайдемо прибавку в 4, а тому логаритм числа 78,97 буде 1.89 75.

ч	·	·	·	·	·	·	·	·	·	9	··	··	7
78	·	·	·	·	·	·	·	·	·	89 71	·	·	4

Так само для числа 6 286 знаходимо $7\,980 + 4 = 79\,84$; отже логаритм його буде 1.79 84. Додаючи знайдені логаритми, дістаємо логаритм добутку 3.69 59.

Щоб знаходити антилогаритми, тобто числа, що відповідають логаритмам, робимо так: перші дві цифри — 69 мантиси 69 59 знаходимо в лівім крайнім стовпчику з літерою *Л*, а третю 5 — у верхнім рядку. Відповідне логаритмові 695 число буде 4 955. Якщо зробити до логаритму приставку 9, то, взявши в правім верхнім кутку цифру 9, знайдемо під нею дальшу прибавку 10. Значить, число, що відповідає логаритмові 3.69 59, дорівнює 4 965.

Л	•	•	•	•	•	5	•	•	•	•	•	•	9
69	•	•	•	•	•	4 955	•	•	•	•	•	•	10

Коли охота, в результаті можна зробити ще поправку, вважаючи на те, що, замість чисел 78,9657 і 62,8598, ми взяли числа 78,97 і 62,86; в останнім помилка незначна, а в першім становить 43 : 789700, тобто близько 0,000055 нової величини; отже, одержане число 4 965 треба на стільки ж зменшити, приблизно на 0,3, а тому виправлена вартість добутку буде 4964,7 (точніша вартість, як ми бачили вище, дорівнює 4963,8).

Не зайва річ буде додати, що, в разі потреби віднімати логаритми, корисно перетворювати від'ємник на додаток з від'ємною характеристикою і з доповненням до одиниці цифр мантиси. Наприклад, щоб знайти 277 992 : 3 564, знавши, що lg 278 000 = 5.44 40, а lg 3 564 = 3.55 19, треба зробити так:

$$5.44\,40 + \bar{4},44\,81 = 1.89\,21 \quad \ldots\ldots \quad (185)$$

що якраз дорівнює 5.44 40 — 3.55 19.

Така заміна особливо буває вигідна, коли доводиться мати кілька додавань і віднімань. Вона дає змогу прискорити й спростити роботу; наприклад, обчисляючи такий вираз

$$\frac{1\,542\,772 \times 7\,807 \times 34\,034}{5\,009 \times 53\,3577 \times 2\,431} \quad \ldots\ldots \quad (186)$$

дістаємо відразу:

$$\left.\begin{array}{rr} \lg\ 1\,543\,000 = & 6.18\,83 \\ \lg\ 4\,807 = & 3.68\,18 \\ \lg\ 34\,030 = & 4.53\,19 \\ -\lg\ 5\,009 = & \bar{4}.30\,02 \\ -\lg\ 533\,600 = & \bar{6}.27\,28 \\ -\lg\ 2\,431 - & \bar{4}.61\,42 \\ \hline & 1.58\,92 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (186a)$$

тобто одною дією додавання одержуємо результат.

Коли треба робити обчислення за логаритмами з великою точністю, можна, крім відомих усім п'яти й семизначних таблиць логаритмів, використовувати вельми практичні праці, зазначені в списку літератури.

Визначаючи велику практичну вагу за таблицями логаритмів для тих, хто вміє й звик уживати їх, покажім, як можна самому скласти логаритмічні таблиці якої завгодно точности.

Для цього, за прикладом Бриґа, можна послідовно добути квадратовий корінь з десятьох.

Так,

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{10}=10^{\frac{1}{2}}=3{,}162277\ \ldots\ldots\\ \qquad\text{тобто }\lg 3{,}162=.50\,00\text{ [1])}\\ \sqrt{3{,}162}=10^{\frac{1}{4}}=1{,}778279\ \ldots\ldots\\ \qquad\text{тобто }\lg 1{,}778=.25\,00\\ \sqrt{1{,}774}=10^{\frac{1}{8}}=1{,}33352\ \ldots\ldots\\ \qquad\text{тобто }\lg 1{,}334=.12\,50\end{array}\right\}\ \ldots(188)$$

Далі можна, за прикладом Ідсера[2]), робити послідовне ділення 10 на його дробові степені, а саме:

$$10:10^{\frac{1}{4}}=10^{\frac{3}{4}}=5{,}623,$$
$$\text{тобто }\lg 5{,}623=.75\,00$$

$$10:10^{\frac{1}{8}}=10^{\frac{7}{8}}=7{,}499,$$
$$\text{тобто }\lg 7{,}499=.87\,50$$

$$10^{\frac{7}{8}}:10^{\frac{1}{4}}=10^{\frac{5}{8}}=4{,}217,$$
$$\text{тобто }\lg 4{,}217=.62\,50$$

$$10^{\frac{7}{8}}:10^{\frac{1}{2}}=10^{\frac{3}{8}}=2{,}371,$$
$$\text{тобто }\lg 2{,}371=.37\,50$$

Таким способом одержимо таблицю логаритмів для чисел від 1 до 10 або від 1 000 до 10 000.

---

[1]) Виписуємо самі мантиси.

[2]) E. Edser. Measurement and weighung. London, 1899.

При основі 10	Число	Логаритми
$10^{0}=1$	1000	.0000
$10^{\frac{1}{8}}=1,3335$	1334	.1250
$10^{\frac{1}{4}}=1,7782$	1778	.2500
$10^{\frac{3}{8}}=2,371$	2371	.3750
$10^{\frac{1}{2}}=3,1622$	3162	.5000
$10^{\frac{5}{8}}=4,207$	4217	.6250
$10^{\frac{3}{4}}=5,623$	5623	.7500
$10^{\frac{7}{8}}=7,499$	7499	.8750
$10^{1}=10$	10000	.0000

. . (189)

Таким же способом можна знайти багато ще інших проміжних величин, наприклад:

для логаритму в $\frac{1}{16}=0,0625$

знаходимо число $10^{\frac{1}{16}}=\sqrt{1,3335}$

для логаритму в $\frac{1}{32}=0,03125$ знайдім

число $10^{\frac{1}{32}}$ і т. д. . . (190)

Далі:

поділивши 10 на $10^{\frac{1}{16}}$, одержимо $10^{\frac{15}{16}}$ і відповідний логаритм: . 93 75

поділивши $10^{\frac{1}{2}}$ на $10^{\frac{1}{16}}$, одержимо $10^{\frac{7}{16}}$ і відповідний логаритм: . 43 75 . . (191)

і т. д.

Мавши, з одного боку, ряд вартостей для логаритмів, а з другого — для відповідних чисел, можна для відшукання нових проміжних величин, або, як кажуть, для інтерполювання, ужити картатого паперу.

Для цього, на підставі тих числових вартостей, які вже маємо, будуємо в можливо великім (для більшої точности) маштабі криву, що виражає закон зміни величини логаритму від зміни числа. Через намічені відповідні точки проводимо плавку криву за допомогою тонкої, гнучкої лінійки, поставленої на ребро; тримаючи лінійку в руках за кінці, можна примусити її вигнутися так, щоб вона пройшла принаймні через три сусідні точки. Одержана крива дає можливість знаходити відповідні одна одній вартості логаритмів і чисел у проміжках між величинами, визначеними раніш одним із зазначених способів, і тим поповнити та скласти з бажаною точністю таблиці логаритмів і антилогаритмів.

§ 35. Логаритмічна (лічильна) лінійка і вживання її. Вище ми казали, що в багатьох технічних задачах досить буває робити обчислення з точністю до одиниці третього знаку і на цій підставі можна вживати тризначних таблиць логаритмів.

Досвід повсякденної практики технічних обчислень виявив, що вартість мантис таких тризначних логаритмів можна, добравши відповідного мірила, досить точно зобразити лініями певної довжини на звичайній лінійці, і ця лінійка зможе замінити написані або надруковані на папері тризначні таблиці, що легко й хутко зношуються, якщо їх повсякчас носити при собі на всяких технічних роботах.

Далі, досвід виявив, що, коли мати дві такі лінійки з написаними на них тризначними логаритмами, то, вживаючи їх одночасно, можна утворити щось на зразок рухомих таблиць логаритмів або особливий лічильний прилад, званий логаритмічна (чи лічильна) лінійка, по-німецькому der Rechenschieber або Rechenstab, по-французькому- Règle à Calcul або Règle logarithmique, по-англійському — Slide Rule, по-італійському — Regola calcolatora.

Практичний же досвід виявив, що правильно збудована логаритмічна лінійка, завдовжки 250 *см,* дає при користуванні таку саму точність, як і тризначні таблиці. Отже, на практиці вельми корисно робити обчислення за допомогою логаритмічної лінійки, а навичку користуватися з неї легко набути після недовгих вправ. Якщо мати лінійку, завдовжки 50 *см,* то можна за її допомогою робити обчислення з точністю, не гіршою, як при користуванні чотиризначною таблицею. Тим то, вживання логаритмічних лінійок дуже поширилося серед закордонних техніків; його можна гаряче рекомендувати й нашим молодим технікам.

Основна ідея будови логаритмічної лінійки народилася зараз по запровадженні в математику логаритмів.

Саме, перша думка збудувати логаритмічну лінійку належить англійському математикові, топографу й астроному Edmond Gunter (1581 - 1626); її він і виконав 1620 р., тобто через три роки після того, як складено перші Бріґові логаритми. Лінійку Gunter описав у своїм творі „Description and Use of the Sektor, Cross-Staft and ather Instruments“, виданім у Лондоні 1621 року. Gunter наніс на лінійку поділки, пропорційні до звичайних логаритмів чисел, керуючись такими міркуваннями:

Відомо, що $\lg 1 = 0.00000$, а $\lg 10 = 1.00000$. Узявши довжину 250 *мм* за одиницю і знаючи, що в п'ятизначних таблицях $\lg 2 = 0.30103$, $\lg 3 = 0.47712$, $\lg 4 = 0.60206$, $\lg 5 = 0.69897$, $\lg 6 = 0.77815$, $\lg 7 = 0.84510$, $\lg 8 = 0.90309$, $\lg 9 = 0.95424$, він помножив ці числа на 250 і одержані числа міліметрів наніс на лінійку, відміряючи їх увесь час від нуля своєї скалі.

Отже, логаритмам зазначених чисел відповідали довжини:

lg 1	0,0000 *мм*	
lg 2	75,2575	
lg 3	119,2800	
lg 4	150,5150	
lg 5	174,7425	
lg 6	194,5375	. . . . . (192)
lg 7	211,2750	
lg 8	225,7725	
lg 9	238,5600	
lg 10	250,0000	

Кінець кожної цієї довжини він помітив числом, якого логаритм довжина зображає.

Щоб за допомогою такої лінійки помножити, наприклад, 2×3, брали циркле́м віддаль від 1 до 3 і відкладали її праворуч від 2, на підставі першої формули логаритмування (178*a*) ($\lg ab = \lg a + \lg b$); друга ніжка циркля потрапляла при цім на число 6 і тим показувала результат множення. Щоб не користуватися циркле́м, англієць же Wingate 1627 р. зробив подвійну лінійку, при чім на обох складових частинах лінійки поділки були цілком тотожні.

Найдосконалішу й найзручнішу для користування конструкцію логаритмічної лінійки, яку в суті мають тепер усі вони, виробив англієць Southern за вказівками Watt'а спеціяльно для потреб заводу Messr Boulton & Watt; деякі ж удосконалення пізніше (1851 р.) запропонував ляйтнант французької артилерії A. Mannheim у Меці.

Тепер лічильні лінійки дуже поширені, особливо за кордоном, і є багато різних їх систем. Наприклад, так званий, type

Mannheim, що його виготовляє Maison Tavernier-Gravet у Парижі, Dennert und Pape в Альтоні, A. W. Faber поблизу Нюренберґа, gebr. Wichmann у Берліні, Rietz und Nestler тощо.

Усі вони відмінні одна від одної лише деякими несуттєвими деталями та більшою чи меншою складністю маніпуляцій при користуванні ними. Крім того, останнім часом почали будувати лінійки не тільки для виконання технічних обчислень взагалі, а й для виконання обчислень, які найчастіш трапляються в певних царинах техніки, наприклад, для потреб електротехніків і машинобудівників. У Франції зовсім недавно збудували логаритмічну лінійку спеціяльно, щоб обчисляти залізобетонні конструкції. Безперечно, поштовх до цього дала ота конкуренція вживанню лічильних лінійок, яку утворив розвиток, так званого, номографічного числення, з основами якого ми познайомимось далі, у відділі графічних обчислень.

Ми гадаємо, що ця несподівано виникла в практиці технічних обчислень конкуренція між номографічним численням і лічильною лінійкою не тільки не зашкодить їм, а, навпаки, обіцяє велику майбутність і забезпечить їм переважне місце серед усіх інших способів робити практичні й технічні обчислення, тим паче, що в суті лічильна лінійка є рухома номограма.

Тим що системи лічильних або логаритмічних лінійок дуже різноманітні, ми не зупинятимемося на деталях їхньої будови: їх описано в спеціяльних порадниках, додаваних завжди до кожного примірника лінійки, що є в продажу. Скажемо тільки, що логаритмічна лінійка тепер складається з трьох частин: одної нерухомої власне лінійки, або н е р у х о м о ї с к а л і і двох рухомих — я з и ч к а чи куліси та б і г у н ц я або указника.

Язичок чи куліса — це лінійка, така сама завдовжки, як і нерухома скаля, тільки менш широка; вона рухається у внутрішніх ґарах лінійки - скалі таким способом, що поверхні і язичка й скалі лежать в одній площі; а указник — маленька металева рямка із скельцем і лінією на нім — рухається в зовнішніх (зокільних) ґарах нерухомої скалі.

На нерухомій частині скалі є два роди поділок — дві скалі: верхня й нижня; на них нанесені поділки, пропорційні до логаритмів чисел, при чім поділка на одній скалі розміром удвоє більша, ніж на другій. На прилеглих до цих скаль боках язичка нанесені такі самі поділки.

Язичок можна зовсім вийняти з ґар лінійки і вкласти в неї знову, але вже сподом його догори. На цім споді язичка є ще три скалі: 1) S — поділки її пропорційні до логаритмів синусів кутів; 2) T — поділки її пропорційні до логаритмів танґенсів, і 3) L — відповідає логаритмам чисел. Крім того, звичайно на логаритмічних лінійках є ще скалі з поділками, як на звичайних мірилах; на спіднім же боці нерухомої скалі вміщають коротку довідкову табличку величин, що найчастіш трапляються на практиці при технічних задачах.

Читають числа на лінійці так. Тим що мантиса не зміняє своєї величини від множення чи ділення числа на 10^n, то, щоб прочитати, наприклад, числа 0,002; 0,02; 0,2; 2; 2,0; 2,00 . . . , однаково треба поставити лінію бігунця проти великої поділки, позначеної цифрою 2.

Щоб прочитати двозначне число 2,4, треба взяти до уваги, що воно міститься між 2,0 і 3,0, а тому, прочитавши 2 біля великої поділки, слід посунути волосок бігунця на 4 проміжних (середньої величини) поділки управоруч, в напрямі від великої поділки 2.

Нарешті, якщо треба прочитати тризначне число, наприклад 2,47, то, помітивши, що віддаль між четвертою і п'ятою середніми поділками інтервалу 2—3 поділена на 5 дрібних частин, робимо висновок, що кожна така дрібна поділка відповідає 0,02 числа, яке міститься між 2 і 3, а тому ставимо лінію на середині між 3 і 4 дрібними поділками.

Бачимо, отже, що дійсно, вживаючи логаритмічної лінійки, ми одержуємо дві точні цифри, а третю з деяким огріхом; тимто можемо сміливо робити приблизні обчислення з числами, що мають три вартісні цифри.

Тепер також цілком зрозуміло, що, коли мати ще дрібніші поділки та ще довшу лінійку і зробити на ній поділки не трьох категорій, а чотирьох, то сумнівна цифра результату буде четверта і т. д.

Треба сказати, що користуватися з дуже довгих лінійок незручно, тоді бо лінійка втрачає найбільшу свою вартість — портативність; а мати дуже дрібні поділки на короткій лінійці — що теоретично можливо — незручно, бо помилка при читанні буде надто велика, — читають числа на лінійках неозброєним оком. А втім тепер почали робити дуже короткі лінійки, але з маленькою люпою, злученою з бігунцем чи указником. Є також і кишенькові лічильні лінійки, круглі на вигляд, як годинник, де кружало діяметром від 5 *см* і завгрубшки близько 5 *мм*. Точністю вони мало поступаються звичайній логаритмічній лінійці (25 *см*), але щодо портативности, то вони незамінні.

Опишім тепер, як користуються з логаритмічної лінійки для виконання головніших обчислювальних дій.

Описуючи, ми для простоти зватимемо першу середню й останню риски верхніх скаль лінійки та язичка і першу та останню риски нижніх скаль відповідними указниками [1]).

---

[1]) Не плутати з рухомими указниками або бігунцем (див. стор. 136).

При цім ми радимо: вивчаючи описувані способи, як уживати логаритмічної лінійки, не обмежуватися просто читанням і засвоєнням правил та пояснялвних до них прикладів і рисунків, а безпосередньо вправлятися на лічильній лінійці.

Дії над числами

Передній бік лінійки й язичка

МНОЖЕННЯ

А. Нижні скалі лінійки й язичка

Треба перемножити a і b. Тим що на лінійці нанесені поділки, пропорційні до логаритмів чисел, то треба прологаритмувати вираз ab, тобто $\lg(ab) = \lg a + \lg b$, що на приладі роблять так (рис. 4):

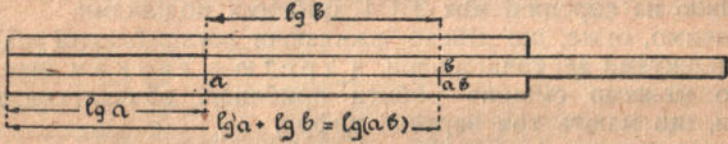


Рис. 4

Числові приклади:

$$\left.\begin{array}{llllll} а)\ 2 \times 4 = 8\ ; & \text{тут}\ a = 2 & \text{і}\ b = 4 & \text{або}\ b = 4 & \text{і}\ a = 2 \\ б)\ 17 \times 5 = 85\ ; & \quad „\ \ a = 17 & „\ \ b = 5 & „\ \ b = 5 & „\ \ a = 17 \\ в)\ 1{,}7 \times 5 = 8{,}5\ ; & \quad „\ \ a = 1{,}7 & „\ \ b = 5 & „\ \ b = 5 & „\ \ a = 1{,}7 \end{array}\right\} \quad (193)$$

Якщо ж один із чинників виходить за межі лінійки, то можна користуватися з того, що

$$\lg\left(\frac{ab}{10}\right) = \lg\ ab - \lg\ 10 = \lg\ ab - 1\ .\ .\ .\ .\ .\ (194)$$

і одержаний результат помножити на 10, тобто перенести кому в добутку на одну цифру праворуч, інакше ми одержуємо ab з $\frac{ab}{10}$, помножаючи цю частку на 10, тобто $\frac{ab}{10} \times 10 = ab$ (рис. 5 та 6).

Числові приклади:

$$\left.\begin{array}{l} а)\ 3 \times 4 \ = 12 \\ б)\ 6 \times 4{,}5 = 27 \\ в)\ 6 \times 4{,}4 = 26{,}4 \end{array}\right| \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (195)$$

З усіх цих прикладів виводимо таке правило знаків:
Добуток має в цілій частині на 1 менше від суми цифр чинників при вживанні правого кінця

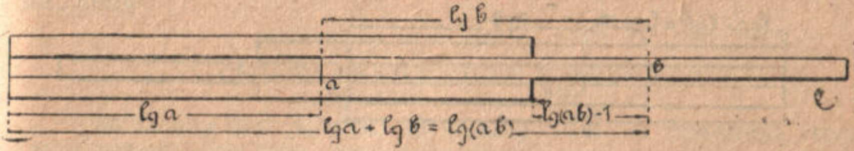


Рис. 5.

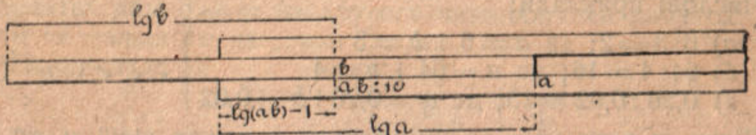


Рис. 6

язичка, і це число лишається незмінне при вживанні лівого.

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ 12\times 3{,}3=39{,}6;\ \text{число цифр перед комою}=(2+1)-1=+2 \\ б)\ 0{,}043\times 25{,}6=1{,}10(08^{1});\ \text{число цифр перед комою}=-1+2=+1 \\ в)\ 0{,}67\times 0{,}04=0{,}0268;\ \text{число цифр перед комою}=0-1=-1 \end{array}\right\} . \qquad (196)$$

Б. Верхні скалі лінійки й язичка

Тими самими правилами слід керуватися при діях на верхніх скалях язичка й лінійки, при чім треба тільки не забувати, що вони являють собою дві пари рівних одна з одною самостійних скаль, удвоє зменшених проти нижніх.

Тим що поділки на нижніх скалях більші й результати на них виходять точніші, то краще звикнути працювати на нижніх скалях.

ДІЛЕННЯ

А. Нижні скалі лінійки й язичка

Треба поділити $\frac{a}{b}$.

---

[1]) Чисел, поставлених у дужки (.), не можна точно прочитати на лінійці.

На підставі сказаного слід прологаритмувати цей вираз $\lg\left(\frac{a}{b}\right)=\lg a-\lg b$, тому (рис. 7):

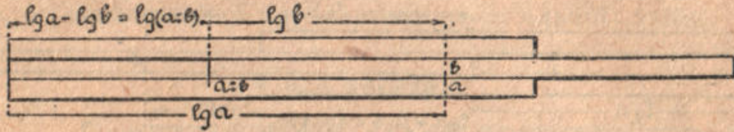


Рис. 7

Числові приклади:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ 6:3=2;\ \text{де}\ a=6\ \text{і}\ b=3 \\ б)\ 64:4=16;\ \text{де}\ a=64\ \text{і}\ b=4 \\ в)\ 0{,}26:0{,}02=13;\ \text{де}\ a=0{,}26\ \text{і}\ b=0{,}02 \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (197)$$

Якщо ж результат не вміщається в межах лінійки, то слід узяти до уваги, що

$$\lg\left(\frac{a}{b}+10\right)=\lg\frac{a}{b}+\lg 10=\lg\frac{a}{b}+1 \ldots\ldots\ldots \quad (198)$$

і одержаний результат поділити на 10, тобто перенести кому на одну цифру ліворуч (рис. 8).

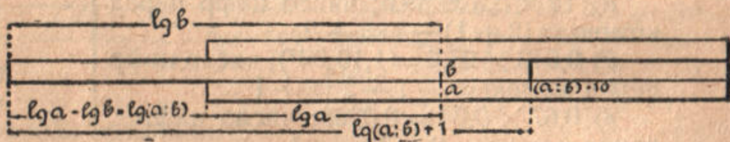


Рис. 8

Числові приклади:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ 24:\ 6=4 \\ б)\ 2{,}1:0{,}7=3 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (199)$$

Звідси виводимо правило:

Частка має в цілій частині на 1 більше від ріжниці числа цифр у цілих частинах діленика й дільника при вживанні лівого кінця язичка, і це число лишається незмінне при вживанні правого.

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ 84:1{,}2=70;\ \text{число цифр перед} \\ \text{комою}=(2-1)+1=+2 \\ б)\ 3{,}99:0{,}021=190;\ \text{число цифр} \\ \text{перед комою}=[1-(-1)]+1=+3 \\ в)\ 0{,}026:\ 0{,}65=0{,}04;\ \text{число цифр} \\ \text{перед комою}=-1-0=-1 \end{array}\right\} \ldots \quad (200)$$

Б. Верхні скалі лінійки й язичка

Тут можна послатися на те, що вже сказано в Б при множенні.

Сумісне множення й ділення

Розв'язання цієї задачи засноване теж на принципі логаритмування, при чім дію виконувати зручніше так: спершу поділити першого чинника на першого дільника, одержаний результат помножити на другого чинника, цей добуток поділити на дальшого дільника і т. д.

Наприклад:

$$\left.\frac{a\times b\times c\times d}{e\times f\times g}=\frac{\frac{\frac{a}{e}b}{f}c}{g}d\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (201)$$

Правило знаків:

Альґебричну суму цифр, що стоять у цілих частинах чинників і дільників, стільки разів збільшити (зменшити) на одиницю, скільки разів результат ділення (множення) траплявся у тій же скалі ліворуч (праворуч) від попереднього.

Коли ж результат щоразу виходив за межі лінійки, то альґебрична сума цифру цілих частинах чинників лишається незмінна.

Квадратування й добування квадратового кореня

Ці дії не будуть трудні, як згадаємо, що поділка на верхніх скалях струменту якраз удвоє менша, ніж на нижніх. Тому, якщо візьмемо на нижній скалі якесь число a, то прямовисно розташоване над ним число на верхній скалі буде a^2; а якщо візьмемо на верхній скалі якесь число b, то прямовисно під ним на нижній скалі одержимо $\sqrt{b}$.

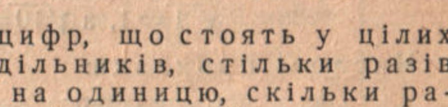


Рис. 9

1) Справді $\lg(a^2)=2\lg a$, тобто (рис. 9).

Числові приклади:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ 7^2 = 49 \\ б)\ 25^2 = 625 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (202)$$

2) Так само для добування кореня маємо

$$\lg\left(\sqrt{b}\right) = \lg\left(b^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\lg b, \text{ тобто (рис. 10)} \quad \ldots\ldots \quad (203)$$

Перше, ніж дати числові приклади, зауважмо, що при добуванні кореня з числа з непарним числом цифр (1, 3, 5 . . . . . . — значних) треба користуватися верхньою лівою скалею (між 1 і 2 указниками), а з числа з парним числом цифр — верхньою правою скалею (між 2 і 3 указниками).

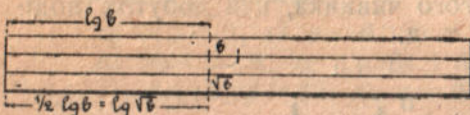


Рис 10

Це дуже легко запам'ятати, коли мати на увазі, що

$$\sqrt{1} = 1, \text{ а } \sqrt{10} = 3{,}162 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (204)$$

Числові приклади:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ \sqrt{625} = 25 \\ б)\ \sqrt{409(4)} = 64 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (205)$$

Правило знаків:

Квадрат має в цілій частині $2n-1$ цифри, коли результат випадає в лівій верхній скалі, і $2n$ — коли в правій, при чім n — число цифр у цілій частині квадратованої кількости.

Перед коренюванням розбивають спочатку підкореневу кількість на дільниці, ліворуч від коми, по дві цифри в кожній, і, якщо в крайній лівій дільниці лишиться одна цифра, шукають корень, ставлячи бігунець у лівій верхній скалі, а якщо дві цифри — то в правій, при чім число цифр перед комою в результаті дорівнює числу дільниць підкореневої кількості перед комою.

Проте, може трапитися, що перед комою немає жодної вартісної цифри. Тоді треба лічити від'ємні дільниці, тобто ті, що утворюються праворуч від коми, і число перших лівих незмішаних дільниць у підкореневій кількості дасть число нулів після коми в результаті.

Щоб знати, чи в правій, чи в лівій скалі поставити волосок, напишім десятковий дріб так, щоб він мав після коми парне число цифр, додаючи, при потребі, з правого боку нуль, і потім одержане після коми число поділім від правої руки до лівої на дільниці (по дві цифри); тоді одна чи дві цифри крайньої лівої дільниці покажуть, де поставити волосок — у лівій чи в правій скалі.

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{l}
\sqrt{0,27}\text{ — у лівій крайній дільниці 2 цифри, число нулів після коми} = 0\text{, тобто } \sqrt{0,27} = 0,519(62); \\
\sqrt{0,027} = \sqrt{0,0\,27}\text{ — у лівій крайній дільниці 1 цифра, число нулів після коми} = 0\text{, тобто } \sqrt{0,027} = 0,1643; \\
\sqrt{0,0027} = \sqrt{0,00/27}\text{ — у лівій крайній дільниці 2 цифри, число нулів після коми} = 1\text{, тобто } \sqrt{0,0027} = 0,0519(62); \\
\sqrt{0,00027} = \sqrt{0,00|02|70}\text{ — у лівій крайній дільниці 1 цифра, число нулів після коми} = 1\text{, тобто } \sqrt{0,00027} = 0.01643; \\
\sqrt{0,000027} = \sqrt{0,00|00|27}\text{ — у лівій крайній дільниці 2 цифри, число нулів після коми} = 2\text{, тобто } \sqrt{0,000027} = 0,00519(62).
\end{array}\right\} \quad (206)$$

Є й іще спосіб квадратувати числа та добувати з них квадратовий корінь, при чім користуються або самими нижніми скалями, або самими верхніми.

У першім випадку роблять, як при звичайнім множенні, бо

$$\lg(a^2) = \lg(a \cdot a) = \lg a + \lg a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (207)$$

Шукаючи ж квадратовий корінь, треба поставити волосок на ту поділку, що виражає підкореневу кількість, і потім, посуваючи язичок, відшукати лівим указником на скалі лінійки — коли крайня ліва дільниця підкореневої кількости складається з одної цифри — таке число, що дорівнювало б числу на відповідній скалі язичка, яке випадає під волоском бігунця; коли ж у крайній лівій дільниці підкореневої кількости буде дві цифри, то користуються правим указником язичка.

Наприклад, щоб знайти $\sqrt{625}$, треба вжити лівого указника, а $\sqrt{6250}$ — правого.

Кубування та добування кубічного кореня

1) Щоб кубувати якесь число, треба спершу його квадратувати, а те, що одержимо, ще раз помножити на степеньовану кількість. На лінійці це роблять так (рис. 11):

$$\lg(a^3) = \lg(a^2 \cdot a) = \lg a^2 + \lg a \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (208)$$

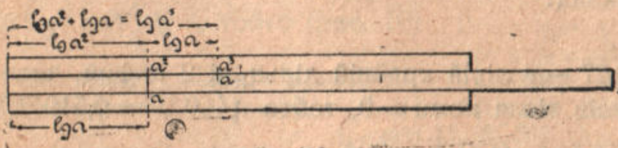


Рис. 11

Якщо результат виходить за другу верхню скалю, то вживають правого боку язичка (рис. 12).

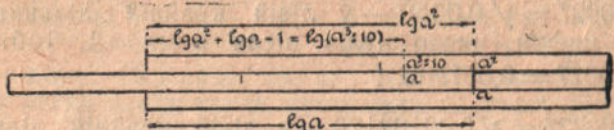


Рис. 12

Числові приклади:

$$\left.\begin{array}{l} а)\ 18^3 = 18^2 \times 18 = \ \ 683(2) \\ б)\ 24^3 = 24^2 \times 24 = 1382(4) \\ в)\ 61^3 = 61^2 \times 61 = \ \ 226(981) \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (209)$$

Звідси правило знаків:

Коли степеньована кількість має в цілій частині n цифр, то степінь матиме $3n-1$ цифри перед комою, якщо результат буде в лівій верхній скалі; $3n-1$ цифри перед комою, якщо результат буде в правій верхній скалі, і $3n$ цифри, якщо вживано правих указників язичка і результат випав у правій верхній скалі.

Коли степеньована кількість у своїй цілій частині не має вартісної цифри, то треба вважати $n=0$, якщо після коми зразу ж починаються вартісні цифри (напр., $0{,}12^3$) і $n = -(n)$, де n позначає число нулів після коми (напр., $0{,}0012^3$, тут $n = -2$, тобто $(n) = 2$).

2) Добуваючи корінь третього степеня, треба користуватися (рис. 13 і 14) з того, що

$$\lg \sqrt[3]{a} = \lg\left(a^{\frac{1}{3}}\right) = \lg\left(a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{3}\lg\sqrt{a} =$$

$$= \lg\sqrt{a} - \frac{1}{3}\lg\sqrt{a}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (210)$$

тобто, поставивши волосок на число, яке виражає підкореневу кількість у верхніх скалях, відсуваємо язичок ліворуч або праворуч приблизно на одну третину довжини від волоска до найближчого кінця нерухомої скалі, аж доки число під волоском на верхній скалі язичка не дорівняє числу, на яке показує крайній указник язичка на нижній скалі лінійки.

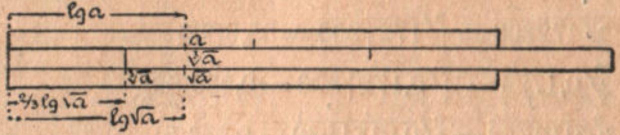


Рис. 13

Числові приклади:

$$\left.\begin{aligned} a)\ \sqrt[3]{8} &= 2 \\ б)\ \sqrt[3]{27} &= 3 \\ в)\ \sqrt[3]{216} &= 6 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (211)$$

З прикладів бачимо, що перед коренюванням треба підкореневу кількість поділити від правої руки до лівої на дільниці по 3 цифри в кожній; якщо в останній дільниці лишається одна

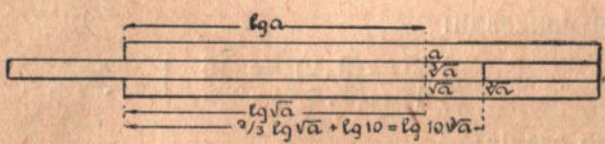


Рис. 14

цифра, то волосок ставлять у лівій верхній скалі і шукають корінь лівим указником язичка; якщо в останній дільниці лишилося 2 цифри, то волосок ставлять у правій верхній скалі й шукають корінь знову таки лівим указником; але коли в останній дільниці буде 3 цифри, то волосок ставлять у правій верхній скалі й шукають результат правим указником язичка.

Правило знаків:

Число цифр перед комою в корені дорівнює числу дільниць у підкореневій кількості.

Наприклад:

$$
\left.
\begin{array}{l}
a)\ \sqrt[3]{1728}=\sqrt[3]{1|728}=12\\
\quad\sqrt[3]{17280}=\sqrt[3]{17|280}=25{,}8(5)\\
\quad\sqrt[3]{172800}=\sqrt[3]{172|800}=55{,}6(99)\\
б)\ \sqrt[3]{0{,}1728}=\sqrt[3]{0{,}172|800}=0{,}556(99)\\
\quad\sqrt[3]{0{,}01728}=\sqrt[3]{0{,}017|280}=0{,}258(5)\\
\quad\sqrt[3]{0{,}001728}=\sqrt[3]{0{,}001|728}=0{,}12\\
в)\ \sqrt[3]{0{,}0001728}-\sqrt[3]{0{,}000|172|800}=0{,}0556(99)\\
\quad\sqrt[3]{0{,}00001728}=\sqrt[3]{0{,}000|017|280}=0{,}0258(5)\\
\quad\sqrt[3]{0{,}000001728}=\sqrt[3]{0{,}000|001|728}=0{,}012
\end{array}
\right\} \quad . \ (212)
$$

Піднесення до четвертого степеня та добування кореня четвертого степеня

Піднесення до 4-го степеня є подвійне квадратування, а добування кореня 4-го степеня — подвійне добування квадратового кореня.

1) На приладі цю задачу розв'язуємо так (рис. 15):

$$\lg(a^4)=\lg(a\cdot a)^2=2(\lg a+\lg a)=\lg a^2 \quad . \ . \ . \ . \ (213)$$

Числові приклади:

$$\left.\begin{array}{l} а)\ 2^4=(2.2)^2=16\\ б)\ 4^4=(4.4)^2=256\end{array}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (214$$

Правило знаків:

Число цифр у цілій частині результату дорівнює $4n-3$ (n — число цифр у цілій частині степеньо-

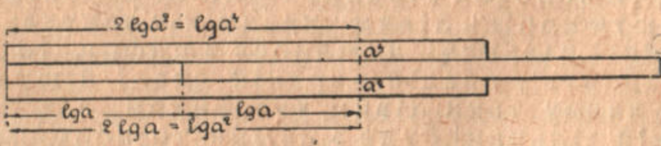


Рис. 15

ваної кількости), якщо вживано лівого указника язичка й результат випав у лівій верхній скалі лінійки; $4n-2$, — якщо вживано лівого указника й результат випав у правій верхній скалі; $4n-1$,—якщо вживано правого указника й результат випав у лівій верхній скалі; нарешті, $4n$,—якщо вживано правого указника й результат випав у правій верхній скалі.

Наприклад:

$$\left.\begin{array}{llll}
a)\ 13^4 = 285(61), & & в)\ 5^1 & = 625 \\
\quad 1{,}3^4 = 2{,}85(61), & & \quad 0{,}5^4 & = 0{,}0625 \\
\quad 0{,}1^4 = 0{,}000285(61) & & \quad 0{,}5^4 & = 0{,}00000625 \\
б)\ 3^4 = 81 & & г)\ 8^4 & = 409(6), \\
\quad 0{,}3^4 = 0{,}0081 & & \quad 0{,}8^4 & = 0{,}409(6), \\
\quad 0{,}03^4 = 0{,}00000081 & & \quad 0{,}08^4 & = 0{,}0000409(6)
\end{array}\right\} \quad (215)$$

2) Для коренювання слід скористуватися з того, що (рис. 16):

$$\lg \sqrt[4]{a} = \frac{1}{2}\left(\lg a - \frac{1}{2}\lg a\right) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (216)$$

Тут треба керуватися таким правилом:

Над рискою, що зображає підкореневу кількість, у верхніх скалях ставлять волосок і висувають язичок ліворуч або праворуч на половину довжини волоска до кінця нерухомої скалі,

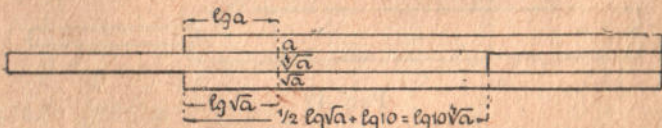


Рис. 16

тобто доки число над волоском на нижній скалі язичка не дорівняє числу, на яке показує крайній указник язичка на нижній скалі лінійки.

Щоб знати, у якій з верхніх скаль слід поставити волосок, ділять спершу підкореневу кількість від правої руки до лівої на дільниці, по чотири цифри в кожній, і, якщо в останній лівій дільниці підкореневої кількости лишилась одна цифра, то вживають верхньої лівої скалі лінійки і лівого указника язичка; якщо дві — то правої верхньої скалі лінійки і лівого указника язичка; якщо три — то лівої скалі й правого указника; якщо чотири — то правої скалі й правого указника.

Правило знаків:

Число груп у підкореневій кількості дає число цифр у корені.

Приклади:

$$\left.\begin{array}{ll} a)\ \sqrt[4]{8\,|\,35(21)} = 17 & д)\ \sqrt[4]{0{,}2500\,|} = 0{,}707(1) \\ б)\ \sqrt{23\,|\,4(\overline{256})} = 22 & е)\ \sqrt[4]{0{,}0250\,|} = 0{,}397(627) \\ в)\ \sqrt[4]{341\,|\,(8801)} = 43 & ж)\ \sqrt[4]{0{,}0025\,|} = 0{,}223(6) \\ г)\ \sqrt[4]{4304\,|\,(6721)} = 81 & з)\ \sqrt[4]{0{,}0002\,|}\,5000 = 0{,}1257 \end{array}\right\} \quad \ldots (217)$$

Дії з тригонометричними функціями

Перед лінійки й спід язичка; указники: s (sinus) і t (tangens) на язичку.

У межах для sin: від $\sin\alpha = \sin 0^\circ 35^1/_2{}' = 0{,}01$ до $\sin\alpha = \sin 90^\circ = 1$ і для tg: від $\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}\,5^\circ 42'38'' = 0{,}1$ до $\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}\,45^\circ = 1$.

1) Не перевертаючи язичка сподом догори, можна за даним кутом визначити вартість sinus'a, або tangens'a, чи навпаки.

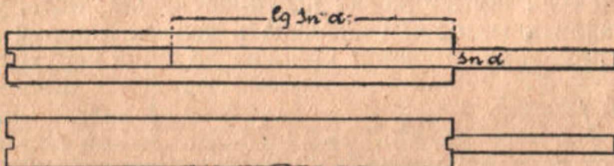


Рис. 17

Роблять це так. Повертаючи кругом усю лінійку, витягують язичок у правий бік для sinus'a і в лівий бік для tangens'a, доки під відповідною рискою не буде шуканий кут; тоді знову повертають усю лінійку і під верхнім правим крайнім указником лінійки на язичку читають відповідну вартість sinus'a або під нижнім лівим крайнім указником лінійки читають відповідну вартість tangens'a (рис. 17).

Числові приклади:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ \sin\ 5^\circ 20' = 0{,}0929 \\ \quad \sin 29^\circ 30' = 0{,}492(4) \\ б)\ \mathrm{tg}\ 17^\circ 10' = 0{,}308(9) \\ \quad \mathrm{tg}\ 36^\circ 40' = 0{,}744(5) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (218)$$

Правило знаків:

Для тих вартостей sinus'a, що їх одержуємо в правій верхній скалі язичка, маємо 0 цілих, 0 десятих і потім вартісні цифри (0,0 . . . .), а для тих, що їх одержуємо в лівій, зразу після коми йдуть вартісні цифри, при чім зрозуміла річ, 0 цілих (0, . . .).

Для tangens'a ж завжди одержуємо 0 цілих і зразу йдуть вартісні цифри (0, . . .).

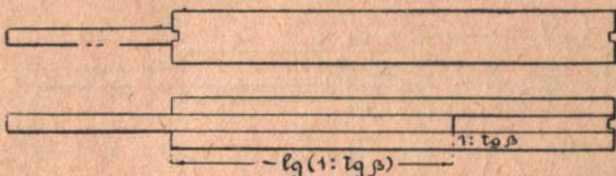


Рис. 18

2) Не повертаючи язичка з його звичайного положення, можна знаходити вартості $\frac{1}{\sin\alpha}$ та $\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$, що бачимо з рис. 18.

Числові приклади:

$$\left.\begin{aligned} a)\ \frac{1}{\sin 22^0} &= 2{,}66(6) \\ \frac{1}{\sin 2^0 40'} &= 21{,}5(05) \\ б)\ \frac{1}{\operatorname{tg} 13^0 10'} &= 4{,}27(5) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (219)$$

Правило знаків:

При діленні на sin результат має в цілій частині одну вартісну цифру, якщо він випав у верхній лівій скалі, і дві — якщо він випав у верхній правій. При діленні ж на tg завжди в цілій частині одержуємо одну вартісну цифру.

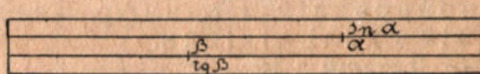


Рис. 19

3) Повернувши язичок спіднім боком догори і всунувши його в такім положенні в лінійку, безпосередньо одержуємо вартість sin або tg за даним кутом, чи навпаки (рис. 19).

4) Для множення якогось числа a на $\sin\alpha$ або b на $\operatorname{tg}\beta$, за правилами логаритмування, маємо (рис. 20):

$$\left.\begin{aligned} &\lg(a\sin\alpha) = \lg a + \lg\sin\alpha \\ &\text{або} \\ &\lg(b\operatorname{tg}\beta) = \lg b + \lg\operatorname{tg}\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (220)$$

Якщо ж результат не вміщається в межах лінійки, то роблять так, як уже ми зазначали у множенні та діленні.

Числові приклади:

$$\left.\begin{array}{ll} a) & 3\sin 5^0 = 0{,}262 \\ б) & 12\,\mathrm{tg}\,11^0 = 2{,}33(28) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (221)$$

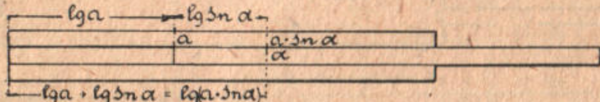


Рис. 20

Правило знаків при множенні (n — число цифр у цілій частині в коефіцієнтів a або b).

а) При множенні на sin.

Добуток має в цілій частині n дві вартісні цифри, якщо одержуємо його праворуч від a у тій же самій скалі: $n-1$, — якщо одержуємо його праворуч від a у дальшій скалі або ліворуч від a у попередній скалі, і n, — якщо ліворуч від a у тій самій скалі.

б) При множенні на tg.

Добуток має в цілій частині $n-1$ цифру, якщо він буде праворуч від b, і n цифр, — якщо ліворуч.

Після всього сказаного ділення ніяких труднощів уже не становить.

Правило знаків при діленні:

а) Для дій з sin.

Частка має в цілій частині $n+2$ цифри, якщо вона буде ліворуч від a в тій же скалі; $n+1$ цифру, — якщо праворуч у дальшій або ліворуч у попередній, і n цифр, — якщо праворуч у тій самій скалі лінійки.

б) Для дій з tg.

Частка має в цілій частині $n+1$ цифру, якщо вона буде ліворуч від b, і n цифр, — якщо праворуч.

Щоб визначити tg для кутів понад 45^0, треба скористуватися з рівняння:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,(90^0 - \alpha) = \frac{1}{\mathrm{tg}\,(90^0 - \alpha)} \quad \ldots\ldots \quad (222)$$

Наприклад:

$$\mathrm{tg}\,60^0 = \frac{1}{\mathrm{tg}\,30^0} = \frac{1}{0{,}577} = 1{,}732 \quad \ldots\ldots \quad (223)$$

В. Малі кути

Ці дії можна виконувати для кутів, менших від 35′. Тоді беремо до уваги, що

$$\operatorname{tg} 1' = \sin 1' = arc\ 1' = \frac{1}{3437,7}$$

та

$$\operatorname{tg} 1'' = \sin 1'' = arc\, 1'' = \frac{1}{206\,265}.$$

Щоб легко можна було знайти знаменників цих дробів, на верхній скалі язичка є дві риски; отже, коли язичок увесь всунутий, то одна риска припадає над числом 206 265, а друга під 3 437,7.

Числові приклади:

$$\left.\begin{aligned} &a)\ \sin 0^0\,16' = 16 \sin 1' = \frac{16}{3437,7} = 0{,}00465(4) \\ &б)\ \operatorname{tg} 0^0\,0'12'' = 12 \operatorname{tg} 1'' = \frac{12}{206\,265} = 0{,}0000581(8) \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ (224)$$

Дії з логаритмами

Нижня скаля лінійки і спідня середня скаля язичка.

Вище казано, що всі поділки лінійки й язичка зроблено пропорційними до логаритмів відповідних функцій, тому по-

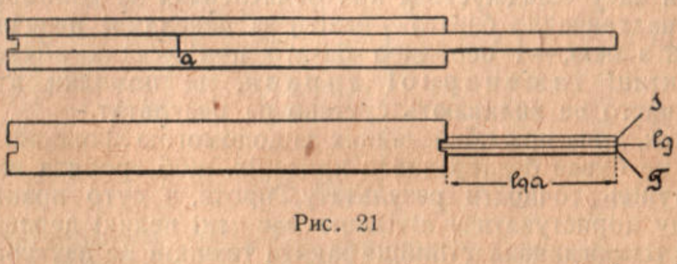


Рис. 21

ділки для самих логаритмів однакові одна з одною (для 250 *мм* лінійки їх роблять рівними $^1/_2$ *мм*).

Шукаючи результат, висувають язичок у правий бік, доки нижній лівий указник язичка не зупиниться під шуканим числом; тоді повертають кругом увесь прилад і прочитують від правої руки до лівої мантису (рис. 21).

Знавши це, не важко робити всякі дії, де треба застосовувати lg.

Числові приклади:

$$\left.\begin{array}{l}
a)\ 2{,}17^5. \\
\text{Спершу знаходимо } \lg 2{,}17 = 0{,}336. \\
\text{Це множимо на 5, одержуємо 1,68.} \\
\text{За цією вартістю логаритму визначаемо} \\
\quad \text{число 48,0, тобто } 2{,}17^5 = 48{,}0;\ \text{точніше} \\
\quad 48{,}116 \\
б)\ \sqrt[7]{451}. \\
\text{Спершу визначаємо } \lg 451 = 2{,}6542. \\
\text{Це ділимо на 7, одержуємо 0,3792.} \\
\text{За цим } \lg \text{ знаходимо число 2,39, тобто} \\
\quad \sqrt[7]{451} = 2{,}39;\ \text{точніше } 2{,}394206
\end{array}\right\} \quad \ldots . \quad (225)$$

Дальші подробиці, як застосовувати зазначені основні способи вживання логаритмічної лінійки в різних окремих випадках, а також вказівки, як розв'язувати інші питання, можна знайти в названих вище порадниках про користування логаритмічними лінійками при наближених обчисленнях.

Треба сказати, що ступінь точности результату залежить тут: 1) від вірности самих поділок на лінійці; 2) від вірного визначення збігу рисок і 3) від вірної оцінки частин проміжків між рисками, тобто: 1) від можливих огріхів у самій конструкції приладу, невідомих звичайно тому, хто з нього користується, та 2) від суто індивідуальних особливостей того, хто робить обчислення; тимто та сама лінійка може давати результати неоднакової точности в руках різних осіб. Проте, праці й часу ощаджується при обчисленнях за допомогою лінійки надзвичайно багато — навіть за невеликої навички працювати з нею, — і особливо багато при всяких обчисленнях у практиці *інженерної справи*, де помилки в третім знаку часто не впливають суттєво на результат.

Отож, хоча при обчисленнях за допомогою лічильної лінійки часом не буває безперечного критерія, щоб зробити висновок про ступінь точности результату, проте, з суто практичного погляду користуватися лінійкою має такі великі переваги, що можна тільки якнайнастійніше радити техніків не нехтувати цим чудесним приладом, а обізнатися з ним досконало ще в школі.

§ 36. Рухомі таблиці. Описуючи логаритмічну лінійку, ми сказали, що її можна до певної міри вважати за рухому таблицю логаритмів.

Але будова рухомих таблиць в сутім розумінні слова ґрунтується на трохи інших засадах; їх ми тут і пояснимо.

Властивості десяткової системи числення дають змогу утворені чотирма аритметичними діями функції, яких арґументи виражені в десятковій системі числення, представити, як суму однакових формою функцій від двох змінних. Іноді вартість одного змінного буває спільна для всіх додаваних функцій і тільки вартість другого змінного різна при переході від одного доданку до другого; крім того, обидва змінних можуть одержати найбільше число цілком означених вартостей.

Припустім, наприклад, що функцію F можна представити, як суму функцій вигляду $f(x, y, p)$:

$$F = \Sigma\ f(x, y, p), \quad \ldots\ldots\ldots (226)$$

де x, y — змінні, а p — параметр, сталий доданок або чинник, залежний звичайно від місця, що його займає доданок f; припустім також, що величина x дістає одну з n вартостей

$$x_1, x_2, \ldots x_n \quad \ldots\ldots\ldots (227)$$

однакову для всіх доданків, а величина y — одну з m вартостей

$$y_1, y_2, \ldots y_m \quad \ldots\ldots\ldots (228)$$

взагалі відмінну для кожного доданку.

Щоб обчислити функцію F (226), можна скласти ряд табличок, де вмістити для кожної з m вартостей y, n вартостей f, що відповідають n частинним вартостям x; вигляд цих табличок може бути такий:

	y_k
x_1	$f(x_1, y_k, p)$
x_2	$f(x_2, y_k, p)$
.	.
.	.
x_n	$f(x_n, y_k, p)$

. . . . (229)

Уживаючи табличок, можна за допомогою даних вартостей x та y знайти величини функцій f, що в сумі визначають шукану вартість функції F. Щоб швидше й зручніше вибирати, усі таблички, які відповідають вартостям y, треба розташувати поруч одна одної і якраз таким порядком, яким стоять доданки в функції F.

Наприклад, коли б функцію F представляла в окремім випадку сума:

$$F = f(x^k, y^a, p') + f(x^k, y^b, p'') + f(x^k, y^c, p''') \quad \ldots (230),$$

то бажане розташування відповідних табличок (220) було б таке:

	y_a	y_b	y_c
x_1	$f(x_1, y_a, p)$	$(f(x_1, y_b, p)$	$f(x_1, y_c, p)$
x_2	$f(x_2, y_a, p)$	$(f(x_2, y_b, p)$	$f(x_2, y_c, p)$
.	.	.	.
x_k	$f(x_k, y_a, p)$	$(f(x_k, y_b, p)$	$f(x_k, y_c, p)$
.	.	.	.
x_n	$f(x_n, y_a, p)$	$f(x_n, y_b, p)$	$f(x_n, y_c, p)$

. . . (230*a*)

Підсумовуючи послідовні вартості f, які стоять у підкресленім рядку табличок, одержимо шукану величину F.

Тим що послідовність вартостей y у додаваних функціях може бути дуже різноманітна, то й розташування (230) табличок буде інше в кожнім окремім випадку. Отож, розташовувати таблички можна лише тоді, коли вони рухомі, і коли їх можна переставляти відповідно до різних комбінацій вартостей.

Рухомі таблиці є, отже, перехідна зв'язна ланка між таблицями в сутім розумінні слова і лічильними приладами; тут результат дії, тобто вартість функції F одержують за допомогою таблиць та механічним переміщенням окремих табличок.

Рухомі таблиці вперше запропонував І. Непер і описав їх у спеціяльнім творі, виданім 1617 р. Рухомі таблиці Непера відомі під назвою Неперових паличок, бо вони були наклеєні на рухомій лінійці і призначені на те, щоб обчислювати добуток довільного, вираженого десятковими знаками, числа на яку завгодно однозначну кількість.

Цілий ряд винахідників намагався вдосконалити Неперові палички, і тепер є не один десяток різних змін цієї ідеї.

1885 року Genaille та Lucas винайшли рухомі таблиці для обчислення частки всякого вираженого десятковими знаками числа на число однозначне.

В разі складніших дій, функції не мають зазначених вище властивостей, і рухомі таблиці непридатні тоді для обчислення їх.

Неперові палички. Не зупиняючись на теоретичних подробицях уґрунтування будови Неперових паличок, на доказах правильности вживання їх, опишім загальними рисами ідею їхньої будови й спосіб користуватися з них.

Призначено палички Непера на те, щоб обчисляти добутки чисел; це — окремі стяжки з паперу чи картону, ба навіть з дерева, типу (229).

На кожній стяжці написано вгорі певне число, наприклад, 6, а під ним виписано один під одним по вертикалі добутки його на однозначні множники, почавши з 2 і кінчаючи 9. Ці добутки виписані, проте, не звичайним способом, а так, що цифра десятків стоїть ліворуч у верхнім кутку розділеного діягоналею квадрата, а цифра одиниць—праворуч у низу того ж таки квадрата.

Отже, кожна окрема табличка або паличка Непера має вигляд (231).

. . . . (231)

Зазначені в табличці (231) числа є вартості функцій $f(x, y_k, p)$ у табличці (229), що відповідають даному y_k при відповідних частинних вартостях x, показаних на табличці (231) у стяжці, обведеній крапчаком. Ці вартості x виписують на окремій стяжці, яку можна поставити поруч першої - ліпшої рухомої таблички вигляду (231), або поруч певної групи таких табличок за типом табличок (230*a*).

Очевидячки, треба мати такі таблички вигляду (231) для всіх чисел від 1 до 9 включно і до того по кілька таких паличок для кожного з них. Покажім тепер на окремім числовім прикладі, як користуватися з Неперових паличок.

Нехай треба знайти добуток

$$P = 567\,831 \times 7 \quad . . . . (232)$$

З Неперових паличок, які маємо, вибираємо ті, що відповідають вартостям $y = 5, 6, 7, 8, 3$ та 1, і ставимо одну поз одну порядком розрядів множеника, почавши від вищих; з лівої руки присуваємо паличку з вартістю x, тоді в рядку, що відповідає $x = 7$, знайдемо (233) усі величини, потрібні для знаходження добутку, сумуючи числа, які стоять в суміжних, виділених діягоналями, половинках квадратів. Саме, ми одержимо:

$$\left.\begin{aligned}P=10^6.3+10^5(5+4)+10^4(2+4)+10^3(9+5)+\\+10^2(6+2)+10(1+0)+7=3\,974\,817\end{aligned}\right\}\quad\ldots(232a)$$

1	5	6	7	8	3	1
2	1/0	1/2	1/4	1/6	0/6	0/2
3	1/5	1/8	2/1	2/4	0/9	0/3
4	2/0	2/4	2/8	3/2	1/5	0/4
5	2/5	3/0	3/5	4/0	1/5	/5
6	3/0	3/6	4/2	4/8	1/8	0/6
7	3/5	4/2	4/9	5/6	2/1	0/7
8	4/0	4/8	5/6	6/4	2/4	0/8
9	4/5	5/4	6/3	7/2	2/7	0/9

. . . . (233)

Зрозуміло, що окремі пари цифр підсумовуємо в умі, а одержані цифри добутку послідовно виписуємо на папері.

Виконуючи звичайним методом множення многозначних чисел на розряди множника, ми складаємо й сумуємо добутки множеника на окремі цифри множника; відшукування останніх добуткiв можна з успіхом робити Неперовими паличками.

Припустім, наприклад, що нам треба знайти добуток того ж таки многозначного числа $A=567\,831$, взятого в попереднім прикладі, на число $3\,894$:

$$P=567\,831\times 3\,894\quad\ldots\ldots\ldots 234$$

За допомогою таблиці (233), складеної з Неперових паличок, знаходимо:

$$\left.\begin{aligned}567\,831\times4&=2\,271\,324\\567\,831\times9&=5\,110\,479\\567\,831\times8&=4\,542\,648\\567\,831\times3&=1\,703\,493\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(234a)$$

Уживаючи ж звичайної схеми множення, одержимо:

$$\left.\begin{array}{r} 567\,831\\ \times\, 3\,894\\ \hline 2\,271\,324\\ 51\,104\,79\\ 454\,264\,8\\ 1\,703\,493\\ \hline 2\,211\,133\,914 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(234б)}$$

За допомогою Неперових паличок можна хутко одержувати добутки яких завгодно великих чисел на довільне однозначне число. Отже, Неперові палички з великою вигодою заміняють таблиці добутків натурального ряду чисел на однозначні множники (232) уже через те, що йдуть багато далі таблиць.

Тим що ці палички дуже прості, їх може виготувати кожен, користуючись для того не тільки дощечками, а й картонними стяжками. Щоб зручніше було вживати паличок, корисно мати спеціяльну плоську скриньку, завширшки таку, як довжина паличок, куди й укладати потрібним порядком окремі палички; скринька забезпечує знаходження відповідних вартостей x,— їх звичайно пишуть з правого й з лівого боку на бортах скриньки.

Щоб менше було паличок, окремі таблички, які стосуються до різних вартостей y, наклеюють з обох боків палички.

Хоча вартість $y=0$ при перемноженнях на всі вартості $x=a$ дає нулі, проте, щоб правильно підрахувати добуток чисел, які містять в якомусь розряді нулі, треба мати таблички й для нуля.

З сучасних численних відмін Неперових паличок, спрямованих, головно, на те, щоб зробити палички практичнішими, слід відзначити очну зміну, де переставляння окремих табличок замінено звичайним їх зсуванням рівнобіжно одна з одною. Це вдосконалення запропонував 1892 року Еґґіс.

Не зупиняючись на описі Еґґісового приладу, зазначим, що суттєва хиба й найбільше джерело помилок при користуванні Неперовими паличками та їхніми відмінами є те, що доводиться додавати дві однойменного розряду цифри, що стоять поруч на паличках.

Цю хибу спробували усунути французи Женайль та Люкас на своїх брусках для множення, збудованих і описаних 1885 року.

Не вважаючи на надзвичайно дотепну конструкцію їхнього приладу, вживання його в суті таке саме, як і Неперових паличок. Отже, рухомі таблиці, взагалі, не ґарантують обчислювача від грубих помилок. Крім того, вживання їх не завжди прискорює обчислення, бо пересувати та переставляти таблиці здебільшого доводиться руками.

Тому рухомі таблиці особливо широкого вжитку не мають і при великих та відповідальних обчисленнях, коли потрібна велика точність, переважно користуються замість всяких таблиць, до яких треба додатково вживати іще якихось засобів, наприклад, російської рахівниці, лічильними машинами та приладами; тут, по змозі, всі обчислювальні дії виконуються автоматично, механічно, з ґарантією вірного результату, і увага обчислювача не втомлюється так швидко.

Розділ VII. Виконання обчислень механічним способом (Лічильні прилади й машини)

§ 37. Найголовніші лічильні прилади й машини виконувати основні аритметичні дії. Коли якась робота складається з низки цілком закінчених і послідовно повторюваних дій, то таку роботу можна, як то кажуть, м е х а н і з у в а т и, тобто збудувати відповідно пристосовану машину, і машина виконуватиме цю роботу, роблячи відповідним порядком потрібні складові дії, що з них дана робота складається, та повторюючи їх довільне число разів.

Наш прямий і зворотний лік одиниць у десятковій системі числення, що за його допомогою можна виконати всі аритметичні дії, якраз має зазначену основну властивість роботи: її можна механізувати, тобто виконувати механічно за допомогою відповідної машини.

Дійсно, в прямім лікові послідовне додавання одиниць до якогось розряду числа послідовно змінює цифри розряду від 0 через 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 до 9; додавання одиниці до цифри 9 додає в дальшім вищим розряді одну одиницю, а цифру даного розряду змінює на нуль, і процес змін цифр розряду повторюється тим самим порядком. Для кожного розряду процес лишається однаковим. При зворотнім лікові послідовне зменшення щоразу на одиницю якогось розряду числа змінює цифри розряду порядком, зворотним до того, який ми мали при прямім лікові, тобто, починаючи з цифри 9, послідовно одержуємо 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0; віднімання від 0 дальшої одиниці приведе цифру розряду знову до 9, і процес знову почне свій цикл; при цім перехід від 0 до 9 завжди зменшує на одиницю цифри суміжного вищого розряду.

Початок процесу зміни цифр розряду при прямім і зворотнім лікові можна віднести до якої завгодно з десятьох можливих вартостей цифри, але в усіх випадках перехід від 9 до 0 і від 0 до 9 повинен змінити на одиницю цифру суміжного вищого розряду.

Отже, з теоретичного погляду цілком можливо виконувати артиметичні дії прямим і зворотним ліком одиниць за допомогою механічних процесів, роблених належно збудованим механізмом. Це наштовхнуло обчислювачів на думку винайти відповідні лічильні прилади й машини. Простота й обмеженість границі дії зазначених обчислювальних процесів для окремих розрядів числа сприяли винаходові простих лічильних приладів ще в давню-давнину.

Один із перших лічильних приладів винайдено в Китаї в передісторичну добу; він мав назву „суан-пан“ і призначений був виконувати дії додавання та віднімання. В дещо зміненім зовні вигляді приладу цього досі вживають у нас під назвою „російської рахівниці“.

Дальший крок у механізації обчислювальних процесів був винахід описаних уже вище логаритмічної лінійки й рухомих таблиць.

Та всі ці прилади тільки до певної міри пришвидшували й полегшували роботу обчислювачів. Цілий ряд допоміжних підрахунків і зв'язаних з ними аритметичних дій доводилося робити в умі або на окремих аркушах.

А все це загаює роботу, відвертає увагу обчислювача, стомлює його й править за джерело помилок. Зрозуміле, отже, прагнення обчислювачів звільнитися від усіх таких незручностей і перекласти виконання всього цього на машину, тим паче, що за всіх часів обчислювачі відчували присутність зазначеного вище елементу в виконанні обчислень. Це прагнення спростити механізм обчислювальної роботи та полегшити працю розуму обчислювача і виявилося винаходом у давніх греків лічильної дошки („абаки“), що її вживали в західній Европі навіть наприкінці середніх віків, а також згаданих уже китайської й російської рахівниць.

Як це ні кумедно нам тепер, але ще не геть давно мистецтво лічби знало дуже небагато вибраних осіб. Усякі обчислення, навіть найпростіші, вважали за таку запаморочливу річ, що в середні віки був навіть науковий ступінь „маґістра ділення“ (magister divisionis).

Школа не йшла тоді далі дії над невеликими числами, вихованці її навчалися лічби „по лініях“ і на „чисельній лаві“, що нею переважно користувалися міняйла[1]). Додавання, віднімання та поширення додавання на найпростіші випадки множення — оце все, що могла дати тодішня шкільна наука.

Причина відсталости в умінні виконувати дії над числами була та, що людство надзвичайно пізно узгодило способи

---

[1]) Звідси німецька назва лави „die Bank“ перешла пізніше, як назва, на установу, що провадить грошеві операції.

розумового й словесного числення з виразом чисел знаками. Тільки тоді, коли людський розум осяяло відкриття, що словесний спосіб читати й зображати всяке число вичерпується формулою.

$$A\,10^n + B\,10^{n-1} + C\,10^{n-2} + P\,10 + R \quad . \; . \; . \; . \; (235)$$

де коефіцієнти A . . R усі менші від 10, настав цілковитий переворот у трактуванні чисел та числень, що дав поштовх нечуваному розвиткові математичних наук і всього культурного життя людства. Цей геніяльний спосіб виражати всі числа за допомогою десятьох цифр поширився з Індії.

Спосіб цей, заснований, як бачимо з формули (235), на щасливій думці надати цифрі, крім абсолютної її вартости, ще іншу, залежну від її відносного положення, здається нам таким простим, що ми, як казав великий французький математик Ляпляс, ледве відчуваємо важливе його значення. А один із видатних учених новітнього часу, німецький математик Кронекер каже, що наш спосіб словесно й цифрово позначати числа був конечною умовою для вишукання тих наукових скарбів, що їх має сучасна аритмологія, а також для відкруття тих „законів“, що формулюють наші знання про рух небесних тіл.

Можна, отже, сміливо сказати, що без цього способу неможливий був би і ввесь теперішній лад практичного життя з його величезним розвитком торгівлі, стосунків та перевозів, про які в давнину й мріяти було годі.

Далі слід визнати за безперечну істину, що тільки з цього моменту людство навчилося відрізняти математичне мислення від механізму числення. Нарешті, слід признати, що якраз уживання отих грубих і примітивних на вигляд лічильних приладів, як лічильні дошки, а особливо „рахівниці“, де можна за допомогою „кісточок“ наочно зображати числа, підготувало швидку перемогу арабському та індійському способам зображати числа на письмі.

Коли писемне числення за допомогою формули (235) набрало відповідної форми, простлався широкий шлях для винахідливости людського розуму в справі вдосконалення лічильних приладів і машин, що всі без винятку ведуть свій рід від нашої звичайної простої „російської рахівниці“ з „кісточками“.

Справді, скоро тільки замінимо роботу пальців — наших натуральних живих важельців, даних нам від природи, — обертанням зубчастих коліс або ударами важельців машини, що відкладали б і скидали „кісточки“ та переносили б нарослі одиниці вищих порядків з нижчих розрядів у верхні, — і ми одержимо елементарну лічильну машину, яка звільнить обчислювачів від додаткового втомного виконання різних проміжних допоміжних підрахунків.

Така історія сучасних лічильних машин і таку якраз ідею покладено в основу першої лічильної машини, що її винайшов XVII віку геніяльний французький математик Паскаль. Після численних невдалих спроб Паскаль 1646 року надав машині остаточного вигляду, пристосувавши її до спеціяльної практичної мети — підраховувати грошові оплати та податки в місті Руані й його околицях, де Паскалів батько посідав посаду „інтенданта", тобто аґента державного оподаткування й фіску.

Конструкція лічильних машин до нашого часу, ступнево розвиваючись, дуже вдосконалилася й разом ускладнилася. Тут намагалися зменшити в часі роботу приладу і одночасно поширити вживання лічильного приладу та пристосувати його до безпосереднього обчислення не тільки складних виразів, а навіть і різних функцій.

Перше, ніж описувати різні лічильні прилади й машини, з'ясуймо, які основні дії при обчисленні мусить виконувати всякий лічильний механізм, і які для того повинні бути головні, суттєві частини цього механізма, незалежно від системи й конструкції машини.

Маючи на увазі порядок виконання основних аритметичних дій, ми можемо сказати, що всякий лічильний прилад мусить допускати такий ряд окремих операцій:

1) Позначення цифр окремих розрядів; таке позначення роблять або за допомогою рухомих значків, або за допомогою цифр, нанесених на рухомі поверхні й уставлених у певнім, спеціяльно відзначенім місці приладу, або, нарешті, за допомогою указника, уставленого проти цифр, нанесених на скалю; пристрій позначати цифри звуть указником розрядів.

2) Позначення чисел, що беруть участь у виконуваній дії; це роблять за допомогою указників розрядів, розтошованих поруч один одного; число таких указників визначає границі чину приладів; пристрій у приладі, щоб позначати числа, звуть указником чисел.

3) Зміна цифр окремих розрядів даного числа залежна від числа одиниць, що беруть участь у прямім або зворотнім лікові; пристосовану до цього частину лічильного приладу звуть лічильником.

4) Зміна на одиницю цифри суміжного вищого розряду при переході цифри даного розряду від 9 до 0, чи навпаки; пристрій лічильного приладу, призначений для виконання цієї операції, звуть передавачем десятків.

5) Одержання цифр кінцевого результату; те місце лічильного приладу, де з'являється кінцевий результат, звуть указником результату; число цифр, що його може дати прилад у результаті дій, визначає границю числа виконуваних за один раз на приладі аритметичних дій.

6) Зведення указників чисел і результату до первісного положення, тобто підготування лічильного приладу до нових дій; пристрій виконувати цю операцію звуть гасильником цифр.

Що простіший будовою лічильний прилад, то більше з зазначених 6-х дій доводиться виконувати безпосередньо обчислювачеві і то менше полегшується його роботу. І, навпаки, що більше зазначених вище дій може виконувати лічильна машина, то складніша вона, але разом і досконаліша, отже, більше полегшує та прискорює роботу обчислювача. У найдосконаліших приладах роля обчислювача полягає тільки в тім, що він дає початкову настанову, пускає прилад у рух та записує остаточний результат.

Само по собі зрозуміло, що всякий лічильний прилад чи машина, задовольняючи зазначені вище умови, повинен ґарантувати безпомилковість результатів обчислення, а також давати змогу легко перевіряти правильність його роботи.

Інакше лічильна машина втрачає всяку цінність і замість користі може тільки нашкодити обчислювачеві.

Російська рахівниця. Цей прилад, як не раз уже казано, найдавніший, найпростіший і найбільш поширений у нас проти інших лічильних приладів; не дурно цьому китайському винаходові надано назву „російської" рахівниці. Будова рахівниці відома всім; отже, не описуючи її, ми тільки розглянемо роботу рахівниці, як лічильного приладу, та вимоги до рахівниці при користуванні нею для обчислень.

За указників розрядів на рахівниці правлять, так звані, „кісточки" — дерев'яні кружальця, насаджені дірочками на ряд рівнобіжних дротин, по 10 штук на кожній дротині; у найпоширенішим типі рахівниці, вживанім у торгівлі, є ще дві дротини з 4 кісточками, щоб відкладати чверті якоїсь торговельної одиниці (четвертаки, чверті копійок тощо); для технічних обчислень ці дротини зай-і.

Переміщають кісточки на дротині в межах вільної частини дротини — між бортами рямки, в якій закріплені дротини, і кісточками. Нормальне положення кісточок — коли вони прилягають до правого борту рямки. Зсування кісточок до лівого борту є умовне позначення цифри розряду, число одиниць якої вважають за рівне з числом пересунутих кісточок. Щоб швидше підраховувати пересунуті кісточки, дві середні з них —

п'яту й шосту, лічивши від лівої руки до правої, — роблять чорними, а решту — жовтими або кольоровими.

Кожна дротина умовно позначає розряди числа, при чім нижня дротина позначає найнижчий розряд. Щоб зручніше визначати порядок розрядів, рекомендується кісточки (крім двох середніх) трьох послідовно розташованих дротин фарбувати в інший колір, ніж кісточки трьох дальших дротин. Для технічних обчислень вигідно робити однокольоровими кісточки чотирьох нижніх дротин і вживати їх для позначення десяткових частин числа.

При цій умові за указник числа правитимуть кісточки, переміщені на дротинах відповідних розмірів до лівого борту рахівниці в числі, що дорівнює числу одиниць цифри розряду. Якщо, наприклад, умовимося, що перші три нижні дротини рахівниці призначені позначати десяткові частини числа, то число кісточок, щільно присунутих до лівого борту, часто позначатиме число десятих, сотих і тисячних частин.

Механізма лічильника в рахівниці нема; його заміняє палець обчислювача. Щоб додати (прямий лік) до цифри розряду якесь число одиниць, переміщають кісточки від правого борту до лівого; щоб зменшити (зворотний лік) цифру розряду, — переміщають кісточки від лівого борту до правого.

Передавача десятків у рахівниці теж нема; збільшує чи зменшує цифру суміжного вищого розряду сам обчислювач; потреба переносити десятки визначається механічно: коли лік прямий — нагромадженням при лівім борті всіх десятьох кісточок; тоді кісточки пересовують у нормальне положення, а замість них на дротині суміжного вищого розряду додають одну кісточку; коли лік зворотний, — переведенням усіх кісточок у нормальне положення (до правого борту); тоді скидають одну кісточку на дротині суміжного вищого розряду і повертають усі десять кісточок до лівого борту.

За указник результату правлять кісточки, що лишилися по закінченні дії біля лівого борту рахівниці.

Аритметичні дії на рахівниці виконують так:

а) Додавання. При додаванні один із доданків — або найбільший або перший по ряду — відкладають кісточками при лівім борті рахівниці так, щоб кожна цифра забирала дротину відповідного розряду. Чи правильно відкладено доданок, контролюють за допомогою кісточок, які лишилися при правім борті рахівниці: число їх повинно дорівнювати доповненню до 10 відкладеної цифри. Відкладають кісточки, починаючи з цифер вищого розряду.

До кісточок відкладеного доданку присувають з залишених при правім борті кісточок таке число на кожній дротині, яке відповідає цифрі даного розряду другого доданку; додавати починають з цифри найвищого розряду і послідовно йдуть до цифри нижчого розряду; коли треба буває додати більше кісточок, ніж їх є при правім боці, то замість цього додають одну кісточку найближчого вищого розряду, а на даній дротині скидають число кісточок, що дорівнює доповненню до десяти відкладеної цифри. Якщо є достатня навичка, то додавання одної кісточки вищого розряду сполучають з відкладанням цифри доданку цього розряду і т. д., а в результаті біля лівого борту рахівниці одержують шукану суму і цифри її записують відповідно до числа кісточок на кожній дротині.

Перевіряють правильність додавання або повторенням дії, або відніманням.

б) В і д н і м а н н я. При відніманні — на рахівниці спершу відкладають зменшеник, а потім, почавши з вищих розрядів, скидають із цифр зменшеника те число кісточок, яке виражає відповідну цифру від'ємника; якщо доводиться скидати більше число кісточок, ніж їх стоїть на дротині, то скидають одну кісточку з дротини суміжного вищого розряду, а на даній дротині додають доповнення цифри від'ємника до 10. Кісточки, що лишаться біля лівого борту рахівниці, покажуть шукану ріжницю.

Перевіряють ріжницю або додаванням, або повторенням дії.

в) М н о ж е н н я. Тим що множення є повторне додавання, то, зрозуміло, його можна робити за допомогою рахівниці.

Для того спершу відкладають на рахівниці потрібне число разів число одиниць множеника, тоді число десятків і т. д. Щоб не помилитися в числі відкладених на рахівниці доданків, корисно мати підруч другу рахівницю, і на ній за кожним відкладанням доданку додавати по одній кісточці на дротині, що відповідає даному розрядові; після того, як на одній рахівниці відкладуть усі додавані множеники, на другій відкладені будуть усі цифри множника; зрозуміла річ, що число, яке утвориться від додавання на першій рахівниці, і буде шуканий добуток.

Шукати добуток многократним сумуванням на рахівниці множеника практично вигідно тільки тоді, коли сума цифр множника, яка визначає число сумування, взагалі невелика. Інакше многократне пересування кісточок і втомне і незовсім надійне.

Ось кілька найпростіших способів множити на рахівниці.

Щоб помножити на 2 і 3, просто послідовно додають дане число двічи або тричі.

Щоб помножити на 4, множать число на 2 і до результату додають число, рівне з одержаним.

Щоб помножити на 5, множать спершу на 10, тобто переносять число на одну дротину вище, і результат ділять на 2; ділити починають знизу, відкидаючи половину кісточок кожної дротини; якщо на дротині лежить непарне число кісточок, то відкидають на одну більше за половину і додають на попередній дротині 5 кісточок.

Щоб помножити на 6, множать на 5 і додають задане число.

Щоб помножити на 7, 8 і 9, множать на 10, а від результату віднімають задане число: у першім випадку — тричі, у другім — двічі і в третім — один раз.

Далеко вигідніше вживати рахівниці для сумування частинних добутків, знайдених якимось іншим способом.

Так, уживаючи способу зворотного порядку цифр множника, дуже вигідно за допомогою рахівниці шукати суму частинних добутків.

Вельми корисно вживати рахівниці для сумування частинних добутків, знайдених за допомогою таблиць.

г) Д і л е н н я. При діленні діленик відкладають на рахівниці; відокремивши в нім таке число цифр вищих розрядів, щоб воно дало величину, найближчу більшу до дільника, починають віднімати з нього дільник стільки разів, скільки буде можна; число зроблених віднімань дасть першу цифру частки; для більшої зручности при кожнім відніманні дільника на одній з дротин другої рахівниці відкладають одну кісточку; число відкладених кісточок покаже цифру частки; потім до залишеної частини, з якої роблено віднімання, додають дальший розряд і знову починають віднімати дільник; число можливих віднімань дасть другу цифру частки.

Описаний спосіб ділити на рахівниці дуже забарний і вимагає чималої уваги.

Вигідніше вживати рахівниці разом із таблицями добутків і робити на рахівниці потрібне віднімання, записуючи за таблицями цифри частки просто на папір.

Вигоди користуватися з рахівниці при обчисленнях такі: поперше, рахівниця зводить всю розумову роботу до сумування або віднімання двох однозначних чисел і, подруге, набагато скорочується писання. Тим що сумування або віднімання двох однозначних чисел виконують майже машинально, то можливість прорахунку при роботі на рахівниці набагато зменшується.

Коли є достатня навичка, обчислювач переміщає на дротинах потрібні групи кісточок дуже хутко, чому виконання дії забирає мінімальний час.

Хуткість і простота дій додавання та віднімання дає можливість швидко перевіряти результат і мати ще одну ґарантію правильности його.

Головна вада рахівниці — відсутність механічного передавача десятків; переносити десятки мусить сам обчислювач. Від того найчастіш трапляються прорахунки.

Багато вдосконалив уживання російської рахівниці для механічного виконання обчислюваних дій, зокрема множення та ділення, російський винахідник-самоук І. М. Плетнік на початку цього століття. Саме, 1909 року за допомогою підприємця Н. П. Менделеєва він сконструював спеціяльний прилад, званий „рахівниця-аритмометр Плетніка“.

Суть винаходу така. З боку звичайної рахівниці прикріплюють невеликий металевий циліндер, сантиметрів 25 — 30 завдовжки, що може плавко ковзатися вздовж прикріпленої до цієї ж рахівниці металевої штанґи-лінійки. У циліндрі зроблені прорізи-віконця, крізь які видно цифри, нанесені на ободі порожнистих обертових коліс спеціяльним способом, що його винайшов винахідник.

Повертають ці окремі колеса так, щоб у віконцях з'являлися цифри множеника.

Далі, простим повертом, за допомогою спеціяльної ручки, цих порожнистих коліс до цифри множника з поміж дев'ятьох цифр, нанесених на циліндрі, автоматично одержують у віконцях приладу готовий добуток даного числа на бажане однозначне. Відкладаючи ці частинні добутки на рахівниці та підсумовуючи їх, легко одержати шуканий добуток.

Таким самим в суті способом виконують і ділення [1]).

Щодо лічильних машин в сутім розумінні слова, або, так званих, аритмометрів, призначених виконувати основні аритметичні дії, то, вважаючи на численність і різноманітність їх (усіх є десь із 4000 різних систем), ми тут пояснимо тільки основну ідею їхньої будови та опишемо одну з найпоширеніших машин, а саме аритмометр Однера.

Як уже казано, першу лічильну машину збудував Паскаль.

Хоча збудував він її зі спеціяльною метою — лічити гроші, і нині вона є антикварна рідкощ, переховувана в музеях (знаємо тільки чотири її примірники), проте ця машина стала за прототип усіх теперішніх, навіть найдосконаліших машин. Тому, щоб зрозуміти основи їхньої будови, треба добре втямити механізм Паскалевої машини.

Коли цю машину будовано, у Франції провадили лік на „гроші“ (deniers), „су“ (sous) та „лívри“ (livres): дванадцять „грошів“ складали одне су, а двадцять су — один лівр. Відповідно

---

[1]) Доля цього визначного винаходу, заснованого, безперечно, на якімсь невідомім математичнім законі, що його треба ще відкрити й дослідити, нам тепер, на жаль, невідома. А за те, що винахід І. М. Плетніка цілком забули й не вживають, слід щиро пошкодувати, бо за допомогою цього винаходу, можна сміливо сказати, з російської рахівниці міг би бути універсальний обчислювальний прилад. Удосконалена рахівниця широко розповсюдилася б і, через свою універсальність, компактність, портативність, малощумність роботи та незрівняну дешевину проти інших лічильних машин, цілком заступила б невкладисті й дорогі лічильні апарати.

до грошевої системи, на покришці скриньки, де міститься механізм, було вісім обертових кружал із корбами й круговими циферблятами. На першім циферебляті, лічивши від правої руки, було 12 перенумерованих поділок з цифрами відлічувати гроші, на другім 20 — для су, а на решті по 10 — для ліврів. Обертання цих кружал за допомогою зубчастих коліс передавалося валком з нанесеними на нім такими ж цифрами. При кожнім повнім оберті кожного з кружал ближче сусідне ліворуч кружало автоматично поверталося на одну поділку. Отже, поверт першого кружала на всі 12 поділок, тобто відлік 12 грошів, сам собою відзначав на другім валку приріст на одне су; поверт цього кружала на 20 поділок, тобто відлік 20 су, негайно відзначався на третім валку в один лівр; кожні 10 ліврів – в один десяток ліврів і т. д. Чину надавалося механізмові обертанням за стрілкою годинника корб, прироблених до кожного кружала. Корби можна було повертати в їхнє первісне положення, тобто зводити до нуля, при чім це повертання корб на місце не завдавало жодної роботи механізмові машини.

У верхній частині покришки було 8 відтулин — віконець, відповідно до числа кружал. Перше з них від правої руки показувало число грошів, друге — число су, третє — число ліврів, четверте — число десятків ліврів і т. д. Гранична сума, яку могла відличити машина, була, отже: 999999 ліврів, 19 су і 11 грошів.

Щоб додати за допомогою цієї машини, наприклад, до 19 ліврів, 16 су і 7 грошів 27 ліврів, 14 су і 5 грошів, робили так. Уставляли всі корби й покази віконець на нулі. Далі за допомогою четвертої від правої руки корби відкладали один десяток ліврів, для чого, обертаючи цю четверту корбу в напрямі годинникової стрілки, ставили її на цифру 1, нанесену на відповіднім четвертім кружалі — циферблятi; третю корбу ставили на 9, другу на 16 і першу на 7. Від цього негайно у відповідних віконцях з'являлися відповідні цифри. Потім корби кружал знову зводили до нуля.

Далі, щоб відкласти друге число, знову обертали корби, ставлячи їх на відповідні цифри. А саме: четверту корбу ставили на 2, і в відповіднім віконці з'являлася цифра 3, бо $1+2=3$. Третю корбу ставили на 7, і в третім віконці з'являлася цифра 6, а в четвертім віконці цифра 3 змінювалася на 4, бо $9+7=16=10+6$. Другу корбу переводили на 14 другого цифербляту; у другім віконці з'являлося число 10, а цифра в третім змінювалася з 6 на 7, бо $16+14=30=20+10$, тобто 1 лівр + 10 су, а 6 ліврів + 1 лівр дають 7. Нарешті, ставили першу корбу на 5, і в першім віконці з'являлася цифра 0, а в другім число 10 змінювалося на 11, бо 7 грошів + + 5 грошів = 12 грошів = 1 су.

Остаточний підсумок виходив, отже, такий: 47 ліврів, 11 су, 00 грошів.

Щоб виконувати віднімання, Паскаль вигадав надзвичайно простий, але дотепний пристрій: на валках були розташовані один під одним два рівнобіжні ряди цифр і чисел: один — верхній — у догірнім, а другий — нижній у додільнім порядку. Віконця ж мали спільну для всіх ковзну закривку, що закривала, по волі, то верхню, то нижню половину віконець і відповідно то верхній, то нижній ряд цифр на валках. Тому досить було відкрити нижню половину віконець і закрити верхню, і тоді при обертанні ручок у віконцях з'являлися числа спадним порядком, що якраз і потрібно при відніманні.

Виконання обчислень для множення й ділення чисел полягало на цій машині у повторнім додаванні чи відніманні того самого числа.

З описаного способу вживати Паскалеву машину ясно бачимо, що робота на ній була надзвичайно забарна й цілком повторювала роботу на рахівниці, тільки з механічним виконанням. Ясно також, що виконання множення та ділення на цій машині проходило либонь повільніше й трудніше, ніж на звичайній рахівниці з кісточками, бо повсякчасне зводження до нуля корби перед кожним повторенням додавання або віднімання забирало силу часу. Тому зусилля всіх наслідувачів Паскаля спрямовані були до двох головних цілей:

1) усунути повільність чергового обертання корб і

2) пришвидшити виконання дій множення та ділення.

Для цього, очевидячки, треба було ряд окремих корб замінити одною загальною. Це пощастило зробити ще за життя Паскаля німецькому математикові Л я й б н і ц у: 1671 — 1673 р.р. він опрацював особливий тип лічильної машини, що його пізніше вдосконалив Т о м а с.

Завдання — одною корбою не тільки повертати цифрові валки, кожний на різні частини оберту, а в разі потреби, й зовсім вимикати деякі з загального обертання решти валків — Л я й б н і ц розв'язав, запровадивши, так звані, „диференціяльні зубчасті колеса“ або циліндри з навскоси зрізаними зубцями. Кожне таке диференціяльне колесо проти шестерень, яким воно надавало чину, мало ніби змінне число зубців, залежно від того, якою частиною своєї зубчастої поверхні доторкалося воно до шестерень. Удосконалення Т о м а с о в е було, головне, те, що він диференціяльні Л я й б н і ц о в і колеса замінив такими самими валами.

За допомогою ковзних уздовж прорізів у покришці Т о м а с о в о г о апарату ґудзиків переміщаються ковзні вздовж осей під покришкою шестерні. Залежно від місця ґудзиків, вони або зовсім не доторкаються до зубців вала, або ступнево зачіплюються одним, двома, трьома тощо зубцями його. Рух цьому механізмові надають одною загальною корбою.

Усі інші вдосконалення, як - от: пристосування механізма для степенювання, коренювання, логаритмування; прилаштування дзвоників, що застерігають про неправильне поводження з машиною; електричні рушії, замість роботи руками, клявіші замість стрілок; друкування результатів на картках, паперових стрічках, аркушах тощо, — усі ці побічні вдосконалення виникли пізніше, вже недавнім часом, але суть конструкції всіх, навіть найдосконаліших, пізніших лічильних машин заснована на тій самій ідеї, яку поклав в основу своєї машини Паскаль.

Одна з найдосконаліших, хоч і досить складних, і найпоширеніша в цілім світі є нині лічильна машина, яку винайшов російський механік Однер — „аритмометр Однера", виготовлений кол. фірмою Е. Мітенс (кол. Петроград), так званий, „Оригінал — Однер", та вдосконалені моделі цієї машини: німецький — „Брунсвіґа" і французький — „Дактиль".

Головна особливість лічильних машин Однерівського типу — будова зубчастих коліс і дуже дотепний пристрій хутко множити й ділити, що чинить за допомогою ковзного на полозках механізма нижньої частини машини: через те, з волі обчислювача, можна переводити обертання корби й чубчастих коліс із нижніх реґістрів у верхні.

Зубці коліс у машинах Однерівського типу начебто тимчасові і, доки машина не працює, сховані в тільці колеса. Той, хто робить на машині, уставляючи спеціяльні важелі або „спиці", висуває, по своїй волі, з числа зубців лише стільки, скільки їх відповідає заданій цифрі.

Завдяки такій дотепній будові, увесь проміжний механізм машини Томасівського типу, тобто диференціяльні колеса й валок, кружала з зубчастими колесами, відпадають і колеса, злучені з загальною корбою, безпосередньо чинять на цифрові валки.

За указники розрядів правлять в аритмометрі цифри, нанесені на обідці вузьких барабанів (рис. 22) послідовним порядком від 0 до 9; кожний барабан скріплено з зубчастим колесом *е*, що має 10 зубців; барабан може обертатися одночасно з зубчастим колесом на спільній осі *сс*; цифри барабанів закриваються металевим кожухом з квадратовими віконцями (рис. 23), в які може показуватися одночасно лише одна цифра; обертання зубчастого колеса *е* навколо осі *сс* на один зубець у той чи той бік змінює цифру, видну в віконці кожуха, на одиницю, збільшуючи її або зменшуючи; на осі *сс*, у правій її частині (рис. 22), насаджено поруч один одного цілий ряд барабанів з цифрами та трибками, відповідно до числа розрядів величин, що можуть траплятися в обчисленнях.

Колесам *e* з барабанами надає чину другий ряд трибків, насаджених на вісь *RR*, рівнобіжну з віссю *cc* (рис. 22); останні, своєю чергою, можуть рухатися, бувши захоплені зубцями кругів *mm*, насаджених на вісь *S*, яку обертають корбою *B* за допомогою трибової передачі *aa*; число зубців кожного круга *m*, крім крайнього праворуч, дорівнює 10; з них один (*n* — на рис. 22, 10 — на рис. 24) скріплений з тілом круга пружинкою, що

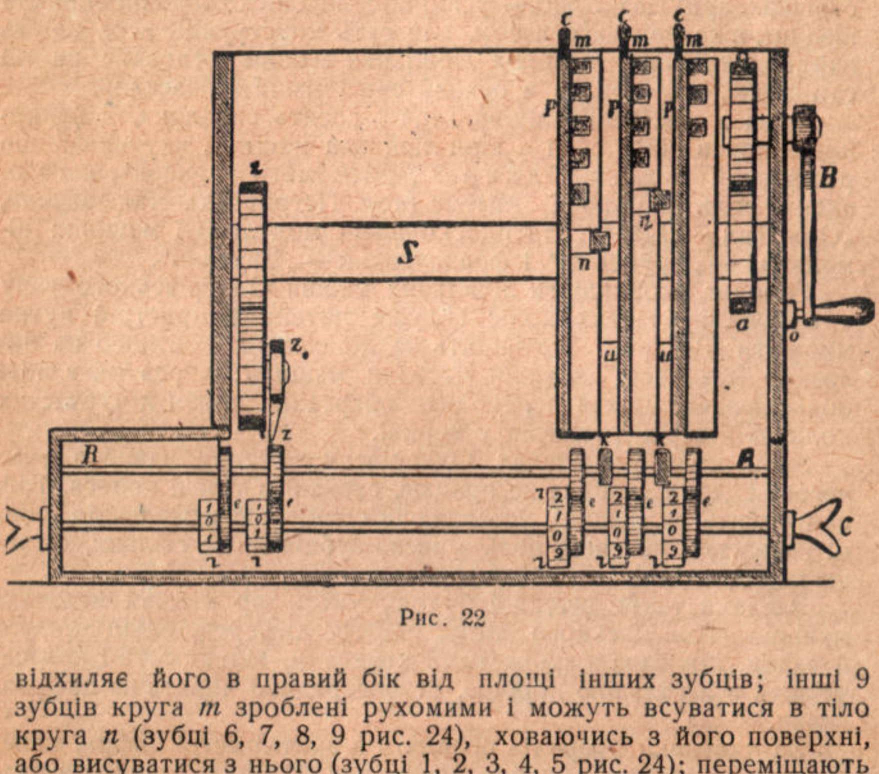


Рис. 22

відхиляє його в правий бік від площі інших зубців; інші 9 зубців круга *m* зроблені рухомими і можуть всуватися в тіло круга *n* (зубці 6, 7, 8, 9 рис. 24), ховаючись з його поверхні, або висуватися з нього (зубці 1, 2, 3, 4, 5 рис. 24); переміщають зубці за допомогою кільця *P* (рис. 24 і 25), надяганого на виступ у середині круга *m* (рис. 24), виточений на концентричнім обводі; кільце скріплене з кругом так, що може обертатися, коли тиснути в той чи той бік на виступ *c*; на кільці є однаковий завширшки концентричний проріз *nPn'* (рис. 24); він має в точці *P* злім так, що ліва частина прорізу розташовується по обводу більшого радіюса, ніж права частина; ріжниця в радіюсах прорізів трохи більша, ніж довжина зубців, що виступає з круга; у проріз кільця *P* входять виступи *b*, зроблені на тілі чотиригранчастих зубців *ab* (рис. 24, 25) так, що при обертанні кільця *P* ці виступи ковзаються по прорізу; коли виступ *b* підходить до злому *P* прорізу *nPn'*, то при дальшім своїм ковзанні він переходить у дальшу концентричну частину прорізу і від тиску країв останнього висувається з круга або всувається в круг у напрямі радіяльних прорізів *FF* (рис. 24.). Отже, уставляючи належним способом

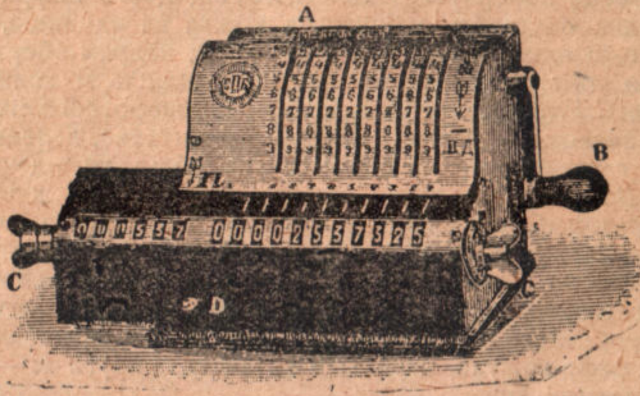


Рис. 23

кільце *P* на крузі *m*, можна число зубців круга міняти від 0 до 9. Щоб надати такому встановленню певности, виступи *c* кілець *P* виходять крізь прорізи металевого кожуха, що ним прикрита вся верхня частина аритмометра (рис. 23), і можуть мати різне положення відносно цифр від 0 до 9, нанесених на кожусі, поруч прорізів.

Від переміщення виступу *c* до якоїсь із цифр на крузі *m* з'являється відповідне число зубців; щоб надати положенню кільця *P* і виступу *c* стійкости, зроблено з протилежного про-

Рис. 24

Рис. 25

різові *nPn'* боку ряд трикутніх вирізів, куди западає кожного разу, як з'являється чи зникає зубець, пружинний шпеник *l* і тим припиняє можливість кільцеві легко зсуватись.

Коли на кругах *m* немає жодного зубця, то обертання їх за допомогою корби *B* не спричиняє жодних переміщень у зубчастих колесах *e* (рис. 22), і цифри, уставлені в квадратових віконцях першої частини аритмометра (рис. 23), лишаються без зміни; якщо виступи *c* встановити проти цифри І і тим самим на кругах *m* висунути по одному зубцеві, то при обертанні кругом цей зубець зачепить за систему зубчастих коліс *RR* (рис. 22) і поверне їх на один зубець, а вкупі з ними на один зубець повернуться колеса *ee*; від цього цифри в віконцях збільшаться або зменшаться кожна на одиницю, залежно від того, в який бік обертати корбу *B*; напрям обертання для прямого ліку показано на кожусі стрілкою зі знаком (+) і літерами *С. У.* (сложение, умножение), для зворотного ліку—стрілкою зі знаком (—) і літерами *В. Д.* (вычитание, деление). Якщо виступ *c* встановити на інше число зубців, то від обертання корби *B* зубчасті колеса її повернуться на таке ж число зубців, а разом із тим цифри в віконцях зміняться на таке саме число одиниць. Зрозуміло, що різні круги *m* можна уставляти одночасно на різне число зубців, і на різне число одиниць можуть одночасно змінюватися цифри різних віконець.

Із зробленого опису бачимо, що виступи *c*, встановлені проти певних цифр кожуха, є указник чисел, а круги *m* — лічильник аритмометра.

Переносять десятки в аритмометрі Однера за допомогою дотепного пристрою, частина якого є відгинний пружинний зубець *n* (рис. 22); друга складова частина передавача десятків є важіль *k*, насаджений на вісь *RR*; у той момент, коли в однім з віконець кожуха змінюється цифра 9 на 0 чи навпаки, до важеля *k* підходить насаджений на вісь *cc* чіп і примушує його висунутися вперед; у такім положенні важіль утримується пружиною; передня частина (рис. 22) важіля *k* в висунутім положенні входить у борозенку *u*, зроблену в крузі *m*, і, проходячи мимо зубця *n*, відтискає його ліворуч, у площу інших зубців; від того зубець *n* зачіпає за зубчасте колесо й примушує барабан *r* просунутися в той чи той бік іще на одну одиницю; важіль *k*, пройшовши зубець *n*, натрапляє на ту частину круга, де немає борозенки; тут поверхня круга натискає на кінець важеля *k*, переборює напругу пружини й примушує важіль повернутися в первісне положення. Тим що на перший, нижчий розряд числа не впливають відсутні праворуч розряди, то немає потреби робити для нього передавач десятків; тому на крайнім правім крузі в аритмометрі Однера немає десятого зубця.

У лівій частині аритмометра на осі, що зливається напрямом із віссю *cc* (рис. 22), насаджено ряд барабанів з зубчастими колесами, подібних будовою по указників розрядів; на барабанах нанесені 18 цифр таким порядком: 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, при чім перші цифри від 8 до 1 виділені червоною фарбою; зубчасті колеса при барабанах мають 18 зубців і захоплюються шестернями, розташованими на рівнобіжній осі RR; проти правої шестерні приміщено виступ z', що робить повний оберт при повнім оберті корби B. Рух корби B передається виступові z' за допомогою трибової передачі zz_1; виступ z' зачіпає за зубці шестерні й повертає її, а разом із нею й зубчасте колесо e, на один зубець, через віщо цифра барабана, видна крізь квадратову відтулину в лівій частині кожуха (рис. 23), змінюється на одиницю; отже, зі змін цієї цифри можна полічити число повертів корби B; ріжницю в напрямі руху корби відзначає колір цифр, що з'являються в віконці: коли рух додатній — колір цифр буває білий, коли від'ємний —червоний; тим що цифри барабана обмежені, можна за їхньою допомогою відзначити тільки 9 послідовних повертів корби в той чи той бік.

Нижню частину аритмометра з цифровими віконцями та баранчиками cc (рис. 23) зроблено рухомою; її можна переміщати в напрямі осі cc; цю частину звуть к а р е т к о ю а р и т м о м е т р а.

Тим що каретка переміщається, можна трибки з указниками розрядів r уставляти проти різних кругів m (рис. 22); отже, одним кругом m можна обертати різні указники розрядів r. Щоб зубці коліс приходилися за всякого положення каретки проти зубців кругів m, її треба уставляти так, щоб стрілка n, поставлена ліворуч на нерухомій частині кожуха (рис. 23), припадала проти крапок, які стоять на кожусі каретки. У цей момент кінець важеля $Д$ западає в спеціяльні гнізда, зроблені в металевій платівці, якою ковзається каретка, і припиняє рух каретки. Щоб каретка дістала волю пересування, треба натиснути виступ важеля $Д$ і звільнити кінець його з гнізда. При кожнім положенні каретки, проти виступу z' (рис. 22) приходиться шестерня одного з лічильників r, за допомогою якого можна визначити число зроблених повертів корби.

Рухомість каретки дає змогу, як побачимо далі, зручно вживати О д н е р о в о г о аритмометра для виконання дій множення й ділення.

За п о г а с н и к і в ц и ф р у лівих і правих віконцях правлять баранці (рис. 22, 23); вони дають можливість обертати в певний бік праву й ліву частини осі cc; при обертанні захоплюються всі повернуті цифрові барабани і приходять в нормальне положення, коли в усіх віконцях з'являються нулі.

Щоб пересуванням каретки не могли заваджати зубці кругів, останнім надають такого положення, коли жодний зубець не входить у зубці шестерень; цього н о р м а л ь н о г о положення кругів досягають у той момент, коли шпеник (рис. 22) корби входить у відповідне гніздо; щоб мати змогу обертати корбу, треба злегка відтягти її ручку і тим звільнити шпеник з гнізда.

Аритметичні дії виконують на Однеровім аритмометрі так:

а) Додавання. Виступи *с* (рис. 23 й 24), видні крізь прорізи верхнього кожуха аритмометра) (рис. 25), уставляють послідовним порядком на цифри одного з доданків, додержуючи взаємного розташування розрядів; у цей момент на кожнім з кругів *т* з'явиться відповідне до встановленої цифри число зубців. Погасивши попереду цифри в віконцях та привівши картку в крайнє ліве положення, щоб указник на кожусі *п* був уставлений проти правої крапки каретки (рис. 23), обертають додатнім рухом корбу *В*, від чого на указнику результатів з'являться цифри першого доданку. Після цього виступи уставляють по прорізах на цифри другого доданку і додатнім обертанням корби *В* додають їх до відповідних цифр першого доданку; якщо при цім на якімсь указнику розрядів (цифровий барабан) цифра 9 зміниться цифрою 0, то назбираний десяток автоматично, за допомогою важеля *к* (рис. 22) і пружинного зубця *п*, перейде на суміжний указник вищого розряду; на указнику результатів з'явиться сума перших двох доданків. Повторюючи таку саму операцію з рештою доданків, одержимо наприкінці наших дій шукану суму на указнику результатів.

б) Віднімання. Привівши аритмометр у первісне положення, уставляють на указнику результатів, за допомогою виступів *с* і додатнього обертання корби *В*, даний зменшеник. Потім, уставивши виступи *с* на цифри від'ємника, від'ємним обертанням корби *В* повертають зубчасті колеса каретки, а вкупі з ними указники розрядів у бік спадного підпису цифр на певне число зубців, від чого кожна цифра зменшеника зменшиться рівно на стільки одиниць, скільки було їх у цифрі відповідного розряду від'ємника; якщо при цім у якімсь віконці каретки цифра О зміниться на цифру 9, то в сусіднім суміжнім вищім розряді пружинний зубець *п* (рис. 22) за допомогою важеля *к* цифру, що стоїть у віконці, зменшить на одиницю і тим виконає перенесення десятків. Після оберту корби *В* на указнику результатів з'явиться шукана ріжниця.

Якщо від'ємник більший від зменшеника, то цифра вищого розряду зменшеника при обертанні корби неодмінно пройде через нуль, і тоді станеться запозичення одиниці суміжного вищого розряду. А тим що цифра останнього буде О, то зміна його на 9 заподіє знову зміну в віконці суміжного вищого розряду 0 на 9 і т. д.; отже всі нулі відсутніх у зменшенику вищих розрядів обернуться в дев'ятки. На указнику результатів, як можна легко догадатися, з'явиться тоді десяткове доповнення шуканої від'ємної ріжниці. Дійсно, поява дев'яток на місці відсутніх у зменшенику вищих розрядів можлива лише тоді, коли до зменшеника додана одиниця якогось вищого розряду, На аритмометрі це буде той розряд, що йде за останнім розрядом, який стоїть на каретці в крайнім лівім віконці.

Наприклад, при відніманні на аритмометрі з 11 віконцями (рис. 22) 585 од 237, на указнику результатів одержимо число — 99 999 999 652, яке можна представити так:

$$\left.\begin{aligned}99\,999\,999\,652 &= (10\,000\,000\,000 + 237) - 585 = \\ &= 10\,000\,000\,000 - (585 - 237)\end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad (236)$$

а це й є доповнення вартости шуканої ріжниці (585 — 237) до 10 000 000 000.

в) Множення. Як знаємо, множення на ціле число є сумування множеника самого з собою стільки разів, скільки одиниць, десятків, сотень тощо містить множник.

Сумування тієї самої величини кілька разів на аритмометрі здійснюють відповідним числом повертів корби. При цім множення на 10, 100 тощо можна виконати, пересуваючи каретку праворуч на один проміжок між зубчастими колесами, на 2, 3 і т. д. Від такого переміщення круг m (рис. 22) якогось розряду даного числа чинитиме на трибок каретки суміжного вищого розряду, тобто вартість розрядів чисел підвищиться на 1,2,3 і т. д., і воно буде ніби помножене на 10, 100 і т. д.

Звідси ясним стає порядок роботи аритмометром при виконанні множення.

Один із чинників A уставляють у прорізах указника чисел; надавши каретці первісного положення і погасивши цифри в усіх її віконцях, обертають корбу аритмометра в додатній бік стільки разів, скільки одиниць у найменшім розряді b_0 другого чинника B; на указнику результатів одержать добуток $b_0 A$, а в крайнім віконці лічильника обертів, що стоїть проти указника n верхньої частини кожуха, — цифру b, яка визначає й число обертів корби і першу цифру чинника A. Пересуваючи каретку праворуч так, щоб до указника n кожуха підійшла друга крапка, зазначена на каретці, і збільшуючи цим уставлений на указнику чисел чинник A вдесятеро, знову обертають корбу в додатній бік стільки разів, скільки одиниць у другій цифрі b_1 чинника B; тоді на указнику розрядів одержать величину $10\,Ab_1 + Bb$, тобто добуток A на дві перші цифри другого чинника B. Число обертів корби, зроблене за другим разом, буде зазначено в другім з правої руки віконці лічильника обертів, і на нім з'являться дві перші цифри b_1 та b_0 чинника B. Знову пересуваємо каретку в правий бік, збільшуємо ще вдесятеро чинник A, тобто дістаємо на указнику чисел величину $100\ A$, і обертаємо корбу стільки разів, скільки одиніць у третій цифрі b_2 чинника B, і т. д. Коли такими послідовними переміщеннями каретки та обертанням корби вичерпаємо всі цифри чинника B, на указнику результатів стоятиме шуканий добуток, а на лічильнику обертів — чинник B. Поява цифр чинника B на лічильнику обертів є контроль правильности численних обертів корби й дає змогу пришвидшити виконання дії. Коли б виявилося, що проти якоїсь цифри чинника зроблено невідповідне число обертів корби, то указник n на кожусі (рис. 23) уставляють проти крапки того віконця лічильника обертів, де з'являлася неправильна цифра, й знову обертають корбу в належний бік і додають чи віднімають потрібне число обертів.

Тим що загальне число обертів корби аритмометра при множенні дорівнює сумі цифр другого чинника B, то за останній завжди вибирають той, де сума цифр менша.

г) Ділення. Ділення рівноважить повторним відніманням, а тому при діленні роблять за пляном, який описано для російської рахівниці.

Діленик уставляють у віконцях каретки на указнику результатів, дільник — у прорізах указника чисел. Посувають каретку праворуч так, щоб проти дільника уставити стільки цифр вищих розрядів діленика, щоб одержати найближче більше до дільника число. Далі, обертаючи корбу в від'ємний бік, віднімають дільник од цифр діленика стільки разів, скільки буде можна; число обертів корби, відзначене в однім із віконець лічильника обертів, дає найвищу цифру частки. Посунувши каретку ліворуч на одне віконце, знову віднімають дільник і в дальшім праворуч віконці лічильника обертів одержують другу цифру дільника. Таким способом роблять доти, доки каретка посяде нормальне положення. Після віднімання дільника при цім положенні каретки, на лічильнику обертів одержимо можливе для аритмометра число цифр частки, а на указнику результатів — останню остачу, що дає змогу написати дробом ту частину частки, яка лишилася.

Якщо віднімання дільника зроблено при якімсь положенні каретки більше число разів, то це виявиться, як і при відніманні, тим, що у віконцях вищих розрядів, відсутніх у діленику, з'являться дев'ятки. Щоб виправити помилку, обертають корбу аритмометра один раз у додатній бік, тобто додають неправильно віднятий дільник.

Якщо ж каретку пересунуто в сусіднє положення раніш, ніж зроблено можливе число віднімань дільника, то це виявиться тим, що при новім положенні каретки доведеться зробити більш, ніж десять, обертів корби, і в віконці лічильника обертів почнуть з'являтися цифри, починаючи з 8, у спаднім порядку. Щоб виправити помилку, зводять цифру лічильника обертів додатнім рухом корби до 0, пересувають каретку в попереднє положення і виконують недороблене число віднімань дільника.

Тим, що всяка неправильність у початковім уставленні аритмометра спричинить помилку при виконанні дій у кінцевім їх результаті, слід особливо пильну звертати на це увагу і в сумнівних випадках робити перевірку.

При додаванні й відніманні перевіряють звичайно або повторною або зворотною дією. Перевіряючи зворотною дією, треба на указнику чисел віднімані від результату або додавані до результату величини уставляти заново, незалежно від уставлення, зробленого для виконання дії, бо часом джерело помилки може критися якраз у неправильнім розміщенні виступів лічильника в прорізах кожуха.

Перевіряючи множення діленням, обертають корбу у від'ємний бік при різних положеннях каретки, доки в віконцях лічильника обертів не з'являться нулі; у цей момент на указнику результатів теж повинні з'явитися нулі. Перед початком перевірки треба пересвідчитися, що перший чинник правильно уставлено на указнику чисел.

Перевіряючи ділення множенням, обертають корбу в додатній бік, доки в віконцях лічильника обертів з'являться нулі; у цей момент на указнику результатів мусить встановитися діленик.

Щоб запобігти псуванню механізма аритмометра і мати більшу ґарантію одержання правильних результатів, треба, працюючи на аритмометрі, додержувати таких правил:

1) Обертати корбу *B* (рис. 22-23) тільки тоді, коли кінець важеля *D* уже запав в одне з гнізд дна аритмометра, коли рух каретки припинився і указник *n* стоїть проти одної з крапок, позначених на каретці. При проміжнім положенні каретки зубці кругів *m* (рис. 22) можуть потрапити між кінцями важелів *k* і зубчастими колесами, застрягнути між ними, погнутися або поламатися від удару, що має чималу силу, завдяки хуткому обертанню кругів *m*.

2) Рух каретки треба робити тільки при нормальнім положенні корби *B* (рис. 22), коли кінець її ручки лежить у глибині гнізда *o*. Якщо ручку виведено з нормального положення, то зубці кругів *m* можуть спинитися проти зубців шестерень *RR* і від руху каретки можуть одержати бічний удар, що загрожує їм попсувом.

3) Обертаючи корбу *B*, треба робити відразу повний оберт, не зупиняючись у проміжних положеннях, а коли б така зупинка трапилася, то відновлювати рух у той самий бік, у який почали обертати корбу. Зупин корби при зчіпленні зубців кругів *m* і шестерень *RR* спричиняє чимале тертя між рухомими частинами аритмометра, і для переборення його доводиться

робити велике зусилля, а воно спричиняється до розробки окремих частин аритмометра та розладнання правильної їх роботи. Зміна в напрямі руху корби при серединнім її положенні може іноді спричинити неправильне перенесення десятків, бо важіль K (рис. 22) може опинитися при зворотнім русі не в тім положенні, в якім був він при прямім русі.

4) Уставляючи виступ c відносно цифр прорізів, треба пильнувати, щоб пружинний шпеник l (рис. 24) устиг запасти в відповідне гніздо кільця P. Останнє характеризується цоканням від удару кінця шпеника l об дно гнізда, а також стійким положенням виступу c, що не змінюється від легкого натиску на виступ. Якщо ж виступ c не посів зазначеного положення, то число зубців, яке з'явиться на крузі m, не відповідатиме уставляній цифрі, і зубчасті колеса ee (рис. 22) не повернуться на потрібне число зубців.

Від довгорічної роботи або від неправильного поводження частини аритмометра можуть спрацюватися; тоді рух зубчастих коліс стає неправильний, і на аритмометрі починають виходити невірні результати. Треба, відґвинтивши покришки, що закривають механізм, виявити положення спрацьованої частини і виписати на замін її запасну частину з фабрики, яка виготувала аритмометр, зазначивши нумер аритмометра й нумер попсованої частини. Заміну частин слід доручати якомусь місцевому механікові, а найвигідніше просто пересилати аритмометр для виправи на фабрику. Самому розбирати й складати аритмометр не рекомендується. У всякім разі, якщо неодмінно треба аритмометр розібрати, то, здіймаючи частини, слід зазначати їх порядок, а складаючи – уставляти їх тим самим порядком.

Робота вдосконалених типів Однерового аритмометра нічим не різниться від роботи основної машини „Оригінал-Одлер". Її тільки полегшують та прискорюють дрібні вдосконалення, що збільшують зручність користування аритмометром.

Різняться типи аритмометрів Однера, випущені тією чи тією фірмою, насамперед тим, скільки цифр можна одержати в результаті.

Описані лічильні прилади пристосовані передусім виконувати дії додавання або віднімання і тільки повторним додаванням чи відніманням виконують дії множення й ділення. Різняться прилади один з одним ступенем механізації процесу обчислення; що більше лишається місця участі в обчисленні самого обчислювача, то більше втомлює виконання дій множення й ділення. У найдосконалішім з лічильних приладів цього типу — Однеровім аритмометрі, де для множення й ділення треба тільки багатократ обертати корбу, обчислювач, зробивши велику кількість перемножень чи ділень, починає відчувати просто фізичну втому руки.

Тимто на особливу увагу заслуговують прилади, призначені для безпосереднього виконання множення й ділення. Один із перших і дуже досконалих лічильних приладів цього типу винайшов 1878 року відомий російський математик П. Л. Чебишов. На жаль, хоч прилад і простий, але на продаж його не виготовляли, і тому практично він не поширився; єдиний його примірник є у Франції в Conservatoire des arts et métiers, а докладно описано його, на підставі пояснень самого П. Л. Чебишова, в книжці d'Ocagne — „Le calculs simplifié".

Така ж доля спіткала прилад Болле, винайдений 1888 року і збудований в однім примірнику; тут на перешкоді поширенню приладу стала переважно висока його ціна.

Інженер Штайґер використав ідею Болле і сконструював свій лічильний прилад, збудований 1892 року Еґлі в Цюріху і названий „Мільйонер".

Прилад цей має суттєве значення для точних обчислень і, хоч дорогий, але широко розповсюджений.

З зовнішнього вигляду аритмометр „Мільйонер" Штайґера й Еґлі є досить великий дерев'яний, закритий покришкою, ящик — 66 *см* завдовжки, 31 *см* завширшки і 18½ *см* заввишки. Верхня частина аритмометра, закрита покришкою, являє собою металеву дошку, що накриває механізм аритмометра. На ній і розміщені всі потрібні для обчислення пристрої.

Виконання дій додавання та віднімання на аритмометрі „Мільйонер" мало відмінне від роботи аритмометра Однерової системи. Деяка вигода та, що можна уставляти перший доданок і зменшеник на указнику результатів, не обертаючи корби.

Зате гостро помітні переваги аритмометра „Мільйонер" при виконанні дій множення й ділення. Заощадження часу тут особливо велике: число обертів корби, що в аритмометрах типу Однер дорівнює сумі цифр множника або частки, при користуванні „Мільйонером" дорівнює числу цифр множника або частки. Рівне число обертів буде тільки тоді, коли сума цифр множника або частки дорівнює числу їхніх цифр; найбільша ріжниця числа обертів буде тоді, коли всі розряди множеника й частки виражені десятками.

Крім того, в аритмометрі „Мільйонер" — автоматичний рух каретки. Виконання множення й ділення на аритмометрі „Мільйонер" потребує пересічно вчетверо — вп'ятеро менше часу, ніж на лічильних приладах, призначених для сумування.

§ 38. Лічильні машини спеціяльного призначення (інтеґратори). Вигоди й переваги користування лічильними машинами, а саме: пришвидшення та спрощення процесу обчислення, зменшення втомлености обчислювача і зменшення шансів появи помилок, якщо, звісно, машини відповідно вдосконалені, —

породили намагання утворити машини не тільки для виконання основних аритметичних дій, а, по змозі, й для складніших дій для різної спеціяльної мети, наприклад, обчисляти вартості деяких функцій і навіть розв'язувати рівнання.

Так, 1812 року англієць Бабедт винайшов спеціяльну машину обчисляти вартості функцій за допомогою ріжниць перших п'яти порядків.

1834 року шведи Ґеорґ та Едвард Шеуц (батько й син) збудували машину, подібну ідеєю до Бабедтової машини, що обчисляла функції за допомогою ріжниць чотирьох перших порядків і одночасно друкувала таблиці вартостей і самої функції й її ріжниць.

1909 року фірма Гаман (Берлін) збудувала для Rechen-Institut спеціяльну лічильну машину, якою можна було обчислити вартість функції за допомогою ріжниць двох перших порядків, для провадженої в Інституті перевірки обчислень при складанні таблиць восьмизначних логаритмів.

З-поміж приладів, широко вживаних у техніці й званих інтеґраторами, ми опишемо такі:

I. Виміряти площі:

1. Прітців пляніметр або, так званий, топірець, що своєю дивовижною простотою й дешевиною дає кожному технікові можливість зробити його самому.

2. Амслерів пляніметр, як найпоширеніший.

3. Пляніметр Коради, як найдосконаліший і дуже поширений.

II. Визначати моменти інерції.

Амслер-Ляффонів інтеґратор, як найпоширеніший і простий.

Загальна теорія інтеґраторів.

Перше, ніж описувати ці прилади, обізнаймося з загальною їх теорією.

Найпростішу й найзагальнішу теорію інтеґраторів дав французький інженер Андрад 1874 року, а російською мовою вперше подав акад. проф. А. Н. Крилов.

Ґрунтується ця теорія на розгляді площі, описуваної якоюсь простою лінією певної довжини AB, підчас руху її по площині.

Коли ця проста AB рухається площиною, кожний елемент її лишає на цій площині слід.

Площу, утворену цими слідами, вважають за додатню, якщо вона ввесь час лишається ліворуч простої, коли дивитися в напрямі від A до B, і за від'ємну, коли вона лежить праворуч. Повна площа, описана простою AB, є альґебрична сума елементарних площ, утворених різними слідами простої AB. Коли, отже, лишити середину простої AB нерухомою і повернути всю лінію AB відносно цієї середини на якийсь кут, то повна площа, описана лінією AB, дорівнюватиме, очевидно, нулеві, бо суми від'ємних і додатніх слідів її будуть рівні, але противні знаками.

Припустім тепер, що проста AB з положення A_0B_0 перейшла в безконечно - близьке положення A_1B_1, описавши безконечно - малу площу $A_0\,B_0\,B_1\,A_1$ (рис. 26). Збудувавши нормалю $A_1\,C$ та $B_1\,D$, ми одержимо трапез $A_1\,B_1\,DC$, якого площа різниться від $A_0\,B_0\,B_1\,A_1$ на альґебричну суму площ $A_0\,A_1\,C$ та $B_0\,B_1\,D$. За нашого припущення, що площа $A_0\,B_0\,B_1\,A_0$ безконечно-мала першого порядку малости, ці площі будуть безконечно-малими другого порядку, а тому в границі площі $A_0\,B_0\,B_1\,A_1$ та A_1B_1CD будуть еквівалентні. Отже, з точністю до безконечно - малих другого порядку можна вважати, що

$$\text{площа } A_1B_1DC = СД \times M_1\,P = A_0B_0 \times M_1\,P = \\ = AB \times M_1P = \Delta F, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (237)$$

де:

$\Delta\, F$ — безконечно-мала елементарно площинка $A_0\,B_0\,B_1\,A_1$

$СД$ — довжина, що різниться на безконечно-малу величину від AB, і

M_1P — сама величина безконечно-мала.

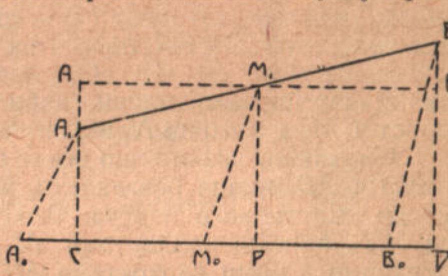


Рис. 26

Вираз (237) можна формулювати, як таку теорему:

Безконечно-мала площа, описана, простою AB при безконечно-малім її переміщенні з положення $A_0\,B_0$ в безконечно-близьке положення $A_1\,B_1$, дорівнює площі прямого прямокутника, один бік якого рівний з простою AB, а другий — з проекцією шляху, пройденого середньою її точкою M, на нормалю до напряму лінії AB.

Ця теорія й лежить в основі теорії механічного виміру площ та взагалі теорії інтеґраторів.

На підставі цієї теорії й виразу (237) ми можемо сказати, що вся конечна площа F, описана лінією AB, є границя суми площ F (237). А як, на підставі теорії границь, можна, при відшуканні границі суми, кожний елемент суми, не міняючи границь її, замінити еквівалентним із ним, то за виразом (237) можемо написати:

$$F = \text{гр.}\,\Sigma A_0B_0B_1A_1 = \text{гр.}\,\Sigma A_1CDB_1 = \\ = \text{гр.}\,\Sigma AB \times M_1P = AB \times \text{гр.}\,\Sigma M_1P \; . \; . \; . \; . \; . \; (238)$$

Коли б через точку M проходила серединна площа коліщати, за вісь якого правила б проста AB, то, очевидячки, гр. ΣM_1P у виразі (238) була б довжина дуги, на яку повернулося б це коліща при руху простої AB. Тоді, на підставі виразу (238), ми можемо сказати:

Площа, описувана простою AB, що має довжину l, виміряється добутком цієї простої на довжину дуги s, на яку повернеться вищезазначене коліща, розташоване в середній точці M лінії AB, тобто:

$$F = s \times l \; . \; . \; . \quad (239)$$

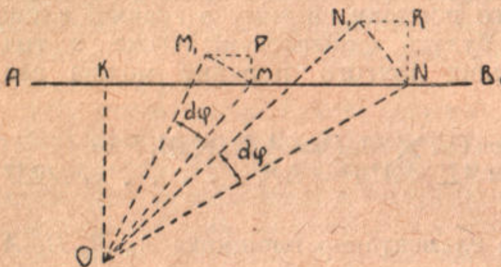


Рис. 27

Це твердження, власне, й обіймає собою основи теорії всякого інтеґратора.

Погляньмо тепер, яку поправку треба було б зробити в одержаній величині вимірюваної площі, якби коліща було не в середині простої M, а в точці N, віддеглій від M на віддаль a (рис. 27).

З механіки знаємо, що всяке безконечно-мале переміщення простої AB можна розглядати, як обертання її на кут $d\varphi$, відносно миттьового центра. O. При цім елементарні дуги MM_1 та NN_1, описані коліщатами M і N, можна замінити еквівалентними з ними вартостями MP та NR

З рис. 27 бачимо, що

$$\left.\begin{aligned} MP &= MM_1 \cos \measuredangle M_1MP = OMd\varphi \cos \measuredangle M_1MP = KM \times d\varphi \\ NR &= NN_1 \cos \measuredangle N_1NR = ONd\varphi \cos N_1NR = KN \times d\varphi \end{aligned}\right\} \; . \quad (240)$$

звідси

$$NR - MP = (KN - KM)d\varphi = MNd\varphi = ad\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (241)$$

На підставі виразу (241) бачимо, що при поверті простої AB на конечний кут φ ріжниця двох повертів коліщат M та N дорівнює $a\varphi$.

Якщо кінцеве положення простої AB зливається з початковим, і якщо проста AB не описала при цім повного оберту, то кут φ дорівнює нулеві, і тоді, значить, положення вимірового коліщати не має ніякої ваги.

Якщо ж проста AB зробила повний оберт, то кут $\varphi = 2\pi$, і коли вимірове коліща N віддалене на a від середньої точки M, то до довжини дуги поверту s треба додати величину $2\pi a$, отже, до площі sl, обчисленої за формулою (239), треба додати πal.

Припустім тепер, що точка B простої AB опише замкнену криву C (рис. 28), при чім точка A рухатиметься розімкненою кривою L, яка не має петель, а коліща міститься в точці N (рис. 27).

Коли проста AB прийде в своє первісне положення, то на підставі всього сказаного площа, описана простою AB, дорівнюватиме площі F, обмеженій замкненою кривою C, бо частина площі між C та L пройдена буде лінією AB двічі в двох протилежних напрямах, і в сумі буде нуль. Інакше сказавши, тут площа Fвиміряється добутком $l.\ s$, де s—довжина дуги, на яку повернулося вимірове коліща N.

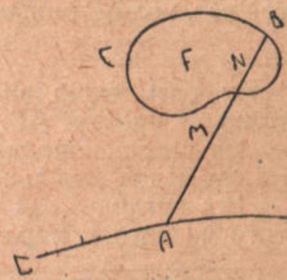


Рис 28

Якщо й точка A одночасно з B опише теж замкнену криву, тобто ведуча лінія так само, як і обводжена C, буде замкнена (рис. 29), то площа, описана простою AB при поверненні її в первісне положення, на підставі сказаного вище, очевидячки, дорівнюватиме різниці площ F і G, тобто $F-G$.

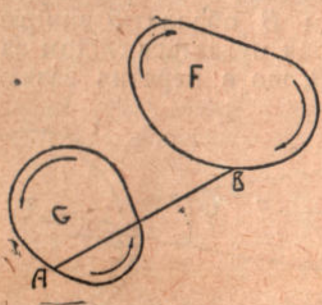


Рис. 29

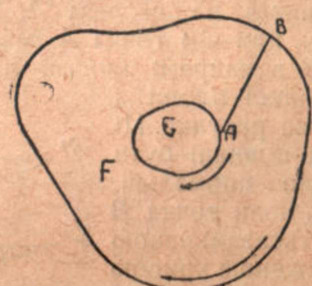


Рис. 30

Щоб визначити знак цієї різниці, досить площі, обходжені в напрямі стрілки годинника, взяти за додатні, а в зворотнім напрямі — за від'ємні.

На підставі цього, обидві площі на рис. 30 додатні, а на рис. 29 площа F додатня, н площа G — від'ємна.

Тому, коли дуга поверту вимірового коліщати дорівнює s, ми одержимо:

$$\left.\begin{aligned} F-G&=ls \\ \text{або}\quad F&=ls+G \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (242)$$

У другім випадку:

$$
\left. \begin{array}{r} F-(-G)=F+G=ls \\ F=ls-G \end{array} \right\} \quad \text{або} \qquad \ldots\ldots \quad (242а)
$$

Якщо замкнена крива *C*, якою площу *F* бажають виміряти, цілком обіймає ведучу криву *L*, то *AB* зробить повний оберт у той час, коли *B* опише *C*, і площа *F*, на підставі сказаного, буде:

$$F=ls+G+2\pi la \quad \ldots\ldots\ldots \quad (242б)$$

у тім разі, якщо вимірове колісо міститься не в серединній точці *M* простої *AB*, а в точці *N*.

На підставі поданої теорії, бачимо, що ведучу криву *L* можна взяти довільно.

Від вигляду цієї ведучої кривої й залежить конструкція того чи того інтеґратора. До опису їх ми тепер перейдемо.

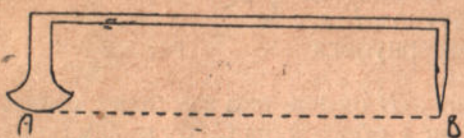


Рис. 31

1. Прітців „топірець“. Пляніметр - топірець винайшов 1886 року капітан данської армії Прітц. Це — металевий стрижень із загнутими під прямим кутом кінцями (рис. 31). Один кінець його *A* зроблено на зразок леза сокири, а другий *B* загострено. Точка *B* повинна лежати в подовжній серединній площі леза *A*. Вістрям *B* обводять вимірювану фігуру, при чім точка *A* леза топірця рухається слідом за точкою *B* в напрямі простої лінії *AB*, що є перетин зазначеної серединної площі з площею рисунка. Ці площі повинні бути взаємно нормальні. Отже, коли точка *B* рухається замкненою обводженою кривою *C* (рис. 28), точка *A* описує якусь лінію *L*, що кожного разу залежить від вигляду

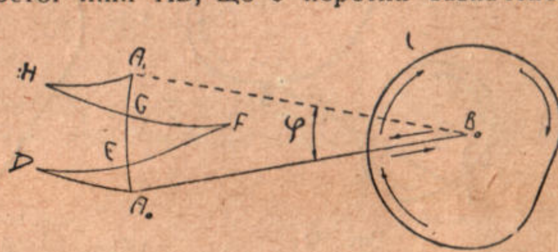


Рис. 32

фігури *C* і руху точки *B*, що обрисовує її. Інакше сказавши, у Прітцевім пляніметрі немає сталої, раз назавжди визначеної, ведучої лінії *L*. Зауважмо ще, що, вживаючи Прітцевого пляніметра, ставлять звичайно точку *B* при початковім положенні топірця, по змозі, в центрі тягару обводженої площі B_0 (рис 32), потім зсувають її найкоротшим шляхом на периметр фігури, обводять її за стрілкою годинника і повертають лезо в початкову точку, тобто в центр тягару фігури.

Припустім, що, коли точка B обійде зазначеним способом криву C, то точка A леза опише, як показано на рис. 32, криву $A_0DEFGHA_1$, тобто кінцеве положення простої AB буде A_1B_0. Щоб повернути її в початкове положення A_0B_0, треба, очевидячки, повернути її відносно B_0 на кут $\varphi = \measuredangle A_1B_0A_0$. Тоді ведуча лінія L замкнеться дугою A_1A_0. Площа ж, описана простою AB за викладеною теорією, дорівнюватиме ріжниці площ фігур C і альґебричної суми площ, що містяться між частинами ведучої лінії, взятих з належним знаком.

Отже, ця площа дорівнюватиме

$$\Omega = F - (A_0DE + GHA_1 - EFG) \; . \; . \; . \; . \; . \; (243)$$

при чім, за доведеною вище теорією, площа дорівнює добуткові з довжини простої AB на довжину дуги, на яку повернулося б коліща, уставлене в її середній точці M.

Коли б коліща уставлене було в точці A, і його вісь зливалася б з простою AB, то площа коліщати була б нормальна до подовжної серединної площі топірця. При цім переміщення точки дотику коліщати до площі рисунка завжди було б напрямлене нормально до площі коліщати. Тому коліща лишалося б нерухомим, і його показ дорівнював би нулеві при рухові точки A_3A_0 в A_1. Тоді, на підставі формули (241) і зроблених із неї висновків, ми можемо сказати, що уставлене в серединній точці M коліща повернулося б на дугу $^1/_2\, l\varphi$, де $\varphi = \measuredangle A\,B_0A_1$, коли б проста посіла положення B_0A_1. При поверті ж простої в положення A_0B_0, коліща M повернулося б іще на дугу $^1/_2 l\varphi$ Отже, повна дуга поверту коліщати в M була б $l\varphi$, а значить у виразі (243) площа Ω дорівнювала б $l \times l\varphi = l \times \widehat{A_0A_1}$, і формула (243) набрала б вигляду:

$$l \times \widehat{A_0A_1} = F = (A_0DE + GHA_1 - EFG) \; . \; . \; . \; . \; (243а)$$

При умові, що початкова точка B_0 зливається з центром тягару фігури, альґебрична сума площ між галузями ведучої лінії дуже близька до нуля, а тому можна вважати, що шукана площа дорівнює:

$$F = l \times \widehat{A_0A_1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (243б)$$

Коли кут φ не більший за 20^0, можна сміливо дугу A_0A_1 вважати за рівну з тятивою A_0A_1, і тоді шукана величина площі дорівнює:

$$F = l \times \overline{A_0A_1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (244)$$

На підставі сказаного, не важко визначити спосіб виміряти площі за допомогою пляніметра - топірця.

Примістивши рисунок фігури на поземій площі, уставляємо лезо приладу B на око в центрі тягару фігури, пильнуючи, щоб серединна площа була прямовисна, натискаємо рукою другий кінець приладу і лишаємо на площі рисунку слід A_0 від леза топірця. Вививши в якімнебудь напрямі вістря B на контур фігури, обводимо її вістрям B в напрямі стрілки годинника і, прийшовши в початкову точку периметра фігури, повертаємо вістря B в первісне положення B_0. Знову натискаємо рукою другий кінець приладу й одержуємо новий слід A_1 від леза топірця. Вимірявши довжину лінії A_0A_1 та помноживши її на віддаль між точками A й B, дістаємо шукану величину площі фігури.

Можна довести, що, коли l вчетверо й більше разів перевищує довжину найбільшого радіюса - вектора фігури (віддаль від центра тягару його до якої завгодно точки периметра), то помилка обчислення не буде більша за $3^1/_3{}^0/_0$. Більша неточність залежить від неправильного обведення та нерівности паперу.

Коли площі дуже великі, або контур фігури дуже покручений, краще розбивати вимірювану площу на частини, так щоб середній діяметр їх не перевищував половини довжини приладу, і сумувати виміряні їх площі.

Прітц збудував пляніметр з довжиною $l = 25$ *см*, але можна брати й іншу довжину і навіть робити її змінною, якщо вістря топірця виготувати рухоме вздовж стрижня приладу. Вважаючи на те, що виміряти точно довжину трудно, краще визначити її в результаті кількох вимірів фігури, величина площі якої точно відома.

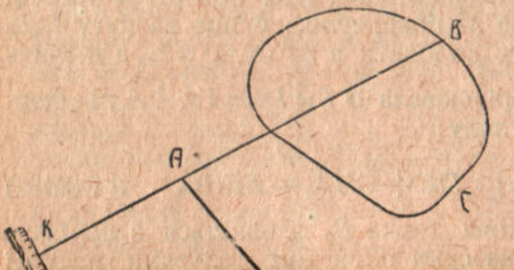


Рис. 33

Якщо вимірювана фігура нарисована мірилом $^1/n$ натуральної величини, то результати виміру нарисованої фігури помножають на n^2, щоб одержати розміри величини фігури.

2. **Амслерів пляніметр.**

Схема будови Амслерового пляніметра (рис 33) така:

Два стрижні OA та BK злучені суставним способом у точці B. На кінці O стрижня OA є гострий шпеник; його вколюють у рисунок. На кінці B стрижня BK укріплено шпеник, яким обводять вимірювану площу, а на кінці K того ж таки стрижня насаджене вимірове колесо з поділками, за допомогою яких можна прочитувати кут поверту коліщати.

Щоб виміряти площу, очерчену лінією C, уставляють прилад, як показано на рис. 33, закріпляють вістря O й прочитують показник на коліщаті K.

Припустім, що цей прочит буде ϑ_0.

Далі обводять шпеником B контур площі в напрямі стрілки годинника і, коли шпеник B повернеться в початкове положення, знову прочитують на коліщаті K показник.

Нехай цей другий прочит дорівнює ϑ.

Тоді величина площі контура C буде пропорційна до ріжниці прочитів, тобто

$$F = k(\vartheta_1 - \vartheta_0) \quad \text{. . . . .} \quad (245)$$

Із загальної теорії інтеґраторів ясно, що величина коефіцієнта дорівнює:

$$k = l \times r \quad \text{. . . . .} \quad (246)$$

де

l — довжина стрижня AB, а
r — радіюс коліщати.

Звичайно величину k визначають дослідним способом. Для того обводять фіґуру, величина площі якої наперед відома, наприклад, квадрата з визначеним боком або кола певного радіюса. Знавши цю площу й ріжницю прочитів на коліщаті, обчисляють k за формулою (245).

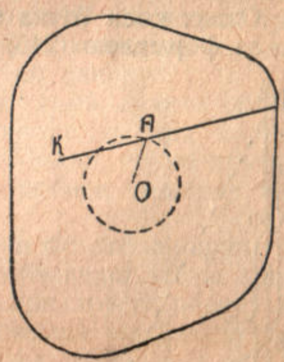


Рис. 34

Отже, коефіцієнт k визначають для даного приладу раз назавжди, при чім він пропорційний до довжини стрижня AB, що міститься між шпеником і суставом.

Ведуча лінія L (рис. 28), що нею рухається точка A, є коло радіюса OA.

Якщо точку O взято в середині вимірюваної площі, то, як бачимо з рис. 34, описана стрижнем AB площа є кільцева і лежить між ведучою лінією, описаною точкою A, і контуром площі, описаним точкою B. При цім проста AB, переходячи від початкового свого положення в кінцеве, робить повний оберт. Значить, на підставі загальної теорії, до довжини дуги, описаної виміровим коліщам, відлеглим від середини простої AB на віддаль a, треба додати величину $2\pi al$.

Величина кільцевої площі, отже, дорівнюватиме:

$$F - \pi R^2 = (S + 2\pi a)\,l, \quad \text{. . . . . . .} \quad (247)$$

де

$R = OA$ — радіюс ведучої лінії,
$S = r(\vartheta_1 - \vartheta_0)$ — довжина дуги, на яку повернулося коліща.

На підставі (242б), (245) та (247), одержуємо для цього випадку:

$$F = Sl + 2\pi al + \pi R^2 = k(\vartheta_1 - \vartheta_0) + \pi(R^2 + 2al) \quad . \; . \; (248)$$

Величина $\pi(R^2 + 2al)$ у формулі (248), очевидячки, є величина стала для даного приладу, і її легко можна обчислити або знайти геометрично.

Справді, коли прилад перебуває в такім положенні, як показано на рис. 35, то

$$\left.\begin{aligned} \overline{OB}^2 &= \overline{BK}^2 + \overline{OK}^2 \\ \overline{BK}^2 &= \left(a + \frac{l}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{l^2}{4} + al \\ \overline{OK}^2 &= R^2 - \left(a - \frac{l}{2}\right)^2 = R^2 - a^2 - \frac{l^2}{4} + al \\ \overline{OB}^2 &= R^2 + 2\,al = Q \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (249)$$

і, значить, формула (248) набере вигляду:

$$F = k(\vartheta_1 - \vartheta_0) + Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (248a)$$

Отже, коли точка O міститься поза вимірюваною площею, то за формулою (245) величина її дорівнює ріжниці показів коліщати $(\vartheta_1 - \vartheta_0)$, помноженій на сталий для даного приладу коефіцієнт k.

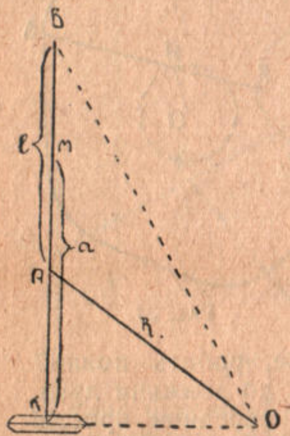


Рис. 35

Якщо ж точка O міститься в середині вимірюваної площі, то за формулою (248 a) величина її дорівнює ріжниці показів коліщати $(\vartheta_1 - \vartheta_0)$, помноженій на сталий коефіцієнт k і збільшеній на стале для даного приладу число Q.

Крім описаного приладу, Амслер будує й інший, заснований на тім самім принципі, що й перший, але відмінний від першого тим, що коліща k котиться не по рисунку, а на окремім кружалі, яке обертається пропорційно до поверту стрижня OA. У цім, так званім, кружаловім пляніметрі через згаданий пристрій:

1) збільшується поверт коліщати в кілька разів, отже, збільшується точність прочиту кута $(\vartheta_1 - \vartheta_0)$;

2) покази приладу точніші, бо усувається можливість ковзання коліщати, якщо рисунок вимірюваної площі зроблено

на дуже гладкім ковзькім папері, або якщо на папері є сліди пожмакання.

Точність кружалового пляніметра Амслера разів у 5 більша за перший — звичайний.

Користуватися з кружалового пляніметра або виміряти ним площі однаково, як і описаним вище; ріжниця лише та, що прочити на коліщатах у кружаловім пляніметрі можна збільшити в яке завгодно число разів проти звичайного пляніметра.

3. Пляніметр Кораді.

До категорії вдосконалених приладів належить і, так званий, компенсаційний пляніметр Кораді.

В ідеї будова цього пляніметра однакова із звичайним Амслеровим пляніметром, але, щоб усунути неточності показів коліщати від нахилу осі лічильного колеса і осі скріплення важелів, у пляніметрі Кораді є три точки опори, так званого, обвідного важеля зі шпеником *B*, яким обводять фігуру. Обвідний важіль *AB* (рис. 34) спирається не на точку *B* і коліща *K*, як в Амслеровім пляніметрі, а вісь коліщати *K* на спеціяльних кремпелях винесена тут на один бік стрижня *AB*, на другім же боці симетрично відносно *AB* розташоване спеціяльне опорне коліща, якого вісь нормальна до осі вимірового коліщати. Отож, стрижень *AB* дійсно має три точки опори: *B*, точку дотику вимірового коліщати до паперу і точку дотику опорного коліщати до паперу.

Крім того, спеціяльна будова сустава, який лучить обвідний важіль *AB* з полюсним *AO*, дає можливість при користуванні приладом приміщати полюс то по один, то по другий бік обвідного важеля, тобто, як кажуть, робити подвійну поставу полюса.

Наприклад, обводячи фігуру, приміщати вісь то ліворуч, то праворуч неї. Тому, коли при першім обведенні все ж існуватиме нахил осі колеса в один бік, то при другім обведенні він буде в другий бік, а в результаті помилка від нахилу осі коліщати в обох випадках компенсується.

Замість подвійної постави полюса можна користуватися також з одної постави, якщо тільки один раз обвідний стрижень буде ліворуч, а другий раз праворуч полюсного.

Певна особливість пляніметра Кораді є те, що вістря *O* стрижня *AO* втикають не безпосередньо в папір рисунка, а в спеціяльний металевий важкий циліндер, уставлений на площі рисунка.

Виміряють пляніметром Кораді так само, як і полярним пляніметром Амслера.

Для певности, що вимір площ за допомогою пляніметрів правильний, треба перівіряти їх, обводячи фігури, величина площ яких точно відома, наприклад, обводячи кілька разів у різні боки коло певного радіюса.

Деякі подробиці про те, як користуватися пляніметром Коради, уміщено в частині II, розд. VII.

4. Амслерів інтеґратор.

Цього приладу вживають, щоб механічним способом обчисляти не тільки площі, а й статичні моменти та моменти інерції плоских фігур[1]).

Будова його така сама, як і Амслерового пляніметра, але в нього є троє коліщат-коточків, зв'язаних взаємною системою зубчастих зачеплень, що правлять для виміру окремо кожної з трьох зазначених величин, а ведуча лінія є якась проста XX, як це показано на рис. 36.

Формула (245) показує, що вимірювана площа, обводжена точкою B, пропорційна до кута поверту коліщати і що коефіцієнт k не залежить від радіюса ведучого кола. Тому дану формулу можна застосувати й для випадку, коли радіюс ведучого кола обернеться в безконечність, тобто ведуче коло обернеться в просту XX.

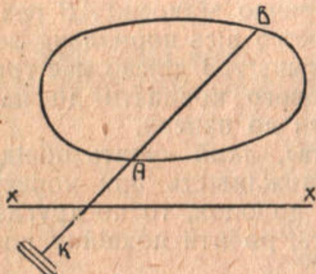


Рис 36

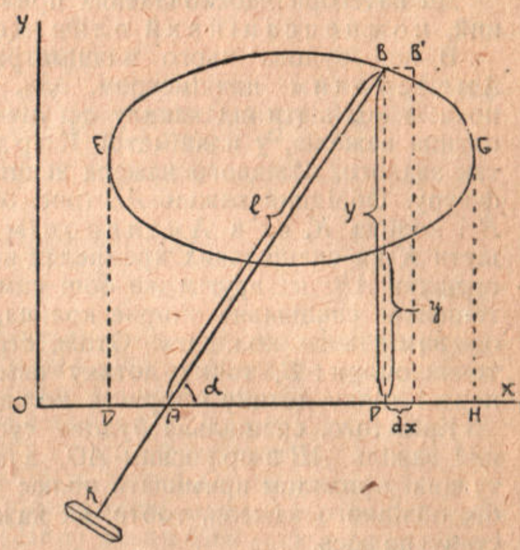


Рис. 37

У цім приладі є ще двоє коліщат: одно — знаходити величину статичного моменту, а друге — знаходити момент інерції даної фігури. Щоб показати, як обчисляти їх за допомогою інтеґратора, візьмім рис. 37.

---

[1]) Ми гадаємо тут, що читачеві відомі з механіки поняття про статичний момент та про момент інерції плоских фігур і всі формули обчисляти їх.

Як відомо, статичний момент зображеної на рис. 37 площі, розбитий на суму еквівалентних із нею елементарних смужок $(У-у)\,dx$, відносно осі XX виражається так:

$$M=\frac{1}{2}\int_a^b Y^2-y^2)dx=\frac{1}{2}\int_a^b Y^2dx-\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx \;.\;.\;. (250)$$

З рис. 37 бачимо, що

$$Y=l\sin\alpha;\; y=l\sin\alpha_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (251)$$

де α і α_1 — кути, утворені простою AB з віссю x-ів, коли шпеник B міститься в точці B.

Тоді:

$$\frac{1}{2}\int_a^b Y^2\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b l^2\sin^2\alpha\,dx=\frac{1}{4}l^2\int_a^b(1-\cos 2\alpha)\,dx \;.\;. (252)$$

Аналогічний же вираз буде й для y, а, значить, формула (250) набере вигляду:

$$M=\frac{1}{2}\int_a^b Y^2\,dx-\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b Y^2\,dx+\frac{1}{2}\int_b^a y^2\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}l^2\left[\int_a^b(1-\cos 2\alpha)\,dx+\int_b^a(1-\cos 2\alpha_1)\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{4}l^2\left[\int_a^b\cos 2\alpha\,dx+\int_b^a\cos 2\alpha_1\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{4}l^2\left[\int_a^b\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)dx+\int_b^a\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha_1\right)dx\right] \;.\;.\;. (253)$$

Щодо величини моменту інерції I відносно осі xx, то її виражаємо так:

$$I = \frac{1}{2}\int_a^b (Y^3 - y^3)\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (254)$$

Підставивши сюди вартість $Y - y$ з формули (251) і помічаючи, що $\sin 3\alpha = 3 \sin - 4 \cos^3 \alpha$, одержимо:

$$I_x = \frac{l^3}{4}\int_a^b \sin\alpha\,dx - \frac{l^3}{12}\int_a^b \sin 3\alpha + \frac{l^3}{4}\int_b^a \sin\alpha_1\,dx -$$

$$- \frac{l^3}{12}\int_b^a \sin 3\alpha_1\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (255)$$

Тим, що з рис. 37 видно, що:

$$l\int_a^b \sin\alpha\,dx + l\int_b^a \sin\alpha_1\,dx = \int_a Y dx + \int_b^a y dx =$$

$$= \int_a^b (Y - y)\,dx = F, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (256)$$

тобто площі даної фігури, то формула (255) набере вигляду:

$$I = \frac{l^3}{4}F - \frac{l^3}{12}\left[\int_a^b \sin 3\alpha\,dx + \int_b^a \sin 3\alpha_1\,dx\right] \quad . \; . \; (257)$$

Отже, з формул (253) та (257) бачимо, що для того, щоб знайти статичний момент і момент інерції відносно осі, треба обчислити інтеґралі:

$$\left.\int_a^b \sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right) dx\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (258)$$

$$\int_a^b \sin 3\alpha \, dx$$

Щоб механічно знаходити ці інтеґралі, і впроваджено двоє додаткових коліщат, зв'язаних спеціяльною системою зубчастих зачеплень так, що, коли стрижень AB утворює з XX кут α, вісь коліщати для обчислення M творить з цією віссю кут $\frac{\pi}{2}-2\alpha$, а вісь коліщати для обчислення I творить з нею ж кут 3α.

Тому прочити кутів поверту цих коточків і дадуть при обведенні контура фігури шпеником B величини, пропорційні до інтеґраль (258).

В Амслеровім інтеґраторі є три коточки, зв'язані взаємно системою зубчастих зачеплень, та стрижень із загостреним шпеником, яким можна проводити по обрису фігури. Будова приладу ґрунтується на можливості виразити площу, статичний момент і момент інерції фігури в функції від числа обертів, що їх роблять коточки при повнім обведенні фігури шпеником.

Будова Амслерового інтеґратора така. У приладі (рис. 37а) є стрижень AB зі шпеником на кінці B, призначеним обводити дану фігуру по обрису. До стрижня приіроблено коточок C, який обертається на осі, рівнобіжній з AB, і править для визначення площі фігури. Стрижень злучено з подвійним зубчастим сектором DE, що з ним зчіплюються зубчасті колеса F та G; до останніх приіроблено коточки C_1 і C, — за їх допомогою визначають статичний момент M і момент інерції J фігур відносно осі XX. Коли вживають приладу, усі коточки доторкаються до площі, де нарисована фігура, і котяться або ковзаються по цій площі підчас руху шпеника. Радіюс дуг D і E подвійного сектора відповідно вдвоє і втроє більший за радіюси коліс F та G; тому осі коточків C_1 та C, описують кути вдвоє і втроє більші за кут, що його описує вісь коточка C. При обведенні фігури шпеником B кінець A стрижня, який зливається з віссю підвійного сектора, рухається тільки по осі XX, а осі зубчастих коліс переміщаються рівнобіжно з переміщенням осі сектора. Такого руху досягають тим, що всі ці осі прикріплені до спільної поперечки C_1AC_2, яку підтримує возок з коточками RR, а останні рухаються в ґарі лінійки KL, укладеній рівнобіжно з віссю XX за допомогою двох прутиків

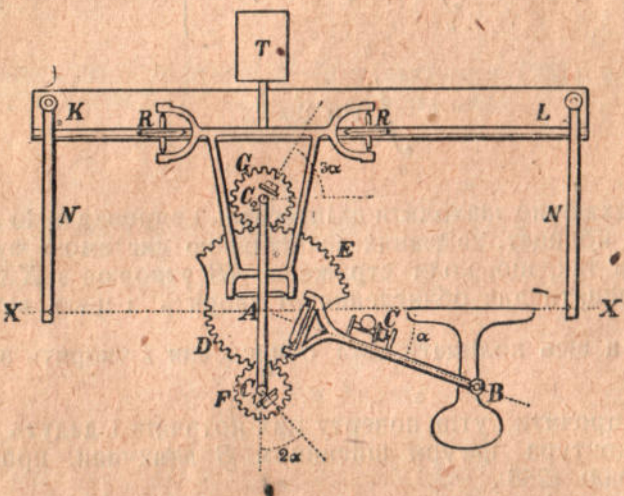


Рис. 37а

NN. Щоб полегшити рух візка, до нього прикріпляють противагу T, яка наближає центр тягару приладу до коточків.

Прилад конструюють так, і його частини мають такі розміри, що, коли позначити:

f — ріжниця прочитів на коліщаті, яке править для обчислення площі фігури F . . . . (259)

m — ріжниця прочитів на другім коліщаті, яке править для обчислення статичного моменту M її відносно осі XX . . . . (259)

i — ріжниця прочитів на третім коліщаті, яке править для обчислення моменту інерції I даної фігури відносно цієї ж осі . . . . (259)

то величини площі F, статичного моменту M її відносно осі XX і моменту інерції I відносно тієї ж осі виражатимуться простими формулами, що містять добуток із прочитів F, m та i на якісь сталі коефіцієнти, залежні, як уже раніш виведено, від довжини l стрижиня AB і радіюсів вимірових коліщат r_1, r_2, r_3.

У найпоширенішім інтеґраторі для величини площі, статичного моменту й моменту інерції ці формули мають вигляд:

Площа: $F = 0{,}1\,f$.

Статичний момент: $M = 0{,}6\,m$.

Момент інерції $I = 10\,f - 4\,i$

і дають вартість шуканих величин у сантиметрах.

Амслер звичайно будує інтеґратори чотирьох типів, позначені відповідними нумерами, а тому ми даємо в частині II розд. VIII спосіб користуватися кожним із чотирьох типів Амслерового інтеґратора.

ВІДДІЛ III

ГРАФІЧНІ ОБЧИСЛЕННЯ

Розділ VIII. Основні способи графічного числення

§ 39. Графічне додавання й віднімання. Графічне числення є один із найпоширеніших у техніці способів наближеного обчислення. Правда, при графічнім обчисленні якоїсь величини важко цілком точно визначити ступінь огріху результату, зате визначна наочність такого способу обчислення й можливість одразу помітити помилку, а крім того, цілком механічне виконання тих чи тих дій примушують цей спосіб ставити вище за інші, особливо тоді, коли обчислювач має підруч головні струменти для геометричних будов. А це звичайно трапляється завжди, коли розв'язують якесь технічне питання.

Ступінь точности результатів, одержаних за допомогою способів графічного числення, цілком залежить від ступеня точности рисування, а також від мірила, що його взяв обчислювач для виразу тих чи тих величин, з якими доводиться мати діло. Елементи, об'єкти або величини при графічнім численні є відтинки простих, що містять у собі стільки одиниць довжини, скільки відповідних їм одиниць міститься в даних величинах, які правлять за дані для розрахунку. Інакше сказавши, усі дії при графічнім обчисленні доводиться виконувати над відтинками простих ліній, що виражають у якімсь узятім мірилі задані величини.

Найголовніші прилади для графічних обчислень є циркель та лінійка.

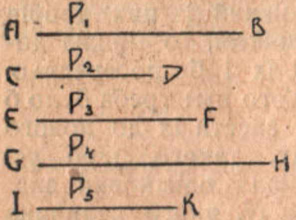
Початок графічного числення криється десь у глибокій давнині, але вперше подав його в систематичнім вигляді 1840 року французький інженер мостів та шляхів Cousinery в своїй книжці під назвою „Calcul par les traits“ (Обчислення з лініями).

Цю книжку й треба вважати за відпровідну точку розвитку графічних обчислень. Дещо пізніше, на початку другої половини XIX століття, спосіб графічних обчислень систематизували вчені К. Отто, Кремона та Кульман у своїх творах, присвячених викладові основ графічної статики (див. показник літератури).

Нехай треба знайти суму або ріжницю величин, чи, інакше сказавши, треба знайти графічним способом альґебричну суму такого вигляду:

$$P_1 + P_2 - P_3 + P_4 - P_5.$$

Умовившись про мірило, наприклад, вибравши 1 *см.* за вираз одиниці, що виміряє наші величини $P_1 \ldots\ldots P_5$, ми можемо зобразити їх відтинками, завдовжки відповідно (рис. 38):



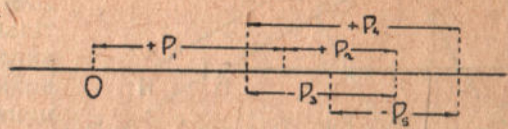


Рис. 38

для	величини	P_1	відтинком	AB
„	„	P_2	„	CD
„	„	P_3	„	EF
„	„	P_4	„	GH
„	„	P_5	„	IK

Далі візьмімо довільну просту, на ній якусь точку O і умовмось напрям руху від цієї точки, що відповідає нулевій вартості даних нам величин, вважати за відповідний зростанню даної величини, а в зворотний бік — за відповідний малінню величини, тобто, інакше сказавши, умовмося, наприклад, у напрямі вправоруч відкладати додатні вартості нашої величини, а в зворотний бік — від'ємні вартості. Після цього від точки O відкладім управоруч відтинок Oa, що дорівнює AB і виражає величину $+P_1$; відкладім від a вправоруч відтинок ab, що дорівнює CD і виражає собою величину $+P_2$; одержимо відтинок Ob, який виражає собою суму $P_1 + P_2$. Відкладаючи вліворуч від точки b відтинок bc, що дорівнює EF і виражає величину $-P_3$, ми одержимо вираз $P_1 + P_2 - P_3$. Роблячи так до кінця, одержимо в результаті відтинок:

$$Oe = Oa + ab - bc + cd - de \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (261)$$

Тим що

$Oa = AB = P_1$; $ab = CD = P_2$; $bc = EF = P_3$; $cd = GH = P_4$ і $de = IK = P_5$; то, значить: $Oe = P_1 + P_2 - P_3 + P_4 - P_5$ . . (261*a*) тобто відтинок Oe графічно виражає шукану альґебричну суму, числову величину якої ми одержимо, вимірявши взятим мірилом довжину відтинка Oe.

Цілком зрозуміло, що числові вартості величин $P \ldots P_5$ можуть бути й цілими і дробовими числами, але, коли б із якихось причин треба було знайти альґебричну суму дробів:

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}$$

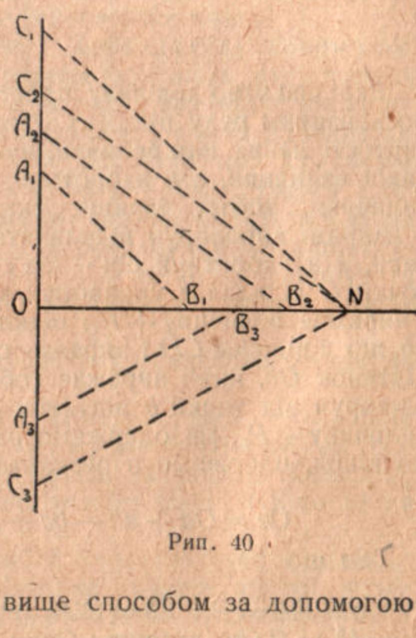
Рис. 39

і ми не могли б кожний із цих дробів виразити одним відтинком, то можна додавати їх і безпосередньо. Для цього нам треба було б тільки звести їх до нового вигляду, такого, щоб усі вони мали однаковий знаменник N, якого величина може бути довільна.

Таку заміну можна зробити оцим способом (рис. 39).

Нехай дано нам дріб $\frac{a}{b}$; узявши дві взаємно нормальні лінії OA та OB, відкладаємо певним мірилом від точки O на одній лінії, наприклад, OA, чисельник $a = OA$, а на другій — знаменник $b = OB$; на тій же лінії OB відкладаємо відтинок $ON = N$, тобто числовій вартості нового знаменника. Провівши лінію AB і збудувавши $CN \parallel AB$, матимемо відтинок OC, що виражає числову вартість c нового чисельника, бо на підставі подібности $\triangle\ OAB$ та $\triangle\ OCN$ пишемо:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{ON} \text{ тобто } \frac{a}{b}=\frac{c}{N} \ldots (262)$$



Рип. 40

Користуючись із цієї будови, ми можемо звести знаходження суми дробів:

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}$$

до додавання ліній зазначеним вище способом за допомогою будови, показаної на рис. 40.

Узявши дві взаємно нормальні лінії OX та OY і умовившись за додатні напрями на OY, на якій будуватимемо чисельники наших дробів, одержимо:

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}=\frac{OA_1}{OB_1}+\frac{OA_1}{OB_2}-\frac{OA_1}{OC_3}=$$

$$=\frac{OC_1}{ON}+\frac{OC_2}{ON}-\frac{OC_3}{ON}=\frac{c_1+c_2-c_3}{N} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (263)$$

Шукаючи ж альґебричну суму відтинків $c_1+c_2-c_3$ зазначеним вище способом, матимемо:

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}=\frac{c}{N} \, . \quad (264)$$

Очевидячки, що, коли б $N=1$, то

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}=c \quad . \; . \; (264a)$$

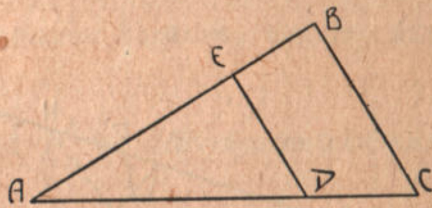


Рис. 41

§ 40. Графічне множення й ділення. Щоб одержати графічним способом добуток або частку, користуються з основної теореми геометрії про подібні трикутники, яка каже, що відповідні лінії подібних трикутників пропорційні, тобто, наприклад, боки трикутників ABC та AED (рис. 41) справджують рівність:

$$\frac{AD}{AE}=\frac{AC}{AB} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (265)$$

звідки, як відомо, одержимо:

$$\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{AC}\times\overline{AE} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (266)$$

З останньої рівности (266) бачимо, що, коли б, наприклад, $AD=1$, то числова вартість довжини AB виражала б добуток числових вартостей довжин AC та AE.

На цій підставі, щоб одержати графічним способом добуток двох величин, роблять так (рис. 41): беруть довільний кут і на однім його боці від вершка A відкладають мірильну одиницю довжини $AD=1$. Виразивши цим же мірилом задані чинники a та b відтинками ліній AE та AC, відкладають їх на різних боках кута. Злучивши точку D з E і провівши $BC \parallel DE$, одержують відтинок AB, числова величина довжини якого (за взятим мірилом) дорівнює числовій величині добутку.

Дійсно, на підставі рівности (266):

$$\overline{AB} \times \overline{AD} = \overline{AC} \times \overline{AE},$$

а тим що $AD = 1$; $AE = a$; $AC = b$, то

$$AB = a \times b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (267)$$

Легко пересвідчитися, що таким способом можна знайти добуток якого завгодно числа чинників; наприклад, на рис. 42 знайдено графічним способом добуток *abcd*.

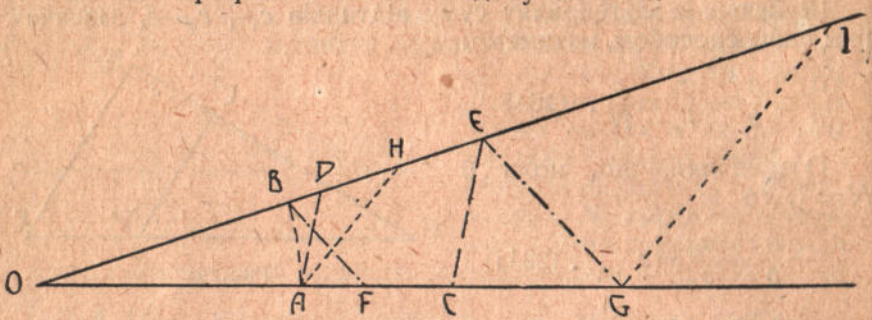


Рис. 42

Тут:

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = 1. \\ 1)\ OC = a;\ OD = b;\ OE \cdot OA = OC \cdot OD;\ OE = ab \\ 2)\ OF = c;\ OE = ab;\ OG \cdot OB = OE \cdot OF;\ OG = abc \\ 3)\ OH = d;\ OG = abc;\ OI\ \ OA = OH \cdot OG;\ OI = abcd \end{array}\right\} . \quad (268)$$

З наведеної будови бачимо, що в подібнім випадку з вершка O на обох боках відкладають $OA = OB = 1$ і по черзі на боках кута будують

$$OC = a;\ OD = b;\ OF = c \text{ і } OH = d,$$

а потім послідовно будують ряд подібних трикутників.

Користуючись із цієї ж рівности (266) і вважаючи, наприклад, $AE = 1$, ми знайдемо, що

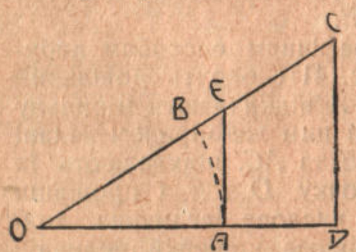


Рис. 43

$$AD = \frac{AC}{AB} \quad . \; . \; (269)$$

тобто, що числова величина AD дорівнює частці від ділення AC на AB, а тому: щоб одержати графічним способом частку двох величин $\frac{a}{b}$, робимо так (рис. 43):

беремо довільний кут і з вершка його O радіюсом $OA = OB = 1$ зачеркаємо боки його. На боках кута відкладаємо задані величини $a = OC$ та $b = OD$. Провівши CD, будуємо $AE \ \ CD$. Тоді

$$\frac{OE}{OA} = \frac{OC}{OD} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (270)$$

звідки, зауваживши, що $OA = 1$, $OC = a$, $OB = b$, знаходимо:

$$OE = \frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (271)$$

а міряючи довжину OE за мірилом, знайдемо числову величину частки $\frac{a}{b}$.

Коли б нам треба було знайти $\frac{b}{a}$, то ми збудували б $BF \ \ CD$[1]) і дістали б:

$$\frac{OF}{OB} = \frac{OD}{OC}, \text{ тобто } OF = \frac{b}{a} \quad \ldots\ldots \quad (271a)$$

Ділення графічно можна виконати ще так.

Нехай треба знайти $\frac{a}{b}$ (рис. 44).

Будуємо лінію $AB = a$ та $CD = b$. У точках B і D ставимо нормалі DE та BF і на лінії DE відкладаємо $DE = 1$. Провів-

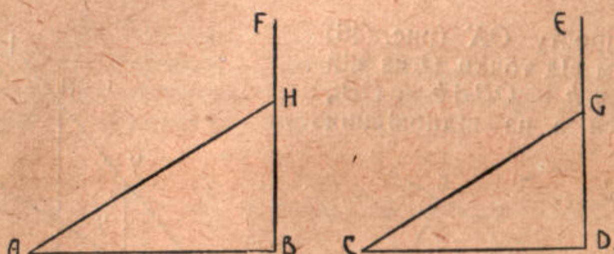


Рис. 44

ши просту CG через точку A, проводимо $AH \parallel CG$. Тоді відтинок BH виражатиме шукану частку. Справді, з подібности $\triangle ABH$ та $\triangle CDG$ маємо:

$$\frac{BH}{DG} = \frac{AB}{CD} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (272)$$

[1]) На рис. 43, щоб не затемняти його, цієї лінії не нарисовано.

або, знавши, що $DG = 1$, $AB = a$ і $CD = b$, знаходимо:

$$BH = \frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (273)$$

Не важко пересвідчитися, що, коли користуватися з описаного способу будувати довільний кут та чинити за вказівками формул (269) і (271), то легко послідовним рядом описаних вище будов обчислити графічно вираз вигляду: $\frac{a \cdot b \ldots}{c \cdot d \ldots}$

Так, на рис. 45 обчислено графічно вираз: $\frac{abc}{de}$.

Мавши $OA = OB = 1$, знаходимо:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ OC = a;\ OD = d;\ \frac{OE}{OA} = \frac{OC}{OD};\ OE = \frac{a}{d} \\
2)\ OE = \frac{a}{d};\ OF = b;\ OG \cdot OA = OE\,.\,OF;\ OG = \frac{a \cdot b}{d} \\
3)\ OG = \frac{a \cdot b}{d};\ OH = e;\ \frac{OI}{OA} = \frac{OG}{OH};\ OI = \frac{a \cdot b}{d \cdot e} \\
4)\ OI = \frac{a \cdot b}{d \cdot e};\ OK\,e; = OL \cdot OA = OK \cdot OI;\ OL = \frac{a\,.\,b \cdot c}{d\ e}
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (274)$$

Добуток дробів можна знайти й іншим способом.

Нехай, наприклад, треба перемножити два дроби: $\frac{a_1}{b_1}$ та $\frac{a_2}{b_2}$.

Візьмім просту OX (рис. 46) і відкладім від точки O на ній знаменники $b_1 = OB_2$ і $b_2 = OB_2$, як абсциси, а на відповідних

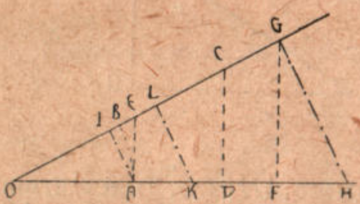


Рис. 45

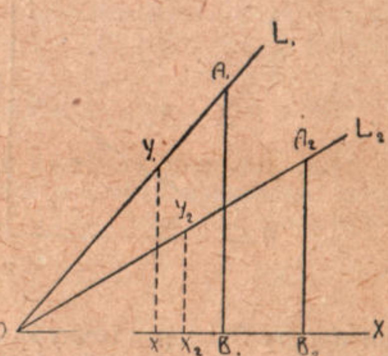


Рис. 46

ординатах збудуймо відповідні числам $a_1 = B_1A_1$ та $a_2 = B_2A_2$. З точки O проведім через A_1 і A_2 прості OL_1 та OL_2. Далі візьмім довільний відтинок $x_1 = OX_1$ і поставмо з X_1 нормалю $XY_1 = y_1$ до перетину з простою OL_1; далі відтинок OY_1 відкладім, як абсцису $x_2 = OX_2 = OY_1$ і поставмо нормалю $X_2Y_2 = y_2$ до перетину з простою OL_2.

Тоді:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_2}{x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (275)$$

Для доказу справедливости формули (275) напишім, на підставі подібности трикутників, рівності:

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) } \dfrac{A_1B_1}{OB_1} = \dfrac{X_1Y_1}{OX_1};\ \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{y_1}{x_1} \\ \text{б) } \dfrac{A_2B_2}{OB_2} = \dfrac{X_2Y_2}{OX_2};\ \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{y_2}{x_2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (276)$$

Перемножаючи ці рівності (276), дістанемо:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (277)$$

звідки, знавши, що $y_1 = x_2$ будовою, знайдемо:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_2}{x_1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (278)$$

що й треба було довести.

Отже, щоб одержати величину добутку кількох дробів, треба, зробивщи зазначені будови, останню ординату y_n поділити на першу абсцису x_1, тобто

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdots \frac{a_n}{b_n} = \frac{y_n}{x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (279)$$

Якщо ж x_1 ми візьмемо за рівну з одиницею $x_1 = OX_1 = 1$, то

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdots \frac{a_n}{b_n} = y_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (280)$$

інакше сказавши, обчислення формули вигляду $\frac{a \quad b \cdot c \cdots}{d \cdot e \cdot f \cdots}$ за допомогою зазначеної будови при $x_1 = 1$ можна за формулою (280) звести до виміру самої тільки останньої ординати.

На рис. 47 обчислена формула вигляду: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$

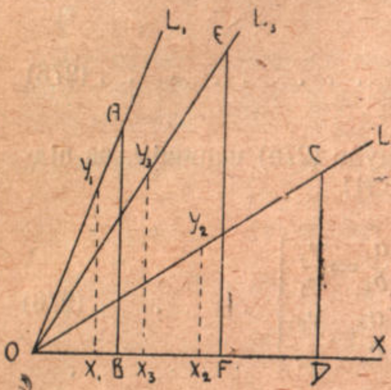


Рис. 47

Саме тут маємо:

$$\left.\begin{aligned} OB &= b;\ OA = a \\ OD &= d;\ OC = c \\ OF &= f;\ OE = e \\ OX_1 &= x_1 = 1 \\ X_1Y_1 &= y_1 = OX_2 = x_2 \\ X_2Y_2 &= y_2 = OX_3 = x_3 \\ X_3Y_3 &= y_3 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (281)$$

Отже

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{y_3}{x_1} = y_3.$$

Очевидячки, що ділення дробів можна звести до множення, бо

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} \quad . \ . \ (282)$$

§ 41. Степенювання. Для графічного степенювання можна вживати різних способів.

1) 1-й спосіб: на боках довільного кута (рис. 48) відкладаємо $OA = OB = 1$ і в цій одиниці виражаємо відтинком $OC = OD$ наше число c.

Тоді, провівши $CF \parallel AD$, дістанемо, як при множенні:

$$\frac{OF}{OD} = \frac{OC}{OA};\ OF \cdot AO = OD \cdot OC,$$

тобто $OF = c^2$ . . . (283)

Далі, будуючи $GF \parallel BC$, знаходимо $OG = c^3$.

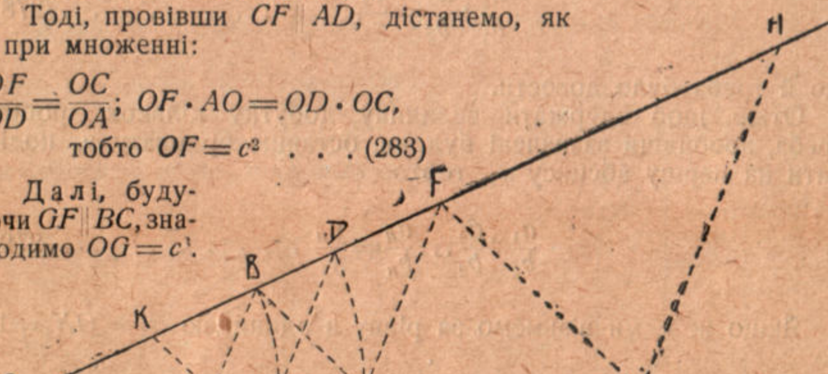


Рис. 48

Провівши потім $GH \parallel AD$, одержимо $OH = c^4$ і т. д.

Коли б показник степеня був від'ємний, то рівнобіжні лінії треба було б будувати в напрямі вершка кута.

Справді, коли проведемо $BI \parallel AD$, то одержимо:

$$\frac{OI}{OA}=\frac{OB}{OD}; \; OI=\frac{OA \cdot OB}{OD}=\frac{1}{c}=c^{-1}.$$

Провівши $IK \parallel BC$, ми дістанемо:

$$\frac{OK}{OB}=\frac{OI}{OC}; \; OK=\frac{OI \cdot OB}{OC}=\frac{1}{c^2}=c^{-2} \text{ і т. д.} \quad . \; . \; (284)$$

2) Описаний спосіб степенювати можна трохи відмінити, а саме так:

Вбудувавши довільний кут O (рис. 49), відкладаємо від O на боках кута відтинки $OA=OB=1$ і взятим мірилом відтинок $OC=c$ на боці OB.

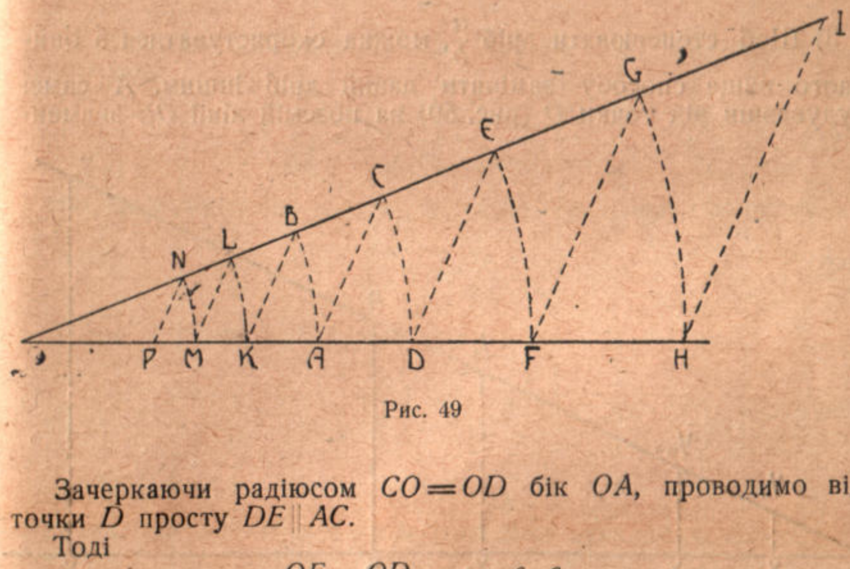


Рис. 49

Зачеркаючи радіюсом $CO=OD$ бік OA, проводимо від точки D просту $DE \parallel AC$.

Тоді

$$\frac{OE}{OC}=\frac{OD}{OA}; \; OE=\frac{c \cdot c}{1}=c^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (285)$$

Зачеркаючи радіюсом $OE=OF$ просту OA в точці F та збудувавши $FG \parallel AC$, одержуємо:

$$\frac{OG}{OC}=\frac{OF}{OA}; \; OG=\frac{OC \cdot OF}{OA}=\frac{OC \cdot OE}{OA} \; . \; . \; . \; . \; . \; (286)$$

звідки:

$$OG=c \cdot c^2=c^3.$$

Далі, зачеркаючи радіюсом $OG = OH$ просту OA в точці H і будуючи $HI \parallel AC$, знаходимо:

$$OI = \frac{OC \cdot OH}{OA} = \frac{OC \cdot OG}{OA} = c \cdot c^3 = c^4 \text{ і т. д. . . (287)}$$

Щоб піднести c до від'ємного степеня, проводимо рівнобіжні лінії в напрямі до вершка кута, а саме: провівши $BK \parallel AC$ маємо:

$$\left.\begin{array}{l} OK = \dfrac{OA \cdot OB}{OC} = \dfrac{1}{c} = c^{-1} \\ OM = c^{-2} \\ OP = c^{-3} \text{ і т. д.} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (288)$$

3) Щоб степенювати дріб $\frac{a}{b}$, можна скористуватися з описаного вище способу заміняти даний дріб іншим. А саме: збудувавши від точки O (рис. 50) на поземій лінії OB знамен-

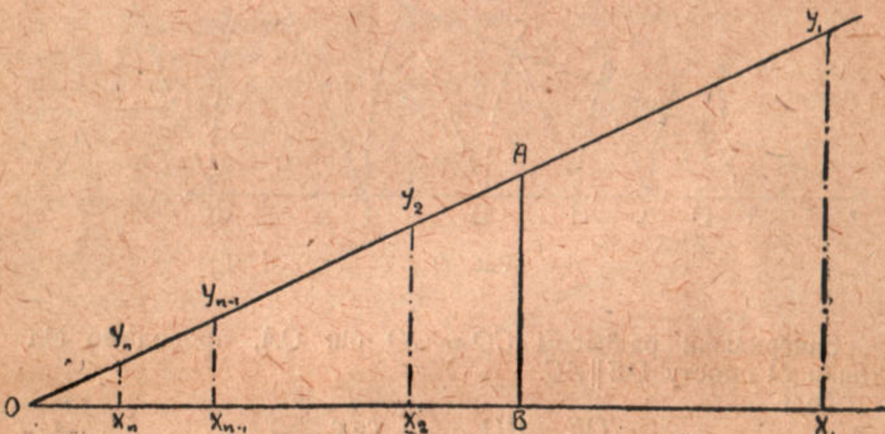


Рис. 50

ник дробу $b = OB$, ставимо нормалю AB і відкладаємо на ній $AB = a$ — чисельник дробу. Потім із точки O через A проводимо просту OA. Узявши новий довільний знаменник $OX_1 = x_1$ і поставивши $X_1Y_1 \perp OX$, одержимо новий чисельник $y_1 = X_1Y_1$ і матимемо тоді рівність:

$$\frac{a}{b} = \frac{y_1}{x_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (289)$$

Узявши y_1 за знаменник і збудувавши

$$1)\ x_2 = OX_2 = X_1Y_1 = y_1,$$
$$2)\ X_2Y_2 \perp OB;\ X_2Y_2 = y_2,$$

одержимо:

$$\frac{a}{y} = \frac{y_2}{x_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (290)$$

Робивши так далі, всього n разів, ми, нарешті, дістанемо:

$$1)\ x_n = OX_n = X_{n-1}\ Y_{n-1} = y_{n-1},$$
$$2)\ X_n\ Y_n \perp OB;\ X_n\ Y_n = y_n,$$

тобто

$$\frac{a}{b} = \frac{y_n}{x_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (291)$$

Перемножаючи рівності від (289) до (291), ми, очевидячки, одержимо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} \cdots \frac{y_{n-1}}{x_{n-2}} \cdot \frac{y_n}{x_n}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (292)$$

а тим що за будовою $y_1 = x_2;\ y_2 = x_3;\ \cdot\ y_{n-1} = x_n$, то очевидно:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{y_n}{x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (293)$$

Коли ж узяти $x_1 = 1$, то

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = y_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (294)$$

Очевидна річ, що, якби було $\frac{a}{b} > 1$, а не $\frac{a}{b} < 1$, як показано на рис. 50, то ординати y не зменшувалися б, а зростали. А тим що тоді будови дуже швидко можуть вийти за межі рисунка, то в разі $\frac{a}{b} > 1$ можна шукати $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{y_n}{x_1}$ і, одержавши результат, взяти обернену величину:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{x_1}{y_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (295)$$

Але при $\frac{a}{b} < 1$ арґументи зменшуються; отже, треба завжди першу абсцису $x_1 = 1$ вибирати можливо більшу, щоб збудовану ординату y_n можна було легко виміряти з достатньою точністю. Якщо, нарешті, бажано одержати результат $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ у вигляді десяткового дробу, треба взяти $x_1 = 10$.

4) Для степенювання цілих чисел, крім зазначеного 1-го способу й його відміни, можна вжити ще такого способу будувати середню пропорційну.

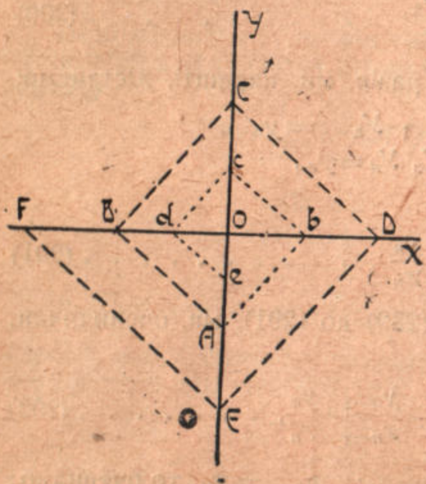


Рис. 51

Візьмім дві взаємно нормальні лінії OX та OY (рис. 51).

На осі OY униз відкладім відтинок $OA = 1$, узятий за мірильну одиницю довжини, а на осі OX уліворуч відкладім відтинок OB, що виражає в узятім мірилі величину $a = OB$.

Провівши AB і збудувавши $BC \perp AB$, одержимо на осі OY (згори) відтинок OC. Тоді за теоремою: нормаля, спущена з вершка простого кута на гіпотенузу прямокутнього трикутника, є середня пропорційна між відтинками гіпотенузи,— одержимо:

$$\overline{OB}^2 = \overline{AO} \cdot \overline{OC} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (296)$$

або

$$\overline{OC} = a^2.$$

Збудувавши $CD \perp BC$, одержимо на осі OX (праворуч) відтинок OD, що дорівнює:

$$\overline{OD} = \frac{\overline{OC}^2}{OB} = \frac{a^4}{a} = a^3 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (297)$$

Продовжуючи такі будови й ішовши в напрямі стрілки годинника, ми знаходитимемо послідовно:

$$\left.\begin{aligned} OE &= a^4 \\ OF &= a^5 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (298)$$

і т. д.

Коли б ми почали будувати послідовний ряд нормалей до AB не з точки B, а з точки A, і йшли б у напрямі зворотнім до стрілки годинника, то одержали б послідовно на осях OX та OY відтинки:

$$\left.\begin{aligned} Ob &= \frac{1}{a} = a^{-1} \\ Oc &= \frac{1}{a^2} = a^{-2} \\ Od &= \frac{1}{a^3} = a^{-3} \\ Oc &= \frac{1}{a^4} = a^{-4} \text{ і т. д.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (299)$$

Ясно, що на рисунку 51 ми степенювали величину $a > 1$; для порівняння на рисунку 52 показано степенювання величини $a < 1$. Порівнюючи з рис. 51, наочно бачимо збільшення вартости додатніх степенів і зменшення від'ємних степенів величин, більших за одиницю, та,

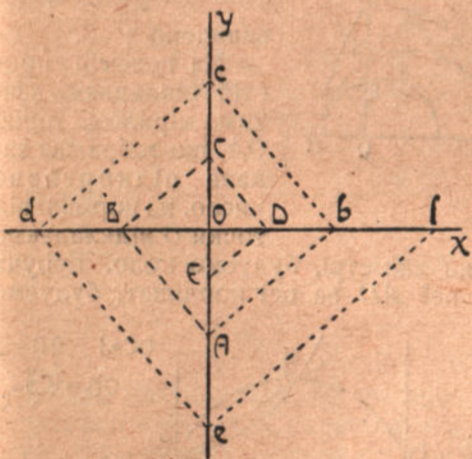


Рис. 52

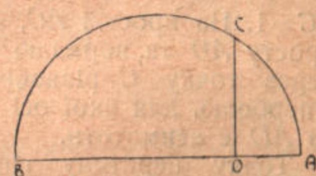


Рис. 53

навпаки, зростання від'ємних і маління додатніх степенів величин, менших від одиниці.

§ 42. Коренювання. Графічний спосіб добувати корінь другого степеня легко визначити, розглядаючи рис. 51.

Справді, взявши $\triangle ABC$, ми можемо написати, що $\overline{OB}^2 = \overline{OA}\ \overline{OC}$; $\overline{OB}^2 = 1 \cdot a$, або, значить, $\overline{OB} = \sqrt{a}$.

На цій підставі, коли ми хочемо добути корінь квадратовий з якоїсь величини A, ми на довільній простій будуємо $OA = 1$, а в протилежний бік з точки O будуємо $OB = a$ узятим мірилом (рис. 53).

На простій AB, як на діяметрі, будуємо півколо ACB і з точки O ставимо $OC \perp AB$. Тоді, на підставі відомої теореми геометрії, дістаємо:

$$OC^2 = BO \cdot OA;\ OC = \sqrt{OB \cdot OA}, \quad \ldots\ldots\ldots (300)$$

тобто:

$$OC = \sqrt{a}.$$

Не трудно бачити, що, повторюючи n разів описаний спосіб, можна добути з якої завгодно величини корінь степеня 2^n при якім завгодно n — цілім і додатнім числі.

Для прикладу на рис. 54 знайдено: $\sqrt[8]{10} = \sqrt[2^3]{10} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$.

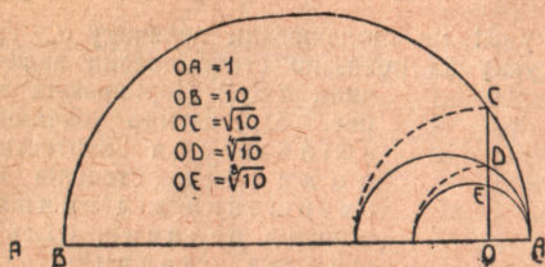


Рис. 54

Графічний спосіб добувати корені третього степеня показано на рис. 55, де знайдено $\sqrt[3]{3}$.

На поземій простій відкладаємо взятим мірилом лінію OA, що зображає задане підкореневе число, на нормалі від точки O відкладаємо $OC = 1$. На простій AC, як на діяметрі, будуємо коло. Беручи просту AO та нормалю до неї AD за осі кординат, будуємо через точку C рівнобічну гіперболю, для якої осі AO та AD є асимптоти.

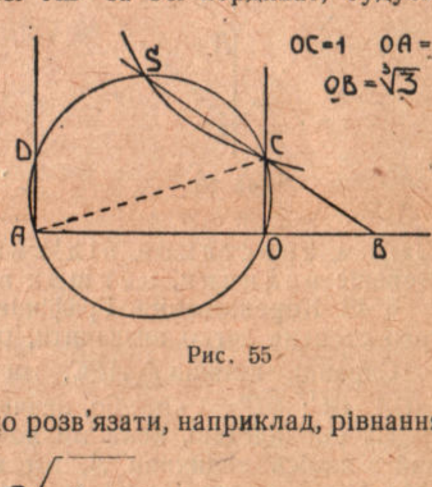


Рис. 55

Точку перетину гіперболі з колом, тобто точку S, злучаємо простою з точкою C. Перетин простої SC з простою AO дає відтинок OB, що дорівнює кореневі кубічному із заданої величини.

Комбінуючи цей спосіб зі способом добування квадратового кореня, описаним вище, ми дуже просто можемо розв'язати, наприклад, рівняння:

$$x = \sqrt[6]{3} = \sqrt{\sqrt[3]{3}} = 1{,}20 \quad \ldots\ldots (301)$$

що й зробили на рис. 56; отже, можемо розв'язати взагалі рівняння вигляду:

$$x = \sqrt[2n]{\sqrt[3m]{A}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (302)$$

Доказ описаного способу графічного добування кореня зазначеного вигляду, а так само й кореня інших степенів, охочі можуть знайти в нашій статті: „Графическое решение алгебраических уравнений высших степеней“ [1]).

Треба, однак, сказати, що точне добування кореня якого завгодно степеня графічним способом, описаним у тій статті,

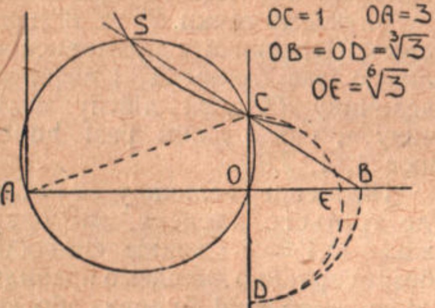


Рис. 56

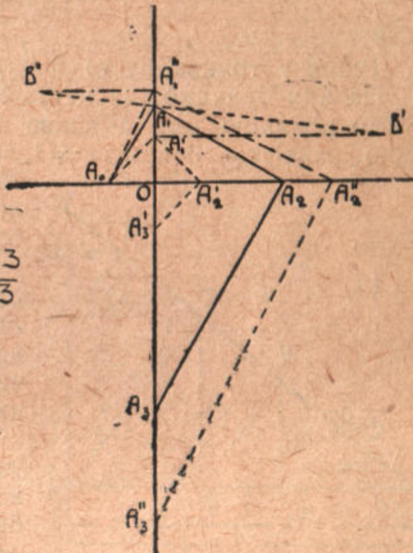


Рис. 57

досить складне, а тому ми покажемо приблизний спосіб ґрафічного добування кореня якого завгодно степеня. Спосіб цей, що його можна назвати **с п о с о б о м х и б н о ї б у д о в и**, ґрунтується на четвертім способі степенювання, тобто на рис. 51.

Нехай треба знайти

$$x = \sqrt[3]{5}.$$

Тим що цей вираз можна переписати так:

$$x^3 = 5 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (303)$$

то, очевидячки, задача сходить на те, щоб знайти наближене число x, яке після піднесення до третього степеня дає 5. Для цього за рис. 51 будуємо (рис. 57) $OA_0 = 1$ і $OA_3 = 5$.

[1]) Див. № 10 за 1903 р. „Известия Собрания Инженеров Путей Сообщения“ в СПБ.

Беремо число x, вочевидь менше від дійсного, наприклад, $OA'_1 = x_1 = 1$, і, піднісши його до третього степеня, одержимо:

$$OA_3' < OA_3.$$

Далі беремо число x, вочевидь більше за шукане, наприклад $OA_1'' = x_2 = 2$, і, піднісши його до третього степеня, одержимо:

$$OA_3'' > OA_3.$$

Тепер у точках A_1 та A_1'' ставимо нормалі $A'B'$ і $A_1''B''$. На них будуємо: на першій у від'ємний бік $A_1' B' = A_3A_3'$, тобто ріжницю між дійсною величиною 5 і одержаною меншою вартістю її при $x=1$, а на другій — у додатній бік $A_1''B'' = A_3A_3''$, тобто ріжницю між дійсною величиною 5 і одержаною більшою вартістю її при $x=2$.

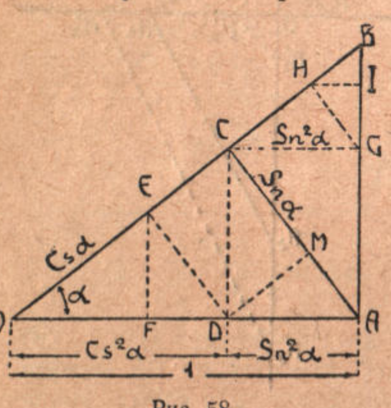


Рис. 58

Злучаємо точки B' та B'' простою. Перетин її з прямовисною лінією дає точку A_1 і визначає величину OA_1, як дійсну величину x, що в данім разі дорівнює 1, 1. 7.

Піднісши величину $x = OA_1$ до третього степеня, ми одержимо $OA_3 = 5$ і таким способом безпосередньо доведемо правильність зробленої будови або коренювання $\sqrt[3]{5}$.

§ 43. Обчислення з тригонометричними величинами. Нехай дано кут $AOB = \alpha$ (рис. 58).

Візьмім

$$OA = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (304)$$

Спустивши з точки A на просту OB нормалю AC, одержимо:

$$\begin{aligned} OC &= \cos\alpha \\ AC &= \sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (305) \end{aligned}$$

Спустивши з C нормалю $CД$ на просту OA, дістанемо:

$$\overline{OD} : \overline{OC} = \overline{OC} : \overline{OA} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (306)$$

або на підставі (304) та (305):

$$\overline{OD} = \cos^2\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (307)$$

Спускаючи послідовно нормалі DE, EF і т. д., ми одержимо:

$$OE = \cos^3\alpha,\ OF = \cos^4\alpha \text{ і т. д.} \quad \ldots\ldots\ (308)$$

Беручи подібні трикутники OAC та ACD, одержимо:

$$\overline{AD} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{OA} \quad \ldots\ldots\ (309)$$

або на підставі (304) та (305):

$$\overline{AD} = \sin^2\alpha \quad \ldots\ldots\ (310)$$

На підставі виразів (304), (307) і (310) пересвідчуємося безпосередньо, що тригонометричне співвідношення:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \overline{AD} + \overline{DO} = 1 \quad \ldots\ldots\ (311)$$

правильне.

Далі, ставлячи в точці A нормалю AB до простої AO та проводячи $CG \parallel AD$, одержуємо:

$$CG = AD = \sin^2\alpha \quad \ldots\ldots\ (312)$$

Послідовно спускаючи нормалі GH, HI ї т. д., ми дістанемо:

$$\overline{HG} : \overline{CG} = \overline{CG} : \overline{AC} \quad \ldots\ldots\ (313)$$

або

$$\overline{HG} : \overline{CG} = \overline{AC} : \overline{AO},$$

тобто, на підставі (304), (305), (312), матимемо:

$$HG = \sin^3\alpha \quad \ldots\ldots\ (314)$$

і аналогічно:

$$HI = \sin^4\alpha \text{ і т. д.} \quad \ldots\ldots\ (315)$$

Далі, з $\triangle\ AOC$ маємо:

$$\overline{CD}^2 = \overline{OD} \times \overline{DA} \quad \ldots\ldots\ (316)$$

або, на підставі (307) та (310), тобто

$$\left.\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= \sin^2\alpha \times \cos^2\alpha \\ CD &= \sin\alpha \cdot \cos\alpha = {}^1/_2 \sin 2\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (317)$$

Віднімаючи AD від OD, ми, за виразами (307) та (310) і на підставі тригонометричних співвідношень, одержимо:

$$\overline{OD} - \overline{AD} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha \quad \ldots\ldots\ (318)$$

Якщо проведемо нормалю DM, то з подібних трикутників OAC та ADM дістанемо:

$$\overline{DM} : \overline{AD} = \overline{OC} : \overline{OA} \quad \ldots\ldots\ (319)$$

або, на підставі (304), (305), (310), (311), знайдемо:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{DM} = \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha = \cos\alpha\ (1 - \cos^2\alpha) = \\ = \cos\alpha - \cos^3\alpha \\ \text{чи інакше:} \\ \overline{DM} = \overline{EC} = \overline{OC} - \overline{OE} = \cos\alpha - \cos^2\alpha \end{array}\right\} \quad \ldots (320)$$

Нарешті, з рівности трикутників ADM та CGH дістаємо:

$$\left.\begin{array}{l} DM = CH = \sqrt{(\sin^2\alpha)^2 - (\sin^3\alpha)^2} = \sqrt{\sin^4\alpha - \sin^6\alpha} = \\ = \sqrt{\sin^4\alpha\ \ (1 - \sin^2\alpha)} = \sqrt{\sin^4\alpha\ \ \cos^2\alpha} = \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha \end{array}\right\} (321)$$

тобто маємо те саме співвідношення, що в першім із виразів (320).

Для обчислень з tg та ctg робимо так:

Беремо кут $AOB = \alpha$ (рис. 59). Будуємо $OC = 1$ і ставимо до OA нормалю CD.

Тоді, очевидячки,

$$CD = \operatorname{tg}\alpha \quad . \ . \ . \quad (322)$$

Рис. 59

Ставлячи з точки D послідовно нормалі, як при степенюванні звичайного числа, дістаючи послідовно точки (2) і (3), (4) і т. д., ми знаходитимемо,

$$\operatorname{tg}^2\alpha,\ \operatorname{tg}^3\alpha,\ \operatorname{tg}^4\alpha \ \text{і т. д.} \ . \ . \ (323)$$

Ставлячи ж із точки O нормалі в зворотнім напрямі, одержимо точки —(1), —(2) і т. д., які визначать нам

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}^{-1}\alpha,\ \operatorname{tg}^{-2}\alpha,\ \operatorname{tg}^{-3}\alpha \ \text{і т. д.} \\ \text{або} \\ \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 = \operatorname{ctg}^2\alpha \ \text{і т. д.} \end{array}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (324)$$

Інакше сказавши, будуючи від'ємні степені tg, ми одержуватимемо додатні степені ctg.

Отже, як бачимо зі сказаного, легко можна робити різні обчислення графічним способом не тільки з числами, а й з тригонометричними величинами.

§ 44. Обчислення деяких альґебричних виразів та функцій. *Уживаючи* описаних основних способів графічного обчислення та комбінуючи їх, легко можна ґрафічно ж обчислити й вартість деяких альґебричних виразів і навіть найпростіших функцій.

Справді, користуючись із відомого з геометрії співвідношення (рис. 60) $x=a^2$, не важко збудувати, наприклад, вираз:

$$x^2=a_1^2+a_2^2-a_3^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (325)$$

Для того робимо так:

Беремо просту xx (рис. 61) і до неї в довільній точці O ставимо нормалю, а на простій xx уліворуч і вправоруч від O відкладаємо $OA_1=+1$ і $OA_2=-1$.

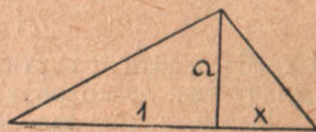


Рис. 60

На нормалі відкладаємо від O величини a_1, a_2 та a_3.

Далі беремо другу довільну точку B_0 і на нормалі до неї відкладаємо $B_0C_0=a_1$. Провівши просту $A_1\,a_1$ через точку C_0, проводимо $C_0\,B_1 \perp A_1\,a_1$; тоді $B_0\,B_1=a_1^2$,

Ставимо в точці B_1 нормалю, відкладаємо на ній $B_1\,C_1=a_2$ і через точку C_1 проводимо просту $C_1\,B_2 \perp A_1\,a_2$.

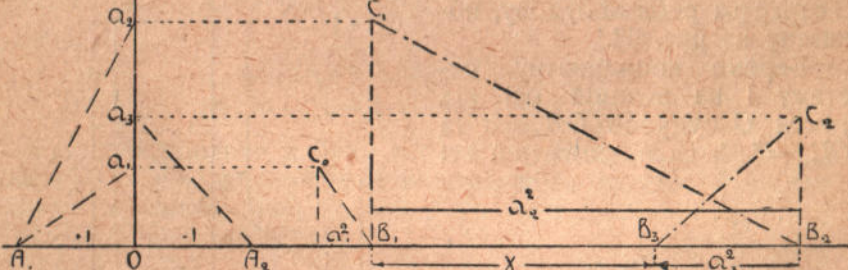


Рис. 61

Тоді $B_1\,B_2=a_2^2$, а значить, $B_0\,B_2=a_1^2+a_2^2$. Нарешті, поставивши нормалю в точці B_2, будуємо на ній $B_2\,C_2=a_3$; через точку C_2 проводимо $C_2\,B_2 \perp A_2\,a_3$ і одержуємо $B_2\,B_3=-a_3^2$.

Тоді, очевидячки, відтинок $B_0\,B_3$ буде рівний:

$$x=a_1^2+a_2^2-a_3^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (325)$$

Уживаючи цього ж способу, але відкладаючи від точки O величини $\pm\frac{1}{b_n}$, ми легко зможемо знайти графічно вираз:

$$x=\pm a_1^2\,b_1 \pm a_2^2\,b_2 \pm \ldots \pm a_n{}^2 b_n \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (326)$$

Коли треба було б збудувати вираз:

$$x=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (327)$$

то й це легко зробити, послідовно користуючись із Пітагорової теореми, як показано на рис. 62, де, очевидячки,

$$OD = x = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} \quad . \; . \; . \; . \; (327\ a)$$

Якщо дано якусь цілу раціональну функцію від x з відомими коефіцієнтами, наприклад,

$$y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + $$
$$+ a_{n-1} x + a_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (328)$$

і треба знайти її вартість при якійнебудь вартості x_1, то цю задачу теж легко розв'язати графічно.

Нехай, наприклад, нам дана:

$$y = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (329)$$

Переписавши її в такім вигляді:

$$y = [(a_0 x + a)\ x + a_2]\, x + a_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (329\ \alpha)$$

для обчислення її способом З е ґ н е р а робимо будову, показану на рис. 63.

Беремо координатну систему і на поземій осі від точки O будуємо $OB_0 = x$ та $OC_0 = 1$, а на прямовисній осі

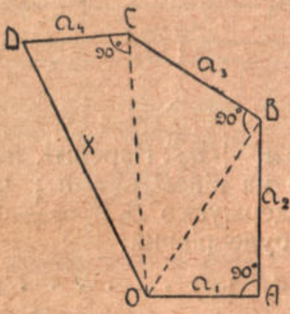


Рис. 62

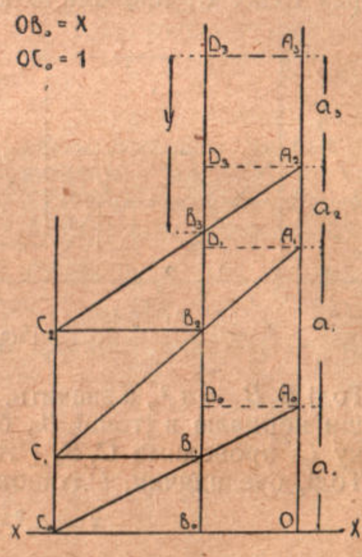


Рис. 63

послідовно $OA_0 = a_0$; $A_0 A_1 = a_1$; $A_1 A_2 = a_2$ та $A_2 A_3 = a_3$.

Далі в точках B_0 та C_0 ставимо нормалі до поземої осі. Потім проводимо лінію $C_0 A_0$ і через точку B_1 просту $B_1 C_1$ рівнобіжно з поземою віссю. Проводячи далі послідовно таким же способом прості $C_1 A_1$, $B_2 C_2$ та $C_2 A_2$, одержимо точку B_3, а провівши $A_3 D_3 \parallel OB_0$, одержимо точку D_3.

Відтинок $B_3 D_3$ якраз і дасть нам шукану величину y.

Правильність цієї будови доводять такі співвідношення, одержувані після проведення простих:

$$A_0 D_0 \parallel A_1 D_1 \parallel A_2 D_2 \parallel A_3 D_3 \parallel OB.$$

$$1)\ B_1 D_0 : A_0 D_0 = OA_0 : OC$$

або

$$B_1 D_1 = a_0 x + a_1.$$

$$2)\ B_2 D_1 : A_1 D_1 = B_1 D_1 : OC \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (330)$$

або

$$B_2 D_1 = (a_0 x + a_1) x$$

і, значить,

$$B_2 D_2 = B_2 D_1 + D_1 D_2 = (a_0 x + a_1)\ x + a_2.$$

$$3)\ B_3 D_2 : A_2 D_2 = B_2 D_2 : OC$$

або

$$B_3 D_2 = [(a_0 x + a_1) x + a_2] x$$

і, значить,

$$B_3 D_3 = B_3 D_2 + D_2 D_3 =$$
$$= [(a_0 x + a_1) x + a_2] x + a_3 = y.$$

Якби коефіцієнти a були від'ємні, то їх треба було б відкладати на прямовисній осі в напрямі униз, так само й від'ємні вартості x треба було б відкладати на поземій осі вправоруч.

Другий спосіб будувати вартості y для тієї самої функції запропонував Л і л л ь. Спосіб ґрунтується на тім, що величину x розглядають, не як простий відтинок, а як танґенс якогось кута φ, тобто припускають, що $x = \text{tg}\ \varphi$. У цім випадку, переписавши вираз функції під виглядом (329a), роблять будову, як показано на рисунку 64.

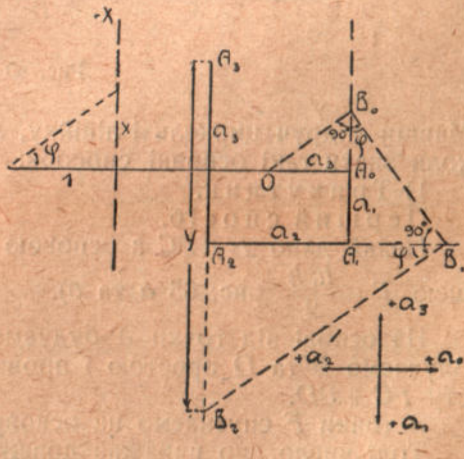


Рис. 64

З довільної точки O будують ламану лінію $OA_0 A_1 A_2 A_3$ із взаємно нормальними боками, відповідно рівними: $OA_0 = a_0$, $A_0 A_1 = a_1$, $A_1 A_2 = a_2$ та $A_2 A_3 = a_3$, відкладеними відповідно до їхніх знаків у належний бік, за вказівками стрілок на схемі праворуч унизу рис. 64.

Далі з цієї ж точки O будують другу ламану лінію $OB_0 B_1 B_2$ теж із взаємно нормальними боками, при чім правий бік її OB_0 похилий до OA_0 під кутом φ, що дорівнює тому, якого тангенс рівний x, як показано на схемі ліворуч угорі рис. 64.

Відтинок $B_2 A_3$ і виражає шукану величину y.

Справді з рис. 64 бачимо такі співвідношення:

$$\left.\begin{aligned} A_0 B_0 &= a_0 \operatorname{tg} \varphi = a_0 x \\ B_0 A_1 &= a_0 x + a_1 \\ A_1 B_1 &= (a_0 x + a_1) x \\ B_1 A_2 &= (a_0 x + a_1) x + a_2 \\ A_2 B_2 &= [(a_0 x + a_1) x + a_2] . x \\ B_2 A_3 &= [(a_0 x + a_1) x + a_2] x + a_3 = y \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (331)$$

§ 45. Графічний вимір площ. Розв'язуючи технічні задачі часто-густо доводиться обчисляти поверхню якоїсь фігури

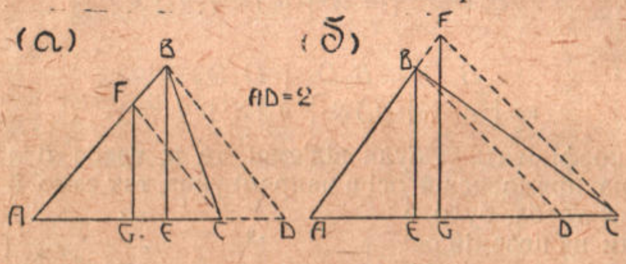


Рис. 65

Мавши підруч циркель і лінійку, легко зробити це графічно, коли знати такі основні способи:

1) Т р и к у т н и к.

П е р ш и й с п о с і б.

Нехай дано $\triangle ABC$ з основою b і висотою h, отже, з площею $F = \dfrac{b.h}{2}$ (рис. 65 *а* та *б*).

На основі від точки A будуємо $AD = 2$ одиницям мірила. Злучаємо B та D простою і проводимо через вершок C просту $FC \parallel BD$.

З точки F спускаємо на основу $FG \perp AC$.

Тоді число, що виражає довжину FG мірильними одиницями, виразить нам число одиниць площі в данім $\triangle ABC$.

Справді,

$$\text{з } \triangle ABD \sim AFC$$

маємо:

$$\frac{FG}{BE}=\frac{AC}{AD},$$

але

$$BE=h;\ AC=b;\ AD=2,$$

значить:

$$FG=\frac{bh}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (332)$$

що й треба було довести.

Другий спосіб (рис. 66).

У точці O на нормалі до основи відкладаємо $OD=$ $=2$ одиницям; проводимо DB і рівнобіжну з нею AF: відтинок CF виражає площу трикутника.

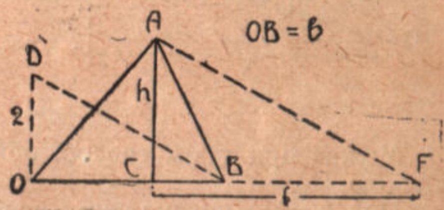


Рис. 66

Справді:

$$CF:b=h:2$$

або

$$CF=\frac{bh}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (332a)$$

Третій спосіб (рис. 67*а* та *б*).

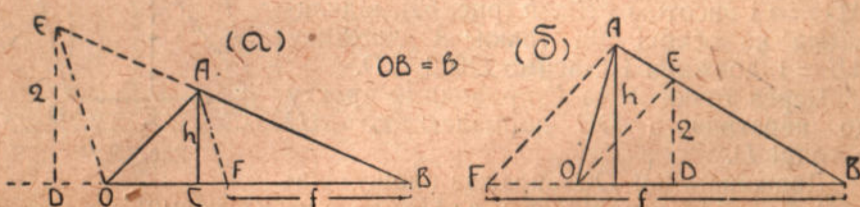


Рис. 67

Між боками кута OBA будуємо прямовисну лінію $ED=2$ одиницям.

Проводимо просту EO і рівнобіжну з нею AF; відтинок BF дає площу трикутника.

Справді:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2}{h}=\frac{EO}{AF}=\frac{b}{BF},\\ &\text{звідки}\\ &BF=\frac{bh}{2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (332б)$$

Четвертий спосіб (рис. 68).

З вершка A радіюсом $AD = 2$ одиницям зачеркаємо основу в точках D та D'.

Продовжуємо лінію AD і через точку O проводимо просту $OEF \perp ADE$. У точці B спускаємо нормальну $BF \parallel AD$. Відтинок OF дає величину площі трикутника.

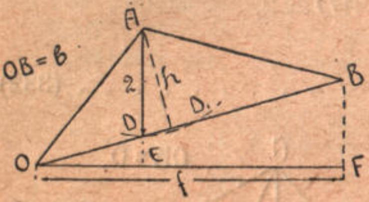


Рис. 68

Справді:

$$\left.\begin{aligned} & h:2 = OF:b \\ & \text{звідки} \\ & OF = \frac{bh}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (332в)$$

Можна при такім способі обчислення користуватися також точкою D_1.

При $h = 2$, очевидячки, основа трикутника OB виражає величину площі його.

При $h < 2$ цей спосіб обчислення величини площі трикутника, видима річ, неможливий.

2) Рівнобіжник, прямокутник, трапез та чотирикутник.

Перший спосіб.

Для графічного обчислення площі даного рівнобіжника $ABCD$, з основою $AD = a$ і висотою $FE = b$ (рис. 69), відкладаємо на основі від точки A довжину $AE = 1$ довжини і ставимо $DG \perp AD$.

Через точки A та F проводимо просту до перетину з DG нормалею до AD в точці D.

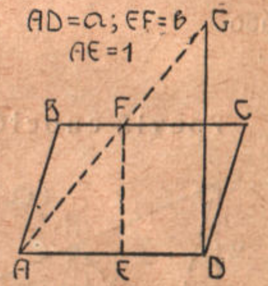


Рис. 69

Довжина лінії DG виражає площу рівнобіжника, бо з подібности $\triangle AFE$ та $\triangle ADG$ маємо:

$$\frac{DG}{FE} = \frac{AD}{AE}$$

Підставмо сюди

$$FE = b,\ AD = a \text{ и } AE = 1;$$

одержимо

$$DG = ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (333)$$

Знавши, що площа квадрата з боком a дорівнює a^2, можна користуватися з зазначеного способу, щоб квадратувати дане число, будуючи квадрат з боком, який дорівнює даному числу, та визначаючи площу його описаним способом.

Другий спосіб (рис. 70).

Проводимо діягоналю BOG, що ділить рівнобіжник $OABC$ на два рівні трикутники.

Подвоєна площа кожного з них, очевидячки, дасть площу рівнобіжника.

Проводимо $AD = h$ висоті одного з трикутників і будуємо $EF = 1$ одиниці.

Проводимо лінії OF та рівнобіжну з нею AG. Відтинок BG дає величину площі рівнобіжника.

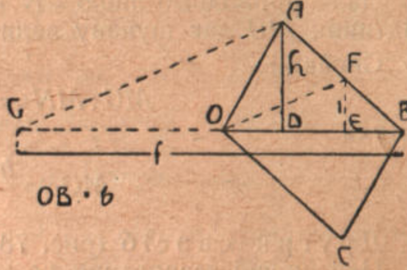


Рис. 70

Справді:

$$\left.\begin{aligned} \frac{h}{1} = \frac{AB}{BF} = \frac{BG}{b} \\ BG = bh \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (333a)$$

звідки

Для обчислення площі прямокутника робимо так (рис. 71):

На боці BC відкладаємо $DC = 1$ одиниці.

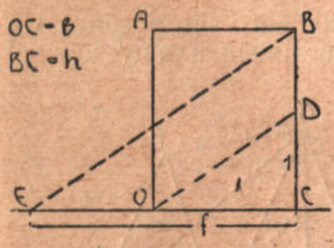


Рис. 71

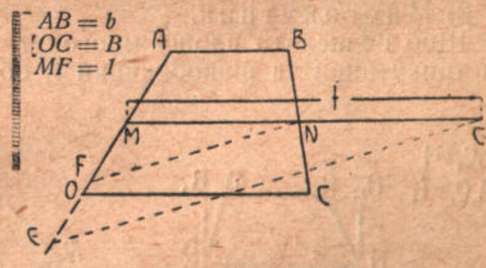


Рис. 72

Проводимо OD і рівнобіжно з нею BE.

Відтинок CE дає величину площі прямокутника, як це бачимо із співвідношення:

$$\left.\begin{aligned} CE : b = h : 1 \\ CE = bh \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (334)$$

або

Для обчислення площі трапеза можна вживати двох таких способів:

Перший спосіб (рис. 72).

Проводимо серединну лінію $MN = \frac{b + B}{2}$.

Продовжуємо бік AO і від точки M відкладаємо на ній $MF = 1$ та $ME = h$.

Далі, проводимо лінію ON і будуємо рівнобіжну з нею EG; відтинок MG дає шукану величину площі.

Справді:

$$\left.\begin{aligned} MG : MN &= ME : MF \\ \text{звідки} \quad MG &= \frac{b+B}{2} \cdot h \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (335)$$

Другий спосіб (рис. 73).

Цей спосіб заснований на заміні даного трапезу $OABC$ рівним з ним прямокутником $O_1A_1B_1C_1$ і визначені площі його за будовою, показаною на рис. 71.

Справді:

$$\left.\begin{aligned} EC_1 : O_1C_1 &= C_1B_1 : CD \\ \text{звідки при} \quad O_1C_1 &= MN \text{ и } C_1B_1 = h \\ EC_1 &= \frac{b+B}{2} \cdot h \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (335a)$$

3) Многокутник.

Щоб обчислити площу многокутника, його або розбивають на трикутники та рівнобіжники і, обчисливши площу кожної

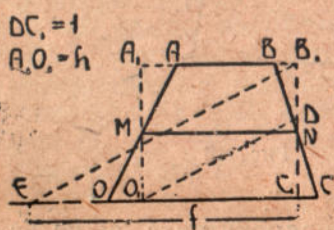


Рис. 73

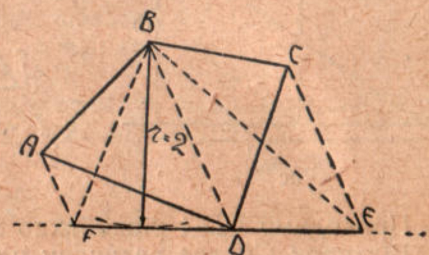


Рис. 74

такої фігури, беруть суму одержаних величин, або перетворюють фігуру на рівний з даним многокутником трикутник і обчисляють площу його одним з описаних вище способів (рис. 65—68).

Зокрема, для обчислення площі чотирикутника (неправильного) можна робити так.

Мавши чотирикутник $ABCD$ (рис. 74), з якогось вершка його, наприклад, B, описуємо коло радіюсом, рівним 2 одиницям; з протилежного вершка D (що лежить на діягоналі) проводимо до цього кола дотичну. Проводячи діягоналю BD, будуємо $AF \parallel BD$ та $CE \parallel BD$. Довжина лінії FE виражає площу даного чотирикутника.

Справді, не трудно бачити, що $\triangle FBE$ рівний з $\square ABCD$; площа ж $\triangle FBE$ рівна $\frac{r.\,FE}{2}$, а тим що $r = 2$ одиницям, то, значить, площа $\triangle FBE = FE$, отже, тій самій величині дорівнює й площа рівного чотирикутника $ABCD$.

Два інші способи показано на оцих прикладах.

1-й приклад (рис. 75).

Провівши $BF \parallel AC$, дістаємо $\triangle FCD$, рівний з даним чотирикутником $ABCD$, і, вживаючи першого способу [рис. 65,

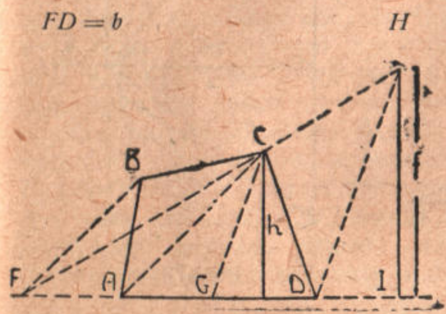


Рис. 75

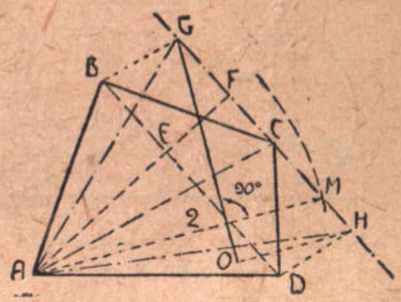


Рис. 76

фор. (332)], знаходимо відтинок HJ, що виражає площу даного чотирикутника.

2-й приклад (рис. 76).

Проводимо діягоналю BD і через точку C проводимо рівнобіжну з нею лінію.

Провівши BG та DH, рівнобіжну з AC, одержуємо $GH = BD$. Спустивши з A нормалю AEF, знаходимо, що трикутники ABD та BCD, маючи однакові основи BD, мають висоти AE і EF. Не важко пересвідчитися, що при зроблених будовах трикутник AGH рівний з даним чотирикутником $ABCD$.

Визначаючи площу $\triangle AGH$ способом, показаним на рис. 68 (четвертий спосіб), ми одержимо, що площа заданого чотирикутника, як рівного з трикутником AGH, виразиться відтинком GO.

4) Обчислення площі кола та його частин.

Для обчислення графічним способом площі кола досить, узявши $\pi = \frac{22}{7}$, зробити такі будови (рис. 77).

На дотичній до кола відкладають від точки дотику A довжину $AB = 2$ одиницям та $AD = \frac{\pi}{2} AC$, тобто $\frac{11}{7}$ діяметра d. Провівши просту BC і збудувавши $DE \parallel BC$, дістанемо на діяметрі AC відтинок AE, якого довжина виражає площу кола.

Справді

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD}; \; AE = \frac{AC \, . \, AD}{AB}$$

підставляючи

$$AC = d, \; AD = \frac{11}{7} d \text{ і } AB = 2,$$

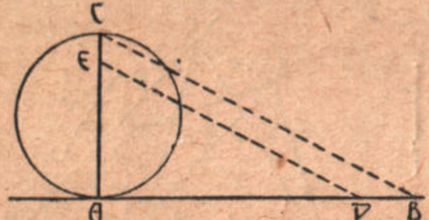


Рис. 77

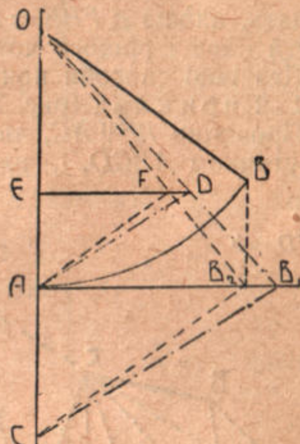


Рис. 78

одержимо:

$$AE = \frac{d \, . \, \frac{\pi}{2} d}{2} = \frac{\pi d^2}{4}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (336)$$

що й треба було довести.

Площа сектора й сеґмента.

Щоб обчислити площу сектора OAB (рис. 78) при радіюсі r і довжині дуги $AB = b$, на дотичній від точки A відкладаємо до точки B_1 випростану дугу AB (для того відкладаємо малі частини дуги AB, беручи їх за прості); від точки O відкладаємо $OC = 2$ одиницям.

Проводимо CB_1 і будуємо $AD \parallel CB_1$.

Довжина нормалі DE виражає площу сектора.

Справді:

$$\frac{ED}{AB_1} = \frac{OA}{OC}; \; ED = \frac{AB_1 . OA}{OC},$$

тим що

$$AB_1 = AB = b; \; OA = r \text{ і } OC = 2,$$

то, значить, дійсно

$$DE = \frac{br}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (337)$$

Площа сеґмента AB, очевидячки, дорівнює ріжниці площ сектора OAB і трикутника OAB, тобто, очевидячки, ріжниці пл. OAB_1 — пл. OAB_2, а ця остання, очевидно, виражається ріжницею довжин DE і EF, тобто довжиною FD[1]).

Площі фігур, обмежених якоюсь кривою, можна виміряти або наближено, розбиваючи їх на вузьки смужки, які можна брати за прямокутники чи трапези, та сумуючи їхні площі, або ж суто механічним способом за допомогою специяльних приладів, званих пляніметрами. Такі прилади й способи вживати їх описано вище, в розділі про механічне обчислення площ та інших величин, що трапляються в техніці.

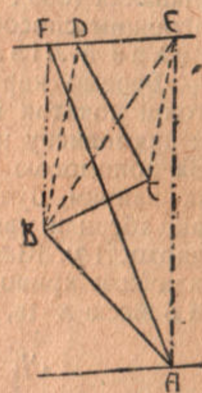


Рис. 79

З питанням про графічне обчислення площ зв'язане питання, що має значення в техніці, — про зміну ламаної лінії простою, яка справджує умову, щоб величина площ ліворуч і праворуч від даної лінії не змінялася.

Так на рис 79 лінію $ABCD$ замінено простою AF. Для цього, провівши просту BD, будуємо $EC \parallel BD$; далі, провівши просту AE, будуємо $BF \parallel AE$. Злучивши точки F і A, одержимо шукану просту AF. Правильність пропонованого розв'язання легко довести, розглядаючи рівності трикутників:

$$\Delta CDB = \Delta BDE \text{ і } \Delta ABE = \Delta AFE$$

§ 46. Графічне розв'язання рівнань. Розв'язання рівнань — один із найважливіших моментів при технічних обчисленнях. Тим що здебільшого рівнання бувають дуже складні, і часто важко безпосередньо розв'язувати їх способами альґебри, доводиться застосовувати наближене розв'язання.

Деякі способи таких наближених розв'язань подано в розділі про наближені обчислення, а також і в цім розділі, вище, де описувано способи коренювати через розв'язання розмірно простих рівнань вигляду $x^n - a_0 = 0$.

При розв'язанні складніших рівнань корисні бувають описані вище способи будувати вартості цілих раціональних функцій вигляду (328). Користуючись із цих способів та вживаючи розгляданого вже при коренюванні способу хибної будови за допомогою картатого паперу, дуже легко розв'язувати рівнання якого завгодно степеня з одною невідомою.

Суть способу така.

---

[1]) Площу сеґмента можна також вважати за рівну $^2/_3$ добутку довжини тятиви на висоту сеґмента.

Маючи рівнання вигляду:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (338)$$

беремо довільні вартості x так, щоб одержати ряд то додатніх, то від'ємних вартостей для функції, яка входить у ліву сторону рівнання (338). Ці вартості y ми можемо одержати або аналітичним способом обчислення, або графічним способом Зеґнера й Лілля.

Беремо картатий папір і, вибравши на нім у довільній точці початок координат, проводимо через цю точку позему й прямовисну координатні осі, що відповідають $x=0$, $y=0$. За допомогою цих осей, умовившись про додатній і від'ємний їх напрям, будуємо на ординатах, що відповідають узятим, як абсциси, вартостям x, обчислювані вартості y. Кінці цих ординат злучаємо плавкою кривою лінією. Точки перетину її з віссю x-ів, як відповідні $y=0$, тобто

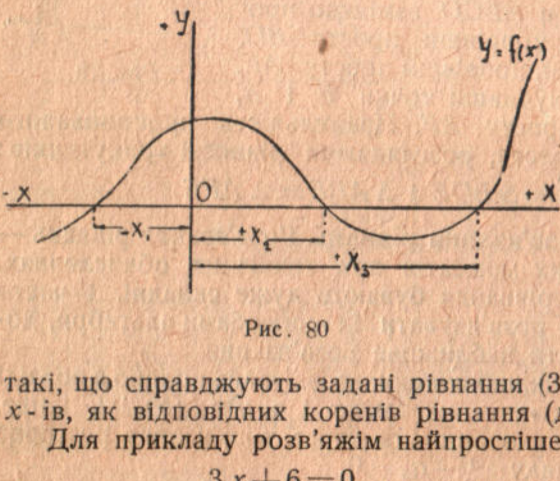


Рис. 80

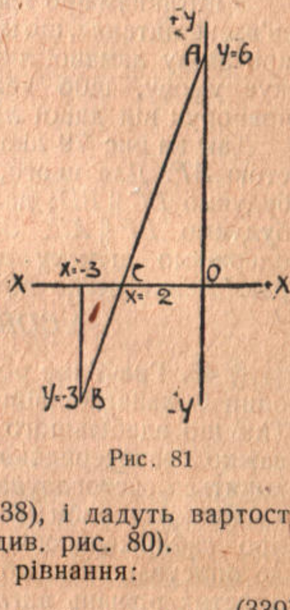


Рис. 81

такі, що справджують задані рівнання (338), і дадуть вартості x-ів, як відповідних коренів рівнання (див. рис. 80).

Для прикладу розв'яжім найпростіше рівнання:

$$3x + 6 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (339)$$

Вважаючи $3x + 6 = y$, знаходимо

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -3 \\ \hline y & 6 & -3 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots (340)$$

Очевидячки, цих двох наближень для даного випадку досить. Відкладаючи на координатних осях відповідні x та y, одержуємо (рис. 81) точки A й B. Тим що в данім разі залежність між x і y лінійна, то проводимо просту AB. Її перетин у точці C з віссю x-ів дає нам дійсну вартість його.

$$x = -2 \quad \ldots\ldots\ldots (340a)$$

Другий спосіб, що часом швидше приводить до потрібної мети, полягає в будові двох допоміжних хибних кривих, а саме.

Якщо нам дано рівняння:

$$f(x) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (341)$$

то ми заміняємо його рівнянням:

$$f_1(x) - f_2(x) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (341a)$$

Очевидно, що, коли a є корінь даного (341) рівняння, то

$$\left.\begin{array}{r} f_1(a) - f_2(a) = 0 \\ \text{або} \qquad f_1(a) = f_2(a) \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (341б)$$

Ясна річ, що, збудувавши, як сказано вище, криву для $f_1(x)$ (рис. 82) і криву для $f_2(x)$, ми повинні одержати їх перетин у точках, яких абсциси дадуть вартість x-ів, що справджують рівняння (341a), а, значить, і (341).

Наприклад, дано рівняння:

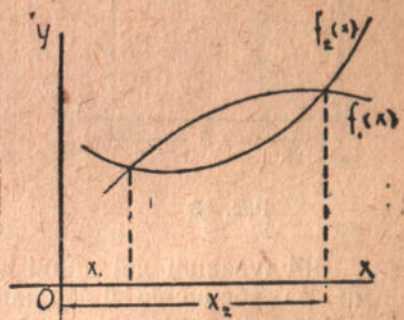
$$x^2 - 4{,}1\,x + 2{,}1 = 0 \quad \dots\dots \quad (342)$$

Надаємо йому вигляд:

$$x^2 = 4{,}1\,x - 2{,}1 \quad \dots\dots \quad (342a)$$

тобто вважаємо:

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = 4{,}1\,x - 2{,}1$$



Рис, 82

Крива для першої функції $f_1(x) = x^2 = y_1$, очевидно, буде парабола, яку ми збудуємо по точках за допомогою такої таблиці:

x	0	1	2	3	4
y_1	0	1	4	9	16

. . . . (343)

Крива для другої функції $f_2(x) = 4{,}1\,x - 2{,}1 = y_2$ буде проста, яку збудуємо за допомогою оцієї таблиці:

x	1	2
y_2	2	6,1

. . . . (344)

Збудувавши обидві криві (рис. 83), одержимо їх перетин у точках A й B, яких абсциси

$$x_1 = 0{,}6 \text{ і } x_2 = 3{,}5 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (345)$$

і будуть коренями даного рівняння (341).

Щойно описаний спосіб будувати придатний для розв'язання **системи двох рівнань із двома невідомими.**

Так, якщо дано рівнання:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (345)$$

то ми можемо їх переписати так:

$$\left.\begin{aligned} y_1=f_1(x) \\ y_2=f_2(x) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (345a)$$

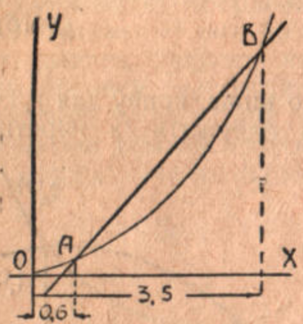


Рис. 83

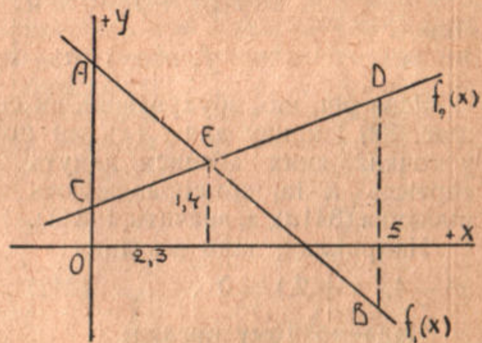


Рис. 84

Збудувавши дві криві для вартости y-ків при різних x-ах, ми за абсцисою й ординатою точки їх перетину знайдемо вартість коренів даних рівнань.

Наприклад, дано рівнання:

$$\left.\begin{aligned} 5x+3y=15{,}7 \\ 2x-7y=-5{,}2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (346)$$

Збудовані відповідні їм криві будуть у данім разі прості, а тому для будови першої маємо таблицю:

x	0	5
y	5,233	—3,1

. . . . (347)

Для будови другої:

x	0	5
y	0,743	2,17

. . . . (348)

Збудувавші обидві прості (рис. 84), одержимо перетин їх у точці E, якої координати:

$$\left.\begin{aligned} x=2{,}3 \\ y=1{,}4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (349)$$

і будуть коренями даних рівнань (346).

Можна було б дещо спростити розв'язання, коли б ми визначили вартости $f_1(x)$ та $f_2(x)$, підставляючи в них то $x=0$, то $y=0$, тобто мали такі таблиці:

1)

x	0	3,14
y	5,233	0

2)

x	0	—2,6
y	0,743	0

. . . . (350)

Крім зазначених вище способів, є й інші, засновані на пристосуванні номографії та векторіяльного числення; їх ми опишемо далі, у відповідних розділах.

Щодо розв'язання системи трьох рівнань із трьома невідомими, то тут, розв'язуючи графічним способом, доводиться робити будови в просторі, що, звісно, чимало ускладняє задачу. Ще більше ускладняється вона при системі n рівнань з n невідомими, а тому, коли трапляються такі рівнання, то на практиці більше користуються з методів номографічного й векторіяльного числення; їх ми подамо в дальших двох розділах[1]).

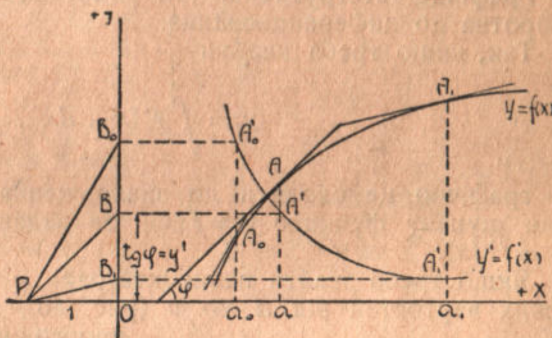


Рис. 85

§ 47. Графічне диференціювання та інтеґрування. Для того, щоб можна було графічно диференціювати якусь функцію $y=f(x)$, треба насамперед мати графік цієї функції або криву, що зображає закон зміни величини y при різних послідовних вартостях x.

Інакше сказавши, треба мати криву, подібну до тої, яку будуємо, розв'язуючи графічним способом рівнання. Мавши таку криву (рис. 85), не важко знайти графічно диференціялю зображуваної нею функції з тих міркувань, що похідна від y-ка по x є не що інше, як танґенси кутів нахилу до осі x-ів дотичної до кривої $y=f(x)$ у точці A, яка відповідає даній абсцисі $x=a$.

Отже,

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (351)$$

---

[1]) Деякі подробиці про графічне розв'язання рівнань вищих степенів див. в уже цитованій статті М. М. Абрамова „Графическое решение алгебраических уравнений высших степеней"—„Изв. С. И. П. С.", 1903 р. № 10, СПБ.

Збудувавши ліворуч кут $OPB=\varphi$ при умові $OP=1$, ми одержимо $OB=\operatorname{tg}\varphi=y'$.

Провівши просту $B'A' \parallel OX$, дістанемо:

$$aA'=OB=\operatorname{tg}\varphi=y',$$

тобто графічно обчислену величину диференціялі даної функції при $x=0$.

Роблячи такі будови для різних x-ів, ми одержимо графік зміни $y'=f'(x)$ на протязі заданої кривої, що зображає дану функцію $y=f(x)$.

Мавши графічне зображення заданої функції $y=f(x)$, а так само й її похідну $y'=f'(x)$, не важко знайти вартості x, при яких дана функція матиме найбільші або найменші вартості. У цих точках дотична повинна бути рівнобіжною з віссю x-ів.

Графічне інтеґрування, так само, як і аналітичне, є дія, зворотна до диференціювання.

Так, якщо треба знайти

$$y=\int_b^a f'(x)\,.\,dx \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (352)$$

то графічно це сходить до знаходження кривої, яка зображає шукану функцію $y=f(x)$, за заданою кривою функції $y'=f'(x)$.

Якщо треба знайти певні інтеґралі в межах точно визначених вартостей від a до b (рис. 86), то для цього треба просто визначити площу $aABb$, обмежену заданою кривою $y'=f'(x)$ ординатами aA та bB і координатною віссю x-ів.

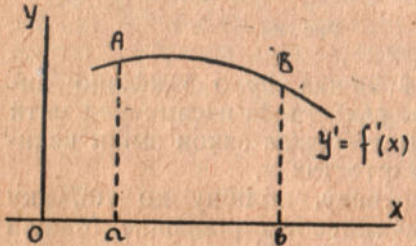


Рис. 86

Обчислити цю площу можна або графічно одним із зазначених вище способів, або наближено, розбиваючи її на ряд елементарних вузьких прямокутніх смужок і беручи їх за трапези чи рівні з ними прямокутники з висотою, яка дорівнює середній лінії, або ж, що багато простіше й точніше, за допомогою описаних вище інтеґраторів.

Можна також збудувати інтеґральну криву $y=f(x)$, застосовуючи зворотним порядком спосіб, описаний для знаходження диференціяль. Треба тільки пам'ятати, що таких кривих можна збудувати безліч, якщо не задані границі інтеґрації. На практиці заведено будувати таку криву, якої ордината обертається в нуль при початковій вартості функції.

Тоді, знавши, що

$$y = \int_a^b f'(x) \,.\, dx = F(b) - F(a) \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (353)$$

ми одержимо, що вартість y виражатиметься не ріжницею координат, які відповідають точкам $x = a$ та $x = b$, а кінцевою ординатою кривої, що відповідає $x = b$.

Саму будову інтеґральної кривої ясно бачимо з рис. 87.

Мавши криву $y' = f'(x)$, проводимо ординати $a_0 A'_0$, $a_1 A'_1$ і т. д., що відповідають певним вартостям $x = a_0$, $x = a_1$ і т. д.

Поділивши таким способом площу, обмежену віссю x-ів, заданою кривою й її крайніми ординатами, на ряд елементарних площ $a_0 A'_0$, $A'_1 a_1$ і т. д., заміняємо їх рівними прямокутниками $a_0 a'_0 a'_1 a$ і т. д. так, щоб від'ємні площі $A'_0 a'_0 C'_0$ і додатні $C'_0 a'_1 A'_1$ і т. д. були рівні, і через точки C'_0, C'_1 і т. д. проводимо ординати $C'_0 C_0$ $C'_0 C'_1$ і т. д.

Далі, будуючи $A'_0 B_0 \parallel Oa$, і одержавши на осі y-ів точку B_0, будуємо просту $B_0 P$ так, щоб $PO = 1$, і через довільну точку A_0, яка лежить на ординаті $a_0 A'_0 A_0$, що відповідає $x = a$, проводимо $A_0 C_0 \parallel PB$.

Далі, будуємо $OB_1 = a_1 A'_1$, проводимо PB_1 і через точку C рівнобіжну з нею лінію $C_0 A_1 C_1$ і т. д.

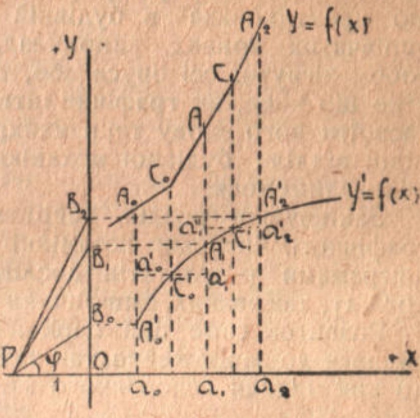


Рис. 87

Одержана ламана $A_0 C_0 A_1 C_1 A_2$ об'ємна для шуканої інтеґральної кривої $y = f(x)$, яка проходить через точки $A_0 A_1 A_2$ і т. д., при чім частини ламаної $A_0 C_0, C_0 C_1$ і т. д. дотичні до неї в точках $A_0 A_1 A_2$ і т. д.

Не важко помітити, що ріжниця ординат збудованої кривої для відповідних x-ів є графічний вираз шуканої інтеґралі в межах між тими ж таки x-ами. Наприклад,

$$a_1 A_1 - a_0 A_0 = \int_{a_0}^{a_1} f'(x) \,.\, dx = \text{площі } a_0 A_0' A_1' a_1 \;.\;. \quad (354)$$

Ясно також, що, коли б інтеґральна крива проходила через точку a_0, тобто, як уже казано вище, коли б ми взяли $f(a_0) = 0$, то $a_0 A_0$ дорівнювало б нулеві, і величину інтеґралі в виразі (354) можна було б виміряти просто ординатою інтеґральної кривої в точці, що відповідає верхній границі інтеґралі.

Зауважмо, що в більшості технічних задач інтеґрування сходить до обчислення площ, статичних моментів і моментів інерції; як ми бачили, далеко простіше і швидше можна знайти це все механічним способом за допомогою інтеґраторів.

Звернім разом увагу на те, що зазначені величини дуже просто знаходити графічно, застосовуючи основні методи графічної статики. Тим що ці способи стають ясні після обізнання з основами графічної статики, то ми відсилаємо по подробиці в цім питанні до курсів графічної статики, зокрема до нашого курсу її в зв'язку з найпростішим застосуванням її до будівної механіки [1]).

Щоб закінчити про графічне інтеґрування, зауважмо побіжно, що практикована в будівній механіці будова, так званих, вирівчатих кривих, наприклад, знаходження графічним способом зігнутої осі бруса або, так званої, пружної лінії, теж є не що інше, як графічне інтеґрування. Обізнатися з ним та засвоїти його знову таки найкраще можна, вивчаючи відповідні відділи будівної механіки [2]), а тому ми тут на цім не зупинятимемося.

Закінчуючи розділ, звертаємо увагу на те, що методи графічного числення незамінні при зображенні графіками або діяграмами результатів дослідів для визначення формул та досліду, так званих, емпіричних законів спостережуваних явищ.

Розвиток саме цієї царини графічного числення й спричинився до зародження, так званого, номографічного числення, до викладання основ якого ми тепер перейдемо.

Розділ IX. Основи номографії

§ 48. Попередні загальні уваги. Описані вище способи графічного числення при всіх своїх вартостях мають одну дуже серйозну ваду: всяка певна геометрична будова дає тільки одну певну роз'вязку. Отже, коли б ми бажали знайти ряд вартостей якоїсь величини, нам треба було б проробити стільки повторних будов, скільки вартостей даної величини бажано нам мати. Вартості, як ми вище бачили, ми могли б нанести на рисунку і в наслідок одержати криву, що зображає закон зміни даної величини, інакше сказавши, ми одержали б графічну таблицю її вартостей.

Такі криві ми знаходили для зображення найпростіших раціональних функцій, для розв'язання рівнань, при диференціюванні та інтеґруванні.

[1]) Див. Н. М. Абрамов „Курс графической статики".
[2]) Н. М. Абрамов. „Курс сопротивления материалов".

Ясно, проте, що на складання цих графічних таблиць або кривих треба багато часу, часто й великих та складних обчислень і будов. Природно, отже, бажання мати якийсь спосіб, що давав би змогу легко й хутко знаходити цілий ряд розв'язок, цілий ряд вартостей шуканих величин, тобто спосіб, що наочно зображав би закон зміни шуканої величини і давав би змогу суто механічно знаходити яку завгодно її вартість.

Інакше сказавши, часто буває бажано й потрібно мати не просту, якщо можна так висловитися, одиничну аритметичну розв'язку задач, а розв'язку альґебричну в загальній формі, з якої можна одержати окрему частину розв'язку відповідно до умов кожного даного випадку.

Такий якраз спосіб у технічних обчисленнях і є „номографія“, що дістала цю назву з пропозиції французького інженера-вченого М. д'Окань, від грецьких слів νομος (номос) — закон і γραφω (графо) — пишу.

Значить, в буквальнім розумінні слова це є спосіб „рисувати закони“ зміни вартости яких завгодно функцій, що виражають у математичнім вигляді закони різних фізичних і технічних явищ тощо.

Інакше сказавши, „номографія є наука про способи графічно зображати які завгодно функції, що виражають залежність між яким завгодно числом змінних величин“.

Мета її — дати графічне зображення якої завгодно формули, за допомогою якого можна без допоміжних величин і будови безпосередньо знаходити числову вартість формули за всякими, відповідними даному випадкові, вартостями величин, що входять до неї, не робивши, як це треба при звичайних графічних обчисленнях, відповідних їм повторних будов, іноді довгочасних і складних.

Ті рисунки, ті графіки, що їх можна одержати цим способом, або, так звані, номограми, можуть бути нерухомі одна супроти одної або рухомі, залежно від способу будови їх та користування з них, так само, як і числові допоміжні таблиці, вживані при обчисленнях.

З цього погляду неважко зробити висновок, що описані вище лічильні чи логаритмічні лінійки, де наперед зазначені різні вартості відповідних функцій, є, власне, типові рухомі номограми. Разом із тим, цілком ясно, що номограми є графічні допоміжні при технічних обчисленнях таблиці. Та якраз графічна їх форма й дає їм велику перевагу перед таблицями числовими, і ось чому:

1) менш треба часу на складання номограм, ніж на складання числових таблиць;

2) номограми, бувши цілком наочними, забирають незрівняно менше місця, ніж числові таблиці, бо одна номограма, нари-

сована на невеликім аркуші паперу, заступає часто кілька аркушів числових таблиць; для прикладу можна згадати ту ж таки логаритмічну лінійку, що заміняє грубезні таблиці логаритмів;

3) легше визначати за допомогою номограм проміжні вартості функцій через інтерполяцію.

Правда, застосування номограм дає обмежене число точних вартісних цифр, звичайно три й найбільше чотири, а коли користуватися з числових таблиць, можна робити обчислення з якою завгодно точністю. Та, як ми вже бачили, для технічної якраз мети чотири точних вартісних цифри в результаті обчислення є вже велика розкіш. А потім, коли б і була потрібна в якімсь окремім випадку більша точність, номограми можуть дати вихідну первісну вартість; мавши ж її, можна методами наближених обчислень одержати нову вартість з яким завгодно ступенем точности.

Зате номограми мають дві неоціненні переваги:

1) як графічні таблиці, вони без особливого ускладнення їхнього вигляду можуть мати необмежене число входів, коли числові таблиці вже за трьох входів дуже ускладняються;

2) номографія дає можливість графічно зображати зміни вартостей функцій не тільки явних, а й неявних. З цього погляду номограми — незамінний засіб виявляти й точно вивчати невідомі, одержувані емпіричним способом, закони, а такі з дебільшого й є закони техніки в усіх її царинах.

За початок номографії треба, як уже казано, вважати скалю першої логаритмічної лінійки Гунтера і пропонований від Декарта в його винайденій аналітичній геометрії спосіб графічно зображати функції за допомогою координат. Ці якраз перші способи й є прототипи двох типів номограм: рухомих і нерухомих.

Однак, першу номограму в теперішнім розумінні снова дав француз Пуше в виданій 1795 р. книжці „l'Arithmetique lineaire“ для виконання множення. Далі номографія, як спосіб графічно зображати формули, розвивалася переважно в працях французьких інженерів і техніків інженерного війська в зв'язку з основами графічної статики. 1842 року французький інженер мостів і шляхів Л. Лялян запропонував уживати графічних таблиць для деяких питань будівництва й запровадив 1848 року в номографічне числення спосіб, нині клясичний, так званої анаморфози, тобто перетворення номограм для спрощення їх вигляду та полегшення користування з них. Спосіб полягає в тім, що будову номограм зводять до будови найпростіших ліній, наприклад, простої або кола[1]). Цей спосіб 1884 року

---

[1]) Докладно цей і інший способи будови номограм будуть описані далі.

опрацював бельгійський інженер мостів і шляхів M. Massau і поклав в основу запропонованого від нього графічного інтеґрування. Того ж таки року M. d'Ocagne запропонував, так званий, спосіб вирівнювання точок. Нарешті, 1886 року M. Lallemand запропонував особливий спосіб будови, так званої, гексагональної номограми, як виявилося, надзвичайно плодотворчий; цього способу можна вживати за якого завгодно числа входів, тобто для функцій з великим числом змінних. Увесь нагромаджений матеріял про будування й застосування номограм опрацював французький інженер M. d'Ocagne, утворивши цільну систематичну теорію номографії, яку він і оголосив друком 1891 року. Ця праця[1]), клясична в царині номографії, ніби дала, зі слів самого d'Ocagne, автономію номографії в галузі графічного числення.

З його легкого почину номографією зацікавились інженери всіх країн і енерґійно заходилися коло опрацювання її та поширення обсягу її застосування. Пальма першенства належить тут німецьким інженерам, що правильно оцінили значення номографії для техніки, подібно, як в 70 роках минулого століття вони ж таки правильно оцінили іншу геніяльну французьку ідею — вживання залізобетону й тим надзвичайно прислужилися інженерній справі, розвинувши застосування цього матеріялу.

Закінчуючи цим коротку історичну довідку про номографію, зауважмо, що першим твором у цим питанні російською мовою була книжка інженера шляхів Н. М. Ґерсеванова[3]). Він, між іншим, запропонував у своїй книжці спосіб будувати номограми з рівновіддалених точок, а також метод інтеґрувати деякі системи рівнань із частинними похідними першого порядку.

§ 49. Основні визначення й поняття про номограми. Як уже казано, яку завгодно функцію від одної незалежної змінної вигляду:

$$y = f(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (355)$$

або, що те саме, рівнання з двома невідомими вигляду:

$$\varphi(x, y) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (355a)$$

можна за допомогою методів аналітичної геометрії зобразити графічно.

Здебільшого для цього вживають картатого паперу. На осі абсцис відкладають різні величини x, а на відповідних ординатах вартості y і одержують, взагалі сказати, криву, що зображає залежність цих двох змінних.

[1]) Див. показник літератури.

[1]) Див. показник літератури.

Мавши відповідні самописні прилади, так звані, діяграмові апарати, де писний прилад може одночасно переміщатися пропорційно до зміни величин x та y, можна одержувати автоматично вирисовувану криву, що зображає функцію (355) або рівнання (355a), тобто одержувати, так звані, графіки чи діяграми.

Цього способу раз-у-раз уживають у техніці, щоб зображати зміни результатів дослідів, коли емпірично шукають залежність одної величини від іншої, наприклад, залежність видовження від розтяжної сили в теорії опору матеріялів, або тиску насиченої пари від температури в паротехніці тощо. Такі нарисовані криві наочно зображають залежність чи закон, що зв'язує виучувані величини; вони є найпростіший тип номограм.

Мавши номограму, ми можемо для якого завгодно заданого x знайти відповідну вартість y і навпаки.

Отож, такий графік заступає собою числову таблицю результатів дослідів і навіть доповнює її. Справді, він дає змогу знаходити вартість y не тільки для спостережених величин x, а й для проміжних, не спостережених, бо за одержаною кривою ми можемо робити, так звану, графічну і н т е р п о л я ц і ю.

Такі графіки або номограми дуже зручні й корисні також, щоб вивчати функції, одержані теоретично, особливо, якщо аналітичний вираз функцій дуже складний. Тоді досліджувати функції надзвичайно полегшує наявність графіків, надто, коли вживати вже згаданого клясичного способу анаморфози або перекручення, з м і н и з о б р а ж е н н я даної кривої, виконуючи зміну за спеціяльним пляном, про віщо скажемо далі.

Отже, бачимо, що всяка номограма в суті є якась проста або крива лінія або ряд таких ліній, чи, як кажуть, громада ліній.

Разом із тим з поданого вище опису лічильної чи логаритмічної лінійки, про яку ми сказали, що вона так само, як графіки або діяграми, є типова репрезентантка номограм, ми знаємо, що на ній, на так званих її скалях, є цілий ряд поділок, позначок, що відповідають у певнім мірилі вартостям різних функцій.

Зіставляючи це зі щойно сказаним про графіки, можемо визначити засаду, що всяка номограма є, взагалі сказавши, система простих або кривих ліній з нанесеними на них поділками чи позначками.

Іноді й зазначені вище лінії бувають відповідно позначені.

Залежно від цього можна сказати, що о с н о в н і е л е м е н т и н о м о г р а м и є с и с т е м и п о з н а ч е н и х л і н і й і п о з н а ч е н и х т о ч о к.

Щоб з'ясувати ці основні елементи, розгляньмо такий приклад:

Нехай маємо рівняння:

$$F(x,y,z)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (356)$$

Даймо змінній z якусь вартість c_1 і, взявши різні x від a_1 до a_n, збудуймо за відповідними y від b_1 до b_n криву (рис. 85), що зображає рівняння:

$$f(x,y,c_1)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (356a)$$

Даючи в (356) послідовно z вартості до c_n, будуючи відповідно криві (356a) і позначаючи їх відповідними вартостями z, тобто від c_1 до c_n, ми одержимо громаду позначених ліній $c_1 \ldots c_n$, що їх також можна назвати **нумерованими лініями**.

Не важко помітити, що ці лінії нагадують собою лінії однакових глибин або однакового підвищення точок над певним рівнем, тобто, так звані, поземини на топографічних мапах, або, так звані, ізобари в метеорології, чи лінії однакового барометричного тиску, тощо.

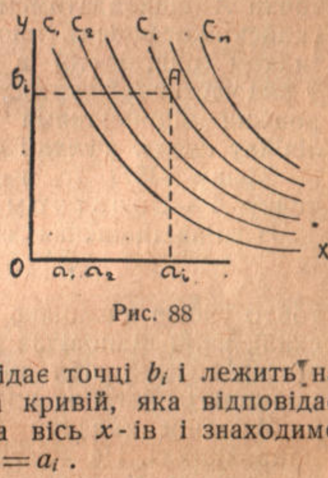


Рис. 88

Користуватися з таких номограм дуже просто, як бачимо з оцих прикладів.

Нехай нам задано вартості:

$$z=c_1,$$
$$y=b_1,$$

треба знайти $x=a_i$.

Для цього беремо на рис. 88 на осі y-ів

$$y=b_i$$

і з точки b_i ставимо нормалю $b_i A$, тобто знаходимо точку A, що відповідає точці b_i і лежить на кривій, позначеній числом c_i, або на кривій, яка відповідає $z=c_i$. З точки спукаємо нормалю на вісь x-ів і знаходимо точку a_i, що відповідає шуканому $x=a_i$.

Якщо нам задано:

$$x=a_k$$
$$y=b_k$$

і треба знайти $z=c_k$, робимо так. З точок a_k і b_k ставимо нормалі відповідно до осей x-ів та y-ків і на перетині їх знаходимо точку c_k, що відповідає шуканій вартості $z=c_k$.

Коли при цім точка c_k не потрапляє на жодну з позначених ліній $c_1 \ldots c_n$, то вартість c_k ми визначаємо наближено, на око, інтерполяцією.

Оце суть, так званих, номограм із системи позначених або нумерованих ліній. Не важко помітити, що вони дають вартості функцій від трьох змінних і заступають собою таблиці з двома входами.

Візьмім тепер якусь криву, хоча б одну з зображених на рис. 88, наприклад, відповідну c_i, що, очевидно, зображає функцію від двох змінних

$$f(x, y) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (357)$$

Візьмім одну з них, приміром, y, за незалежну змінну і, переписавши рівнання (357) під виглядом:

$$x = \varphi(y) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (357a)$$

будемо давати y послідовні довільні вартості $b_1, b_2 \ldots b_n$; одержимо для x відповідні вартості $a_1, a_2 \ldots a_n$, а, значить, і ряд точок $A_1, A_2 \ldots A_n$ на кривій c_i, або, як кажуть, одержимо ряд позначених точок $A_1 \ldots A_n$ на даній кривій чи, так звану, скалю даної функції з позначеними на ній точками, що відповідають різним вартостям даної функції.

Інакше сказавши, коли ми на кривій (357) від довільної її точки A відкладатимемо довжини, рівні $x = l \, . \, \varphi(y)$, де l — якийсь коефіцієнт пропорційности, виражений певним відтинком лінії, взятої в певнім мірилі, надаватимемо змінній y ряд частинних вартостей і позначатимемо кінці відкладуваних довжин відповідними вартостями y, то одержимо криволінійну *скалю функції* φ вигляду (357a).

Криву (357) (c_i на рис. 88) звуть о с н о в о ю с к а л і, точку A — п о ч а т к о м скалі, а відтинок l — м о д у л е м скалі.

Із співвідношення $x = l \, . \, \varphi(y)$ бачимо, що при $\varphi(y) = 1$

$$x = l,$$

тобто своєю числовою вартістю модуль l є довжина відтинка скалі, який відповідає вартості $\varphi(y) = 1$, або, інакше, модуль відограє ролю ніби мірила даної скалі й через це звичайно виражають його на практиці міліметрами.

У данім випадку основа скалі з позначеними точками криволінійна. Це — загальний випадок скаль. За приклад такої криволінійної скалі на практиці може бути скаля кутоміра з поділками її на градуси.

Спустивши з усіх позначених точок A криволінійної скалі нормалі на осі OX та OY і приписавши основам цих нормаль відповідні позначки a та b, ми одержимо на основних осях дві проєкції криволінійної скалі або п р о є к ц і й н і с к а л і. Звичайно модуль проєкційних скаль вважають за рівний 1, а за початок їх беруть початок координат. Не важко помітити, що проєкційні скалі виражають рівнання:

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(\alpha) \\ y = \varphi(\beta) \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (358)$$

Звідси ясно, що всяку скалю можна задати в двох основних виглядах:

1) Задавши основу скалі у вигляді (357) і функцію вигляду (357 *a*), або

2) задавши дві її проекції у вигляді (358).

Переходити від одного вигляду завдання до іншого зовсім легко.

Як щойно бачили ми, основи проекційних скаль вигляду (358) є прості лінії. Такі скалі з простолінійними основами є частинна відміна функціональних скаль з позначеними точками.

Коли скаля збудована на простолінійній основі, і ряд послідовних них нанесених на ній вартостей змінної є аритметична прогресія, то таку скалю звуть **нормальною**. Очевидна річ, що віддалі між поділками (позначками) на такій скалі, взагалі сказавши, одні з одними не рівні.

Якщо послідовні вартості змінної в виразі (357*a*) ми доберемо так, що поділки скалі, тобто віддалі між точками $A_1 - A_n$ на скалі, будуть рівні, то одержимо скалю „**з рівними поділками**“.

Тим що на практиці змінна в виразі (357*a*) має якісь то граничні вартости від a до b, для яких і будують номограму, то, очевидно, **довжина скалі** звичайно дорівнює

$$L = l\ [(\varphi(b) - \varphi(a)] \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (359)$$

На практиці заведено брати довжину скалі L у межах від 15 до 25 *см*. Очевидячки, взявши певну довжину скалі L, не важко за рівнанням (359) знайти відповідний модуль e, якого величину звичайно беруть круглими числами.

Найменшу віддаль між суміжними поділками скалі, позначену звичайно в курсах номографії через i, звуть **графічним інтервалом**. На практиці, щоб була змога інтерполювати на око, заведено брати величину графічного інтервалу рівною 1 *мм* і, в крайнім разі, рівною 0,5 *мм*, тобто надають найменшій віддалі між поділками величину від 0,5 до 1 *мм*.

Числову ж вартість ріжниці ε між вартостями двох суміжних поділок на скалі або суміжних вартостей функції $\varphi\ (y)$ звуть **ступінем скалі**.

На підставі сказаного не важко визначити загальний перебіг будови номограм та градуювання їх, тобто нанесення на них поділок.

При простолінійній основі скалі:

1) взявши довжину її L за рівнанням (359), визначають довжину l модуля;

2) за вибраним інтервалом i визначають ступінь ε_i скалі з виразу:

$$l\ [\varphi\ (a_i) - \varphi\ (a_i - \varepsilon_i)] = i \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (360)$$

при різних вартостях a, тобто знаходять ряд вартостей $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$, або ряд ріжниць, через які повинна змінюватися вартість змінної a;

3) на підставі ряду вартостей $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ знаходять вартості змінної $a_1 \ldots a_n$, а на підставі їх знаходять вартості функції (357a) з умовою не порушити мінімуму графічного інтервалу, тобто знаходять $a_1 \ldots a_n$ з рівнань:

$$\left.\begin{array}{l} l[\varphi(a_1)-\varphi(a_1-\varepsilon_1)]=i \\ l[\varphi(a_2)-\varphi(a_2-\varepsilon_2)]=i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l[\varphi(a_n)-\varphi(a_n-\varepsilon_n)]=i \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (361)$$

Усі результати цих визначень звичайно заокруглюють, щоб зручніше наносити поділки, намагаючись лише приблизно справдити зазначені рівнання.

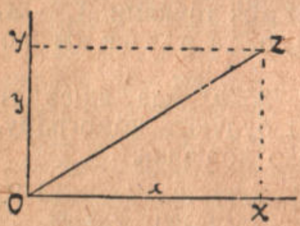


Рис. 89

При криволінійній скалі взагалі краще спершу збудувати проєкційні скалі і, ставлячи до них нормалі в однаково намічених точках, надавати точкам їх перетину ті самі позначки. Злучаючи ці точки плавкою кривою, одержимо криволінійну скалю. Коли основа криволінійної скалі — проста, легко вирисовувана крива, наприклад, коло, то, нарисувавши його, найлегше градуювати за допомогою одної з проекційних скаль.

Пояснім сказане найпростішим прикладом; його подає творець номографії *д'Окань*.

Нехай треба збудувати номограму функції вигляду:

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \ldots\ldots\ldots \quad (362)$$

Відкладім на координатних осях різні вартості x та y, тобто збудуймо проєкційні скалі функцій:

$$\left.\begin{array}{l} x=x_i \\ y=y_i \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (362a)$$

беручи за сказаним вище модуль рівним з одиницею.

Візьмім дві довільні вартості x та y, а саме (рис. 89):

$$\left.\begin{array}{l} x=ox \\ y=oy \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (362б),$$

і знайдім за ними вартість z з формули (362).

На підставі відомої геометричної теореми, вартість z, очевидно, зображена буде простою OZ, що править за гіпотенузу прямокутнього трикутника з катетами, рівними x та y.

Яйщо ми тепер опишемо з точки O дугу кола радіюсом OZ, то одержимо криву з позначкою z, де завжди міститиметься дана вартість величини z, визначеної з рівнання (362) при видповідних змінах x та y.

Таким способом ми одержимо номограму для заданої функції (362) у вигляді громади концентричних дуг кола, зображених на рис. 90.

Користуючись із цієї номограми, знайдемо, наприклад, що при $x=3$ і $y=4$, $z=5$. Справді, ставлячи з точки $x=3$ та $y=4$ нормалі, знайдемо, що вони перетнуться на кривій з позначкою 5; це число якраз і справджує рівнання (362).

З даного прикладу ясно бачимо хуткість і простоту будови номограми заданої функції та велике заощадження часу при обчисленні якої завгодно вартости z за заданими величинами x та y, проти числових таблиць.

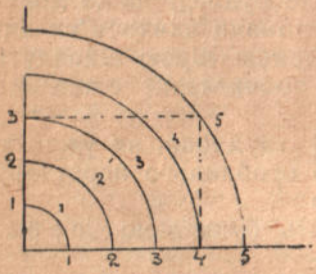


Рис. 90

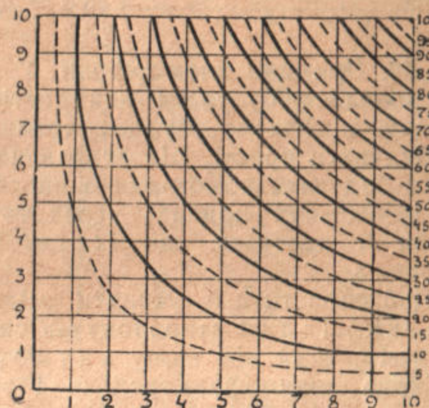


Рис. 91

Щоб іще краще з'ясувати суть номографії й принцип будови номограм та вживання їх, скористуймося з клясичної номограми П у ш е для добутку двох чисел у межах від 1 до 10 кожне, тобто для функції вигляду:

$$A=a\times b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (363)$$

Інакше сказавши, збудуймо номограму для відомої П і т а г о р о в о ї таблиці множення.

Не важко зрозуміти, що номограма для функції (362) являтиме собою громаду позначених кривих, з яких кожна відповідає певній вартості A при змінних a та b.

Беручи модуль за рівний з одиницею і виходивши з початку координат, будуємо на їхніх осях дві проекційні скалі для функцій

$$\left.\begin{array}{l} x=a \\ y=b \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (363a)$$

міняючи вартості a та b від 1 до 10 (рис. 91).

Ставлячи з намічених на координатних осях точок нормалі до перетину їх, одержимо громаду позначених кривих 5,10, ... 100; вони, звичайна річ, являють собою рівнобічні гіперболі, яких асимптоти зливаються з осями координат, що їх легко збудувати за правилами геометрії.

Коли ми хочемо за допомогою такої номограми знайти добуток чисел 4 і 5, ставимо нормалі з точок 4 і 5. Перетин їх буде на лінії, що має позначку 20, а тому ми одержуємо:

$$4 \times 5 = 20 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (363б)$$

§ 50. Принцип анаморфози У двох наведених прикладах нам довелося будувати найпростіші криві. У загальнім же випадку, як знаємо, будова кривих ліній далеко складніша, ніж будувати прості. Ще складніша буде будова, якщо доведеться будувати номограми в вигляді громади якихось складних позначених кривих; через те великою мірою відпадуть вигоди й переваги, що їх дає при обчисленні вживання номограм.

Щоб спростити й усунути всі такі труднощі, як уже казано, інж. Лялян запропонував спосіб особливого перетвору номограм, який має назву анаморфози.

Слово анаморфоза грецьке і значить буквально „перекручення", або зміни зображення.

Суть способу та, що, бажавши збудувати номограму якоїсь функції $y=f(x)$, яка має вигляд кривої, обертають її за допомогою особливого перетвору на просту лінію або кола. Наприклад, параболю заміняють простою лінією чи дугою кола.

Так, зазначена вище заміна криволінійної скалі проєкційними її скалями може певною мірою правити за найпростіший приклад анаморфози.

Особливу ціну має перетвір номограм за допомогою анаморфози, коли доводиться мати діло з громадою кривих. Заміняючи ці криві простими, можна чимало спростити всі будови, а разом із тим загальний вигляд номограми й користування з неї.

Крім анаморфози, завдяки розвиткові геометрії, що перетворює фігури, зіставляє й підпорядковує одні з них іншим, номографія має тепер і інші способи перетворювати, що спрощують та полегшують номографічні будови. Наприклад, громади кривих часто перетворюють на ряд точок, позначених на простій або кривій. Таким способом замість трьох взаємно перетинних громад кривих дістають три мірила з позначеними на них точками, що зображають величини змінних.

Щоб з'ясувати суть способу будови анаморфози, скористуймося з наведеного вже прикладу номограми для добутку двох чисел або для функції вигляду:

$$A = a \times b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (363)$$

одної з перших анаморфоз, що її збудував Л я л я н.

Як ми вже бачили, номограма для даної функції сходить до будови системи кривих, зображених на рис. 91,

Щоб перетворити ці криві на прості, треба відповідно „перекрутити" проєкційні скалі, а саме, треба збільшити поділки їх, ближчі до початку координат, і зменшити поділки, ближчі до кінцевих вартостей величин a та b.

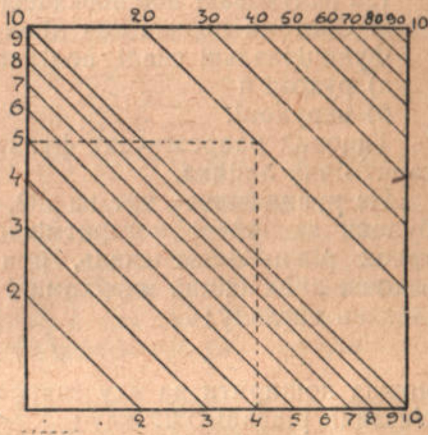


Рис. 92

Математично цього можна досягти, відклавши на осях не величини a та b, а їхні логаритми. Справді, на підставі правил логаритмування ми можемо виразові (363) надати вигляду:

$$\lg A = \lg a + \lg b \; . \quad (363в)$$

Тоді, знавши, що сума абсциси й ординати якої завгодно точки, що лежить на простій, похилій під кутом 45° до осей координат, є величина стала й рівна з відтинком, що його відтинає ця проста на обох осях, не важко знайти, що номограма цього (363b) рівнання зображена буде системою простих, похилих під кутом 45° до осей координат, проведених через точки, які зображають на цих осях вартості логаритмів тих самих чисел від 1 до 10.

Інакше сказавши, треба на осях координат відкласти логаритми чисел від 1 до 10 і злучити точки з однаковими позначками простими лініями. Ми одержимо зображену на рис. 92 анаморфозу номограми, поданої на рис. 91, тобто анаморфозу номограми для функції (363).

Цей спосіб будувати анаморфозу, звану логаритмічною, дуже поширений у номографії і дає можливість легко й просто розв'язувати цілий ряд задач, що трапляються в техніці. З цієї причини за кордоном є в продажу навіть спеціяльний картатий папір з поділками, що відповідають логаритмам ряду натуральних чисел. Такий папір, до речі, дуже придатний для графічного розв'язування деяких рівнань, а також для досліду номограм, одержуваних при експериментальнім вивчанні залежности між різними величинами, та для визначення вигляду емпіричних формул.

§ 51. Найпростіші номограми у вигляді скаль. Переходячи до опису найголовніших типів номограм (як каже д'Оканьь, у його колекції номограм іще 1912 року було понад 300), ми опишемо тільки основні типи номограм, відсилаючи тих, хто цікавиться, до відповідних літературних джерел, зазначених у доданім спискові.

Номограми можна розбити на дві основні кляси:

1. Градуйовані або позначені функціональні скалі.
2. Системи позначених ліній.

Функціональні скалі поділяються на:

а) рухомі й

б) нерухомі.

Типовий репрезентант функціональних рухомих скаль є логаритмічна лінійка.

Не зупиняючись тут на ній, зауважмо тільки, що принцип будови звичайної логаритмічної лінійки, яка складається з трьох рівнобіжних скаль, при чім середня може ковзатися вздовж двох інших нерухомих, і яка править для розв'язання рівнань вигляду:

$$f_1+f_2=f_3 \quad \dots\dots\dots \quad (364)$$

можна поширити на яку завгодно кількість змінних для розв'язання рівнань вигляду:

$$f_1+f_2+\dots\dots=1_n \quad \dots \quad (364a)$$

Для цього треба тільки збудувати n скаль; з них дві скалі повинні бути нерухомі, а $n-2$ рухомі.

У цім напрямі й піде, безперечно, розвиток будови та застосування логаритмічних лінійок.

Щодо номограм із нерухомими скалями, то вони можуть бути з основою:

а) простолінійною й

б) криволінійною,

при чім, як уже сказано, скалі можуть мати поділки рівномірні й нерівномірні.

У практиці номографічного числення скалі з простолінійною основою застосовують для зображення функцій від одної змінної. Найуживаніші такі скалі:

1. Скаля рівномірна — зображати функції вигляду:

$$f(x)=mx+n \quad \dots\dots\dots \quad (365)$$

або в окремім випадку

$$f(x)=x, \quad \dots\dots\dots \quad (365a)$$

де x — незалежна змінна.

Такі скалі є проекційні скалі в номограмі Пуше (рис. 88) для множення чисел від 1 до 10, що зображають вартості ряду чисел від 1 до 10.

Типовий приклад рівномірної скалі—яка завгодно мірильна лінійка. Головна перевага такої скалі—легкість і простота її будови; тому рівномірна скаля досить поширена в номографічнім численні.

Не важко помітити, що рівномірна скаля є не що інше, як окремий випадок для функції вигляду:

$$f(x) = x_n \text{ при } n = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (365б)$$

2. Скаля логаритмічна — зображати функції вигляду:

$$f(x) = m \lg x + n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (366)$$

або в окремім випадку

$$f(x) = \lg x \quad \ldots \ldots \ldots \quad (366a)$$

Приклад такої скалі—скалі логаритмічної лінійки, а також проєкційні скалі анаморфози номограми Пуше на рис. 89.

Хоча скаля ця й нерівномірна, але вона зручна тим, що, коли збудовано її для чисел від 1 до 10, то, щоб продовжити скалю для вартостей, менших від одиниці, а так само й більших від 10, досить тільки повторити в той або в той бік поділки основної скалі між 1 до 10.

Ця скаля, як уже зазначено, теж дуже поширена в номографії; її часто вживають при застосуванні принципу анаморфози.

3. Скаля лінійна — зображати функції вигляду:

$$f(x) = \frac{mx + n}{px + q} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (367)$$

за умови, що

$$mq - np = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (367a)$$

Скаля цього вигляду належить до типу, так званих, скаль похідних, або трансформованих, чи, інакше, скаль проєктивних; їх одержують з двох попередніх скаль, заміняючи в $f(x)$ вартості x якоюнебудь новою функцією $\varphi(x)$, або будуючи на підставі скалі функції $f(x)$ скалю нової функції вигляду $F[f(x)]$.

Теорію таких скаль і методи будови їх подають у докладних курсах номографії.

§ 52. Номограми функцій із двома змінними. Щоб зображати функції з двома змінними, уживають двох родів номограм:

1. Номограм зі злучених скаль, або, так званих, подвійних скаль.

2. Номограм у Декартових координатах.

Метод будови перших такий. Мавши рівнання вигляду:

$$y=f(x) \dots \dots \dots \dots (368)$$

множать обидві частини його на той самий модуль l, надаючи даному рівнанню вигляду:

$$ly=lf(x) \dots \dots \dots \dots (368a)$$

Далі беруть дві рівнобіжні простолінійні основи — дві простолінійні скалі — і від спільного початку O будують на одній із них вартість функції:

$$ly \dots \dots \dots \dots (368б)$$

а на другій вартість функції:

$$lf(x) \dots \dots \dots \dots (368в)$$

При такій будові просто на підставі вартости одної з функцій на одній скалі читають вартість другої на другій рівнобіжній скалі.

Очевидно при цім, що одна скаля, а саме для функції (368б), буде рівномірна.

Залежність між змінними може бути також задана в вигляді рівнання:

$$f(x)=f(y) \dots \dots \dots \dots (369)$$

Тоді, будуючи номограму згідно з даними вище вказівками, ми одержимо при тім самім модулі дві нерівномірні злучені скалі.

Номограми із злучених або подвійних скаль дуже придатні, щоб виражати залежність між тригонометричними величинами Найпростіший приклад номограми зі злучених скаль є скаля термометра з поділками за Реомюром і Цельсієм.

За таким же принципом можна будувати номограми і в вигляді простих злучених скаль, якщо маємо дві різні функції від тієї самої змінної. Така, наприклад, потрійна скаля термометра, з поділками за Реомюром, Цельсієм і Фаренгейтом.

Іноді за принципом злучених скаль можна будувати номограми й більшого, ніж три, числа змінних.

Щодо номограм у Декартових координатах, то вони є не що інше, як уже описані графічні зображення якої завгодно функції від двох незалежних змінних.

Такі номограми, очевидно, при найвживанішій прямокутній системі координат будуть узагалі криволінійні.

Спосіб будувати таку номограму дуже нескладний. Мавши рівнання вигляду:

$$F(x, y)=0, \dots \dots \dots \dots (370)$$

беруть прямокутню систему координат і наносять на осях x-ів та y-ів рівномірні скалі:

$$\left.\begin{aligned} x_l &= l_1 x \\ y_l &= l_2 y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (371)$$

Ставлячи з відповідних точок x_l та y_l нормалі до взаємного їх перетину, одержують криву, якої всі точки справджують задане рівнання, бо рівнання цієї кривої буде:

$$F\left(\frac{x_l}{l_1}, \frac{y_l}{l_2}\right) = F(x, y) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (370a)$$

Приклад таких номограм — отіграфічні зображення в Декартових координатах різних функцій, що їх ми будували в попередніх розділах, описуючи способи наближеного та графічного розв'язання рівнань.

Мавши яку завгодно криву вигляду (370a), легко, на підставі кожної даної вартости одної зміної, знайти вартість другої, як це описано вище, в § 49, при викладі загальних понять про номограми. Це особливо просто робиться, якщо крива (370a) нарисована на картатім папері, якщо часто вживають для спрощення будови.

Коли число частинних вартостей величин x та y на відповідних координатних осях велике, і поділки на проєкційних скалях дрібні, то вживати цього звичайного способу користування з номограм може бути дуже втомно, і можуть траплятися помилки при визначенні шуканих вартостей функцій. Щоб уникнути цих незручностей, уживають іншого способу: користуються з так званого транспаранта.

Тут номограма звичайно складається з двох проєкційних скаль на координатних осях, а відповідна їм крива нарисована на чистім полі квадрата, що міститься між ними. Прямокутню ж сітку картатого паперу заміняють транспарантом.

Транспарант — це прямокутник, виготовлений з тонкого аркуша якогось прозорого матеріялу, здебільшого з целюльози. На нім нанесені дві взаємно нормальні лінії, рівнобіжні з координатними осями. Ці лінії звуть індексами або указниками.

Щоб знайти за даною номограмою вартість одної зі змінних на підставі заданої другої, роблять так. Указники транспаранта уставляють рівнобіжно з осями координат так, щоб один з указників пройшов через задану вартість одної зі змінних, наприклад, через задану вартість x, а точка перетину індексів одночасно злилася з одною із точок кривої. Тоді другий індекс перетне вісь y-ів у точці, що відповідає шуканій вартості другої змінної.

Відміна транспаранта є, так звана, рухома скаля.

У цім випадку рисують тільки одну проєкційну скалю, наприклад, на осі y-ів, і криву на чистім полі. На транспаранті на індексі, рівнобіжнім із віссю x-ів, наносять відповідну скалю x-ів. При користуванні такий транспарант або, інакше сказавши, рухому скалю пересувають по осі y-ів рівнобіжно з самим ним, аж доки початок його не зіллється з заданою вартістю. Тоді точка перетину рухомої скалі з кривою дасть шукану вартість x.

Номограми для функції з двома змінними можна також будувати і в полярних координатах.

Справді, мавши рівнання (370), наносимо в полярній системі координат на однім із радіюсів векторів скалю:

$$r = l_1 x, \qquad \qquad (372)$$

а на колі від довільного початку, що відповідає $\omega = 0$, рівномірну скалю:

$$\omega = l_2 y \qquad \qquad (372a)$$

Тоді, очевидно, яка завгодно точка з відповідними координатами:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \frac{r}{l_1} \\ y_i &= \frac{\omega}{l_2} \end{aligned}\right\} \qquad \qquad (372б)$$

належатиме кривій, що зображає номограму даного рівнання (370), бо її рівнання буде:

$$f\left(\frac{r}{l_1}, \frac{\omega}{l_2}\right) = F\,(x, y) = 0 \qquad \qquad (370б)$$

Будувати такі номограми в полярних координатах особливо доцільно тоді, коли одна з незалежних змінних є величина якогось кута.

Зауважмо також, що при застосуванні полярних координат дуже зручно мати скалю функції (372), тобто $r = l_1 x$, у вигляді рухомої лінійки, яка обертається на осі, приміщеній в центрі кола, що править за основу для скалі другої функції (372a), тобто $\omega = l_2 y$.

Вважаючи на зазначені вище незручності криволінійних номограм, часто при будові їх для функцій з двома змінними застосовують уже згаданий принцип анаморфози.

Найбільш поширена анаморфоза логаритмічна, описана в § 50, коли обидві проєкційні скалі є скалі логаритмічні. Якщо тільки одна з проекційних скаль стає логаритмічною, а друга лишається рівномірною, то утворюється, так звана, напівлогаритмічна анаморфоза.

Є ще інший спосіб анаморфози, що його Лялян назвав геометричним. Цей спосіб теж дає змогу заміняти довільною простою яку завгодно криву в Декартових координатах з рівномірними проєкційними скалями. Спосіб такий.

Нехай ми маємо криву *OMP*, збудовану за допомогою рівномірних скаль, позначених на осях *OX* та *OY* (рис. 93).

Нехай точки X_i і Y_i відповідають якійсь точці *M* на кривій *OMP*.

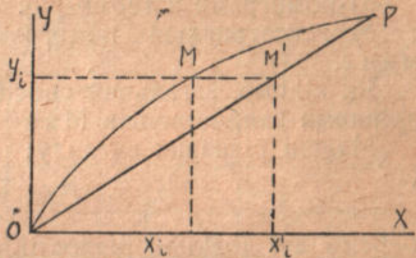


Рис. 93

Щоб замінити криву *OMP* довільно взятою простою *OM'P*, досить змінити мірило скалі *OX*. Для того, поставивши нормалю з точки Y_i, що відповідає на кривій точці *M*, продовжують її до перетину з простою в точці *M'*. Спустивши з точки *M'* нормалю на вісь x — ів, одержують нову позначку X_i' для відповідної вартости.

Очевидно, при такій анаморфозі проєкційна скаля на осі y — ів лишиться рівномірною, а на осі x — ів стане нерівномірна. Отже, збудувати анаморфозу якої завгодно криволінійної номограми — річ дуже нескладна.

§ 53. Номограми функцій з трьома змінними. Особливо широко користуються з принципу анаморфози, будуючи номограми для функцій з трьома й більшим числом змінних.

Як уже з'ясовано вище (§ 49), номограми для функцій з трьома змінними в Декартових координатах дають нам систему, так званих, позначених ліній. У загальнім випадку маємо три перетинні громади кривих, що відповідають кожній із трьох змінних. В окремім же випадку для спрощення за перші дві громади кривих беруть системи простих ліній, рівнобіжних з координатними осями, або, інакше сказавши, будують на осях *OX* та *OY* рівномірні скалі для різних послідовних вартостей x та y і одержують тільки одну громаду кривих для третьої змінної (див. рис. 91).

Щоб спростити тут будову номограм і полегшити вживання їх, стараються, як уже сказано, можливо широко користуватися з принципу анаморфози, що його завів у практику Лялян і що лежить в основі сучасного розвитку номографічного числення.

Звичайно номограми функцій з трьома змінними поділяють на три головні кляси:

1. Номограми з загальною анаморфозою, запропоновані від Ляляна.

2. Номограми з вирівняних точок, спосіб будови яких запропонував д'Окань.

3. Номограми з рівновіддалених точок, запропоновані від інж. шляхів Н. М. Ґерсеванова.

З поміж номограм із загальною анаморфозою особливо поширені на практиці, як надзвичайно зручні:

a) номограми з геометричною анаморфозою і

b) гексагональні номограми, запропоновані від Ляллемана.

Як відомо, загальний спосіб будувати номограми з трьома змінними запропонував Массо. Спосіб такий.

Мавши рівняння вигляду:

$$F(x, y, z) = 0, \ldots \ldots \ldots \ldots (373)$$

беремо дві довільні рівності:

$$\left. \begin{array}{l} F_1(x, a, b) = 0 \\ F_2(y, a, b) = 0 \end{array} \right\} \ldots \ldots \ldots (373a)$$

Виключивши з рівнань (373) і (373*a*) змінні x та y, одержуємо рівняння:

$$F_3(z, a, b) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (373б)$$

Нарисувавши три громади ліній, що зображають рівняння (373*a* та *б*), ми одержимо номограму рівняння (373).

Щоб за її допомогою визначити вартість одної змінної, наприклад, z, на підставі заданих x та y, треба прочитати позначку тої кривої, яка проходить через точку перетину кривих, позначених заданими вартостями x та y.

Тим що рисувати й користуватися найзручніше простими лініями або дугами кіл, то й уживають методу анаморфози, заміняючи громади кривих системами простих, з яких одна рівнобіжна з віссю x-ів, а друга — з віссю y-ів. При цім, щоб не затемняти рисунка, не рисують цих двох систем, а обмежуються тільки відповідними скалями на осях координат і користуються з транспаранта.

Такі номограми й звуть номограмами з загальною анаморфозою, при чім відрізняють анаморфозу, як уже сказано, геометричну і логаритмічну. При одержанні цих номограм для функції з трьома змінними у вигляді простих ліній, з яких дві системи відповідно рівнобіжні з осями OX та OY, можуть бути окремі випадки:

1. Система позначених ліній для змінної z є взаємно перетинні прості лінії, дотичні до їхньої обгинної.

2. Система являє собою прості рівнобіжні (рис. 91).

3. Система є в'язка ліній у вигляді промінів, що перетинаються в одній точці.

За таку точку в найпростішім окремім випадку править початок координат.

Номограми цього останнього типу часто бувають дуже зручні для користування і тому вельми поширені в практиці. Їх звуть радіянтними номограмами. Часто-густо радіянтними номограмами зображають рівнання тригонометричні.

Як приклад, подамо радіянтну номограму для вже не раз використаної в нас таблиці множення, тобто для рівнання вигляду (363).

Цю номограму показано на рис. 94. На ній для одної зі змінних, наприклад, a, нанесена на осі x-ів рівномірна скаля, а другу змінну b взято за змінний кутовий коефіцієнт для громади радіянтних простих із позначкою від 1 до 10. Бажаючи за допомогою цієї номограми знайти, наприклад, добуток чисел 5 і 6, беремо на осі x-ів точку з позначкою 5, з неї ставимо нормалю до перетину з простою з позначкою 6 і, проєктуючи її на прямовисну вісь, знаходимо вартість добутку, що дорівнює 30.

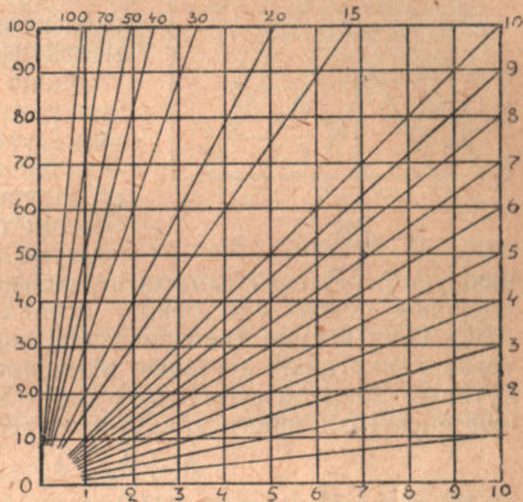


Рис. 94

З цього прикладу, до речі, бачимо, що модулі скаль, нанесених на координатних осях, різні, як це й буває в загальнім випадку будови радіянтних номограм.

Узагалі сказати, користуючись із принципу анаморфози, можна номограми з трьох простолінійних систем піддавати різноманітним змінам, або, як кажуть у номографії, трансформаціям, домагаючись легкости будови номограм, їх наочности та зручности для користування. Способом одної з трансформацій одержують дуже зручний тип номограм, званих гексагональними, що їх запропонував Лялеман.

Щоб найпростіше підійти до цієї відміни номограм, обізнаймося з, так званими, трикутніми номограмами.

Таких номограм переважно вживають хеміки для графічного зображення співвідношень між трьома елементами, що входять до складу якоїсь речовини. Серед техніків інших спеціяльностей вони, на жаль, мало поширені, хоча через простоту будови й зручність для користування, вони заслуговують на більшу увагу і могли б бути корисні в дуже багатьох царинах техніки.

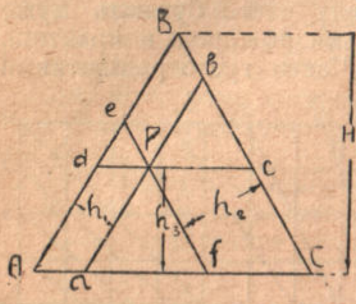


Рис. 95

Суть трикутніх номограм заснована на такім відомім із геометрії факті.

Якщо ми маємо рівнобічний трикутник *ABC* (рис. 95) і через якусь узяту в середині його точку *P* проведемо три прості *ab*, *cd* та *ef*, відповідно рівнобіжні з трьома боками трикутника *AB*, *BC* і *CD*, то сума основ одержаних трикутників *deP*, *bPc* і *aPf* завжди, незалежно від положення точки *P*, дорівнює основі або бокові основного взятого трикутника *ABC*. Тому й сума трьох якихось схожих ліній тих же таки трьох трикутників дорівнює відповідній лінії описаного трикутника. Зокрема сума трьох висот малих трикутників дорівнює висоті основного трикутника, тобто

$$h_1 + h_2 + h_3 = H \quad \ldots\ldots\ldots \quad (374)$$

На підставі рівности (374), трикутня номограма зручна для виразу такого співвідношення між трьома величинами, коли сума їх є величина стала. Інакше сказавши, трикутня номограма править для зображення рівнання:

$$x + y + z = const \quad \ldots\ldots\ldots \quad (375)$$

Будуючи її, вибирають відповідний модуль так, щоб:

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= lx \\ h_2 &= ly \\ h_3 &= lz \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (375a)$$

і тоді рівнання (375) набирає вигляду:

$$h_1 + h_2 + h_3 = l\ const \quad \ldots\ldots\ldots \quad (375б)$$

Нарисувавши після цього рівнобічний трикутник з висотою:

$$H = l\ const \quad \ldots\ldots\ldots \quad (375в)$$

одержимо, що сума віддалей якої завгодно точки в середині його від його боків при вибранім модулі справджуватиме наше рівнання (375).

Щоб легше визначити шукані віддалі h_1, h_2 та h_3 від боків трикутника, його покривають сіткою проведених на рівній віддалі простих, рівнобіжних із боками трикутника, і позначають їх відповідними при вибранім модулі цифрами.

Загальний вигляд такої номограми подано на рис. 96.

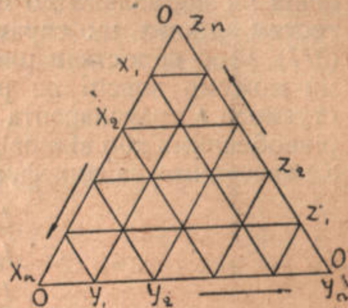


Рис. 96

Читаючи на боках трикутника позначки ліній, що перетинаються в якій завгодно точці, наприклад, відповідній P, на рис 95, одержуємо відповідні вартості:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_2 \\ y &= y_1 \\ z &= z_2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (375г)$$

Якщо x, y і z в рівнанні (375) є якісь функції x, y і z, тобто якщо маємо рівнання вигляду:

$$f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) = const, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (376)$$

то й для зображення його можна брати щойно описану номограму трикутнього типу.

Не важко помітити, що з номограми трикутнього типу легко можна користуватися також для зображення рівнань вигляду:

$$\left.\begin{aligned} & xyz = const \\ & f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z) = const \\ & [f(x)[^p \times [f_2(y)]^q \times [f_3(z)]^r = const \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; (377)$$

якщо вжити логаритмічної анаморфози.

Справді, логаритмуючи рівнання (377), ми одержимо:

$$\left.\begin{aligned} & \lg x + \lg y + \lg z = \lg const \\ & \lg f_1(x) + \lg f_2(y) + \lg f_3(z) = \lg const \\ & p \lg f_1(x) + g \lg f_2(y) + r \lg f_3(z) = \lg const \end{aligned}\right\} \; . \; . \; (377a)$$

тобто зведемо їх до вигляду рівнання (375) або (376), отже, матимемо змогу зобразити рівнання (377), як трикутню номограму.

Номограми трикутнього типу дуже придатні, наприклад, щоб вивчати ґранульометричний склад пісків та найвигідніші пропорції цементних і бетонних розчинів, а також, щоб розв'язувати деякі питання гідравліки; тому в Німеччині фірма Carl Schleiher & Schüll виготовляє навіть специяльний картатий папір з трикутньою сіткою простих ліній, що мають рівномірні поділки або нерівномірні — логаритмічні.

У щойно описаній трикутній номограмі, в кожній точці на площі трикутника, як бачимо, перетинаються три прості рівнобіжно з відповідними боками трикутника, а вздовж цих боків чи нормально до них є позначені точки, відповідні вартостям змінних, що справджують рівнання (376) або відповідно (377). Щоб спростити рисунок і надати йому більшої ясности, ми можемо зовсім не рисувати цієї сітки ліній, якщо користуємося з транспаранта з назначеними на нім указниками, рівнобіжними або відповідно нормальними до боків трикутника, з нанесеними на них функціональними скалями з модулями

$$\left.\begin{aligned} l_1' &= l_1 : \sin 60^0 \\ l_2' &= l_2 : \sin 60^0 \\ l_3' &= l_3 : \sin 60^0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (378)$$

Уміщаючи центральну точку транспаранта в заданій точці P і орієнтуючи указники його за відповідними боками трикутника номограми, ми одержимо на відповідних скалях x, y

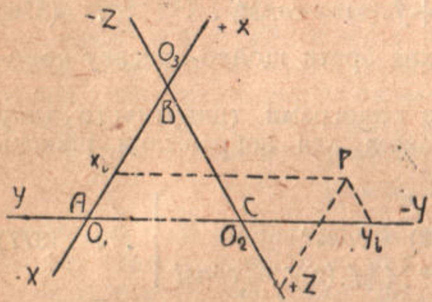


Рис. 97

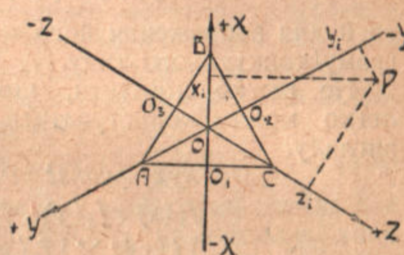


Рис. 98

і z вартості x_i, y_i та z_i, що справджують наші рівнання (376) чи відповідно (377), як це схематично зображено на рис. 97, де знак вартости змінних визначається їх положенням відносно початку на відповідній осі або скалі, при чім крапковані лінії зображають указники транспаранта.

Коли скалі, як показано на рис. 98, розташовані нормально до боків трикутника, то указники транспаранта (крапковані лінії) треба розташовувати нормально до осей або скаль x-ів, y-ів та z-ів, щоб одержати відповідні вартості x_i, y_i і z_i.

Якщо при останнім розташуванні скаль, показанім на рис. 95, припустити, що боки трикутників можуть ступнево зменшуватися і в решті обернутися в нуль, то, очевидячки, у цім випадку початки всіх трьох скаль зіллються вкупі в одній точці O, яка відповідає центрові тягару трикутника ABC, і в нас лишається тільки три осі з нанесеними на них функціо-

нальними скалями, що утворюють між собою кути, рівні 60°
(рис. 99).

Не важко помітити, що в данім випадку в рівнанні вигляду (376) вартість *const* стане рівна з нулем, а в рівняннях (377) — рівна з одиницею, тобто, інакше сказавши, вартості x_i, y_i і z_i справджуватимуть рівнання:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) = 0 \\ [f_1(x)]^p \times [f_2(y)]^q \times [f_3(z)]^r = 1 \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . (379)$$

Отже, рис. 96 зобразить нам номограму цих рівнань.

Аналогичне явище буде, очевидно, від зменшення до нуля трикутника ABC і на рис. 97.

Уживаючи таких номограм, звичайно надають транспарантові форми правильного шестикутника (рис. 100), що його дуже

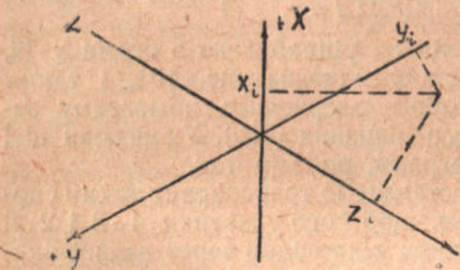


Рис. 99

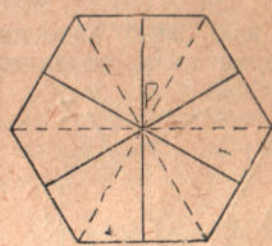


Рис. 100

легко в якім завгодно положенні пересувати вздовж лінійки, яка зливається з одною з осей або скаль; тому ці номограми звуть г е к с а г о н а л ь н и м и. Уперше гексагональні номограми одержав Л я л е м а н з поміччю анаморфози далеко складнішим способом, трансформуючи за допомогою теорії визначників.

Вживаний при гексагональних номограмах транспарант, показаний на рис. 100, можна переміщати в кожнім із шестьох напрямів, при чім він лишається рівнобіжним із самим собою. Щодо указників па транспаранті, то їх можна розташовувати і нормально до боків шестикутника і в напрямі його діягоналей, як довів інж. О. Л я к м а н. Очевидно, в останнім випадку указники рівнобіжні зі скалями, тобто з боками основного трикутника ABC.

Гексагональна система номограм дуже поширена; її легко можна застосувати для зображення рівнання не тільки з трьома, а й з якою завгодно великою кількістю змінних, ще й довів Л я л е м а н. Ця можливість широко застосувати гексагональні номограми заснована на тій особливості їх, що яку завгодно зі скаль або й усі їх можна пересувати рівнобіжно з самими ними по відповідній нормалі, поставленій з їхнього спільного початку. Очевидно, від такого переносу точка перетину указника транспаранта зі скалею не зміниться.

Користуючись із цієї властивости гексагональних номограм, можна зобразити за допомогою їх яке завгодно рівнання вигляду:

$$f_1(x_1)+f_2(x_2)+f_3(x_3)+\ .\ .\ .\ +f_n(x_n)=0\ \ .\ \ .\ (380)$$

Для того задане рівнання розбиваємо на ряд таких рівнань:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1)+f_2(x_2)&=\gamma_1 \\ f_3(x_3)+\gamma_1&=\gamma_2 \end{aligned}\right\} \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (380a)$$

Для кожного з цих рівнань (380*а*) будуємо на гексагональних осях скалі:

$$\left.\begin{aligned} x=f(x_1);\,y=f(x_2);\,z=\gamma_1 \\ x=\gamma_2;\,y=f(x_3);\,z=\gamma_1 \end{aligned}\right\} \ .\ .\ .\ .\ (380б)$$

Скалі (380*б*) наносимо на лініях, рівнобіжних з осями x-ів, y-ів та z-ів, як показано схематично на рис. 101, і таким способом одержуємо номограму заданого рівнання (380). Уживаючи цієї номограми, робимо так.

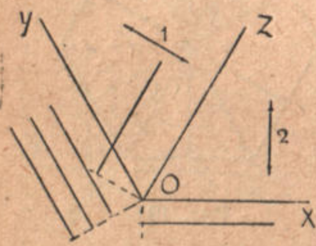


Рис. 101

Уставляємо транспарант таким способом, щоб його указники 1-й і 2-й пройшли відповідно через задані вартості x_1 та x_2 на відповідних скалях OX і OY. Далі посуваємо транспарант рівнобіжно з ним самим по нормалі до осі OZ, за стрілкою (1), доти, доки 2-й указник пройде через задану вартість змінної x_3 на відповідній скалі, рівнобіжній з OY. Після цього пересуваємо транспарант за стрілкою (2) нормально до OX, доки 2-й указник не пройде через точку, що відповідає заданій вартості x_4 на відповідній скалі, рівнобіжній з OY. Повторюючи таку операцію, ми після останнього пересування транспаранта дістанемо шукану величину змінної x_4 за допомогою 1-го указника на скалі, рівнобіжній з віссю OX, якщо n — парне, або за допомогою 3-го указника на скалі, рівнобіжній з віссю OZ, якщо n — непарне.

Застосування принципу загальної анаморфози, хоч і дає змогу спрощувати номограми для функцій з трьома змінними, зводячи їх до трьох систем перетинних простих ліній, але часом буває при користуванні практично дуже незручне.

Поперше, часто доводиться стежити за потрібними лініями на величезнім протязі, для чого треба великої уваги, бо помилка може дати невірні вартості шуканих змінних.

Подруге, не можна робити сітки ліній дуже густою: тоді надто затемнюється рисунок. Коли ж усунути цю другу незручність, тобто, коли сітка дуже рідка, виникає третя незручність: вартості змінних доводиться визначати на око, інтерполюючи, а це при визначенні змінних за перетином двох ліній неминуче дає лише наближену й неточну величину їх.

Правда, щоб уникнути останніх двох незручностей, можна вживати транспаранта, але, поперше, для цього треба мати його, що не завжди можливе й потребує зайвих видатків на виготовлення транспаранта, а подруге, треба вміти й призвичаїтися користуватися з нього.

Щоб усунути всі ці незручності, д'Окань 1884 року запропонував особливу відміну номограм, які мають назву номограм з вирівняних точок (правдивіше було б назвати їх: з точок, розташованих на одній лінії); користуючись із них, можна замість транспоранта брати звичайну лінійку, або навіть нитку чи шнур.

Теорія таких номограм заснована на відомім із геометрії принципі взаємности чи двоїстости, що з нього, до речі, широко користуються, застосовуючи графічну статику до будівної механіки, зокрема, наприклад, визначаючи ядро перетину чи положення невтральної або нулевої лінії в теорії нерівномірного розтягу й стиску.

Як знаємо, в геометрії звичайно за основний елемент беруть точку і розглядають лінію, як геометричне місце точок. Але з таким самим правом, як учить Плюкер, можна брати за основний елемент просту й розглядати точку, як центр перетину якоїсь в'язки простих. Тому всяке рівнання й всяку викладку в геометрії можна тлумачити двоїсто, розуміючи один раз під літерами звичайні Декартові координати, а другий раз— так звані, Плюкерівські координатні лінії. Це й є відомий у геометрії принцип двоїстости, на основі якого й установлені теореми Паскаля та Брійнтоша про взаємність фігур шестикутника, вписаних або описаних навколо конічного перетину. Приклад таких взаємних фігур у застосуванні графічної статики до будівної механіки є плян сил та відповідний йому верівчатий многокутник, або геометрична схема якогонебудь зв'язня, навантаженого якиминебудь силами, і відповідна, так звана, діяграма Кремони для визначення зусиль у стрижнях зв'язня.

У таких фігурах кожній точці (одній із них, що є центр перетину кількох ліній) відповідає на другім рисунку фігура, якої боки рівнобіжні з лініями, що перетинаються в даній точці на першій, і навпаки.

На цій властивості взаємности засноване відоме з аналітичної геометрії співвідношення між переміщенням у конічнім перетині полюса і відповідної йому поляри чи антиполяри, і навпаки

На підставі властивости взаємности або двоїстости, можна за правилами геометрії, мавши якусь фігуру, збудувати взаємну їй іншу фігуру; фігури ці не подібні одна до одної, але одночасно до кожної лінії одної є рівнобіжна з нею лінія на другій фігурі. Кожній простій на першій фігурі відповідає на другій точка — центр взаємного перетину кількох ліній другої фігури, при чім точки, що відповідають цим простим другої фігури, лежать на згаданій вище простій першої фігури, і навпаки, як це схематично показано на рис. 102, де літерою (*а*) позначена частина першої фігури, а літерою (*б*) — частина взаємної з нею другої фігури.

На цім рисунку 102 точці *A*, що є на фігурі (*а*), центр перетину простих I, II та III, на фігурі (*б*) відповідає проста *OO'*, а точкам a_1, a_2, і a_3 на фігурі (*б*), що лежать на простій *OO'*, відповідають на фігурі (*а*) прості I, II і III.

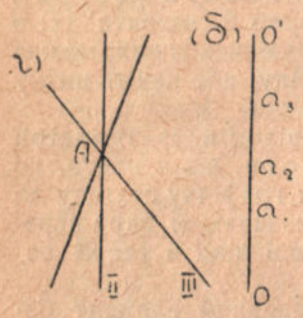


Рис.102

Інакше показану на фіг. 102 властивість можна формулювати так: коли проста I на фігурі (*а*) обертатиметься навколо точки *A*, то відповідна простій I точка a_1 на фігурі (*б*) рухатиметься по простій *OO'*, і, навпаки, якщо проста OO' на фігурі (*б*), обертатиметься відносно точки a_1, то точка *A* на фігурі (*а*) рухатиметься по простій I.

Цю властивість двоїстости або взаємности і поклав д'О к а н ь в основу запропонованої від нього будови номограм з вирівняних точок або номограм з точками, що лежать на одній простій.

Суть будови цих номограм така. Як ми вже знаємо, номограма для функції з трьома змінними в загальнім випадку має вигляд системи взаємно перетинних громад ліній, взагалі криволінійних, при чім три позначені лінії, що з них кожна належить до певної системи кривих і відповідних певних вартостей, відповідно перетинаються в певній точці. Тому за допомогою принципу двоїстости можна збудувати відповідні цій точці три лінії, що з них кожна відповідає певній громаді кривих на першій номограмі й має позначки ті самі, що й криві даної громади. На кожній такій відповідній скалі є точка, що відповідає певній кривій кожної громади, яка перетинається в даній точці першої номограми. За принципом двоїстости ці точки ділення лежать на одній простій (рис. 103).

Так, на рис. 103 (*а*) громаді кривих I з позначками від 1 до *n* на рис. 103 (*б*) відповідає скаля (у загальнім випадку криволінійна) 1 з позначками від 1 до *n*; громаді кривих II — скаля 2 і громаді кривих III — скаля 3 з відповідними позначками, Вартості змінних, що справджують задачу, визначаються на рис. 103 (*а*) позначками:

2 з громади I
2 з громади II
1 з громади III,

приписаними до кривих, що п е р е т и н а ю т ь с я в точці *А*.

На взаємній фігурі (*б*) точці *А* відповідає проста OO', що злучає точки $\mathrm{I}a_{-}$, $\mathrm{II}a_2$, та $\mathrm{III}a_1$, які відповідають показаним на рис. 103 (*а*) лініям.

Рис. 101

З цього рисунку ясно бачимо суть будови номограм із вирівняних точок і простоту користування з них.

Справді, мавши задані вартості для першої й другої змінної, знаходять відповідні позначені точки на 1 і 2 скалях і, злучаючи простою лінією ці точки, на перетині її з 3 скалею знаходять точку з позначкою, що відповідає третій шуканій змінній.

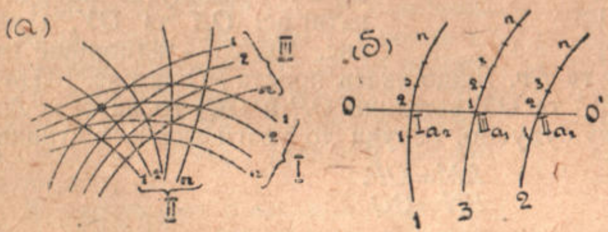


Рис. 103

Для прикладу на рис. 104 зображена номограма з вирівняних точок для відомої вже нам таблиці множення.

Вона складається з трьох рівнобіжних логаритмічних скаль, при чім поділки середньої вдвоє менші проти поділок крайніх.

Крайні скалі відповідають проекційним скалям, нанесеним на осях *OX* та *OY* на рис. 92, а середня — громаді кількох ліній на тім же таки рисунку. На рис. 92 результат множення, наприклад, 4 на 5, позначається точкою перетину трьох відповідних ліній із позначкою 4, 5 та 20; на рис. 104, щоб знайти результат множення 4 на 5, беремо відповідні точки 4 і 5 на крайніх скалях і проводимо через них просту, яка перетне середню скалю в точці з позначкою 20.

Щоб не рисувати простої, можна скористуватися транспарантом з простою лінією або просто лінійкою й навіть ниткою.

З цього прикладу ясно бачимо, що вживати номограм з вирівняних точок далеко простіше й легше, ніж номограм звичайного типу, навіть так чи так трансформованих, при чім робити інтерполяцію в номограмах з вирівняних точок теж легше й зв'язано з меншою помилкою.

Щоб на практиці скористуватися з усього сказаного та зуміти збудувати таку номограму, д'Окань запропонував застосовувати особливу систему координат, які він назвав **рівнобіжними**.

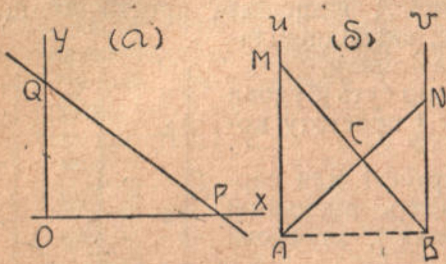


Рис. 105

Суть цих координат і користування ними для будови номограм з вирівняних точок не важко зрозуміти з рис. 105 (*а*) і (*б*).

Нехай на рис. 105 (*а*) ми маємо прямокутні координатні осі OX та OY, а на рис. 105 (*б*) — відповідні їм рівнобіжні осі Au та Bv. Якщо якась проста PQ на рис. 105 (*а*) відтинає на осях OX та OY відтинки OP й OQ, то на осях Au і Bv від їх початку будуємо, беручи до уваги знаки, відтинки

$$AM = OP,$$
$$BN = OQ$$

Таким способом для різних вартостей x і y ми одержимо на простих Au і Bv скалі цих вартостей, відповідних різним x і y.

Точка перетину C простих AN та BM на рис. 105 (*б*) відповідатиме простій PQ на рис. 105 (*а*). Геометричне місце точок C для різних простих PQ і дасть опору для скалі, яка відповідає різним вартостям третьої змінної, що їх вона зображає. Ця скаля може бути простолінійна й криволінійна, тобто може бути або з простолінійною або з криволінійною опорою.

Практика застосування номограм з вирівняних точок свідчить, що ці номограми можуть бути таких відмін:

1. Номограми з трьома рівнобіжними скалями, як це показано на рис. 104.

2. Номограми з двома рівнобіжними скалями і третьою, нахиленою до них.

3. Номограми з трьома нерівнобіжними скалями (радіянтного типу), що перетинаються в одній точці.

4. Номограми з двома рівнобіжними скалями і третьою криволінійною. Не зупиняючись більше на деталях будови цих різних типів номограм, зауважмо, що принцип номограм із вирівняних точок був дуже плодотворчий, бо дав змогу не тільки одержувати дуже прості номограми для цілого ряду

функцій, а й часто-густо давав можливість на підставі емпіричних даних визначати закони різних явищ і знаходить таким способом емпіричні формули для виразу їх. Як на приклад, зазначмо, що за допомогою номограми з вирівняних точок гірничий інж. Рато 1897 року знайшов емпіричну формулу для витрати пари в паровій машині залежно від граничних тисків, між якими вона працює. А 1906 року Зоро дав більш відповідну дійсності, ніж формула Реньйо, формулу для величини захованого тепла випару води[1]).

Розвиваючи застосування методів трансформації, інж. шляхів Н. М. Ґерсеванов запропонував номограми з рівновіддалених точок.

Не подаючи тут теорії цих номограм, скажім тільки, що в суті вони являють собою три скалі (рис. 106), градуйовані таким способом, що точки, відповідні вартостям двох змінних a_1 та a_3, рівно віддалені від точки a_2, яка відповідає вартості третьої змінної.

Такі номограми дуже зручні, щоб зображати функції не тільки з трьома, а й навіть з далеко більшим числом змінних.

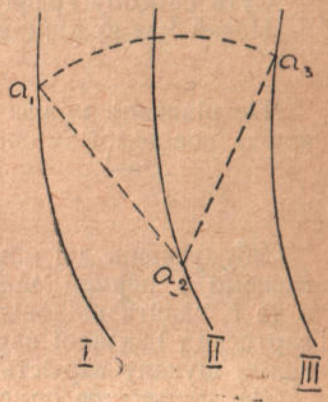


Рис. 106

Користуються з цих номограм так. Уставивши одну ніжку циркля в точці a_1 на скалі I, а другу в точці a_2 на скалі II (рис. 102), описують з точки a_2 дугу радіюсом a_1 a_2, зачеркаючи нею схему III. Позначка відповідної точки a_3 дає шукану вартість третьої змінної, що відповідає двом першим заданим. На практиці звичайно фактично дуги a_1 a_3, звісно, немає потреби рисувати, а тому інж. Ґерсеванов, назвавши скалю II, якої точки правлять за центр обертання, середньою, а скалі I і III—крайніми, запропонував точку a_1 звати першим крайнім уколом, точку a_2 - середнім уколом і точку a_3 - другим крайнім уколом.

Відсилаючи тих, хто цікавиться теорією таких номограм, до перводжерела [2]), ми на цім і закінчимо опис способів будови номограм для функцій з трьома змінними.

§ 54. Номограми для функцій з чотирма й більшим числом змінних. Усіх описаних вище типів номограм та способів будувати їх для зображення функцій з трьома змінними вживають і для функцій з більшим числом змінних. При цім, крім

[1]) Див. за вказівкою Н. М. Ґерсеванова: Annales des Mines, 1897. R. Soreau. „Applications des procédés nomographiques à la recherche des formules et des lois". 1906 р.

[2]) Див. у списку літератури Н. М. Ґерсеванов.

застосування принципу анаморфози, вирівняних та рівновіддалених точок, користуються ще з двох основних способів:

1. Графічного виключення змінних.

2. Застосування бінарного поля, тобто двох перетинних громад позначених ліній.

Не зупиняючись докладно на теорії таких номограм, з'ясуймо тут тільки основні поняття й суть способу будувати їх та користуватися з них.

Суть способу графічного виключення змінних така:

Нехай маємо рівняння з чотирма змінними:

$$F(a, b, c, d) = 0 \ldots \ldots \ldots \quad (381)$$

Це рівняння можна резглядати, як результат виключення якоїсь невідомої змінної з двох таких рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(a, b, \gamma) = 0 \\ f_2(c, d, \gamma) = 0 \end{array}\right\} \ldots \ldots \ldots \quad (382)$$

Збудувавши дві номограми для кожного з рівнянь (382), ми можемо з першої номограми, на підставі заданих вартостей a та b, знайти відповідну вартість γ, а далі, на підставі цієї вартости γ і заданої вартости змінної c, знайти з другої номограми шукану вартість змінної d.

За допомогою описаних способів будувати номограми для трьох змінних і трансформувати їх, ми можемо, будуючи нсмограми рівнань (382), зробити систему елементів, що виражають змінну γ, спільною для обох номограм. У цім випадку вартість змінної d можна знайти за заданими a, b і c безпосередньо, зовсім не позначаючи, не градуюючи системи ліній чи скалі для невідомої змінної γ, або, як кажуть, мати для неї німу систему чи скалю.

Такий спосіб уперше запропонував Массо, назвавши його графічним виключенням змінної γ. Цей спосіб є вихідна точка для будови номограм рівнань з яким завгодно числом змінних. Схематично такі злуки номограми з двох номограм, що мають спільну анаморфозу, зображені на рисунку 107, де система γ — німа.

Щоб скористуватися з такої номограми для знаходження d за заданими a, b і c, треба, знайшовши точку перетину лінії з позначками a та b у відповідній системі ліній, примітити лінію γ, що проходить через цю точку, і потім прочитати позначку лінії системи для змінної d, що проходить через точку перетину приміченої лінії γ з лінією, яка відповідає заданій вартості змінною c. З цього ясно цілком, що немає зовсім потреби знати вартість змінної γ, як допоміжного проміжного елементу, а тому дійсно відповідна їй система або скаля можуть бути німими.

Замість системи ліній, можна робити спільну скалю, утворену цією системою на якійсь лінії. Найчастіш для зручности німу систему складають з рівнобіжних ліній, і тоді німа скаля утворена на **нормальнім** напрямі, має, з пропозиції

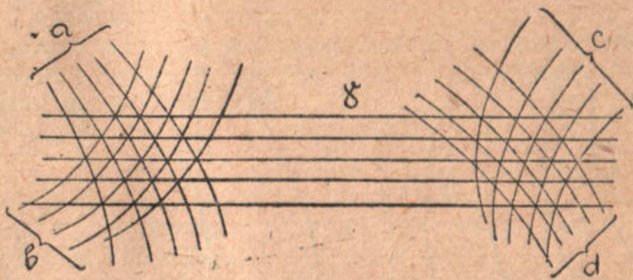


Рис. 107

Ляллемана, назву **бінарної скалі**, тобто подвійної, бо кожній точці її відповідають дві вартості двох різних змінних.

Такі бінарні скалі схематично показані на рис. 108, де подана схема номограм з вирівняних точок з трьома бінарними скалями для шестьох змінних.

Користуються з неї так. Знаходять A точку перетину ліній a_i та $в_i$, що **відповідають** заданим вартостям змінних a та $в$, і її проєкцію A' на I скалі. Аналогічно на II скалі знаходять точку B і її проєкцію B', що відповідає заданим вартостям c і d.

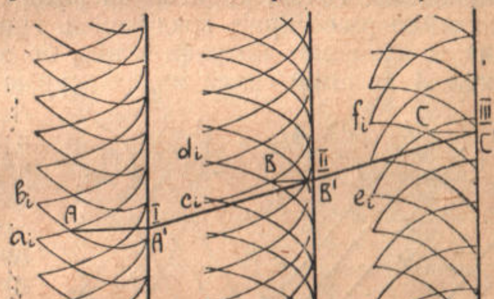


Рис. 108

Проводячи просту $A'B'$ знаходять на III скалі точку C'. Поставивши з неї нормалю до перетину її в точці C з лінією, позначеною заданою вартістю змінної e, читають позначку лінії f, що проходить через точку C. Це й є шукана вартість змінної f.

Можна також збудувати номограму з бінарними скалями гексагонального типу.

Дуже зручно для будування номограм із чотирма й більшим числом змінних користуватися зі способу вирівняних та рівновіддалених точок, особливо з останнього. На рисунку 109 (a) та ($б$) схематично зображені такі номограми для чотирьох змінних a, b, c та d з німими скалями. Спосіб користуватися з них легко зрозуміти, розглядаючи рисунок 109.

Тим що при переносі ліній з I положення в II на рис. 109 (a) легко загубити точку на німій скалі, то, вживаючи способу

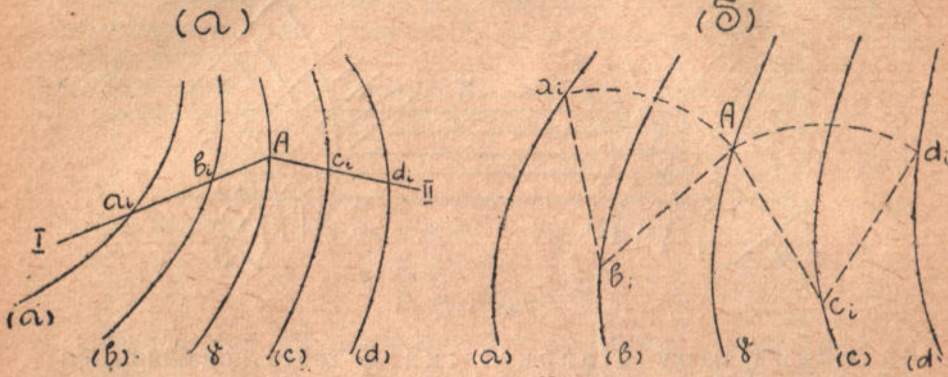


Рис. 109

вирівняних точок, корисно на німій скалі мати якесь умовне, звичайно рівномірне, градування. При способі ж рівновіддалених точок немає потреби в цім, бо зробивши другий крайній укол A на німій скалі, ми, не зсуваючи ніжки циркля з точки A переносимо другу ніжку в точку Cі нз скалі С зачеркаємо з неї, як з центру скалю d.

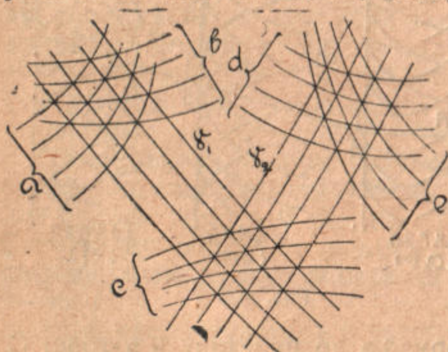


Рис. 110

За допомогою зазначених двох способів можна збудувати номограму для функції з яким завгодно числом змінних. Взагалі ж, щоб зобразити рівняння з яким завгодно числом змінних, подають його, як результат виключення довільних змінних із ряду рівнань вигляду (382), і будують для них системи злучених номонограм. Для прикладу, на рис. 110 дана схема номограми для рівнань с п'ятьма змінними a, c, d та e і двома німими скалями γ_1 та γ_2.

Взагалі, при n змінних доводиться будувати $2n-3$ скалі, з яких n градуйованих, $n-3$ німих.

Треба, проте, зауважити, що не всяке рівняння з багатьма змінними можна зобразити номограмою за способом графічного виключення довільних змінних, і тоді доводиться застосовувати інші способи будування, описані в докладних курсах номографічного числення. Тут на них ми не зупинятимемося.

Щоб закінчити про номограми для функцій з великим числом змінних, дамо ще поняття про номограми з **бінарним полем**, тобто номограми, де кожній точці на площі номограми відповідають дві позначки, бо в кожній точці перетинаються дві позначені лінії.

Залежно від цього координати якої завгодно точки такої номограми з бінарним полем або з подвійними позначками можна виразити рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} F &= f_1\ (a,b) \\ y &= f_2\ (a,b\ ) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 383$$

де a та b незалежні одна від одної змінні.

Через те, очевидячки, бінарне поле являє собою сітку, утворену двома системами позначених ліній.

Виключаючи з рівнянь (383) змінні a та b, ми одержимо рівнання цих систем позначених ліній під виглядом:

$$\left.\begin{aligned} F_1\ (x, y, a) &= 0 \\ F_2\ (x, y, b) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots$$

Підпорядковуючи точки бінарного поля якійсь геометричній залежності одним із зазначених вище способів, уживаних для будови номограм з трьома й більшим числом невідомих, ми й одержимо номограму з бінарним полем. Наприклад, застосувавши принцип вирівняних точок або точок рівновіддалених, ми одержимо відповідно номограми з вирівняних чи рівновіддалених точок з бінарним полем.

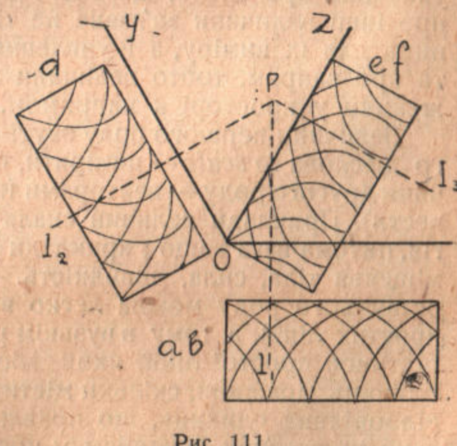


Рис. 111

На рисунку 111 схематично зображена гексагональна номограма з бінарним полем; спосіб користуватися з неї ясно бачимо, розглядаючи рисунок 111.

Закінчуючи цим загальне ознайомлення читачів з суттю й основами номографічного числення, зауважмо, що останніми роками воно, розвиваючись неймовірно хутко, охоплює найрізноманітніші галузі техніки, вельми прислуговуючись їм при розв'язані цілого ряду задач і питань, що їх досі вважали за нерозв'язані. Особливо плодотворче було застосування номографії до такого болючого питання, як інтеґрування вельми складних рівнань, що трапляються в технічній практиці; їх зовсім не ожна було розв'язати за допомогою звичайних аналітичних методів інтеґрального числення. Великий вклад зробив тут бельгійський проф. Массо, що перший став уживати номографії для графічного інтеґрування деякого вигляду диференціяльних рівнань. Дуже цінні також у цій царині й роботи російського інж. шляхів Н. М. Ґерсеванова, що дав методи розв'язання деяких надзвичайно важливих рівнань, які відограють суттєву ролю в інженерстві, зокрема в теорії сипких тіл, теорії пружности та гидродинаміці. Він же, до речі, запропонував прилад для механічного інтеґрування лінійних диференціяльних рівнань за принципом номографічного числення На жаль, однак, давши принцип і схему будови цього приладу, він не опрацював детальної його конструкції.

Розділ X. Основи векторіяльного числення

§ 55. Основні поняття. У фізично - математичних науках і в застосуванні їх у техниці доводиться мати діло з величинами двох категорій: одні з них можна цілком визначити одним тільки числом, тобто з поняттям про такі величини, зв'язане лише уявлення про число, що визначає їхні розміри ; з поняттям же про інші величини зв'язане не тільки уявлення про число одиниць для їх виміру, а й уявлення про положення їх у просторі та про напрям, тобто величини ці визначаються числом, положенням у просторі й напрямом.

Величини першого роду звуть скалярами (від англійського дієслова *to scale* — виміряти, оцінювати, зважувати), а величини другого роду — векторами (від латинського слова vehere — вести). Приклади величин скалярних: час, температура, енерґія, питома вага тощо ; приклади величин векторіяльних : переміщення тіла, сила, швидкість. Зрозуміло, що всі величини останнього роду можна легко виразити графічно відтинками простих ліній, а тому в вузькім розумінні слова вектором звуть відтинок простої лінії, який містить у собі стільки лінійних одиниць довжини, скільки міститься в даній фізичній величині відповідних одиниць, що правлять для її виміру і мають таке саме положення й напрям у просторі, як і дана величина.

Вектор у цім саме розумінні, як символічне позначення векторіяльної величини, і є отой основний елемент, що з ним оперують у векторіяльній аналізі або у векторіяльнім численні, яке з природи своєї має суто геометричний характер. Широке застосуваня в нім графічних способів розв'язувати різні питання надає його висновкам геометричного характеру і разом з тим великої наочности, а тому векторіяльна аналіза останнім часом дедалі більше поширюється в геометрії, механіці, та фізиці і в їх застосуванні в техніці.

Початок векторіяльного числення зробив Фердінанд Мебіюс, а гармонійну теорію його дали Ґрасман і Гамілтон. Обидва вони розвинули її майже одночасно, 1844 року, незалежно один від одного, прийшовши різними способами до опрацювання методу вживання векторів, як відтинків ліній для потреб прикладної математики. Дальшому опрацюванню теорії й застосуванню векторіяльного числення в царині механіки та теоретичної фізики багато прислужилися англійські й німецькі вчені.

Отже, графічно вектор зображають прямолінійним відтинком (рис. 112) певної довжини й напряму, проведеним з певної точки. Один кінець відтинка, що зливається з цією точкою, звуть початком вектора, а другий — кінцем вектора. На рисунку напрям вектора зазначають стрілкою, поставленою на кінці його (рис. 112). У формулах, щоб відрізнити вектор від альґебричних, скалярних величин, його позначають або прямим і грубим шрифтом (в англійських творах), або ґотичними літерами (в німецьких), або звичайною літерою, але з рискою над нею, напр., $\bar{a}$ (у французьких творах). Іноді також вектор позначають двома літерами з рискою над ними, напр., $\overline{OA}$, при чім порядок літер зазначає й напрям вектора. При двох останніх позначеннях літера сама з себе або символ OA виражають абсолютну числову величену довжини вектора; число, що виражає величину вектора, звуть його тензором або модулем, а лінійну одиницю для виміру векторів звуть ортом або одиничним вектором і позначають літерою з указником O внизу.


Рис. 112

Умовившись вважати вектори одного напряму за додатні, ми повинні вектори зворотного напряму вважати за від'ємні.

Якщо два вектори не тільки рівні величиною й є відтинки рівнобіжних простих, а й мають однаковий напрям, то їх звуть геометрично рівними, при чім для виразу цього поняття між символічними позначеннями таких векторів ставлять знак рівности.

З того, що всякий вектор, як сказано, ніби складається з двох частин: числової його величини або тензора, чи, инакше, модуля, і напряму, характеризованого напрямом відтинка, що зображає даний вектор, не важко зробити висновок, що рівність між двома векторами є геометричний вираз двох аритметичних рівностей, а саме, рівности тензорів або модулів і однаковости напряму.

Коли, отже, два рівні величиною й рівнобіжні вектори напрямлені в різні боки, то вони не рівні один з одним, і для того, щоб злучити їх знаком рівности, ми повинні взяти один з них з противним знаком. Наприклад, на рис. 113 дано три вектори, при чім

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{AB} = -\overline{FE}\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (385)$$

Якщо вектори v_1 та v_2 не рівнобіжні, то кажуть, що вони **під кутом** один відносно одного, при чім кутом між ними або їх напрямами звуть кут $aCb = \alpha$ між напрямами геометрично рівних з ними векторів, проведених через довільну точку C (рис. 114).

Рис. 113

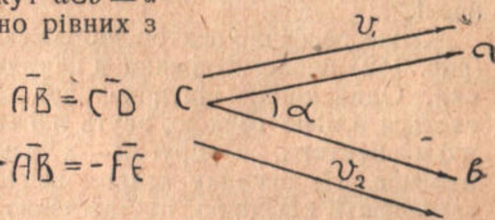


Рис. 114

Усякий вектор можна спроєктувати на яку завгодно вісь або площу. **Проєкцією** вектора $\overline{AB}$ на вісь OX звуть вектор $\overline{ab}$, що злучає проєкції початку й кінця вектора на ту ж таки вісь. Проєкції вектора приписують напрям, при чім за початок його беруть проєкцію початку вектора, а за кінець — **проєкцію** його кінця (рис. 115).

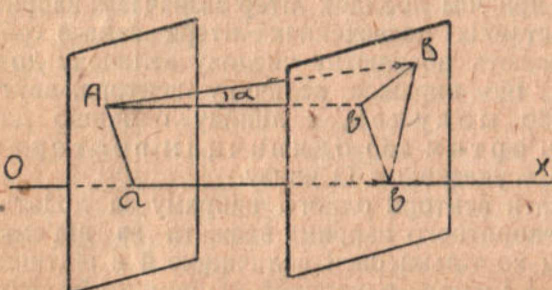


Рис. 115

Якщо **напрям** проєкції зливається з напрямом осі OX, то проєкцію вважають за **додатню**, в противним разі — за **від'ємну**.

Як бачимо з рис. 115,

$$ab = Ab' = AB \cos\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (386)$$

тобто **проєкція вектора на вісь величиною й знаком дорівнює добуткові довжини вектора на cos кута між напрямами вектора й осі.**

Проекцією вектора $\overline{AB}$ на площу (рис. 116) звуть вектор $\overline{ab}$, що йде від точки a, проекції початку вектора, до точки b, проекції кінця вектора.

З рис. 116 бачимо, що

$$ab = Ab' = AB \cos \alpha \quad . . . . (387)$$

тобто проекція вектора на площу дорівнює векторові, помноженому на cos кута між вектором і проекцією його.

У векторіяльній аналізі розрізняють три роди векторів:

1) вільні вектори,
2) пересувні вектори,
3) визначені вектори.

Вільним звуть вектор, заданий тільки величиною й напрямом, тобто такий, який можна провести з першої-ліпшої точки простору, або, інакше сказавши, який може переміщатися в просторі рівнобіжно з самим собою.

Пересувним звуть вектор, заданий величиною й напрямом, початкова точка якого хоч і довільна, але неодмінно повинна бути десь на простій, що зливається з його напрямом.

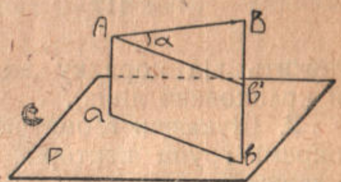


Рис. 116

Нарешті, визначеним звуть вектор, заданий величиною й напрямом і проведений з певної заданої точки, тобто вектор, що має цілком визначене положення в просторі.

У техніці трапляються вектори всіх трьох родів. За приклад вектора визначеного може бути сила, прикладена до заданої точки тіла, що деформується; за приклад вектора пересувного — сила, прикладена до ідеально твердого тіла, і, нарешті, за приклад вільного вектора — швидкість поступного руху твердого тіла.

З векторами, як математичними величинами, можна робити різні математичні дії; основні відомості про них подаємо далі.

§ 56. Додавання, розкладання та віднімання векторів. Щоб знайти суму даних векторів, треба з довільної точки провести ламану лінію, простолінійні частини якої є вектори, рівні з даними; вектор, що лучить початок і кінець ламаної лінії, є шукана сума. У геометричнім розумінні відшукати суму векторів є те саме, що збудувати й знайти n-й бік n-кутника за n-1 заданими боками його.

Будуючи зазначену ламану лінію з векторів, що дорівнюють даним, дуже важливо пільнувати, щоб початок кожного з них зливався з кінцем попереднього, тобто, інакше сказавши, щоб стрілки всіх векторів, що показують їхній напрям, розташовані були, як то кажуть, з а ш е р с т ю. Початок і кінець вектора, який виражає суму заданих, зливаються з відповідними точками ламаної лінії.

На рис. 117 показано, як знаходити суму трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ та $\bar{c}$. Зазначену будову звичайно позначають формулою $\bar{r} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$. Слід зауважити, що альґебрична сума є окремий випадок геометричної суми векторів рівнобіжного один з одним напряму.

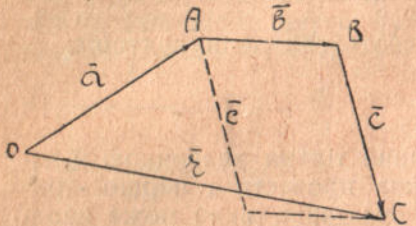


Рис. 117

За приклад додавання векторів може бути додавання сил у графічній статиці для знаходження їхньої рівнодійної.

Властивості геометричної суми такі:

1. Геометрична сума не залежить від порядку додаваних векторів (рис. 117, суцільна й крапкована лінія).

2. Шукаючи геометричну суму, можна спершу сумувати окремі групи векторів, а тоді взяти геометричну суму всіх одержаних таким способом векторів.

3. Якщо кожний доданок помножити на якесь число (скаляр), то й сума їх буде помножена на те саме число.

4. Проєкція геометричної суми на яку завгодно вісь дорівнює альґебричній сумі проєкції додаваних векторів.

5. Величину геометричної суми векторів можна обчислити за величиною доданків на підставі формули:

$$r^2 = \Sigma V^2_i + \Sigma 2 v_i V_k \cos (V_i V_k), \quad . \; . \; . \; . \; (388)$$

тобто квадрат замичного боку дорівнює сумі квадратів замкнених боків, складеній з усякими можливими подвоєними добутками цих боків, помноженими на cos кутів між їхніми напрямами.

Рекомендується для вправи довести зазначені вище властивості геометричної суми.

Дію, зворотну додаванню, звуть р о з к л а д а н н я м векторів.

Бажаючи виконати цю дію, треба пам'ятати що в е к т о р н а п л о щ і цілком п е в н о м о ж н а р о з к л а с т и т і л ь к и н а д в а, а в п р о с т о р і — т і л ь к и н а т р и в е к т о р и.

У геометричнім розумінні це є те саме, що:

1) На площині — збудувати трикутники за даною основою й напрямом двох інших боків.

2) У просторі — збудувати рівнобіжностінник за даною діягоналею і напрямом рубів.

Той окремий випадок розкладання вектора на два, де один задано величиною й напрямом, приводить нас до поняття про геометричне віднімання. Справді, якщо дано вектор $\bar{r}$ (рис. 118) і треба розкласти його на два, один з яких, а саме $\bar{a}$, відомий величиною й напрямом, то, прибудовуючи вектор $\bar{a}$ до вектора $\bar{r}$ так, щоб кінці їх сходилися в одній точці, ми знайдемо й другий вектор величиною й напрямом, знаючи, що $\bar{r}=\bar{a}+\bar{b}$.

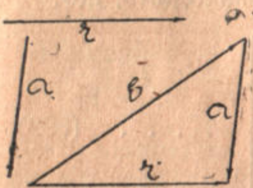


Рис. 118.

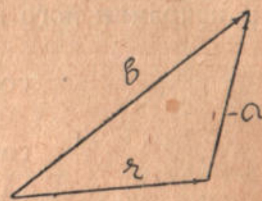


Рис. 119

Тут ми, мавши суму $\bar{r}$ і один доданок $\bar{a}$, знаходимо другий доданок; отже, згідно з аритметичним означенням віднімання, цю геометричну будову звуть геометричним відніманням і позначають формулою:

$$\bar{b}=\bar{r}-\bar{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (389)$$

Застосовуючи поняття про альґебричну суму до векторів, не важко звести знаходження ріжниці двох векторів на знаходження суми двох векторів, з яких один за знаком від'ємний, (рис. 119), тобто шукати $\bar{b}$, як геометричну суму зменшеника-вектора $\bar{r}$ і „від'ємника"-вектора $\bar{a}$, взятого з противним знаком, тобто

$$\bar{b}=\bar{r}+(-\bar{a}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (390)$$

Запровадивши поняття про розкладання векторів, розкладаючи в просторі який завгодно вектор на три взаємно нормальні напрями й, беручи на увагу, що це рівноважить із знаходженням його проєкцій на три прямокутні координатні осі, можна всякий вектор вважати за геометричну суму трьох його проєкцій на три взаємно нормальні осі.

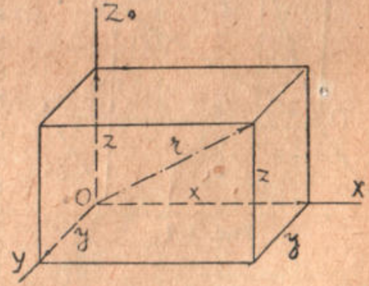


Рис. 120

Позначаючи даний вектор через $\bar{r}$, а його три проєкції або ті три вектори, на які він розкладений, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ (рис. 120), на підставі суто геометричних міркувань, бачимо що $\bar{r}=\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$

і, крім того, знаходимо таку залежність між величинами даного вектора і його трьох проекцій:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (391)$$

Позначаючи ж через α, β та γ кути, що їх творить вектор r з напрямом його проекцій на осі x, y, z, знаходимо, що:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\beta &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (392)$$

Формули (391) та (392) дають можливість наочно знайти величину й напрям вектора r за його проекціями на три прямокутні координатні осі.

При цім з рівности (391) бачимо, що вектор дорівнює нулеві тоді, коли всі три його проекції нарізно дорівнюють нулеві; з рівности ж (392) випливає, що cos кутів, які творить вектор r з трьома взаємно нормальними осями, не можна задати довільно,— вони зв'язані одні з одними рівнаннями:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (393)$$

Зазначений випадок розкладання вектора на три взаємно нормальні напрями дуже поширений у механіці.

Рис. 121

Якщо один із векторів x, y або z дорівнює нулеві, то треба розкласти вектор на площі на два взаємно нормальні напрями, при чім усі три зазначені формули (391), (392), (393) зберігають силу, з заміною, звісно, в них відповідної величини нулем.

На підставі поняття про геометричне віднімання не трудно показати, що можна виразити через проекцію не тільки вектор, який проходить через початок координат, а й усякий інший, довільно напрямлений. Справді, мавши вектор r, що не проходить через початок координат (рис. 121), і провівши з нього вектора $\overline{OA}$ та $\overline{OB}$, не важко помітити, що

$$r = \overline{OB} - \overline{OA},$$

а як:

$$\left.\begin{aligned}\overline{OB}&=\overline{x}_2+\overline{y}_2+\overline{z}_2\\ \overline{OA}&=\overline{x}_1+\overline{y}_1+\overline{z}_1\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (394)$$

то, значить:

$$\overline{r}=(\overline{x}_2-\overline{x}_1)+(\overline{y}_2-\overline{y}_1)+(\overline{z}_2-\overline{z}_1) \quad \ldots \quad (395)$$

Тим що

$$\overline{x}_2 \text{ і } \overline{x}_1, \ \overline{y}_2 \text{ і } \overline{y}_1, \ \overline{z}_2 \text{ і } \overline{z}_1$$

лежать відповідно на одній простій, то кожна геометрична ріжниця, що стоїть у дужках (395) рівности, дорівнює векторові, рівному величиною з альґебричною ріжницею величин відповідних проєкцій, і є проєкція даного вектора r на осі OX, OY та OZ.

Таким способом ми знаходимо, що:

$$\overline{r}=(\overline{x_2-x_1})+(\overline{y_2-y_1})+(\overline{z_2-z_1}), \quad \ldots\ldots \quad (396)$$

а як вектори $(\overline{x_2-x_1})$ і т. д. взаємно нормальні, то за формулою (391):

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad \ldots \quad (397)$$

Так само заховує своє значення для розгляданого випадку й формула (392).

Формула (397) є одночасно векторіяльний вираз виводженої в аналітичний геометрії віддалі між точками A і B залежно від їхніх координат.

Зображення вектора у вигляді геометричної суми його проєкцій лежить в основі згаданого вже вище (див. від. III, розд. VIII, § 46) способу графічного розв'язання рівнань, який ми зараз і опишемо.

Нехай нам треба розв'язати два рівнання з двома невідомими:

$$\left.\begin{aligned}a_1x+b_1y&=c_1\\ a_2x+b_2y&=c_2\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (398)$$

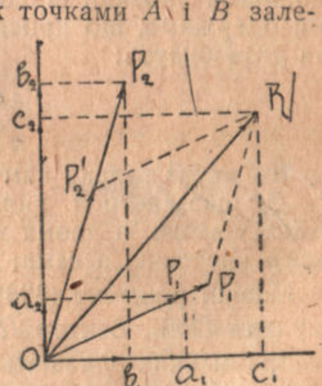


Рис. 122

Припустім, що a_1 і a_2 є проєкції на координатні осі якогось вектора P_1; b_1 і b_2 — проєкції вектора P_2; c_1 і c_2 — проєкції вектора R (рис. 122).

Інакше сказавши, припустім, що в нас є такі векторіяльні рівності:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \bar{P}_1 = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 \\ 2)\ \bar{P}_2 = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 \\ 3)\ \bar{R} = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (399)$$

Помножмо першу рівність (399) на x, а другу на y. Від цього, очевидячки, рівність перша й друга з числа (399) не порушуються, але замість векторів $\bar{P}_1$ і $\bar{P}_2$ ми на рис. 122 матимемо вектори:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{P}_1' = x\bar{P}_1 \\ \bar{P}_2' = y\bar{P}_2 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (400)$$

Виберім x та y так, щоб вектори P_1' і P_2' були складовими для вектора $\bar{R}$, тобто, щоб:

$$\bar{R} = \bar{P}_1' + \bar{P}_2' \ldots\ldots\ldots \quad (401)$$

Тоді, як це очевидно з рівности (400) і рис. 12.

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{OP_1'}{OP_1} \\ y = \dfrac{OP_2'}{OP_2} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (402)$$

А на підставі того, що сума проєкцій складових векторів дорівнює проєкції їхньої геометричної суми, з рівности (401) ми одержимо, що проєкції зображеної нею суми на осі x-ів та y-ів будуть:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (398)$$

тобто якраз задане нам рівнання.

Зі сказаного й випливає спосіб графічного розв'язання двох рівнань з двома невідомими за допомогою векторіяльного числення, а саме:

Мавши рівнання (398), будуємо вектори $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ та $\bar{R}$ за формулами (399). Вектор $\bar{R}$ розкладаємо на два вектори: $\bar{P}_1'$ і $\bar{P}_2'$, напрями яких зливаються з векторами $\bar{P}_1$, та $\bar{P}_2$. Тоді шукані вартості x і y знайдемо за формулами (402).

Для прикладу на рис. 123 розв'язано систему рівнань:

$$\begin{array}{r} 9x + 6y = 7 \\ x + 7y = 4. \end{array}$$

На цім рис. 123:

$$OA = 9\ ;\ AP_1 = 1$$
$$BP_2 = 6\ ;\ OB = 7$$
$$OC = 7\ ;\ CR = 4.$$

Через те

$$OP_1 = 9{,}05\ ;\ OP_1' = 3{,}98$$
$$OP_2 = 9{,}22\ ;\ OP_2' = 4{,}70,$$

а тому:

$$x = \frac{OP_1'}{OP_1} = 0{,}44,$$
$$y = \frac{OP_2'}{OP_2} = 0{,}51.$$

Описаного способу застосовувати векторіяльне розв'язання системи рівнань можна вжити й для знаходження кореня трьох лінійних рівнань з трьома невідомими. Треба, проте, сказати, що в данім випадку доводиться оперувати в просторі, а через те виконання потрібних будов дуже ускладняється й особливих вигод дати не може.

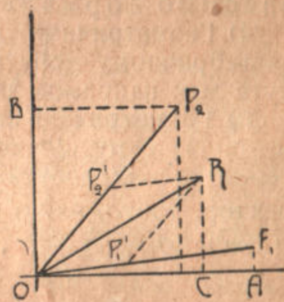


Рис. 123

§ 57. Множення векторів. При множенні векторів розрізняють два роди їхніх добутків:

А. Добуток геометричний або скалярний — внутрішній добуток.

В. Добуток векторіяльний — зовнішній добуток.

А. Геометричний добуток векторів $\bar{v}$ і $\bar{w}$ позначають символом $\bar{v} \cdot \bar{w}$; він дорівнює величиною добуткові їхніх тензорів, тобто абсолютних величин, на cos кута між напрямами даних векторів, тобто:

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = vw \cos (v, w) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (403)$$

Тим що $v \cos (v, w)$ є проекція вектора $\bar{v}$ на напрям вектора $\bar{w}$ і, навпаки, $w \cos (v, w)$ є проекция вектора $\bar{w}$ на напрям вектора v, то можна сказати, що скалярний або внутрішній добуток двох векторів дорівнює добуткові величини одного з векторів на проекцію на напрям другого (рис. 124). Не важко помітити, що скалярний добуток двох векторів є векторіяльний вираз величини робо-

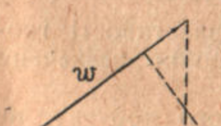


Рис. 124

ти сили, поняття про яку — одне з найважливіших у прикладній механіці.

Властивості внутрішнього чи скалярного геометричного добутку такі:

1) Величина добутку не залежить від порядку перемножуваних векторів, тобто $\overline{v} \cdot \overline{w} = \overline{w} \cdot \overline{v}$.

2) При множенні одного з чинників на скаляр, множиться на той же скаляр і їхній геометричний добуток, тобто

$$m\overline{v} \cdot \overline{w} = mvw \cos(v, w) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (404)$$

3) Геометричний добуток дорівнює нулеві не тільки тоді, коли один із векторів дорівнює нулеві, а й тоді, коли перемножувані вектори взаємно нормальні, бо в цім випадку $\cos(v, w) = 0$.

На підставі сказаного робимо висновок: якщо дорівнює нулеві скалярний добуток двох векторів, що з них жоден не дорівнює нулеві, то такі вектори взаємно нормальні.

4) Геометричний добуток рівнобіжних векторів дорівнює альгебричному добуткові їхніх тензорів, бо в цім випадку cos кута між напрямом векторів дорівнює 1.

5) Геометричний добуток вектора на інший вектор — геометричну суму кількох векторів — дорівнює альгебричній сумі геометричних добутків даного вектора на кожний додаваний вектор, тобто, якщо $\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \ldots + \overline{v}_n$, то:

$$\overline{v} \cdot \overline{w} = (\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \ldots + \overline{v}_n) \cdot \overline{w} = \overline{v}_1 \cdot \overline{w} + \overline{v}_2 \cdot \overline{w} + \ldots + \overline{v}_n \cdot \overline{w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (405)$$

Коли в цій останній формулі $\overline{w} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \ldots + \overline{w}_n$, то, розкладаючи, на підставі сказаного, кожний член правої сторони рівности (405) на суму, наприклад, $\overline{v}_1 \cdot \overline{w} = \overline{v}_1 \cdot \overline{w}_1 + \overline{v}_1 \cdot \overline{w}_2 + \overline{v}_1 \cdot \overline{w}_n$ і т. д., прийдемо до висновку, що скалярний добуток двох геометричних сум дорівнює альгебричній сумі всяких можливих геометричних добутків додаваних векторів, узятих по два, тобто, що геометричний добуток геометричних сум підлягає відомому правилу множення альгебричних многочленів.

Так, коли $\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2$ і $\overline{w} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2$, то

$$\overline{v} \cdot \overline{w} = \overline{v}_1 \cdot \overline{w}_1 + \overline{v}_1 \cdot \overline{w}_2 + \overline{v}_2 \cdot \overline{w}_1 + \overline{v}_2 \cdot \overline{w}_2 \quad . \quad . \quad . \quad (406)$$

Доказ цієї властивости ґрунтується на 4 властивості геометричної суми. Рекомендується довести щойно зазначену властивість скалярних добутків.

Користуючись з 5 властивости геометричного добутку, не важко знайти вираз внутрішнього добутку двох векторів через їхні проекції на три взаємно нормальні осі.

Справді, мавши вектори $\overline{R}$ та $\overline{r}$ і знавши, що:

$$\overline{R} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z} \text{ і } \overline{r} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{Z}.$$

за формулою (405) знайдемо:

$$\overline{R} \,.\, \overline{r} = (\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}) \,.\, (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z}) = \overline{X} \,.\, \overline{x} + \overline{Y} \,.\, \overline{y} + Z \,.\, Z.$$

Інші шість добутків у правій стороні рівности дорівнюють кожній нарізно нулеві, бо вони є скалярні добутки взаємно нормальних векторів.

Вважаючи на те, що однойменні проєкції даних векторів парами рівнобіжні, ми, на підставі 3 властивости скалярного добутку, знайдемо, що

$$\overline{R} \,.\, \overline{r} = X \,.\, x + Y \,.\, y + Z \,.\, z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (407)$$

тобто, геометричний добуток двох векторів дорівнює альґебричній сумі добутків відповідних їх проєкцій на три взаємно нормальні осі.

На підставі формули (403) та (407) рівности, одержимо:

$$\cos\,(R,\, r) = \frac{\overline{R} \,.\, \overline{r}}{R \,.\, r} = \frac{X \,.\, x + Y \,.\, y + Z \,.\, z}{R \,.\, r},$$

а звідси, на підставі формули (392), позначаючи через α, β й γ та α_1, β_1 і γ_1 відповідні кути, утворені векторами $\overline{R}$ і $\overline{r}$ з осями координат, одержимо:

$$\cos\,(R,\, r) = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 \quad . \; . \quad (408)$$

Формула ця дає можливість знайти кут між двома векторами за допомогою кутів, творених кожним з них з координатними осями.

Покажім іще на однім прикладі, як, користуючись з поняття про геометричний або скалярний добуток векторів і властивості його, довести теорему про те, що всі три висоти якого завгодно трикутника перетинаються в одній точці.

Нехай точка H є перетин проведених у трикутнику ABC висот з вершків A та B, зображених векторами $\overline{h}_a = AH$ і $\overline{h}_b = BH$, як це показано на рис. 125, а віддаль її від C, тобто CH, — вектором $\overline{m}$.

На підставі 3 властивости геометричного добутку векторів, ми можемо написати:

$$\left.\begin{aligned} \overline{h}_a \,.\, \overline{a} = 0 \\ \overline{h} \,.\, \overline{b} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (409)$$

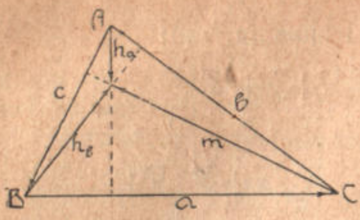


Рис. 125

А з рис. 125, при зазначенім на нім напрямі векторів, можемо написати рівності:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{a}=\overline{h_b}-\overline{m}\\ \overline{b}=\overline{m}-\overline{h_a}\end{array}\right\}\ldots \quad (410)$$

Підставляючи їх в (409), після додавання їх дістанемо:

$$\overline{h_a}\,.\,(\overline{h_b}-\overline{m})+\overline{h_b}\,.\,(\overline{m}-\overline{h_a})=0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (411)$$

Зносячи ж дужки, одержимо:

$$\overline{h_a}\,.\,\overline{h_b}-\overline{h_a}\,.\,\overline{m}+\overline{h_b}\,.\,\overline{m}-\overline{h_b}\,.\,\overline{h_a}=0$$

або:

$$\overline{m}\,.\,(\overline{h_b}-\overline{h_a})=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (412)$$

А тим що з рис. 122 видно, що:

$$\overline{h_b}-\overline{h_a}=\overline{c},$$

то, значить, рівність (412) набере вигляду:

$$\overline{m}\,.\,\overline{c}=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (412a)$$

А це значить, що вектори $\overline{m}$ і $\overline{c}$ взаємно нормальні, тобто вектор $\overline{m}$ зображає висоту $\overline{h_c}$; отже, теорема буде доведена.

B. Векторіяльний добуток векторів $\overline{v}$ і $\overline{w}$ позначається символом $\overline{v}\times\overline{w}$ і дорівнює добуткові тензорів обох векторів на sin кута між напрямами цих векторів, тобто

$$\overline{v}\times\overline{w}=vw\sin(v,w)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (413)$$

Не важко помітити, що права сторона (413) рівности виражає собою площу рівнобіжника, збудованого на даних векторах. Тим що всяка площа характеризується не тільки величиною, яка її виміряє, а й положенням і напрямом у просторі, то всяка площа є, отже, величина векторіяльна, тобто її можна зобразити якимсь вектором, а тому зазначений вище добуток $v\times w$ є величина векторіяльна, тобто її можна виразити вектором.

У векторіяльній аналізі заведено зображати площу вектором, що містить стільки лінійних одиниць, скільки квадратових одиниць містить площа, при чім вектор розташований нормально до площі. Напрям цього вектора визначаємо так. Коли, йшовши в напрямі стрілок векторів, шо обмежують дану площу, ми повсякчас матимемо її праворуч від себе, або, що те саме, рухатимемося в напрямі стрілки годинника, то вектор, який виражає дану площу, повинен бути напрямлений у той бік від площі, з якого здаватиметься, що дійсно цей наш рух відбувається за стрілкою годинника. Наприклад, нехай ми маємо якусь позему площу P (рис. 126) і два рівнобіжники на ній, збудовані на векторах, при чім рівнобіжник № 1 збудований так, що спершу відкладено вектор $\overline{v}$, а потім вектор $\overline{w}$, при будові ж рівнобіжника № 2 робимо навпаки, тобто спершу відкладаємо вектор $\overline{w}$, а тоді $\overline{v}$. Коли ми йтимемо по контуру кожного рівнобіжника порядком його боків, то здаватиметься, що наш рух відбувається в напрямі руху стрілки годинника для № 1 згори площі P, а для № 2 — знизу її. Тому, на підставі нашої умови, площу рівнобіжника № 1 ми мусимо зобразити вектором $\overline{p}$, напрямленим угору від площі, а рівнобіжник № 2 — вектором, напрямленим униз. Вважаючи перший напрям за додатній, ми повинні сказати, що перший вектор дорівнює $+\overline{p}$, а другий $-\overline{p}$.

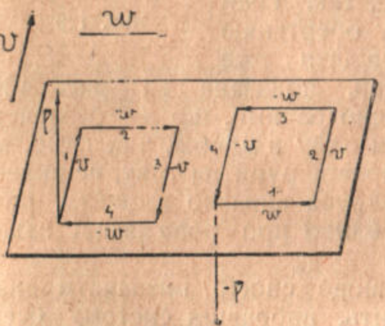


Рис. 126

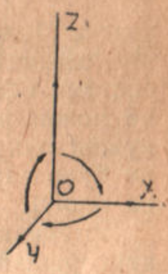


Рис. 127

Узята умова щодо знаку векторіяльного добутку, зобов'язує нас певним способом розташувати координатні осі в просторі, а саме так, як показано на рис. 127. При такім розташуванні осей ми, стоячи в напрямі осі OZ, бачитимемо, що перехід від додатнього напряму осі OX до додатнього напряму осі OY відбувається від лівої руки до правої, тобто за стрілкою годинника; інакше сказавши, якщо вважати, як це й заведено в механіці, вісь OZ за вісь обертання, вісь OX — за напрям найкоротшої віддалі від цієї осі обертової точки, а вісь OY — за напрям лінійної швидкости цього обертання, то при обертанні за стрілкою годинника, або від лівої руки до правої, навколо осі OZ ми переходитимемо від осі OX до осі OY, при обертанні від лівої руки до правої навколо осі OX переходитимемо від осі OY до осі OZ і при обертанні від лівої руки до правої відносно осі OY переходитимемо від осі OZ до осі OX.

Зазначене розташування приводить нас до лівоґвинтової лінії, лівого ґвинта або лівого обертання. Справді, коли при рівномірнім обертанні точки навколо осі OZ, від лівої руки до правої, точка переміщатиметься в додатнім напрямі осі OZ, то вона опише лівоґвинтову лінію, зображену на рис. 128; інакше сказавши, ми повинні виґвинчувати ґвинт, обертаючи його за стрілкою годинника, а заґвинчувати — обертаючи від правої руки до лівої. Як відомо, усі ґвинти завжди, крім особливо виняткових випадків, нарізають так, що нам доводиться робити навпаки, тобто ми заґвинчуємо їх, обертаючи від лівої руки до правої, а виґвинчуємо, обертаючи від правої руки до лівої, як це показано на рис. 129. Очевидячки, такому обертанню повинно відповідати вже зовсім інше розташування осей, показане на рис. 130.

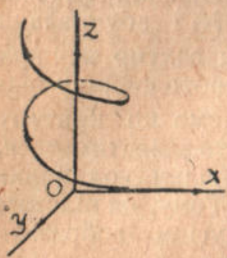


Рис. 128

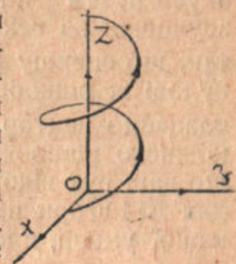


Рис. 129

Розглядаючи рис. 127 і 130, ясно бачимо, що дві зазначені системи осей не можна сумістити одну з одною, так само, як не можна надягти рукавички з правої руки на ліву, не вивернувши рукавички навиворіт. Це треба виразно засвоїти, щоб не було плутанини в знаках, особливо про розв'язанні задач на площі.

Умовившись про наведений вище спосіб визначати знак векторіяльного добутку, а, значить, вибравши систему осей, показану на рис. 127, ми, розв'язуючи якусь задачу на площі XOY, повинні розташувати осі за рис. 131, а не так, як показано на рис. 132. Якщо ж ми чомусь візьмемо осі за рис. 132, то, як видно з рис. 130, і з усіх попередніх міркувань, ми повинні змінити знак нашого векторіяльного добутку, бо, не зробивши цього, ми, натурально, діставатимемо перекручені поняття про знак наших векторіяльних добутків і, висловлюючись образно, будемо ґвинти заґвинчувати тоді, коли нам треба їх виґвинтити, та, навпаки, виґвинчувати замість заґвинтити їх.

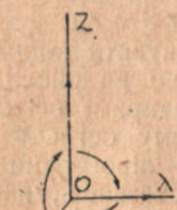


Рис. 130

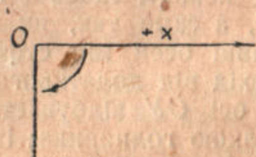


Рис. 131

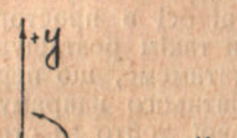


Рис. 132

Не важко помітити, що площі обох рівнобіжників на рис. 126 дорівнюють $vw \sin(v, w)$, тобто векторіяльному добуткові векторів $\bar{v}$ та $\bar{w}$, і різняться тільки порядком, яким ідуть ці вектори.

Тим що порядок, яким ми відкладаємо вектори при будові площі, рівної із шуканим векторіяльним добутком, відповідає завжди порядкові в нім перемножуваних векторів, то з усього сказаного випливає дуже важлива властивість векторіяльного добутку:

1) Знак векторіяльного добутку змінюється від зміни порядку чинників, тобто

$$(\bar{v} \times \bar{w}) = -(\bar{w} \times \bar{v}) \quad \ldots\ldots \quad (413)$$

Інші властивості векторіяльного добутку такі:

2) Від множення одного з чинників на скаляр векторіяльний добуток множиться на той же скаляр, тобто, якщо $\bar{p} = \bar{v} \times \bar{w}$, то

$$m\bar{v} \times \bar{w} = m\bar{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (414)$$

3) Векторіяльний добуток (противно геометричному, див. 4 властивість його) ніколи не може обернутися в альґебричний, бо при $\sin(v, w) = 1$, тобто коли $\bar{v}$ та $\bar{w}$ взаємно нормальні, $\bar{v} \times \bar{w}$ є, всеж, площа прямокутника, збудованого на $\bar{v}$ і $\bar{w}$.

4) Векторіяльний добуток обертається в нуль не тільки тоді, коли якийсь вектор дорівнює нулеві, а й коли напрями векторів один з одним рівнобіжні, бо в цім випадку sin кута між ними дорівнює нулеві.

5) Векторіяльний добуток геометричних сум підлягає правилу множення альґебричних многочленів, тобто:

$$\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w} \quad \ldots\ldots \quad (415)$$

На підставі цієї властивости, можна вивести **залежність між векторіяльним добутком двох векторів і їхніми проекціями на три взаємно нормальні осі.**

Нехай

$$\bar{a} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} \text{ и } \bar{A} = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z},$$

тоді

$$\left.\begin{array}{l} v = \bar{a} \times \bar{A} = (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) \times (\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}) = \bar{x} \times \bar{X} + \bar{y} \times \bar{Y} + \\ + \bar{z} \times \bar{Z} + \bar{x} \times \bar{y} + \bar{x} + \bar{Z} \times \bar{y} \times \bar{X} + \bar{y} \times \bar{Z} + \bar{z} \times \bar{X} + \bar{z} \times \bar{Y} \end{array}\right\} (416)$$

На підставі зазначених властивостей векторіяльного добутку, три перші члени правої сторони (416) рівности дорівнюють кожний нулеві, а члени інші справджують такі рівності:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}\times\bar{Y}+\bar{y}\times\bar{X}=xY-yX\\ \bar{y}\times\bar{Z}+\bar{z}\times\bar{Y}=yZ-zY\\ \bar{z}\times\bar{X}+\bar{x}\times\bar{Z}=zX-xZ\end{array}\right\}\quad.\;.\;.\;.\;.\;(417)$$

отже,

$$v=a\times\bar{A}=(yZ-zY)+(zX-xZ)+(xY-yX)\,. \quad (418)$$

Кожний з двочленів, що стоять у правій стороні (418) рівности, виражає собою числову вартість проєкції вектора, який виражає векторіяльний добуток на координатні осі, або, інакше, числову вартість проєкції площі рівнобіжника, збудованого на даних векторах, на площу, нормальну до відповідної координатної осі, а саме:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{v}_x=yZ-zY\\ v_y=zX-xZ\\ v_z=xY-yZ\end{array}\right\}\quad.\;.\;,\;.\;.\;.\;.\;.\;(419)$$

Не зайво звернути увагу на спосіб складати ці вирази: їх одержуємо один з одного за допомогою, так званої, колової переставки літер x, y і z. Розмістивши ці літери на колі абетковим порядком за рухом стрілки годинника (рис. 133), ми побачимо, що в лівих сторонах рівностей і в перших членах правих сторін їх літери йдуть зазначеним коловим порядком $x, y, z;\ y, z, x;\ z, x, y;$ останні ж члени правих одержуємо з перших, переставляючи літери.

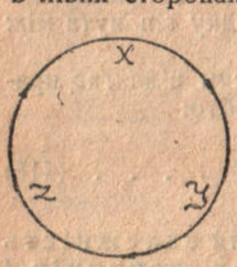


Рис. 133

Рис. 134

§ 58. Моменти векторів.

Якщо ми шукатимемо векторіяльний добуток двох векторів $\overline{OA}$ та $\overline{AB}$ (рис. 134), з яких вектор $\overline{AB}$ — вектор пересувний, а вектор $\overline{OA}$ починається в якійсь нерухомій точці O, то ми прийдемо до поняття про момент вектора, що відограє дуже важливу ролю в механіці.

Моментом вектора $\overline{AB}=\bar{v}$ відносно точки O звуть добуток даного вектора на вектор $\overline{OA}$, проведений з точки O до початку даного вектора. Такий добуток, як знаємо, дорівнює

$v \cdot OA \sin \alpha$, а ця величина, як бачимо з рис. 134, дорівнює $v \cdot r$, де r — величина нормалі, спущеної з точки O на напрям даного вектора. Тому звичайно **моментом вектора** $\overline{v} = \overline{AB}$ **відносно точки** O **звуть добуток** $r.v$ **величини вектора** v **на віддаль** r **точки** O, **відносно якої взято момент, по лінії напряму вектора.**

Найкоротшу віддаль r від точки O до напряму даного вектора $\overline{AB}$ звичайно звуть **раменом моменту.**

Ми умовимося позначати момент вектора $\overline{v}$ відносно точки O знаком $M_0 (\overline{v})$. Як бачимо з рис. 134, величина моменту дорівнює числово величині площі рівнобіжника $OABC$, а ця остання дорівнює подвоєній площі $\triangle OAB$; тому кажуть, що

$$M_0 (\overline{v}) = rv = 2 \triangle OAB \quad \ldots \ldots \quad (420)$$

тобто, що **величина моменту вектора** v **відносно точки** O **числово дорівнює подвоєній площі трикутника, вершок якого міститься в точці** O, **а за основу править даний вектор.** З цього означення бачимо, та й з рисунку ясно, що **момент** може обернутися **в нуль:**

1) коли вектор дорівнює **нулеві,**

2) коли **рамено дорівнює нулеві,** тобто точка, відносно якої беруть момент, міститься на лінії чину вектора.

Тим що, за сказаним вище, момент є в суті векторіяльний добуток, а останній можна графічно виразити якимсь вектором, збудованим умовленим вище способом, то, очевидно, й момент можна виразити якимсь вектором $\overline{OD} = \overline{M}_0 (v)$, званим **лінійним моментом** даного вектора.

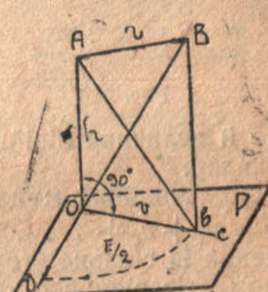


Рис. 135

Беручи до уваги обумовлений у § 67 вираз площі вектором, можемо, отже, сказати, що лінійним моментом $\overline{M}_0 (\overline{v})$ вектора $\overline{v}$ відносно точки O звуть вектор OD, числово рівний $2 \triangle OAB$ і поставлений з точки нормально до площі в той бік від неї, звідки, дивившись у напрямі рамена моменту, ми бачитимемо, що напрям даного вектора йде від лівої руки до правої, тобто за стрілкою годинника.

Збудувати лінійний момент даного вектора дуже легко можна так. Нехай дано вектор $\overline{V} = \overline{AB}$ (рис. 135) і треба збудувати його лінійний момент відносно точки O. Провівши просту $OA = h$, будуємо площу $P \perp OA$ і проєктуємо на цю площу наш вектор $\overline{V}$; проєкція ця $\overline{Ob}$ виразиться якимсь вектором $\overline{v}$.

Момент вектора $\overline{AB}$ відносно O дорівнює $2\triangle\, OAB$; з рисунку ж, за нашою будовою, бачимо, що $\overline{M}_0(\overline{v}) = 2\triangle OAB = 2\triangle AOb = v\,.\,h$.

Отже, відклавши на лінії Ob від точки O в напрямі вектора $\overline{Ob} = \overline{v}$ довжину, числово рівну vh, ми одержимо відтинок $\overline{Oc}$, рівний з нашим лінійним моментом, а, повернувши відтинок $\overline{Oc}$ в напрямі стрілки годинника на 90°, ми одержимо величиною, положенням і напрямом лінійний момент даного вектора $\overline{v}$.

Справді, за будовою $\overline{Oc} \perp \overline{OD}$ і $\overline{Oc} \perp \overline{OA}$, значить, $\overline{Oc}$ нормаля до площі $\triangle\, OAB$. Дивлячись з точки c на площу OAB в напрямі рамена вектора $\overline{AB}$, ми бачимо, що напрям вектора $\overline{AB}$ йде від лівої руки до правої; крім того, за будовою $\overline{OC} = \overline{OD} = vh = 2\triangle AOb = 2\triangle\, OAB = \overline{M}_0(\overline{v})$, значить, дійсно $\overline{Oc}$ є лінійний момент даного вектора.

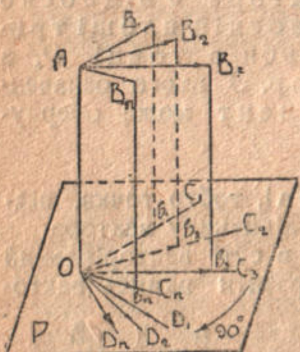


Рис. 136

На підставі зробленого означення про момент вектора і всього сказаного можна визначити такі властивості лінійного моменту:

1) Ні величина, ні напрям лінійного моменту вектора відносно точки O не залежать від перенесення початку A вектора $\overline{AB}$ в яку завгодно точку в напрямі його чину, тобто від пересування вектора в його напрямі, або від пересування точки O по лінії, рівнобіжній з даним вектором.

2) Якщо вектор, не мінявши віддалі його від точки O, помножимо на скаляр, то й величина лінійного моменту його помножиться на той же скаляр.

3) Лінійний момент відносно точки O ґеометричної суми $\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \ldots\ldots\ldots + \overline{v}_n$ кількох векторів, проведених із спільної точки A, дорівнює геометричній сумі лінійних моментів відносно тої ж точки додаваних векторів.

На доказ цієї властивости скористуймося із зазначеного вище способу будувати лінійний момент.

Нехай дано вектори $\overline{AB}_1 = \overline{v}_1$; $\overline{AB}_2 = \overline{v}_2$ $\ldots\ldots$ $\overline{AB}_n = v_n$ нехай їхня геометрична сума дорівнює $\overline{v} = \overline{AB}$, тобто:

$$\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \ldots\ldots \overline{v}_n.$$

Точка, відносно якої ми беремо моменти цих векторів, нехай буде O, відлегла від A на віддаль H.

Провівши площу $P \perp OA$, спроектуймо на неї наші вектори й дістанемо вектори:

$$\overline{Ob}_1 = \overline{v}_1; \overline{Ob}_2 = \overline{v}_2 \quad . \ . \ . \ \overline{Ob}_n = \overline{v}_n; \overline{Ob} = \overline{v}.$$

Очевидно, що, на підставі властивости геометричної суми векторів, ми одержимо:

$$\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \ . \ . \ . \ . + \overline{v}_n.$$

Ця рівність, як відомо, не порушиться від множення кожного її числа на скаляр H, тобто ми матимемо:

$$H\overline{v} = H\overline{v}_1 + H\overline{v}_2 + \ . \ . \ . + H\overline{v}_n$$

Але, як знаємо, за указаним вище способом будувати лінійний момент:

1) $H\overline{v} = \overline{OC}$ — числово дорівнює лінійному моментові вектора $\overline{v}$ відносно точки O.

2) $H\overline{v}_1 = \overline{OC}_1$ — числово дорівнює лінійному моментові вектора v_1 відносно точки O і т. д.

Отже, можемо написати, що

$$\overline{OC} = \overline{OC}_1 + \overline{OC}_2 + \ . \ . + \overline{OC} \ .$$

Коли ми повернемо площу P відносно осі OA на 90^0 у напрямі стрілки годинника, то, як відомо, кожний вектор $\overline{OC}_1$ $\overline{OC}_2$ . . . . $\overline{OC}_n$ пристане до лінійного моменту відповідних даних векторів, тобто ми знайдемо $\overline{OD} = \overline{OC}$; $\overline{OD}_1 = \overline{OC}_1$ - . . . $\overline{OD}_n = \overline{OC}_n$; отже, підставляючи до одержаного рівнання замість кожного члена інший, з ним рівний, одержимо:

$$\overline{OD} = \overline{OD}_1 + \overline{OD}_2 + \ . \ . \ . + \overline{OD}_n.$$

Але, за доведеним вище, кожний член цієї рівности, на приклад, i-тий, дорівнює:

$$\overline{OD}_i = \overline{OC}_i = H\overline{v}^i = 2\triangle OAb = 2\triangle OAB = M_o(\overline{v}_i),$$

а тому ми одержимо

$$\overline{M}_o(\overline{v}) = \overline{M}_o(\overline{v}_1) + \overline{M}_o(\overline{v}_2) + \ . \ . \ . \ . + \overline{M}_o(\overline{v}_n), \quad . \ . \ . \ (421)$$

тобто, що лінійний момент геометричної суми $\overline{v}$ відносно точки O дорівнює сумі лінійних моментів додаваних векторів $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ . . . $\overline{v}_n$ відносно тієї ж точки, що й треба було довести.

Користуючись далі з поняття про проекції вектора на площу, можна вивести ще нове поняття, яке теж має велике значення в механіці, а саме, поняття про момент вектора відносно осі.

Щоб вивести це поняття, ми знайдемо попереду, чому дорівнює проекція на якусь площину площі трикутника.

Візьмім спершу випадок, коли площа проекції проходить через один із боків трикутника.

Проектуючи вершок трикутника B на площу та проводячи висоту трикутника BD, бачимо, що: 1) AbC є проекція ABC на площу P; 2) bD є проекція на площу P висоти BD; 3) $bD \perp AC$, тобто є висота $\triangle AbC$, і 4) плоский кут між лініями BD і bD є міра двостінного кута між площами даного $\triangle ABC$ і його проекцій $\triangle AbC$.

На підставі зроблених зауважень ми, очевидячки, можемо написати, що:

$$\text{пл.} \triangle AbC = \frac{1}{2} AC \cdot bD = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cos\varphi = \text{пл.} \triangle ABC \cos\varphi \,. \quad (422)$$

Тепер візьмім випадок, коли площа проекції проходить через один із вершків трикутника ABC (рис. 138).

Проектуючи вершки B і C на площу P, та продовжуючи бік BC до перетину в точці D з площею P, ми за доведеним вище одержимо:

$$1) \ \text{пл.} \triangle AbD = \text{пл.} \triangle ABD \cos\varphi$$
$$2) \ \text{пл.} \triangle AcD = \text{пл.} \triangle ACD \cos\varphi$$

Віднімаючи ці рівності одну від одної почленно, дістанемо:

$$\text{пл.} \triangle Abc = \text{пл.} \triangle AbD - \text{пл.} \triangle AcD = (\text{пл.} \triangle ABD - \text{пл.} \triangle ACD) \cos\varphi =$$
$$= \text{пл.} \triangle ABC \cos\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (423)$$

Тим що проекції $\triangle$-ка на площі рівнобіжно рівні одна з одною, а, крім того, переміщаючи завжди площу P рівнобіжно

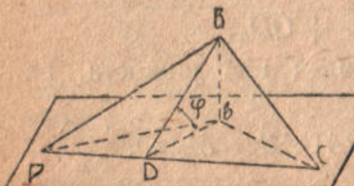


Рис. 137

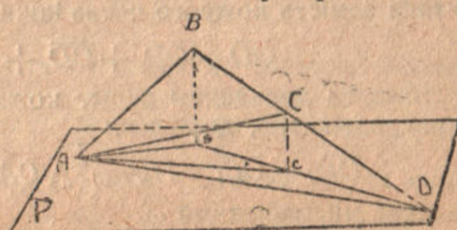


Рис. 138

з нею самою, можна за всякого взаємного розташування площі P і $\triangle ABC$ звести їх до співвідношення, показаного або на рис. 137, або на рис. 138, то ми можемо висловити твердження, що завжди площа проекції трикутника на яку завгодно площу дорівнює площі самого трикутника, помноженій на cos кута між площею трикутника й площею проекції.

Вважаючи на те, що всяку плоску фігуру можна розбити на ряд трикутників, можна сказати, що й узагалі площа проекції на яку завгодно площу всякої плоскої фігури дорівнює площі самої фігури, помноженій на cos кута між площами фігури й її проекції.

Користуючись з установленого твердження, виведім поняття про момент вектора відносно осі.

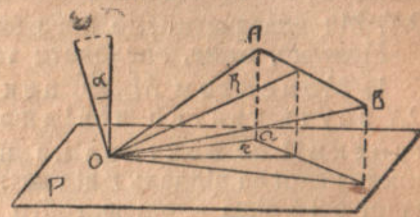


Рис. 139

Нехай маємо вектор $\overline{v} = \overline{AB}$ і його момент відносно точки O. Його величина, очевидячки, дорівнює $2 \triangle OAB = R \,.\, AB$ (рис. 139); лінійний же момент його дорівнює $\overline{M}_o (\overline{V}) = OC$. Спроектуймо вектор $\overline{v} = \overline{AB}$ на якусь площу P; ми одержимо вектор $\overline{ab} = \overline{v}$, якого момент відносно точки O, очевидячки, дорівнює $\overline{m}_o\ (\overline{v}) = 2 \triangle \overline{Oab} = r \,.\, ab$, а лінійний момент його буде $Oc \perp P$.

Із сказаного вище ми знаємо,

$$\text{що пл. } \triangle Oab = \text{пл. } \triangle OAB \cos \alpha$$

отже

$$2 \triangle Oab = 2 \triangle OAB \cos \alpha$$

або, значить,

$$\overline{m}_o (\overline{v}) = \overline{M}_o (\overline{V}) \cos \alpha,$$

а звідси одержимо:

$$\overline{Oc} = \overline{OC} \,.\, \cos \alpha \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (424)$$

Тим що $\overline{Oc} \perp$ пл. P, а $\overline{OC} \perp$ пл. OAB, то, значить, кут між ними, як нормалями до даних площ, є міра двостінного кута між площами; якщо це так, то вираз (424) показує нам, що лінійний момент вектора $\overline{ab}$ є проекція лінійного моменту вектора $\overline{AB}$ на вісь $OX \perp$ пл. P. Коли б, наприклад, площа P мала точку O, закріплену нерухомо, і мусила б зберігати своє положення та напрям у просторі, то, як бачимо з суто механічних міркувань, вона під впливом вектора $\overline{AB}$ могла б дістати якесь обертання, при чим, очевидно, вплив вектора $\overline{AB}$ цілком рівноважив би з впливом на площу вектора $\overline{ab}$. Інакше сказавши, площа оберталася б навколо осі OX отже, за того обертання чин вектора $\overline{AB}$ рівноважив би з впливом вектора $\overline{ab}$, тобто проекції $\overline{AB}$ на пл. P.

На підставі таких міркувань, просту OX звуть віссю, відносно якої взято момент вектора $\overline{AB}$. Момент проекції його на пл. P відносно точки O називають моментом вектора $\overline{AB}$ відносно осі OX, а лінійний момент $\overline{Oc}$ вектора ab відносно точки O звуть лінійним моментом вектора $\overline{AB}$ відносно осі OX. Ми позначатимемо його знаком $\overline{M}_{ox}(\overline{v})$.

Можемо, отже, висловити такі твердження:

1) Моментом $\overline{M}_{ox}(\overline{v})$ вектора $\overline{AB} = \overline{V}$ відносно осі OX звуть узятий з відповідним знаком добуток проекції ab вектора на площу, нормальну до осі, помноженої на віддаль r від зазначеної проекції, точки перетину даної осі з цією площею, тобто на найкоротшу віддаль між напрямом осі OX і даного вектора.

2) Лінійним моментом $\overline{M}_{ox}(\overline{v})$ вектора $\overline{v}$ відносно осі OX звуть вектор $\overline{Oc}$, числово рівний $2\triangle Oab$, тобто абсолютній величині моменту проекції вектора $\overline{AB}$ відносно осі OX, відкладений на цій осі у відповідний бік; інакше сказавши, „лінійним моментом вектора $\overline{v}$ відносно осі OX звуть лінійний момент проекції $\overline{v}$ вектора $\overline{V}$ на площу, нормальну до цієї осі, відносно точки перетину осі з площею".

3) Лінійний момент вектора відносно осі величиною й знаком є проекція на цю вісь лінійного моменту вектора відносно якої завгодно точки тієї ж таки осі.

На підставі висловлених означень і тверджень ясно, що момент вектора відносно осі обертається в нуль у трьох випадках:

1) коли вектор обертається в нуль;
2) коли напрям вектора перетинає вісь;
3) коли вектор рівнобіжний з віссю.

Далі, користуючись з установлених тверджень, а, головно, з 3 твердження, можна зробити такі висновки:

1) Якщо через точку провести три взаємно нормальні осі OX, OY, OZ, то, на підставі твердження 3, лінійні моменти $\overline{M}_{ox}$, $\overline{M}_{oy}$, $\overline{M}_{oz}$ вектора $\overline{V}$ відносно цих осей будуть відповідними проекціями на ті ж таки осі лінійного моменту $\overline{M}_o$ даного вектора відносно точки O; тим що кожний вектор, як знаємо, можна розглядати, як геометричну суму його трьох проекцій на три прямокутні координатні осі, то це твердження можна застосувати й до лінійного моменту вектора, як до вектора, що виражає векторіяльний добуток. а тому, значить,

$$\overline{M}_o = \overline{M}_{ox} + \overline{M}_{oy} + \overline{M}_{oz} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (425)$$

На цій же підставі, користуючись із висновків § 56, ми можемо написати такі формули для виразу числової величини й напряму моменту M_o:

$$M_o = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (426)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(M_o, X) &= \frac{M_{ox}}{M_o} \\ \cos(M_o, Y) &= \frac{M_{oy}}{M_o} \\ \cos(M_o, Z) &= \frac{M_{oz}}{M_o} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (427)$$

2) Якщо, далі, маємо геометричну суму векторів

$$\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \; . \; . \; . \; . \; . + \overline{v}_n,$$

то, за доведеним вище, лінійний момент суми відносно якоїсь точки O дорівнює сумі лінійних моментів додаваних векторів відносно цієї точки, тобто

$$\overline{M}_o(\overline{v}) = \overline{M}_o(\overline{v}_1) + \overline{M}_o(\overline{v}_2) + \; . \; . \; . + \overline{M}_o(\overline{v}_n).$$

Провівши через дану точку O якусь вісь OX і спроєктувавши на неї лінійні моменти відносно точки, ми, як доведено вище, одержимо відповідно лінійні моменти наших векторів відносно осі OX, тобто

$$\overline{M}_{ox}(\overline{v}) = \overline{M}_o(\overline{v}) \cos[\overline{M}_o(\overline{v}), OX].$$
$$\overline{M}_{ox}(\overline{v}_1) = \overline{M}_o(\overline{v}_1) \cos[\overline{M}_o(\overline{v}_1), OX].$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$\overline{M}_{ox}(\overline{v}_n) = \overline{M}_o(\overline{v}_n) \cos[\overline{M}_o(\overline{v}_n), OX],$$

а, взявши до уваги теорему про проекцію геометричної суми на якусь вісь, маємо, отже, право написати, що

$$\overline{M}_{ox}(\overline{v}) = \overline{M}_{ox}(\overline{v}_1) + \overline{M}_{ox}(\overline{v}_2) + \; . \; . \; . \; . + \overline{M}_{ox}(\overline{v}_n) \quad . \; (428)$$

тобто можна сказати, що „момент відносно осі OX геометричної суми кількох векторів, проведених із спільної точки A, дорівнює сумі моментів відносно тієї ж осі додаваних векторів“.

Користуючись, отже, з поняття про векторіяльний добуток двох векторів і про векторіяльний вираз цього добутку, можна вивести два нові надзвичайно важливі поняття про момент вектора відносно точки й про момент вектора відносно осі та відповідно поняття про лінійні моменти відносно точки й осі, як графічних виразів цих понять.

Не трудно помітити, що поняття про ці два моменти в суті нічім не різняться від поняття про векторіяльний добуток, так само, як поняття про лінійні моменти — від векторіяльного зображення векторіяльного добутку. Ріжниця тільки суто зовнішня (у назві), щоб зручніше (а почасті простіше) було користуватися новими поняттями з суто механічного погляду.

На цій підставі всі зазначені вище властивості векторіяльного добутку поширюються й на моменти векторів.

Треба також зазначити, що всі подані вище виводи про векторіяльний добуток, одержані суто векторіяльним способом, можна одержати й користуючись тільки з поняття про моменти.

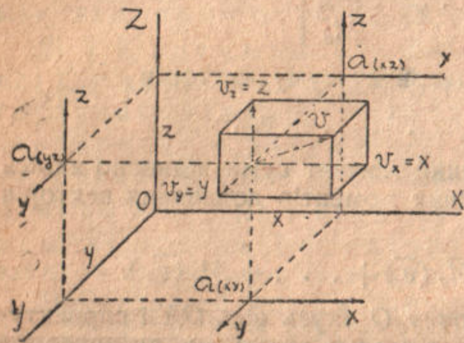


Рис. 140

Наприклад, ми вище вивели векторіяльним способом величину проєкції векторіяльного добутку на три взаємно нормальні осі; для порівнання розв'яжім цю ж задачу, користуючись із поняття про моменти.

Нехай ми маємо вектор $\overline{v}$, початок якого міститься в точці A, що її положення у взятій у нас системі координат визначається координатами x, y, z. Величину й напрям вектора $\overline{v}$, як знаємо, визначають його проєкції на координатні осі $\overline{X} = \overline{v}_x$, $\overline{Y} = \overline{v}_y$, $\overline{Z} = \overline{v}_z$ (рис. 140).

Якщо візьмемо момент вектора $\overline{v}$ відносно точки O, тобто початку координат, то, як доведено вище, цей момент можна розглядати як геометричну суму моментів того ж вектора відносно трьох координатних осей.

Отже, маємо рівності:

$$\overline{v} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

$$\overline{M_o}(\overline{v}) = \overline{M_{ox}}(v) + \overline{M_{oy}}(\overline{v}) + \overline{M_{oz}}(\overline{v}).$$

Щождо кожного члена правої сторони останньої рівности, то, за доведеним вище, ми знаємо, що, наприклад:

$$\overline{M_{ox}}\,(\overline{v}) = \overline{M_{ox}}\,(\overline{X}) + \overline{M_{oy}}\,(\overline{Y}) + \overline{M_{oz}}\,(\overline{Z})$$

а знавши, що $v_x \parallel OX$, і складаючи вирази для числової величини моментів указаних векторів відносно осі OX, ми одержимо, що

$$\overline{M_{ox}}\,(\overline{v_x}) = 0$$

$$\overline{M_{ox}}\,(\overline{v_y}) = -zY$$

$$\overline{M_{ox}}\,(\overline{v_z}) = yZ$$

Тим що знайдені вирази заховують силу при всяких знаках і проекції вектора й координат його початку, то, значить, завжди числовою величиною:

$$\overline{M_{ox}}\,(\overline{v}) = yZ - zY$$

Таким же способом одержимо:

$$\left.\begin{aligned}\overline{M_{oy}}\,(\overline{v}) &= zX - xZ\\ \overline{M_{oz}}\,(\overline{v}) &= xY - yX\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (429)$$

Як бачимо, ми дістали ті самі формули, що й наприкінці § 57 (418); вони й правлять за формули для альґебричного виразу моменту вектора відносно осей координат.

Не важко, на підставі правил аналітичної геометрії, помітити, що, коли точка, відносно якої беремо момент даного вектора, лежить не на початку координат, а в якійсь точці простору з координатами a, b, c, то одержані в нас аналітичні вирази наберуть вигляду:

$$\left.\begin{aligned}M_{ox} &= (y-b)\,Z - (z-c)\,Y\\ M_{oy} &= (z-c)\,X - (x-a)\,Z\\ M_{oz} &= (x-a)\,Y - (y-b)\,X\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (430)$$

§ 59. Пара векторів. Щоб закінчити про застосування поняття про векторіяльний добуток векторів, з'ясуймо ще одне важливе поняття, з яким доводиться зустрічатися в механіці та прикладанні її в техніці.

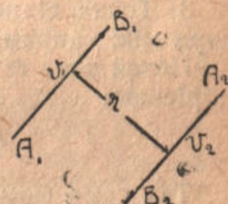


Рис. 141

Досі ми мали діло з такими векторами, коли, при рівності з нулем їхньої геометричної суми, і сума моментів їх оберталася в нуль. Коли ж матимемо вектори, що справджують рівність $\overline{v_1} = -\overline{v_2}$, при чім напрями їх чину не зливаються докупи, інакше сказавши, напрями чину їх рівнобіжні й відлежать один від одного на віддалі r, то виявляється, що, хоча геометрична сума таких векторів (рис. 141) і обертається в нуль, але сума моментів їх відносно якої завгодно точки простору не тільки не дорівнює нулеві, а, навпаки, завжди має одну певну величину.

Такі два вектори звуть „*парою векторів*", віддаль між напрямами їх чину звуть *раменом пари*, а зазначену вище сталу величину суми їхніх моментів звуть *моментом пари*.

Твердження про те, що геометрична сума пари векторів дорівнює нулеві, не потребує доказів; для доказу ж другого твердження, що „*момент пари векторів відносно якої завгодно точки простору*" є для даної пари величина стала, а саме, числово „рівна з добутком величини одного з векторів пари на рамено її“, розгляньмо окремо такі випадки:

1) Знайдім суму моментів відносно точки, що лежить на напрямі першого вектора, наприклад, відносно точки A (рис. 142). Момент вектора $\overline{v_1}$, очевидно, в цім випадку дорівнює нулеві, а момент вектора $\overline{v_2}$ дорівнює $2 \triangle A_1 A_2 B_2 = rv_2$. Отже, сума моментів векторів, тобто момент пари відносно точки A дорівнює rv_2.

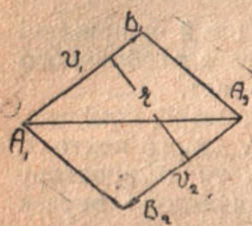


Рис. 142

2) Точка, відносно якої беремо суму моментів, лежить на напрямі вектора $\overline{v_2}$, наприклад, точка A_2.

Момент вектора $\overline{v_2}$ тут дорівнює нулеві, момент же вектора $\overline{v_1}$ дорівнює $2 \triangle A_2 A_1 B_1 = rv_1$; отже, момент пари відносно точки A_2 дорівнює $\overline{rv_1}$. Тим що $\triangle A_1 A_2 B_2 = \triangle A_2 A_1 B_1$ на тій підставі, що висоти їх r рівні і основи теж рівні, то $rv_1 = rv_2$.

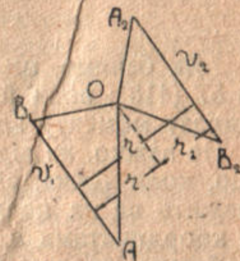


Рис. 143

Не трудно помітити, що зазначені моменти не тільки рівні величиною, а й однакові знаком.

3) Точка, відносно якої братимемо моменти, лежить в площі пари між напрямами векторів.

Нехай така точка буде O (рис. 143), момент вектора $A_1 B_1$ дорівнює:

$$M_0(\overline{v_1}) = 2 \triangle OA_1 B_1 = + v_1 r_1$$

Так само момент вектора $\overline{A_2 B_2}$ дорівнює:

$$M_0(\overline{v_2}) = 2 \triangle OA_2 B_2 = + v_2 r_2.$$

Тим що $\overline{v_1} = \overline{v_2}$, то, додаючи, ми одержимо, що

$$M_0 = v_1 (r_1 + r_2).$$

Але $r_1 + r_2 = r$, як бачимо з рисунка, отже

$$M_0 = v_1 r.$$

тобто в розгляненім випадку момент пари знову таки дорівнює $v_1 r$.

4) Точка, відносно якої беремо моменти векторів, лежить у площі пари, поза напрямом векторів, як, наприклад, точка O_2 (рис. 144).

Момент вектора $\overline{v_2}$ дорівнює:

$$M_{o_2}(\overline{v_2}) = 2\triangle O_2 A_2 B_2 = +v_2 r_2$$

Момент вектора $\overline{v_1}$ дорівнює:

$$M_{o_2}(\overline{v_1}) = 2\triangle O_2 A_1 B_1 = -v_1 r_1.$$

Сумуючи ці вирази й помічаючи, що $v_1 = v_2$, маємо:

$$M_{o_2} = v_1 (r_2 - r_1).$$

Тим що $r_2 - r_1 = r$, то, значить, шукана сума, тобто момент пари відносно точки O_2, дорівнює $v_1 r$.

Очевидно, ми розглянули всі можливі випадки, припускаючи, що точка, відносно якої маємо момент пари, лежить у площі її, і виявили, що в усіх випадках момент пари сталий і величи-

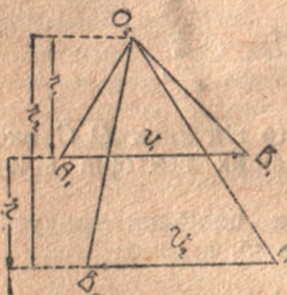


Рис. 144

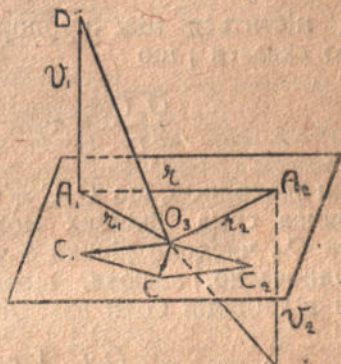


Рис. 145

ною, і знаком. Нам лишається розглянути ще один останній випадок, коли точка, відносно якої визначатимемо момент пари, лежить поза площею пари.

5) Візьмім суму моментів даної пари векторів відносно точки O_3, що лежить поза площею векторів (рис. 145). Проведім через точку O_3 площу P, нормальну до площі даної пари, і перенесім точки прикладання векторів у точки перетину їх напряму з площею P. Як з'ясовано вище, величини моментів векторів від того не змінюються.

Очевидячки, лінійний момент вектора $\overline{v_1}$ відносно точки O_3 лежатиме в площі $P \perp \overline{v_1}$ і дорівнюватиме:

$$\overline{M_{o_3}}(\overline{v_1}) = \overline{O_3 C_1} = 2\triangle O_3 A_1 B_1 = v_1 r_1.$$

Так само лінійний момент вектора $\overline{v_2}$ лежатиме в тій же площі і дорівнюватиме:

$$\overline{M_{o_3}}(\overline{v_2}) = \overline{O_3 C_2} = 2\triangle O_3 A_2 B_2 = v_2 r_2.$$

Сума цих лінійних моментів дорівнюватиме їхній геометричній сумі $O_3 C$, тобто

$$\overline{O_3 C_1} + \overline{O_3 C_2} = \overline{O_3 C}.$$

Тим що будовою:

1) $\overline{O_3 C_1} \perp \overline{A_1 O_3}$ і $\overline{O_3 C_1} = v_1 r_1$ пропорційне до (r)—$A_1 O_3$.

2) $\overline{O_3 C_2} \perp \overline{A_2 O_3}$ і $\overline{O_3 C_2} = v_2 r_2 = v_1 r_1$ пропорційне (у тім же відношенні) до $A_2 O_3$.

3) $\overline{C_1 C} \# \overline{O_3 C_2}$, а, значить, $\overline{C_1 C} \perp \overline{A_2 O_3}$ і пропорційне до $A_2 O_3$, то знаходимо, що $\triangle O_3 C_1 C \backsim \triangle O_3 A_1 A_2$, бо вони мають по рівному кугу;

$$\angle O_3 C_1 C = \angle A_1 O_3 A_2,$$

який міститься між пропорційними боками, а тому маємо право сказати , що

$$\frac{\overline{O_3 C_1}}{r_1} = v_1 = v_2 = \frac{\overline{O_3 C_2}}{r_2} = \frac{\overline{O_3 C}}{r},$$

звідки знаходимо, що $\overline{O_3 C} = v_1 r$, тобто відтинок $\overline{O_3 C}$, як геометрична сума лінійних моментів наших векторів відносно точки O_3, числово рівний з $\underline{v}_1 r$.

Одночасно, знаючи, що в наших подібних трикутників і два відповідні боки взаємно нормальні, а саме:

$$\overline{O_3 C_1} \perp r_1 \text{ і } \overline{O_3 C_2} \perp r_2,$$

ми робимо висновок, що й треті боки теж взаємно нормальні тобто, що

$$\overline{O_3 C} \perp r.$$

Отже, $\overline{O_3 C}$ нормальний до площі пари.

Інакше сказавши, ми висновуємо, що відтинок OC, числово рівний з моментом пари, одночасно й своїм напрямом, і положенням відносно площі, є не що інше, як лінійний момент пари.

Таким способом ми і в данім випадку знайшли, що момент пари дорівнює добуткові одного з векторів на рамено пари.

Тим що всяке інше взаємне розташування точки O_3 і точок прикладання векторів A_1 та A_2 можна, пересуваючи вектори $\overline{v}_1$ і $\overline{v}_2$, звести до щойно розглянeного випадку, то ми маємо право сказати, що розглянули тут усі можливі випадки; а як ми завжди для моменту пари діставали ту саму величину, то, значить, можемо вважати за доведену основну й характеристичну властивість пари векторів, а саме, що м о м е н т пари векторів відносно якої завгодно точки простору є величина стала, рівна числово й знаком з добутком одного з векторів на рамено пари, тобто:

$$M_0(\overline{v}) = vr \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (431)$$

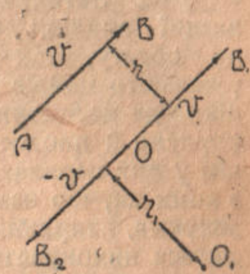


Рис. 146

Користуючись доведеною властивістю пари векторів, не важко знайти залежність між моментами вектора відносно двох різних точок.

Нехай нам відомий момент вектора $\overline{AB} = \overline{v}$ відносно точки O, рівний $M_0(\overline{v})$, і треба знайти залежність між ним і новим моментом $M_{O_1}(\overline{v})$ того ж вектора відносно точки O_1 (рис. 146).

Прикладім до точки O два вектори: $\overline{v}$ і $-\overline{v}$. Очевидно, сума таких двох векторів дорівнює нулеві і сума моментів їх відносно якої завгодно точки теж дорівнює нулеві, а тому, ми, звичайна річ, можемо написати таку рівність:

$$M_{O_1}(\overline{v}) = M_{O_1}(\overline{v}) + M_{d_1}(\overline{v}) + M_{O_1}(-\overline{v}) \ . \ . \ . \ . \ (432)$$

Не важко помітити, що в даній рівності:

$$M_{O_1}(\overline{v}) + M_{O_1}(-\overline{v}) = M_o(\overline{v}),$$

бо

$$M_{O_1}(\overline{v}) = +v(r + r_1)$$

$$M_{O_1}(-\overline{v}) = -vr_1.$$

Сума ж їх дорівнює $vr = M_o(\overline{v})$, тобто вектори $\overline{v}$ і $-\overline{v}$ утворюють пари з моментом, який дорівнює попередньому моментові даного вектора відносно точки O.

Щодо $M_{O_1}(\overline{v})$, то, очевидячки, $M_{O_1}(\overline{v}) = vr_1$, тобто це є момент відносно O_1 даного вектора, ніби перенесеного в точку O.

Отже, наша рівність (432) набере вигляду:

$$M_{O_1}(\overline{v}) = M_o(\overline{v}) + M_{O_1}(\overline{v}) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (433)$$

і її можна зформулювати словами так: „момент вектора відносно нового центру O_1 дорівнює моментові того ж вектора відносно старого центру O з доданим до нього моментом відносно нового центру O_1 того ж вектора, перенесеного рівнобіжно з самим собою в точку O".

Інша формула цієї залежности, більш уживана в прикладаннях, така: „перенести вектор рівнобіжно з ним самим у якусь точку O простору є те саме, що замінити його рівним з ним вектором, прикладеним до точки O, і парою векторів з моментом, що дорівнює моментові даного вектора відносно точки O".

§ 60. Загальні уваги про виконання з векторами дій вищої аналізи. Описані вище дії з векторами належать до обсягу, так званої, нижчої математичної аналізи; їх уживають майже в усіх царинах техніки. Але є царини техніки, де користуватися з векторіяльного числення особливо корисно й плодотворче, через простоту його й наочність, при чім у цих царинах, уживаючи векторів, доводиться виконувати з ними дії, що належать до обсягу вищої матеметичної аналізи, зокрема, наприклад, робити диференціювання. Найчастіш доводиться виконувати його при застосуванні векторів до теорії електрики, гідродинаміки й практичного прикладання останніх.

При цих операціях доводиться користуватися з поняття про векторіяльне поле.

Під назвою „векторіяльне поле" або „поле векторів" розуміють такий безмежний чи обмежений простір, де кожній точці його відповідає певний вектор.

З векторіяльним полем доводиться мати діло майже в усіх питаннях механіки й теоретичної фізики. Так, усякий простір, де відбувається якийсь взаємочин між точками, є векторіяльне поле; таке, наприклад, поле сил тяжіння, магнетне поле, електростатичне тощо.

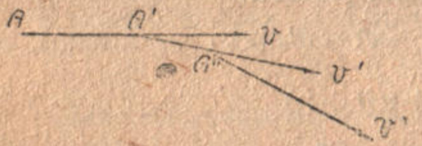


Рис. 147

Вивчання стану руху або якогось фізичного явища для даного моменту часу та зміни цього стану з плином часу сходить на вивчання векторіяльного поля і його зміни залежно від часу. При такім вивчанні здебільшого й доводиться виконувати з вектором диференціювання.

Якщо візьмемо в векторіяльнім полі якусь точку A і збудуємо відповідний їй вектор $\overline{v}$ (рис. 147), потім викладемо на нім якийсь відтинок AA і збудуємо відповідною точкою A' вектор $\overline{v'}$, на нім відкладемо відтинок $A'A''$ і для нової точки A'' збудуємо відповідний вектор $\overline{v''}$ і т. д., то в результаті дістанемо многокутник $AA'A''$..., з такою властивістю, що кожен його бік має напрям вектора, відповідного вершкові на початку цього боку. У границі, при безконечнім зменшенні відтинків $AA', A'A''$... і т. д., ця лінія обернеться в суцільну криву, яка має властивість, що для всіх її точок вектори даного поля до неї дотичні.

Таку лінію звуть лінією течії.

Цей термін запозичено з гідромеханіки; тому, коли вектори поля зображають, наприклад, швидкості плинного течива, то лінії течії дають наочне уявлення про напрям струмини цієї течії.

Зрозуміла річ, що лінія течії може розпосторюватися обабіч точки *A*, може бути замкнена або ні, може поширюватися в безконечність, якщо векторіяльне поле безмежне, тощо.

Тим що лінії течії можна будувати, починаючи з якої завгодно точки поля, і, значить, немає в полі точки, через яку не проходила б лінія течії, то можна сказати, що лінії течії заповнюють собою все векторіяльне поле.

За приклад векторіяльного поля з лініями течії може правити отой малюнок, що утворюється з ошурки, насипаної на папір поверх магнета. До цієї ж категорії належать і, так звані, траєкторії напруги.

Узявши якусь площинку в векторіяльнім полі і знавши число ліній течії, що проходять через неї, ми можемо прийти до поняття про витрату струмини векторів або просто про витрату векторів через дану площинку. Цей термін теж узято з гідродинаміки, що свідчить про можливість застосовувати векторіяльну аналізу в даній царині. Це поняття відограє важливу ролю при вивченні векторіяльного поля, і для нього запроваджено термін „дивергенц" (divergenz), позначаний символом „div".

Крім того, доводиться ще, мавши діло з лініями течії, спіткатися також по анології з гідромеханікою, з поняттям про вихор, позначаний або символом „curl" (від англійського слова „curl"—кучерик, закруток), або символом „rot" (від слова „rotor").

Взагалі, аналітичне вивчення векторіяльного поля сходить до вивчення трьох аналітичних функцій *X*, *У*, *Z* скалярів даних векторів.

Кожну з цих функцій за допомогою якоїсь диференціяльної операції зводять до особливого векторіяльного поля. Таку операцію можна зобразити якимсь вектором; її звуть ґрадієнтом даної функції і позначають символічно „grad".

Отже, найголовніші символи різних диференціяльних операцій з векторами у векторіяльнім полі є: „grad", „div" та „rot".

Не зупиняючись докладніше на самім виконанні цих диференціяльних операцій, бо вони мають специяльне значення, іще раз зазначмо на великий зв'язок векторіяльного числення з гідромеханікою, що виявляється навіть у самій термінології.

Тут маємо зовнішній доказ великої придатности векторіяльного числення для гідромеханіки й плодотворчости такого застосовування його, що й бачимо в дійсності.

З поняття про вектори можна також дуже широко користуватися в теорії електрики й магнетизму, вивчаючи властивості електричного та магнетного полів.

Закінчуючи розділ про основні способи векторіяльного числення, звернім увагу на вигоду, яку дає розвиток векторіяльної аналізи.

Вище ми завжди говорили про „вектори“ взагалі, тобто про деякі геометричні елементи, про деякі лінії, що виражають якусь векторіяльну величину. Не визначаючи фізичних властивостей векторіяльних величин, можна було суто геометричним способом визначити загальні властивості векторів, тобто загальні властивості тих фізичних величин, які можна зобразити за допомогою векторів.

Отже, векторіяльна аналіза є ніби символічне числення. Основний елемент його, з самої суті діла, є вектор, як деяке поняття складне, що містить у собі поняття про число й поняття про напрям, а часто також і поняття про положення в просторі. До поняття про такий елемент підходили здавень, розв'язуючи різні питання прикладної математики геометричним способом, але тільки віднедавна утворили „вектор“, як елемент, що його можна включати в особливі формули, звані формулами векторіяльними. Особливість усякого символічного числення та, що з'єднують під багатьма символами багато залежностей між різними математичними елементами і часто для цього об'єднують цілі групи цих елементів під одним словом. Але векторіяльна аналіза не є просте символічне числення. Мета її — не тільки зовнішньо спростити залежності й дії над елементами — векторами, що входять до цих залежностей, а головно — привести математичні елементи до можливо тісної відповідности з геометричними й фізичними уявленнями, для виразу яких повинні правити вектори, — ці основні елементи векторіяльної аналізи.

У цім і полягає все значечня векторіяльного числення; визначивши методами векторіяльної аналізи якусь властивість вектора, ми маємо цілковите право сказати, що та сама властивість притаманна всякій векторіяльній величині. Наприклад, сили, зокрема, є векторіяльні величини, а тому всі виведені вище властивості цілком поширюються й на сили. Тим, що сили є основний елемент, що його розглядає відділ механіки, званий статикою, то всі висновки й закони статики можна одержати суто векторіяльним способом. Таким шляхом ми прийдемо до науки, званої графічною статикою, яка своєю зовнішньою формою є не що інше, як прикладення до механіки методів векторіяльної аналізи в зв'язку зі способами графічного числення.

Докладніші відомості про векторіяльну аналізу, що набуває тепер чимраз більшого значення по всіх відділах прикладних фізично - математичних наук, зацікавлені можуть знайти в творах, зазначених у доданім списку літератури про це питання.

ДОДАТОК ДО I ЧАСТИНИ

КОРОТКИЙ ПОКАЗНИК ЛІТЕРАТУРИ

А.—До I відділу—відділ допоміжний

1. Одиниці мір і одноманітні позначення

1. Everett, J. D. — „Units and physical constants". „Единицы и физические постоянные", пер. с англ. П. П. Вербицкий и И. Ф. Жеребятьев, 1888.

2. Föppl, A., Dr. — „Vorlesungen über Technische Mechanik", I Band, § 7.

3. Gzogler, A. — „Dimensionen und absolute Masse", Leipzig, 1889.

4. Herwig, H. — „Physicalische Begriffe und absolute Masse". Leipzig, 1880.

5. Linders Olof. — „Die für Technik und Praxis wichtigsten Physikalischen Grössen in systematischer Darstellung sowie die Algebraische Bezeichnung der Grössen Physikalische Massysteme, Nomenklatur der Grössen und Masseinheiten", 1904.

6. Serpieri (пер. с итальянского).— „Die absoluten Masse". Leipzig, 1885.

7. Хвольсон, О. Д., проф. „Об абсолютных единицах". СПБ., 1887.

8. Хвольсон, О. Д., проф. — „О метрической системе мер и весов". СПБ., 1884.

9. Хвольсон, О. Д., проф, — „Курс физики". Том I.

10. Абрамов, Н. М., проф. — „Однообразные обозначения и схема сопоставления данных в литературе по железобетону". „Зодчий", 1910.

11. „Einheitlische Bezeichnungen für die Entwürfe von Ingenieurbauwerken". „Die Bautechnik". Heft 34, 1923.

2. Теорія помилок і її застосування до опрацювання результатів вимірів та спостережень

12. Airy. — „On the algebraical and numerical theory of errors of observations". Cambridge, 1861.

13. Bertrand, J. Calcul des probabilités". Paris, 1868.

14. Bruno. — „Calcul des erreurs". Paris, 1869.

15. Буняковский. — „Основания математической теории вероятностей". 1846.

16. Веселовский. — „Элементарная теория ошибок наблюдений". Москва, 1897.

17. „Encyclopédie des Sciences mathématiques". T. I, v. 4. Calcules des probabilités. Theorie des erreurs. Applications diverses. Paris — Leipzig, 1908.

18. Hagen, G. — „Grundzüge der Wahrscheinligkeits-Rechnung". Berlin, 1867.

19. Helmert. — „Уравновешивание по способу наименьших квадратов". Пер. с нем. Москва, 1914.
20. Забудский. — „Теория вероятностей". СПБ., 1898.
21. Иверонов. — „Способ наименьших квадратов", 1904.
22. Кольрауш. — „Руководство к практике физических измерений", перев. с нем. СПБ., 1891.
23. Лермантов, В. В. — „Об'яснение практических работ по физике". СПБ., 1893 — 1895.
24. Марков, А. А. — „Исчисление вероятностей". СПБ., 1900.
25. Merriman, M. — „Method of least squares". London, 1877.
26. Некрасов. — „Теорія вероятностей", 1896.
27. Савич. — „Приложение теории вероятностей к вычислению наблюдений". СПБ., 1857.
28. Сопоцько. — „Основные задачи теории погрешностей". Труды Топогр.-Геод. Ком. Вып. XXI. Москва, 1907.
29. Степанов, А. — „Руководство для практических занятий по физике".
30. Urban, F. M. — „Grundlagen der Wahrscheinlichkeits-Rechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler". Leipzig, 1923.
31. Цитович. — „Начала теории вероятностей". СПБ., 1896.
32. Чебышев. — „Опыт элементарного анализа теории вероятностей". Москва, 1845.
33. Weinstein — „Handbuch der physicalischen Maassbestimmungen". Berlin, 1886 — 1892.
34. Weitbrecht, W. — „Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate". Leipzig, 1906.

Б.—До II відділу—числові обчислення

1. Обчислення безпосередні й за допомогою таблиць

35. Абрамов, Н. М. — „Краткие сведения о приближенных вычислениях". Материалы для курса „Строительная Механика". Вып. I. Новочеркасск, 1909.
36. Абрамов, Н. М. — „Таблицы тригонометрических величин и обыкновенных четырехзначных логарифмов и антилогарифмов". Новочеркасск, 1909.
37. Абрамов, Н. М. — „Сборник задач по строительной механике". Вып. I. Новочеркасск, 1911.
38. Balinet et Hensel. — „Calcules pratiques appliqués aux Sciences d'observation".
39. Crelle, A. L. — „Erleichterungstafel". Berlin, 1836.
40. Гензелинг, А. — „Таблицы умножения до 999 × 999 с таблицами вычислений кругов и окружностей". Перевод с немецкого.
41. Гончаров. — „Приближенные вычисления", 1905.
42. Долгушин. — „Вычисления по приближению". Киев, 1912.
43. Ермаков, В. П. — „Приближенные вычисления", 1905.
44. Fassbinder, Ch.— Théorie et pratique des approximations numeriques". Paris, 1906.
45. Galopin-Schaub. — Théorie des approximations numeriques, 1884
46. Griess. — „Approximations numeriques". Paris, 1898.
47. Gugon, E. — „Note sur les approximations numeriques". Paris, 1909
48. Кавун. — „Приближенные вычисления". Москва 1922.
49. Крылов, А. Н. — „О приближенных вычислениях", СПБ., 1906.
50. Langley, Ed. — „A treatise on computation", 1895.
51. Lambert. — „Computation and Mesuration", 1907.

52. Lüroth, J., Dr. — „Vorlesungen über numerisches Rechnen“. Leipzig, 1900.

53. Mehmke, R. — „Calculs numeriques“. Enc. d. Sc. Math., V. I, 1908.

54. Neuendorff. — „Praktische Mathematik“, A. N. и G № 341, Leipzig u. Berlin, 1917.

55. Pineto, S. — „Tables de logarithmes vulgaires à dix décimales, construites d'après un nouveau mode“. St.-Pétersbourg, 1871.

56. Ратнер, Н. Н. — „Таблицы обыкновенных логарифмов о двенадцати знаках“. Варшава, 1900.

57. О'Рурк. — Таблицы умножения.

58. Ruchonnet. — „Eléments de calcul approximatif“ Lausanne, 1874.

59. Runge. — „Praxis der Gleichungen“. Berlin — Leipzig, 1921.

60. Соколов, Н. С. — „Вычисление формул по данному приближению“, 1898.

61. Сопоцько, Л. А. — „Приближенное умножение и возведение в степень“. Новочеркасск, 1918.

62. Steinhauser, A. — „Hilfstafeln zur präcisen Berechnung zwanzigstelligen Logarithmen zu gegebenen Zahlen und der Zahlen zu 20-stelligen Logarithmen“. Wien, 1880.

63. Филиппов, Б. М. — „Теорія и практика элементарных приближенных вычислений“.

64. Vielle. — „Théorie général des approximations numeriques“.

65. Шиманские. — „Принципы числовых расчетов“.

66. Xavier, A. — „Théorie des approximations numeriques et du calcul abregé“. Paris, 1909.

67. Zimmermann, Dr. — „Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlentwerthe“. Berlin, 1889.

68. Штаерман, И. Я. — „О методе последовательных приближений в строительной механике“. Киев, 1929.

2. Обчислення за допомогою механічних приладів

69. Абаканович, Б. — „Интегратор, кривая интегральная и ее приложения к строительной механике“. Варшава, 1880.

70. Абрамов, Н. М. — „Краткое описание интеграторов сист. Amsler Laffon“. Новочеркасск. 1909.

71. „Anleitung zum Gebrauch des Rechenstabes“ von A. W. Faber.

72. Bennedu, C. — „Der logarithmische Rechenstab“.

73. Бооль. — „Приборы и машины для механического производства арифметических действий“. Москва. 1896.

74. Carpenther. — „Experimental Engineering“.

75. Дубяга. К. М. — „Интеграторы“. Изв. Спб. П. И., 1905. т. III.

76 Farcy, J. — „On the Steam-Engene“.

77. Galle. — „Mathematische Instrumente“. Leipzig — Berlin, 1912.

78. Hammer. — „Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch“. Stuttgart.

79. Kriloff, A. N. — „Sur un integrateur des équations différentielles ordinaires“. St.-Pétersbourg, 1904.

80. Kriloff. A. N. — „On the hatchet planimeter“. СПБ., 1904.

81. Lenz. — „Die Rechenmaschine und Maschinenrechnen“. Leipzig — Berlin, 1915

82. Millot, S. — „Guide de poche pour l'emploi de la régle à calcul“. Paris, 1921.

83. Morin, H., de-. — „Les appareils d'intégration“. Paris, 1913.

84. D'Ocagne, M. — „Le calcul simplifié par les procédés mecaniques et graphiques“. Paris, 1905.

85. D'Ocagne. M. — „Instruction sur l'usage de la règle à calcul". Paris, 1921.
86. Rozé, P. — „Théorie et usage de la règle à calcul". Paris. 1907.
87. Тимошенко, С. П. — „Описание прибора А. Н. Крылова для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений". Известия Спб. Полит. Инст.

В. — До III відділу — графічні обчислення

1. Елементарні графічні обчислення

88. Абрамов, Н. М. — „Графическое решение алгебраических уравнений высших степеней". „Изв. Собр. Инж. П. С.", 1903, № 10, СПБ.
89. Cremona — „Elemente des graphischen Kalkules".
90. Culmann. — „Das graphische Rechnen", I отд. книги „Die graph. Statik".
91. Eagles, T. H. — „Constructive Geometry of Plane Curves".
92. Mehmke, R. — „Leitfaden zum graphischen Rechnen". Leipzig — Berlin, 1917.
93. Ott, K., von-. — „Die Grundzüge des graphischen Rechnens".
94. Pirani, M. — „Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik".
95. Prölss, O. — „Graphisches Rechnen . A. N. u. G., № 708. Leipzig — Berlin, 1920.
96. Runge, C. — „Graphische Methoden". Leipzig — Berlin, 1915.
97. Smith R. H. — „Graphics or the art of calculation by drawing Lines".
98. Vogler, Ch. A. — „Anleitung zum Entwerfen von graphischen Tabele". Berlin, 1877.

2. Номографічне числення

99. Волков. — „Математические основы номографии", 1911.
100. Герсеванов, Н. М. — „Основания номографического исчисления". СПБ., 1918.
101. Eisner, F. — „Ueber die Verwendung Zeichnerischer Rechenverfahren (Nomographie) im Eisenbau". „Der Bauingenieur", 1923, Heft 19—20.
102. Goedseels. — „Les procédés pour simplifier des calcules". Bruxelles, 1898.
103. Konorski. — „Die Grundlagen der Nomographie". Berlin, 1923.
104. Krauss, F. — „Die Nomographie oder Fluchtlinienkunde". Berlin, 1922.
105. Lacmann, O. — „Die Herstellung gezeichneter Rechentafeln". Berlin, 1923.
106. Massau. — „Memoire sur l'integration graphique", 1884.
107. Massau. — „Sur l'integration graphique des équations aux dérivées partielles", 1900.
108. D'Ocagne, M. — „Traité de Nomographie". Paris, 1921 (имеется обширный указатель литературы).
109. D'Ocagne, M. — „Calcule graphique et Nomographie", 1908.
110. Педл, Д. — „Построение и применение номограмм", перевод с англ., 1913.
111. Pirani, M. — „Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik".
112. Schilling, Fr. — „Ueber die Nomographie von M. d'Ocagne". Leipzig, 1900.
113. Schleicher, F. — „Nomographische Tabellen für Einfach bewehrte Rechteckquerschnitte". „Der Bauingenieur" 1925, Heft, 18.
114. Schwerdt, H. — „Lehrbuch der Nomographie". Berlin, 1924.
115. Seco de la Garza, R. — „Les nomogrammes de l'Ingenieur", 1912.

116. Soreau, R. — „Construction à la théorie et aux applications de la Nomographie ou Traité des Abaqués", 1922.
117. Soreau, R. — „Nomographie ou Traité des Abaqués", 1922.
118. Werkmeister. — „Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomographie)". Berlin, 1923.

3. Векторіяльне числення

119. Abraham, M., Dr. — „Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität". I Abschnitt. S. 1 — 122 „Vektoren und Vektorfelder". Leipzig. 1904.
120. Bucherer, A. H., Dr — „Elemente der Vektor - Analysis mit Beispielen aus der theoretischen Physik". Leipzig, 1905.
121. Hans, R, Dr. — Einführung in die Vektor - Analysis mit Anwendungen auf die Mathematische Physik". Leipzig, 1905.
122. Gibbs and Wilson. — „Vektor Analysis".
123. Henrici and Turner. — „Vectors and Rotors with Applications". London.
124. Ignatowsky, v. — „Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik". Leipzig, 1909.
125. Jahnke. — „Vorlesungen über Vektorenrechnung". Leipzig, 1905.
126. Сомов, П. О. — „Векториальный анализ и его приложения". СПБ., 190 .
127. Valentiner. — „Vektoranalysis". Leipzig. 1912.

Додатковий показник літератури про наближені обчислення[1])

1. Брадис, В. М. — „Опыт обоснования некоторых практических правил действий над приближенными числами". „Известии Тверского Педагогического Института", 1929. Вып. 3.
2. Брадис. В. М. — „Правила подсчета цифр". „Математическое Образование", 1928, №№ 1 и 2.
3. Гаврилов, А. Ф. — „Практика вычислений (приближенные вычисления)". ГИЗ. 1926.
4. Головкин, Д. Н. — „О содержании предмета графической математики". „Известия Азербейджанского Политехникума". 1928. Вып. IV и V. Баку. (Є бібліографічний показник).
5. Иванов, А. А. — „Теория ошибок и способ наименьших квадратов". Научное Книгоиздательство. Ленинград, 1921.
6. Идельсон, Н. И. — „Уравнительные вычисления по способу наименьших квадратов". ГИЗ. 1927.
7. Крылов, А. Н. — „Лекции о приближенных вычислениях". СПБ., 1911.
8. Крылов, А. Н. „Приближенное численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений". Изд. Рос. ж. д. миссии РСФСР. Берлин, 1923.
9. Павлов. Н. Н. — „Производство технических вычислений". Гостехиздат, 1927.
10. Придатко, С. — „Практические вычисления". ГИЗ. 1924.
11. „Программы и методические записки Единой Трудовой Школы". Вып. III и V. ГИЗ. 1927.

---

[1]) Запозичено зі статті В. М. Брадиса — „Приближенные вычисления в педагогическом ВУЗ'е". — „Известия Тверского Педагогического Института", вып. V, 1929.

12. Runge, C. und König, H. — „Vorlesungen über numerisches Rechnen". Berlin, 1924

13. Sanden, H. — „Pra ktische Analysis". Leipzig — Berlin. 1923. (Є показник літератури).

14. Sanden, H. — „Mathematisches Praktikum". Leipzig — Berlin. 1927.

15. Schurtka, L. — „Zahlrechnen". (Sammlung Mathem. — Phys. Lehrbücher). Leipzig — Berlin. 1923. (Є показник літератури).

16. Субботин, М. Ф. — „Численное интегрирование дифференциальных уравнений". „Бюллетень Сред. - Аз. Гос. Института", 1927, № 16 и 1928, № 17. (Є показник літератури).

17. Фан-дер-Флит, А. П. — „Арифметика приближенных чисел". Прага, 1922.

18. Weitbrecht, W. — „Ausgleichungsrechnung nach der Method der kleinsten Quadraten. 1919, 1920.

19. Whittaker, E. G. and Robinson, G. — „The Calculus of Observations". A Treatise on Numerical Mathematics. London. 1926. (Є багатий показник літератури).

ЧАСТИНА II

(ПРАКТИЧНА)

ДОДАТКОВІ ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ ТА ПОЯСНЕННЯ. ПРИКЛАДИ, ВПРАВИ Й ЗАДАЧІ НА ТЕХНІЧНІ ОБЧИСЛЕННЯ

ВІДДІЛ І

Додаткові допоміжні відомості та пояснення

1. Порівняльна таблиця метричних і російських мір та практичні наближені співвідношення між ними

Міри довжини

1 верства = 1,0668 кілометра	1 кілометр = 0.937363 верстви
1 сажень = 2,1336 метра	1 метр = 0,468691 сажня
1 аршин = 71,12 сантиметра	1 метр = 1,40607 аршина
1 вершок = 4,445 „	1 метр = 22,4972 вершка
1 фут = 30,48 „	1 метр = 3,28084 фута
1 цаль = 2,54 „	1 метр = 39,3701 цаля

1 географічна міля ($^1/_{15}$ градуса земного екватора) = 6,9569 верстви = 7,4217 кілометра.

1 морська міля (1 мінута земного меридіяна) = 1,7362 верстви = 1,8522 кілометра.

1 вузол (англійська морська міля за годину) $= 1{,}7362 \ \frac{\text{верстви}}{\text{за годину}} = 1{,}8522 \ \frac{\text{кілометра}}{\text{за годину}}$

Міри площі

1 кв. верства = 1,13806 кв. кілом.	1 кв. кілометр = 0,878687 кв. верстви
1 кв. сажень = 4,55225 кв. метр.	1 кв. метр = 0,219672 кв. сажня
1 кв. аршин = 0,505805 кв. метр.	1 кв. метр = 1,97704 кв. аршина
1 кв. вершок = 19,758 кв сантим.	1 кв. метр = 10,7639 кв. фута
1 кв. фут = 0,092903 кв. метр.	1 кв. сант. = 0,0506123 кв. вер.
1 кв. цаль = 6,4516 кв. сант.	1 кв. сант. = 0,155 кв. цаля
1 десятина = 1,09254 гектара	1 гектар = 0,915299 десятини

Міри об'єму

1 куб. сажень = 9,71268 куб. мет.	1 куб. метр = 0,102958 куб. сажня
1 куб. аршин = 0,359729 куб мет.	1 куб. метр = 2,77987 куб. аршина
1 куб вершок = 87,8244 куб. мет.	1 куб. метр = 35,3147 куб. фута
1 куб. фут = 0,0283168 куб сан.	1 куб. сант. = 0,0113864 куб. верш.
1 куб. цаль = 16,3871 куб. сан.	1 куб. сант. = 0,0610237 куб. цаля
1 відро = 12,299 літра	1 літр = 0,081395 відра
1 четверик = 26,2387 літра	1 літр = 0,0381116 четверика

Міри ваги

1 пуд = 16,380496 кілогр.	1 тонна = 61,048211 пуда
1 фунт = 409,51241 грама	1 кілог. = 0,061048211 пуда

1 лот	= 12,797263 грама	1 кг = 2,4419284 фунта	
		78,1417088 лота	
1 золотник	= 4,2657543 грама	1 грам = 0,23442513 золотника	
1 доля	= 44,4349 міліграма	1 мілiг. = 0,025048 долі.	

Міри аптекарської ваги

1 аптекарський фунт = 12 унціям = 84 золотникам = 358,32 грама
1 аптекарська унція = 8 апт. драхмам = 672 долям = 29,86 грама
1 аптекарська драхма = 3 скрупулам або 84 долям = 373 грамам
1 аптекар. скрупул = 20 гранам = 28 долям = 1,24 грама
1 аптекарський гран = 1,4 долі = 0,0001 апт. фунта = 62,21 міліграма
1 кілограм = 2,79 апт. фунта
1 грам = 0,00279 апт. фунта
1 міліграм = 0,02 апт. грана

На практиці замість зазначених чисел користуються звичайно наближеними, відкидаючи кілька десяткових знаків і, крім того, заокруглюючи залишені. Ступінь точности, з яким слід брати те чи те число, цілком залежить від характеру даної задачі.

При наближенім оберненні російських мір у метричні в повсякденній практиці з достатньою для неї точністю.

треба:	щоб одержати:
число цалів поділити на 0,4	число сантиметрів
„ вершків помножити на 4,4	
„ сажнів помножити на 2	„ метрів
„ футів „ „ 0,3	
„ аршин „ „ 0,7	
„ верстов збільшити на 7%	„ кіломнтрів
„ кв. цалів помножити на 6,6	„ кв. сантиметрів
„ „ футів „ „ 0,09	„ кв. метрів
„ „ сажнів „ „ 4,4	
„ „ верстов збільшити на $^1/_7$ (на 14% . .	„ кв. кілометрів
„ кв миль (географічн.) помножити на 55	
„ десятин збільшити на 9%	„ гектарів
„ куб. цалів поділити на 0,06	„ куб. сантиметрів
„ куб. футів помножити на 0,03	„ уб. метрів
„ куб сажнів „ „ 10	
число четвертей „ „ 2	„ гектолітрів
„ відер поділити на 8	
„ долей „ „ 20	„ грамів
„ золотників помножити на 4	
„ гранів „ „ 0,6	
„ драхм „ „ 4	
„ фунтів „ „ 0,4	„ кілограмів
„ пудів поділити на 0,06	

Вельми корисно також для практики знати наближені співвідношення між російськими і метричними мірами за допомогою деяких речей, з якими доводиться раз-у-раз мати діло в повсякденнім житті.

Так, можна вважати, що **метр** дорівнює „**півтора аршинам без півтора вершків**“ або **сорока цалям**.

Ще з більшою точністю можна вважати **метр** за рівний **довжиною діягоналі квадрата, що має бік в один аршин.**

З приводу цього зовсім випадкового, але надзвичайно зручного й цінного для практики співвідношення важливо запам'ятати, що воно існує при всякій величині боку квадрата, тобто: якщо збудувати квадрат з боком два аршини, то діягоналя дорівнює двом метрам; якщо піваршина, — то півметрові тощо.

Цікаво також, що ці співвідношення дійсні й для зворотного обертання мір. Так, коли боки квадрата дорівнюють півметрові, то його діягоналя дорівнює одному аршинові; коли бік квадрата дорівнює одному метрові, діягоналя дорівнює двом аршинам; коли бік квадрата — півтора метри, діягоналя дорівнює 3 аршинам, тобто одному сажневі.

Ці співвідношення ясно бачимо на доданім рисунку I. З цього ж рисунка не важко зробити висновок, що 1 кв. метр - 2 кв. аршинам.

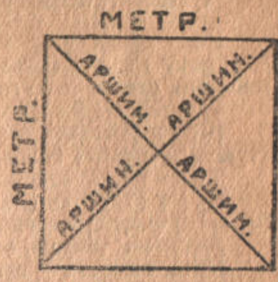


Рис. I

Не вадить до речі зауважити, що 1 кв. сажень - $4^1/_2$ кв. метрам, а 1 куб. сажень — 10 куб. метрам.

Далі, один метр, приблизно, можна одержати, якщо відкласти рукою, як це звичайно роблять, 6 четвертей, або вважати за рівну з метром довжину віддалі від кінців пальців просягнутої руки до плеча другої руки.

Нарешті, 3 кроки дорослої нормальної людини, приблизно, дорівнюють 2 метрам.

Ширина покладеної на столі долоні руки дорослого чоловіка з щільно притиснутими один до одного пятьма пальцями, приблизно, дорівнює десятьом сантиметрам.

Довжина вказівця нормальної людини середнього зросту, лічивши від основи великого пальця, дорівнює десятьом сантиметрам.

Та сама величина в десять сантиметрів, приблизно, дорівнює віддалі між кінцями вказівця й середнього пальця руки широко розчепірених на зразок циркля.

Довжина крайнього суглоба мізинця приблизно дорівнює двом з половиною сантиметрам.

Довжина дерева сірника російських фабрик точно дорівнює пятьом сантиметрам або двом цалям.

Відзначім також оці набдижені співвідношення:

15 верстов	= 16 кілометрам.
15 сажнів	= 32 метрам,
9 вершків	= 40 сантиметрам,
11 десятин	= 12 гектарам,
7 кв. верстов	= 8 кв. кілометрам.

Для наближеного обертання мір об'єму корисно запам'ятати такі співвідношення:

Чайна склянка, середня завбільшки, приблизно, дорівнює 200 куб. сантиметрам або $^1/_5$ літра, отже, один літр дорівнює пятьом склянкам.

Місткість чайної чашки, приблизно, дорівнює 100 куб. сантиметрам, тобто $^1/_{10}$ літра, отже, один літр дорівнює десятьом чайним чашкам.

Місткість столової ложки, середньої завбільшки, дорівнює 12 — 15 куб. сантиметрам.

Десертна ложка - 7 — 10 куб. сантиметрам.

Чайна ложка = 3 — 5 куб. сантиметрам.

Сорокавідерна бочка дорівнює, приблизно, $^1/_2$ куб. метра і важить $^1/_2$ тонни.

Інакше сказавши:

1 кубічний метр = 80 відрам.

Це співвідношення корисно знати, щоб обертати місткість посудини в відрах у метри і навпаки.

Користуючись із зазначених співвідношень для практичного порівнювання мір за допомогою навколишніх речей щоденного життя, кожен може знайти найзручніше й точне мірило для переходу від російських мір до метричних і навпаки.

II. Нова французька практична система одиниць мір (*MTS*) і співвідношення її з попередньою (*MKS*) та (*CGS*).

Нову французьку практичну систему одиниць мір узаконено у Франції 1919 року і запроваджено у вжиток в усіх торговельних і торговельно-промислових зладах із 5-го серпня 1920 року.

Система *MTS* збудована тотожньо з системою *CGS*.

Щоб переходити від системи *MTS* до системи *MKS* і назад, слід користуватися з таких співвідношень:

Тонна (t) — одиниця маси = 1000 *кг* маси.

Стен (Sn) — одиниця сили (її вимір[1]) ($M^1L^1T^{-2}$) = 10^8 дин = 102 *кг* сили (*кг* ваги) = 0,102 t ваги.

Метрична тонна — вага = 9,8 стена.

Метр. кілограм — вага = 0,98 сантистена.

П'єза (pz) — одиниця тиску — (один стен на 1 *кв. м*, тобто Sn^1m^{-2}, його вимір $M\,L^{-1}T^{-2}$) = 0,0102 *кг/см²* = 0,00987 атмосфери.

1 кілограм — вага на 1 *кв.* сантиметр = 0,98 гектоп'єзи.

1 нормальний атмосферний тиск в 76 *см* живосрібного стовпа при 0° і при нормальнім пришвидшенні сили тягару = 1,013 гектоп'єзи = 1,033 кілогр.-ваги — на кв. сантиметр.

Кілоджавл (kJ) — одиниця роботи (стен — метр, тобто Sn^1m^1, — його вимір $M\,L\,T^{-2}$) = $10/^{10}$ ергів = 102 *кгм*.

1 кілограмометр = 9,8 джавлам.

Кіловат (kW) – одиниця потужности (стен-метр у секунду, тобто $m^1Sn^1S^{-1}$, його вимір $M^1L\,T^{-3}$) = $10/^{10}$ ерг — сек. - 102 *кгм сек* — 1,36 парового коня.

100 кілограмометрів за секунду = 0,98 кіловата.

1 паровий кінь = 75 кілограмометрів за секунду = 0,736 кіловата.

Термія (th) — одиниця кількости тепла = 1000 великих кальорій.

Мікротермія — практично еквівалентна з 4,18 джавлів або 0,426 кілограмометрів (на протязі континенту лише Франції).

Децимальна свічка (bd) — одиниця сили світла — „джерело з силою світла, що дорівнює одній двадцятій частині сили світла етальону Віолія“ (етальон Віолія — площа в 1 *кв. см* на поверхні розтопленої плятини, що променює по нормалі при температурі тверднення).

Люмен (ln) — одиниця світлового потоку — „світловий потік від рівномірно променювального джерела безконечно малих розмірів і силою в одну децимальну свічку і променьований упродовж одної секунди в тілесний кут, що його вирізає площа в 1 *кв. м* (на поверхні кулі) радіюсом в 1 *м*, який має центр зазначене джерело“.

Люкс (Lx) — одиниця освітлености — „освітленість поверхні в 1 *кв. м*, що дістає рівномірно розподілений світловий потік в один люмен“.

Діоптрія — одиниця сили оптичних стекол — „сила оптичної системи, якої фокусова віддаль дорівнює 1 *м*“.

Для більшої наочности нині чинні системи мір *CGS* та *MKS* і нову *MTS* зіставлено в оцій таблиці, запозиченій із журналу „Строительная Промышленность“ № 2 за 1926 р.

---

[1]) (M) — одиниця сили L — одиниця довжини, T — одиниця часу (див част. I, розділ I, §§ 4 й 6).

Вимірювані величини	Фізична система метричних мір cgs	Теперішня технічна система метричних мір MKS	Нова технічна система метричних мір MTS
		А. Основні одиниці	
Довжина	Сантиметр $= c = 10^{-2} M$	Метр $= M = 10^2 c$	Метр $= M$
Час	Секунда $= s$	Секунда $= S$	Секунда $= S$
Швидкість	cs^{-1}	MS^{-1}	MS^{-1}
Пришвидшення	cs^{-2}	MS^{-2}	MS^{-2}
Маса	Грам $= g =$ маса 1 *куб. см* води $= 10^{-6}\, T = \frac{KM^{-1}S^2}{9,8 \times 10^3}$.	$KM^{-1}S^2 = 9,8 \times 10 \times g =$ маса 9,8 куб. дециметра води	Тонна $= T = 10^6 \times g =$ мегаграм $=$ маса 1 *куб. м* води
		Б. Механічні одиниці	
Сила	Дина $= cgs^{-2} = \frac{K}{9,8 \times 10^5} = 0,00000102\, K =$ сила, що надає масі в 1 g пришвидшення в $1 \frac{c}{s^2}$.	Кілограм $= K = 9,8 \times \frac{M}{S^2} \times 10^3 \times J = 9,8 \times 10^2\, c \times 10^3 g \times s^{-2} = 9,8 \times 10^5 cgs^{-2} = 9,8 \times 10^5$ дин $= 0,98$ сантистена $=$ вага 1 літра води $=$ сила, що надає масі 1 літра води пришвидшення в 9,8 MS^{-2} або масі 9,8 літра води пришвидшентя в 1 MS^{-2}.	1) Стен $= sn = T \times MS^{-2} = MTS^{-2} =$ сила, що надає в 1 сек. масі в 1 тонну пришвидшення в 1 $MS^{-2} = 10^8\, cgs^{-2} = 10^8$ дин $= \frac{10^8}{9,8 \times 10^5} K = 102K$. 2) Сантистен $=$ мегадина $= 102\, K$.

Вимірювані величини	Фізична система метричних мір CGC	Теперішня технічна система метричних мір MKS	Нова технічна система метричних мір MTS
Робота	Ерг=дина $\times$ сантиметр= $= c^2gs^{-2} = 10^{-7}$ джавла = = 0,1 мікроджавла = 10^{-10} кілоджавла	1) Кілограметр $= KM = 9{,}8 \times 10^5 \times cgs^{-2} \times 10^2c = 9{,}8 \times 10^7 \times c^2gs^{-2} = 9{,}8 \times 10^7$ ергів $= 9{,}8$ джавла 2) Джавл $= J =$ робота сили, що надає масі 1 літра води пришвидшення в 1 M сек², на шляху 1 метра $= 10^3g \times \frac{(10^2c)^2}{s^2} = 10^7c^2gs^{-2} = 10^7$ ергів $= \frac{KM}{9{,}8}$	1) Кілоджавл $= kJ = MTS^{-2} \times M = M^2TS^{-2} = sn \times M$ (стенометр) $= 10^8\, cgs^{-2} \times 10^2 c = 10^1\, c^2gs^{-2} = 10^{11}$ ергів $= 10^3$ джавлів $= 102\, KM =$ =робота 1 стена на шляху 1 метра 2) 1 кіловатгодина = 3600 кілоджавлів $= 3600 \times 10^3 \times J = 3{,}6 \times 10^6\, J =$ = 3,6 мегаджавла.
Потужність	$c^2gs^{-3} =$ потужність, спроможна за 1 секунду дати роботу в 1 ерг = $= 10^{-7}\, W = 0{,}1$ мікровата.	1) Кілограмметр за секунду $= KMS^{-1} = 9{,}8\, W$ 2) Ват $= W = \frac{\text{джавл}}{\text{сек.}} = 10^7 \frac{\text{ерг.}}{\text{сек.}} = \frac{KMS^{-1}}{9{,}8} =$ вольтампер $= VA$ 3) Мех. кінь $= 75\, KMS^{-1} = 75 \times 9{,}8 \times W = 736\, W$	Кіловат $= kW = M^2TS^{-3} = (10^2c)^2 \times (10^6g) \times S^{-3} = 10^1\, c^2gs^{-3} = 10^{11} \frac{\text{ерг.}}{\text{сек.}} = 10^3 \frac{\text{джавл.}}{\text{сек.}} = 10^3\, W =$ = 1,36 м. к. = потужність, що витворює 1 кілоджавл за 1 сек.

Вимірювані величини	Фізична система метричних мір *CGC*	Теперішня технічна система метричних мір *MKS*	Нова технічна система метричних мір *MTS*
Напруга тиску	Барія (за нов. сист.) $= \frac{\text{дина}}{\text{кв см}} = \frac{cgs^{-2}}{c^2} = c^{-1}gs^{-2}$	1) $KM^{-2} = 10^{-4}$ атмосф. = 0,98 сантип'ези 2) Атмосф. $= K/см^2 = 10^4\,KM^{-2} = 10^4 \times 9{,}8 \times 10^5 \times cgs^{-2} \times (10^2c)^{-2} = 10^5 \times 9{,}8c^{-1}gs^{-2} = 9{,}8 \times 10^8$ барій = 0,98 гектоп'ези 3) Норм. атм. тиск., що відпов. висоті 76 *см* живосрібного стовпа = 1,013 гектоп'ези = 1,033 *к см²*	1) П'еза $= pz = \frac{sn}{M^2} = \frac{MTS^{-2}}{M^2} = M^{-1}TS^{-2} = (10^2)^{-1} \times (10^6g) \times S^{-2} = 10^4c^{-1}gs^{-2} = 10^4$ барій $= \frac{\text{ат.}}{9{,}8 \times 10} = 0{,}0102$ ат. 2) Гектоп'еза = 100 п'ез = 1,02 ат. 3) Барія $= 10^{-4}$ п'ези = міріяп'еза $= 10^{-4}M^{-1}TS^{-2} = 0{,}00000102$ ат.
		В. Теплові одиниці	
Кількість тепла	Мала кальорія = кількість тепла, що підвищує температуру 1 грама води на 1°C	Велика кальорія = кількість тепла, що підвищує температуру 1 кілограма води на 1°C = 1 000 мал. кальорій	Термія = *th* = кількість тепла, що підвищує температуру 1 тонни води на 1 C = 1 000 великих кальорій = 10^6 малих кальорій Фригорія = — (мінус) в. кальорія Мікротермія = мала кальорія = 4,18 джавла = 0,426 кілограмометра

Вимірювані величини	Фізична система метричних мір CGS	Теперішня технічна система метричних мір MKS	Нова технічна система метричних мір MTS
		Г. Електричні одиниці	
Сила струму	Ампер $=10^{-1}c^{\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{2}}s^{-1}$	Ампер $=10^{-1}\times(10^{-2}M)^{\frac{1}{2}}\times$ $\times\left(\frac{KM^{-1}S^{2}}{10^{3}\times 9{,}8}\right)^{\frac{1}{2}}\times S^{-1}=10^{-3,5}\times\left(\frac{K}{9{,}8}\right)^{\frac{1}{2}}$	Ампер $=10^{-1}\times(10^{-2}M)^{\frac{1}{2}}\times$ $\times(10^{-6}T)^{\frac{1}{2}}S^{-1}=10^{5}M^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}S^{-1}$
Електрозворушення	Вольт $=10^{8}c^{\frac{3}{2}}g^{\frac{1}{2}}s^{-2}$	Вольт $=\frac{\text{ват}}{\text{ампер}}=\frac{KMS^{-1}}{9{,}8}:\Big[10^{-3,5}\times$ $\times\left(\frac{K}{9{,}8}\right)^{\frac{1}{2}}\Big]=10^{3,5}MS^{-1}\left(\frac{K}{9{,}8}\right)^{\frac{1}{2}}$	Вольт $=10^{8}\times(10^{-2}M)^{\frac{3}{2}}\times(10^{-6}T)^{\frac{1}{2}}\times$ $\times S^{-2}=10^{2}M^{\frac{3}{2}}T^{\frac{1}{2}}S^{-2}$
Електричний опір	Ом $=10^{9}cs^{-1}$	Ом $=10^{9}(10^{-2}M)\cdot S^{-1}=10^{7}MS^{-1}$	Ом $=10^{9}\times 10^{-2}MS^{-1}=$ $=10^{-7}MSS^{-1}$
Кількість електрики	Кульон $=10^{-1}c^{\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{2}}$	Кульон=ампер—секунда $=10^{-1}\times$ $\times(10^{-2}M)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{KM^{-1}S^{2}}{10^{3}\times 9{,}8}\right)^{\frac{1}{2}}=$ $=10^{-3,5}\times\left(\frac{K}{9{,}8}\right)^{\frac{1}{2}}\times S$	Кульон $=10^{-1}\times(10^{2}M)^{\frac{1}{2}}\times$ $\times(10^{-6}T)^{\frac{1}{2}}=10^{-5}M^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}$

III. Загальний хід визначення помилки функції від кількох величин, визначених з огріхом

Нехай маємо кілька незалежних одна від однієї величин x_1, x_2, $x_3 \ldots$, визначених з помилками $\pm \delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \ldots$ і якусь функцію від них

$$y = F(x_1\ x_2\ x_3 \ldots) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Який огріх δ_y цієї функії?

У теорії помилок доводиться, що помилка функції є функція помилок змінних, які входять до неї; для знаходження її дається там оцю формулу:

$$\delta_y \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\delta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\delta_2\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial x^3}\delta_3\right)^2 + \ldots} \ldots\ldots \text{(II)}$$

У цій формулі $\frac{\partial F}{\partial x_i}\delta_i$ позначає помилку даної функції, що залежить від помилки δ_i у величині x_i. Користуючись із цієї формули, можна визначити величину помилки для деяких найпростіших функцій, що найчастіш трапляються в практиці.

Так, припускаючи, що a_i є відомі дані величини без помилок, а x_i — величини, визначені з пересічною помилкою δ_i, ми одержимо, на підставі рівняння (II), такі формули помилок для оцих функцій:

$$\left.\begin{array}{lll}
1.\ y = ax; & \delta_y = \pm a\delta_1; & \\
2.\ y = a_1x_1 \pm a_2x_2 \pm a_3x_3 & \delta_y = \pm \sqrt{(a\,\delta_1)^2 + (a_2\delta_2)^2 + (a_3\delta_3)^2}; & \\
3.\ y = ax_1\,x_2; & \delta_y = \pm \sqrt{(ax_2\,\delta_1)^2 + (ax_1\,\delta_2)^2}; & \\
4.\ y = \frac{a}{x}; & \delta_y = \pm \frac{a}{x^2}\delta; & \\
5.\ y = a\frac{x_1}{x_2}; & \delta_y = \pm \sqrt{\left(\frac{a}{x_2}\delta_1\right)^2 + \left(\frac{a}{x_1}\delta_1\right)^2}; & \\
6.\ y = x^a; & \delta_y = \pm ax^{a-1}\delta; & \\
7.\ y = \sqrt[a]{x} & \delta_y = \pm \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[a]{x^{a-1}}}\delta. &
\end{array}\right\} \text{(III)}$$

Теорія помилок дає такі відповіді на друге цікаве для практики питання, а саме:

Якусь величину y треба визначити з рівняння $y = f(x)$ на підставі заданої величини x; яка велика може бути помилка δ_x величини x, щоб величина помилки δ_y невідомої y не перевищила якоїсь заданої величини?

На підставі сказаного, величину δ_x можна визначити з рівняння:

$$\delta_y = \frac{df(x)}{dx}\delta_x = f'(x)\,\delta_x \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

звідки

$$\delta_x = \frac{\delta_y}{f'(x)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V)}$$

Наведені формули (III) і (V) можна застосувати й використати для визначення огріхів результатів обчислення за наближеними способами, описаними в II відділі підручника, у розділі V.

IV. Таблиця квадратів, кубів, коренів квадратових і кубичних, логаритмів, обводів та площ кола ряду натуральних чисел від 1 до 1000.

Діяметр кола d взято за рівний за 1/10 цих чисел.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	$d=0,1\,n$	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
0	0	0	0,0000	0,0000	∞	$-\infty$	0,0	0,000	0,0000
1	1	1	1,0000	1,0000	1,00000	0,0000	1	0,314	0,0079
2	4	8	1,4142	1,2599	0,50000	0,3010	2	0,628	0,0314
3	9	27	1,7321	1,4422	0,33333	0,4771	3	0,942	0,0707
4	16	64	2,0000	1,5874	0,25000	0,6021	4	1,257	0,1257
5	25	125	2.2361	1,7100	0,20000	0,6989	5	1,571	0,1964
6	36	216	2,4495	1,8171	0,16667	0,7781	6	1,885	0,2827
7	49	343	2,6458	1,9129	0,14286	0,8451	7	2,199	0,3848
8	64	512	2,8284	2,0000	0,12500	0,9031	8	2,513	0,5026
9	81	729	3,0000	2,0801	0,11111	0,9542	9	2,827	0,6362
10	100	1000	3,1623	2,1544	0,10000	1,0000	1,0	3,142	0,7854
11	121	1331	3,3166	2,2240	0,09091	1,0414	1	3,456	0,9503
12	144	1728	3,4641	2,2894	0,08333	1,0792	2	3,770	1,1310
13	169	2197	3,6056	2,3513	0,07692	1,1139	3	4,084	1,3273
14	196	2744	3,7417	2,4101	0,07143	1,1461	4	4,398	1,5394
15	225	3375	3,8730	2,4662	0,06667	1,1761	5	4,712	1,7671
16	256	4096	4,0000	2,5198	0,06250	1,2041	6	5,027	2,0106
17	289	4913	4,1231	2,5713	0,05882	1,2304	7	5,341	2,2698
18	324	5832	4,2426	2,6208	0,05556	1,2553	8	5,655	2,5447
19	361	6859	4,3589	2,6684	0 05263	1,2788	9	5,969	2,8353
20	400	8000	4,4721	2,7144	0 05000	1,3010	2,0	6,283	3,1416
21	441	9261	4,5826	2,7589	0,04762	1,3222	1	6,597	3,4636
22	484	10648	4,6904	2,8020	0,04545	1,3424	2	6,912	3,8013
23	529	12167	4,795[illegible]	2,8439	0,04348	1,3617	3	7,226	4,1548
24	576	13824	4,8990	2,8845	0,04167	1,3802	4	7,540	4,5239
25	625	15625	5,0000	2,9240	0,04000	1,3979	5	7,854	4,9087
26	676	17576	5,0990	2,9625	0,03846	1,4149	6	8,168	5,3093
27	729	19683	5,1962	3,0000	0,03704	1,4314	7	8,482	5,7256
28	784	21952	5,2915	3,0366	0,03571	1,4472	8	8,796	6,1575
29	841	24389	5,3852	3,0723	0,03448	1,4624	9	9,111	6,6052
30	900	27000	5,4772	3,1072	0,03333	1,4771	3,0	9,425	7,0686
31	961	29791	5,5678	3,1414	0,03226	1,4914	1	97,39	7,5477
32	1024	32768	5,6569	3,1748	0,03125	1,5051	2	10,05	8,0425
33	1089	35937	5,7446	3,2075	0,03030	1,5185	3	10,37	8,5530
34	1156	39304	5,8310	3,2396	0,02941	1,5315	4	10,68	9,0792
35	1225	42875	5,9161	3,2711	0,02857	1,5441	5	11,00	9,6211

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d= 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
36	1296	46655	6,0000	3,3019	0,02778	1,5563	6	11,31	10,1790
37	1369	50653	6,0828	3,3322	0,02703	1,5682	7	11,62	10,752
38	1444	54872	6,1644	3,3620	0,02632	1,5798	8	11,92	11,341
39	1521	59319	6,2450	3,3912	0,02564	1,5911	9	12,25	11,946
40	1600	64000	6,3246	3,4200	0,02500	1,6021	4,0	12,57	12,566
41	1681	68921	6,4031	3,4482	0,02439	1,6128	1	12,88	13,203
42	1764	74088	6,4801	3,4760	0,02381	1,6232	2	13,19	13,854
43	1849	79507	6,557	3,5034	0,02326	1,6335	3	13,51	14,522
44	1936	85184	6,6332	3,5303	0,02273	1,6434	4	13,82	15,205
45	2025	91125	6,7082	3,5569	0,02222	1,6532	5	14,14	15,904
46	2116	97336	6,7823	3,5830	0,02174	1,6628	6	14,45	16,619
47	2209	103823	6,8557	3,6088	0,02128	1,6721	7	14,77	17,349
48	2304	110592	6,9282	3,6342	0,02083	1,6812	8	15,08	18,096
49	2401	117649	7,0000	3,6593	0,02041	1,6902	9	15,39	18,857
50	2500	125000	7,0711	3,6840	0,02000	1,6990	5,0	15,71	19,635
51	2601	132651	7,1414	3,7084	0,01961	1,7076	1	16,02	20,428
52	2704	145608	7,2111	3,7325	0,01923	1,7160	2	16,34	21,237
53	2809	148877	7,2801	3,7563	0,01887	1,7243	3	16,65	22,062
54	2916	157464	7,3485	3,7798	0,01852	1,7324	4	16,96	22,902
55	3025	166375	7,4162	3,8030	0,01818	1,7404	5	17,28	22,758
56	3136	175616	7,4833	3,8259	0,01786	1,7482	6	17,59	24,630
57	3249	185193	7,5498	3,8485	0,01754	1,7559	7	17,91	25,518
58	3364	195112	7,6158	3,8709	0,01724	1,7634	8	18,22	26,421
59	3481	205379	7,6811	3,8930	0,01695	1,7708	9	18,54	27,340
60	3600	216000	7,7460	3,9149	0,01667	1,7781	6,0	18,85	28,274
61	3721	226981	7,8102	3,9365	0,01639	1,7853	1	19,16	29,225
62	3844	238325	7,8740	3,9579	0,01613	1,7924	2	19,48	30,191
63	3969	250047	7,9373	3,9791	0,01587	1,7993	3	19,79	31,172
64	4096	262144	8,0000	4,0000	0,01563	1,8062	4	20,11	32,170
65	4225	274625	8,0623	4,0207	0,01538	1,8129	5	20,42	33,183
66	4356	287496	8,1240	4,0412	0,01515	1,8195	6	20,73	34,212
67	4489	300763	8,1854	4,0615	0,01493	1,8261	7	21,05	35,257
68	4624	314432	8,2462	4,0817	0,01471	1,8325	8	21,36	36,317
69	4761	328509	8,3066	4,1016	0,01449	1,8388	9	21,68	37,393
70	4900	343000	8,3666	4,1213	0,01429	1,8451	7,0	21,99	38,485
71	5041	357911	8,4261	4,1408	0,01408	1,8512	1	22,31	39,592
72	5184	373248	8,4853	4,1602	0,01389	1,8573	2	22,62	40,715
73	5329	389017	8,5440	4,1793	0,01370	1,8633	3	22,93	41,854
74	5476	405224	8,6023	4,1983	0,01351	1,8692	4	23,25	43,008
75	5625	421875	8,6603	4,2172	0,01333	1,8751	5	23,56	44,179
76	5776	438976	8,7178	4,2358	0,01316	1,8808	6	23,88	45,365
77	5929	456533	8,7750	4,2543	0,01299	1,8865	7	24,19	46,566
78	6084	474552	8,8318	4,2727	0,01282	1,8921	8	24,50	47,784
79	6241	493039	8,8882	4,2908	0,01266	1,8976	9	24,82	49,017
80	6400	512000	8,9443	4,3089	0,01250	1,8031	8,0	25,13	50,265

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d = 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
81	6561	531441	9,0000	4,3267	0,01235	1,9085	1	25,45	51,530
82	6724	551368	9,0554	4,3445	0,01220	1,9138	2	25,76	52,810
83	6889	571787	9,1104	4,3621	0,01205	1,9191	3	26,08	54,106
84	7056	592704	9,1652	4,3795	0,01190	1,9243	4	26,39	55,418
85	7225	614125	9,2195	4.3968	0,01176	1,9294	**5**	26,70	56,745
86	7396	636056	9,2736	4,4140	0,01163	1.9345	6	27,02	58,088
87	7569	658503	9,3274	4,4310	0,01149	1,9395	7	27,33	59,447
88	7744	681472	9,3808	4,4480	0,01136	1,9445	8	27,65	60,821
89	7921	704969	9,4340	4,4647	0,01124	1,9494	9	27,96	62,211
90	8100	729000	9,4868	4,4814	0,01111	1,9542	**9,0**	28,27	63,617
91	8281	753571	9,5394	4,4979	0,01099	1,6590	1	28,59	65,039
92	8464	778688	9,5917	4,5144	0,01087	1,9638	2	28,90	66,476
93	8649	804357	9,6437	4,5307	0,01075	1,9685	3	29,22	67,929
94	8836	830584	9,6954	4,5468	0,01064	1,9731	4	29,53	69,398
95	9025	857375	9,7468	4,5629	0,01053	1,9777	**5**	29,85	70,882
96	9216	884736	9,7980	4,5789	0,01042	1,9823	6	30,16	72,382
97	9409	912673	9,8489	4,5947	0,01031	1,6868	7	30,47	73,898
98	9604	941192	9,8995	4,6104	0,01020	1,9912	8	30,79	75,430
99	9801	970299	9,9499	4,6261	0,01010	1,9956	9	31,10	76,977
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	0,01000	2,0000	**10,0**	31,42	78,540
101	10201	1030301	10,0499	4,6570	0,00990	2,0043	1	31,73	80,118
102	10404	1061208	10,0995	4,6723	0,00980	2,0086	2	32,04	81,713
103	10609	1092727	10,1489	4,6875	0,00971	2,0128	3	32,36	83,323
104	10816	1124864	10,1980	4,7027	0,00962	2,0170	4	32,67	84,949
105	11025	1157625	10,2470	4,7177	0.00952	2,0212	**5**	32,99	86,590
106	11236	1191016	10,2956	4,7326	0,00943	2,0253	6	33,30	88,247
107	11449	1225043	10,3441	4,7475	0,00935	2,0294	7	33,62	89,920
108	11664	1259712	10,3923	4,7622	0,00926	2,0334	8	33,93	91,609
109	11381	1295029	10,4403	4,7769	0,00917	2,0374	9	34,24	93,313
110	12100	1331000	10,4881	4,7914	0,00909	2,0414	**11,0**	34,56	95,033
111	12321	1367631	10.5357	4,8059	0,00901	2,0453	1	34.87	96,769
112	12544	1404924	10,5830	4,8203	0,00893	2,0492	2	35,19	98,520
113	12769	1442897	10,6301	4,8346	0,00885	2,0531	3	35,50	100,287
114	12996	1481544	10,6771	4,8488	0,00877	2,0569	4	35,81	102,070
115	13225	1520875	10,7238	4,8629	0,00870	2,0607	**5**	36,13	103,869
116	13456	1560896	10,7703	4,8770	0,00862	2,0645	6	36,44	105,683
117	13689	1601613	10,8167	4,8910	0,00855	2,0682	7	36,76	107,513
118	13924	1643032	10,8628	4,9049	0,00847	2,0719	8	37,07	109,359
119	14161	1685159	10,9087	4,9187	0,00840	2,0755	9	37,38	111,220
120	14400	1728000	10,9545	4,9324	0,00833	2,0792	**12,0**	37,70	113,097
121	14641	1771561	11,0000	4,9461	0,00826	2,0828	1	38,01	114,990
122	14384	1815848	11,0454	4,9597	0,00820	2,0864	2	38,33	116,899
123	15129	1860867	11,0905	4,9732	0,00813	2,0899	3	38,64	118,823
124	15376	1906624	11,1355	4,9866	0,00806	2,0934	4	38,96	120,763
125	15625	1953125	11,1803	4,0000	0,00300	2,0969	**5**	39,27	122,719

n	²	n³	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d = 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^3$
126	15876	2000366	11,2250	5,0133	0,00794	2,1004	6	39,58	124,690
127	16129	2048383	11,2694	5,0265	0,00787	2,1038	7	39,90	126,677
128	16384	2097152	11,3137	5,0397	0,00781	2,1072	8	40,21	128,680
129	16641	2146689	11,3578	5,0528	0,00775	2,1106	9	40,53	130,698
130	16900	2197000	11,4018	5,0658	0,00769	2,1139	**13,0**	40,84	132,733
131	17161	2248091	11,4445	5,0788	0,00763	2,1173	1	41,15	134,782
132	17424	2299968	11,4891	5,0916	0,00758	2,1206	2	41,47	136,848
133	17689	2352637	11,5326	5,1045	0,00752	2,1238	3	41,78	138,929
134	17956	2406104	11,5758	5,1172	0,00746	2,1271	4	42,10	141,026
135	18225	2460375	11,6190	5,1299	0,00741	2,1303	5	42,41	143,139
136	18496	2515456	11,6619	5,1426	0,00735	2,1335	6	42,73	145,267
137	18769	2571353	11,7047	5,1551	0,00730	2,1367	7	43,04	147,412
138	19044	2628072	11,7473	5,1676	0,00725	2,1399	8	43,35	149,572
139	19321	2685619	11,7898	5,1801	0,00719	2,1430	9	43,67	151,747
140	19600	2744000	11,8322	5,1925	0,00714	2,1461	**14,0**	43,98	153,938
141	19881	2803221	11,8743	5,2048	0,00709	2,1492	1	44,30	156,145
142	20169	2863288	11,9164	5,2171	0,00704	2,1523	2	44,61	158,368
143	20449	2924207	11,9583	5,2293	0,00699	2,1553	3	44,92	160,606
144	20736	2985984	12,0000	5,2415	0,00694	2,1584	4	45,24	162,861
145	21025	3048625	12,0416	5,2536	0,00690	2,1614		45,55	165,130
146	21316	3112136	12,0830	5,2656	0,00685	2,1643	6	45,87	167,415
147	21609	3176523	12,1244	5,2776	0,00680	2,1673	7	46,18	169,717
148	21904	3241792	12,1655	5,2896	0,00676	2,1703	8	46,50	172,034
149	22201	3307949	12,2066	5,3015	0,00671	2,1732	9	46,81	174,367
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	0,00667	2,1761	**15,0**	47,12	176,715
151	22801	3442951	12,2882	5,3251	0,00662	2,1790	1	47.44	179,079
152	23104	3511808	12,3288	5,3368	0,00658	2,1818	2	47,75	181,459
153	23409	3581577	12,3693	5,3485	0,00654	2,1847	3	48,07	183,854
154	23716	3652264	12,4097	5,3601	0,00649	2,1875	4	48,38	186,265
155	24025	3723875	12,4499	5,3717	0,00645	2,1903	5	48,69	188,692
156	24336	3796416	12,4900	5,3832	0,00641	2,1931	6	49,01	191,13
157	24649	3869893	12,5300	5,3947	0,00637	2,1959	7	49,32	193,59
158	24964	3944312	12,5698	5,4061	0,00633	2,1987	8	49,64	196,07
159	25281	4019679	12,6095	5,4175	0,00629	2,2014	9	49,95	198,56
160	25600	4096000	12,6491	5,4288	0,00625	2,2041	**16,0**	50,27	201,06
161	25921	4173281	12,6886	5,4401	0,00621	2,2068	1	50,58	203,58
162	26244	4251528	12,7279	5,4514	0,00917	2,2095	2	50,89	206,12
163	26569	4330747	12,7671	5,4626	0,00613	2,2122	3	51,21	208,67
164	26896	4410944	12,8062	5,4737	0,00610	2,2148	4	51,52	211,24
165	27225	4492125	12,8452	5,4848	0,00606	2,2175	5	51,84	213,82
166	27556	4574296	12,8841	5,4959	0,00602	2,2201	6	52,15	216,42
167	27889	4657463	12,9228	5,5099	0,00599	2,2227	7	52,46	219,04
168	28224	4741632	12,9615	5,5178	0,00595	2,2253	8	52,78	221,67
169	28561	4826809	13,0000	5,5288	0,00592	2,2279	9	53,09	224,32
170	28900	4913000	13,0384	5,5397	0,00588	2,2304	**17,0**	53,41	226,98

n	n^2	^{3}	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d = 0,1 n	πd	¼πd
171	29241	5000211	13,0767	5,5505	0,00585	2,2330	**1**	53,72	229,66
172	29584	5088448	13,1149	5,5613	0,00581	2,2355	2	54,04	232,35
173	29929	5177717	13,1520	5,5721	0,00578	2,2380	3	54,35	235,06
174	30276	5268024	13,1909	5,5828	0,00575	2,2405	4	54.66	237,79
175	30625	5359375	13,2288	5,5934	0,00571	2,2430	**5**	54,98	240,53
176	30976	5451776	13,2665	5,6041	0,00568	2,2455	6	55,29	243,28
177	31329	5545233	13,3041	5.6147	0,00565	2,2480	7	55,61	242,06
178	31684	5639752	13,3417	5,6252	0,00562	2,2504	8	55,92	248,85
179	32041	5735339	13,3791	5,6357	0,00559	2,2528	9	56,23	251,65
180	32400	5832000	13,4164	5,6462	0,00556	2,2553	**18,0**	56,55	254,47
181	32762	5629741	13,4536	5,6567	0,00552	2,2577	1	56,86	257,30
182	33124	6028568	13,4907	5,6671	0,00549	2,2601	2	57,18	260,16
183	33489	6138487	13,5277	5,6774	0,00546	2,2624	3	57,49	263,02
184	33856	6229504	13,5647	5,6872	0,00543	2,2648	4	57,81	265,90
185	34225	6331625	13,6015	5,6988	0,00541	2,2672	**5**	58,12	268,80
186	34596	6438856	13,6382	5,7083	0,00538	2,2695	6	58,43	271,72
187	34969	6533203	13,6748	5,7185	0,00535	2,2718	7	58,75	274,65
188	35344	6646472	13,7113	5,7287	0,00532	2,2742	8	59,09	270,59
189	35721	6752169	13,7477	5,7388	0,00529	2,2765	9	59,38	287,55
190	36100	6859000	13,7840	5,7489	0,00526	2,2787	**19,0**	59,69	283,53
191	36481	6967871	13,8203	5,7590	0,00524	2,2810	1	60,00	286,52
192	36364	7077888	13,8564	5,7690	0,00521	2,2833	2	60,32	289,53
193	37249	7189057	13,8924	5.6790	0,00618	2,2856	3	60,63	292,55
184	37636	7301384	13,9284	5,7890	6,00515	2,2878	4	60,95	295,59
195	38025	7414875	13,9642	5,7989	0,00513	2,2900	**5**	61,26	298,65
196	38416	7529536	14,0000	5,8088	5,00510	2,2923	6	61,58	301,72
197	38809	7645373	14,0357	5,8186	5,00508	2,2945	7	61,89	304,81
198	39204	7762392	14,0712	5,8285	5,00505	2,2967	8	62,20	307,91
199	39601	7880599	14,1067	5,8383	5,00503	2,2989	9	62,52	311,03
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	5,00500	2,3010	**20,0**	62,83	314,16
201	40401	8120601	14,1174	5,8578	0,00498	2,3032	1	63,15	317,31
202	40804	8242408	14,2127	5,8675	0,00495	2,3053	2	63,16	320,46
203	41209	8365427	14,2478	5,8771	0,00493	2,3075	3	63,77	323,65
204	41616	8489664	14,2829	5,8868	0,00490	2,3096	4	64,09	326,85
205	42025	8615125	14,3178	5,8964	0,00488	2,3117	**5**	94,40	330,06
206	42436	8741816	14,3527	5,9059	0,00485	2,3139	6	64,72	333,29
207	42849	8869743	14,3875	5,9155	0,00483	2,3160	7	65,03	336,54
208	43264	8998912	14,4222	5,9250	0,00481	2,3181	8	65,35	339,79
209	43681	9129329	14,4568	5,9345	0,00478	2,3202	9	65,66	343,07
210	44100	9261000	14,4914	5,9439	0,00476	2,3222	**21,0**	65,97	346,36
211	44521	9393931	14,5258	5,9533	0,00474	2,3243	1	66,29	349,67
212	44944	8528128	14,5602	5,9627	0,00472	2,3263	2	06,60	352,98
213	45369	9663597	14,5945	5,9721	0,0e469	2,3284	3	66,92	356,33
214	45796	9800344	14,6287	5,9814	0,00467	2,3304	4	67,23	359,68
215	46225	9938375	13,6629	5,9907	0,00465	2,3324	**5**	67,54	363,05

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d = 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
216	46656	10077696	14,6969	6,9000	0,00463	2,3344	6	67,86	366,44
217	47089	10218313	14,7309	9,0092	0,00461	2,3365	7	68,17	369,84
218	47524	10360232	14,7648	6,0185	0,00459	2,3385	8	68,49	373,25
219	47961	10503456	14,7986	6,0277	0,00457	2,3404	9	68,80	376,68
220	48400	10648001	14,8324	6,0368	0,00452	2,3424	**22,0**	69,12	380,13
221	48841	10793861	14,8661	9,0459	0,00452	2,3444	1	69,43	383,90
222	49284	10941048	14,8997	6,0550	0,00450	2,2464	2	69,74	387,08
223	49729	11089567	14,9332	6,0641	0,00448	2,3483	3	70,06	390,57
224	50176	11239424	14,9666	6,0732	0,00446	2,3502	4	70,37	394,08
225	56625	11390625	15,0000	6,0822	0,00444	2,3522	**5**	70,69	387,61
226	51076	11543176	15,0333	6,0912	0,00442	2,3541	6	71,00	401,15
227	51529	11697083	15,0665	6,1002	0,00441	2,3560	7	71,31	404,71
228	51984	11852352	15,0997	6,1091	0,00439	2,2579	8	71,63	408,28
229	52441	12008989	15,1327	6,1180	0,00437	2,3598	9	71,94	411,87
230	52900	12167000	15,1658	6,1269	0,00435	2,3617	**23,0**	72,26	415,48
231	53361	12326391	15,1987	6,1358	0,00433	2,3636	1	72,57	419,10
232	53824	12487168	15,2315	6,1446	0,00431	2,3655	2	72,88	422,73
233	54289	12649337	15,2643	6,1534	0,00429	2,3674	3	73,20	426,38
234	54756	12812904	15,2971	6,1622	0,00427	2,3692	4	73,51	430,05
235	55225	12977875	15,3297	6,1710	0,00426	2,3711	**5**	73,83	433,74
236	55696	13144256	15,3623	6,1797	0,00424	2,3729	6	74,14	437,44
237	56169	13312053	15,3948	6,1885	0,00422	2,3748	7	74,46	441,15
238	56644	13481272	15,4272	6,1972	0,00420	2,3766	8	74,77	444,88
239	57121	13651919	15,4596	6,2058	0,00418	2,3784	9	75,08	448,65
249	57600	13824000	15,4919	6,2145	0,00417	2,3802	**24,0**	75,40	452,38
241	58081	13997521	15,5242	6,2231	0,00415	2,3820	1	75,71	456,17
242	58564	14172468	10,5563	6,2317	0,00013	2,3838	2	79,03	459,96
243	59049	14348907	15,5885	6,2403	0,00412	2 3856	3	76,34	467,77
244	59536	14526784	15,6205	6,2488	0,00410	2,3874	4	76,65	463,59
245	60025	14706125	15,6525	6,2573	0,00408	2,3892	**5**	76,97	471,44
246	60516	14886936	15,6844	6,2658	0,00407	2,3909	6	77,28	475,29
247	61009	15069223	15,7162	6,2743	0,00405	2,3927	7	77,60	479,16
248	61504	15252992	15,7480	6,2828	0,00403	2,3945	8	77,91	483,05
249	62001	15438249	15,7797	6,2912	0,00402	2,3962	9	78,23	486,95
250	62500	15615000	15,8114	6,2996	0,00400	2,3979	**25,0**	78,54	490,87
251	63001	15813251	15,8430	6,3080	0,00398	2,3997	1	78,85	494,81
252	63504	16003008	15,8745	6,3164	0,00397	2,4014	2	79,17	408,71
253	64009	16194277	15,9060	6,3247	0,00395	2,4031	3	79,48	502,73
254	64516	16387064	15,9374	9,3330	0,00394	2,4048	4	79,80	506,71
255	65025	16581375	15,9687	6,3413	0,00392	2,4065	**5**	80,11	510,71
256	65536	16777216	16,0000	6,3496	0,00391	2,4082	6	80,42	514,72
257	66049	16974593	16,0312	6,3579	0,00389	2,4099	7	80,74	518,75
258	66564	17173512	16,0624	6,3661	0,00388	2,4116	8	81,05	522,79
259	67081	17373979	16,0935	6,3743	0,00386	2,4133	9	81,37	526,82
260	67600	17576000	16,1245	6,3825	0,00385	2,4150	**26,0**	81,68	530,93

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d= 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
261	68121	17779581	16,1555	6,3907	0,00383	2,4166	1	82,00	535,02
262	68644	17984728	16,1864	6,3988	0,00382	2.4183	2	82,31	539,13
263	66116	13191417	16,2173	6,4070	0,00380	2,4200	3	82,62	543,25
264	69696	18399744	16,2481	6,4151	0,00379	2,4216	4	82,94	547,39
265	70225	18609625	16.2788	6,4232	0,00377	2,4233	5	82,25	551,55
266	70756	18821096	16,3095	6,4312	0,00376	2,4249	6	83,57	555,72
267	71289	19034163	16,3401	6,4393	0,00375	2,4265	7	83,88	559,90
268	71824	19248832	16.3707	6,4473	0,00373	2,4281	8	84,19	564,10
269	72361	19465109	16.4012	6,4553	0,00372	2,4298	9	84,51	568,32
270	72900	19683000	16.4317	6,4633	0,00370	2,4314	**27,0**	84,82	572,56
271	73441	19902511	16,4621	6,4713	0,00369	2,4330	1	85,14	576,80
272	73984	20123648	16,4924	6,4792	0,00368	2,4346	2	85,45	581,07
273	74529	20346417	16,5227	6,4872	0,00366	2,4362	3	85,77	585,35
274	75076	20570824	16.5529	6,4951	0,00365	2,4378	4	86,08	589,65
275	75625	20796875	16,5831	6,5030	0,00364	2,4393	5	86,39	593,96
276	76176	21024576	16 6132	6,5108	0,00362	2,4409	6	86,71	598,28
277	76729	21253933	16 6433	6,5181	0,00361	2,4425	7	87,02	602,63
278	77284	21484952	16 6733	6,5265	0,00330	2,4440	8	87,34	606,99
279	77841	21717639	16.7033	6,5343	0,00358	2,4456	9	87,65	611,36
280	78400	21952000	16,7332	6,5421	0,00357	2,4472	**28,0**	87,96	615,75
281	78961	22188041	16,7631	6,5499	0,00356	2,4487	1	88,28	620,16
282	79524	22425768	16,7929	6,5577	0,00355	2,4503	2	88.59	624,58
283	80089	22665187	16,8226	6,5654	0,00353	2,4518	3	88,91	629,02
284	80656	22906304	16,8523	6,5731	0,00352	2,4533	4	89,22	633,47
285	81225	23149125	16,8819	6,5808	0,00351	2,4548	5	89,54	637,94
286	81796	23393656	16,9115	6,5885	0,00350	2,4564	6	89,85	642,42
287	82369	23639903	16,9411	6,5962	0,00348	2 4579	7	90,16	646,92
288	82944	23887872	16,9706	6,6039	0,00347	2,4594	8	90,48	651,44
289	83521	24137569	17,0000	6,6115	0,00346	2,4609	9	90,79	655,97
290	84100	24389000	17,0294	6,6191	0,00345	2,4624	**29,0**	91,11	660,52
291	84681	24642171	17,0587	6,6267	0,00344	2,4639	1	01,42	665,08
292	85264	24897088	17,0880	6,6343	0,00342	2,4654	2	91,73	669,66
293	85849	25153757	17,1172	6,6419	0,00341	2,4669	3	92,05	674,26
294	86436	25412184	17,1464	6,6494	0,00340	2,4684	4	92,36	678,87
295	87025	25672375	17,1756	6,6569	0,00339	2,4698	5	92,68	683,49
296	87616	25934336	17,2047	6,6644	0,00338	2,4713	6	92,99	688,13
297	88209	26198073	17,2337	6,6719	0,00337	2,4728	7	93,31	692,79
298	88804	26463592	17,2627	6,6794	0,00336	2,4742	8	93,62	697,46
299	89401	26730899	17,2916	6,6869	0,00334	2,4757	9	93,93	702,15
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	0,00333	2,4771	**30,0**	94,25	706,86
301	90601	27270901	17,3491	6,7018	0,00332	2,4786	1	94,56	711,5
302	91204	27543608	17,3789	6,7092	0,00331	2,4880	2	91,88	716,3
303	91809	27818127	17,4062	6,7166	0,00330	2,4814	3	95,19	721,0
304	92416	28094464	17,4351	6,7240	0,00329	2,4829	4	95,50	725,8
305	93025	28372625	17,4642	6,7313	0,00328	2,4843	5	95.82	730,6

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d = 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
306	93636	28652616	17,4929	6,7387	0,00327	2,4857	6	96,13	735,42
307	94249	28934443	17,5214	6,7460	0,00326	2,4871	7	96,45	740,23
308	94864	29218112	17,5499	6,7533	0,00325	2,4886	8	96,76	745,06
309	95481	29503629	17,5784	6,7606	0,00324	2,4900	9	97,08	749,91
310	96100	29791000	17,6068	6,7679	0,00323	2,4914	**31,0**	97,39	754,77
311	96721	30080231	17,6352	6,7752	0,00322	2,4928	1	97,70	759,64
312	97344	30371328	17,6635	6,7824	0,00321	2,4942	2	98,02	764,54
313	97969	30664297	17,6918	6,7897	0,00319	2,4955	3	98,33	769,45
314	98596	30959144	17,7200	6,7969	0,00318	2,4969	4	98,65	774.37
315	99225	31255875	17,7482	6,8041	0,00317	2,4983	**5**	98,96	779,31
316	99856	31554496	17,7764	6,8113	0,00316	2,4997	6	99,27	784,27
317	100489	31855013	17,8045	6,8185	0,00315	2,5011	7	99,59	789,24
318	101124	32157432	17,8326	6,8256	0,00314	2.5024	8	99,90	794,23
319	101761	32461759	17,8606	6,8328	0,00313	2,5038	9	100.22	799,23
320	102400	32768000	17,8885	6,8399	0,00313	2,5052	**32,0**	100,53	804,25
321	103041	33076161	17,9165	6,8470	0,00312	2,5065	1	100,8	809,28
322	103684	33386248	17,9444	6,8541	0,00311	2,5079	2	101,2	814,33
323	104329	33698267	17,9722	6,8611	0,00310	2,5092	3	101,5	819,40
324	104976	34012224	18,0000	6,8683	0,00309	2,5106	4	101,8	824,48
325	105625	34328125	18,0278	6,8753	0,00308	2,5119	5	102,1	829,58
326	106276	34645976	18,0555	6.8824	0,0030.	2,5132	6	102,4	834,69
327	106929	34965783	18,0831	6,8894	0,00306	2,5145	7	102,7	839,82
328	107584	35287552	18,1108	6,8964	0,00305	2,5159	8	103,0	844,96
329	108241	35611289	18,1384	6,9034	0,00304	2,5172	9	103,4	850,12
3 0	108900	35937000	18,1659	6,9104	0,00303	2,5185	**33,0**	103,7	855,30
331	109561	36264691	13,1934	6,9174	0,00302	2,5198	1	104,0	860,49
332	110224	36594368	18,2209	6,9244	0,00301	2,5211	2	104,3	865,70
333	110889	36926037	18,2483	6,9313	0,00300	2,5224	3	104,6	870,92
334	111556	37259704	18,2757	6,9382	0,00299	2,5238	4	104,9	876.16
335	112225	37535375	18,3030	6,9451	0,00299	2,5250	**5**	105,2	881,41
336	112896	37933056	18,3303	6,9521	0,00298	2,5263	6	105,6	386,68
337	113569	38272753	18,3576	6,9589	0,00297	2,5276	7	105,9	891,97
338	114244	38614472	18,3848	6,9658	0,00296	2,5289	8	106,2	897,27
339	114921	38958219	18,4120	6,9727	0,00295	2,5302	9	106,5	902,59
340	115600	39304000	18,4391	6,9795	0,00294	2,5315	**34,0**	106,8	907.29
341	116281	39651821	18,4662	6,9864	0,00293	2,5328	1	107,1	913,27
342	116964	44000168	18,4932	6,9932	0,00292	2,5340	2	107,4	918,63
343	117649	40353607	18,5203	7,0000	0,0292	2,5353	3	107,8	924,01
344	118336	40707584	18,5472	7,0068	0,0021	2,5366	4	108,1	929,41
345	119025	41063625	18,5742	7,0136	0,0020	2,5378	**5**	108,4	934,82
346	119716	41421736	18,6011	7,0203	0,00289	2,5391	6	108,7	940,25
347	120409	41781923	18,6279	7,0271	0,00288	2,5403	7	109.0	945,69
348	121104	42144192	18,6548	7,0338	0,00287	2,5416	8	109,3	951,15
349	121801	42508549	18,6815	7.0406	0,00287	2,5428	9	109,6	956,62
350	122500	42875000	18,7033	7,0473	0,00286	2,5441	**35,0**	110,0	962,11

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d= 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
351	123201	43243551	18,7350	7,0540	0,00285	2,5453	1	110,3	967,62
352	123904	43614208	18,7617	7,0607	0,00284	2,5465	2	110,6	978,14
353	124609	43986977	18,7883	7,0674	0,00283	2,5478	3	110,9	974,68
354	125316	44361864	18,8149	7,0740	0,00282	2,5490	4	111,2	939,23
355	126025	44738875	18,8414	7,0807	0,00282	2,5502	**5**	111,5	939,80
356	126736	45118016	18,8680	7,0873	0,00281	2,5016	6	111,8	995,38
357	127449	45499293	18,8944	7,0940	0,06280	2,5527	7	112,2	1000,98
358	128164	45882712	18,9209	7,1006	0,00279	2,5539	8	112,5	1006,60
359	128881	46268279	18,9473	7,1072	0,00279	2,5551	9	112,8	1012,23
360	129600	46656000	18,9737	7,1138	0,00278	2,5563	**36,0**	143,1	1017,87
361	130321	47045881	19,0000	7,1204	0,00277	2,5575	1	113,4	1023,54
362	131044	47437928	19,0263	7,1269	0,00276	2,5587	2	113,7	1029,21
363	131769	47832147	19,0526	7,1335	0,00275	2,5599	3	114,0	1034,91
364	132496	48228544	19,0788	7,1400	0,00275	2,5611	4	114,4	1040,62
365	133225	48627125	19,1050	7,1466	0,00274	2,5623	**5**	114,7	1046,35
366	133956	49027896	19,1311	7,1531	0,00273	2,5635	6	115,0	1052,09
367	134689	49430863	19,1572	7,1596	0,00272	2,5647	7	115,3	1057,34
368	135424	49836032	19,1833	7,1661	0,00272	2,5659	8	115,6	1063,62
369	136161	50243409	19,2094	7,1726	0,00271	2,5670	9	115,9	1069,40
370	136900	50653000	19,2554	7,1791	0,00270	2,5682	**37,0**	116,2	1075,21
371	137641	51064811	19,2614	7,1855	0,00270	2,5694	1	116,6	1081,03
372	138384	51478848	19,2873	7,1920	0,00269	2,5705	2	116,9	1086,87
373	139129	51895117	19,3132	7,1984	0,00268	2,5717	3	117,2	1092,71
374	139876	52313624	19,3391	7,2048	0,00267	2,5729	4	117,5	1098,58
375	140625	52734379	19,3649	7,2112	0,00267	2,5740	**5**	117,8	1104,46
376	141376	53157376	19,3907	7,2177	0,00266	2,5752	6	118,1	1110,4
377	142129	53582633	19,4165	7,2240	0,00265	2,5763	7	118,4	1116,3
378	142884	54010152	19,4422	7,2304	0,00265	2,5775	8	118,8	1122,2
379	143641	54439939	19,4679	7,2368	0,00264	2,5786	9	119,1	1128,1
380	144400	54872000	19,4936	7,2432	0,00263	2,5798	**38,0**	119,4	1134,1
381	145161	55306341	19,5192	7,2495	0,00262	2,5809	1	119,7	1140,1
382	145924	55742968	19,5448	7,2558	0,00262	2,5821	2	120,0	1146,1
383	146689	56181887	19,5704	7,2622	0,00261	2,5832	3	120,3	1152,1
384	147456	56623104	19,5959	7,2685	0,00260	2,5843	4	120,6	1158,1
385	148225	57066625	19,6214	7,2748	0,00260	2,5855	**5**	121,0	1164,2
386	148996	57512456	19,6469	7,2811	0,00259	2,5866	6	121,3	1170,2
387	149769	57960603	19,6723	7,2874	0,00258	2,5877	7	121,6	1176,3
388	150544	58411072	19,6977	7,2936	0,00258	2,5888	8	121,9	1182,4
389	151321	58863869	19,7231	7,2999	0,00257	2,5899	9	122,2	1188,5
390	152100	59319000	19,7484	7,3061	0,00256	2,5911	**39,0**	122,5	1194,6
391	152881	59776471	19,7737	7,3124	0,00256	2,5922	1	122,8	1200,7
392	153664	60236288	19,7990	7,3186	0,00255	2,5933	2	123,2	1206,0
393	154449	60698457	19,8242	7,3248	0,00254	2,5044	3	123,5	1213,0
394	155236	61162984	19.8494	7,3310	0,00254	2,5955	4	123,3	1219,2
395	156025	61629875	19,8746	7,3372	0,00253	2,5966	**5**	124,1	1225,4

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d= 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
396	156816	62099136	19,8997	7,3434	0,00253	2,5477	6	124,4	1231,6
397	157609	62570773	19,9249	7,3496	0,00252	2,5988	7	124,7	1237,9
398	158404	63044792	19,9499	7,3558	0,00251	2,5999	8	125,0	1244,1
399	159201	63521199	19,9750	7,3619	0,00251	2,6010	9	125,4	1250,4
400	160000	64000000	20,0000	7,3681	0,00250	2,6021	**40,0**	125,7	1256,7
401	160801	64481201	20,0250	7,3742	0,00249	2,6031	1	126,0	1262,9
402	161604	64964808	20,0499	7,3803	0,00249	2,6042	2	126,3	1269,2
403	162409	65450827	20,0749	7,3864	0,00248	2,6053	3	126,6	1275,6
404	163216	65939264	20,0998	7,3925	0,00248	2,6064	4	126,9	1281,9
405	164025	66430125	20,1246	7,3986	0,00247	2,6075	5	127,2	1288,2
406	164836	66923416	20,1494	7,4047	0,00246	2,6085	6	127,6	1294,6
407	165649	67419143	20,1742	7,4108	0,00246	2,6096	7	127,9	1301,0
408	166464	67917312	20,1990	7,4169	0,00245	2,6107	8	128,2	1307,4
409	167281	68417929	20,2237	7,4229	0,00244	2,6117	9	128,5	1313,8
410	168100	68921000	20,2485	7,4290	0,00244	2,6128	**41,0**	128,8	1320,3
411	168921	69426531	20,2731	7,4350	0,00243	2,6138	1	129,1	1326,7
412	169744	69934528	20,2978	7,4410	0,00243	2,6149	2	129,4	1333,2
413	170569	70444997	20,3224	7,4470	0,00242	2,6160	3	129,8	1339,7
414	171396	70957944	20,3470	7,4530	0,00242	2,6170	4	130,1	1346,1
415	172225	71473375	20,3715	7,4590	0,00241	2,6180	5	130,4	1352,7
416	173056	71991296	20,3961	7,4650	0,00240	2,6191	6	130,7	1359,2
417	173889	72511713	20,4206	7,4710	0,00240	2,6201	7	131,0	1365,7
418	174724	73034632	20,4450	7,4770	0,00239	2,6212	8	131,3	1372,3
419	175561	73560059	20,4695	7,4829	0,00239	2,6222	9	131,6	1378,9
420	176400	74088000	20,4939	7,4889	0,00238	2,6232	**42,0**	632,0	1385,4
421	177241	74618461	20,5183	7,4948	0,00238	2,6243	1	132,3	1392,3
422	178084	75151448	20,5426	7,5007	0,00237	2,6253	2	132,6	1398,7
423	178929	75686967	20,5670	7,5067	0,00236	2,6263	3	132,9	1405,3
424	179776	76225024	20,5913	7,5126	0,00236	2,6274	4	133,2	1412,0
425	180625	76765625	20,6155	7,5186	0,00235	2,6284	5	133,5	1418,6
426	181476	77308776	20,6398	7,5244	0,00235	2,6294	6	133,8	1425,3
427	182329	77854483	20,6640	7,5302	0,00234	2,6304	7	134,2	1432,0
428	183184	78402752	20,6882	7,5361	0,00234	2,6314	8	134,5	1438,7
429	184041	78953589	20,7123	7,5420	0,00233	2,6323	9	134,8	1445,5
430	184900	79507000	20,7364	7,5478	0,00233	2,6335	**43,0**	135,1	1452,2
431	185761	80062991	20,7605	7,5537	0,00232	2,6345	1	135,4	1459,0
432	186624	80621568	20,7846	7,5595	0,00232	2,6355	2	135,7	1465,7
433	187489	81182737	20,8087	7,5654	0,00231	2,6365	3	136,0	1472,5
434	188356	81746504	20,8327	7,5712	0,00230	2,6375	4	136,4	1479,3
435	189225	82312875	20,8567	7,5770	0,00230	2,6335	5	136,7	1486,2
436	190096	82881856	20,8806	7,5828	0,00229	2,6395	6	137,0	1493,0
437	190969	83453453	20,9045	7,5886	0,00229	2,6405	7	137,3	1499,9
438	191844	84027672	20,9284	7,5944	0,00228	2,6415	8	137,6	1506,7
439	192721	84604519	20,9523	7,6001	0,00228	2,6425	9	137,9	1513,6
440	193600	85184000	20,9762	7,6059	0,00227	2,6435	**44,0**	138,2	1520,5

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d= 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
441	194481	85766121	21,0000	7,6117	0,00227	2,6444	1	138,5	1527,5
442	195364	86350888	21,0238	7,6174	0,00226	2 6454	2	138,9	1534,4
443	196249	86938307	21,0476	7.6232	0,00226	2,6464	3	139,2	1541,3
444	197136	87528384	21.0713	7,6289	0,00225	2,6474	4	139,5	1548,3
445	198025	88121125	21,0950	7,6346	0,00225	2,6484	5	139,8	1552,3
446	198916	88716536	21,1187	7,6403	0,00224	2.6493	6	140,1	1562,3
447	199804	89314623	21,1424	7,6460	0,00224	2,6503	7	140,4	1569,3
448	200704	89915392	21.1660	7,6517	0,00223	2,6513	8	140.7	1576,3
449	201601	90518849	21,1896	7,6574	0,00223	2,6523	9	141,1	1583,4
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	0.00222	2,6532	**45,0**	141,4	1590,4
451	203401	91733851	21,2368	7,6688	0,00222	2,6545	1	141,7	1597,5
452	204304	92345408	21,2603	7.6744	0,00221	2,6551	2	142,0	1604,6
453	205209	92959677	21,2838	7,6801	0,00221	2,6561	3	142,3	1611,7
454	206116	93576664	21,3073	7.6857	0,00220	2.6571	4	142,6	1618,8
455	207025	94196375	21.3307	7,6914	0,00220	2,6580	5	142,9	1626,0
456	207936	94818816	21,3542	7,6970	0,00219	2,6590	6	143,3	1933,1
457	208849	95443993	21.3776	7,7026	0,00219	2,6599	7	143,6	1640,3
458	209764	96071912	21,4009	7,7082	0,00218	2,6609	8	143,9	1647,5
459	210681	96702579	21,4243	7.7138	0,00218	2,6618	9	144,2	1654,7
460	211600	97336000	21,4476	7,7194	0,00217	2,6628	**46,0**	144,5	1661,9
461	212521	97972181	21,4709	7,7250	0,00217	2,6637	1	143,8	1669,1
462	213444	98611128	21,4942	7,7306	0.00216	2,6646	2	143,1	1676,4
463	214369	99252847	21,5174	7,7362	0,00216	2,6656	3	143,5	1683,7
464	215296	99897344	21,5407	7,7418	0,00216	2,6665	4	144,8	1690,9
465	216225	100544623	21,5639	7,7473	0,00215	2,6675	5	144,1	1698,2
466	217156	101194696	21,5870	7,7529	0.00215	2,6684	6	144,4	1705,5
467	218089	101847563	21,6102	7,7584	0,00214	2.6693	7	145,7	1712,9
468	219024	102503232	21,6333	7,7639	0,00214	2,6703	8	145,0	1720,2
469	219961	103161709	21,6564	7,7695	0,00213	2,6712	9	145,3	1722.6
470	220900	103823000	21,6795	7,7750	0,00213	2.6721	**47,0**	146,7	1734.9
471	221841	104487111	21,7025	7,7805	0,00212	2,6730	1	148,0	1742,3
472	222784	105154048	21,7256	7,7860	0.00212	2,6739	2	148,3	1749,7
473	223729	105823817	21,7486	7.7915	0.00211	2,6749	3	148,6	1757,2
474	224676	106496424	21,7715	7,7970	0,00211	2,6758	4	148,9	1764,6
475	225625	107171875	21,7945	7,8025	0,00211	3,6767	5	149,2	1772,1
476	226576	107850176	21,8174	7,8079	0,00210	2,6776	6	149,5	1779,5
477	227529	108531333	21,8403	7,8134	0,00210	2,6785	7	149,9	1787,0
478	228484	109215352	21,8632	7,8188	0,00209	2,6794	8	150,2	1794,5
479	229441	109902239	21,8861	7,8243	0,00209	2,6803	9	150,5	1802,0
480	230400	110592000	21,9089	7,8297	0,00208	2,6812	**48,0**	150,8	1809,6
481	231361	111284641	21,9317	7,8352	0,00208	2,6822	1	151,1	1817,1
482	232324	111980168	21,9545	7,8406	0,00207	2,6831	2	151,4	1824,7
483	233289	112678587	21,9773	7,8460	0,00207	2,6840	3	151.7	1832,2
484	234256	113799904	22,0000	7,8514	0,00207	2,6849	4	152,1	1839,8
485	235225	114084125	22,0227	7,8568	0,00206	2,6857	5	152,4	1847,5

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d= 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
486	236196	114791256	22,0454	7,8622	0,00206	2,6866	6	152,7	1855,1
487	237169	115501303	22,0681	7,8676	0,00205	2,6875	7	153,0	1862,7
488	238144	116214272	22,0907	7,8730	0,00205	2,6884	8	153,3	1870,4
489	239121	116930169	22,1133	7,8784	0,00204	2,6893	9	153,6	1878,1
490	240100	117649000	22,1359	7,8837	0,00204	2,6902	**49,0**	153,9	1885,7
491	241081	118370771	22,1585	7,8891	0,00204	2,6911	1	154,3	1893,4
492	242064	119095488	22,1811	7,8941	0,00203	2,6920	2	154,6	1901,2
493	243049	119823157	22,2036	7,8998	0,00203	2,6929	3	154,9	1908,9
494	244036	120553784	22,2261	7,9051	0,00202	2,6937	4	155,2	1916,7
495	245025	121287375	22,2486	7,9105	0,00202	2,6916	5	155,5	1924,4
496	246016	122023936	22,2711	7,9158	0,00202	2,6955	6	155,8	1932,2
497	247009	122763473	22,2935	7,9211	0,00201	2,6964	7	156,1	1940,0
498	248004	123505992	22,3159	7,9264	0,00201	2,6972	8	156,5	1947,8
499	249001	124251499	22,3383	7,9317	0,00200	2,6981	9	156,8	1955,6
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	0,00200	2,6990	**50,0**	157,1	1963,5
501	251001	125751501	22,3830	7,9423	0,00200	2,6998	1	157,4	1971,4
502	252004	126506008	22,4054	7,9476	0,00199	2,7007	2	157,7	1979,2
503	253009	127263527	22,4227	7,9528	0,00199	2,7016	3	158,5	1987,1
504	254016	128024064	22.4499	7,9581	0,00198	2,7024	4	158,3	1995,0
505	255025	128787625	22,4722	7,9634	0,00198	207033	5	158,7	2003,0
506	256036	129554216	22,4944	7,9686	0,00198	2,7042	6	159,0	2010,9
507	257046	130323843	22,5167	7.9739	0,00197	2,7050	7	159,3	2018,9
508	258064	131096512	22,5389	7,9791	0,00197	2,7059	8	159,6	2026,8
509	259081	131872220	22,5610	7,9842	0,00196	2,7067	9	159,9	2034,8
510	260100	132651000	22,5832	7,9896	0,00196	2,7076	**51,0**	160,2	2042,8
511	261121	133432831	22,6053	7,9948	0,00196	2,7084	1	160,5	2050,8
512	262144	134217728	22,6274	8,0000	0,00195	2,7093	2	160,8	2058,9
513	263169	135005697	22,6495	8,0052	0,00195	2,7101	3	161,2	2066,9
514	264196	135796744	22,6716	8,0104	0,00195	2,7110	4	161,5	2075,0
515	265225	139590875	22,6936	8,0156	0,00194	2,7118	5	161,8	2083,1
516	266256	137388096	22,7156	8,0208	0,00194	2,7127	6	162,1	2091,2
517	267289	138188413	22,7376	8,0260	0,00193	2,7135	7	162,4	2099,3
518	268324	138991832	22,7596	8,0311	0,00193	2,7143	8	162,7	2107,4
519	269361	139798359	22,7819	8,0363	0,00193	2,7152	9	163,0	2115,6
520	270400	140608000	22,8035	8,0415	0,00192	2,7160	**52,0**	163,4	2123,7
521	271441	141420761	22,8254	8,0466	0,00192	2,7168	1	163,7	2131,9
522	272484	142236648	22,8473	8,0517	0,00192	2,7177	2	164,0	2140,1
523	273529	143055667	22,8692	8,0569	0,00191	2,7185	3	464,3	2148,3
524	274576	143877824	22,8910	8,0620	0,00191	2,7193	4	164,6	2156,5
525	275625	144703125	22,9129	8,0671	0,00190	2,7202	5	164,9	2164,8
526	276676	145531576	22,9347	8,0723	0,00190	2,7210	6	165,2	2173,0
527	277729	146363183	22,9565	8,0774	0,00190	2,7218	7	165,6	2181,3
528	278784	147197952	22,9783	8,0825	0,00189	2,7226	8	165,9	2189,6
529	279841	148035889	23,0000	8,0876	0,00189	2,7235	9	160,2	2197,9
530	280900	148877000	23,0217	8,0927	0,00189	2,7243	**53,0**	166,5	2206,2

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d= 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
531	281961	149721291	23,0434	8,0978	0,00188	2,7251	1	166,8	2214,5
532	283024	150568768	23,0651	8,1028	0,00188	2,7259	2	167,1	2222,9
533	284089	151419437	23,0868	8,1079	0,00188	2,7267	3	167,4	2331,2
534	285156	152273304	23,1084	8,1130	0,00187	2,7275	4	167,8	2239,6
535	286225	153130375	23,1301	8,1180	0,00187	2,7284	5	168,1	2248,0
536	287296	153990656	23,1517	8,1231	0,00187	2,7292	6	168,4	2256,4
537	28836[illegible]	154854153	23,1733	8,1281	0,00186	2,7300	7	168,7	2264,8
538	289444	155720872	23,1948	8,1332	0,00186	2,7308	8	169,0	2273,3
539	290521	156590819	23,2164	8,1382	0,00186	2,7316	9	169,3	2281,7
540	291600	157640000	23.2379	8,1433	0,00185	2,7324	54,0	169,6	2290,2
541	292681	158340421	23,2594	8,1483	0,00185	2,7332	1	170,0	2298,7
542	293764	159220088	23,2809	8,1533	0,00185	2,7340	2	170,3	2307,2
543	294849	160103007	23,3024	8,1583	0,00184	2,7348	3	170,6	2315,7
544	295936	160989184	23,3238	8,1633	0,00184	2.7356	4	170,9	2324,3
545	297025	161878625	23,3452	8,1683	0,00183	2,7364	5	171,2	2332,8
546	298116	162771336	23,3666	8,1733	0,00183	2,7372	6	171,5	2341,4
547	299209	168667323	23.3880	8,1783	0,00183	2,3780	7	171,8	2350,0
548	300304	164566592	23,4094	8,1833	0,00182	2,7388	8	172,2	2358,6
549	301401	165469149	23,4307	8,1882	0,00182	2,7396	9	172,5	2367,2
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	0,00182	2,7404	55,0	172,8	2375,8
551	303601	167284151	23,4734	8,1982	0,00181	2,7412	1	173,1	2384,4
552	304704	168196608	23,4937	8,2031	0,00181	2,7419	2	173,4	2393,1
553	305809	169112377	23,5160	8,2081	0,00181	2,7427	3	173,7	2401,8
554	306916	180031464	23,5372	8,2130	0,40181	2,7435	4	174,1	2410,5
555	308025	170953875	23,5584	8,2180	0,00180	2,7443	5	074,4	2419,2
556	309136	171879616	23,5797	8,2229	0,00180	2,7451	6	174,7	2427,9
557	310249	172808693	23,6008	8,2278	0,00180	2,7459	7	175,0	2436,7
558	311364	173741112	23,6220	8,2327	0,00179	2,7466	8	175,3	6445,4
559	312481	174676879	23,6432	8,2377	0,00179	2,7474	9	175,6	2454,2
560	313600	175616000	23,6643	8,2426	0,00179	2,7482	56,0	175,9	2463,0
561	314721	176558481	23,6854	8,2475	0,00178	2,7490	1	176,2	2471,8
562	315844	177504327	23,7065	8,2524	0,00178	2,7497	2	176,6	2480,6
563	316969	178453547	23,7276	8,2573	0,00128	2,7505	3	176,9	2489,5
564	318096	175406144	23,7487	8,2621	0,00177	2,7013	4	177,2	2498,3
565	319225	180362125	23,7697	8,2670	0,00177	2,7521	5	177,5	2507,2
566	320356	181321496	23,7908	8,2719	0,00177	2,7528	6	177,8	2516,1
567	321489	182284263	23,8118	8,2768	0,00176	2,7536	7	178,1	2525,0
568	322624	183250432	23,8328	8,2816	0,00176	2,7544	8	178,4	2533,9
569	333761	182220009	23,8537	8,2865	0,00176	2,7551	9	178,8	2542,8
570	324900	185193000	23,8747	8,2913	0,00175	2,7559	57,0	179,1	2551,8
571	326041	186169411	23,8956	8,2962	0,00175	2,7566	1	179,4	2560,7
572	327184	187149248	23,9165	8,3010	0,00175	2,7574	2	179,7	2569,7
573	328329	188132517	23,9374	8,3056	0,00175	2,7582	3	180,0	2578,7
574	329476	189119224	23,9583	8,3107	0,00174	2,7589	4	180,3	2581,7
575	330625	190109375	23,9792	8,3155	0,00174	2,7597	5	180,6	2596,7

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d= 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
576	331776	191102976	24,0000	8,3203	0,00174	2,7604	6	181,0	2605,8
577	332929	192100033	24,0208	8,3251	0,00173	2,7612	7	181,3	2614,8
578	334084	193100552	24,0416	8,3300	0,00173	2,7619	8	181,6	2623,9
579	335241	194104539	24,0624	8,3348	0,00173	2,7627	9	181,9	2633,0
580	336400	195112000	24,0832	8,3396	0,00172	2,7634	**58,0**	182,2	2642,1
581	337561	196122941	24,1039	8,3443	0,00172	2,7642	1	182,5	2651,2
582	338724	197137368	24,1247	8,3491	0,00172	2,7649	2	182,8	2660,3
583	334889	198155287	24,1454	8,3539	0,00172	2,7657	3	183,2	3669,5
584	341056	199176704	24,1661	8,3587	0,00171	2,7664	4	183,5	2678,6
585	342225	200201625	24,1868	8,3634	0,00171	2,7672	**5**	183,8	2687,8
586	343396	201230056	24,2074	8,3682	0,00171	2,7679	6	184,1	2697,0
587	344569	202262003	26,2281	8,3730	0,00170	2,7686	7	184,4	2709,2
588	345744	203297472	34,2487	8,3777	0,00170	2,7694	8	184,7	2715,5
589	346921	204336466	24,2693	8,3825	0,00170	2,7701	9	185,0	2724,7
590	348100	205379000	24,2899	8,3872	0,00169	2,7709	**59,0**	185,4	2734,0
591	349281	206425071	24,3105	8,3919	0,00169	2,7716	1	185,7	2743,2
592	350464	207474688	24,3311	8,3967	0,00169	2,7723	2	186,0	2852,5
593	351649	208527857	24,3516	8,4014	0,00169	2,7731	3	186,3	2761,3
594	352836	209584584	24,3721	8,4061	0,00168	2,7738	4	186,6	2771,2
595	354025	210644875	24,3926	8,4108	0.00168	2,7745	**5**	186,9	2780,5
596	355216	211708736	24,4131	8,4155	0,00168	2,7753	6	187,2	2789,9
597	356109	212779173	24,4336	8,4202	0,00168	2,7760	7	187,6	2799,2
598	357604	213947192	24,4540	8,4249	0,00167	2,7768	8	187,9	2808,7
599	358801	214921799	24,4745	8,4296	0,00167	2,7774	9	188,2	2818,0
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	0,00167	2,7782	**60,0**	188,5	2827,4
601	361201	217081801	24,5153	8,4390	0,00166	2,7789	1	188,8	2836,9
602	362404	218167208	24,5357	8,4437	0,00166	2,7796	2	189,1	2846,3
603	363609	219256227	24,5561	8,4484	0,00166	2,7803	3	189,4	2855,8
604	364816	220348864	24,5764	8,4530	0,00166	2,7810	4	189,8	2865,3
605	366025	221445125	24,5967	8,4577	0,00165	2.7818	**5**	190,1	2874,8
606	367236	222545016	24,6171	8,4623	0,00265	2,7825	6	190,4	2884,3
607	368449	223648543	24,6374	8,4670	0,00165	2,7332	7	190,7	2893,8
608	369664	224755712	24,6577	8,4716	0,00164	2,7839	8	191,0	2903,3
609	370881	225866529	24,6779	8,4763	0,00164	2,7846	9	191,3	2912,9
610	372100	226981000	24,6982	8,4809	0,00164	2,8853	**61,0**	191,6	2922,5
611	373321	228099131	24,7184	8,4856	0,00164	2,7860	1	192,0	2982,3
612	374544	229220928	24,7386	8,4902	0,05163	2,7868	2	192,3	2941,7
613	375769	230346397	24,7588	8,4948	0,00163	2,7875	3	192,6	2951,3
614	376696	231475544	24,7790	8,4994	0,00162	2,7882	4	192,9	2960,3
615	378225	232608375	24,7992	8,5040	0,00163	2,7889	**5**	193,2	2970,6
616	379456	233744896	24,8193	8,5086	0,00162	2,7896	6	193,5	2980,2
617	380689	284885113	24,8395	8,5132	0,00162	2,7903	7	193,8	2989,9
618	381924	236029032	24,8596	8,5178	0,00162	2,7910	8	194,2	2999,6
619	383161	237176659	24,8797	8,5224	0,00162	2,7917	9	194,5	3009,3
620	384400	238328000	24,8998	8,5270	0,00161	2,7924	**62,0**	194,8	3019,1

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d = 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
621	385641	239483061	24,9199	8,5316	0.00161	2,7931	1	195,1	3028,8
622	386884	240641848	24,9390	8,5362	0.00161	5,7938	2	155,4	3038,6
623	388129	241804367	24,9600	8,5408	0,00161	2,7945	3	195,7	3048,4
624	389376	242970624	24,9800	8,5453	0,00160	2,7952	4	196,0	3058,2
625	390625	244140625	25,0000	8,5499	0,00160	2,7959	**5**	196,3	3068,0
626	391876	245314376	25,0200	8,5544	0,00100	2,7966	6	196,7	3077,8
627	393129	246491883	25,0409	8,5590	0,00159	2,7973	7	197,0	3087,6
628	394384	247673152	25,0599	8,5635	0,00159	2,7980	8	197,3	3097,5
629	395641	248858189	25,0794	8,5681	0,00159	2,7987	9	197,6	3107,4
630	396900	250047000	25,0998	8,5726	0,00159	2,7993	**63,0**	197,9	3117,2
631	398161	251239591	25,1197	8,5272	0,00158	2,8000	1	198,2	3127,1
632	399424	252435968	25,1396	8,5817	0,00158	2,8007	2	198,5	3137,1
633	400689	254636137	25,1595	8,5862	0,00158	2,8014	3	198,9	3147,0
634	401956	254840104	25,1794	8,5907	0,00158	2,8021	4	199,2	3157,0
635	403225	256047875	25,1992	8,5952	0,00157	2,8028	**5**	189,5	3166,9
636	404496	257259456	25,2190	8,5997	0,00157	2,8035	6	199,8	3176,9
637	405769	258474853	25,2389	8,6043	0,00157	2,8041	7	200,1	3186,9
638	407044	259694072	25,2587	8,6088	0,00157	2,8048	8	200,4	3696,9
639	408321	260917119	25,2784	8,6432	0.00156	2,8055	9	200,7	3206,0
640	409600	262144000	25,2982	8,6677	0,00156	2,8062	**64,0**	201,1	3217,0
641	410881	263374721	25,3180	8,6222	0,00,56	2,8569	1	201,4	3227,1
642	412164	264609288	25,3377	8,6267	0,00156	2,8075	2	201,7	3237,1
643	413449	265847707	25,3574	8,6312	0,00156	2,8082	3	202,0	3247,2
644	414736	267089984	25,3772	8,6357	0,00155	2,8089	4	202,3	3257,3
645	416025	268386125	25,3969	8,6401	0,00155	2,8096	**5**	202,6	3267,5
646	417316	269586136	25,4165	8,6446	0,00155	2,8102	6	203,9	3277,6
647	418609	270840023	25,4362	8,6490	0,00155	2,8109	7	203,3	3287,7
648	419904	272097792	25,4558	8,6535	0,00154	2,8116	8	203,6	3297,9
649	421201	273359449	25,4755	8,6579	0,00154	2,8122	9	203,9	3308,1
650	422500	274925000	25,4951	8,6624	9,00154	2,8129	**65,0**	204,2	3318,3
651	423801	275894451	25,5147	8,6668	0,00154	2,8136	1	204,5	3328,5
652	425104	277167808	25,5343	8,6713	0,00153	2,8143	2	204,8	3338,8
653	426409	278445077	25,5539	8,6757	0,00153	2,8149	3	205,1	3349,0
654	427716	279726264	25,5734	8,6801	0,00153	2,8156	4	206,5	3359,3
655	429025	281011375	25,5930	8,6845	0,00153	2,8162	**5**	205,8	3369,6
656	430336	282300416	75,6125	8,6890	0,00152	2,8169	6	206,1	3379,9
657	431649	283593393	25,6320	8,6934	0,00155	2,8176	7	206,4	3390,2
658	432964	284890312	25,6515	8,6978	0,00152	2,8182	8	206,7	3400,5
659	434281	286191179	25,6710	8,7022	0,00152	2,8189	9	207,0	3410,8
660	435600	287496000	25.6905	8,7066	0.00152	2,8195	**66,0**	207,3	3421,2
661	436921	288804731	25,7099	8,7110	0,00151	2,8202	1	207,7	3431,6
662	438244	290117528	25,7294	8,7154	0,00151	2,8209	2	208,0	3442,0
663	439569	291434247	25,7488	8,7198	0,00151	2,8215	3	208,3	3452,4
664	440896	292754944	25,7682	8,7241	0,00151	2,8222	4	208,6	3462,8
665	442225	29107962[illegible]	25,7[illegible]76	8,72[illegible]	0,00150	2,8[illegible]28	**5**	208,9	3473,2

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d = 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
666	443556	295408296	25,8070	8,7329	0,00150	2.8235	6	209,2	3483,7
667	444889	296740963	85,8263	8,7373	0,00150	2 8241	7	209,5	3494,2
668	446224	298077632	25,8457	8,7416	0,00150	2,8248	8	209,9	3504,6
669	447561	299418309	25,8650	8,7460	0,00149	2,8254	9	210,2	3515,1
670	448900	300763000	25,8894	8,7503	0,00149	2,8261	**67,0**	210,5	3525,4
671	450241	302111711	25,9037	8,7547	0,00149	2,8267	1	210,8	3536,2
672	451584	303464448	25,9230	8,7590	0,00149	2,8274	2	211,1	3546,7
673	452929	304821217	25,9422	8,7634	0,00149	2,8280	3	211,4	3557,3
674	454276	306182024	25,9615	8,7677	0,00148	2,8287	4	211,7	3567,9
675	455625	307546875	25,9808	7,7721	0,00148	2,8293	5	212,0	3578,5
676	456976	308915776	26,0000	8,7764	0,00148	2,8299	6	212,4	3586,1
677	458329	310288733	26,0192	8,7807	0,00148	2,8306	7	212,7	3599,7
678	409684	311665752	26,0384	8,7850	0,00147	2,8312	8	213,0	3610,1
679	461041	313046839	26,0576	7,7893	0,00147	2,8319	9	213,4	3621,0
680	462400	314432000	26,0768	8,7937	0,00147	2,8325	**68,0**	213,6	3631,7
681	463761	315821241	26,0960	8,7980	0,00147	2,8332	1	213,9	3642,4
682	465124	317216568	26,1151	8,8023	0,00147	2,8338	2	214,3	3653,1
683	466489	318611987	26,1343	8,8066	0,00146	2,8344	3	214,6	3663,7
684	467856	320013504	26,1534	8,8109	0,00146	2,8351	4	214,9	3674,5
685	469225	324419125	26,1725	8,8152	0,00146	2,8357	5	215,2	3685,3
686	470596	322828856	26,1916	8,8194	0,00146	2,8363	6	215,5	3696,1
687	471969	324242703	26,2107	8,8237	0,00146	2,8370	7	215,8	3706,8
688	473344	325660672	26,2298	8,8280	0,00145	2,8376	8	216,1	3717,9
689	474721	327082769	26,2488	8,8323	0,00145	2,8382	9	216,5	3728,5
690	476100	328509000	26,2679	8,8366	0,00145	2,8389	**69,0**	216,8	3739,3
691	477481	329939371	26,2869	8,8408	0,00145	2,8395	1	217,1	3750,1
692	478864	331373888	26,3059	8,8451	0,00145	2,8401	2	217,4	3761,0
693	480249	335812557	26,3249	8,8493	0,00144	2,8407	3	217,7	3771,9
694	481636	334255384	26,3439	8,8536	0,00144	218414	4	218,0	3782,8
695	483025	335702375	26,3629	8,8578	0,00144	2,8020	5	218,3	3793,7
696	484416	337153536	26,3818	8,8621	0,00144	2,8426	6	218,7	3804,6
697	485809	338608873	26,4008	8,8663	0,00143	2,8432	7	219,0	3815,5
698	487204	340068392	26,4197	8,8706	0,00143	2,8439	8	219,3	3826,5
699	488601	341532099	26,4386	8,8748	0,00143	2,8445	9	219,6	3837,5
700	490000	343000000	26,4575	8,8790	0,00143	2,8451	**70,0**	719,9	3848,5
701	491401	344472101	26,4764	8,8833	0,00143	2,8457	1	220,2	3859,5
702	492804	345948408	26,4953	8,8875	0,00142	2,8463	2	220,5	3870,5
703	494209	347428927	26,5141	8,8917	0,00142	2,8470	3	220,9	3881,5
704	495616	348913664	26,5330	8,8959	0,00142	2,8476	4	221,2	3892,6
705	497025	350402625	21,5518	8,9001	0,00142	2,8482	5	221,5	3903,6
706	498436	351895816	26,5707	8,9043	0,00142	2,8488	6	221,8	3914,7
707	499849	353393243	26,5895	8,9085	0,00141	2,8494	7	222,1	3925,8
708	501264	354894912	26,6083	8,9127	0,00141	2,8500	8	222,4	3636,9
709	502681	356400829	26,6271	8,9169	0,00141	2,8506	9	222,7	3948,0
710	504100	357911000	26,6458	8,9211	0,00141	2,8513	**71,0**	223,1	3959,2

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d = 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
711	505521	359425431	26,6646	8,9253	0,00141	2,8519	1	223,4	3970,4
712	506944	360944128	26,6833	8,9295	0,00140	2,8525	2	223,7	3981,5
713	507369	362467097	26,7021	8,9337	0,00140	2,8531	3	224,0	3992,7
714	508796	363994344	26,7208	8,9378	0,00140	2,8537	4	224,3	3003,9
715	511225	365525875	26,7395	8,9420	0,00140	2,8543	**5**	224,6	3015,2
716	512656	367061696	26,7582	8,9462	0,00140	2,8549	6	224,9	4021,4
717	514089	268601813	26,7769	3,9503	0,00139	2,8555	7	225,3	4057,6
718	515524	370146232	26,7955	8,9545	0,00139	2,8561	8	225,6	4048,9
719	516961	371694959	26,8142	8,9587	0,00139	2,8567	9	225,9	4060,2
720	518400	373248000	26,8328	8,9623	0,00139	2,8573	**72,0**	226,2	4071,5
721	519841	374805361	26,8514	8,9670	0,00139	2,8579	1	226,5	4082,8
722	521284	376367048	26,8701	8,9711	0,00139	2,8585	2	226,8	4094,2
723	522729	376933067	26,8887	8,9752	0,00138	2,8591	3	227,1	4105,5
724	524176	379503424	26,9072	8,9794	0,00138	2,8597	4	227,5	4116,9
725	525625	381078125	26,9258	8,9835	0,00138	2,8603	**5**	227,8	4128,2
726	527076	382657176	26,9444	8,9876	0,00138	2,8609	6	228,1	4139,6
727	528529	384240583	26,9629	8,9918	0,00138	2,8615	7	228,4	4151,1
728	529984	385828352	26,9815	8,9959	0,00137	2,8621	8	228,7	4162,5
729	531441	387420489	27,0000	9,0000	0,00137	2,8627	9	229,0	4173,9
730	532900	389017000	27,0185	9,0041	0,00137	2,8633	**73,0**	229,3	4185,4
731	534361	390617891	27,0370	9,0082	0,00137	2,8639	1	229,7	4196,9
732	535824	392223168	27,0555	9,0123	0,00137	2,8645	2	230,0	4208,4
733	537289	393832837	27,0740	3,0164	0,00136	2,8651	3	230,3	4219,9
734	538756	395446904	27,0924	9,0205	0,00136	2,8657	4	630,6	4231,4
735	540225	397065375	27,1119	9,0246	0,00136	2,8663	**5**	230,9	4242,9
736	541696	398688256	27,1293	9,0288	0,00136	2,8669	6	231,2	4254,5
737	543169	400315553	27,1477	9,0327	0,00136	2,8675	7	231,5	4266,0
738	544644	401947272	27,1662	9,0369	0,00136	2,8681	8	231,8	4277,6
739	046121	403583419	27,1846	9,0410	0,00135	2,8687	9	232,2	4289,2
740	547600	405224000	27,2029	9,0450	0,00135	2,8692	**74,0**	232,5	4300,8
741	549081	406869021	27,2213	9,0491	0,00135	2,8698	1	232,8	4312,5
742	550564	408518488	27,2397	9,0532	0,00135	2,8704	2	333,8	4324,1
743	552049	410172407	27,2580	9,0572	0,00135	2,8710	3	233,4	4335,8
744	553536	411830784	27,2764	9,0613	0,00134	2,8716	4	233,7	4347,5
745	555025	413493625	26,2947	9,0654	0,00134	2,8722	**5**	234,0	4359,2
746	556516	415160936	27,3130	9,0694	0,00134	2,8727	6	234,4	4370,9
747	558009	416832723	27,3313	9,0735	0,00134	2,8733	7	234,7	4382,6
748	559504	418508992	27,3496	9,0775	0,00134	2,8739	8	235,0	4394,3
749	561001	420189749	27,3679	9,0816	0,00134	2,8745	9	235,3	4406,1
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	0,00133	2,8751	**75,0**	235,6	4417,9
751	564001	423564751	27,4044	9,0896	0,00133	2,8756	1	235,9	4429,7
752	565504	425259008	27,4226	9,0937	0,00133	2,8762	2	236,2	4441,5
753	567009	426957777	27,4408	9,0977	0,00133	2,8768	3	236,6	4453,3
754	568516	428661064	27,4591	9,1017	0,00133	2,8774	4	236,9	4465,1
755	570025	430368875	27,4773	9,1057	0,00132	2,8780	**5**	237,2	4477,0

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	$d = 0,1\,n$	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
756	571536	432081216	27,4955	9,1098	0,00132	2,8785	6	237,5	4488,8
757	573049	433798093	27,5136	9,1138	0,00132	2,8791	7	237,8	4500,7
758	574564	435519512	27,5318	9,1178	0,00132	2,8797	8	238,1	4512,6
759	576081	437245479	27,5500	9,1218	0,00132	2,8802	9	238,4	4524,4
760	577600	438976000	27,5681	9,1258	0,00132	2,8808	**76,0**	238,8	4536,5
761	579121	440711081	27,5862	9,1298	0,00131	2,8814	1	239,1	4548,4
762	580644	442450728	27,6043	9,1338	0,00131	2,8820	2	239,4	4560,4
763	582169	444194947	27,6225	9,1378	0,00131	2,8825	3	239,7	4572,3
764	583696	445943744	27,6405	9,1418	0,00131	2,8831	4	240,0	4584,3
765	585225	447697125	27,6586	9,1458	0,05131	2,8837	**5**	240,3	4596,3
766	586756	449455096	27,6767	9,1498	0,00131	2,8842	6	240,6	4608,4
767	588289	451217163	27,6948	9,1537	0,00130	2,8848	7	241,0	4620,4
768	589824	452984832	27,7128	9,1577	0,00130	2,8854	8	241,3	4632,5
769	591361	454756609	27,7308	9,1617	0,00130	2,8859	9	241,6	4644,5
770	592900	456533000	27,7489	9,1657	0,00130	2,8865	**77,0**	241,9	4656,5
771	594441	458314011	26,7669	9,1696	0,00130	2,8870	1	242,2	4668,7
772	595984	460099648	27,7849	9,1736	0,00130	2,8876	2	242,5	4680,4
773	597529	461889917	27,8029	9,1775	0,00129	2,8882	3	242,8	4693,0
774	599076	463684824	27,8209	9,1815	0,00129	2,8887	4	243,2	4705,1
775	600625	465484375	27,8388	9,1855	0,00129	2,8893	**5**	243,5	4717,3
776	602176	467288576	27,8568	9,1894	0,00129	2,8899	6	243,8	4729,5
777	603729	469097433	27,8747	9,1933	0,00129	2,8904	7	244,1	4741,7
778	605284	470910952	27,8927	9,1973	0,00129	2,8910	8	244,4	4753,6
779	606841	472729139	27,9106	9,2012	0,00128	2,8915	9	244,7	4766,1
780	608400	474552000	27,9285	9,2052	0,00128	2,8921	**78,0**	245,0	4778,4
781	609961	476379541	27,9464	9,3091	0,00128	2,8926	1	245,4	4790,6
782	611524	478211768	27,9643	9,2130	0,00128	2,8932	2	245,7	4802,6
783	613089	480048687	27,9821	9,2170	0,00128	2,8938	3	246,0	4815,2
784	614656	481890304	28,0000	9,2209	0,00128	2,8943	4	246,3	4827,5
785	616225	483746625	28,0179	9,2248	0,00127	2,8949	**5**	24,,6	4839,8
786	617796	485587656	28,0357	9,2287	0,00127	2,8954	6	246,9	4852,2
787	619369	487443403	28,0535	9,2326	0,00127	2,8960	7	247,2	4864,5
788	620944	489303872	28,0713	9,2365	0,00127	2,8965	8	247,6	4876,9
789	622521	491169069	28,0891	9,2404	0,00127	2,8971	9	247,9	4889,3
790	624100	493039000	28,1069	9,2443	0,00127	2,8976	**79,0**	248,2	4901,7
791	625681	494913671	28,1247	9,2482	0,00126	2,8982	1	248,5	4914,1
792	627264	496793088	27,1455	9,2521	0,00126	2,8987	2	247,8	4926,5
793	628849	498677257	28,1603	9,2560	0,00126	2,8993	3	249,1	4939,0
794	630436	500566184	28,1780	9,2599	0,00126	2,8998	4	249,4	4951,4
795	632025	502459875	28,1957	9,2638	0,00126	2,9004	**5**	249,8	4963,9
796	633616	504358336	28,2135	9,2677	0,00126	2,9009	6	250,1	4976,4
797	635209	506261573	28,2312	9,2716	0,00125	2,9015	7	250,4	4988,9
798	636804	508169592	28,2489	9,2754	0,00125	2,9020	8	250,7	5001,4
799	638401	510082399	28,2666	9,2793	0,00125	2,9026	9	251,0	5014,0
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	0,00125	2,9031	**80,0**	251,3	5026,5

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d= 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
801	641601	513922401	28,3019	9,2870	0,00125	2,9036	1	251,6	5039,1
802	643204	515849608	28,3196	9,2909	0,00125	2,9042	2	252,0	5051,7
803	644809	517781627	28,3373	9,2948	0,00125	2,9047	3	252,3	5064,3
804	646416	519718464	28,3549	9,2986	0,00124	2,9053	4	252,6	5076,9
805	648025	521660125	28,3725	9,3025	0,00124	2,9058	**5**	252,9	5089,6
806	649636	523606616	28,3901	9,3063	0,00124	2,9063	6	253,2	5102,2
807	651249	525557943	28,4077	9,3102	0,00124	2,9069	7	253,5	5114,9
808	652864	527514112	28.4253	9,3140	0,00124	2,9074	8	153,8	5127,6
809	654481	529475129	28,4429	9,3179	0,00124	2,9080	9	254,2	5140,3
810	656100	531441000	28,4605	9,3217	0,00123	2,9085	**81,0**	254,5	5153,0
811	657721	533411741	28,4784	9,3255	0,00123	2,9090	1	254,8	5165,7
812	659344	535387328	28,4956	9,3294	0,00123	2,9095	2	255,1	5178,5
813	660969	537367797	28,5132	9,3332	0,00123	2,9101	3	255,4	5191,2
814	662596	549353144	28,5377	9,3370	0,00123	2,9106	4	255,7	5204,0
815	664225	541343375	28,5482	9,3408	0,00123	2,9112	**5**	256,0	5216,8
816	665856	543338496	28,5657	9,3447	0,00123	2,9117	6	256,4	5229,6
817	667489	545338512	28,5832	9,3485	0,00122	2,9122	7	256.7	5242,4
818	669124	547343432	28,6007	9,3523	0,00122	2,9128	8	257,0	5255,3
819	670761	546353259	28,6182	9,3561	0,00122	2,9133	9	257,3	5368,1
820	672400	551368000	28,6356	9,3599	0,00122	2,9138	**82,0**	257,6	5281,0
821	674041	553387611	28,6531	9.3637	0,00122	2,9143	1	257,9	5303,9
822	675684	555412248	28,6705	9,3675	0,00122	2,9149	2	258,2	5306,8
823	677329	557441767	28,6880	9,3713	0,00122	2,9154	3	258,6	5319,7
824	678976	559476224	28,7054	9,3751	0,00121	2,9159	4	258,9	5332,7
825	680625	561515625	28,7228	9,3789	0,00121	2,9164	**5**	259,2	5345,6
826	682276	563559976	28,7402	9,3827	0,00121	2,9170	6	259,5	5358,6
827	683929	565609283	28,7576	9,3865	0,00121	2,9175	7	259,8	5371,6
828	685584	567663552	28,7750	9,3902	0,00121	2,9180	8	260,1	5384,6
829	687241	569722789	28,7924	9,3940	0,00121	2,9186	9	260,4	5397,6
830	688900	571787000	28,8097	9,3978	0,00120	2,9191	**83,0**	260,8	5410,6
831	690561	573856191	28,8271	9,4016	0,00120	2,9196	1	261,1	5423,7
832	692224	575930368	28,8444	9,4053	0,00120	2,9201	2	261,4	5436,7
833	693889	578009537	28,8617	9,4091	0,00120	2,9206	3	261,7	5449,8
834	695556	580093704	28,8791	9,4129	0,00120	2,9212	4	262,0	5462,9
835	697225	582182875	23,8964	9,4166	0,00120	2,9217	**5**	262,3	5476,0
836	698896	584277056	28,9137	9,4204	0,00120	2,9222	6	262,6	5489,1
837	700569	586376253	28,9310	9,4241	0,00119	2,9228	7	263,0	5502,3
838	702244	588480472	28,9482	9,4279	0,00119	2,9232	8	263,3	5515,4
839	703921	500589719	28,9655	9,4316	0,00119	2,9238	9	203,6	5528,6
840	705600	592704000	28,9828	9,4354	0,00119	2,9243	**84,0**	263,9	5541,8
841	707281	584823321	29,0000	9,4391	0,00119	2,9248	1	264,2	5555,0
842	708964	596947688	29,0172	9,4429	0,00119	2,9253	2	264,5	5568,2
843	710649	599077107	29,0345	9,4466	0,00119	2,9258	3	264,8	5581,4
843	762236	601211584	29,0517	9,4503	0,00118	2,9 63	4	265,2	5594,7
845	714025	603351125	29,0689	9,4541	0,00118	2,9269	**5**	265,5	5607,9

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d= 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
846	715716	605495736	29,0861	9,4579	0,00118	2,9274	6	265,8	5621,2
847	717409	607645423	29,1033	9,4615	0,00118	2,9279	7	266,1	5634,5
848	719104	609800192	29,1204	9,4652	0,00118	2,9284	8	266,4	5647,8
849	720801	611960049	29,1376	9,4690	0,00118	2,9289	9	266,7	5661,2
850	722500	614125000	20,1548	9,4727	0,00118	2,9294	**85,0**	267,0	5674,5
851	724201	616295051	29,1719	9,4764	0,00118	2,9299	1	267,3	5687,9
852	725904	618470208	29,1890	9,4801	0,00117	2,9304	2	267,7	5701,2
853	727609	620650477	29,2062	9,4838	0,00117	2,9309	3	268,0	5714,6
854	729316	622835864	29,2233	9,4875	0,00117	2,9315	4	268,3	5728,0
855	731025	625026375	29,2404	9,4912	0,00117	2,9320	**5**	268,6	5741,5
856	732736	627222016	29,2575	9,4949	0,00117	2,9325	6	268,9	5754,9
857	734449	626422793	29,2746	9,4986	0,00117	2,9330	7	269,2	5768,3
858	736164	631628712	29,2916	9,5023	0,00117	2,9335	8	269 5	5781,8
859	737881	633839779	29,3087	9,5060	0,00116	2,9340	9	269,9	5795,3
860	739600	636056000	29,3258	5,5097	0,00116	2,9345	**86,0**	270,2	5808,8
861	741821	638277381	29,3428	9,5134	0,00116	2,9350	1	270,5	5822,3
862	743044	640503928	29,3598	9,5171	0,00116	2 9355	2	270,8	5835,9
863	744716	941735647	29,3769	9,5207	0,00116	2,9360	3	271,1	5849,4
864	746496	644972544	29,3939	9,5241	0,00116	2,9365	4	271.4	5863,0
865	748225	647214625	29,4109	9,5281	0,00116	2,9370	**5**	271,7	5876,5
866	749956	639461896	29,4279	9,5317	0,00115	2,9375	6	272,1	5890,1
867	751689	651714363	29,4449	9,5354	0,00115	2,9380	7	272,4	5903,8
868	753424	653972032	29,4618	9,5391	0,00115	2,9385	8	272,7	5917,4
869	755161	656234909	29,4788	9,5427	0,00115	2,9390	9	273,0	5931,0
870	756900	658503000	29,4958	9,5464	0,00115	2,9395	**87,0**	273,3	5944,7
871	758651	660776311	29,5127	9,5501	0,00115	2,9400	1	274,6	5958,4
872	760384	663054848	29,5296	9,5537	0,00115	2,9405	2	273,9	5972,0
873	762129	665338617	9,5466	9,5574	0,00115	2,9410	3	274,3	5985,7
874	763876	667627624	29,5635	9,5610	0,00114	2,9415	4	274,6	5999,5
875	765625	669921875	29,5804	9,5647	0,00114	2,9420	**5**	274,9	6013,2
876	767376	672221376	29,5973	9,5683	0,00114	2,9425	6	275,2	6027,0
877	769129	674526133	29,6142	9,5719	0,00114	2,9430	7	275,5	6040,7
878	770884	676836152	29,6311	9,5756	0,00114	2,9435	8	275,8	6054,5
879	772641	676151439	29,6479	9,5792	0,00114	2,9440	9	276,1	6068,3
880	774400	681472000	29,6648	9,5828	0,00114	2,9455	**88,0**	276,5	6082,1
881	776161	683797841	29,6816	9,5865	0,00114	2,9450	1	276,8	6096,0
882	777924	686128968	9,6985	9,5901	0,00113	2,9455	2	277,1	6109,8
883	779689	688465387	29,7153	9,5937	0,00113	2,9460	3	277,4	6123,7
884	781456	990807104	29,7321	9,5973	0,00113	2,9465	4	277,7	6137,5
885	783225	693154125	29,7489	9,6510	0,00113	2,9469	**5**	278,0	6151,4
886	784996	695506456	29,7658	9,6016	0,00113	2,9474	6	278,3	6165,3
887	786769	697864103	29,7825	9,6082	0,00113	2,9479	7	278,7	6179,3
888	788544	700227072	29,7993	9,6118	0,00113	2,9484	8	279,0	6193,2
889	795321	702595369	29,8161	9,6154	0,00112	2.9489	9	279,3	6207,2
890	792100	704969000	29,8329	9,6190	0,00112	2,9494	**89,0**	279,6	6221,1

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d= 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
891	793881	707347971	29,8496	9,6226	0,00112	2,9499	1	289,9	6235,1
892	795664	709732288	29,8664	9,6262	0,00112	2,9504	2	280,2	6249,1
893	797449	712121957	29,8831	9,6298	0,00112	2,9509	3	280,5	6263,1
894	799236	714516984	29,8998	9,6334	0,00112	2,9513	4	280,9	6277,2
895	801025	716617375	29,8166	9,6370	0,00112	2,9518	**5**	281,2	6291,2
896	802816	719323136	29,9333	9,6406	0,00112	2,9523	6	281,5	6305,3
897	804609	721734273	29,9500	9,6442	0,00111	2,9528	7	281,8	6319,4
898	806404	724150792	29,9666	9,6477	0,00111	2,9533	8	282,1	6333,5
899	808201	726572699	29,9833	9,6513	0,00111	2,9538	9	282,4	6347,6
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	0,00111	2,9542	**90**,0	282,7	6361,7
901	811801	731432701	30,0167	9,6585	0,00111	2,9547	1	283,1	6375,9
902	813604	733870808	30,0333	9,6620	0,00111	2,9552	2	283,4	6390,0
903	815409	736314327	30,0500	9,6656	0,00111	2,9557	3	283,7	6404,2
904	817216	738763264	30,0666	9,6692	0,00111	2,9563	4	284,0	6418,4
905	819025	741217625	30,0832	9.6727	0,00110	2,9567	**5**	284,3	6432,6
906	820836	743677416	30,0998	9,6763	0,00110	2,9571	6	284,6	6446,8
907	822649	746142613	30,1164	9,6799	0,00110	2,9576	7	284,9	6461,1
908	824464	748613312	30,1330	9,6834	0,00110	2,9581	8	285,3	6475,3
909	826281	751089429	30,1496	9,6870	0,00110	2,9586	9	285,6	6489,6
910	828100	753571000	30,1662	9,6905	0,00110	2,9590	**91**,**0**	285,9	6503,9
911	829921	756058031	30,1828	9,6941	0,00110	2,9595	1	286,2	6518,2
912	831744	757550528	30,1993	9,6976	0,00110	2,9599	2	286,5	6532,5
913	833569	761048497	30,2159	9,7012	0,00110	2,9605	3	286,8	6546,8
914	835396	763551944	30,2324	9,7047	0,00109	2.9609	4	787,1	6561,2
915	837225	766060875	30,2490	8,7082	0,00109	2,9614	**5**	287,5	6575,5
916	839051	768572296	30,2655	9,7118	0,00109	2,9619	6	287,8	6589,9
917	840889	771095213	30,2820	9,7153	0,00109	2,9624	7	288,1	6604,3
918	842724	773620632	30,2985	9,7188	0,00109	2,9628	8	288,4	6618,7
919	844561	776151559	30,3150	9,7224	0,00109	2,9633	9	288,7	6633,2
920	846400	778688000	30,3315	9,7259	0,00109	2,9638	**92**,0	289,0	6647,6
921	848241	781229961	30,3480	9,7294	0,00109	2,9643	1	289,3	6662,1
922	850084	783777448	30,3645	9,7329	0,00108	2,9647	2	289,7	6676,5
923	851929	786330467	30,3800	9,7361	0,00108	2,9652	3	290,0	6691,0
924	853776	788869024	30,3974	9,7400	0,00108	2,9657	4	290,3	6705,5
925	855625	791453125	30,4138	9,7435	0,0,108	2,9661	**5**	290,6	6720,1
926	857476	794022776	30,4302	9,7470	0,00108	2,9666	6	290,9	6734,6
927	859329	796597988	30,4467	9,7505	0,00108	2,9671	7	291,2	6749,2
928	861184	799178752	30,4631	9,7540	0,00108	2,9675	8	291,5	6763,7
929	863041	801765089	30,4795	9,7575	0,00108	2,9680	9	291,9	6778,3
930	864900	804357000	30,4959	9,7610	0,00108	2,9685	**93**,**0**	292,2	6792,9
931	816761	806954491	30,5173	9,7645	0,00107	2,9689	1	292,5	6807,5
932	868624	809557568	30,5287	9,7680	0 00107	2,9694	2	292,8	6822,2
933	870489	812166237	30,5450	9,7715	0,00107	2,9699	3	293,1	6836,8
934	872356	804780504	30,5614	9,7750	0,00107	2,9704	4	293,4	6851,5
935	874225	817400375	30,5778	9,7785	0,00107	2,9708	**5**	293,7	6866,1

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d= 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
936	876046	820025856	30,5941	9,7819	0,00107	2,9713	6	294,1	6880,8
937	877969	822656953	30,6105	9,7854	0,00107	2,9717	7	294,4	6895,1
938	879844	825293672	30,6268	9,7889	0,00107	2,9722	8	294,7	6910,3
939	881721	827936019	30,6431	9,7924	0,00106	2,9727	9	295,0	6925,0
940	883600	830584000	30,6594	9,7959	0,00106	2,9731	**94,0**	295,3	6939,8
941	885481	833237621	30,6757	9,7993	0,00106	2,9736	1	295,6	6954,6
942	887364	835896888	30,6920	9,8028	0,00106	2,9740	2	295,9	6969,3
943	889249	838561807	30,7083	9,8063	0,00106	2,9745	3	296,3	6984,1
944	891136	841232384	30,7246	9,8097	0,00100	2,9750	4	296,6	6999,0
945	893025	843908625	30,7409	9,8132	0,00106	2,9754	**5**	266,9	7013,8
946	894916	846590536	30,7571	9,8167	0,00106	2,9759	6	297,2	7028,7
947	896809	849278123	30,7734	9,8201	0,00106	2,9763	7	297,5	7043,5
948	888704	851971392	30,7896	9,8236	0,00105	2,9768	8	297,8	7058,4
949	900601	854670349	30,8058	9,8270	0,00105	2,9773	9	298,1	7073,3
950	902500	857375000	30,8221	9,8305	0,00105	2,9777	**95,0**	298,5	7088,2
951	904401	860085351	30,8383	9,8339	0,00105	2,9782	1	298,8	7103,1
952	906304	862801408	30,8545	9,8374	0,00105	2,9786	2	299,1	7118,1
953	908209	865523677	30,8707	9,8408	0,00105	2,9791	3	299,4	7133,1
954	910116	868250664	30,8869	9,8443	0,60105	2,9796	4	299,7	7148,0
955	912025	870983875	30,9031	9,8477	0,00105	2,9800	**5**	300,0	7163,0
956	913936	873722816	30,9192	9,8511	0,00105	2,9805	6	300,3	7178,0
957	915849	876467493	30,9354	9,8546	0,00104	2,9809	7	300,7	7393,1
958	917764	879217912	30,9516	9,8580	0,00104	2,9814	8	301,0	7208,1
959	919681	881974079	30,9677	9,8614	0,00104	2,9818	9	301,3	7223,2
960	911600	884736000	30,9839	9,8648	0.00104	2,9823	**96,0**	301,6	7238,2
961	923521	887503681	31,0000	9,8683	0,00104	2,9827	1	301,9	7253,3
962	925444	890277128	31,0161	9,8717	0,00104	2 9832	2	302,2	7268,4
963	927369	893056347	31,0322	9,8751	0,00104	2,9836	3	302,5	7283,5
964	929296	895841344	31,0483	9,8785	0,00104	2,9841	4	302,8	7298,2
965	931225	898632125	31,0644	9,8819	0,00104	2,9845	**5**	303,2	7313,8
966	933196	901428696	31,0805	9,8854	0,00104	2,9850	6	303,5	7329,0
967	935089	904231063	31,0966	9,8888	0,00103	2,9854	7	303,8	7344,2
968	937024	907039232	31,1127	9,8922	0,00103	2,9859	8	304,1	7359,4
969	938961	909853209	31,1288	9,8956	0,00103	2,9863	9	304,4	7374,0
970	940900	912673000	31,1448	9,8990	0,00103	2,9868	**97,0**	304,7	7389,8
971	942841	915498611	31,1609	9,9024	0,00103	2,9872	1	305,0	7405,1
972	944784	918330048	31,1769	9,9058	0,00103	2,9877	2	305,4	7420,3
973	946729	921167317	31,1929	9,9092	0,00103	2,9881	3	305,7	7435,6
974	948676	924010424	31,2090	9,9126	0,00103	2,9886	4	306,0	7450,9
975	850625	926859375	31,2250	9,9160	0,00103	2,9890	**5**	306,3	7466,2
976	952576	929714176	31,2410	9 9194	0,00102	2,9894	6	306,6	7481,5
977	954529	932574833	31,2570	9,9227	0,00102	2,9899	7	306.9	7496,9
978	956484	935441352	31,2730	9,9261	0,00102	2,9903	8	307,2	7512,2
979	958441	938313736	31,2890	9,9295	0,00102	2,9908	9	307,6	7527,6
980	960400	941192000	31,3050	9,9329	0,00102	2,9912	**98,0**	307,9	7548,0

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	Log n	d= 0,1 n	πd	$\frac{1}{4}\pi d^2$
981	962361	914076141	31,3209	9,9363	0,00102	2,9917	1	308,2	7558,4
982	964324	946966168	31,3369	9,9396	0,00102	2,9921	2	308,5	2573,8
983	966289	949862067	31,3528	9,9430	0,00102	2,9925	3	308,8	7589,2
984	968256	952763904	31,3688	9,9464	0,00102	2,9930	4	309,1	7604,7
985	970225	955671625	31,3847	9,9497	0,00102	2,9934	5	309,4	7620,1
986	927196	958585256	31,4006	9,9531	0,00101	2,9939	6	309,3	7635,6
987	974169	961501803	31,4166	9,9565	0,00101	2,9943	3	310,1	7651,1
988	976144	964430272	31,4325	9,9598	0,00101	2,9948	8	310,4	7666,6
989	978121	917361669	31,4484	9,9632	0,00101	2,9952	9	310,7	7682,1
990	980100	970299000	31,4643	9,9666	0,00101	2,9956	**99,0**	310,0	7697,7
991	982081	973242271	31,4802	9,9699	0,00101	2,9961	1	311,3	7713,2
992	884064	976191488	31,4960	9,9733	0,00101	2,9965	2	311,6	7728,8
993	986049	979146657	31,5119	9,9766	0,00101	2,9969	3	312,0	7744,4
994	988036	982107784	31,5278	9,9800	0,00101	2,9974	4	312,3	7760,0
995	999025	985074875	81,5436	3,9833	0,00101	2,9978	5	312,6	7775,6
996	992036	988047936	31,5595	9,9366	0,00100	2,9983	9	312,9	7791,3
997	994009	991026973	31,5753	9,9900	0,00100	2,9987	2	313,2	7806,9
998	996004	994011992	31,5911	9,9933	0,00100	2,9991	8	313,5	7822,6
990	998006	997002999	31,6070	9,9967	0,00100	2,9996	9	313,8	7838,3
1000	1000000	1000000000	31,6228	10,0000	0,00100	3,0000	**100,0**	314,2	7854,0

V. Таблиця тригонометричних величин (див. табл. на ст. 340)

Короткі пояснення і вказівки, як користуватися з таблиці

Радіяном звуть кут ($= 57^\circ\ 17'\ 44'',8 \ldots\ldots = 57,29578 \ldots$ градус.), якого дуга дорівнює радіюсові. Якщо величину кута дано в градусах, мінутах і секундах, то, щоб виразити її радіянами, треба спершу мінути та секунди перетворити в градуси, і тоді кут у радіянах одержимо за формулою.

$$\alpha = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}\,\pi,$$

де $\pi = 3,14159265\ldots$ (або наближено $\pi = 3,14\ldots$).

Щоб знайти тригонометричну величину, напр., $\sin 52^\circ\ 4'$ робимо, так:

Беремо з таблиць $\sin 52^\circ$ і $\sin 53^\circ$, множимо їх ріжницю на $\frac{4}{60}$, тобто ділимо на 15, і одержану частку додаємо до $\sin 52^\circ$; сума й буде $\sin 52^\circ 4'$.

$$\begin{array}{rr|l}
\sin 53^\circ = & 0,7986 & \\
\sin 52^\circ = & \underline{0,7880} & \\
 & 0,0106 & \underline{\quad 15 \quad} \\
 & 10 & 0,00070 \\
 & & \underline{0,7880} \\
\sin 52^\circ 4' = & & 0,7887
\end{array}$$

Таблиця тригонометричних величин

КУТ Градус	КУТ Радіан	sin	tg	ctg	cos	Див. знизу	
0°	0	0	0	∞	1,0000	1,5708	90°
1	0,0175	0,0175	0,0175	57,2900	0,9998	1,5533	89
2	0,0349	0,0349	0,0349	28,6363	0,9994	1,5359	88
3	0,0524	0,0523	0,0524	19,0811	0,9986	1,5184	87
4	0,0698	0,0698	0,0699	14,3007	0,9976	1,5010	86
5	0,0873	0,0872	0,0875	11,4301	0,9962	1,4835	85
6	0,1047	0,1045	0,1051	9,5144	0,9945	1,4661	84
7	0,1222	0,1219	0,1228	8,1443	0,9925	1,4486	83
8	0,1396	0,1392	0,1405	7,1154	0,9003	1,4312	82
9	0,1571	0,1564	1,1584	6,3138	0,9877	1,4137	81
10	0,1745	0,1736	0,1763	5,6713	0,9848	1,3963	80
11	0,1920	0,1908	0,1944	5,1446	0,9816	1,3788	79
12	0,2094	0,2079	0,2126	4,7046	0,9781	1,3614	78
13	0,2269	0,2250	0,2309	4,3315	0,9744	1,3439	77
14	0,2443	0,2419	0,2493	4,0108	0,9703	1,3265	76
15	0,2618	0,2588	0,2679	3,7321	0,9659	1,3090	75
16	0,2793	0,2756	0,2867	3,4874	0,9613	1,2915	74
17	0,2967	0,2924	0,3057	3,2709	0,9563	1,2741	73
18	0,3142	0,3090	0,3249	3,0777	0,9511	1,2566	72
19	0,3313	0,3256	0,3443	2,9042	0,9425	1,2392	71
20	0,3491	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397	1,2217	70
21	0,3665	0,3584	0,3839	2,6051	0,9336	1,2043	69
22	0,3840	0,3746	0,4040	2,4751	0,9272	1,1868	68
23	0,4014	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205	1,1694	67
24	0,4189	0,4067	0,4452	2,2460	0,9135	1,1519	66
25	0,4363	0,4226	0,4663	2,1445	0,9063	1,1345	65
26	0,4538	0,4384	0,4877	2,0503	0,8988	1,1170	64
27	0,4712	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	1,0996	63
28	0,4887	0,4695	0,5317	1,8807	0,8830	1,0821	62
29	0,5061	0,4848	0,5543	1,8040	0,8746	1,0647	61
30	0,5236	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	1,0472	60
31	0,5411	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	1,0297	59
32	0,5585	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	1,0123	58
33	0,5760	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	0,9948	57
34	0,5934	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	0,9774	56
35	0,6109	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	0,9599	55
36	0,6283	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	0,9425	54
37	0,6458	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	0,9250	53
38	0,6632	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	0,9076	52
39	0,6807	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	0,8901	51
40	0,6981	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	0,8727	50
41	0,7156	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	0,8552	49
42	067330	0,6691	0,9904	1,1106	0,7431	0,8378	48
43	9,7505	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	0,8203	47
44	0,7679	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	0,8029	46
45	0,7854	0,7071	1.0000	1,0000	0,7071	0,7854	45
Див. згори		cos	ctg	tg	sin	КУТ Радіян.	КУТ Градус.

VI. Таблиці звичайних чотиризначних логаритмів і антилогаритмів чисел від 1 до 1000 з додатками (partes proportionales) для чисел до 10000

Коротке пояснення і вказівки, як користуватися з таблиць

1. Логаритми чисел

Щоб знайти логаритм якогось числа, напр. 78, 97, шукаємо спершу в лівім стовпчику таблиці логаритмів дві перші цифри 78 числа 7 897, а далі третю його цифру 9 у верхнім рядку, і в напрямі вниз від цієї цифри в однім рядку з 78 знаходимо (див. відповідну таблицю) цифри 8 971, тобто мантису логаритма числа 789; якщо до цього числа додамо 7, то в напрямі вниз від цифри 7, яка стоїть у верхнім правім кутку, знайдемо прибавку 4, і тому мантиса логаритма 7 897 буде 8 971 + 4, тобто

$$\text{Log } 78{,}97 = 1{,}8975.$$

II. Антилогаритми чисел

(Знаходження числа за логаритмом)

Щоб знайти число, яке відповідає, напр., логаритмові 2, 6959, шукаємо в відповідній таблиці у першім крайнім (ліворуч) стовпчику перші дві цифри мантиси, тобто, 69, а третю 5 — у верхнім рядку. Відповідне мантисі, 695 число буде 4 955, а якщо до мантиси, 695 приставити четверту задану цифру 9, то, взявши в правім верхнім кутку цифру 9, знайдемо над нею ту прибавку 10, яку треба зробити до числа 4 955. Отже, цифри числа, яке відповідає мантисі, 6 959, будуть 4 955 + 10 = 4 965, а значить, логаритмові 2,6959 відповідатиме число 496,5 (див. табл. на ст. 342 — 345).

Ч	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0889	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2045	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	21
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	4201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3682	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	4874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4797	2	3	5	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	2	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5523	5935	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	6
43	6335	6345	6355	6365	375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6993	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	3839	6848	6857	6866	6875	6884	6393	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	3	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7293	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

нтми (Л).

Ч	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7619	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	4	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8244	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8 99	8306	831	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8435	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8882	8188	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	0
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	866	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8794	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8720	8825	8831	8837	8842	8848	8354	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8871	8382	8887	8893	8899	8904	8810	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	3976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	8154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	8217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9560	9465	9469	9474	9479	9584	9489	0	1	2	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	6528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	6628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9466	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9459	9763	9768	6773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	0827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9363	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	6908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	99 1	9965	9969	9374	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

Антилога

Л	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
,05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
,06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
,07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
,08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
,09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
,10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
,11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
,12	1318	1321	1324	1327	1330	1331	1837	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
,13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,16	1445	1449	1452	1455	1359	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,19	1549	1552	1546	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
,20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
,21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
,22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1604	0	1	1	2	2	2	3	3	3
,23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
,24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
,25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
,26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
,27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
,28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
,29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
,30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	8	3	4	4
,31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
,32	2089	2094	2099	2101	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
,33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
,34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	0	1	2	2	3	3	4	4	5
,35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	0	1	2	2	3	3	4	4	5
,36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	0	1	2	2	3	3	4	4	5
,37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
,38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
,39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
,40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2552	2552	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
,41	2570	2576	2582	2588	2594	2630	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
,42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
,43	2692	2798	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
,44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
,45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
,46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
,47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
,48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
,49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

ритми (Ч)

Л	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
,51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3239	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
,52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
,53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
,54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
,55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
,56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
,57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
,58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
,59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
,60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4050	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4050	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	422	4236	4156	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4245	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	8	10
,67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
,68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	5	7	8	9	10
,69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4466	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
,70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
,71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
,72	5248	5260	5292	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
,73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
,74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
,75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
,76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
,77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5979	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
,78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
,79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
,80	6310	6324	6339	6353	6368	6883	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
,81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
,82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
,83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
,84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
,85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
,86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7579	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
,87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
,88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
,89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7888	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
,90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
,91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
,92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
,93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
,94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
,95	8913	8933	8953	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
,96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
,97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
,98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
,99	9772	9795	9817	9840	9861	9886	9908	9631	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

VII. Компенсаційний полярний пляніметр Коради

Опис

Компенсаційний пляніметр Коради готують двох відмін: з постійним і з змінним довжиною (переставним) обвідним важелем та голчастим полюсом. Будову пляніметра зі змінним важелем показано на рис. II.

Цей голчастий полюс має всі переваги кулястого полюса і зручніший, ніж полюс з голкою, — його не треба втикати в папір та діркувати папір околом голки наскрізь; крім того, можна уставляти лічильне колесо на

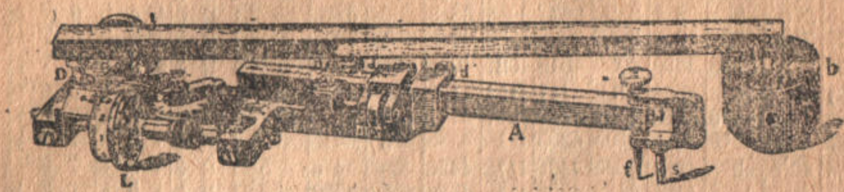


Рис. II

нуль, для того досить тільки нахилити в бік полюсний важіль так, щоб голка не доторкалася до паперу, і потім сунути по пляну полюс, доки колесо не уставиться на нуль.

Струмент складається з двох частин: обвідного й полюсного важелів, нарізно укладаних у футляр.

Злуку обох важелів показано на рис. III.

Обвідний важіль (рис. II.) ALD має три точки опори: обертове мідне колесо валка (обідець лічильного колеса) L, опорне колесо J і обвідний шпеник F. Він такий низький, що цілком проходить попід полюсним важелем і вільно досягає симетричного свого положення. Вісь опорного колеса J та вісь обідця лічильного колеса L взаємно нормальні, і обидві містяться в площі, рівнобіжній із пляном. Щоб надавати обвідному важелеві належної довжини, на важелі нанесені міліметрові поділки з долученням до них ноніюса, а на бічній грані — риски з особливими написами. На ці риски уставляють скошений край злучника, де рухається обвідний важіль. При важелі містяться звичайні натискні ґвинти ddd' злучника та мікрометровий ґвинт m, який чинить по закріпленні ddd'. З боку обвідного шпеника f міститься зручний для пучок руки гриф; він має пружину й підставку s. Натискуючи на головку шпеника, можна точно відзначити вістрям обвідного шпеника на папері початкову, отже, і кінцеву точку обведення.

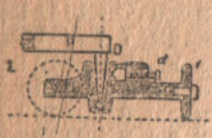


Рис. III

Злучені обидва важелі спеціяльним міцним сталим чопом полюсного важеля з вишліфуваним на кінці його кульовим наконечником, що заглиблюється в напівкулясту заглибину (гніздо), висвердлену в обвіднім важелі. Цю будову легко роздивитися на рис. II та III. Для забезпечення сталого положення кулястої частини й самого голчастого важеля править тягар полюсного важеля. Вісь скріплення важелів треба уявляти собі суто математичною простою лінією, що проходить посередині чопа й кулястого наконечника нормально до площі пляну.

Як бачимо з рис. II, лічильне колесо (валок) L міститься з боку, що дає змогу цілком вільно робити за ним і верньєром, а також за поземим циферблитом потрібні прочити згори. Циферблят, призначений лічити повні оберти колеса (валка), злучений за допомогою щестерні з безконечним ґвинтом осі колеса. Поділки різко нанесені на целюльоїді й дають змогу, мавши певну навичку, розрізняти четверті частини одної поділки нонюса. Колеса валк (обідець лічильного колеса) L зроблено зі спеціяльного металю, щоб запобігти іржавінню й стиранню його.

Уживання та догляд струменту

1. Перед тим, як уживати пляніметр для обчислення площ, треба пересвідчитися, що струмент у належнім стані: лічильне колесо мусить легко обертатися й допускати лише незначні, ледве помітні коливання вздовж осі, нонюс же, хоч и повинен доторкатися до краю колеса, але проміжок між ними мусить бути невеликий, щоб прочит можна було робити точно. Корисно час-від-часу спроваджувати порох, що потрапляє в цей проміжок, шматочком тонкого листовного паперу. Обвідний і полюсний важелі, а так само обвідний шпеник захищати від гнуття.

Особливо уважно слід захіщати лічильне колесо, як найважливішу частину струменту, від поштовхів або падіння, що можуть пошкодити тонкі кінці осі колеса. Ці вістря зовсім не слід виймати з їхніх гнізд. Помічене на них згущене мастило найкраще спроваджувати намоченою в гасі ниткою: натягати її біля гнізд осі й обертати колесо навколо його осі, підтримуючи знизу; після цього на кожне вістря знову впустити чистого найкращого мастила з тонко застругуного дерев'яного сірника.

2. Якщо обвідий важіль — пересувний (змінний своєю довжиною), то його уставляють так, щоб край злучника точно припадав на одній із нанесених на бічній грані важеля підписаних рисок.

Коли, обчисляючи площу фігури, бажають одержати натуральну її величину, незалежно від мірила пляну, то уставляють край злучника на риски, підписані 1□″ и 0,0001□′; вважають у першім випадку одну поділку пляніметра за відповідну одному квадратовому цалеві, а для другого випадку її вважають за 0,0001 квадратового фута. Якщо рисок цих нема, а натомість на верхній грані обвідного важеля є цалеві або міліметрові поділки, то довжину обвідного важеля можна обчислити, про віщо скажемо далі, і визначати за нонюсом, прикріпленим до злучника.

Часом у футлярі додають таблицю, за якою можна брати ту чи ту довжину важеля, відповідно до величини площі одної поділки пляніметра.

Уставляють довжину важеля спершу на око рукою, а далі точно, по закріпленні ґвинтів dd', обертаючи мікрометровий ґвинт m.

Плян найкраще натягувати на рівно виструґану дошку, щоб колесо вільно ковзалося й оберталося на папері пляну, не затримуючись на згортках та перегинах.

3. Вибравши положення полюса, прикидають (швидко обводячи контур обвідним шпеником), чи можна без перепон обвести фігуру так, щоб при всіх положеннях обвідного шпеника на контурі важелі не утворювали б надто гострого чи надто тупого кута і тим не порушували б стійкого положення струменту. В противнім разі місце полюса змінюють.

4. За початкову точку при обведенні беруть ту точку контура, коли обидва важелі приблизно будуть нормальні один до одного, якщо на цю точку уставити обвідний шпеник.

5. Обчисляючи площу фігури, краще вміщати полюс поза фігурою.

Вибравши остаточне місце полюса так, щоб віддаль між ним і обвідним шпеником, уміщеним усередині фігури, утворювала такий розхил обох важелів, коли важелі приблизно нормальні один до одного, і намітивши початкову точку обведення, роблять за лічильним механізмом прочит і уставляють риску О нонюса на риску О лічильного колеса, занотовуючи й місце указника на поземім ціфербляті. Указник при цим завжди буде на одній із рисок циферблату. Обвід лічильного колеса поділений на 100 частин, їх десятки підписані цифрами 1, 2 . . . . до 9. Повному обертові колеса відповідає перехід бляту з одної риски на дальшу, суміжну з нею риску.

Отже, зрозуміло, що прочит за лічильним механізмом пляніметра повинен складатися: *а*) з цифри, прочитаної на цифербляті, *б*) з цифри, прочитаної за лічильним колесом, *в*) з цифри, що виражає № риски, біля якої спинився О нонюса, і *г*) з прочиту на нонюсі. Нехай прочит буде число 3046. Першу цифру його взято з циферляту, другу — з колеса, і вона показує, що О нонюса стоїть між О і 1 колеса, пройшовши четверту риску цього проміжку, а остання цифра 6 визначає, що шоста риска нонюса зливається з якоюсь рискою колеса.

Тим що циферблят обертається за допомогою шестерні й дає плавкий рух, завдяки деякому проміжкові між шестернею і безконечним ґвинтом осі лічильного колеса, то указник циферляту не завжди точно зупиняється на нанесених на нім рисках, коли О нонюса зливається або близько наближається до нуля колеса. Щоб не помилитися в прочиті першої цифри і не зробити помилки на 1000 поділок, треба взяти за правило, що, знайшовши указник циферляту поблизу з однієї його рисок, слід прочитувати меншу цифру тоді, коли О нонюса не пройшов іще колеса і показує 70, 80, 90, і більшу, коли О онюса минув уже О колеса й стоїть поблизу 10, 20, 30, . . .

Припустім, що указник близько біля цифри 3; дивимося, де стоїть О нонюса. Нехай він пройшов цифру 8 колеса. Тоді записуємо першою цифрою прочиту 2.

Після прочиту починають ретельно обводити шпеником по контуру обчислюваної площі фігури в напрямі руху стрілки годинника, тобто від лівої руки до правої, доки не повернуться в початкову точку обведення. У цей час струмент обертатиметься навколо полюса, а колесо обертатиметься то в один бік, то в протилежний йому, а то просто ковзатиметься по паперу вздовж осі свого обертання.

Точно обводити не важко, якщо під п'ясть руки підкласти шматочок паперу, повернувш його гладкою поверхнею до пляну, а шерехатою до руки, а коли контур простолінійнний — прикласти вздовж окружної межі фігури звичайну лінієчку, хоча тоді завжди утворюватиметься неминуючий однобічний огріх. Якщо ж фігуру обводити просто **р у к о ю**, без лінійки, цей огріх буде то додатній, то від'ємний, а тому почасти сам собою нищитиметься. Коли вживають лінійки, то неминуче натискають на гриф обвідного шпеника, тиск передається обвідному важелеві, і важіль через еластичність відхиляється від належного свого положення, тому в прочиті неминуче утворюється огріх.

6. Повернувшися в початкову точку обведення, роблять удруге прочит на цифербляті, колесі й нонюсі. Якщо виявиться тут, що жодна риска нонюса точно не зливається з поділками колеса, то вибирают дві риски нонюса, які ближче за інші стоять до рисок колеса, і записують, наприклад, 7,5, коли виберуть 7 й 8 риски нонюса.

Нехай повний другий прочит виражається числом 5667,5; тоді віднімають од нього перший — 3046 і одержану ріжницю:

$$\begin{array}{r} 5667{,}5 \\ 3046 \\ \hline 2621{,}5 \end{array}$$

множать на величину площі, відповідну одній поділці пляніметра (**н а ц і н у о д н і є ї п о д і л к и**).

7. Обводячи великі фігури, вміщують полюс пляніметра **в с е р е д и н і** фігури, приблизно посередині її, якщо не бажають розбивати фігури на дрібніші частини й кожну з них обчисляти окремо.

Коли полюс міститься в середині фігури, вживання пляніметра різнитиметься від попереднього тільки тим, що до другого прочиту додають, так звані **п о с т і й н е ч и с л о**, вирізане на обвіднім важелі, при відповідній рисці згори, або вміщене в таблиці, доданій у футлярі струменту. З суми другого прочиту з постійним числом однімають перший прочит і одержану ріжницю множат, як і раніш, на ціну однієї поділки пляніметра:

Постійне число	1 323
Другий прочит	3026
Сума	18349
Перший прочит	9897
Ріжниця	8452

Площа = 8452 × на ціну одніэї поділки.

Коли перед обведенням фігури поля ноніюс уставлено на нуль колеса й указник циферблята стоїть біля цифри 3, слід другий прочит 4137,5 зменшити на 3000, а потім 1137,5 одняти від 15323, якщо фігуру обводили від правоі руки до лівої.

А саме:

$$
\begin{array}{r}
-\ 15323 \\
1137{,}5 \\
\hline
\times\ 14185{,}5 \\
0{,}06 \\
\hline
851{,}130
\end{array}
$$

Площа = 851 × на ціну однієї поділки.

8. Якщо, обводячи фігуру, помітять, що циферблят зробить 1, 2, 3 . . . повних оберти, то при проході через указник цифр ростучим порядком, слід до останнього прочиту додавати відповідно 10000, 20000, 30000 поділок, або, що те саме, приписувати з лівого боку цифру 1, 2, 3 . . . . . . Коли ж площа обвідної фігури менша, ніж площа, так званого, основного круга тобто, коли найбільший протяг фігури буде менший, ніж розхил між обома важелями в той час, як вони взаємно нормальні один до одного (коли площа колеса проходить через полюс пляніметра), то в цім разі другий прочит слід віднімати від 10000, бо колесо обертатиметься в зворотний бік (площею основного круга заведено звати площу кола, радіюс якого дорівнює зазначеному, розхилові важелів від полюса до обвідного шпеника в той момент коли площа колеса проходить через полюс).

9. Обводити контур шпеником треба так повільно, щоб завжди можна було прочитати підчас руху колеса й цифербляту виритувані на них цифри й риски. При рухові не слід допускати миттьових зупинок, а переходити від руху до спокою і навпаки повільно.

10. Корисно обводити фігуру кілька разів, і від лівої руки до правої і від правої до лівої, міняючи при цім для кожної відповідної пари обведень місце полюса Пересичне аритметичне з результатів беруть за остаточний результат.

11. Площі дуже малих контурів можна обчисляти тільки пляніметром із пересувним важелем. Що менші будуть розміри фігури, то коротша повинна бути довжина обвідного важеля Цього можна пересвідчитися безпосередньо, бо числа обертів лічильного колеса від зменшення довжини важеля збільшуватимуться, і малу площу можна буде виразити поділками пляніметра. Зменшуючи довжину важеля, збільшують тим число поділок пляніметра для тієї самої площі, отже, неминуче зменшують і величину ціни одної поділки пляніметра. Так, виявляється, що, коли нова довжина важеля має становити $\frac{2}{5} = 0{,}4$ довжини старої, то ціна однієї поділки теж зменшиться і буде 0,4 попередньо

Довжину важеля обчислюють за формулою:

$$R' = R\frac{p}{p'},$$

де R' і p' — шукана довжина важеля й нововибрана ціна однієї поділки пляніметра, а R та p — відповідно попередні величини довжини важеля й ціни одної поділки пляніметра.

Для вигоди обчислювача, у футлярі й додають звичайно таблицю довжин обвідного важеля, де довжини показано відповідно до певної величини однієї поділки пляніметра й даного мірила пляну.

12. Від зміни мірила пляну змінюється й величина площі однієї поділки пляніметра.

Коли мірило змінюється вдвоє, втрое тощо, то площа тієї самої дільниці змінюється, при нанесенні її на папір, учетверо, вдев'ятеро і т. д. Навпаки, одна й та сама фігура на папері в різних мірилах лишається тою самою в поділках пляніметра, але повинна змінитися в мірах, тому ціна однієї поділки пляніметра теж змінюється вчетверо, вдев'ятеро, вшістнадцятеро і т. д., коли мірило змінюється вдвоє, втроє, вчетверо і т. д.

Отже, коли мірило пляну буде більше, то ціна однієї поділки пляніметра стане менша, і, взагалі, якщо нововибране мірило $\left\{\begin{matrix}\text{дрібніше}\\ \text{більше}\end{matrix}\right\}$ від мірила даного, то ціна однієї поділки $\left\{\begin{matrix}\text{збільшується}\\ \text{зменшується}\end{matrix}\right\}$ проти попередньої.

Перевірка пляніметра

Перше, ніж перевіряти струмент, завжди треба пересвідчитися, що не що інше, як сам струмент, є джерело помилок у результатах, які дає пляніметр. Тому при перевірці вживають: 1) гладко виструганӧї дошки, на яку старанно й рівно натягають плян, та 2) спеціяльної лінійки (рис. IV), вміщеної в футлярі. Грубина цієї лінійки повинна бути незначна, щоб, коли підкласти її під обвідний шпеник, вона не могла нахилити обідця колеса й зменшити довжини обводу обідця. На лінійці виритувана проста, що проходить чдрез усю довжину лінійки, а на простій розміщаються — в початковій (лівій) точці ґудзик, від якого управоруч, уздовж лінії до скошеного краю, нанесені риски на віддалі одна від однієї, наприклад, на цаль, та відзначені заглибини конічної форми. Кінець простої на скошенім краї допускає суміщати лінію заглибин з простою, нарисованою оливцем на папері, в одну з точок якої уткнуто ґудзик контрольної лінійки.

Умістивши пляніметрі контрольну лінійку, як показано на рис. V, описують

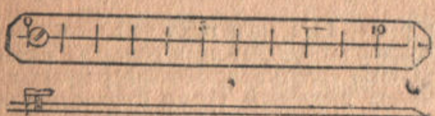


Рис. IV

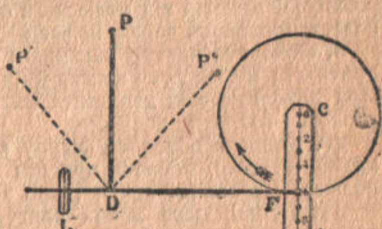


Рис. V

лінійкою повні кола. На ґудзик і на головку обвідного шпеника приміщають невеликі тягарі; саме обведення найкраще робити, тримаючись руками за контрольну лінійку а н е за шпеник. Коло буде описане точно, якщо на початку й на кінці обведення межа скошеного краю лінійки зливатиметься з нарисованою на папері лінією. Обводячи не раз кола того самого радіюса й порівнюючи один з одним одержані результати, пересвідчуються, що вони відмінні один від одного не більш, як на одну, дві поділки при різних віддаленнях полюса пляніметра від обводженого контура; після цього звіряють площу кола, обчислену геометрично на підставі формули (k — площа кола $= 3{,}14159r^2$, де r довжина радіюса кола за контрольною лінійкою), з одержаною за пляніметром через множення числа n поділок на ціну однієї поділки. Якщо перша є k, а друга k^1, то $k - k^1$ повинно бути менше від $\frac{k,}{200}$ і тоді загальний стан пляніметра вважають за добрий.

Якщо загальний стан пляніметра незадовільний, то перевіряють окремо три найголовніші умови пляніметра:

1) Чи має належну довжину змінний довжиною обвідний важіль, або чи вірна взята ціна однієї поділки пляніметра при сталій довжині обвідного важеля?

2) Чи вірне постійне число?

3) Чи нормальна площа лічильного колеса до лінії, яка лучить вістря обвідного шпеника із проекцією математичної осі скріплення важелів (на площу пляну)?

Перевірка третьої умови найважливіша; якщо недодержано цієї умови, пляніметр не може давати вірних результатів. Тому після перевірки загального стану пляніметра, коли ту саму фігуру обведуть двічі (один раз обвідний важіль управоруч від полюсного, а другий раз — уліворуч від нього), як це пояснено вище, порівняння обох результатів виявить, чи додержано цієї умови: обидва обведення повинні давати той самий результат у поділках пляніметра або, принаймні, можуть різнитися в межах допускної неминучої помилки від неточного обведеноя контура фігури шпеником.

Перевіряючи цю умову, уреба не спускати з уваги, що жодна частина обводженої фігури не повинна лежати поблизу основного кола та ще й рівнобіжно з його контуром. Недодержання цього правила спричиняє неправильне обертання колеса в тих місцях контура, де ця близькість і рівнобіжність існують, і позначається на результаті тим дужче, що довша лінія контура, рівнобіжна з обводом основного кола, і що ближче обвідний шпеник підходить до основного кола. Проте, помилка обернеться в нуль, якщо лінія контура є самий обвід основного кола. У старих пляніметрах стирання обідця лічильного колеса тільки тоді не впливає на прочит, коли є зупинки в руховi колеса, які чинять таким самим способом, що й рух шпеника по частині контура, рівнобіжній з основним колом. За невигідне положення полюса треба вважати також і таке коли закрутки контура рівнобіжні зі спіралюватими кривими. Форми цих кривих, вирізані з картону й просто безпосередньо прикладені до даної фігури, можуть допомогти усунути неправильний вибір місця полюса пляніметра.

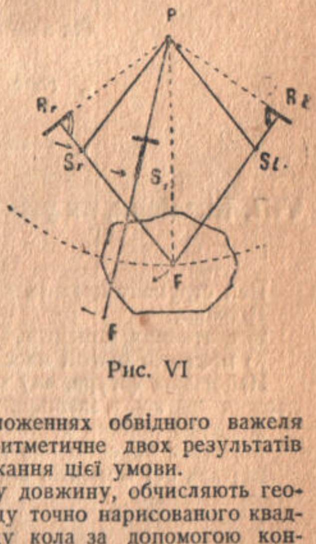


Рис. VI

За найвигідніше положення полюса при обведенні всякої фігури слід вважати те, коли обвід основного кола ділить контур даної фігури, приблизно, пополам, як це показано на рис. VI.

Коли пляніметр не виконує третьої умови, його слід уживати неминуче при двох положеннях обвідного важеля (праворуч і ліворуч від полюсного). Пересічне аритметичне двох результатів виключає вплив на остаточний результат недодержання цієї умови.

Щоб довідатися, чи має обвідний важіль дійсну довжину, обчисляють геометрично наперед відому площу, наприклад, площу точно нарисованого квадрата й трикутників, що складають його, або площу кола за допомогою контрольної лінійки. Потім порівнюють пересічне аритметичне з двох щойно зазначених результатів (обвідний важіль управоруч і вліворуч від полюсного), виражене поділками пляніметра, з геометрично обчисленою площею, напр., квадрата, але теж вираженою поділками пляніммерра. Якщо ріжниця між цими двома результатами дорівнюватиме $\frac{1}{10}$ площі фігури, обчисленої геометрично, то й важіль зменшують на $\frac{1}{10}$ його довжини, коли площа, обчислена пляніметром, менша від геометрично обчисленої, або збільшують, коли вона більша за цю останню. Так само знайдемо дійсну ціну однієї поділки пляніметра, якщо площу квадрата геометрично обчислену у ззятій мірі, або натуральну її величину поділимо на число поділок пляніметра,, знайдене за остаточним результатом обчислення площі квадрата пляніметром.

Постійне число пляніметра легко визначають таким спосоаом:

Обчислюють пляніметром площу великого нарисованого квадрата, уміщаючи полюс усередині фігури, і порівнюють її з площею того ж таки квадрата, знайденою геометрично й вираженою поділками ж пляніметра (або обчисленою пляніметром, при чім полюс уміщають поза фігурою). Ріжниця між першим і другим результатом дає постійне число для вибраної ціни одниєї поділки пляніметра і даної довжини важеля.

Точність обчислення площ компенсаційним пляніметром можна, як довів досвід, вважати при двох взаємних обведеннях контрольною лінійкою площ кіл:

$$1\,250 \text{ за рівну } 1{,}67\ mm^2 = \frac{1}{750} \cdot 1\,250$$

$$5\,000 \text{ за рівну } 3{,}0\ mm^2 = \frac{1}{1\,700} \cdot 5\,000$$

$$20\,000 \text{ за рівну } 4{,}2\ mm^2 = \frac{1}{5\,000} \cdot 20\,000$$

Найбільший допускний видхил одержаного результату від найімовірнішої його вартости при цім пляніметрі дорівнює:

для малих фігур $\frac{1}{250}$ частині обчислюваної площі

„ середніх „ $\frac{1}{370}$ частині обчислюваної площі

„ великих „ $\frac{1}{1\,670}$ частині обчислюваної площі

VIII. Вказівки, як уживати інтеґраторів системи Amsser-Laffon

Інтеґратор № 1

Цей струмент править для вимірів:
1) площ,
2) статичних моментів,
3) моментів інерції плоских фігур.

Найбільша фігура, яку можна виміряти за один раз, є прямокутник, завдовжки 122 *см*, а завширшки 34 *см*.

Довжина лінійки дорівнює 150 *см*.

Можливе переміщення каретки дорівнює 130 *см*.

Віддаль осі моментів від лінійки дорівнює 19 *см*.

Спосіб користуватися

Уживаючи приладу, насамперед проводять на рисунку фігури, що для неї бажають визначити зазначені вище величини, вісь моментів *XX* (тобто лінію, відносно якої бажають обчислити статичний момент і момент нерції).

Далі кладуть на рисунок велику лінійку, рівнобіжно з проведеною віссю, для чого вістря двох маленьких лінійок уставляють на осі моментів, и виступи на другім кінці їх кладуть у жолобок лінійки. Лінійка тоді лежить на потрібній віддалі від осі моментів і одночасно рівнобіжна з нею.

Потім кладуть струмент на рисунок таким способом, щоб коліщата каретки рухалися жолобком лінійки, а коточки лічильників — на папері; нарешті, в задній частині каретки закріпляють противагу.

Відзначивши на контурі вимірюваної фігури якусь точку, уміщають в ній край шпеника, що на кінці важеля. Далі роблять прочити на трьох лічильниках і записують їх, після чого обводять шпеником приладу по контуру фігури в напрямі стрілки годинника, тобто від лівої руки до правої.

Якщо ми назвемо лічильники: на важелі — літерою A, біля малого зубчастого колеса — літерою M і біля великого зубчастого колеса — літерою I, і позначимо:

шлях, пройдений лічильником A через a
„ „ M „ m
„ „ I „ i

то шукані величини можна обчислити з таких формул:

площу . . . . $A = 0{,}1\, a$
статичний момент . . . . $M = 0{,}6\, m$
момент інерції . . . . $I = 10\, a - 4\, i$

Формули ці застосовують, уживаючи нерухомого шпеника, і одержують шукані величини в сантиметрах.

Приклад. Візьм м коло діаметром 10 *см*. Треба визначити площу кола, статичний момент інерції відносно осі XX, дотичної до кола (рис. V I)

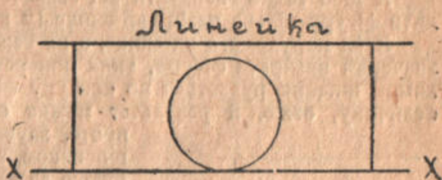


Рис. VII

Нехай, уставивши відповідним способом прилад, маємо:

3 271 на лічильнику A
1 427 „ „ M
8 843 „ „ I

Після ж обведення фігури нехай буде:

4 056 на лічильнику A
2 081 „ „ M
0 193 „ „ I

Запишім ці цифри так:

A	M	I
3 271	1 427	8 843
785	654	1 350
4 056	2 081	10 193

Таким способом ми одержуємо

$a = 785,$
$m = 654,$
$i = 1\,350,$

отже, площа:

$$A = 0{,}1\, a = 78{,}5 \text{ см}^2$$

статичний момент

$$M = 0.6\, m = 392{,}4 \text{ см}^2$$

момент інерції

$$J = 10\, a - 4\, i = 2\,450 \text{ см}^1$$

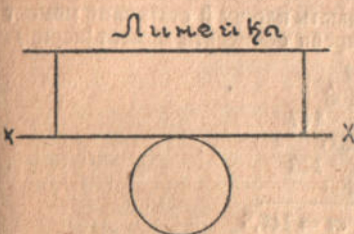


Рис. VIII

Коли б ми вмістили коло нижче від лінії XX і обміряли б його знову (рис. VIII), то, зробивши так, як і вище, одержали б:

3 271	1 427	8 843
785	— 654	1350
4 056	0 773	10 193
$a = 785$	$m = -654$	$i = 1\,350$

Як бачимо, абсолютні величини ріжниць лишаються без зміни, а зате величину статичного моменту, як і повинно бути, одержуємо від'ємну.

Коточок лічильника A завжди обертається в прямім напрямі, тобто покази його збільшуються; лічильник M обертається або в прямім, або в зворотнім напрямі (показиабо збільшуються, або зменшуються), залежно від того, чи міститься фігура між лінійкою і віссю моментів, а чи поза цим простором. З того, чи додатня, чи відємна ріжниця лічильника M, можна зробити висновок, де міститься центр тяґару вимірюваної фігури: між віссю і лінійкою, а чи поза цим простором.

Лічильник I здебільшого обертається в додатнім напрямі. У від'ємнім напрямі він може обертатися тільки тоді, коли майже ввесь контур фігури лежить на дуже великій віддалі від осі моментів. В останім разі у формулі для обчислення моментів інерції другий член треба не віднімати, а додавати.

Щоб виміри були точні, рекомендується кілька разів обвести шпеник по контуру фігури, не спускаючи при цім з уваги лічильників, 'щоб знати, приблизно, величину переміщення їх і напрям їх обертання.

А щоб точно визначити всі зазначені вище величини, конче треба обводити фігуру кілька разів найменше (у крайнім разі) двічі.

Крім нерухомого шпеника, є на важелі інтеґратора рухомие щпиник, призначений виміряти фігури, яких поперечні розміри дуже малі. Коли цей рухомий шпеник рухається по контуру фігури, коточки обертаються на більшу величину, отже, й результат можна одержати з більшою точністю. Треба, проте, зауважити, що, обводячи фігуру рухомим шпеником, слід переміщати важіль, тримаючи його рукою за нерухомий шпеник.

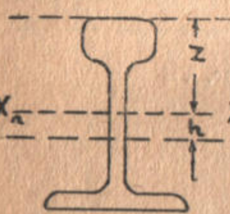


Рис. IX

У цім останнім випадку треба користуватися з таких формул:

$$A = 0{,}05\ a$$
$$M = 0{,}15\ m$$
$$I = \frac{10}{8}\ a - \frac{1}{2}\ i$$

Уживаючи нерухомого шпеника, рухомий шпеник слід виймати з гнізда важеля.

П р и к л а д. Обчислення моменту опору рейки (рис. IX).

Проводять вісь XX можливо рівнобіжно з AB і при тім на такій віддалі від неї, що уставивши відповідним способом прилад, можна обвести фігуру рейки нерухомим шпеником.

Вважаючи лінію XX за вісь моментів, визначають площу й статичний момент фігури (для попереднього визначення немає потреби обчисляти момент інерції).

	A		M
	6 202		7 108
	564		147
	6 766		7 255
	562		148
	7 328		7 403
Перейчне . . .	$a = 563$		$m = 147{,}5$

$$A = 0{,}05 \times 563 = 28{,}15$$
$$M = 0{,}15 \times 147{,}5 = 22{,}12$$

Віддаль h до невтральної осі XX від лінії XX дорівнює, отже:

$$h = \frac{M}{A} = \frac{22{,}12}{28{,}15} = 0{,}786\ см$$

Колиб m було від'емне, і одержані були б від'ємні величини для M і h, то $X_n X_n$ було б нижче від лінії XX.

Проводячи одержану таким спссбом невтральну вісь, уставляють так, як уже описано, лінійку струменту відносно цієї останньої лінії і визначають, як і раніш, площу, статичний момент та момент інерції, обводячи контур рухомим указником. Тоді дістають:

	A	M	I
	7 864	7 730	6 761
	564	-3	631
	8 422	7 727	7 392
	552	-3	630
	8 990	7 724	8 022
Пересічне	$a=563$	$m=3$	$i=630.05$

$$I=\frac{10}{8}\times 563-\frac{1}{2}\times 630{,}5=388{,}5\ см^4.$$

Величину площі й статичного моменту вже немає потреби визначати: a має ту саму величину, що й за попереднього виміру, а m повинно дорівнювати нулеві, бо моменти беруть відносно невтральної осі. А в тім. часом корисно буває визначити знову ці величини, щоб перевірити попередні виміри.

Далі, на фігурі виміряють віддаль Z від найвіддаленішої точки контура до невтральної осі. У данім випадку, наприклад, Z дорівнює 5,22 *см*.

Тому момент опору дорівнює:

$$W=\frac{I_n}{Z}=\frac{388{,}5}{5{,}2}=74{,}4\ см^3.$$

Якщо треба виміряти фігуру, таку віддалену від осі X_0X_0 (рис X), що немає змоги обвести контур шпеником, коли лінійка уставлена на відповідній віддалі від цієї осі, проводять рівнобіжну з нею лінію XX, що перетинаэ дану фігуру; потім визначають описаним вище способом положення невтральної осі X_nX_n і обчисляють момент іерції I_n відносно неї.

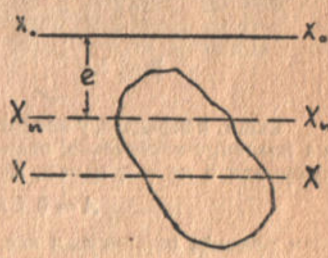


Рис. X

Якщо позначимо через e віддаль між осями X_0X_0 і X_nX_n, через A площу фігури череа M статичний момент і через I_0 момент інерції, то величини ці зв'язані такими івняннями:

$$M_0=Ae$$
$$I_0=I_n+e^2A$$

Можна було точнісінько так само обчислити M_0 і I_0 аа величинами, одержаними відносно осі XX. Та цього способу не рекомендуэться, бо одержувані результати мають малу точність.

Якщо розміри фігури такі великі, що не можна обвести контура її за раз, то фігуру ділять простими лініями на кілька частин і для кожної частини проводять вісь моментів, рівнобіжну з тією, відносно якої бажають одержати остаточний результат,

Далі, для кожної частини фігури визначають невтральну вісь, рівнобіжну з попереду нарисованою віссю, потім знаходять площу й момент інерції відносно цієї осі. Далі обчисляють за указаними вище формулами статичний момент і момент інерції відносно попереду проведеної осі. Нарешті, беруть суму окремих площ A, суму статичних моментів M і суму моментів інерції I.

Ці три суми дають площу, статичний момент і момент інерції всієї фігури відносно первісної осі.

Якщо фігура має дуже великий вимір, рівнобіжний з віссю моментів, то можна поділити фігуру нормальними до цієї останньої лініями й визначати статичний момент кожної частини відносно тієї самої осі. Статичний момент усієї фігури дорівнює сумі статичних моментів окремих частин.

Як визначити центр тягару фігури

Проводять дві лінії XX та $УУ$, що перетинаються під прямим кутом у середині контура фігури. Виміряють величину A та M спершу відносно осі XX, а потім відносно осі $УУ$. Далі, як описано вище, визначають віддаль невтральної осі $X_n X_n$ від осі XX за формулою $h = \frac{M}{A}$. Так само визначають і віддаль невтральної осі $У_n У_n$, рівнобіжної з віссю $УУ$, і проводять ці лінії на рисунку. Точка їх перетину C і є шуканий центр тягару фігури. Коли фігуру на рисунку зображеноне в натуральну величину, а якимсь мірилом $\frac{1}{n}$, то для обчислення A, M і I треба користуватися з таких формул:

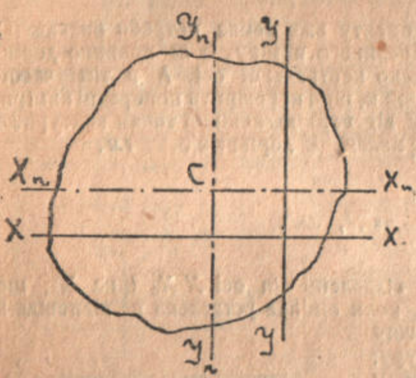


Рис. XI

Коли шпеник нерухомий:

$$A = 0{,}1a \times n^2$$
$$M = 0{,}9m \times n^3$$
$$I = (10a - 4i) \times n^4$$

Коли шпеник рухомий:

$$A = 0{,}05v \times n^2$$
$$M - 0{,}15m \times n^3$$
$$I = \left(\frac{10}{8}\,a - \frac{1}{2}\,i\right) \times n$$

За одиницю вимірів величин A, M, I всюди взято сантиметр.

Якщо, наприклад, у попереднім випадку профіль рейки був би нарисований на половину натуральної величини, тобто $n = 2$, то в попередніх формулах ми одержали б $n^2 = 4$, $n^3 = 8$, $n^4 = 16$, і формули наші набрали б вигляду:

$$A = 0{,}2\,a;\; M = 1{,}2\,m;\; I = 20\,a - 8\,i$$

при рухомім шпенику, з якого користувалися в данім разі.

Якщо бажано одержати результати в метрах, то треба користуватися оцими формулами:

Коли шпеник нерухомий:

$$A = 0{,}1\,a\left(\frac{n}{100}\right)^2$$
$$M = 0{,}6\,m\left(\frac{n}{100}\right)^3$$
$$I = (10\,a - 4\,i)\left(\frac{n}{100}\right)^4$$

Коли шпеник рухомий:

$$A = 0{,}05\,a\left(\frac{n}{100}\right)^2$$
$$M = 0{,}15\,m\left(\frac{n}{100}\right)^3$$
$$I = \left(\frac{10}{8}\,a - \frac{1}{2}\,i\right)\left(\frac{n}{100}\right)^4$$

Якщо, наприклад, вимірювана фігура нарисована в 1:50 натуральної величини, то беручи $n = 50$, ми одержимо:

$$\frac{n}{100} = \frac{1}{2};\; \left(\frac{n}{100}\right)^2 = \frac{1}{4};\; \left(\frac{n}{100}\right)^3 = \frac{1}{8};\; \left(\frac{n}{100}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

отже, формули наші для даного випадку матимуть вигляд:

$$A=\frac{0{,}1\,a}{4} \qquad A=\frac{0{,}05\,a}{4}$$

$$M=\frac{0{,}5m}{8} \qquad M=\frac{0{,}15m}{4}$$

$$I=\frac{10\,a-4\,i}{16} \qquad I=\frac{10}{128}a-\frac{1}{32}i$$

Читання на лічильниках

Коло коточків поділене на 100 частин, і десяті частки цих частин можна читати за ноніюсом. Повні оберти коточків можна читати на кружалі, поділенім на 10 частин, обертанім шнеком так, що від кожного повного оберту коточка кружало повертається на одну поділку. Коли коточок зробить 10 обертів, кружало, очевидно, зробить один оберт.

Кожний прочит складається з 4 цифр. Тисячі на кружалі, сотні та десятки — на коточку, а одиниці — на ноніюсі.

Коли нуль коточка стоїть проти нуля ноніюса, то одна з поділок кружала міститься проти нерухомого указника.

Щоб робити точні прочити на лічильниках і на початку, і на кінці, треба завжди ретельно стежити за тим, в якім напрямі (прямім чи зворотнім) обертається коточок, а так само стежити, скільки разів і в якім напрямі нуль кружала проходить повз нерухомий указник. Коли обертання відбувається в прямім напрямі, то всяке проходження нуля повз нерухомий указник лічать за 10000 і додають стільки разів по 10000 до остаточного ліку. Коли ж обертання відбувається в зворотнім напрямі, то стільки ж разів по десять тисяч додають до первісного читання перше, ніж знайти ріжницю між першим і другим читанням.

Треба, по змозі, не доторкуватися пальцем до лічильника. Так само немає потреби, починаючи роботу, уставляти коточки лічильника на нулі, бо це буде лише непотрібна втрата часу, а крім того, ніколи не можна зробити так, щоб нулі точно зливалися.

Інтеґратор № 2

Інтеґратор № 2 править для виміру:

1) площ,
2) статичних моментів,
3) моментів інерції плоских фігур.

Найбільша фігура, яку можна виміряти за один раз, є прямокутник, завдовжки 156 *см* і завширшки 97 *см*.

Довжина лінійки . . . . = 200 *см*
Хід каретки . . . . = 172 *см*
Віддаль від осі моментів до лінійки . . . = 35 *см*

Інтеґратор № 2 своєю конструкцією однаковісінький з № 1; ріжниця лише в розмірах та в тім, що він має два рухомі шпеники.

Уживають інтеґратора № 2 для тієї ж мети, що й № 1, хоча одночасно він дає змогу виміряти й далеко більші фігури.

Спосіб користуватися з прикладу однаковий, як і для інтеґратора № 1. Щодо формул для обчислення, то для інтеґратора № 2 вони мають такий вигляд:

I. При нерухомім шпенику № 1:

$$A=0{,}2a$$
$$M=2{,}4m$$
$$I=\frac{8}{10}a-4i.$$

II. При рухомім шпенику № 2:

$$A = 0{,}1a$$
$$M = 0{,}6m$$
$$I = 10a - 4i.$$

III. При рухомім шпенику № 3:

$$A = 0{,}05\,a$$
$$M = 0{,}15\,m$$
$$I = \frac{10}{8}a - \frac{1}{2}i.$$

За одиницю виміру в усіх цих фомулах узято сантиметр.

Інтеґратор № 3

Інтеґратор № 3 править для виміру тільки:

1) площ,

2) статичних моментів плоских фігур.

Щодо моменту інерції, то визначити його за допомогою цього приладу не можна.

Фігура, яку бажають виміряти за один раз, може мати такі найбільші розміри: довжину — 54 *см*, і ширину — 38 *см*.

Довжина лінійки — 75 *см*. а хід каретки — 67 *см*.

Віддаль осі моментів від лінійки дорівнює 19 *см*.

Після пляніметра інтеґратор № 3 є найпростіший струмент. Користуються з інтеґратора № 3 так само, як і з № 1, а тому й формули визначати площі та статичні моменти цілком однакові.

1) При нерухомім указнику № 1:

$$A = 0{,}1\,a$$
$$M = 0{,}6\,m$$

2) При рухомім указнику № 2:

$$A = 0{,}05\,a$$
$$M = 0{,}15\,m$$

Інтеґратор № 4

Інтеґратор № 4 править для виміру:

1) площі

$$A = \int y\,dx$$

2) статичних моментів

$$M = \frac{1}{2}\int y^2\,dx$$

3) моментів інерції

$$I = \frac{1}{3}\int y^3\,dx$$

4) моментів 4-го степеня

$$P = \frac{1}{4}\int y^4\,dx$$

плоских фігур.

Найбільші розміри фігури можуть бути: довжина — 157 *см*, і ширина — 6 *см*.

Довжина лінійки дорівнює 200 *см*, хід каретки — 172 *см*.

Віддаль лінійки від осі моментів дорівнює 31,5 *см*.

Спосіб користуватися з інтеґратора № 4 аналогічний із способом користуватися з інтеґраторів №№ 1 та 2. Цього інтеґратора можна вживати для визначення моментів інерції тіл обертання, не тільки відносно їхньої геометричної осі, а й відносно всякої іншої осі.

Міра застосованости струменту для означення центра тягару й моменту інерції відносно осі, нормальної до геометричної осі тіла обертання, залежить від форми профіля. Так, коли довжина циліндра 120 *см*, діяметр його не може бути більший за 20 *см*. Коли довжина менша, діяметр циліндра може бути більший.

Якщо покази лічильників, що правлять для визначення A, M, I, P, позначимо через a, m, i, p, то для обчислення зазначених величин можна користуватися з таких формул:

При нерухомім шпенику № 1:

$$A = 0{,}24\,a$$
$$M = 2{,}4\,m$$
$$I = 32\,(3a - i)$$
$$P = 480\,(4m - p)$$

При рухомім шпенику № 2:

$$A = 0{,}12\,a$$
$$M = 0{,}6\,m$$
$$I = 4\,(3a - i)$$
$$P = 30\,(4\,m - p)$$

При рухомім шпенику № 3:

$$A = 0{,}6\,a$$
$$M = 0{,}15\,m$$
$$I = 0{,}15\,(3a - i)$$
$$P = \frac{15}{8}(4\,m - p)$$

Усі величини одержують тут у сантиметрах.

Якщо фігура нарисована мірилом $\frac{1}{n}$ натуральної величини, то величини A, M, I обчисляють за формулами, поданими в опису інтеґратора № 1, а величину P обчисляють за формулами:

При шпенику № 1:

$$p = 400\,(4m - p)\,n^5,$$

При шпенику № 2:

$$= 30\,(m - p)\,n^5,$$

При шпенику № 3:

$$p = \frac{15}{8}\,(4m - \text{p})\,n^5$$

якщо бажано мати результат у сантиметрах.

Для обчислення ж у метрах формули ці мають вигляд:
При шпенику № 1:

$$p = 480\,(4m - p)\left(\frac{n}{100}\right)^5$$

При шпенику № 2:

$$p = 30\,(4m - p)\left(\frac{n}{100}\right)^5$$

При шпенику № 3:

$$p = \frac{15}{2}\,(4m - p)\left(\frac{n}{100}\right)^5$$

Так само, як і обертання коточка M, обертання лічильника P можуть бути додадодати й від'емні.

ВІДДІЛ II

Приклади, вправи й задачі на технічні обчислення

IX. Приклад обертання величини напруги сил пружности з одиниць одної системи мір в іншу

Знавши символи вимірів або розміри величин і керуючись правилами, поданими в I частині, § 5, не важко знайти числову вартість першої-ліпшої з них у якій завгодно системі одиниць, а знавши цю вартість в одній системі виразити її одиницями іншої системи.

Для прикладу розв'яжім дуже важливу й цікаву для опору матеріялів задчу про обертання величини напруги сил пружности з одних мір в інші, інакше сказавши, визначім співвідношення між числовою величиною тієї самої напруги сил пружности, але вираженої двома різними системами одиниць.

Нехай, наприклад, нам відома якась напруга n в кілограмах на квадратовий сантиметр і треба обернути її в пуди на кв. цаль. Інакше сказавши, знаючи числову вартість $n' \dfrac{кг}{см}$, треба знайти відповідну їй числову вартість $n'' \dfrac{пуд}{цалі^2}$, тобто визначити співвідношення між числами n' і n''.

Розв'язуючи цю задачу звернім увагу на рис. XII.

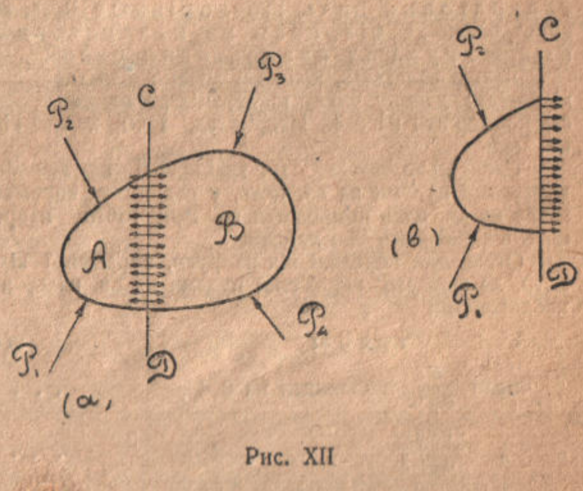


Рис. XII

На рисунку для наочности зображено рівнобіжними відтинками рівномірний розподіл сили пружности по площі; міра гущини цих стрілок і виражає собою міру напруги сили пружности, або інакше, міру гущини розподілу сили, тобто вантаги, на розгляданій площі. Очевидячки, що за тієї самої гущини розподілу сили пружности, тобто за тієї самої гущини вантаги, числова вартість її може змінятися і бути неоднаковою, залежно від числ його виразу сили на площі, як це ясно з загальних засад теорії розтягу та стиску.

Отже, **гущина сил пружности**, що, власне, й є **міра напруги**, — це щось стале, незалежне від того, якими мірами ми виразимо силу й площу, і не міниться при переході в інші міри. Інакше сказавши, на якійсь певній площі рівномірно розподілена якась сила, і від того, якими числами виражено силу (P_i) і площу (F_i), залежатиме умовна числова вартість нашої гущини сил пружности, тобто напруга, але не сама величина її.

Коли сила, виражена килограмами, дорівнює P'*кг*, а площа, виражена сантиметрами, дорівнює F'*см*^{2}, то, згідно з означенням поняття про напругу (див. наш „Курс сопротивления материалов") і зазначеною в § 6 першої частини формулою її розміру, числова величина напруги буде:

$$n' \frac{\text{пуд.}}{\text{цал.}^2} = \frac{P'\text{кг}}{F'\text{см}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Якщо тепер цю ж силу виразимо пудами, і її числова вартість буде P'' пуд, а площу—кв. цалями, і її числова вартість буде F''цал.^{2}, то числова вартість тієї самої напруги, але вже в пудах на квадратовий цаль, виразиться числом:

$$n'' \frac{\text{пуд.}}{\text{цал.}^2} = \frac{P''\text{пуд.}}{F''\text{цал.}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Знавши, що 1 *кг* = 0,06 пуд., а 1 *см*^{2} = 0,15 кв. цал., ми, за правилами § 5, перепишемо формулу (*a*) в такім вигляді:

$$n' \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} = \frac{P'\text{кг}}{F'\text{см}^2} = \frac{P'(0{,}06\,\text{пуд.})}{F'(0{,}15\,\text{цал.})} = 0{,}4\frac{P\,\text{пуд.}}{F'\text{цал.}^2} \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

З формули (*c*) бачимо, що „числу кілограмів на кв. сантиметр, яке дорівнює одиниці, відповідає число пудів на квадратовий цаль, що дорівнює 0,4", або, як часто кажуть для короткости: „1 кілограм на квадратовий сантиметр дорівнює 0,4 пуда на квадратовий цаль".

Інакше сказавши, коли ми хочемо дізнатися, скільки пудів на кв. цаль відповідає даному числу кілограмів на *кв. см*, треба число кілограмів на *кв. см* помножити на 0,4. Наприклад, 1000 *кг/см*^{2} відповідають 400 пуд на кв. цаль.

Точнісінько так само ми знайшли б, що для обертання величини напруги, вираженої пудами на кв. цаль, у величину, виражену в *кг/см*^{2}, треба число пудів на кв. цаль помножити на 2,5, тобто, наприклад, 100 пуд. на кв. цаль відповідають 250 *кг/см*^{2}.

Отже, при переході від напруги, вираженої кілограмами на кв. сантиметр, до напруги, вираженої пудами на кв. цаль, з достатнім для практики наближенням

треба:			щоб одержати:
число $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$	помножити на	0,4	. . . . . . число $\frac{\text{пуд.}}{\text{цал.}^2}$
„ $\frac{\text{пуд.}}{\text{цал.}^2}$	„	„ 2,5	. . . . . . „ $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$

X. Вправи й задачі на обертання формул із одних мір в інші

1. Як зміниться числова величина видовження, якщо одиницю довжини сантиметр замінити метром?

2. Яка зміна абсолютної величини одиниці сили спричинила збільшення числової величини її вп'ятеро?

3. Як зміниться числова величина даної довжини, якщо сантиметри замінити метрами?

4. Як і в скільки разів зміниться абсолютна величина одиниці швидкости

1) від збільшення одиниці довжини в 12 разів і

2) від збільшення одиниці часу в 60 разів?

5. Як і в скільки разів зміниться числова величина даного пришвидшення:

1) від збільшення одиниці довжини в 100 разів і

2) від зменшення одиниці часу в 60 разів?

6. Робота в системі (пуд, сажень, хвилина) має числову вартість 100; знайти її числову вартість у системі (фунт, аршин, секунда).

7. Знайти числову вартість пришвидшення сили тягару (CGS система) в системі (фут, фунт, хвилина), лічивши сантиметр за рівний 0,0328 фута.

8. Скільки CGS одиниць сили й роботи міститься у відповідних одиницях у системі міліметр, міліграм, секунда (в Гавсових одиницях)?

9. Знайти числову величину 2 одиниць роботи в системі (метр, кілограм, $^1/_2$ години) в ергах (в CGS систем).

10. Знайти густину живого срібла в системі (метр, кілограм, рік), беручи густину її в CGS системі за рівну 13,6.

11. Знайти рухову енергію в CGS одиницях тіла, якого маса дорівнює 5 золотникам, і яке рухається зі швидкістю 2 сажнів за 7 хвилин (золотник = = 4,266 грама, сажень = 213,36 сантиметра).

12. Мегадин (мільйон одиниць сили в CGS системі) має числову вартість 100 в системі (цаль, фунт, x сек.); знайти одиницю часу в цій системі, беручи цаль = 2,5 *см*, фунт = 410 *г*.

13. За основні одиниці взято одиниці швидкости V, пришвидшення W, сили F; знайти розміри інших одиниць.

14. За основні одиниці взято одиниці довжини, часу й рухової енергії. Знайти розміри інших одиниць.

15. Напруга дорівнює 400 *кг* на кв. сантиметр; обчислити її у фунтах на кв. цаль.

16. Модуль нормальної пружности в кілограмах на квадратовий сантиметр для заліза дорівнює

$$E = 2000000.$$

Визначити E у фунтах на кв. цаль

$$(1 \text{ кг} = 1{,}44 \text{ фун.}, \ 1 \text{ см} = 0{,}3937 \text{ цаля})$$

17. Визначаючи діяметр прогонича в деяких окремих випадках, користуються з формули:

$$d \text{ мм} = 0{,}45 \sqrt{P \text{ кг}} + 5$$

Як зміниться ця формула, якщо обчислення провадити у фунтах і в цалях?

XI. Приклади обчислення ймовірностей

1. Яка ймовірність висмикнути з перетасованої колоди карт туза?

Усіх рівноможливих випадків $n = 52$ — число карт у колоді.

Число тузів у колоді 4. Отже, число сприятливих випадків $m = 4$.

Імовірність:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

2. Яка ймовірність висмикнути з перетасованої колоди карт дзвінку?

Усіх рівноможливих випадків за числом карт у колоді $n=52$.

Число сприятливих випадків за числом дзвінок у колоді $m=13$.

Імовірність:

$$p=\frac{m}{n}=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

3. Яка ймовірність на двох костях викинути „3" і „4"?

Усіх рівноможливих випадків $n=6\times6=36$, бо коли на 1-й кості викинуто „1", то при цім з 2-ю кістю може бути 6 різних випадків.

Те саме — і щодо кожного іншого очка з 6, що є на 1-й кості.

Сприятливих випадків $m=2$, а саме:

1) „3" на першій кості і „4" на другій.

2) „4" на першій кості і „3" на другій.

Шукана ймовірність:

$$p=\frac{m}{n}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

4. Яка ймовірність, кидавши дві шестигранчасті кості, одержати суму очок рівну 7?

Число всіх рівноможливих випадків при киданні двох костей дорівнює $6\times6=36$.

Сума 7 може складатися з 6 і 1, 5 і 2, 4 і 3, при чім кожна з цих комбінацій може мати 2 випадки, напр., 6 і 1 може вийти так: 6 на першій кості й 1 на другій, або 1 на першій і 6 на другій кості. Отже, сприятливих випадків 6.

Тому з 36 рівноможливих випадків сприятливих 6, а, значить, шукана ймовірність:

$$p=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

5. В урні лежить a білих куль, b чорних і c червоних. Усі кулі позначені. Навмання виймають одну кулю. Яка ймовірність вийняти білу, чорну або червону кулю?

Тим, що всіх куль в урні $a+b+c$, і немає підстав гадати, що рука зупиниться на одній із куль переважно перед іншими, то маємо $a+b+c$ рівноможливих випадків. З них a випадків, сприятливих витягненню білої кулі, b випадків, сприятливих для витягнення чорної кулі, і c випадків, сприятливих для витягнення червоної кулі.

Отже, ймовірність витягти кулю кожного зазначеного кольору така:

для червоної кулі — $p_1=\dfrac{a}{a+b+c}$

для чорної „ — $p_2=\dfrac{в}{a+b+c}$

для білої „ — $p_3=\dfrac{в}{a+b+c}$

XII. Числовий приклад застосування способу найменших квадратів для знаходження невідомих параметрів в емпіричних формулах.

Щоб краще з'ясувати хід обчислень, покажім, як визначати параметри a та m формулі (4), що виражає, за припущенням Баха й Шюле, залежність між стискною напругою і деформацією для одного окремого випадку, взятого з лябораторної практики.

Зробили 6 спроб і одержали ряд вартостей p та i.

Розмістім їх у таблицю, де в перших двох стовпчиках дано прикладені зусилля й їхні логаритми, у третім стовпчику — логаритми одержаних деформацій (релятивних), а в решті — інші потрібні величини, одержувані в перших двох за формулою (4)

№ спроби	p	$\lg p$	$\lg i$	$\lg i \cdot \lg p$	$(\lg p)^2$
1	166	2,2201081	−3,7723989	−8,3751332	4,9288799
2	333	2,5224442	−3,4523620	−8,7083904	6,3627248
3	499	2,6981005	−3,2622777	−8,8019520	7,2797462
4	666	2,8234742	−3,1292061	−8,8352326	7,9720065
5	832	2,9201233	−3,0264616	−8,8376409	8,5271200
6	998	2,9991305	−2,9430105	−8,8264725	8,9947838
		$P=\Sigma \lg p$	$I=\Sigma \lg i$	$I_p=\Sigma \lg i \cdot \lg p$	$P_p=\Sigma(\lg p)^2$
		16,1833808	−19,5857168	−52,3848216	44,0652612

Крім того, обчислено:

$$IP_p = -863{,}04972; \qquad PI_p = -847{,}76351; \qquad P^2 = 261{,}90182;$$
$$IP = -316{,}96312; \qquad nI_p = -314{,}30893; \qquad nP_p = 264{,}391567;$$
$$nP_p - P = 2{,}48975; \quad IP_p - PI_p = -15{,}28621; \quad nI_p - IP = 2{,}6542;$$

Тому:

$$a = \lg \alpha = \frac{IP_p - PI_p}{nP_p - P^2} = \frac{-15{,}28621}{2{,}48975} = -6{,}13966.$$

Звідки

$$\alpha = \frac{1}{1\,380\,000},$$

$$m = \frac{nI_p - IP}{nP_p - P^2} = \frac{2{,}6542}{2{,}48975} = 1{,}066 .$$

Отже, в розгляненім випадку зв'язок між зусиллям p і деформацією i можна виразити рівнянням:

$$i = \frac{1}{1\,380\,000}\, p^{1{,}066} .$$

XIII. Приклади наближених практичних обчислень

I. Наближені способи обчисляти поверхні та об'єми круглих тіл

1. Площа кола. Щоб обчислити площу кола, треба взяти $^3/_4$ площі квадрата з боком, що дорівнює діаметрові кола, і результат збільшити на $5^0/_0$. Знавши точну форму у площі кола, не важко зрозуміти, що в данім випадку ми беремо вартість $\pi = 3$ замість звичайного $\pi = 3{,}14$, тобто робимо помилку в бік мінуса меншу, ніж $5^0/_0$.

Не зайво також зауважити, що із співвідношення:

$$5^0/_0 = \frac{1}{20} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10},$$

щоб знайти 5% якогось числа, треба взяти десяту частину даного числа й поділити її на два, тобто взяти половину десятої частини числа, що дуже легко зробити в умі.

Наприклад, площа кола діяметром 10 *см* дорівнює:

$$\frac{3}{4} \times 10 \times 10 + \frac{75}{20} = 78,75$$

2. Обвід кола дорівнює потроєному діяметрові + 5% від цієї величини.

3. Бічна поверхня циліндра дорівнює обводові кола (див. приклад 2), помноженому на висоту.

4. Об'єм циліндра дорівнює площі основи (див. приклад 1), помноженій на висоту.

5. Бічна поверхня конуса дорівнює півколу основи (див. приклад 2), помноженому на бічну довжину твірної конуса.

6. Об'єм конуса втроє менший за об'єм циліндра (див. приклад 4), що має таку саму основу й висоту.

7. Поверхня кулі дорівнює потроєній площі квадрата з боком, що дорівнює діяметрові кулі, збільшеним на 5%.

Наприклад, поверхня кулі, з діяметром 8 *см*, дорівнює:

$$3 \times 64 + \frac{3 \times 64}{20} = 201,6 \ см^2$$

8. Об'єм кулі дорівнює половині об'єму куба з боком, що дорівнює діяметрові кулі, збільшеному на 5%.

Наприклад, об'єм кулі з діяметром 4 *см* дорівнює:

$$\frac{64}{2} + \frac{32}{20} = 33,6 \ куб. \ см$$

9. Об'єм бочки можна обчислити за формулою:

$$\frac{3}{4} h \, D^2,$$

де

h — висота бочки,

$D = \frac{1}{3}$ діяметра днища $+ \frac{2}{3}$ діяметра бочки посередині.

II. Обмір довжини ременів, звинених кругами

На складах із технічним приладдям, при устаткуванні фабрик, заводів тощо, доводиться визначати довжину ременів, звинених кругами. Щоб виміряти їх безпосередньо, треба дуже багато витратити часу, та це й незручно. З достатньою для практики точністю можна обчислити довжину звиненого кругом ременя, керуючись таким правилом:

Треба перелічити число закрутків, виміряти зовнішній діяметр змотка та діяметр діри в нім посередині. Півсума обох діяметрів, помножена на потроєне число звоїв, дає довжину ременя.

Правильність цієї формули доводимо так.

Нехай зовнішній діяметр круга звиненого ременя дорівнює D, а діяметр внутрішньої діри $= d$.

У такім разі площа змотка в пляні дорівнює:

$$\frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}$$

Ця площа рівна з довжиною ременя, помноженою на його грубину, тобто:

$$\frac{\pi(D^2-d^2)}{4}=Lb, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

де b — грубина ременя.

Грубина ременя дорівнює:

$$b=\frac{D-d}{n},$$

де n — число звоїв.

І тоді формулу (a) можна переписати в такім вигляді:

$$\frac{\pi(D^2-d^2)}{4}=L\frac{D-d}{2n}$$

Ця формула після відповідних спрощень набере вигляду:

$$\pi n\frac{D+d}{2}=L$$

Узявши $\pi=3$, ми й одержимо подану вище формулу:

$$3n\frac{D+d}{2}=L, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

яка й дає довжину звиненого кругом ременя з огріхом у бік мінуса, що не перевищує 5%.

Цей огріх, на бажання, можна облічити й додати до величини, знайденої за формулою (b).

XIV. Вправи й задачі на наближені обчислення

18. Обчислити суму:

$$\sqrt{3}+\sqrt{45}+\sqrt{167}$$

з трьома точними цифрами й знайти огріх.

19. Знайти обвід кола радіюса, рівного з боками квадрата, вписаного в коло, діяметром 100 *м*, з помилкою, не більшою від 1 : 1000.

20. Який може бути огріх у довжині радіюса й висоти циліндричної посудини в *1 куб. м*, якого висота дорівнює радіюсові основи, якщо помилка в об'ємі налитого течива не повинна бути більша за 1%.

21. Обчислити площу кола радіюса 3 *м* з помилкою, не більшою за 0,5%.

22. Обчислити з трьома точними цифрами радіюс кола, обвід якого виражається числом $\sqrt{3}$, і визначити огріх.

23. Знайти вартість $\sqrt[3]{\pi^2}$ з точністю до сотих частин.

24. Знайти з точністю до міліметра висоту циліндра, об'ємом 1 літр (куб. дециметр), якщо висота ця рівна з діяметром основи

25. Знайти з точністю до міліметра висоту циліндра, що дорівнює двом діяметрам основи, якщо об'єм циліндра дорівнює 1 *куб. дм*.

26. Обчислити з точністю до 1 *см* висоту рівнораменного трикутника, якого основа дорівнює 1,5 *м*, а площа рівна з площею кола радіюсом 2 *м*.

27. Знайти три точні цифри виразу:

$$\frac{\sqrt{8+\sqrt{3}}}{2}$$

28. Зі скількома десятковими знаками треба брати π і з якою точністю треба виміряти діяметр та висоту циліндра, щоб одержати об'єм його з точністю до сотих частин?

XV. Приклади користування зі способів графічного обчислення

Серед наведених прикладів подано способи обчисляти деякі вирази, що найчастіш подибуються в практиці, за допомогою правил, зазначених у І частині.

1. Знайти добуток $x = a\,(b + c)$.

На поземій простій відкладім $OQ = 1$ (рис. XIII) і, провівши через точку Q довільну просту, відкладім на ній $QP = b$ та $QK = c$.

Від точки O відкладім $OS = a$ і проведім через точку S просту рівнобіжну з PK.

Проведім лінії OP та OK й продовжим їх до перетину з лінією, про-

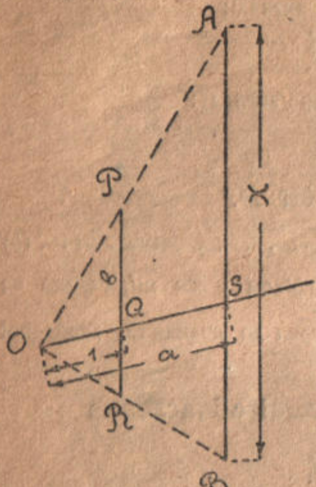


Рис. XIII

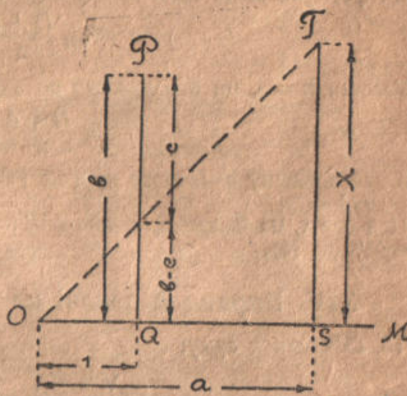


Рис. XIV

веденою через точку S. Відтинок AB й дає величину шуканого добутку:

$$AB = x = a\,(b + c).$$

2. Знайти добуток $x = a\,(b - c)$ (рис. XIV).

На лінії OM відкладаємо $OQ = 1$. У точці Q на нормалі до OM відкладім $QP = b$ та $PK = c$, тобто збудуймо $KQ = b - c$.

Провівши лінію OK і продовживши її до перетину в точці T з нормалею до OM у точці S, за умови, що $OS = a$, ми одержимо:

$$ST = x = a\,(b - c)$$

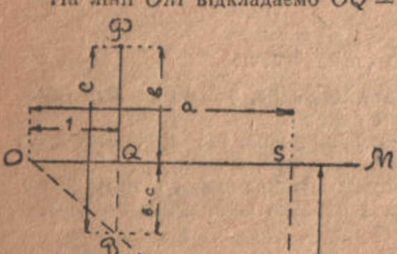


Рис. XV

Спосіб цей можна застосувати і в разі $b < c$, як це показано на рис XV, при чім x виходить від'ємне.

3. Знайти величину $(a + b)^2$ (рис XVI).

На лінії OM будуємо $OE =$, $OC = a$ та $cD = b$, тобто, значить, $OD = a + b$

На нормалі KOM в точці E відкладім $EF = a$ та $FG = b$. Злучим точки

O і G простою OG і продовжим її до перетину в точці H з нормалею D поставленою в точці D до простої OM

Відтинок

$$DH = (a+b)(a+b) = (a+b)^2.$$

На доказ цього проведім лінію OF до точки K. В C поставмо нормалю, яка визначить нам точки I та y

Проведім просту IK.

Не важко помітити, що

$$DH = DK + KH$$

DK є, на підставі сказаного вище, добуток $(a+b)$ на a, тобто

$$DK = a(a+b) = a^2 + ab.$$

Крім того, за будовою

$$CJ = a^2$$

Трикутники OGF та OIJ подібні, а тому

$$\frac{IJ}{GF} = \frac{OJ}{FO}$$

Подібні трикутники OEF та OCJ дають

$$\frac{OJ}{OF} = \frac{a}{1},$$

а тому маємо:

$$\frac{IJ}{GF} = \frac{a}{1}$$

або:

$$\frac{IJ}{b} = \frac{a}{1}$$

звідки

$$IJ = ab$$

а, значить,

$$CI = CJ + IJ = a^2 + ab.$$

Прямокутні трикутники OEG та IKH, а тому

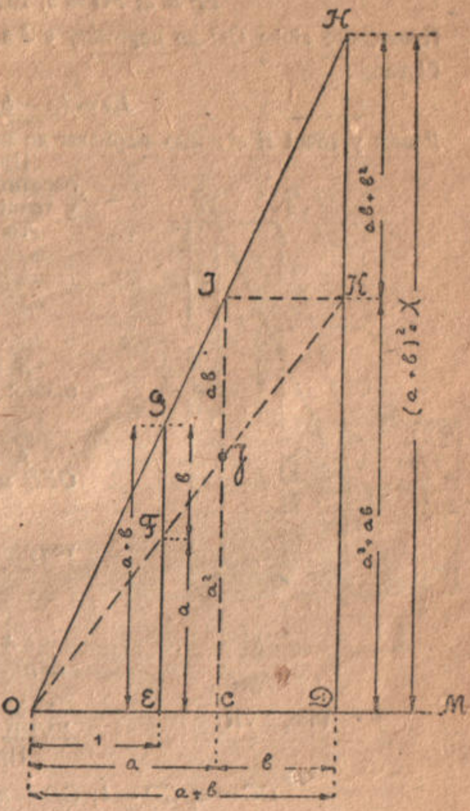


Рис. XVI

$$\frac{KH}{EG} = \frac{IK}{OE}$$

або

$$\frac{KH}{a+b} = \frac{b}{1}$$

звідки

$$KH = b(a+b) = ab + b^2,$$

отже,

$$x = (a+b)^2 = DK + KH = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

4. Знайти величину $(a-b)^2$ (рис. XVII).
На простій OM відкладаємо:

$$OC = a;\ CD = b;\ OD = a - b,\ OE = 1$$

У точці E ставимо нормалю й відкладаємо:

$$EF = a;\ FG = b;\ EG = a - b$$

Проводимо лінію OG до перетину в J з нормалею до OM у точці D. Відтинок

$$JD = (a-b)^2$$

Доказ: у точці E ставимо нормалю до перетину її в точці H з OG.

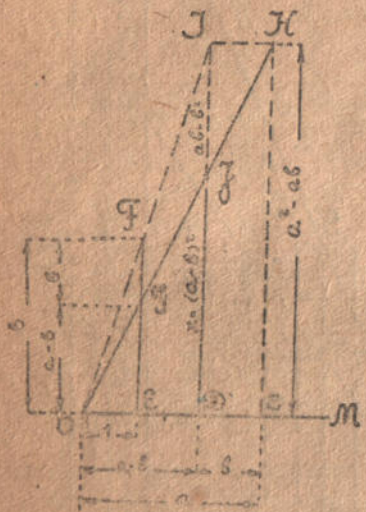


Рис. XVII

Проводимо OF і продовжуємо її до перетину в точці I з нормалею до OM у точці D.

Тоді маємо:

$$CH = a(a-b) = a^2 - ab$$
$$DI = CH = a^2 - ab$$
$$JD = DI - IJ$$

З подібних трикутників OFG і OIJ маємо:

$$IJ : FG = OJ : OG$$

А з подібности трикутників ODJ і OEG маємо:

$$OJ : OG = (a-b) : 1,$$

тому

$$IJ : b = (a-b) : 1$$
$$IJ = b(a-b) = ab - b^2$$
$$x = (a-b)^2 = JD = DI - IJ =$$
$$= a^2 - ab - (ab - b^2) = a^2 - 2ab + b^2$$

5. Знайти $(a+b)(a-b)$ (рис. XVIII).

Проведім просту OM і відкладім:

$$OC = a;\ CD = b;\ OD = a + b;\ OE = 1$$

У точці E поставмо нормалю й відкладім:

$$EF = a;\ FG = b;\ EG = a - b.$$

Будуємо OG і продовжуємо до перетину в H з нормалею в точці D до OM. Відтинок DH дає шукану величину $x = (a+b)(a-b)$.

$$DH = DK - HK$$
$$DK = a(a+b) = a^2 + ab$$
$$HK = b(a+b) = ab + b^2$$
$$x = DH = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Або інакше:

$$CI = a^2$$

З подібности трикутників OFE і IKN:

$$KN : b = a : 1$$

або

$$KN = ab$$

$$NH = HK - KN = ab + b^2 - ab = b^2$$

$$DH = ND - KH = a^2 - b^2$$

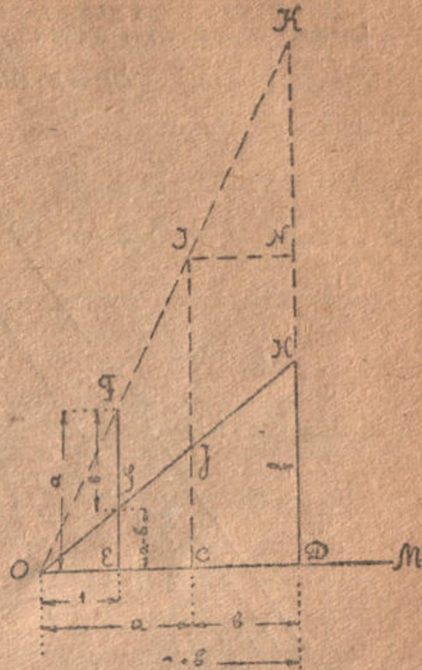


Рис. XVIII

6. Будова графіка (номограми) величини кола за діяметром (рис. XIX).

На довільній простій, від якоїсь точки O відкладаємо ліворуч $OM = 1$. На нормалі в точці O відкладаємо $ON = \pi$. Проводимо просту MN і в точці N ставимо до неї нормалю аж до перетину її в точці P з простою OM

На нормалі ON від точки O будуємо $OD = d$ – діяметрові кола і проводимо $DA \parallel NP$.

Відтинок OA є обвід кола.

Справді: з подібности трикутників ODA і ONP маємо:

$$OA : OP = OD : ON$$

З $\triangle MNP$ маємо:

$$OP : ON = ON : OM$$

Звідси

$$OA = \frac{\overline{ON} \times OD}{OM \times ON} = \frac{ON \times OD}{OM} = \frac{\pi d}{1}$$

Рис. XIX

На підставі цього, відклавши на нормалі ON діяметри $d = 1, 2, 3$ і т. д. і провівши через відповідні точки прості, рівнобіжні з NP, одержимо на простій MO праворуч від O величини відповідних кіл.

7. Графічне знаходження добутку $X = abc$ (рис. XX)
Рисуємо довільний кут MON і на боках його будуємо

$$OP = a\,;\ OK = 1\,;\ OQ = b$$

Злучаємо простою QK і проводимо через P рівнобіжну до неї лінію PS. Відтинок OS дає ab. Проводим RS Відкладаємо $OT = c$. Через T проводимо $TV \parallel RS$ і одержуємо:

$$OV = x = abc$$

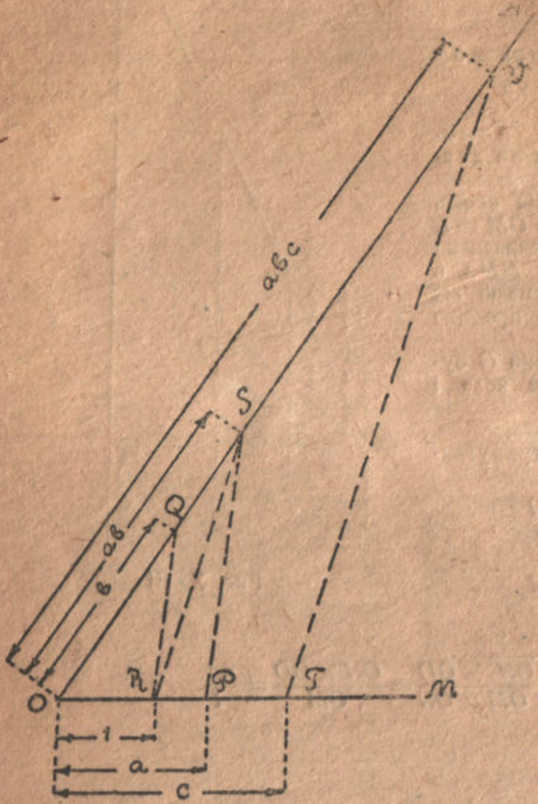


Рис. XX

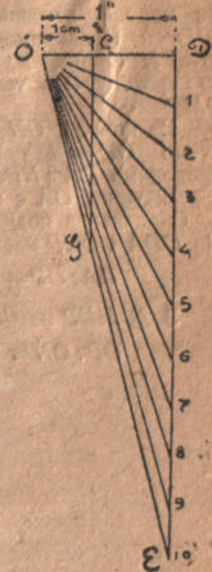


Рис. XXI

8. Обернути 10 *см* в англійські цалі (рис. XXI — номограма для обертання).

Англійський цаль дорівнює 2,54 *см*. Отже, шоб обернути 10 *см* в англійські цалі, треба 10 поділити на 2,54.

Тому, відкладаємо на поземій простій $OD = 1$ анг. цаль $= 2{,}54$ *см* і з точки D на нормалі до OD відкладаємо $DE = 10$ *см*

Проводимо OE й одкладуємо від O до C відтинок $OC = 1$ *см*. З точки C ставимо до OD нормалю до перетину її в точці G з простою OE. Відтинок CG, виміряний сантиметрами дасть нам величину 3,95, тоєсто покаже, що 10 *см* дорівнюють 3,95 англійського цаля

Якщо на простій $ДЕ$ відкласти поділки на віддалі 1 *см* і провести з них прості до точки O, то й одержимо графік-номограму для обертання сантиметрів в англійські цалі.

9. Визначити опорну реакцію A однопрогінного тряму AB з прогоном 5 *м*, навантаженого тягарем 3 тонни на віддалі 1,5 *м* від опори A (рис. XXII).

З рівняння моментів відносно точки B ми знайдемо, що опорна реакція A одержується з рівняння:

$$\frac{A}{3} = \frac{3{,}5}{5}$$

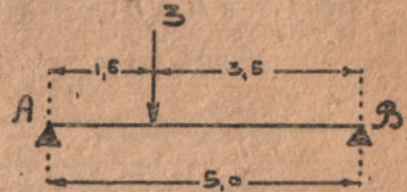


Рис. XXII

Графічне розв'язання цього рівняння дано на рис. XXIII, саме

$OA = 3$ тоннам

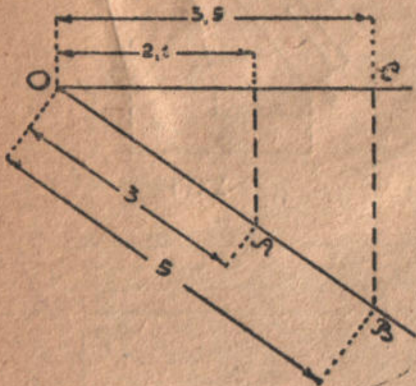
$OB = 5$ метрам

$OC = 3{,}5$ метрам

Провівши просту BC, будуємо

$AD \parallel BC$

Відтинок $OД = 2{,}1$ дає в тоннах величину опорної реакції A



XXIII

10. Знайти опорну реакцію A тряму, зображеного на рис. XXIV.

З рівняння моментів маємо:

$$\frac{A}{500} = \frac{5}{4}$$

На рисунку XXV знаходимо:

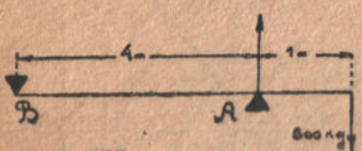
$OA = 4$ *м*,

$OB = 500$ *кг*,

$OC = 5$ *м*.

Злучивши A і C й збудувавши $BD \parallel AC$, знаходимо:

$$OD = A = \frac{500 \times 5}{4} = 625 \text{ кг}.$$



XXIV

11. Збудувати величину згинального моменту $M = \frac{Pl}{4}$ для тряму на двох опорах прогоном l, навантаженого тягарем P посередині.

Переписавши вираз моменту під виглядом:

$$M : P = l : 4$$

з рисунку XXVI одержимо:

$$M = OD$$

12. Знайти зусилля в стрижнях зображеного на рис. XXVII трикутнього консольного зв'язня.

Нехай трикутник ABC на рис. XXVIII зображає заданий зв'язень у певнім мірилі.

Збудуймо в певнім мірилі $BD = 500$ *кг* $= P$

Розтяжне зусилля T у стрижні AB дорівнює:

$$T = \frac{Pl}{h}$$

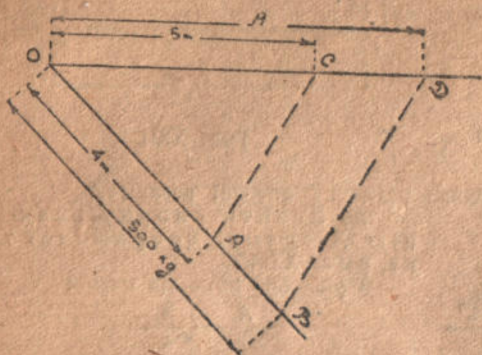
Стискне зусилля в BC дорівнює

$$R = \frac{Pl}{l'}$$

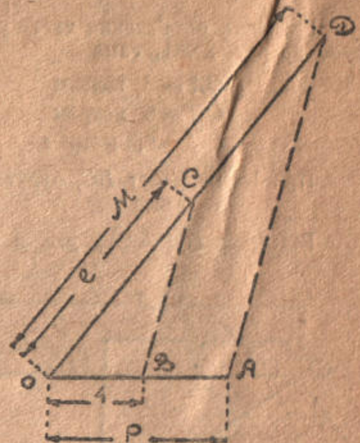
Візьмім відтинок $BM = 1$ одиниці довжини й знайдім T.

Злучім точки M та D і через точки A проведім просту $AE \parallel MD$; вона відітне відтинок

$$BE = 500\ l$$



XXV



XXVI

Проста AE перетинає BC в точці F. Трикутники ACF та BEF подібні.

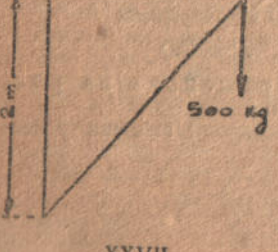
Будуємо

$$AN = BM = 1 \text{ одиниці.}$$

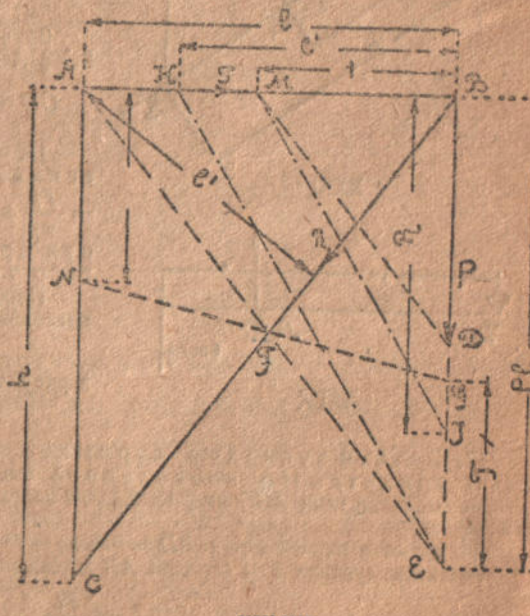
Проводимо просту NF і знаходимо на BE точку G.

Тоді ми можемо написати:

$$BE : h = EF : AF$$



XXVII



XXVIII

оба

$$Pl : h = EF : AF,$$

але

$$EF : AF = EG : 1,$$

тобто

$$EG = \frac{Pl}{h} = T = 375 \text{ кг}$$

Тепер будуємо $BH = l'$, злучаємо H і E і через M проводимо

$$MI \parallel HE$$

Тоді

$$BI = \frac{Pl}{e'} = R = 625 \text{ кг}$$

13. Знайти момент опору при згині прямокутнього пекрою з основою $b = 5$ *см* і висотою $h = 3$ *см*

Як відомо, момент опору виражається формулою:

$$W = \frac{bh^2}{6},$$

тобто в данім випадку:

$$W = \frac{5 \times 3^2}{6}$$

Відкладім на простій OE відтинок $OB = 1$ (рис. XXIX).

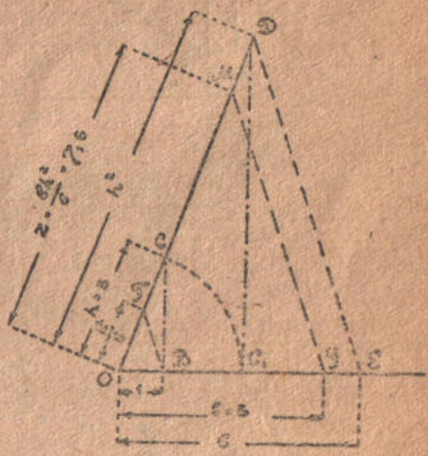
Поставмо в точці B нормалю й зачеркнім її в точці C радіюсом $OC = h = 3$ *см* та продовжім лінію OC.

Тим же радіюсом OC зачеркнім просту OE в точці C_1 і поставмо нормалю C_1D.

Одержимо: $OD = h^2$.

Далі відкладаємо $OE = 6$. Проводимо просту DE й рівнобіжну з нею BF; тоді

$$OF = \frac{h^2}{6}$$



XXIX

Нарешті, відкладаємо $Og = 5$ *см*, проводимо $GM \parallel DE$ й одержуємо

$$OM = W = \frac{bh^2}{6} = 7{,}5 \text{ см}^3$$

14. Знайти згинальний момент триму на двох опорах прогоном l, що має вантагу g *кг* на подовжинній M.

Формула моменту така:

$$M = \frac{gl^2}{8}$$

На рис. XXIX будуємо:

$$OB = 1 \text{ одиниці}$$

$$OC = l_M;\ OD = l^2$$

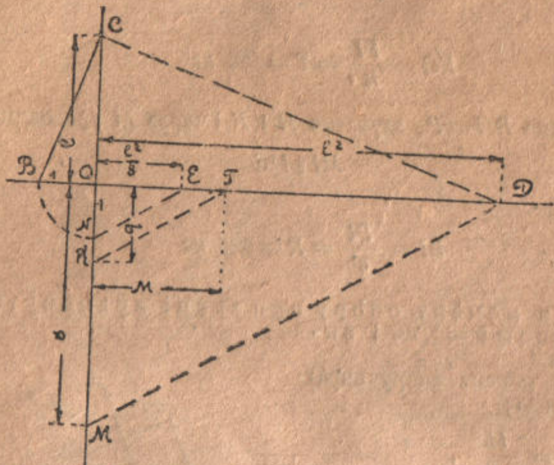


Рис. XXIX

$$OM = 8;\ ON = 1;\ OE = \frac{l^2}{8}$$

$$OR = g;\quad OT = M = \frac{gl^2}{8}$$

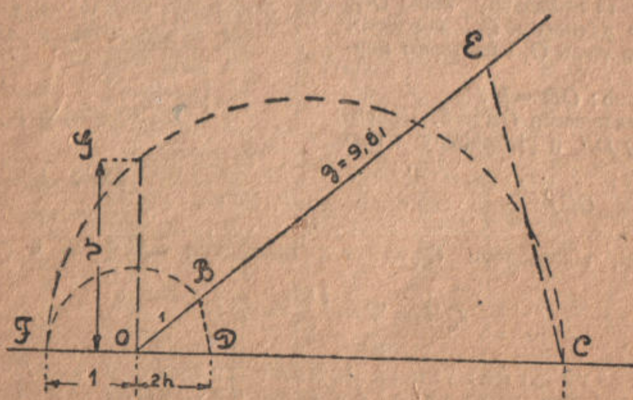


Рис. XXX

15. Визначити швидкість тіла при падaнні його на землю з висоти h.

Формула швидкости така:

$$v = \sqrt{2gh}$$

На рис. XXX маємо:

$$OF = OB = 1 \text{ одиниці}$$

$$OD = 2h$$

$$OE = g = 9{,}81$$

$$OC = gh$$

$$OG = \sqrt{2gh}$$

16. Визначити радіус інерції прямокутника з основою b і висотою h.

Формула радіюса інерції:

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{F}}$$

де:

ρ — радіюс інерції,

I — момент інерції $=$

$$\frac{bh^3}{12}$$

F — площа перерою $= bh$.

Проведім дві взаємно нормальні осі OX та OG (рис. XXXI)

Будуємо $OC = 1$ одиниці

$$OD = h\,;\ OE = h^2\,;$$
$$OF = h^3$$

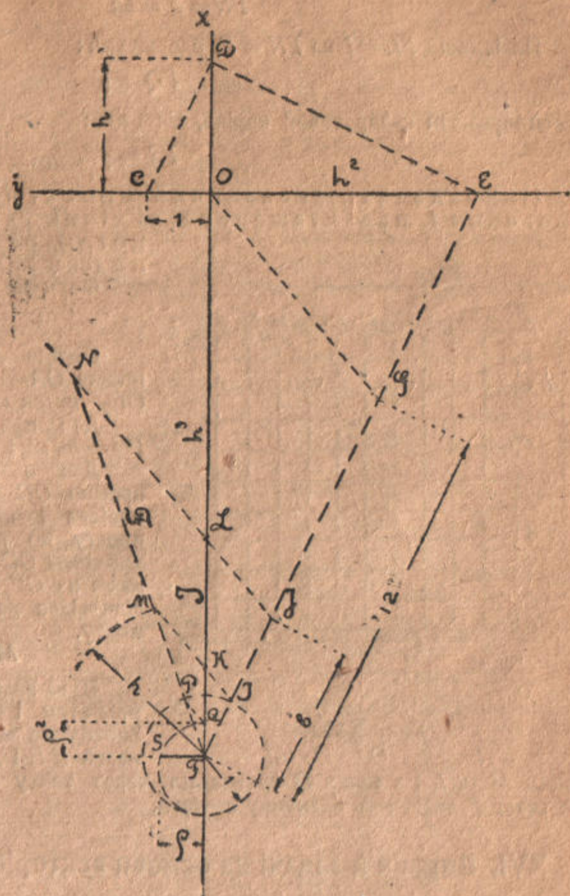


Рис. XXXI

У точці F описуємо коло радіюсом, що дорівнює 1 одиниці, й будуємо

$$FG = 12.$$

Провівши OG й збудувавши

$$IK \parallel OG$$

одержимо:

$$FK = \frac{h^3}{12}$$

Помножаючи FK на $b = FJ$, знаходимо:

$$FL = I = \frac{bh^3}{12}$$

З F описуємо дугу радіюсам h і множимо $FM = h$ на $b = FJ$. Одержуємо

$$FN = F = bh$$

Поділивши $FL = I$ на $FN = F$, одержуємо:

$$FQ = \rho^2$$

Добуваючи квадратовий корінь, дістаємо:

$$FS = \rho$$

17. Визначити згинальний момент консольного тряму прогоном l, навантаженого на кінці тягарем P, за допомогою радіяльної номограми (рис. XXXII).

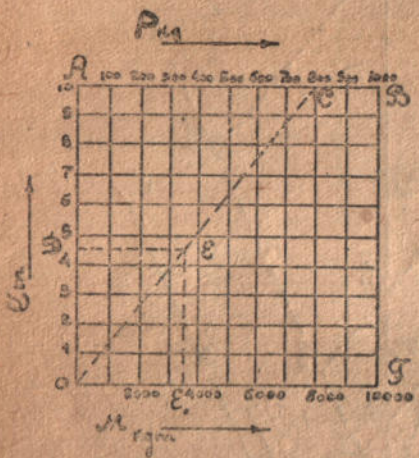


Рис. XXXII

Формула згинального моменту:

$$M = Pl$$

Проста AB є скаля вантаг P, проста OA — скаля прогонів l, проста OF — скаля моментів.

Для прикладу знайдім M при $P = 800$ *кг* і $l = 4{,}5$ *м*.

Для цього проведім просту — промінь OC. Через точку D, що відповідає $l = 4{,}5$ *м*, проведім позему просту до перетину її в точці E з промінем OC. З точки E спустім нормалю на OF і знайдім точку E_1, що відповідає на скалі M вартості моменту.

$$M = 3\,600 \text{ кгм}$$

Щоб знайти силу P за заданим моментом і прогоном, робимо так. Знаходимо точку E, як перетин нормалей E_1E і DE, що відповідають заданим M та l, і з точки O проводимо через точку E промінь OC. Точка C на скалі P визначить величину вантаги.

XVI. Вправи й задачі на основи векторіяльного числення

29. Довести, що геометрична сума не залежить від порядку доданків.

30. Довести, що геометрична рівність $\overline{r} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \ldots + \overline{n}$ не порушиться, якщо всі члени її помножити на той самий скаляр k.

31. Довести, що проекція геометричної суми на яку завгодно вісь дорівнює альґебричній сумі проекцій додаваних векторів на ту суму вісь.

32. Показати, що, коли $\overline{r} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_n$, то

$$r_2 = \Sigma a^2_i + \Sigma a_i a_k \cos (a_i, a_k)$$

33. Дано вектори $\overline{a} = 4$ та $\overline{b} = 5$, кут між ними дорівнює 30°; знайти: a) $\overline{r} = \overline{a} + \overline{b}$; b) $\overline{r} = \overline{a} - \overline{b}$ і c) $\overline{r} = \overline{b} - \overline{a}$.

34. Дано вектори $\overline{a} = 5$, $\overline{b} = 7$ і $c = 3$; напрями $\overline{a}$ та $\overline{b}$ поземі, а напрям c прямовисний; знайти: a) $\overline{r} = \overline{a} + \overline{b} - c$; b) $\overline{r} = \overline{a} + \overline{b} + c$; c) суму проекцій на позему вісь; d) суму проекцій на прямовисну вісь.

35. Вектор $\overline{a} = 10$ розкласти на два взаємно нормальні вектори.

36. Вектор $\overline{a} = 12$ розкласти на три взаємно нормальні вектори.

37. Знайти ріжницю між двома даними векторами: $\overline{a} = 5\ (\angle = (a, X) = 30^\circ)$ і $\overline{b} = 6\ (\angle = (b, X) = 60^\circ)$

38 Знайти положення в просторі вектора $\overline{r} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$, якщо $\overline{x}$, $\overline{y}$ та z взаємно нормальні

39 Знайти ріжницю між двома векторами $\overline{R} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$ і $\overline{r} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$, проведеними з початку координат. ($\overline{X}\,\overline{Y}$ та $\overline{Z}$ і $\overline{x}, \overline{y}$ та $\overline{z}$ взаємно нормальні).

40 Коли не можна розкласти даного вектора на два доданки, для яких задано напрями, і коли розклад цей неозначений?

41. Довести, що коли один з додаваних векторів дано величиною й напрямом, то другий додаваний вектор цілком визначається.

42. Показати, що, коли один з додаваних векторів задано тільки напрямом, а другий тільки величиною, то розклад дає дві роз'язки.

43. Зазначити умови, коли розклад на площі на три додапки можливий і означений.

44. Довести, що, коли $\overline{v} = \overline{a} + \overline{b}$ і $\overline{w} = \overline{p} + \overline{q}$, то $\overline{v.w} = \overline{a}.\ \overline{p} + \overline{a}.\ \overline{q} + \overline{b}.\ \overline{p} + \overline{b}\ \overline{q}$.

45. Довести, що в гострокутнім трикутнику з боками a, b та c, $a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cos(b, c)$.

46. Знайти кут між двома векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$, проведеними з початку координат і заданими своїми проєкціями: $\overline{a_x} = 4$, $\overline{a_y} = -2$, $\overline{a_z} = 3$, $\overline{b_x} = -7$, $\overline{b_y} = 9$ $\overline{b_z} = -5$.

47. Довести, що $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, де $\overline{r}$ заданий вектор, а $\overline{x}$, $\overline{y}$ та $\overline{z}$ його проєкції на прямокутні координатні осі.

48. Якою рівністю зв'язані одні з одними cosinus'и кутів, утворених одним даним вектором з трьома прямокутніми координатними осями.

49. Два вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ задані проєкціями на кординатні осі:

$$\overline{a_x} = 5,\ \overline{a_y} = 2,\ \overline{a_z} = 1,\ \text{і}\ \overline{b_x} = 7,\ \overline{b_y} = 4{,}3,\ \overline{b_z} = 1{,}2;$$

знайти величину їх векторіяльного добутку $\overline{a} \times \overline{b}$.

50. Що виражає собою геометричний добуток вектора $\overline{a}$ на векторіяльний добуток двох векторів $\overline{b} \times \overline{c}$?

ВІДДІЛ III

Пояснення та розв'язки задач

XVII. Обертання формул з одних мір в інші

1. Зменшиться в сто разів, бо $L\ см = \frac{L}{100}\ м$.

2. Збільшення числової величини сили вп'ятеро відповідає зменшенню абсолютної величини одиниці сили вп'ятеро.

3. Числова величина l довжини зменшиться в сто разів, якщо сантиметри замінити метрами, бо $l\ см = \frac{l}{00}\ м$.

4. Символ одиниці швидкости є $V = LT^{-1}$, де L — довжина, T — час; тоді:

1) від збільшення одиниці довжини L в 12 разів абсолютна величина одиниці швидкости зменшиться в 12 разів:

$$\left\{ n\,(LT^{-1}) = \left[(12\,L)\,T^{-1} \right] \frac{n}{12} = n_1\ (L_1\,T^{-1}) \right\};\ n_1 = \frac{n}{12};$$

2) від збільшення одиниці часу T в 60 разів абсолютна величина одиниці швидкости зменшиться в 60 разів:

$$\left\{ n\,(LT^{-1}) = \frac{n}{60}\left[L\,(60\,T)^{-1} \right] = n_1\,(L\,T_1^{-1}) \right\};\ n_1 = \frac{n}{60}$$

5. Символ одиниці пришвидшення є $W = LT^{-2}$. Якщо числова величина пришвидшення в основних одиницях довжини L і часу T є n, то:

1) від збільшення L в сто разів $(L_1 = 100\,L)$ числова величина n_1 зменшиться в стільки ж разів:

$$n.\,(LT^{-2}) = \frac{n}{100} \qquad (100\,L)\,T^{-2} = n_1\,L_1\,T^{-2}; \qquad n = \frac{n}{100};$$

2) від зменшення одиниці часу T в 60 разів $(T = T_1\,60)$ числова величина n_1 зменшиться в 3600 разів:

$$n.\,(LT^{-2}) = n\,L\,(T_1\,60)^{-2} = n\,60^{-2}\,LT_1^{-2} = n_1\,LT_1^{-2};\ n_1 = \frac{n}{3600}$$

6. Символ одиниці роботи є $ML^2T^{-2} = PLT$. Від заміни пудів і сажнів фунтами та аршинами числова величина роботи 100 збільшиться в 120 разів, тобто дорівнюватиме 12000:

100 пуд. саж. = 100.40.3 фунт. арш. = 12 000 фунт. арш.

7. Формула виміру пришвидшення

$$LT-$$

Числова величина пришвидшення сили тягару в системі (фут, фунт, хвилина) дорівнює 115 836:

$$981\ см\ сек.^{-2} = 981 . 0{,}0328 \left(\frac{1}{60}\right) фут.\ хв. = 981 .\ \ 0{,}0328 . 3600\ фут.\ хв. =$$

$$= 115\ 836\ фут.\ хв.$$

8. Формула виміру величини пришвидшення

$$LT-^2$$

У системі (міліметр, міліграм, секунда) міститься в величині пришвидшення:

$$\frac{1}{10} C,\ G^0,\ \ S-^2\ \text{тобто}\ \frac{1}{10};$$

у цій же системі в величині сили міститься:

$$\frac{1}{10} C, \frac{1}{1\ 000} G,\ S-^2,\ \text{тобто}\ \frac{1}{10\ 000};$$

у величині роботи:

$$\frac{1}{100} C^2, \frac{1}{1\ 000} G, S-^2,\ \text{тобто}\ \frac{1}{100\ 000}.$$

9 Шукана числова величина 2 одиниць роботи, — в системі CGS дорівнює:

$$6\ 056\ C^2GS\ \ ^2,\ \text{тим що}$$

$$2\ кг\ м^2 \left(\frac{1}{2}\ год.\right)^{-2} = 2 \times 1\ 000 \times 981 \times 100^2 \times 1\ 800-^2 г - см^2\ сек.-^2 =$$

$$= \frac{2.981.1\ 000\ .\ 10\ 000}{1\ 800^2}\qquad \frac{2-см^2}{сек^4} = 6\ 056\ C^2GS-^2$$

10. Формула виміру величини густини

$$ML-^3$$

Для даного випадку маємо:

$$13{,}6\ G{,}C-^3 = 13{,}6 . \frac{1}{1\ 000} . \frac{1}{9{,}81}\left(\frac{1}{100}\right)^{-3} кг - м-^8 = \frac{13{,}6\ .\ 1\ 000\ 000}{9{,}81\ .\ 1\ 000}\ \frac{кг}{м^3} =$$

$$= 1\ 386{,}34\ \frac{кг}{м^3}.$$

11. Формула виміру величини рухової енергії: ML^2T-^2; за умовами задачі маємо:

$$\frac{5\ золотн.\ (2\ саж.)^2}{(7\ хв.)^2} = \frac{5\ .\ 4{,}266\ .\ (2\ .\ 213{,}36)^2\ г - см^2}{(7.60)^2\qquad сек.^2} = \frac{22\ г - см^2}{сек.^2}$$

12. Формула виміру сили:

$$MLT-^2$$

Відповідно до даних задачі маємо:

$$1\ 000\ 000\ GC\,.\,S^{-2} = 1\ 000\ 000\,.\,\frac{1}{410}\cdot\frac{1}{2,5}\ \frac{1}{x^2}\ \text{фунт. цал. один. часу}^{-2} =$$

$$= 100\,.\ \text{фунт. цал. один. часу}^{-2};\ \text{звідси}$$

$$\frac{1\ 000\ 000}{410\,.\,2,5\,.\,x^2} = 100;\ x^2 = 3,123;\ 1\ \text{сек.} = 3,123\ \text{один. часу};\ \text{один. часу} =$$

$$= \frac{1}{3,123}\ \text{сек.}$$

13. Визначаємо розміри одиниць часу, довжини й маси в новій системі (швидкість V, пришвидшення W і сила F):

$$\text{розм.}\,(V) = [LT^{-1}];\ \text{розм.}\,(W) = [LT^{-2}];\ \text{розм.}\,(F) = [MLT^{-2}];$$

із цих співвідношень одержимо:

$$\text{розм.}\,(T) = \left[\frac{V}{W}\right];\ \text{розм.}\,(L) = \left[\frac{V^2}{W}\right];\ \text{розм.}\,(M) = \left[\frac{F}{W}\right].$$

Знавши розміри T, L і M у новій системі, можна легко перетворити всі формули виміру для нових основних одиниць (швидкість, пришвидшення, сила).

14. Визначаємо розмір маси M у новій системі (довжина L, час T і рухова енергія E):

$$\text{розм.}\,(E) = \left[M\cdot\frac{L^2}{T^2}\right],\ \text{звідки}$$

$$\text{розм.}\,(M) = [ET^2L^{-2}].$$

Знавши розміри L, T і M у новій системі (L, T і E) — довжина, час і рухова енергія), легко перетворити всі формули виміру, виведені для системи нових основних одиниць (довжина, час і маса).

15. $$400\ \frac{кг}{см^2} = 400\,.\,\frac{2,44}{(0,3937)^2}\ \frac{\text{фунт.}}{\text{кв. цал.}} = 400\,.\,15,75\ \frac{\text{фунт.}}{\text{кв. цал.}} =$$

$$= 6\ 300\ \frac{\text{фунт.}}{\text{кв. цал.}}$$

16. $$2\ 000\ 000\ \frac{кг}{см^2} = 2\ 000\ 000\,.\,\frac{2.44}{(0,3937)^2}\ \frac{\text{фунт.}}{\text{кв. цал.}} = 31\ 500\ 000\ \frac{\text{фунт.}}{\text{кв. цал.}}$$

17 Усі механічні формули однорідні, з чого виходить, що розмір: $0,45 = [F^{-\frac{1}{2}}L]$, якщо через F назвати вимір сили, розмір: $5 = [L]$; далі:

$$0,45\ \frac{мм}{кг^{\frac{1}{2}}} = 0,01135\ \frac{\text{цал.}}{\text{фунт.}^{\frac{1}{2}}};$$

$$5 = 0,197\ \text{цаля};$$

отже, формула набере вигляду

$$d\ \text{цал.} = 0,01135\sqrt{P\ \text{фунт}} + 0,197.$$

XVIII. Наближені обчислення

18. Визначаємо корені даних чисел з чотирма цифрами, при чім четверті сумнівні й можуть різнитися від дійсних на одиницю в той або той бік.

$$\sqrt{3} = 1,732$$

$$\sqrt{45} = 6,708$$

$$\sqrt{167} = 12,92$$

Шукаючи суму цих чисел, помічаємо, що, як у найбільшого числа сумнівний другий десятковий знак, то і в сумі чисел буде невірна друга десяткова цифра; отже, треті десяткові знаки можна відкинути.

Тому

$$1,73 + 6,71 + 12,92 = 21,36\,;$$

одержаний результат має три вірні цифри й четверту сумнівну, що й треба було знайти

Релятивні огріхи даних чисел відповідно дорівнюють:

$$\frac{1}{173}, \frac{1}{671} \text{ та } \frac{1}{1\,292}$$

Релятивний огріх суми дорівнює:

$$\frac{1+1+1}{173+671+1\,292} = \frac{3}{2\,136} = \frac{1}{712}$$

19. Бік квадрата, вписаного в коло, поперечником 100 *м*, дорівнює

$$50\sqrt{2}.$$

Обвід кола L за умовами задачі:

$$L = 100\,\pi\sqrt{2}.$$

Для наближеного обчислення обводу кола візьмім $\pi = 3,142$ (з релятивним огріхом $< \frac{1}{3\,142}$), $\sqrt{2} = 1,414$ (з релятивним огріхом $< \frac{1}{1\,414}$

маємо:

$$L = 100 \times 3,142 \times 1,414 = \underline{\underline{444,279.}}$$

Як відомо, при множенні релятивний огріх добутку дорівнює сумі релятивних огріхів чинників; тому обвід кола обчислено з релятивним огріхом, що дорівнює:

$$\frac{1}{3\,142} + \frac{1}{1\,414} = \frac{1}{1\,000}$$

20. Помилка в об'ємі течива, що наповнює посудину, може бути $< 1\%$; отже, помилка в довжині радіюса й висоти посудини може бути при цім $< {}^1/_3\%$, бо радіюс дорівнює:

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\ м;$$

а при добуванні кубічного кореня помилку ділимо на 3.

Знаходячи вартість R, одержимо:

$$R = \frac{1}{1,\ 65} = 0,682\ м = 682\ мм;$$

абсолютний огріх не повинен бути більший за

$$\frac{6,8}{3} = 2,27\ мм.$$

21. Площа кола P радіюса 3 $м$ дорівнює:

$$P = \pi\ r^2 = 9\pi.$$

Якщо взяти $\pi = 3,14$, то результат

$$P = 9 \times 3,14 = 28,26$$

одержимо з помилкою

$$< \frac{1}{300}, \text{ тобто } < 0,5\%.$$

22. Радіюс кола визначаємо з формули:

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}.$$

Підставляючи в зазначену формулу вартості $\sqrt{3}$ та π з трьома точними цифрами, маємо:

$$r = \frac{1.732}{2 \times 3,142} = 0,2755;$$

при цім огріх обчислення дорівнює в кращім разі

$$\frac{1}{1\ 731} - \frac{1}{3\ 142} = \frac{1}{3\ 800} < \frac{1}{3\ 000},$$

або в гіршім разі

$$\frac{1}{1\ 731} + \frac{1}{3\ 142} = \frac{1}{1\ 115} < \frac{1}{1\ 000}.$$

23. Добування $\sqrt[3]{\pi^2}$ з точністю до сотих частин позначимо так:

$$\sqrt[3]{3,142^2}.$$

Як відомо, при обчисленнях за допомогою логаритмів, досить, щоб мантиса мала не менш знаків, ніж повинно бути точних цифр у числі; отже,

$$lg \sqrt[3]{3,142^2} = \frac{2}{3} lg\ 3,142 = \frac{2}{3}\ 0,497 = 0,331,$$

або

$$\sqrt[3]{3,142^2} = 2,143;$$

при цім релятивний огріх результату менший від

$$\frac{2}{3 \times 3\ 000} = \frac{1}{4\ 500},$$

що випливає з законів зміни релятивних огріхів при степенюванні та коренюванні.

24. Висоту циліндра, що має діяметр основи рівний із висотою, об'ємом 1 *куб. дм.* знайдемо з рівности:

$$\frac{\pi\ h^2}{4}\ h = 1\ куб.\ дм,$$

або

$$h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\ дм.$$

Добуваючи корені з трьома точними цифрами, маємо:

$$h = \frac{1,587}{1,464} = 1,08\ дм = 108\ мм.$$

Помилка обчислення менша від одного *мм*, бо релятивний огріх буде менший, ніж

$$\frac{1}{1\ 500} + \frac{1}{1\ 400} = \frac{1}{700};$$

абсолютний же огріх, тобто абсолютна помилка в довжині, буде менша від

$$108\ мм\ \frac{1}{700} = \infty\ \frac{1}{7}\ мм.$$

25. Відповідно до умов задачі, висоту циліндра в дециметрах визначаємо рівности:

$$d = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Зробім обчислення з трьома точними цифрами; одержимо:

$$d = \frac{1,259}{1,4\ 4} = 0,86\ дм = 86\ мм.$$

Релятивний огріх при цім менший від

$$\frac{1}{1\ 200} + 1\frac{1}{40} < \frac{1}{600}$$

Абсолютний огріх менший, ніж:

$$\frac{86}{600}\,мм < 1\ мм.$$

Коли б ми зробили обчислення з двома точними цифрами, то знайшли б, що абсолютний огріх більший від 1 *мм*

26. Висоту трикутника *h*, за умовами задачі, визначаємо з рівности

$$\pi r^2 = \frac{a h}{2}$$

або

$$h = \frac{2 \pi r^2}{a},$$

де

r — радіюс кола $= 200$ *см*.

a — основа трикутника $= 150$ *см*.

Зробивши обчислення з трьома точними цифрами, маємо:

$$h = \frac{2 \times 40\ 000\ \pi}{150} = 533{,}3 + 3{,}142\ см = 1\ 676\ см.$$

Релятивний огріх обчислення менший від

$$\frac{1}{5\ 000} + \frac{1}{3\ 000} < \frac{1}{1\ 800}$$

Абсолютний огріх менший, ніж

$$\frac{1\ 676}{1\ 800},\ \text{тобто} < 1\ см.$$

27. Зробивши добування $\sqrt{3}$ з двома десятковими знаками, одержимо

$$\frac{\sqrt{8 + 1{,}73}}{2} = \frac{\sqrt{9.73}}{2} = \frac{3{,}12}{2} = 1{,}560.$$

Релятивний огріх при добуванні кореня з 9,73 менший, ніж

$$\frac{1}{2\ 900},\ \text{тобто} < \frac{1}{1\ 800}$$

Отже, одержаний результат має три точні цифри.

28. Треба обчислити π, d і h з трьома точними цифрами; тоді релятивний огріх при визначені об'єму буде менший від

$$\frac{4}{1\ 000},\ \text{тобто менший від}\ \frac{1}{250};$$

при цім помилка буде тільки в сотих частинах.

XIX. Основи векторіяльного числення

29. Нехай дані вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$, $\overline{e}$ . . . . ; знайдім їхню геометричну суму. Припустім, що

$$\overline{S} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} + \overline{e} + \ldots$$

Суто геометрично треба спершу показати, що можна змінити порядок якихось двох додатків, тобто перемістити два якісь суміжні елементи, наприклад, $\bar{b}$ та $\bar{c}$, і що при тім геометрична сума від переставки цих двох суміжних доданків не зміниться; далі, знаючи з теорії переставок що послідовною переставкою двох суміжних доданків можна всі доданки попереставляти яким завгодно порядком, доведемо, що геометрична сума не залежить, отже, від порядку сумування.

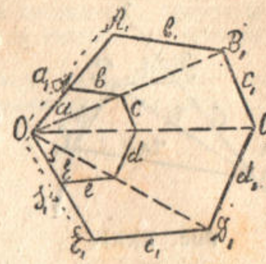


Рис. XXXIII

30. Нехай маємо (рис. XXXIII)

$$\bar{S} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} + \bar{e}$$

та

$$\bar{S_1} = \bar{a_1} + \bar{b_1} + \bar{c_1} + \bar{d_1} + \bar{e_1},$$

при чім

$$\bar{a_1} = na\,;\ \bar{b_1}\ nb \text{ і т. д.}$$

Збудувавши з одної точки O обидві геометричні суми, держимо два многокутники $OABCDE$ та $OA_1B_1C_1D_1E_1$.

Розбиваючи ці многокутники діягоналями, проведеними з O, на ряд трикутників, із подібности їх послідовно доведемо, що

$$\frac{OB_1}{OB} = \frac{OC_1}{OC} = \frac{OD_1}{OD} = \frac{OE_1}{OE} = n,$$

тобто, що $OE_1 = n\ OE$, або, підставляючи вартості OE_1 та OE, знайдемо:

$$\bar{S_1} = n.\,\bar{S},$$

що й треба було довести.

31. Доводимо безпосередньо на рисунку тим, що альгебрична сума проєкцій відтинків, які утворюють ламану лінію, на якийсь напрям дорівнює проєкції на той же напрям простої, що замикає ламану лінію.

32. Нехай $\bar{r} = \bar{a_1} + \bar{a_2} + \bar{a_3}$.

Проєкція на вісь x-ів:

$$x = r\cos\alpha = a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3.$$

Проєкція на вісь y-ів:

$$y = r\cos\beta = a_1\cos\beta_1 + a_2\cos\beta_2 + a_3\cos\beta_2.$$

Тим що $r^2 = x^2 + y^2$, то

$r = a_1{}^2\cos^2\alpha_1 + a_2{}^2\cos^2\alpha_2 + a_3{}^2\cos^2 a_3 + 2a_1a_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + 2a_2a_3\cos a_1 \cos\alpha_1 + 2a_2a_3\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + a_1\cos^2\beta_1 + a_2{}^2\cos^2\beta_2 + a_3{}^2\cos^2\beta_3 + 2a\,a_2 \cos\beta_1\cos\beta_2 + 2a_1a_3\cos\beta_1\cos\beta_3 + 2a_2a_3\cos\beta_2\cos\beta_3.$

Вважаючи на те, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ і що $\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta\cos\beta_2 = \cos(a_1a_2)$, одержимо:

$$r^2 = a^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + 2a_1a_2\cos(a_1a_2) + 2a_1a_3\cos(a_1a_3) + 2a_2a_3\cos(a_2a_3).$$

Отже, взагалі, якщо

$$r = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\,,$$

то

$$r_2 = \Sigma a_i + 2\Sigma a_i a_k \cos(a_i a_k)$$

Можна також довести це інакше. Нехай $\overline{r} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \dots$ Нехай $\overline{a} + \overline{b} = \overline{r}_1$. Тим що вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{r}_1$ утворюють трикутник, то, на підставі тригонометрії, маємо (рис. XXXIV):

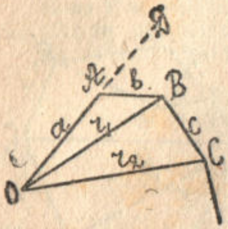


Рис. XXXIV

$$r_1^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab \cos\ (\angle OAB),$$

але

$$\angle OAB = \pi - (\overline{a}, \overline{b}),$$

де $(\overline{a}, \overline{b}) = \angle DAB$, тобто кутові між напрямами векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$; тому

$$r_1^2 = a^2 + b^2 + 2\ ab \cos\ (\overline{a}, \overline{b})$$

Далі з ΔOBC

$$r_2^2 = r_1^2 + c^2 + 2\ r_1\ c_2 \cos\ (\overline{r}, \overline{c})$$

Заміняючи $r_1 = \overline{a} + \overline{b}$ й знаючи, на підставі теореми про проекції геометричної суми, що

$$r_1 \cos\ (\overline{r_1}, \overline{c}) = a\ \cos\ (\overline{a}, \overline{c}) + b \cos (\overline{b}, \overline{c}),$$

одержимо:

$$r_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos\ (\overline{a}, \overline{b}) + 2ac\ \cos\ (\overline{a}, \overline{c}) + 2bc \cos\ (\overline{b}, \overline{c}),$$

продовжуючи такі самі міркування, дістанемо загальну формулу:

$$r^2 = \Sigma a_i^2 + 2\Sigma a_i\ a_k \cos\ (\overline{a_i}, \ \overline{a^i}\ )$$

Можна також довести цю теорему, перемножаючи скалярно вирази $\overline{r} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \dots$, на $\overline{r} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} \dots$, вважаючи, що $\overline{r} = r$; $\overline{a} = a$; $\overline{b} = b$ і т. д

33.

a) $\overline{r} = \overline{a} + \overline{b} = 8{,}69$

b) $\overline{r} = \overline{a} - \overline{b} = 2{,}53$

c) $\overline{r} = \overline{b} - \overline{a} = -2{,}53.$

Величину $\overline{r}$ можна відшукати або за формулою

$$r^2 = \Sigma a_i\ + 2\Sigma a_i\ a_k \cos (\overline{a_i}\ \overline{a_k})$$

або на підставі теореми про проекцію суми на дві координатні осі, або безпосередньо графічно.

34.

a) $\overline{r} = \overline{a} + \overline{b}\quad \overline{c} = 12{,}37$

b) $\overline{r} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 12{,}37.$

Задачу розв'язуємо або безпосередньо графічно, або аналітично, на підставі формули $r = +\sqrt{(a+b) + c^2}$.

c) Сума проекцій на позему вісь

$$r \cos\ (r,\ a + b) = \overline{a} + \overline{b} = 12.$$

d) Сума проекцій на прямовисну вісь

$$r \cos\ (r,\ c) = -c = -3,$$

або

$$r \cos(r, c) = c = 3$$

35. Задача неозначена, бо вона рівноважить із будуванням на данім векторі, як на гіпотенузі, прямокутнього трикутника. Число їх, как відомо, безконечно-велике, бо геометричне місце прямих кутів, що спираються на одну лінію, є коло, збудоване на ній, як на діяметрі (рис XXXV).

Для означености треба дати якусь додаткову умову, наприклад, кут між даним вектором і одною із складових.

36. Так само, як і в попереднім випадку, задача неозначена: бракує ще якоїсь умови, наприклад, точного означення положення вектора a в просторі відносно x, y і z.

37. Задачу розв'язуємо або безпосередньо графічно, або аналітично, на підставі формули для рівнодійної, чи на підставі теореми про провкції на осі координат (див. рис. XXXVI).

$$r = -3{,}02.$$

38.
$$\cos(r, x) = \frac{x}{r}$$
$$\cos(r, y) = \frac{y}{r}$$
$$\cos(r, z) = \frac{z}{r}$$

39.
$$\overline{R} - \overline{r} = (\overline{X} - \overline{x}) + (\overline{Y} - \overline{y}) + (\overline{Z} - \overline{z})$$

(див. основи векторіяльного числення).

40. Розкласти вектор на два задані напрями векторів не можна, якщо три вектори не лежать в одній площі.

Розклад вектора на два додаваних вектори буде неозначений, якщо напрями додаваних векторів рівнобіжні з даним вектором.

41. Задача сходить на знаходження ріжниці двох векторів, тобто на будову трикутників за двома боками й кутом між ними.

42. Задача має дві розв'язки, бо сходить на будову трикутника за двома боками й кутом проти одного з них.

В якім випадку буде тільки одна розв'язка і коли — жодної?

43. Розклад вектора на площі на три доданки можливий і означений, якщо дано: 1) напрями трьох додаваних векторів і величину одного з них, 2) величину й напрям одного вектора, величину другого та напрям третього.

44. Нехай дано:

$$\overline{v} = \overline{a} + \overline{b},$$

$$\overline{w} = \overline{p} + \overline{q}$$

Ми знаємо, що

$$v \cos(v,w) = a \cos(a,w) + b \cos(b,w)$$

Помножаючи обидві частини на w, маємо:

$$vw \cos(v,w) = aw \cos(a,w) + bw \cos(b,w)$$

$$\overline{v.w} = \overline{a.w} + \overline{b.w},$$

але $w = p + q$, а тому

$$w \cos(w,a) = p \cos(p,a) + q \cos(q,a)$$

Отже, за властивістю геометричної суми,

$$wa \cos (w, a) = pa \cos (p, a) + qa \cos (q, a),$$

гобто $\overline{w} . \overline{a} = \overline{p} . \overline{a} + \overline{q} . \overline{a}$.

Точнісінько так само, знаючи, що $\overline{w} = \overline{p} + \overline{q}$, знайдемо, що

$$w \cos (w, b) = p \cos (p, b) + q \cos (q, b)$$

а значить,

$$wb \cos (w, b) = pb \cos (p, b) + qb \cos (q, b)$$
$$\overline{w} . \overline{b} = \overline{p} . \overline{b} + \overline{q} . \overline{b}$$

Отже, дійсно,

$$\overline{v} . \overline{w} = \overline{a} . \overline{p} + \overline{a} . \overline{q} + \overline{b} . \overline{p} + \overline{b} . \overline{q}$$

45. Для доказу треба взяти один із боків трикутника за геометричну суму двох інших бокі» і вивести величину цієї суми у функції величин додаваних вектор в та кута між ними.

46. Користуючись із формули

$$\overline{R} . \overline{r} = \overline{X} . \overline{x} + \overline{Y} . \overline{y} + \overline{Z} . \overline{z},$$

знайдемо

$$ab = -4 \times 7 - 2 \times 9 - 3 \times 5 = -61$$

Далі, знавши, що

$$\cos (\overline{R}, \overline{r}) = \frac{\overline{R} , \overline{r}}{R . r}$$

що $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, а $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

знайдемо:

$$a = \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} = +\sqrt{29}$$

$$b = \sqrt{7^2 + 9^2 + 5^2} = +\sqrt{155}$$

$$\cos (\overline{ab}) = -\frac{61}{\sqrt{29} . \sqrt{155}} = -0{,}91 = \cos (180 - \alpha) \angle (\overline{ab}) =$$
$$= 180 - 24^0\, 30' = 155^0\, 30'.$$

47. Доказ ґрунтується на теоремі, що $\overline{r} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$, і на виразі:

$$r^2 = \Sigma a_i^2 + 2 \Sigma a_i\, a_k \cos (a_i, a_k).$$

48. Беручи на увагу, що $\overline{r} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$ і що $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, знайдемо

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \cos \beta = \frac{y}{r} \text{ та } \cos \gamma \frac{z}{r},$$

звідки

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

49. Знавши, що $\overline{a} = \overline{a}_x + \overline{a}_y + \overline{a}_z$ і $\overline{b} = \overline{b}_x + \overline{b}_y + \overline{b}_z$, знайдемо

$$\overline{a} \times \overline{b} = (a_y\, b_z - a_z\, b_y) + (a_z\, b_x - a_x\, b_z) + (a_x\, b_y - a_y\, b_x)$$

тобто

$$\overline{a} \times \overline{b} = (2 \times 1{,}2 + 1{,}5 \times 4{,}3) + (-1{,}5 \times 7 - 5 \times 1{,}2) + (5 \times 4{,}3 - 2 \times 7) =$$
$$= 8{,}85 - 16{,}5 + 7{,}5 = -0{,}15$$

50. Об'єм рівнобіжника, якого боки дорівнюють b й c, а третій руб дорівнює a. Справді, $\overline{b} \times \overline{c}$ — є площа основи. Зображаючи її вектором $\overline{p}$, знайдемо, що $\overline{p} \cdot \overline{a} = pa \cos(\overline{p}, \overline{a})$ є дійсно добуток основи p на висоту $h = a \cos(\overline{p}, \overline{a})$.

Короткий українсько-російський словничок ужитих термінів

Бігунець — бегунок
Бороэенка — бороздка
Ваговитий — веский
Важелець — рычажок
Важіль - рычаг
Вантага – нагрузка
Вартісний — значущий (цифра)
Вартість - значение (мат.) достоинство
Верівчатий – веревочный
Вершок – вершина (угла)
Взаємочин – взаимодействие
Видовження – удлинение
Визначник — определитель
Вимикати — выключать
Вимірoвий — мерительный
Випар - испарение
Випростаний - выпрямленный
Виритуваний — выгравированный
Відгинний — отгибной
Від'ємний – отрицательний
Від'ємник — вычитаемое
Відлеглий – отстоящий
Відлік отсчет
Відміна - видоизменение
Відповідний — отправный
Відтинати — отрезывать
Відтинок - отрезок
Відтулина – отверстие
Відхил — отклонение
Візок — тележка
Вістря - острие
Вказівець – палець указательный
Вочевидь — заведомо
Вправа — упражнение
В'язка – пучок
Гасильник - погаситель
Голчастий – игольчатый
Граничний — предельный
Гріш деньга
Громада – семейство (мат.)
Грубина — толщина
Густина - плотность
Гущина - густота
Ґара — паз
Ґудзик - кнопка
Двоїстість — двойственность
Двостінний — двухгранный (угол)
Дев'ятковий — девятичный
Десятерний - десятеричный
Десятковий – десятичный
Дзвінка – бубна (масть)
Дзвонуватий - колоколобразный
Діленик делимое
Дільник — делитель
Дільниця - грань, группа (числа)
Добувати извлекать (корень)
Добуток — произведение
Довідник — справочник
Довільний — произвольный
Догірний — восходящий
Додавання – сложение
Доданок — слагаемое
Додатній — положительный
Додільний — нисходящий
Допускнии – допустимый
Дотик касание
Дотичний касательный
Доторкатися соприкасаться
Дротина – проволока
Дужки зносити – скобки раскрывать
Електрозворушення – электродвижущая сила
Енерґія рухова — живая сила
Живе срібло ртуть
Заглиблина углубление
Закривка — затвор
Закруток – завиток
Замичний — замыкающий
Застосовність — применимость
Захований скрытый
Зачеплення – зацепление
Зачеркати засекать
Збіг — совпадение
Збурення — возмущение
Звинений — свернутий кругом
Звій виток
Зворотний — обратный
Зв'язень — ферма (конструк.)

Згин — изгиб
Згинальний — изгибающий
Згортка — складка
Зіставлення — сопоставление
Злада — смелка
Зливатися — совпадать (в пространстве)
Злім — излом
Злука — соединение (мех.)
Злучений — соединенный
Злучник — муфта
Зменшеник — уменьшаемое
Змінний — переменный
Змоток — сверток
Знаменник — знаменатель
Зокільний — наружный
Імовірність — вероятность
стий — правильный (о дроби)
Карта — клетка (в клетчатой бумаге), карта (игральная)
Картатий — клетчатый
Квадратування — возвышение в квадрат
Кінь механічний — лошадиная сила
Кінь паровий — паровая лошадиная сила
Ковзання — скольжение
Ковзний — скользящий
Ковзький — скользкий
Коло — окружность круг
Коренювання — извлечение корня
Корба — рукоятка (для вращения)
Коточок — ролик, каточек
Крапкований — пунктирный
Крапчик — пунктир
Кремпіль — кронштейн
Кружало — диск
Кружаловий — дисковый
Кубування — возвышение в третью степень
Куля — шар
Кулястий — шарообразный
Кульовий — шаровой
Кут — угол
Кутовий — угловой
Кутомір — угломер, транспортир
Кучерик — локон
Ланка — звено
Лезо — лезвие
Листовий — почтовый (о бумаге)
Лік — счет
Лічба — счет
Лічильник — счетчик
Лічильний — счетный
Маління — убывание
Мастило — масло смазочное
Миттьовий — мгновенный
Мікрометровий — микрометренный
Мірило — масштаб
Мірильний — масштабный
Многократь — кратное число
Многокутник — многоугольник
Множеник — множимое
Множник — множитель
Наближений — приближенный
Наближення — приближение
Назначений — намеченный
Напівкулястий — полушарообразный
Напруга — напряжение
Нарисний — начертательный
Натискний — нажимательный
Нахил — наклон
Незбіг — несовпадение
Неістий — неправильный (о дроби)
Неозначений — неопределенный
Непарний — нечетный
Нерухомий — неподвижный
Неспільномірний — несоизмеримый
Нормаля — перпендикуляр
Нормальний — перпендикулярный
Обвід кола — длина окружности
Обгинний — огибающий
Об'ємний — об'емлющий
Обернений — обратный
Оберт — оборот (напр., колеса)
Обертання — вращение; обращение (например, мер одних в другие)
Обертовий — вращающийся
Обідець — ободок
Обрис — очертание
Обрисовувати — очерчивать
Обчислення — вычисление
Обчислювальний — вычислительный
Огріх — погрешность
Однопрогінний — однопролетный
Означеність — определенность
Оливо — свинец
Опір — сопротивление
Оплата — сбор (подать)
Остача — остаток
Ошурка — опилки железные
Парний — четный
Певність — достоверность
Первісний — первоначальный, простой (о числе)
Перегин — перегиб
Передавач — передатчик
Передувати — предшествовать
Перекрій — сечение
Перетвір — преобразование
Перетин — пересечение
Перетинний — пересекающийся
Писний — пишущий
Питомий — удельный
Півколо — полуокружность

Підкореневий — подкоренной
Піднесення до степеня — возвышение в степень
Платівка — пластинка
Плинний — текучий
Поверт — поворот
Подібність — подобие
Поділка — деление (на шкале)
Подільність — делимость
Подовжинний — погонный
Подовжній — продольный
Поземий — горизонтальный
Поземина — горизонталь
Позірний — кажущийся
Позначка — отметка, пометка
Показ — показание
Покручений — извилистый
Полозки — салазки
Поперечка — поперечина
Попсув — порча
Порожнистий полый, пустотелый
Порожня — пустота
Поступний — поступательный
Потомний — последующий
Потужність — мощность
Похилий — наклонный
Похідний — производный
Поштовх — толчок
Прилад — прибор
Прилеглий — прилегающий
Приставати — совмещаться (геом.)
Пристрій — приспособление
Притаманний — присущий
Пришвидшення — ускорение
Прогін — пролет
Прогонич — болт
Промінювальний — излучающий
Промінювати — испускать лучи
Проста — прямая (линия)
Простір — пространство
Просторовість — протяженность
Противага - противовес
Противний — противоположный, обратный (о знаке)
Прочит — отсчет (на шкале)
Прочитувати — отсчитывать (на шкале)
Пружний — упругий
Пружність — упругость
Прямовисний — вертикальный
Прямокутник — прямоугольник
Прямокутній — прямоугольний
Прямування — стремление
П'ясть — кисть (руки)
Рамено — плечо
Релятивний — относительный
Речовинність — вещественность
Рисунок — чертеж
Риска — штрих
Рівність — равенство
Рівнобіжний паралельный
Рівнобіжник — параллелограммы
Рівнобіжностінник — параллелепипед
Рівнобічний — равнобокий
Рівнодійна — равнодействующая
Рівнораменний — равнобедренный
Рівняння — уравнение
Ріжниця — разность
Розв'язання — решение (процесс)
Розв'язка — решение (результат)
Розклад — разложение
Розтоплений — расплавленный
Розтяжний — растягивающий
Розхил раствор (напр., циркуля)
Розчин — раствор (хим.)
Руб – ребро (геом.)
Рухомий подвижной
Рушій — двигатель
Самописний — самопишущий
Скаля – шкала
Скельце — стеклышко
Складач — наборщик
Складова — слагающая
Складовина — набор (типогр.)
Спадний – убывающий
Спід — нижняя поверхность
Спіралюватий — спиралеобразный
Справджувати – удовлетворять (мат.)
Спрацьований — сработанный
Спроваджувати — удалять
Спростити – сократить (напр., дробь), упростить
Спряжений — сопряженный
Сталий — постоянный
Степенювання – возвышение в степень
Стиск – сжатие
Стискний – сжимающий
Стрижень – стержень
Стрічка мірна – мерная лента
Струм — ток (электр.)
Струмина — струя
Стяжка — полоска
Суглоб — сустав
Сустав — шарнир
Суставний — шарнирный
Тверднення — затвердевание
Твірна – образующая
Тертя — трение
Течиво — жидкость
Течія — ток (течение)
Течний — жидкий
Тиск – давление
Тотожність – тождество
Трапез — трапеция
Трибовий — зубчатый (передача)

Трибок — зубчатка
Тривалість — длительность
Трикутник — треугольник
Трикутній — треугольный
Трям — балка
Тягар — тяжесть
Тяжіння — тяготение
Тятива — хорда
Ужитний — применимый
Уявний — мнимый (число)
Хибний — ложный (о построении)
Хлипак — клапан
Цаль — дюйм
Циркель — циркуль
Частка — частное
Чин — действие
Чинник — (со) множитель
Чисельник — числитель
Численний — многочисленный
Числення — исчисление, счисление
Чіп — шип, цапфа
Чотиригранчастий — четырехгранный
Чотирикутник — четырехугольник
Шнек — бесконечный винт
Шпеник — штифт
Штучність — искусственность

Грецька абетка

α — альфа
β — бета
γ — гамма
δ — дельта
ε — епсильон
ζ — дзета
η — ета
ϑ — тета
ι — йота
κ — каппа
λ — лямбда
μ — мі
ν — ні
ξ — ксі
ο — омікрон
π — пі
ρ — ро
σ — сигма
τ — тау
υ — іпсильон
φ — фі
χ — хі
ψ — псі
ω — омега

ЗМІСТ

Стор.

Розділ IV Безпосередні точні обчислення і практичні спрощені способи робити їх

Розділ V. Безпосередні наближені обчислення

Розділ VI. Посередні точні й наближені обчислення за допомогою таблиць та лічильних лінійок

Розділ VII Виконання обчислень механічним способом (лічильні прилади й машини)

Відділ III — Графічні обчислення

Розділ VIII. Основні способи графічного числення

Розділ IX. Основи номографії

Розділ X. Основи векторіяльного числення

Стор.

Додаток до I частини

Частина II (практична)

Додаткові допоміжні відомості та пояснення. Приклади вправи й задачі на технічні обчислення

Відділ I.— Додаткові допоміжні відомості та пояснення

Відділ II.— Приклади вправи й задачі на технічні обчислення

Відділ III. - Пояснення та розв'язки задач.

Додаток до II частини

Ціна 2 крб. 50 к.

(П)