

539.Ч
К-90

Проф. П. Г. КУЛИКІВСЬКИЙ

КОРОТКИЙ КУРС ОПОРУ МАТЕРІЯЛІВ

ДЕРЖТЕХВИДАВ УКРАЇНИ



Проф. П. Г. КУЛИКІВСЬКИЙ

Ч

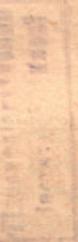
539.4

К-90

КОРОТКИЙ КУРС ОПОРУ МАТЕРІЯЛІВ

з 10 ТАБЛІЦЯМИ

4849 5942



✓



ДЕРЖТЕХВИДАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВ 1931 КІЇВ

Бібліографічний опис цього видання
вміщено в „Літопису Українського
Друну”, „Картковому репертуарі”
та інших посажниках Української
Ніннікової Палати

Підготовив до друку Редакторат кол. видавництва Каси Взаємодопомоги КПІ



Київск. Міськліт № 2622.

6-а друкарня УПІ ДВОУ. Київ, Сінний майдан 14.

Зам. № 3544. Тир. 3.000. 5½ арк. Ост. Б₅.

ВСТУП.

Опір матеріалів продовжує один з відділів фізики, а саме відділ „Пружність“. Ця наука розглядає й вивчає здатність матеріалів витримувати, не руйнуючись, дію на них зовнішніх сил, доки ці сили не зробляться занадто великі. Сили, що діють на матеріал, бувають: механічні, теплові, хемічні. Опір матеріалів розглядає тільки механічні й трохи — теплові, припускаючи, що проти хемічних процесів, наприклад, проти ржі, вжито заходів.

Різні матеріали по різному витримують зовнішні сили, отже кажемо, що вони дають різний опір. Краще було б казати, що вони мають різну відержність чи різну міцність, але до терміна „опір“ вже якось звикли. Розглядати будемо тільки ті матеріали, що їх опір досліджено: метали, дерево, каміння природне, каміння штучне, скло, мотузя, шкіра.

Опір матеріалів ґрунтуються на практичних даних заводської та лабораторної роботи й навчає нас, як робити іспит матеріалів. Нехай, наприклад, для моста треба прийняти партію заліза певного опору. З великої партії заліза беруть навмання певне число брусків

для спроби на розрив. Коли, наприклад, 20% цього числа не дало потрібного опору, то спробу роблять з подвійним числом брусків; коли й з цієї подвоєної кількості знову 20%, невдалих, то вся партія заліза не приймається. Число спроб і характер спроб (розрив, згин, ковальська спроба, пробивання) вказується технічними умовами. Для спроби на розрив беруть так званий нормальній зразок (рис. 1), який виточують або стругають з даного матеріалу. Між діаметром і довжиною є певне відношення $l=10-12d$. На бруску набивають керном точки й досліджують, наскільки брусков витягнувся після розриву й яку він витримав силу.

Ми знаходимо, яка сила розірвала брусков і приймаємо на увагу одну силу. Але ж одна сила не могла б розірвати брусков, бо вона потягла б його за своїм напрямком. Отже, в дійсності, брусков розривають дві сили. Одна з них P (рис. 2) звуться активною, друга P_1 пасивною. Приймають на увагу тільки одну з цих сил (див. далі таблиця 1). Ясно, що $P=P_1$, інакше не було б рівноваги.

В основі опору матеріалів покладено чотири таких гіпотези про силу пружності.

1) Всі тіла складаються з дуже великого числа дуже малих частинок (молекул), що знаходяться одна від другої на певному дуже малому віддаленні (r) (рис. 3).



Рис. 1.

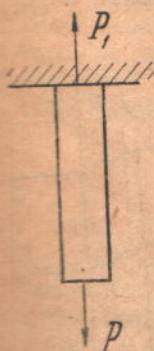


Рис. 2.

2) Між кожними двома сусідніми частинками існують одночасно й сили притягання f , і сили відпихання φ . В стані спокою ці сили рівні між собою ($f = \varphi$) й направлені по простій, що сполучає центри частинок.

3) Коли r зменшується (стиск), то і f і φ збільшуються, але φ збільшується значіш. Отже $\varphi > f$ й повстають різниці $\varphi - f$ — сила пружності, яка намагається відштовхнути частинки одна від другої.

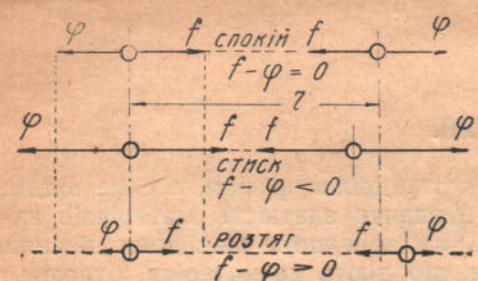


Рис. 3.

какучи, не можна. Але через те, що суть явища деформації від такої заміни не порушується, можна вжити „ніби безкрайньо малий“. Отже можна застосувати до опору матеріалів формули аналізу безкрайньо малих.

Прості деформації.

Деформацією звемо зміну форми тіла. Спочатку розглянемо такі деформації, що 1) з'являються під впливом зовнішніх, механічних сил, при чому 2) ці сили взаємно врівноважуються між собою й 3) не руйнують тіла, а тільки деформують його; якщо відняти зовнішні сили, то тіло повертається до колишньої форми. Така деформація зветься пружистою (упругою). Коли ж сили перевищують певні межі, то після відняття сил тіло не зовсім повертається до колишньої форми. Така деформація зветься залишковою (остаточною). Про це скажемо й далі.

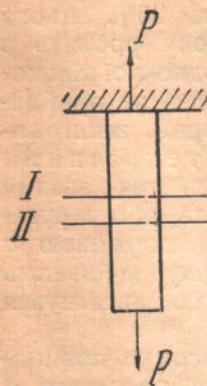


Рис. 4.

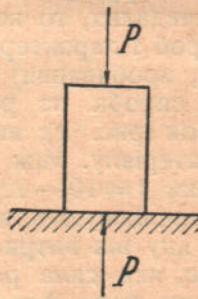


Рис. 5.

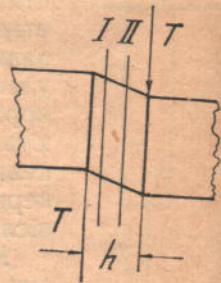


Рис. 6.

Деформації відрізняємо прості й складні.

Простих деформацій 5: 1) розтяг (розрив), 2) стиск (роздушування), 3) зсув (зріз), 4) закручування (скручування) й 5) згин (злом). Цими подвійними назвами ми хочемо відрізнати пружисті деформації від непружистих та руйнующих матеріалів.

Складна деформація — це сполучення двох простих, напр., розтяг і згин, скручування й згин і т. ін.

1. Розтяг (рис. 4) є така деформація, при якій два безкрайньо

близькі і рівнобіжні між собою перетини I та II віддаляються один від другого, залишаючись рівнобіжними.

2. Стиск (рис. 5) є така деформація, в якій два безкрайньо близькі й рівнобіжні між собою перетини наближаються один до другого, залишаючись рівнобіжними.

3) Зсув (рис. 6) є така деформація, в якій два вищезазначені перетини зсуванняться один по другому, залишаючись рівнобіжними, при чому всі частинки I відносно частинок II проходять однакові шляхи (h = дуже мала величина).

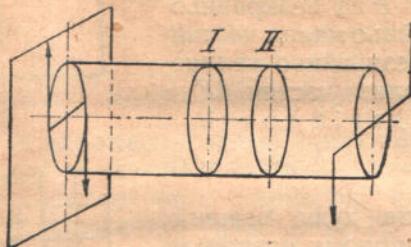


Рис. 7.

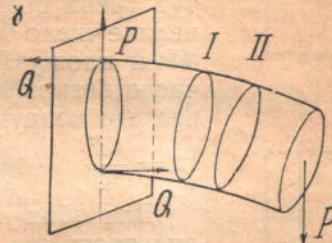


Рис. 8.

4. Закручування (рис. 7) є така деформація, в якій два вищезазначені перетини повертаються одинколо другого, залишаючись рівнобіжними, але частинки I проходять неоднакові шляхи відносно частинок II, а саме: тим більші шляхи, чим далі частинки від центру бруска.

5. Згин (рис. 8) є така деформація, в якій два вищезазначені перетини нахиляються один до другого, при чому коли, наприклад, верхні волокна бруска розтягаються, то нижні — стискаються.

Однорідність матеріалу.

Густота (плотність) матеріалу неоднакова по цілому його об'єму; але ми намагаємося зробити наші метали однакової густоти й дерево обираємо по можливості однорідної структури (без сучків). Щоб можна було вести розрахунки, приходиться припустити, що матеріали однорідні, тобто в кожному кубному сантиметрі існує однакове число частинок і на кожному кв. сантиметрові перерізу тіла поміщається однакове число частинок.

Напруга матеріалу.

Так будемо називати внутрішню силу пружності, що приходиться на 1 cm^2 площині поперечного перерізу бруска. Розмірність сили — kg , а напруги — kg/cm^2 . Отже напруга є поверхнева сила, що зв'язана з одиницею площини. Чи завжди на кожний kg см площині поперечного перерізу бруска прийдеться однакова сила? Ні, тут можуть бути два випадки.

I. Напрямок сили проходить через центр ваги площині поперечного перекрою бруска F (рис. 9).

II. Цей напрямок не проходить через центр ваги цієї площини F (рис. 10).

В першому випадку напруга n буде однакова по всіх точках площини F і на кожному сантиметрі площини F , а саме

$$n = \frac{P}{F} \text{ kg/cm}^2 \dots \dots \dots \quad (1)$$

В другому випадку (рис. 10) в точці *A* найбільша напруга, в *B* менша, в *C* ще менша. Як скорість прискореного руху в кожний момент різна, так і тут напруга по всіх точках площини *F* різна. Але як в механіці скорість в даний момент можна виразити в см/сек, так і туткажемо, що в точці *A* напруга дорівнює, припустімо, 100 кг/см², в сусідній точці *B* — 90 кг/см² і т. д. Отже тут треба розділити *P* на безкрайньо велике число безкрайньо малих частин *dP* й площину *F* на безкрайньо велике число безкрайньо малих частин *dF* і назвати напругою в даній точці.



Рис. 9.

$$n = \frac{dP}{dF} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Для обох випадків дуже важкий висновок: при рівномірному розподілі напруги

$$P = n \cdot F \text{ (сила} = \text{напруга} \times \text{площа}) \quad (3)$$

Для нерівномірного розподілу напруги

$$dP = n \cdot dF \text{ (безкрайньо мала сила} = \text{напруга} \times \text{б. м. площа}) \quad (4)$$

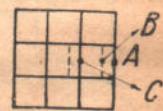


Рис. 10.

Тимчасова й дозволена напруги.

Тимчасовою напругою називають ту, при якій тіло руйнується. Середні величини тимчасових напруг, що їх виведено з багатьох спроб, наведено далі в табл. I (в кінці книги).

Дозволеною напругою називають ту, що її дозволяє закон допускати в спорудженнях і при якій можливі тільки пружисті деформації. Для цих напруг маємо таблицю II.

Коефіцієнт запасу *k*.

Так називаємо відношення тимчасової напруги до дозволеної напруги. Для розтягу

$$k = \frac{N_1}{n_1} = \frac{\text{роздрівна напруга (табл. I)}}{\text{дозволена напруга (табл. II)}} \quad \dots \dots \quad (5)$$

В таблиці II бачимо, що навантаження буває 3 родів, отже й напруга буває 3 родів, наприклад, для литого заліза напруга може бути прийнятою (на розтяг) і 900, і 600, і 300 кг/см².

I роду навантаження (спокійне), яке ніколи не змінюється, чи дуже рідко. Напр., жирандоля висить у театрі на дроті, тут можна допустити 900 кг на кожний см поперечного перерізу дроту.

II роду (від 0 до *P*), яке зникає, з'являється й знов зникає. Напр., у ланцюгу, що натягається вантажом *P*, потім „відпочиває“ й знову натягається, можна допустити тільки 600 кг/см².

III роду (від —*P* до +*P*), яке від розтягу переходить у стиск, потім знову в розтяг. Напр., шток парової машини; в ньому можна допустити тільки 300 кг/см².

РОЗТЯГ.

Міра деформації й Гуків закон.

Витягуючись вздовж себе, брусков стискається поперек себе (рис. 11). Величину $\lambda_1 = l_1 - l$ називають абсолютне подовження здовжнення, а величину $\lambda_1' = a - a_1$ — абсолютне поперечне скорочення.

Розтягом займався Гук і тому Гуковим законом називають таку формулу:

$$\lambda_1 = \frac{Pl}{FE} = \frac{\text{сила (кг)} \times \text{довжина бруска (см)}}{\text{площа попер. перекр. (см}^2) \times \text{коєфіцієнт пружності}} \quad (6)$$

тобто: здовжнення прямо пропорційно силі й довжні бруска й обернено пропорційно площи поперечного перекрою й коефіцієнтів пружності (див. табл. I).

Величина абсолютних деформацій не характеризує степеня розтягу. Через це вводимо відносне подовжене здовжнення:

$$\varepsilon_1 = \frac{\lambda_1}{l} \quad (7)$$

Її відносне поперечне скорочення:

$$\varepsilon_1' = \frac{\lambda_1'}{a} \quad (8)$$

Каньяр де-Латур практично, а Пуасон теоретично довели, що відношення ε_1' до ε_1 є постійне для кожного матеріалу число, яке звати Пуасоновою постійною, σ ; вона менш за 0,5.

$$\sigma = \frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_1} < 0,5 \quad (\text{для заліза } \sigma = 0,25) \quad (9)$$

Отже відносне поперечне скорочення приблизно в чотири рази менш за відносне подовжене здовжнення:

$$\varepsilon_1' = 0,25 \cdot \varepsilon_1$$

Підставляючи до формулі Гука $n_1 = \frac{P}{F}$ та $\frac{\lambda_1}{l} = \varepsilon_1$, приведемо його до такої форми

$$n_1 = E \cdot \varepsilon_1 \quad (10)$$

тобто напруга розтягу = коефіцієнтів пружності, помноженому на відносне подовжене здовжнення. Щоб брусков розрахувати на розтяг, вживаємо рахункове рівнання:

$$n_1 = \frac{P}{F} \leqslant \text{дозволеної в табл. II} \quad (11)$$

Діяграма розриву бруска.

Візьмімо залізний брусков, виточений як на рис. 1, нанесімо керном точки через 1 см, відполіруймо поверхню бруска й будьмо розтягти його на розривному пресі. Спочатку брусков витягнеться, по-

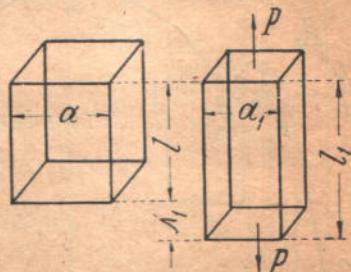


Рис. 11.

тім в якомусь місці зробиться матовим, з'явиться вузьке місце, так звана шийка й по ній бруск розірветься на дві частини. Спеціальний прилад нарисує нам криву, що показує, яке було здовжння бруска й при якій сили. Цю діяграму бачимо на рис. 12; по осі X показується λ , по осі Y — сила P .

1. Поки сила збільшується від 0 до P_1 , здовжння прямо пропорційне силі (Гуків закон), а напруга росте від $n_1 = 0$ до $n_1 = \frac{P_1}{F}$. Ця напруга, до якої спостерігаємо пропорційність між силою та здовжненням, наз. границя пропорційності.

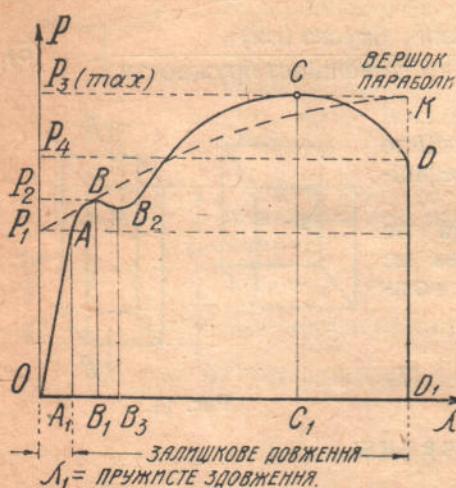


Рис. 12.

(непропорційно силі) й нарешті якесь місце на бруску робиться матовим й там утворюється шийка. Тоді сила вже зменшується, бо ж площа бруска зменшується. Отже CC_1 = розривна сила, а $\frac{P_3}{F} =$ розривна (тимчасова) напруга.

4. Далі бруск рветься й сила в момент розриву буде $P_4 = DD_1$, а напруга в момент розриву $= \frac{P_4}{F_1}$, де F_1 — площа поперечного перекрою шийки.

Отже на діяgramі:

Точки	Сили	Напруги	Назви напруг
A	AA_1	$\frac{AA_1}{F}$	Границя пропорційності
B	BB_1	$\frac{BB_1}{F}$	" плинності
C	CC_1	$\frac{CC_1}{F}$	Тимчасова напруга
D	DD_1	$\frac{DD_1}{F_1}$	Напруга в момент розриву

$$\text{Робота розриву} = \text{пл. } OABCDD_1 = OD_1 \cdot AA_1 + \frac{2}{3} OD_1 (CC_1 - AA_1) = \\ = \frac{1}{3} OD_1 (AA_1 + 2CC_1) = \frac{1}{3} \lambda_{\max} (P_1 + 2P_{\max})$$

2. Коли сила росте від P_1 до P_2 , то здовжння непропорційне силі й коли сила стане P_2 , а напруга $\frac{P_2}{F}$, то олівець йде рівнобіжно осі X , тобто здовжння росте, а сила не змінюється. Матеріал, як кажуть, „тече“ й буває, що олівець і опуститься до B_2 .

Таку напругу $\frac{P_2}{F}$ називають границею плинності (текучості). Тут $\frac{BB_1}{F} =$ верхня границя плинності, а $\frac{B_2B_3}{F} =$ нижня границя плинності.

3. Коли збільшимо силу від P_2 до P_3 , то здовжння знову росте (непропорційно силі) й нарешті якесь місце на бруску робиться матовим й там утворюється шийка. Тоді сила вже зменшується, бо ж площа бруска зменшується. Отже CC_1 = розривна сила, а $\frac{P_3}{F} =$ розривна (тимчасова) напруга.

Вплив власної ваги бруска.

До цього ми зневажали власною вагою бруска; розгляньмо тепер напругу від власної ваги. В нижньому перетині бруска

$$n_1 = \frac{P}{F} \quad (\text{рис. 13}).$$

А в верхньому перекрою напруга, очевидно, буде більша, бо пасивна сила P_1 мусить урівноважити не тільки зовнішню силу P , а й власну вагу бруска P_0 . Хай γ — вага одиниці об'єму, F — площа поперечного перекрою й l — довжина бруска. Тоді вага бруска $P_0 = \gamma l F$. Напруга в верхньому перекрою від власної ваги буде

$$n_0 = \frac{\gamma l F}{F} = \gamma l.$$

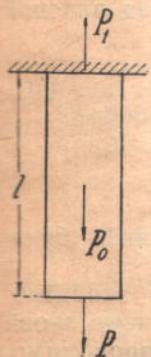


Рис. 13.

Напругу від власної ваги й від зовнішньої сили P визначмо R

$$R = n_1 + n_0 = \frac{P}{F} + \gamma l.$$

Звідсіль одержимо потрібну величину площи F :

$$F = \frac{P}{R - \gamma l} \quad \dots \dots \dots \quad (12)$$

Знайдемо тепер напругу в довільному перекрою бруска на віддаленні $= x$ від низу (рис. 14). В цьому перекрою AB чинять дві сили: 1) зовнішня сила P й 2) власна вага частини бруска, що лежить нижче AB , а саме $P_x = \gamma x F$. Результативна напруга, яку визначмо R , буде

$$R = \frac{P}{F} + \frac{\gamma x F}{F} = \frac{P}{F} + \gamma x;$$

звідсіль

$$F = \frac{P}{R - \gamma x} \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

Здовженння бруска від власної ваги.

Через те, що напруга буде неоднакова по всіх перекроях бруска, й здовженння його частин буде неоднакове. Беремо довільний x , проводимо AB (рис. 14), даемо x безкрайньо малий приріст dx . Розгляньмо здовженння безкрайньо малого брускочка, довжиною $= dx$, що його заштриховано. Під впливом сили P_x він здовжиться на безкрайньо малу величину $= d\lambda$. За Гуковим законом:

$$d\lambda = \frac{P_x \cdot dx}{F \cdot E} = \frac{\gamma x F dx}{F \cdot E} = \frac{\gamma}{E} x dx.$$

Здовженння цілого бруска (від власної ваги)

$$\lambda_0 = \int_0^l \frac{\gamma}{E} x dx = \frac{\gamma}{E} \int_0^l x dx = \frac{\gamma}{E} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{\gamma l^2}{2E} \quad \dots \dots \quad (14)$$

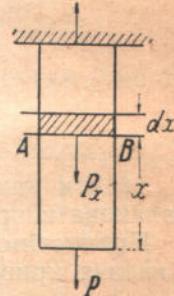


Рис. 14.

Коли б повну власну вагу цілого бруска $P_0 = \gamma \cdot F \cdot l$ прикласти на кінці його внизу, то здовження було б

$$\lambda_0' = \frac{P_0 l}{E F} = \frac{\gamma F l \cdot l}{E F} = \frac{\gamma l^2}{E} \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

очевидно, що $\lambda_0 = \frac{1}{2} \lambda_0'$, тобто дійсне здовження бруска від власної ваги = половині того здовження, яке зробила б власна вага P_0 , прикладена до нижнього кінця бруска.

Здовження бруска (рис. 14) від зовнішньої сили P від власної ваги P_0 разом буде:

$$\lambda_1 + \lambda_0 = \frac{Pl}{FE} + \frac{P_0 l}{2FE} = \frac{(2P + P_0)l}{2FE} \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

Бруск з рівним опором на розтяг.

Знайти таку форму бруска, щоб по всіх його перетинах була однакова напруга $= R$ від власної ваги.

Припустімо, що бруск має потрібну форму (рис. 15) й знайдімо рівнання кривої AB . Беремо довільний x , проводимо CD , даемо x -ові

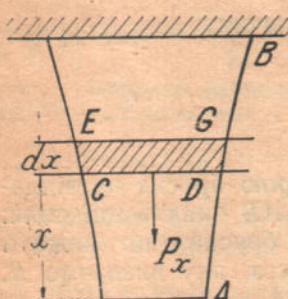


Рис. 15.

безкрайньо малий прит $= dx$, проводимо EG . Нехай перетин по iCD має площину $= F$, тоді перетин по EG має площину $= F + dF$. Вага частини від A до CD нехай буде $= P_x$. Сила = напружені помножені на площину; отже для перетину CD :

$$P_x = R \cdot F;$$

для перетину EG :

$$P_x + \gamma F dx = R(F + dF),$$

віднімаючи:

$$\gamma F dx = R dF,$$

або

$$\frac{dF}{F} = \frac{\gamma}{R} dx.$$

Змінні розділено можна інтегрувати від 0 до x :

$$\ln F - \ln F_0 = \frac{\gamma x}{R}$$

або

$$\ln \frac{F}{F_0} = \frac{\gamma x}{R},$$

або

$$\frac{F}{F_0} = e^{\frac{\gamma x}{R}}$$

Звідсіль знаходимо довільний перетин:

$$F = F_0 \cdot e^{\frac{\gamma x}{R}} \quad \dots \dots \dots \quad (17)$$

Ступенчастий брускок.

Виготовити брускок такої форми, як тільки що знайдено, неможливо якщо l — велике число; а якщо l — мале, то в цьому нема потреби. Отже для глибоких копалень вживають ступенчастий брускок (рис. 16).

Нехай в перетинах : 1, 2, 3 ... n , напруга однакова.

Тоді

$$\begin{aligned} P + P_1 &= RF_1 && \text{тут } P_1 \text{ — вага 1 нижньої ланки,} \\ P + P_2 &= RF_2 && P_2 \text{ — " 2 нижніх ланок,} \\ P + P_3 &= RF_3 && P_3 \text{ — " 3 " " } \\ \cdot &\cdot &\cdot &\cdot \\ P + P_n &= RF_n && P_n \text{ — вага цілого бруска.} \end{aligned}$$

Застосовуючи формулу (11), що її ми вивели для бруска (рис. 13), послідовно маємо;

$$F_1 = \frac{P}{R - \gamma l_1}$$

$$F_2 = \frac{RF_1}{R - \gamma l_2}$$

$$F_3 = \frac{RF_2}{R - \gamma l_3}$$

• • • •

$$F_n = \frac{RF_{n-1}}{R - \gamma l_n}$$

Перемноженням знаходимо

$$= F_n (R - \gamma l_1) (R - \gamma l_2) \dots (R - \gamma l_n)$$

Рис. 16.

Якщо $l_1 = l_2 = l_3 = \dots = \frac{L}{m}$, де L — повна довжина бруска, а m — число ланок, то, поділяючи числівника й знаменника на R^n , знайдемо:

$$F_n = \frac{P}{R \left(1 - \frac{L}{m} \frac{\gamma}{R} \right)^n}, \quad \dots \dots \dots \quad (18)$$

тут m — число ланок = постійне, n — номер ланки = змінне число.

Тонкостінні посудини.

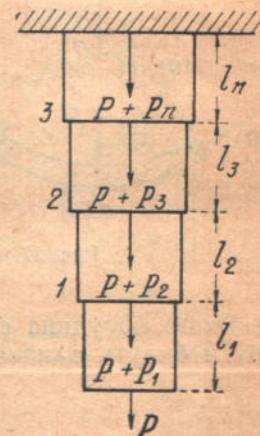
З кривої поверхні посудини виділяємо елемент з площею $ds_1 \cdot ds_2$. Якщо в посудині тиск = q кг/см², то навантаження на цей елемент буде (рис. 17)

$$P = q \cdot ds_1 \cdot ds_2.$$

Товщина стінки = δ , радіуси кривини нехай r_1 та r_2 , напруги в стінках нехай n_1 та n_1' . Елемент розтягають сили:

$$P_1 = \delta \cdot ds_2 \cdot n_1$$

$$P_2 = \delta \cdot ds_1 \cdot n_1'$$



Проекції цих сил на нормальню до поверхні

$$P_1 \cos(P_1 P) = P_1 \sin \alpha = \delta \cdot ds_2 \cdot n_1 \cdot \frac{ds_1}{2\rho_1};$$

аналогічно

$$P_2 \cos(P_2 P) = \delta \cdot ds_1 \cdot n_1' \cdot \frac{ds_2}{2\rho_2}.$$

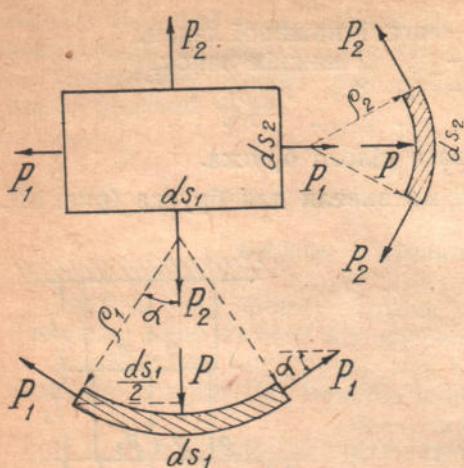


Рис. 17.

Сума проекцій двох сил P_1 та P_2 на нормальню мусить дорівнювати силі P , отже

$$\delta ds_2 n_1 \frac{ds_1}{\rho_1} + \delta ds_1 n_1' \frac{ds_2}{\rho_2} = q ds_1 ds_2.$$

Поділяючи обидві частини на $ds_1 \cdot ds_2 \cdot \delta$, знаходимо:

$$\frac{n_1}{\rho_1} + \frac{n_1'}{\rho_2} = \frac{q}{\delta} \quad \dots \dots \dots \quad (19)$$

Якщо поверхня посудини циліндрична, то $\rho_2 = s$, $\rho_1 = r$ (радіус циліндра) та рівняння (19) перетвориться в:

$$\frac{n_1}{r} = \frac{q}{\delta} \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$

Якщо посудина сферична з радіусом $= r$, то $\rho_1 = \rho_2 = r$, тоді й напруги будуть однакові: $n_1 = n_1'$ та одержимо:

$$\frac{2n_1}{r} = \frac{q}{\delta} \quad \dots \dots \dots \quad (21)$$

Товстостінні посудини.

Товсті стінки посудин розраховуємо за формулами Ляме, які тут приймімо без виводів.

Циліндр.

Нехай зовнішній радіус $= r_a$, внутрішній $= r_i$, зовнішній тиск $= p_a \text{ кг/см}^2$, внутрішній $= p_i \text{ кг/см}^2$, дозволена напруга на розтяг $= n_1 \text{ кг/см}^2$, на стиск $= n_2 \text{ кг/см}^2$. Для металів, що їх Пуасонова постійна $\sigma = 0,3$, маємо такі формули:

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{n_1 + 0,4 p_i}{n_1 - 1,3 p_i}} \quad (\text{дійсно при } n_1 > 1,3 p_i);$$

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{n_2}{n_2 - 1,7 p_a}} \quad (\text{дійсно при } n_2 > 1,7 p_a).$$

Наприклад, для чавунного циліндра преса $r_i = 18 \text{ см}$ при $p_i = 220 \text{ at}$ і $n_i = 600 \text{ кг/см}^2$ маємо:

$$r_a = 18 \sqrt{\frac{600 + 88}{600 - 286}} = 18 \cdot 1,48 = 26,6 \text{ см.}$$

Для кулі, при тих самих визначеннях

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{n_1 + 0,4 p}{n_1 - 0,65 p_i}} \quad (\text{дійсно при } n_1 > 0,65 p_i);$$

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{n_2}{n_2 - 1,05 p_a}} \quad (\text{дійсно при } n_2 > 1,05 p_a).$$

Цікаво було б застосувати ці формули для скляних посудин, але треба зауважити, що σ , n_1 , n_2 для скла ще дуже мало вивчено.

СТИСК.

Стиск — деформація обернена розтягові. Перед деформацією розміри бруска: l , a , b , після деформації розміри: l_1 , a_1 , b_1 (рис. 18). Тут такі міри деформації:

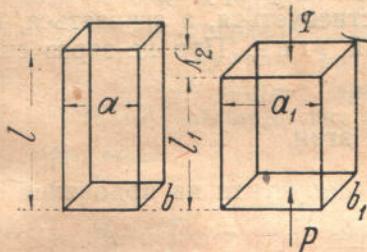


Рис. 18.

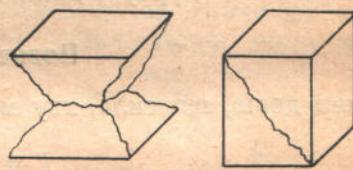


Рис. 18a.

Абсолютне подовжнє скорочення

$$\lambda_2 = l - l_1$$

Абсолютне поперечнє поширення

$$\lambda_2' = b_1 - b$$

Відносне подовжнє скорочення

$$\varepsilon_2 = \frac{\lambda_2}{l} \quad \dots \dots \dots \quad (22)$$

Відносне поперечне поширення

$$\varepsilon_2' = \frac{\lambda_2'}{b} \quad \dots \dots \dots \quad (23)$$

Розмір a скорочується в такій же мірі, як і розмір b . Відношення

$$\frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon} = \sigma$$

рівняється тій самій Пуасоновій постійній.

Напруга матеріялу на стиск:

$$n_2 = \frac{P}{F} \quad \dots \dots \dots \quad (24)$$

Гуків закон для стиску:

$$\lambda_2 = \frac{Pl}{FE'} \quad \dots \dots \dots \quad (25)$$

Сюди входить коефіцієнт пружності на стиск (див. табл. I), який для більшості матеріалів не одинаковий з E , але для заліза й сталі

$$E = E'.$$

За допомогою рівнань (22) і (24) рівнання (25) стане:

$$n_2 = E' \epsilon_2 \dots \dots \dots \dots \dots \quad (26)$$

Щоб брусковий був видержаний на стиск, треба, щоб

$$n_2 = \frac{P}{F} \leqslant \text{дозволено} \text{ в табл. II} \dots \dots \dots \quad (27)$$

Стиск, доведений до руйнації, називають роздушування чи роздріблення. Цікаво, що кубик (чи рівнобіжностінник) руйнується по діагональним площинам (див. рис. 18a). Це показує й далі пояснюється теоретично, що матеріал руйнують, головно, дотичні сили.

Вище наведені формули ми застосовуємо тільки при умові, що n_2 не перевищує граници пропорційності (приблизно $1/2$ тимчасової напруги, що показано в табл. I) і при тому для таких брусків, у яких

$$l \leqslant 10a \text{ (приблизно)} \dots \dots \dots \quad (28)$$

тобто довжина l не перевищує десятикратний поперечний розмір (бік квадрата, менший бік прямокутника, діаметр круга).

Якщо $l > 10a$, то брусковий вже не стискується, а згиняється, і така деформація називається подовжній згин. Про це зараз скажемо коротко, в кінці курсу — докладніше.

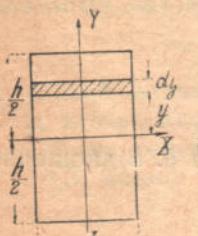
Подовжній згин.

Ейлер довів, що сила, яку можна допустити на подовжній згин

$$P = \frac{\pi^2 E' I_{\min}}{k \cdot l^2}, \dots \dots \dots \quad (29)$$

тут P — подовжня сила (кг), E' — коефіцієнт пружності на стиск ($\text{кг}/\text{см}^2$, див. табл. I), k — коефіцієнт запасу (для заліза $k=5$, для чаюни $k=7$, для дерева $k=10$), l — довжина бруска (см) й нарешті I_{\min} — найменший екваторіальний момент інерції площини F поперечного перекрою бруска. Тут скажемо про момент інерції тільки те, що це інтеграл, що залежить від форми площини F ; його обчислюти будемо за допомогою означеного інтеграла.

Для прямокутника (рис. 19)



$$I_x = \int y^2 dF = \int y^2 b dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12} \dots \dots \dots \quad (30)$$

аналогічно:

$$I_y = \int x^2 dF = \int x^2 h dx = h \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x^2 dx = \frac{hb^3}{12} \dots \dots \dots \quad (31)$$

Рис. 19.

Якщо $h > b$, то $I_x > I_y$. Отже I_{\min} для прямокутного перекрою буде:

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

ми повинні цю величину підставляти в формулу Ейлера, через те, що брусковий під даною подовжньою силою буде згинатися в той бік, куди легше йому гнутися, як показано на рис. 20. Щоб не перебільшити допускну силу P і не зламати брусковий, ми для кожного перекрою повинні знати I_{\min} .

Для бруска круглого перекрою маємо

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64} \quad \dots \dots \dots \quad (32)$$

бо круг — фігура симетральна коло обох осей.

ЛЯБОРАТОРНІ ДОСЛІДИ.

Вплив часу на здовжнення.

Див. Тимошенко, курс С. М.

Якщо брусков надовго залишити в розтягнутому стані, то здовжнення росте, хоч сила й не росте. Це явище наз. пружисте післядійство. Якщо при цьому напруга перевищує границю пропорційності, то це явище ще більш помітно й легко спостерігається звичайним люстром приладом, особливо в перші хвилини. Лешательє розтягав цинкові бруски й знайшов: якщо брусков розірвати впродовж одної хвилини, то тимчасова напруга — 2400 кг/см², а впродовж години — 1150 кг/см². Для залізного дроту (рис. 21), якщо розрів триває 5 хвилин, маємо діяграму $OABC$, а якщо $3\frac{1}{2}$ доби, то діяграму OAB_1C . Дріт (рис. 22) було розтягнуто за критичну точку безперервним розтягом; одержано діяграму $OACD$. Вдруге дріт розтягнуто за критичну точку, тобто до точки C й залишено так на $45\frac{1}{2}$ годин. Коли знову збіль-



Рис. 20.

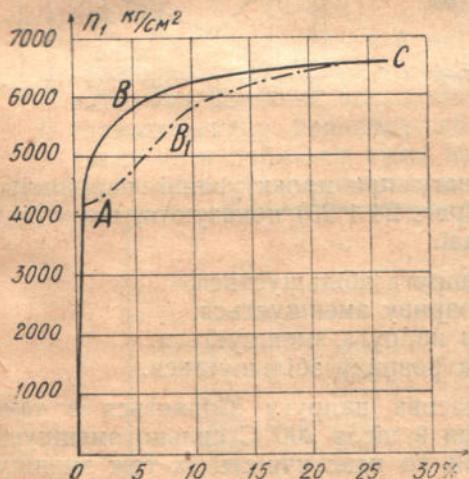


Рис. 21.

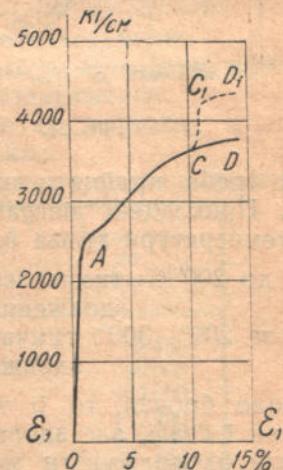


Рис. 22.

шено навантаження, то одержано діяграму CC_1D_1 , тобто сила зростала, а брусков майже не здовжувався; це показує, що він зробився жорстким, як кажуть слюсарі, „наклепався”.

Підвищення критичної точки.

Див. Тимошенко, курс С. М.

Якщо брусков, розтягнутий до точки C (рис. 23), розвантажити, то одержимо діяграму CM , ця лінія буде рівнобіжна AO ; це визначає, що брусков скоротиться на величину пружистого здовжнення. Якщо тепер дати брускові відпочити (місяць) і знову почати збільшувати силу, то одержимо майже присту MC_1 , тоб-

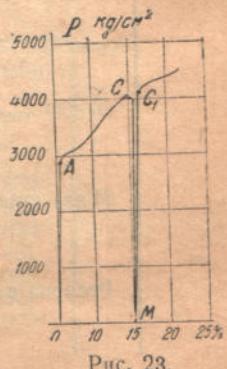


Рис. 23.

то бруск знову розтягається за Гуковим законом і відхиляється від нього в точці C_1 , яка значно вище колишньої критичної точки A . Практика користується з цього так: дріт для телефонних проводів сильно витягають перед проведенням; паси теж витягають силою більшою за ту, яка буде його розтягати під час роботи. Цікаво, що такий „наклепаний“ метал можна повернути до колишнього м'якшого стану: треба тільки його нагріти до 700°C й поволі охолодити.

Вплив температури.

Див. Тимошенко, курс С. М.

Значне підвищення температури металу зменшує тимчасову його напругу та його пружисте здовжнення, отже матеріал робиться не пластичним.

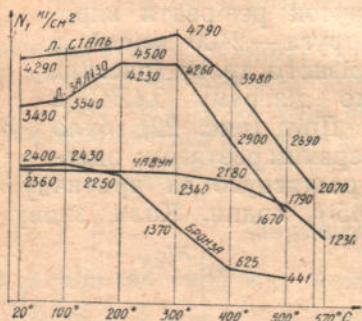


Рис. 24.

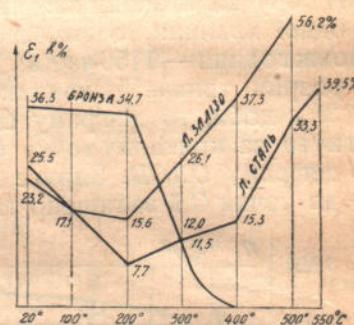


Рис. 25.

Це треба прийняти на увагу при проєктуванні паровиків і двигунів. Прикладені діаграми (рис. 24 і 25) показують, що з підвищенням температури заліза й сталі:

- 1) до 200°C : тимчасова напруга збільшується,
здовжнення розриву зменшується;
- 2) за $200^{\circ}-300^{\circ}$: тимчасова напруга зменшується,
здовжнення розриву збільшується.

Щодо бронзи, то її тимчасова напруга змінюється в такому ж роді, як і сталі, але здовжнення й після 200°C сильно зменшується.

Коли охолоджувати метали, то пластичність їх теж зменшується. Результати декількох спроб дано в таблиці.

М е т а л	Температ. $^{\circ}\text{C}$	Тимчасова напруга kg/cm^2	Здовжен- ня %	Звужен- ня перетину %
Залізо	+ 20	3970	27,7	39,9
	- 20	4170	26,2	34,9
	- 80	4270	23,8	32,6
М'яка сталь . . .	+ 20	4040	32,8	62,7
	- 20	4360	33,3	61,6
	- 80	4520	23,4	61,9
Ресорна сталь . .	+ 20	7720	16,0	28,8
	- 20	8420	14,0	24,1
	- 80	8440	10,9	23,8

Втома металів.

Див. Тимошенко, курс С. М.

Від змінного навантаження, що повторюється велике число разів, матеріал втомляється й руйнується при невеликій напрузі. Якщо взяти бруск, що вже втомився, для іспиту його на розрив, то одержимо несподівано гарні результати, наприклад, для литого заліза тимчасова напруга — 4000 kg/cm^2 й такі ж результати дасть бруск, що втомився. Коли ж він від томи зламається, то ми бачимо ніби кристалічну структуру й обрахунок нам покаже, що напруга під час роботи бруска не перевищувала, скажімо, 2000 kg/cm^2 . Це показує, що це явище дуже складне й ми вивчаємо його по всіх лабораторіях спеціальними машинами.

Велер (1860—1870) робив спроби, навантажуючи бруск змінною силою, що викликала напруги: n_1 на розтяг і n_2 — на стиск, і прийшов до висновку, що:

a) матеріал втомлюється й руйнується:

1) при n_1 менш тимчасової й навіть менш границі пропорційності, якщо зміна n_1 на n_2 робиться досить велике число разів: від 50.000 до 19.000.000.

2) число змін, після якого руйнується бруск, залежить не тільки від абсолютної величини n_1 чи n_2 , а й від різниці $n_1 - n_2$, або від $n_1 - n_1'$, якщо напруга одного знаку.

3) чим більша ця різниця, тим швидче втомлюється й ламається бруск.

b) матеріал не втомлюється й не руйнується, коли:

1) знайдемо таку граничну різницю $n_1 - n_2$, при якій бруск витримує довільне число змін навантаження;

2) знайдемо таку граничну абсолютну величину n_1 , при якій число змін робиться дуже великим.

Таблиця наводить чисельні величини n_1 , n_2 та число змін до руйнації.

n_1 kg/cm^2	n_2 kg/cm^2	$n_1 - n_2$ kg/cm^2	Число змін до руйнації
+ 2400	- 2400	4800	56.430
2250	2250	4500	99.000
2100	2100	4200	183.000
1940	1940	3880	479.490
1810	1810	3620	909.840
1650	1650	3300	3.632.588
1510	1510	3020	4.917.992
1350	1350	2700	19.186.791
1200	1200	2400	182.250.000 ¹

Якщо напруга одного знаку (див. таблицю далі), то бруск руйнується вже більшій напрузі:

n_1 kg/cm^2	n_1' kg/cm^2	$n_1 - n_1'$ kg/cm^2	Число змін до руйнації
+ 3600	0	3600	800
+ 3300	0	3300	106.910
3000	0	3000	340.853
2700	0	2700	409.481
2400	0	2400	10.141.645
3300	+ 1500	1800	2.373.424
3300	+ 1800	1500	4.000.000 ²

¹ Цей бруск не зламався. ² Цей бруск не зламався.

Отже можна прийти до висновку, що при $N = 3600$ гранична різниця напруг буде $2400 \text{ кг}/\text{см}^2$.

Коли в Києві трапилася трамвайна катастрофа, то було зроблено іспит 2 брусків, виточених з шматка розірваної гальмової тяги. Знайдено $N_1 = 3780$ й $N_2 = 3750 \text{ кг}/\text{см}^2$; для зварочного заліза цілком достатня й нормальна напруга. А зламалася тяга при напрузі $n_1 = \approx 1200 \text{ кг}/\text{см}^2$, а може й при меншій; це вказувало на втому металу.

Дія раптового навантаження.

Розтягнемо брусок силою P , підтримуючи вантаж рукою (рис. 26). Вантаж буде поволі опускатися, поки сума внутрішніх сил пружності не зробиться рівною P , що витягне брусок на величину λ_1 .

Робота зовнішньої сили тут поділиться пополовині, а саме: $\frac{P\lambda_1}{2}$ буде

врівноважено роботою внутрішніх сил, а $\frac{P\lambda_1}{2}$ врівноважить

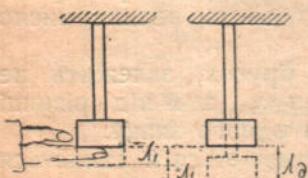


Рис. 26.

Рис. 27.

рука. Такий розтяг зветься статичним. На пресі в лабораторії ми теж розтягаємо бруски статично. Тепер дозволимо вантажеві падати, раптово розтягаючи брусок; тоді P перерозтягне брусок на таку саму величину λ_1 й здовжження бруска буде

$$\lambda_d = 2\lambda_1 \dots \dots \dots \quad (33)$$

тобто динамічне здовжження вдвічі більше за статичне. Далі ми це доведемо теоретично, а зараз зауважмо, що раптово дієва сила викликає напруги вдвічі більші, як спокійна. Отже для раптового навантаження дозволені напруги треба зменшити вдвічі.

Ясно, що для статичного навантаження робота внутрішніх сил буде

$$V = \frac{P\lambda_1}{2} \dots \dots \dots \quad (34)$$

МЕТОД ПЕРЕТИНУ.

Для того, щоб знайти внутрішні сили й напруги, перетинаємо пружисте тіло, що перебуває в стані напруженості рівноваги якоюсь пло-

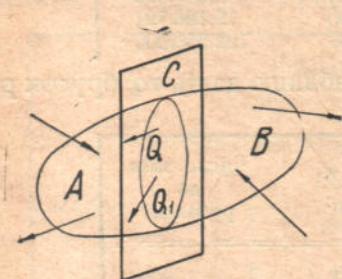


Рис. 28.

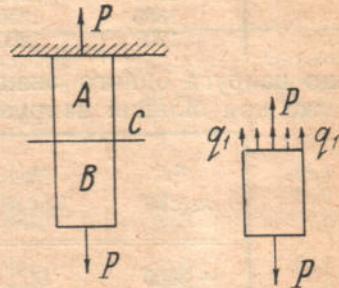


Рис. 29.

щюю C (рис. 28) й відкидаємо, припустімо, праву частину B . Тоді для рівноваги лівої частини A треба приклсти до різних точок (чи до одної точки) перетину сили (чи силу) Q такі, щоб вони замінили собою дію частини B на частину A . З рівнань рівноваги, що їх дає

статика, знайдемо величину й напрямок сил Q . Наприклад, перетинаємо розтягнутий брусков площею C й відкидаємо верхню частину (рис. 29). Щоб частина B була в рівновазі до перетину, треба прикласти безліч безкрайньо малих сил q_1 , які повинні замінити дію відкинутої частини A на частину B . Ясно, що сума всіх сил q_1 повинна врівноважити силу P . Отже

$$\sum q_1 = P \dots \dots \dots \quad (35)$$

Другий приклад. Перетинаємо міст (на рис. 30 нарисовано одну ферму) й відкидаємо праву частину (рис. 31). Сили Q_1 , Q_2 , Q_3 повинні бути такі, щоб частина A стояла в повітрі, не падаючи в воду.

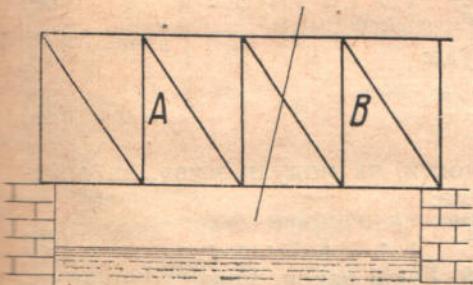


Рис. 30.

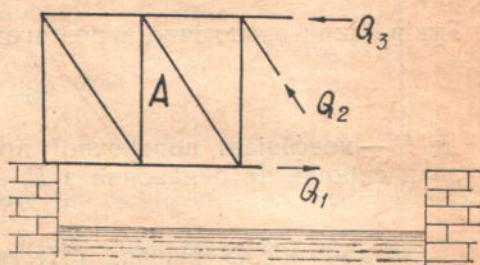


Рис. 31.

Ясно, що сили Q_1 , Q_2 , Q_3 будуть зовнішні для частини A й вони повинні замінити собою ті внутрішні сили, що були в перерізаних брусках, і їхня сумісна дія замінить дію відкинутої частини B на частину A . В статці показано, як знайти сили Q .

Нормальні й дотичні сили.

Досі ми розглядали такі сили й напруги, що діють перпендикулярно до площини F поперечного перекрою бруска. Ця площа F була перпендикулярна до осі бруска, отже — ті сили були спрощені по осі бруска.

Сили, що діють перпендикулярно до якоїсь площини, називають **нормальними** (до неї), а сили, що лежать в тій площині, на яку діють, називають **дотичними** (тангенціальними) силами.

Отже бувають і нормальні, і дотичні напруги.

ЗСУВ.

До зрізу деформація буде така (рис. 32).

Вона полягає в тому, що прямокутний рівнобіжностінник, що

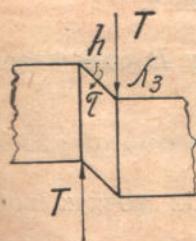


Рис. 32.

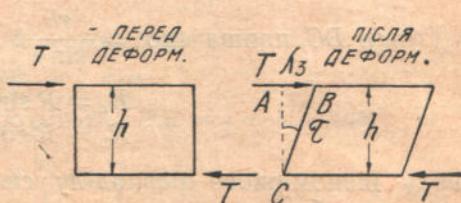


Рис. 33.

баго виріжемо зі зсунутого матеріалу, робиться скосокутним, чи в площині: прямокутник робиться рівнобіжником (рис. 33). Analogічно

з розтягом тут переміщення крайньої точки бруска назвімо абсолютною зсувом $\lambda_3 = AB$. Замість довжини бруска l , тут ввійде h — дуже мала відстань між зрізними силами. Отже

$$\text{абсолютний зсув} = AB = \lambda_3 \dots \dots \dots \quad (36)$$

$$\text{відносний зсув } \varepsilon_3 = \frac{AB}{AC} = \frac{\lambda_3}{h} = \tan \tau = \tau \dots \dots \dots \quad (37)$$

Через малість кута зсуву τ , ми приймаємо $\tan \tau'$ його за самий кут Напруга на зсув буде:

$$t_3 = \frac{T}{F} \dots \dots \dots \dots \dots \quad (38)$$

Гуків закон аналогічно з розтягом буде:

$$\lambda_3 = \frac{T \cdot h}{F \cdot G} \dots \dots \dots \dots \dots \quad (39)$$

де G — коефіцієнт поперечної пружності, чи модуль зсуву, як показали спроби, не одинаковий з E , а саме:

$$G = 0,4E \dots \dots \dots \dots \dots \quad (40)$$

За допомогою рівнань (37) та (38) Гуків закон можемо перетворити так:

$$t_3 = G\tau, \text{ або } G \cdot \varepsilon_3 \dots \dots \dots \dots \dots \quad (41)$$

Залежність між нормальними та дотичними напругами.

Коли брускок розтягається, то на площах перетину, що перпендикулярні до осі бруска, повстають нормальні напруги; але на похилих до осі бруска площах повстають і нормальні й дотичні напруги й прямокутний рівнобіжностінник $ABCD$ (рис. 34), вирізаний навкіс, після деформації зробиться скосокутним. Отже розтяг є завжди в супроводі зсуву й навпаки. Розглянемо брускок з площею $F = a \cdot c$, розтягнутий силою P . Виріжмо з нього прямокутний рівнобіжностінник $ABCD$; до стінки AB , площа якої $= \frac{rc}{\cos \alpha}$, буде прикладена сила Q (метод перетину). Розкладаємо силу Q на:

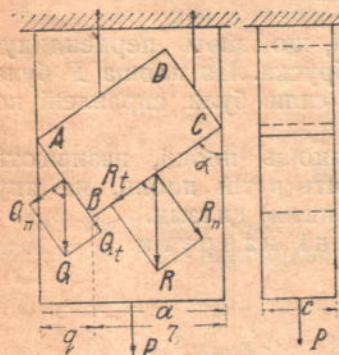


Рис. 34.

$$Q_n = Q \cos \alpha$$

$$Q_t = Q \sin \alpha.$$

До стінки BC , площа якої $= \frac{rc}{\sin \alpha}$, прикладену R розкладаємо

$$R_n = R \sin \alpha$$

$$R_t = R \cos \alpha.$$

З приводу рівномірного розподілу сили P по всіх точках поперечного перетину бруска:

$$1) \qquad Q + R = P$$

$$2) \qquad n_1 = \frac{P}{ac} = \frac{Q}{rc} = \frac{R}{rc}$$

Щоб вивести величину нормальних та дотичних напруг на похилих площах AB й BC , складемо таблицю:

С и л и	Площі відповід- ні силам	Н а п р у г и	В и с н о в к и	
			При всяко- му α	При $\alpha = 45^\circ$
$Q_n = Q \cos \alpha$	$\left\{ \begin{array}{l} qe \\ \cos \alpha \end{array} \right.$	$n_1' = \frac{Q \cos^2 \alpha}{qe} = n_1 \cos^2 \alpha$	$n_1' + n_1'' = n_1$	$n_1'' = \frac{n_1}{2}$
$Q_t = Q \sin \alpha$		$t_3' = \frac{Q \sin \alpha \cos \alpha}{qe} = n_1 \sin \alpha \cos \alpha$		
$R_n = R \sin \alpha$	$\left\{ \begin{array}{l} rc \\ \sin \alpha \end{array} \right.$	$n_1'' = \frac{R \sin^2 \alpha}{rc} = n_1 \sin^2 \alpha$	$t_8' = t_3''$	$t_3' = t_3'' = \frac{n_1}{2}$
$R_t = R \cos \alpha$		$t_3'' = \frac{R \sin \alpha \cos \alpha}{rc} = n_1 \sin \alpha \cos \alpha$		

Висновки:

1) нормальні напруги на двох взаємно перпендикулярних площах в сумі дають $n_1 = \frac{P}{F}$; якщо ці площини під кутом $= 45^\circ$ до осі бруска, то $n_1' = n_1'' = \frac{n_1}{2}$

2) дотичні напруги на двох взаємно перпендикулярних площах рівні при всікому α (взаємна подвійність зсуву), а при $\alpha = 45$ маємо

$$t_3' = t_3'' = \frac{n_1}{2}.$$

Це буде **максимум дотичної напруги**, бо

$$t_3 = \frac{n_1}{2} \sin 2x$$

досягає max., коли $\sin 2\alpha$ досягає max., тобто коли
 $\sin 2\alpha = 1; 2\alpha = 90^\circ; \alpha = 45^\circ.$

Залежність між G та E.

Виріжмо з того самого розтягнутого бруска кубний сантиметр (рис. 35). Кожний подовжній руб цього кубика витягнеться; отже

$$BB_1 = 1 + \lambda_1; \quad \varepsilon_1 = \frac{\lambda_1}{l} = \frac{\lambda_1}{1} = \lambda_1,$$

так що в даному разі $\varepsilon_1 = \lambda_1$ й можна написати

$$BB_1 = 1 + \epsilon_1.$$

Кожий поперечний руб скоротиться: $BM = 1 - \lambda_1'$, але

$$\varepsilon_1' = \frac{\lambda_1'}{l} = \frac{\lambda_1'}{1} = \lambda_1';$$

тоже в даному разі

$BM = 1 - \varepsilon_1' = 1 - \alpha\varepsilon_1$, (див. формулу 9);

тут $\alpha =$ Пуасонова постійна $= \infty^{1/4}$.

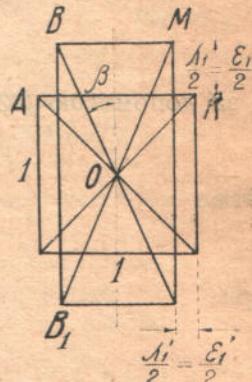


Рис. 35

Зсув полягає в тому, що прямий кут AOK робиться гострим $= BOM$. Отже $\angle AOB = \frac{\varepsilon_3}{2} = \frac{\tau}{2}$ = половина відносного зсуву.

Далі

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{\varepsilon_3}{2} &= \frac{\varepsilon_3}{2} = \operatorname{tg}(45 - \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \beta} = \frac{1 - \frac{1 - \sigma \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1}}{1 + \frac{1 - \sigma \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1}} = \\ &= \frac{1 + \varepsilon_1 - 1 + \sigma \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1 + 1 - \sigma \varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1(1 + \sigma)}{2 + \varepsilon_1(1 - \sigma)}.\end{aligned}$$

Величина $\varepsilon_1(1 - \sigma)$ дуже мала в порівненні з числом 2; отже:

$$\frac{\varepsilon_3}{2} = \frac{\varepsilon_1(1 + \sigma)}{2}$$

або

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1(1 + \sigma) \quad \dots \dots \dots \quad (43)$$

Тепер згадаймо (табл. на стор. 21), що

$$t_3 = \frac{n_1}{2} \quad \dots \dots \dots \quad (44)$$

й Гуків закон (див. 41)

$$t_3 = G\varepsilon_3 \quad \dots \dots \dots \quad (45)$$

й (див. 10)

$$n_1 = E\varepsilon_1 \quad \dots \dots \dots \quad (45)$$

Підставляючи (45) до (44), маємо

$$G\varepsilon_3 = \frac{E\varepsilon_1}{2} \quad \dots \dots \dots \quad (46)$$

а за допомогою (43) знайдемо

$$G\varepsilon_1(1 + \sigma) = \frac{E\varepsilon_1}{2} \quad \dots \dots \dots \quad (47)$$

Отже

$$G = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \quad \cdot$$

при

$$\sigma = \frac{1}{4} : G = 0,4E \quad \dots \dots \dots \quad (48)$$

ЗАКРУЧУВАННЯ.

Прямий круговий циліндр з одного кінця закріплено нерухомо, з другого кінця прикладено пару сил, якої момент визначимо M_k , отже

$$M_k = Pa \quad \dots \dots \dots \quad (49)$$

Це буде активна пара, а з другого кінця — пасивна пара, якої момент мусить дорівнювати M . Наприклад:

$$Pa = Q \cdot d.$$

Творча AB (рис. 36), що була до деформації простою, зробиться гвинтовою лінією AC . Радіус BO повернеться на $\angle BOC = \varphi$, точка B пройде

дугу $BC = R \cdot \varphi$. Аналогічно з розтягом: абсолютна дуга закручування

$$BC = \lambda_4 = R\varphi \quad \dots \dots \dots \quad (49)$$

відносна дуга закручування

$$B_1C_1 = \varepsilon_4 = R\theta = \frac{\lambda_4}{l} \quad \dots \dots \quad (50)$$

Крім того тут:

абсолютний кут закручування

$$\angle BOC = \varphi = \frac{\lambda_4}{R} \quad \dots \dots \quad (51)$$

також

$$\text{відносний кут закручування } \angle B_1O_1C_1 = \theta = \frac{\varepsilon_4}{R} = \frac{\varphi}{l} \quad \dots \dots \quad (52)$$

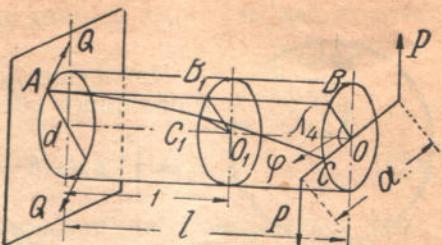


Рис. 36.

Вивід рахункового рівняння.

Розріжмо закрученій брускок площею \perp до осі й відкиньмо ліву частину (рис. 37). Дія відкинутої частини полягає в тому, що до всіх точок перетину F буде прикладено дотичні сили q на різних плечах $= r$. Рівняння рівноваги бруска дає

$$M_k = \Sigma q \cdot r \quad \dots \dots \quad (53)$$

Сила $=$ напруга \times площа, отже через t ми значимо невідому дотичну напругу на відстані $= r$ від центра круга. Це змінна величина: чим далі точка від центру, тим більша напруга.

$$\text{Отже } \frac{t}{t_4} = \frac{r}{R};$$

звідсіль

$$t = \frac{t_4}{R} r \quad \dots \dots \quad (54)$$

а тому

$$q = t \cdot dF = \frac{t_4}{R} r \cdot dF \quad \dots \dots \quad (55)$$

Підставляючи до (53), дістанемо:

$$M_k = \Sigma \frac{t_4}{R} \cdot r^2 dF = \frac{t_4}{R} \int r^2 dF \quad \dots \dots \quad (56)$$

Величину t_4 (як і R) постійну виносимо за знак інтеграла тому, що через однорідність матеріалу напруга по всіх точках поверхні циліндра буде однакова. Розгорнімо поверхню циліндра (рис. 37-а). Гвинтова лінія C_1C зробиться простою C_1C ; кожний перетин бруска зсувається відносно сусіднього на величину $= \lambda_3$; сума всіх λ_3 дає λ_4 і немає рації думати, що при однорідному матеріалі десь зсув буде більший, а десь — менший (на поверхні). Отже t_4 = пост. по всій поверхні бруска. Вона постійна й на колі, що обмежує площину F , бо всі точки кола на одинаковому віддаленні $= R$ від центра.

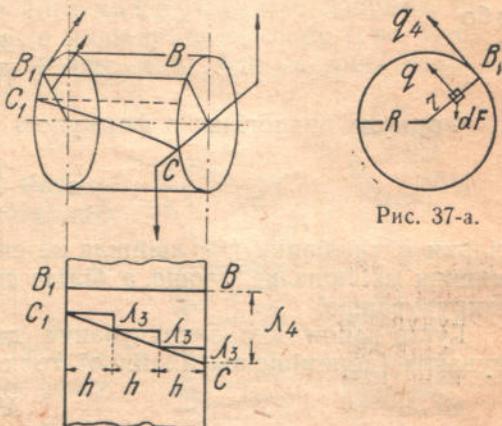


Рис. 37-а.

Рис. 37.

$\therefore \theta = \angle B_1 O_1 C_1$ (див. далі).

Інтеграл $\int r^2 dF$ чи границя суми добутків зі всіх елементів площини F та квадратів їх віддалень від точки (полюса) називається полярним моментом інерції площини F . Цей полюс завжди — початок координат O , отже

$$I_0 = \int r^2 dF \quad \dots \dots \dots \quad (57)$$



Найлегше його обчислити подвійним інтегралом в полярних координатах (рис. 38).

$$I_0 = \iint r^3 d\rho d\theta = \int_0^R r^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad \dots \dots \dots \quad (57a)$$

В рівняння (56) входить $\frac{I_0}{R}$. Визначмо цю величину:

$$W_k = \frac{I_0}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16} \quad \dots \dots \dots \quad (58)$$

і назвімо її момент опору закручуванню.

Тоді рахункове рівняння буде:

$$M_k = t_4 W_k,$$

або

$$t_4 = \frac{M_k}{W_k} \quad \dots \dots \dots \quad (59)$$

Формула аналогічна з формулою розтягу

$$n_1 = \frac{P}{F};$$

тільки в числівник (59) ввійшла не сила P , а її момент, отже і в знаменнику ввійшла не площа, а більш складна величина — момент опору закручуванню.

Гуків закон для закручування дасть λ_1 — абсолютну дугу закручування (переміщення крайньої точки бруска)

$$\lambda_1 = \frac{M_k l}{W_k G} \quad \dots \dots \dots \quad (60)$$

За допомогою формул (59) та (50) перетворимо:

$$t_4 = G \varepsilon_1 \quad \dots \dots \dots \quad (61)$$

а поділяючи обидві частини (60) на R , знайдемо абсолютний кут закручування:

$$\varphi = \frac{M_k l}{R \cdot W_k G} = \frac{M_k l}{I_0 G} \quad \dots \dots \dots \quad (62)$$

РОБОТА ДЕФОРМАЦІЇ

Робота внутрішніх сил розтягу, що утворюється роботою зовнішньої сили на переміщенні $= \lambda_1$, буде

$$V_1 = \frac{P \lambda_1}{2} = \frac{P^2 l}{2 F E} = \frac{\lambda_1^2 F E}{2 l} \quad \dots \dots \dots \quad (63)$$

Те ж — для стиску, де сила $= P$, а переміщення $= \lambda_2$

$$V_2 = \frac{P \lambda_2}{2} = \frac{P^2 l}{2 F E'} = \frac{\lambda_2^2 F E'}{2 l} \quad \dots \dots \dots \quad (64)$$

Те ж — для зсуву, де сила $= T_1$, а переміщення $= \lambda_3$

$$V_3 = \frac{T\lambda_3}{2} = \frac{T^2 h}{2FG} = \frac{\lambda_3^2 FG}{2h} \quad \dots \dots \dots \quad (65)$$

Закручування утворюється парою, якої момент $M_k = Pa$, але можна звести таку приведену силу P_0 , щоб

$$M_k = P_0 \cdot R$$

або

$$P_0 = \frac{M_k}{R} \quad \dots \dots \dots \quad (66)$$

Тоді робота внутрішніх сил закручування, що утворюється приведеною силою P_0 на переміщенні $= \lambda_4$

$$V_4 = \frac{P_0 \lambda_4}{2} = \frac{M_k \lambda_4}{2R} = \frac{M \varphi}{2} = \frac{M_k^2 l}{2I_0 G} = \frac{\varphi^2 I_0 G}{2l} \quad \dots \dots \dots \quad (67)$$

Циліндрична ресора.

Візьмімо кільце з дроту (рис. 39-а) й зробимо його з плоского — гвинтовим. Ясно, що для цього ми його закручуємо. Зробимо таких звоїв (витків) декілька, одержимо циліндричну ресору (рис. 39-б). Під впливом сил P ресора осідає на f (рис. 39-в). Але матеріал (сталь) закручується, а не стискується. Тут

$$M_k = P \cdot r,$$

де r — середній радіус ресори. Роботу внутрішніх сил можна виразити формулою (67) і формулою

$$V = \frac{Pf}{2}$$

якщо P збільшується від O до P (статична деформація). Отже, беручи на увагу, що $l = 2\pi rn$, маємо:

$$\frac{Pf}{2} = \frac{Pr \cdot 2\pi rn}{2 \frac{\pi d^4}{32} \cdot G},$$

або

$$f = \frac{64Pr^2 n}{d^4 \cdot G} \quad \dots \dots \dots \quad (68)$$

Щодо напруги в сталі, то

$$t_4 = \frac{M_k}{W_k} = \frac{Pr}{\frac{\pi d^8}{16}} = \infty \frac{5Pr}{d^3} \quad \dots \dots \dots \quad (69)$$

Тут ми прийняли: $\pi = 3,2$, через що

$$\frac{\pi d^3}{16} = \frac{d^3}{5} \quad \dots \dots \dots \quad (70)$$

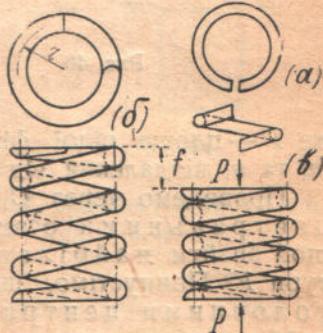


Рис. 39.

МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ.

Екваторіальним моментом інерції площини F :

- 1) коло осі Z — називають інтеграл вида $I_z = \int y^2 dF$,
- 2) " " Y — " " " " $I_y = \int z^2 dF$.

Полярним моментом інерції площини F :

- 3) коло полюса O називають інтеграл $I_0 = \int (z^2 + y^2) dF = \int r^2 dF$.
- Відосереднім моментом інерції називають інтеграл $I_{xy} = \int zy dF$.
- Нехай дано фігуру F , для якої треба знайти:

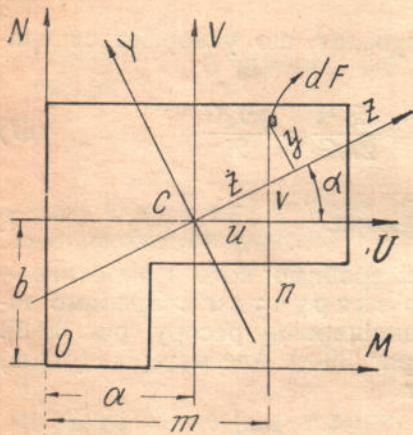


Рис. 40.

де F — площа цілої фігури, F_i — площа якогось із прямокутників, m_i та n_i віддалення від осей центра ваги цього прямокутника.

Проведемо через C осі U й V рівнобіжно контурним; назвімо їх центральними осями. На який кут α треба повернути осі U й V , щоб знайти найбільший та найменший з моментів інерції фігури F ? Припустімо, що цей кут $= \alpha$, а осі Z та Y ; такі осі назвімо головними центральними, а моменти I_z та I_y , з яких один найбільший з центральних, а другий — найменший, назвімо головними моментами інерції.

Формули переходу:

$$\begin{aligned} m &= u + a; \quad z = u \cos \alpha + v \sin \alpha; \quad u = z \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ n &= v + b; \quad y = -u \sin \alpha + v \cos \alpha; \quad v = z \sin \alpha + y \cos \alpha, \end{aligned}$$

а моменти інерції:

- 1) коло осей M, N
- 2) коло осей U, V
- 3) коло осей Z, Y

$$\begin{array}{lll} I_m = \int n^2 dF & I_u = \int v^2 dF & I_z = \int y^2 dF \\ I_n = \int m^2 dF & I_v = \int u^2 dF & I_y = \int z^2 dF \\ I_{mn} = \int mn dF & I_{uv} = \int uv dF & I_{zy} = \int zy dF. \end{array}$$

Беручи на увагу, що $\int udF = 0$, тобто статичний момент площини коло осі, що проходить через її центр ваги, є нуль, знайдемо:

$$I_m = \int (v+b)^2 dF = \int v^2 dF + 2b \int vdF + b^2 \int dF = I_u + b^2 F \dots (71)$$

$$I_n = \int (u+a)^2 dF = \int u^2 dF + 2a \int udF + a^2 \int dF = I_v + a^2 F \dots (72)$$

$$I_{mn} = \int (u+a)(v+b) dF = \int uv dF + ab \int dF = I_{uv} + ab F \dots (73)$$

і навпаки:

$$I = I_m - b^2 F; \quad I_v = I_n - a^2 F; \quad I_{uv} = I_{mn} - ab F.$$

Задбільшого I_m , I_n , I_{mn} знайти легше, отже їх вираховують раніше, а за ними I_u , I_v , I_{uv} .

Приклади: 1) знайти I_z прямокутника (рис. 41).

Беремо довільний y , проводимо AB , даємо y безкрайньо малий преріст $= dy$, тоді $dF = bdy$;

$$I_z = \int y^2 dF = b \int_0^h y^2 dy = \frac{bh^3}{3} \quad \dots \dots \dots \quad (74)$$

2) Знайти I_y для прямокутника (рис. 42).

Беремо довільний z , проводимо AB , даємо z безкрайньо малий преріст $= dz$, тоді $dF = hdz$;

$$I_y = \int z^2 dF = h \int_0^b z^2 dx = \frac{hb^3}{3} \quad \dots \dots \dots \quad (75)$$

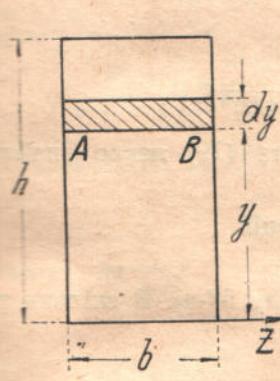


Рис. 41.

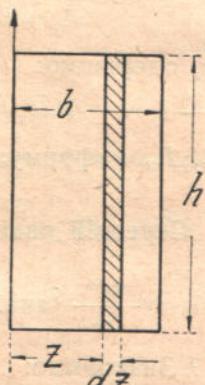


Рис. 42.

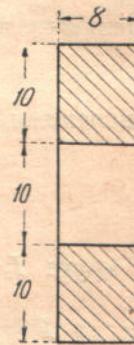


Рис. 43.

Ці формулі ми використовуємо для всяких прямокутних фігур. Наприклад, для прямокутника з діркою (буває для заклепки) (рисунок 43)

$$I_z = \frac{8 \cdot 30^3}{3} - \frac{8 \cdot 20^3}{3} + \frac{8 \cdot 10^3}{3} = \frac{8}{3} (30^3 - 20^3 + 10^3) = 53336$$

Головні моменти інерції.

Користуючись з формул для повороту осей, знайдемо залежності:

$$I_z = \int (-u \sin \alpha + v \cos \alpha)^2 dF = I_v \sin^2 \alpha - 2I_{uv} \sin \alpha \cos \alpha + I_u \cos^2 \alpha \quad (76)$$

$$I_y = \int (u \cos \alpha + v \sin \alpha)^2 dF = I_v \cos^2 \alpha + 2I_{uv} \sin \alpha \cos \alpha + I_u \sin^2 \alpha \quad (77)$$

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int (-u \sin \alpha + v \cos \alpha)(u \cos \alpha + v \sin \alpha) dF = \\ &= (I_u - I_v) \frac{\sin 2\alpha}{2} + I_{uv} \cos 2\alpha \quad \dots \dots \dots \quad (78) \end{aligned}$$

Додаючи й віднімаючи рівняння (76) та (77), дістанемо:

$$I_z + I_y = I_u + I_v \quad \dots \dots \dots \quad (79)$$

$$\Delta = I_z - I_y = (I_u - I_v) \cos 2\alpha - 2I_{uv} \sin 2\alpha \quad \dots \dots \dots \quad (80)$$

З рівняння (79) бачимо, що сума центральних моментів відносно перпендикулярних між собою осей = постійній величині (інваріант). Отже, ясно без доказів, що коли I_z досягає максимума, то I_y буде мінум і навпаки. Ясно також, що коли, наприклад, I_z буде найбіль-

ший момент інерції, а I_y найменший, то $\Delta = I_z - I_y$ досягне свого максимуму. Отже, щоб знайти такий кут α , при якому буде I_z max., треба знайти max. Δ , а тому

$$\frac{d\Delta}{d\alpha} = -2(I_u - I_v) \sin 2\alpha - 4I_{uv} \cos 2\alpha = 0 \dots \quad (81)$$

звідсіль

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{uv}}{I_v - I_u}.$$

За допомогою формул тригонометрії знайдемо

$$\cos 2\alpha = \frac{I_v - I_u}{\sqrt{(I_v - I_u)^2 + 4I_{uv}^2}}; \quad \sin 2\alpha = \frac{2I_{uv}}{\sqrt{(I_v - I_u)^2 + 4I_{uv}^2}} \dots \quad (82)$$

Отже, підставляючи до (78), знайдемо, що

$$I_{zy} = 0 \dots \dots \dots \dots \dots \quad (83)$$

а підставляючи до (80), одержимо:

$$I_z - I_y = \pm \sqrt{(I_u - I_v)^2 + 4I_{uv}^2} \dots \dots \dots \quad (84)$$

За обчисленими I_u , I_v , I_{uv} з формул (84) та (79) легко знайти I_z та I_y .

Середній радіус інерції.

Для круга $I_z = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi d^4}{64}$ (див. формулу 57-а). В скільки разів I_z більш за $F = \frac{\pi d^2}{4}$? Знаходимо:

$$\frac{I_z}{F} = \frac{d^2}{16} = \left(\frac{d}{4}\right)^2$$

Величину $\frac{d}{4} = r_z$ називають середнім радіусом інерції площи F відносно осі Z ; отже

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}; \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}; \quad r_u = \sqrt{\frac{I_u}{F}}; \quad r_v = \sqrt{\frac{I_v}{F}} \dots \quad (85)$$

Через те, що $I_{zy} = 0$, маємо

$$I_u = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha \dots \dots \dots \quad (86)$$

отже

$$r_u^2 = r_z^2 \cos^2 \alpha + r_y^2 \sin^2 \alpha \dots \dots \dots \quad (87)$$

Еліпс інерції.

Знайти обгортку простих, що находяться від початку координат на віддаленні

$$r_u = \sqrt{r_z^2 \cos^2 \alpha + r_y^2 \sin^2 \alpha}.$$

Якщо таку криву знайдемо, то перпендикуляр на дотичну до неї з початку координат дасть нам для довільного напрямку r_u , отже й I_u — графічно.

Рівняння простої, що робить кут α з віссю z буде (рис. 43а)

$$z \sin \alpha + y \cos \alpha = \sqrt{r_z^2 \cos^2 \alpha + r_y^2 \sin^2 \alpha},$$

або, поділяючи на $\cos \alpha$ й визначаючи $k = \operatorname{tg} \alpha$:

$$kz + y = \sqrt{r_z^2 + k^2 r_y^2};$$

беремо $\frac{d}{dk}$

$$z = \frac{k r_y^2}{\sqrt{r_z^2 + k^2 r_y^2}};$$

звернемося

$$k z^2 + z y = k r_y^2,$$

або

$$z y = k (r_y^2 - z^2) \quad \dots \dots \dots \quad (88)$$

параметр k треба виключити; визначмо k :

$$z^2 = \frac{k^2 r_y^4}{r_z^2 + k^2 r_y^2};$$

звідсіль

$$k^2 = \frac{z^2 r_z^2}{r_y^2 (r_y^2 - z^2)}$$

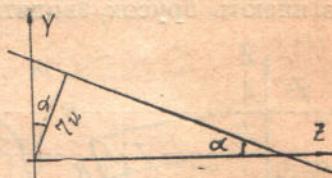


Рис. 43-а.

Підставляємо до (88) підвищеної в квадрат

$$z^2 y^2 = \frac{z^2 r_z^2}{r_y^2} (r_y^2 - z^2);$$

поділяємо на $z^2 r_z^2$

$$\frac{y^2}{r_z^2} = \frac{r_y^2 - z^2}{r_y^2},$$

або:

$$\frac{z^2}{r_y^2} + \frac{y^2}{r_z^2} = 1 \quad \dots \dots \dots \quad (89)$$

Це є обгортка — еліпс інерції. Перпендикуляр з початку координат на дотичну дасть величину r_u для осі u , що проходить через центр еліпса довільного напрямку.

ЗГИН.

Зігнемо резиновий брускок, як показано на рис. 44.

1) всі верхні волокна буде розтягнуто,

2) всі нижні — стиснуто,

3) верхні волокна поперек себе стискаються; отже дуга $A_1 B_1 A_1$ менша за колишню ширину бруска,

4) нижні волокна поперек себе поширяються; отже дуга $C_1 D_1 C_1$ більш за колишню ширину,

5) в точці $M(M_1 M_2)$ маємо подвійну кривину. Радіуси кривини R та R_1 не однакові: R_1 більш за R у стільки разів, у скільки відносне подовження волокон більш за відносне поперечне поширення, себто в σ разів (Пуасонова постійна див. 9).

Така ж картина тільки в меншому степені буває при згині м'якту, тільки тоді деформації можна спостерігати за допомогою точкових люстрових пристріїв.

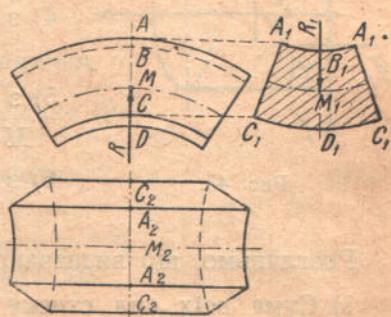


Рис. 44.

Якщо розтягнуто верхні, а стиснуто нижні волокна, то десь є перехід від розтягу до стиску, тобто є цілий шар (слой) волокон не розтягнутих і не стиснутих, а тільки викривлених. Такий шар зв'ється нейтральним шаром; далі побачимо, що, при згині залізних та сталюх брусків, нейтральний шар проходить через центр ваги площини поперечного перекрою бруска.

Рівнання рівноваги.

Щоб визначити внутрішні сили пружності й напруги, виріжмо з угнутого бруска безкрайньо тонку скибку $ABED$ (рис. 45) і нариємо її в трьох прямокутних проекціях. Припустімо, що 1) сили, що згинають брусок, зводяться до одної пари сил, яку назовемо M_y

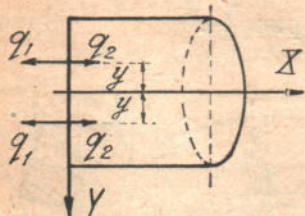
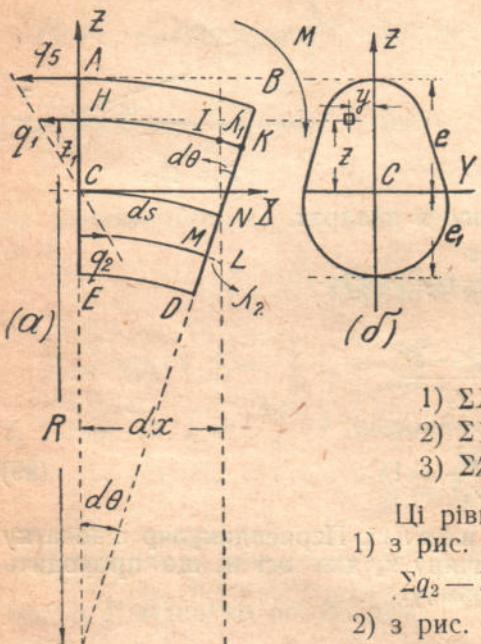


Рис. 45.

(чи просто M). Такий згин зветься чистим. Далі припустімо, що 2) поперечні перетини AE й BD , що до згину були плоскі й рівнобіжні між собою, після згину нахилилися, утворили кут $d\theta$, але її залишилися плоскими. Площу діяння пари сил приймімо за координатну площину ZOX , вісь X справімо по осі бруска, вісь Z — угору. Статика вчить, що для рівноваги твердого тіла в просторі потрібно 6 умов:

- $$\begin{array}{ll} 1) \Sigma X = 0; & 4) \Sigma (yZ - zY) = 0 \\ 2) \Sigma Y = 0; & 5) \Sigma (zX - xZ) = 0 \\ 3) \Sigma Z = 0; & 6) \Sigma (xY - yX) = 0 \end{array}$$

Ці рівнання в нашому випадку дають:
1) з рис. 45 (а) маємо

$$\Sigma q_2 - \Sigma q_1 = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (90)$$

2) з рис. 45 (а, б, в) бачимо, що

$$\Sigma Y = 0$$

3) з рис. 45 (а й б) бачимо, що

$$\Sigma Z = 0$$

4) з рис. 45 (б) бачимо, що

$$\Sigma (yZ - zY) = 0$$

5) з рис. 45 (а) виводимо, що

$$M - \Sigma q_2 z - \Sigma q_1 z = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (91)$$

6) з рис. 45 (в) виводимо, що

$$\Sigma q_2 y = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (92)$$

Розглянемо, що визначають (90), (91) й (92).

1) Сума всіх сил стиску й розтягу повинна дорівнювати нулеві. Щоб визначити силу, треба визначити напругу (див. 3); а щоб визначити напругу, треба знати відносне подовжене здовжнення (див. 10). До згину волокно $HI = CN = Rd\theta$; після згину воно $= HK = (R + z)d\theta$; отже (див. рис. 45 (а) й рис. 11)

$$\lambda_1 = HK - HI = IK = zd\theta.$$

Щоб знайти відносне подовжнє здовженнє, треба поділити IK на CN (колишня довжина); отже (див. 7)

$$\varepsilon_1 = \frac{\lambda_1}{l} = \frac{IK}{CN} = \frac{zd\theta}{Rd\theta} = \frac{z}{R}$$

Отже напруга

$$n_1 = E \cdot \varepsilon_1 = E \cdot \frac{z}{R}$$

і сил

$$q_1 = n_1 \cdot dF = E \frac{z}{R} \cdot dF \quad \dots \dots \dots \quad (93)$$

Аналогічно

$$q_2 = n_2 \cdot dF = E' \frac{z}{R} \cdot dF \quad \dots \dots \dots \quad (94)$$

Підставляючи ці значіння до (90), маємо:

$$\frac{E'}{R} \int zdF - \frac{E}{R} \int zdF = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (95)$$

тут перший інтеграл беремо по тій частині площині F , що лежить нижче за вісь Y ($z < 0$), а другий — вище за вісь Y ($z > 0$). Якщо $E = E'$, тобто для заліза й сталі:

$$-\frac{E}{R} \int zdF = 0,$$

або

$$\int zdF = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (96)$$

Цей інтеграл беремо по всій площині F . Рівняння (96) виражає, що статичний момент площині F відносно осі Y дорівнює нулеві. А це може бути тільки тоді, коли нейтральний шар проходить через центр ваги площині F .

Рівняння (92) дає

$$\Sigma qy = \frac{E}{R} \int zydF = 0,$$

або

$$\int zydF = 0.$$

Це доводить, що осі Y та X мусять бути головними осями площині F (при $E = E'$, т. т. для заліза й сталі).

Вивід рахункового рівняння.

Підставляємо значіння (95) й (96) в рівняння (91):

$$M - \frac{E}{R} \int z^2 dF - \frac{E'}{R} \int z^2 dF = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (97)$$

тут перший інтеграл для $z > 0$, другий — для $z < 0$.

Якщо $E = E'$, тобто для заліза й сталі, то:

$$M - \frac{E}{R} \int z^2 dF = 0,$$

або

$$M - \frac{EJ_y}{R} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (98)$$

Цей інтеграл беремо по всій площині F ; він є екваторіальний момент інерції площині F відносно осі Y .

Максимальна напруга буде в A , бо волокно AB найдальше від нейтрального шару. Визначмо $AC = e$: Тоді аналогічно з (93)

$$n_5 = E \frac{e}{R};$$

звідсіль

$$\frac{E}{R} = \frac{n_5}{e} \quad \dots \dots \dots \quad (99)$$

Підставляємо в (98):

$$M - \frac{n_5}{e} I_y = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (100)$$

Для точки H , що на віддаленні z від нейтрального шару

$$M - \frac{n_1 I_y}{z} = 0,$$

або

$$n_1 = \frac{Mz}{I} \quad \dots \dots \dots \quad (101)$$

Назвімо моментом опору згинові величину

$$W = \frac{I_y}{e}, \quad \dots \dots \dots \quad (102)$$

де e — найбільше віддалення від нейтрального шару.
Тоді (100) дає

$$M - n_5 W = 0$$

або

$$n_5 = \frac{M}{W} \quad \dots \dots \dots \quad (103)$$

Щоб бруск був видржаний на згин, треба, щоб:

$$n_5 = \frac{M}{W} \leq \text{дозволено} \text{ в табл. II} \quad \dots \dots \dots \quad (104)$$

Зауважмо, що з рівнань (98) і (99):

$$\frac{E}{R} = \frac{n_5}{e} = \frac{M}{I_y} \quad \dots \dots \dots \quad (104a)$$

Формули для W див. табл. 7.

Гуків закон для згину.

В розтягнутому бруску λ_1 було однакове для всіх нижніх точок бруска. В зігнутому — λ_1 не однакове для всіх волокон і навіть переходить у λ_2 . Назвімо λ_5 — найбільше абсолютне подовження (чи скорочення) крайнього волокна; тоді (див. рис. 45a).

$$\lambda_5 = SB = BN \cdot d\theta = e \cdot d\theta^1 \quad \dots \dots \dots \quad (105)$$

Відносне подовження здовжнення для цього крайнього волокна

$$\varepsilon_5 = \frac{\lambda_5}{ds} = \frac{SB}{CN} = \frac{e \cdot d\theta}{R \cdot d\theta} = \frac{e}{R} \quad \dots \dots \dots \quad (106)$$

¹ На рис. 45a пропущено літеру S

і Гуків закон для згину (див. також 99)

$$n_5 = E \cdot \varepsilon_5 = E \frac{e}{R} \quad \dots \dots \dots \quad (107)$$

За допомогою рівнань (106) та (103) напишемо:

$$\lambda_5 = \frac{M \cdot ds}{W \cdot E} \quad \dots \dots \dots \quad (108)$$

А через те, що викривлення бруска дуже мале, можна прийняти $ds = dx$ і, поділяючи на e , дістанемо:

$$d\theta = \frac{\lambda_5}{e} = \frac{M \cdot dx}{e \cdot W \cdot E} = \frac{M \cdot dx}{E \cdot I_y} = \frac{M \cdot dx}{\beta} \quad \dots \dots \quad (109)$$

Величину $E \cdot I_y = \beta$ називають жорсткістю чи цупкістю бруска.

Реакції підпор.

Нехай брусков AB (рис. 46) лежить своїми кінцями на підпорах A й B . Підпори визначаємо трикутними призмами на ознаку того, що вони тільки підтримують брусков, але не перешкоджають йому повертатисяколо точок A й B . Приймімо початок координат в A , вісь X по осі бруска, вісь Y — угору. Нехай в точці K при $x = c_1$ брусков згинає сила P . Невідомі реакції підпор A й B визначмо з рівнань рівноваги бруска AB , а саме:

1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} - P = 0$ (сума проекцій всіх сил на вісь Y),

2) $Pc_1 - B = 0$ (сума моментів всіх сил коло точки A),

3) $Al - Pc = 0$ (сума моментів всіх сил коло точки B).

Практика показала, що краще визначувати реакції підпор з двох останніх, а 1) править тільки для перевірки

$$\mathbf{B} = \frac{Pc_1}{l}; \quad \mathbf{A} = \frac{Pc}{l} \quad \dots \dots \dots \quad (110)$$

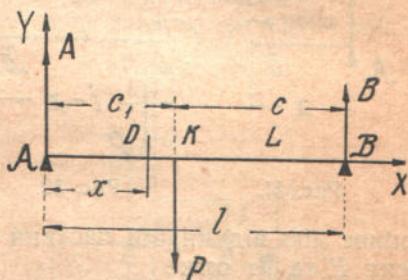


Рис. 46.

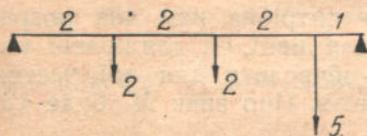


Рис. 47.

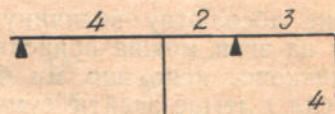


Рис. 48.

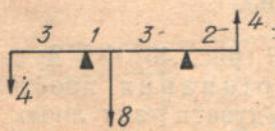


Рис. 49.

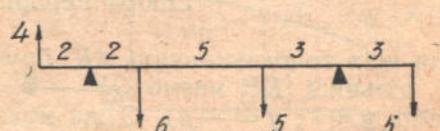


Рис. 50.

Треба напрактикуватися в визначеннях реакцій підпор. Наводимо приклади.

За рис. 47 $\mathbf{A} = 3; \quad \mathbf{B} = 6$

" 48 $\mathbf{A} = -\frac{1}{3}; \quad \mathbf{B} = 9 \frac{1}{3}$

" 49 $\mathbf{A} = 15; \quad \mathbf{B} = -7$

" 50 $\mathbf{A} = 0; \quad \mathbf{B} = 12$.

Перерізна сила Q та згинний момент M .

Назвімо перерізною силою Q в даному перетині бруска альгебричну суму всіх зовнішніх сил, що є ліворуч від даного перетину. Щоб визначити Q , треба знати величину реакцій підпор. Напр., для бруска AB (рис. 46) маємо такі вартості перерізної сили, коли $P=20$; $AK=6$; $KB=9$:

в точці: A D K L B

$$Q = +12 \quad +12 \quad -8 \quad -8 \quad 0$$

Для бруска (рис. 47), в точках прикладу сил, маємо:

$$Q = +3 \quad +1 \quad -1 \quad -6 \quad 0$$

Назвімо згинним моментом M в даному перетині бруска альгебричну суму моментів всіх зовнішніх сил, що лежать ліворуч або праворуч від даного перетину.

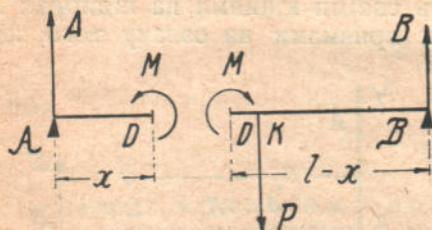


Рис. 51.

Рис. 52.

Розріжмо брускок AB (рис. 46) площею через точку D й відкиньмо ліву частину (рис. 52). Нехай $AD=x$, тоді

$$DK=c_1-x; DB=l-x.$$

Щоб брускок залишився в рівновазі, треба до розрізаного перетину прикласти момент M , що заміняє дію відкинутої частини й мусить дорівнювати сумі моментів сил P та B ; отже

$$\begin{aligned} M &= P(c_1-x) - \frac{Pc_1}{l}(l-x) = P(c_1-x) + Px + \frac{Pc_1x}{l} = \\ &= -\frac{Pcx}{l} = -Ax. \end{aligned}$$

Коли б ми відкинули праву частину бруска (рис. 51), то знайшли б

$$M = +Ax$$

Отже абсолютну величину M , що потрібна нам для розрахунку бруска на згин, можна обчислюти чи для лівої, чи для правої частини, все однаково; ясно, що ми будемо обчислюти для тої частини, де менш сил і легше знайти суму моментів. Про знак M буде сказано далі.

Епюра перерізних сил.

Для всіх точок дільниці AK бруска AB (рис. 46) $Q = A$; для всіх точок дільниці KB маємо $Q = -B$. Це є рівнання простих ліній (як напр. $y=1$; $y=-a$). Отже можна збудувати таку лінію перерізних сил, яка наочно покаже величину перерізної сили в довільній точці бруска. Нехай, наприклад, (рис. 53) $P=120 \text{ кг}$; $CB=100 \text{ см}$; $AC=200 \text{ см}$. Тоді $A=80 \text{ кг}$; $B=40 \text{ кг}$. Лінія $AADCEFB$ наз. епюрою перерізних сил. При $x=0, 50, 90 \text{ см}$... $Q=+80 \text{ кг}$; при $x=100 \text{ см}$ Q раптово змінюється на -120 кг , далі при $x=110, 120 \dots \text{ см}$ $Q=-40 \text{ кг}$ і при $x=300 \text{ см}$ маємо $Q=-40+40=0$. Отже Q , як функція x , не суцільна: при $x=100$, вона робить скок на -120 кг .

Площа, що обмежена віссю бруска AB та лінією перерізних сил, дорівнює абсолютної величині згинного моменту. Напр., при $x=50$, площа $AAGH=80 \cdot 50=4000 \text{ кг см}=M$; при $x=250$,

$M = \text{пл. } IKFB = 40 \cdot 50 = 2000 \text{ кн. см.}$ Цікаво, що як надати площині $AADC$ знак плюс, а площині $CEFB$ знак мінус, то при $x = 250$ також:

$$M = + \text{пл. } ADC - \text{пл. } CEKI = +8000 - 6000 = 2000 \text{ кг.см.}$$

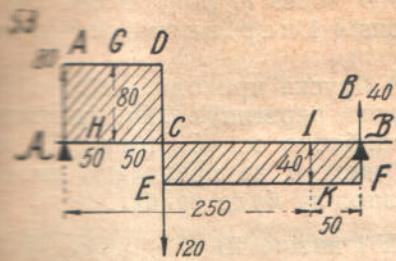


Рис. 53.

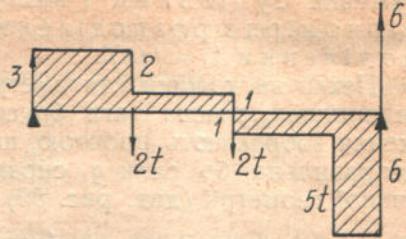


Рис. 54.

Епюри перерізних сил для брусків за рисунками 47—50 наводимо тут за рис. 54—57.

В тих точках, де епюра перерізає вісь бруска, можливий максимум M ; якщо вона перерізає вісь у двох точках, то треба об-

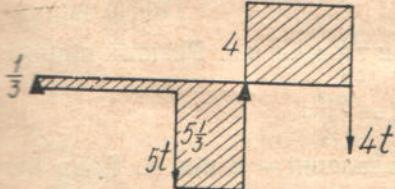


Рис. 55.

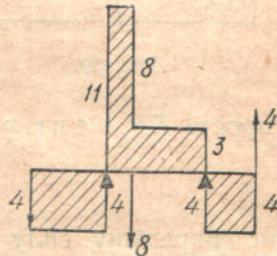


Рис. 56.

числити M для обох точок, щоб вирішити, де максимум згинного моменту. На цих епюрах буде: max M 1) рис. 54... $M=8$; 2) рис. 55... $M=12$; 3) рис. 56... $M=12$; 4) рис. 57... $M=16$.

В цих випадках рівнання Q було на кожній дільниці:

$$Q = \text{const.} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (111)$$

також, що повсюди $\frac{dQ}{dx} = 0$. Доведімо, що $\frac{dM}{dx} = Q$.

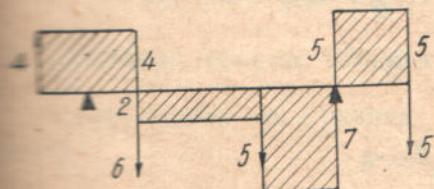


Рис. 57.

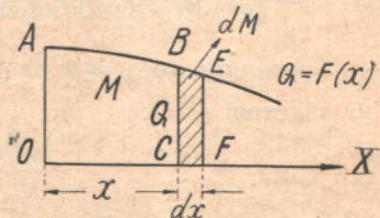


Рис. 58

Болі б $Q = F(x)$ (рис. 58) виражала лінію перерізних сил, та при
даному x , $M = \text{пл. } OABC$, то безкрайньо малий приріст цього момента
можна виразити пл. $BCFE$, отже висота $BC = Q$, основа $CF = dx$,

$$dM = Q dx \quad \dots \quad (112)$$

Суцільне навантаження.

Якщо навантаження не скучено в одній точці, а розподілено за якимсь законом по всій довжині бруска, то ми називаємо таке навантаження суцільним і визначаємо його через q . Воно може бути рівномірно розподіленим ($q = \text{const.}$) і нерівномірно розподіленим [$q = f(x)$].

Нехай на кожний сантиметр довжини бруска приходить $q_1 \text{ кг/см}$ (наприклад, власна вага бруска постійного перетину). Таке навантаження зображають простою, що йде рівнобіжно осі X і вище її; це неправильно, бо сили q_1 спралено до низу й за правилами аналітичної геометрії (див. рис. 59) закон розподілу буде такий:

$$q = -q_1 \quad (\text{проста } \parallel \text{ осі } X \text{ і нижче її}) \dots \dots \dots \quad (113)$$

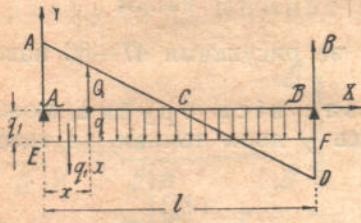


Рис. 59.

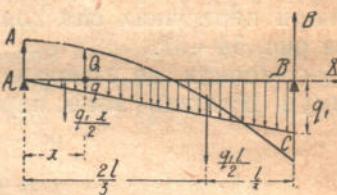


Рис. 60.

Ця проста EF є епюра навантаження. Реакції підпор:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{q_1 l}{2}.$$

Знайдімо перерізну силу Q на віддаленні x від A . Вона буде алгебричною сумою:

$$Q = \frac{q_1 l}{2} - q_1 x \dots \dots \dots \quad (114)$$

Це рівняння простої, що робить на осі Y відтинок $= \frac{q_1 l}{2}$, а на осі X відтинок $= \frac{l}{2}$ (проста ACD); справді бо при $x=0$ рівняння (114) дає

$$Q = +\frac{q_1 l}{2};$$

при $x = \frac{l}{2}$, $Q = 0$; при $x = l$, $Q = -\frac{q_1 l}{2}$. Зауважмо, що

$$\frac{dQ}{dx} = -q_1,$$

ї на підставі (113):

$$\frac{dQ}{dx} = q \dots \dots \dots \quad (114a)$$

Якщо q не є постійна, а росте, скажімо, від 0 до $-q_1$, то на віддаленні x від A (рис. 60) дістанемо:

$$\frac{q}{-q_1} = \frac{x}{l};$$

отже

$$q = -\frac{q_1}{l} x \quad (\text{епюра навантаження}) \dots \dots \dots \quad (115)$$

Це є рівняння простої, що проходить через початок координат A ; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{q_1}{l}$ з віссю X буде

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{q_1}{l} = \frac{dq}{dx} \quad \dots \dots \dots \quad (116)$$

При $x=0, q=0$; при $x=l, q=-q_1$. Реакції підпор знайдемо, замінюючи всі q вислідною $= \frac{q_1 l}{2}$, що прикладена в центрі ваги площини навантаження ABC . Отже

$$A = \frac{q_1 l}{6}; \quad B = \frac{q_1 l}{3}.$$

Перерізна сила Q на віддаленні x від початку координат A є альгебрична сума:

$$Q = \frac{q_1 l}{6} + \frac{qx}{2} = \frac{q_1 l}{6} - \frac{q_1 x^2}{2l} \quad \dots \dots \dots \quad (117)$$

Це є парабола з вершком в A (не A). При $x=0, Q=\frac{q_1 l}{6}$; при $x=l, Q=-\frac{q_1 l}{8}$. Зауважмо, що й тут:

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{q_1 x}{l},$$

а на підставі (115)

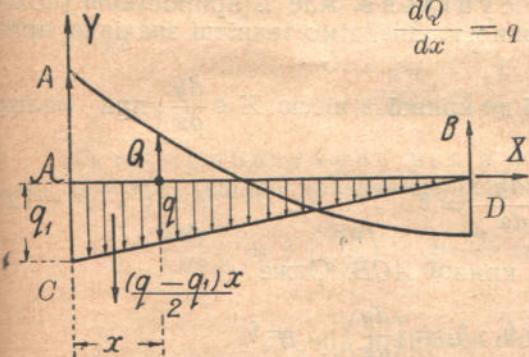


Рис. 61.

$$\frac{dQ}{dx} = q \quad \dots \dots \dots \quad (117a)$$

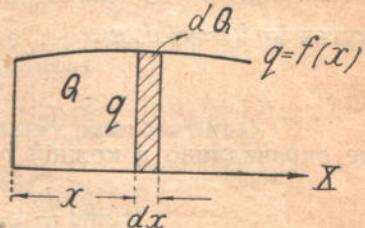


Рис. 62.

Якщо абсолютна величина q зменшується від початкової до нуля, то з рис. 61

$$q = -q_1 + \frac{q_1 x}{l} \quad (\text{епюра навантаження}) \quad (118)$$

Це є рівняння простої CB ; при $x=0$ буде $q=-q_1$; при $x=l$ буде $q=0$.

Реакції підпор (як і раніше)

$$A = \frac{q_1 l}{3}; \quad B = \frac{q_1 l}{6}$$

Перерізна сила є альгебрична сума

$$Q = \frac{q_1 l}{3} + \frac{(q-q_1)x}{2} = \frac{q_1 l}{3} - q_1 x + \frac{q_1 x^2}{2l} \quad \dots \dots \dots \quad (119)$$

Це є парабола з вершком в D (перекинуто рис. 60).

І тут

$$\frac{dQ}{dx} = -q_1 + \frac{q_1 x}{l} = q \quad \dots \dots \dots \quad (119a)$$

Отже, взагалі, коли (рис. 62)

$$q = f(x)$$

є епюра навантаження Q й $Q + dQ$ є вартості перерізної сили в двох безкрайньо близьких перетинах на віддаленні $= dx$ між собою, то безкрайньо малий приріст перерізної сили:

$$dQ = q \cdot dx, \dots \quad (120)$$

де q — навантаження на 1 сантиметр в точці K ; а перерізна сила Q — площа, що її обмежено епюрою навантаження (пор. в математиці: площа $u = \int y dx$; $du = y dx$).

ПРУЖИСТА ЛІНІЯ.

Бруск, що на рис. 61, під впливом нерівномірного навантаження угнететься, як показано на рис. 63, вісьовим пунктиром ACB . Цю криву, зігнуту вісь бруска називають пружистою лінією. Нехай її рівняння буде:

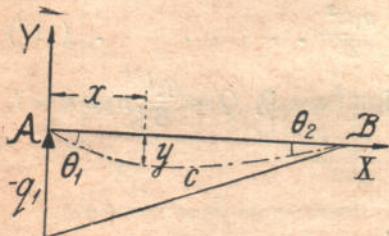


Рис. 63.

$$y = f(x) \dots \quad (121)$$

Ця крива: незамкнена, дуже пристосиста (пологая) й ордината y ніде не робить скока, бо це б значило, що брусок зламався. Отже $y = f(x)$ — функція однозначна, скінчена й суцільна. Але її приrostкові (похідні) можуть бути й несуцільними. Знайдімо технічні значення приросткових від y по x .

Відомо, що $\tan \theta$ кута дотичної до кривої з віссю X є $\frac{dy}{dx}$; при малих кутах $\tan \theta = \theta$, отже

$$\frac{dy}{dx} = \theta \dots \quad (122)$$

це справедливо в кожній точці кривої ACB . Отже

$$\theta_0 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \theta_1; \theta_l = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \theta_2$$

Друга приrostкова на основі (109)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{\beta} \dots \quad (123)$$

Згінний момент, поділений на жорсткість бруска, є друга приrostкова від y по x . Коли крива опукла до верху: $\overbrace{\hspace{1cm}}$, (то $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$), коли крива опукла до низу: $\overbrace{\hspace{1cm}}$, то $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$.

Отже знак момента залежить від форми пружистої лінії. На рис. 63 по всіх точках ACB буде $M > 0$; на підпорах A й B :

$$M_0 = \beta \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=0} = 0; M_l = \beta \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=l} = 0.$$

Третя приrostкова, на основі (112)

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{\beta} \frac{dM}{dx} = \frac{Q}{\beta} \dots \quad (124)$$

Перерізна сила, поділена на β , є третя приrostкова від y по x . В тих точках, де $Q=0$ ($\frac{dM}{dx}=0$), функція M досягає Max, бо $q < 0$ ($\frac{d^2M}{dx^2} < 0$). На підпорах:

$$Q_0 = \beta \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)_{x=0} = \mathbf{A}; \quad Q_l = \beta \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)_{x=l} = \mathbf{B} \text{ (див. епюру)}$$

Четверта приrostкова на основі (120)

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{\beta} \frac{dQ}{dx} = \frac{q}{\beta} \dots \dots \dots \quad (125)$$

Суцільне навантаження, поділене на β , є четверта приrostкова від y по x . На підпорах

$$q_0 = \beta \left(\frac{d^4y}{dx^4} \right)_{x=0} = -q_1; \quad q_l = \beta \left(\frac{d^4y}{dx^4} \right)_{x=l} = 0.$$

Через те, що (див. 118)

$$q = -q_1 = \frac{q_1 x}{l},$$

маємо

$$\frac{dq}{dx} = +\frac{q_1}{l} = \text{постійна (в даному разі).}$$

Отже

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{1}{\beta} \frac{dq}{dx} \dots \dots \dots \quad (126)$$

П'ята приrostкова від y по x є перша приrostкова від $q = \varphi(x)$ (епюра навантаження). На підпорах

$$\left(\frac{dq}{dx} \right)_0 = \beta \left(\frac{d^5y}{dx^5} \right)_{x=0} = \frac{q_1}{l} \text{ (в даному разі постійна).}$$

Вивід рівняння пружистої лінії.

Визначмо, як і раніше:

1) при $x = x$; 2) при $x = 0$; 3) на основі (120) й (125)

$$\beta \frac{dy}{dx} = \beta \theta \quad \beta \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 = \beta \theta_0 \quad \int_0^x q dx = Q - Q_0$$

$$\beta \frac{d^2y}{dx^2} = M \quad \beta \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_0 = M_0 \quad \text{на основі (112) й (124)}$$

$$\beta \frac{d^3y}{dx^3} = Q \quad \beta \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)_0 = Q_0 \quad \int_0^x Q dx = M - M_0$$

$$\beta \frac{d^4y}{dx^4} = q \quad \beta \left(\frac{d^4y}{dx^4} \right)_0 = q_0 \quad \text{на основі (109) й (123)}$$

$$\beta \frac{d^5y}{dx^5} = \frac{dq}{dx} \quad \beta \left(\frac{d^5y}{dx^5} \right)_0 = \left(\frac{dq}{dx} \right)_0 \quad \int_0^x M dx = \beta \theta - \beta \theta_0$$

Припустімо, що як у вище наведеному прикладі

$$\frac{dq}{dx} = a = \text{постійна} \left(\frac{q_1}{l} \right).$$

Будемо помножувати обидві частини цього рівняння на dx та інтегрувати в межах від $x=0$ до $x=x$:

$$\begin{aligned} q - q_0 &= ax \\ -P^1 \dots \dots Q - Q_0 &- q_0 x = a \frac{x^2}{2} \\ M - M_0 - Q_0 x - \frac{q_0 x^2}{2} &= a \frac{x^3}{6} \\ \beta\theta - \beta\theta_0 - M_0 x - Q_0 \frac{x^2}{2} - \frac{q_0 x^3}{6} &= a \frac{x^4}{24} \\ \beta y - \beta y_0 - \beta\theta_0 x - M_0 \frac{x^2}{2} - Q_0 \frac{x^3}{6} - \frac{q_0 x^4}{24} &= a \frac{x^5}{120} \end{aligned}$$

Це є буде загальне рівняння пружистої лінії для суцільних функцій; воно має вид Макльоренова рядка:²

$$\beta y = \beta y_0 + \beta\theta_0 x + M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + q_0 \frac{x^4}{24} + \left(\frac{dq}{dx}\right)_0 \frac{x^5}{120} + \dots \quad (128)$$

як: $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f'''(0) + \frac{x^4}{24}f''''(0) + \dots$

Звичайно його виводять починаючи з середини: $EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M$ і в кожному окремому випадку пророблюють інтегрування.

Приклади.

1. Для бруска з рис. 63 маємо в початку координат:

$$y_0 = 0; \theta_0 = \theta_1; M_0 = 0; Q_0 = \frac{q_1 l}{3}; q_0 = -q_1; \left(\frac{dq}{dx}\right)_0 = +\frac{q_1}{l}.$$

Отже рівняння пружистої лінії пишемо одразу:

$$\beta y = \beta\theta_1 x + \frac{q_1 l}{3} \frac{x^3}{6} - \frac{q_1 x^4}{24} + \frac{q_1 x^5}{120 l}$$

Тут всі коефіцієнти, крім $\beta\theta_1$ — відомі. Алє з рис. 63 видно, що при $x=l$ буде $y=0$; отже:

$$0 = \beta\theta_1 l + \frac{q_1 l^4}{18} - \frac{q_1 l^4}{24} + \frac{q_1 l^4}{120},$$

звідсіль

$$\beta\theta_1 = -\frac{q_1 l^3}{45}$$

$$\text{i остаточно } \beta y = -\frac{q_1 l^3}{45} x + \frac{q_1 l x^3}{18} - \frac{q_1 x^4}{24} + \frac{q_1 x^5}{120 l}$$

2. Для бруска з рис. 60 при $x=0$:

$$y_0 = 0; \theta_0 = \theta_1; M_0 = 0; Q_0 = \frac{q_1 l}{6}; q_0 = 0; \left(\frac{dq}{dx}\right)_0 = -\frac{q_1}{l}.$$

$$\text{Отже рівняння (128) дає: } \beta y = \beta\theta_1 x + \frac{q_1 l}{6} \frac{x^3}{6} - \frac{q_1 x^5}{120 l}.$$

¹ Див. далі: несуцільне навантаження (стор. 41).

² Див. статтю „Основи методу пружистої лінії“ Вісти К. П. І, за 1926 р. № 1.

При $x = l$ буде $y = 0$; отже:

$$0 = \beta\theta_1 l + \frac{q_1 l^4}{36} - \frac{q_1 l^4}{120},$$

звідсіль

$$\beta\theta_1 = -\frac{7q_1 l^3}{360}$$

І остаточно

$$\beta y = -\frac{7q_1 l^3}{360} x + \frac{q_1 l x^3}{36} - \frac{q_1 x^5}{120 l}$$

3. Для бруска за рис. 59 при $x = 0$:

$$y_0 = 0; \theta_0 = \theta_1; M_0 = 0; Q_0 = \frac{q_1 l}{2}; q = -q_1 = \text{постійна.}$$

Рівняння (128) дає:

$$\beta y = \beta\theta_1 x + \frac{q_1 l}{2} \frac{x^3}{6} - \frac{q_1 x^4}{24}.$$

При $x = l$

$$\beta y = 0 = \beta\theta_1 l + \frac{q_1 l^4}{12} - \frac{q_1 l^4}{24};$$

звідсіль

$$\beta\theta_1 = -\frac{q_1 l^3}{24}$$

І остаточно:

$$\beta y = -\frac{q_1 l^3 x}{24} + \frac{q_1 l x^3}{12} - \frac{q_1 x^4}{24}$$

В цих прикладах можна підставляти замість x ту абсцису, при якій бажано знайти f (стрілку вгину).

Несуцільне навантаження.

Припустімо, що при $x = c_1$ в точці K (рис. 46) прикладено зовнішню силу P . Тоді в точці K функція Q раптово змінюється на $-P$, а тому, інтегруючи рядок 2-й (див. вивід рівняння пружистої лінії) мусимо додати $-P$; коли помножимо цей рядок на dx і будемо інтегрувати, то $-P dx$ доведеться інтегрувати не від $x = 0$ до $x = x$, а від $x = c_1$ до $x = x$. Отже в дальші рядки ввійдуть: $-P(x - c_1)$; $-P \frac{(x - c_1)^2}{2}$; $-P \frac{(x - c_1)^3}{6}$ і рівняння пружистої лінії для того випадку, коли маємо й суцільне навантаження й до того, при $x = c_1$ зовнішню зосереджену силу P , буде:

$$\begin{aligned} \beta y = & \beta y_0 + \beta\theta_0 x + M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + q_0 \frac{x^4}{24} + \left(\frac{dq}{dx} \right)_0 \frac{x^5}{120} + \dots - \\ & - P \frac{(x - c_1)^3}{6} \quad \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (129)$$

Якщо сила P йде вгору, то цей член має знак $+$.

Приклади.

1. Брусок за рис. 46. При $x = 0$: $y_0 = 0; \theta_0 = \theta_1; M_0 = 0; Q_0 = \frac{Pc}{l}; q_0 = 0;$

для дільниці AK : тобто від $x=0$ до $x=c_1$

$$\beta y = \beta\theta_1 x + \frac{Pc}{l} \frac{x^3}{6};$$

для дільниці KB , тобто від $x=c_1$ до $x=l$:

$$\beta y = \beta\theta_1 x + \frac{Pc}{l} \frac{x^3}{6} - \frac{P(x-c_1)^3}{6}$$

(відрізняється одним членом).

При $x=l$, буде $y=0$; отже

$$0 = \beta\theta_1 l + \frac{Pcl^3}{6} - \frac{Pc^3}{6}; \quad \beta\theta_1 = -\frac{Pcc_1(l+c)}{6l};$$

отже

$$\beta y = -\frac{Pcc_1(l+c)}{6l} x + \frac{Pcx^3}{6l} - \frac{P(x-c_1)^3}{6}$$

2. Бруск на двох підпорах з консолями (рис. 57). Приймімо крайню ліву точку бруска за початок координат; форму пружистої кривої легко нарисувати згідно з дієвими силами (рис. 64).

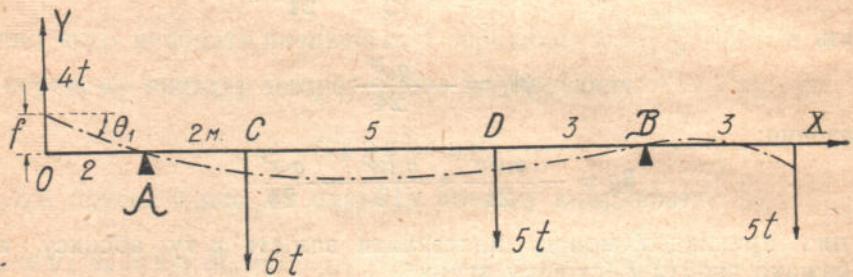


Рис. 64.

При $x=0$ $y=f$; $\theta_0=\theta_1$; $Q_0=+4$; $M_0=0$; $q_0=0$;
для OA :

$$\beta y = \beta f + \beta\theta_1 x + 4 \frac{x^3}{6};$$

для DB :

$$\beta y = \beta f + \beta\theta_1 x + 4 \frac{x^3}{6} - 6 \frac{(x-4)^3}{6} - 5 \frac{(x-9)^3}{6}.$$

Коли б в A була реакція, не рівна нулеві, то був би ще один додатковий член (див. далі).

Тут дві невідомих: f і θ_1 ; через те ми виписали два рівняння для двох дільниць, що перед підпорами, бо на них $y=0$.

$$\text{При } x=2 \dots 0 = \beta f + \beta\theta_1 \cdot 2 + 4 \frac{2^3}{6}$$

$$\text{При } x=12 \dots 0 = \beta f + \beta\theta_1 \cdot 12 + 4 \frac{12^3}{6} - 6 \frac{8^3}{6} - 5 \frac{3^3}{6}$$

Віднімаючи з другого рівняння перше

$$\beta\theta_1 \cdot 10 = -612 t \cdot m^3 \dots \beta\theta_1 = -61,2 t \cdot m^2$$

Підставимо в перше рівняння

$$0 = \beta f - 122,4 + 5,4 \dots \beta f = +117 t \cdot m^3.$$

Припустімо, що

$$\beta = EI = 96 \cdot 10^9 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$$

тоді

$$\theta_1 = -\frac{61,2 \cdot 10^7}{96 \cdot 10^9} = -0,0068; f_{\text{em}} = \frac{117 \cdot 10^9}{91 \cdot 10^9} = 1,16 \text{ см.}$$

Якщо треба знайти найбільшу стрілку вгину, то пишемо рівняння пружистої лінії для дільниці CD

$$\beta y = \beta f + \theta_1 x + 4 \frac{x^3}{6} - 6 \frac{(x-4)^3}{6}.$$

Диференціюємо:

$$\beta y' = \beta \theta_1 + 4 \frac{x^2}{2} - 6 \frac{(x-4)^2}{2} = 0.$$

Дорівнюючи нулеві, знайдемо той x , при якому є $\text{Max}f$

$$\begin{aligned} -61,2 + 2x^2 - 3(x-4)^2 &= 0 \\ x^2 - 24x + 109,2 &= 0 \\ x = 12 \pm \sqrt{144 - 109,2} &= 6 \text{ см.} \end{aligned}$$

Підставляючи в це рівняння відомі величини:

$$\beta f_{\text{max}} = 117 - 61,2 \cdot 6 + 4 \frac{6^3}{6} - 6 \frac{2^3}{6} = -114$$

$$f_{\text{max}} = -\frac{114 \cdot 10^9}{96 \cdot 10^9} = -1,2 \text{ см.}$$

Відношення

$$\frac{f_{\text{max}}}{l} = \frac{1,2}{1000} < \frac{1}{500}.$$

В залізних конструкціях вважають цей відносний угин не перевелищеним. Як максимум

$$\frac{f_{\text{max}}}{l} = \frac{1}{500} \quad \dots \quad (131)$$

Прикладена таблиця 9 дає приклади обчислення потрібних технікові величин: A , B , M , θ , f за допомогою цього аналітичного методу пружистої лінії.

Статично-невизначні бруски.

Приклади цієї таблиці: 1—7 й 14—18 включно дозволяють обчислити реакції підпор A й B , а також згинний момент M з рівняннями. Невідомі: кут повороту θ_1 й стрілку вгину f знаходимо пружистої лінії: 1) застосовуючи його при $x = l$, коли $y = 0$, знаходимо θ_1 ; 2) підставляючи в рівняння пружистої лінії знайдену θ_1 та потрібний x — знаходимо f . Приклади 8—13 дають статично невизначні бруски (але аналітично визначні), в яких є додаткові (зайві) закріплення; напр., брусок 8, де маємо невідомі A , θ_2 , M_2 .

Запропонований метод пружистої лінії дає змогу розв'язувати задачі на статично-невизначні бруски й, так звані, жорсткі рами.

¹ Не $\text{кг}/\text{см}^2$, а $\text{кг} \cdot \text{см}^2$.

1. Бруск з додатковим закріпленим

Розгляньмо приклад № 8 (див. таблицю 9). Бруск з одним вільним, другим — закріпленим кінцями, сила P при $x = c_1$. Застосовуємо рівняння (129) для дільниці DB .

При $x = 0$ маємо:

$$\beta y = 0; \theta_0 = \theta_1; M_0 = 0; Q_0 = A; q_0 = 0.$$

Для DB :

$$\beta y = \beta\theta_1 x + A \frac{x^3}{6} - P \frac{(x - c_1)^3}{6};$$

$$\beta y' = \beta\theta_1 + A \frac{x^2}{2} - P \frac{(x - c_1)^2}{2}$$

(знаходимо диференціюванням).

При $x = l$ буде $y = 0$ і $y' = 0$. Отже 2 рівняння:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \beta\theta_1 l + A \frac{l^3}{6} - P \frac{c^3}{6} \\ 0 = \beta\theta_1 + A \frac{l^2}{2} - P \frac{c^2}{2} \end{array} \right| l$$

Виключмо θ_1 :

$$0 = A \left(\frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{2} \right) - P \left(\frac{c^3}{6} - \frac{c^2 l}{2} \right) \dots \dots$$

$$A = \frac{P c^2 (3l - c)}{2l^3}$$

Згинний момент на правому кінці одержимо за правилами статики або через дальнє диференціювання:

$$\beta y'' = Ax - P(x - c_1); \text{ при } x = l \text{ маємо: } M_2 = Al - P c.$$

2. Бруск на трьох підпорах.

A) Навантаження q на обох пролітах l_0 і l_1 (рис. 65).
Початкові умови:

при $x = 0$: $y_0 = 0; \theta_0 = \theta_1; M_0 = 0; Q_0 = A; q_0 = -q_1$.

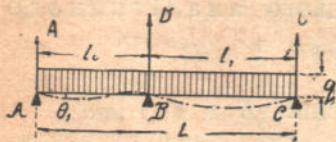


Рис. 65.

Рівняння (128) дає:

Для AB

$$\beta y = \beta\theta_1 x + A \frac{x^3}{6} - \frac{q_1 x^4}{24}$$

Для BC

$$\beta y = \beta\theta_1 x + A \frac{x^3}{6} - \frac{q_1 x^4}{24} + B \frac{(x - l_0)^3}{6}$$

Диференціюймо двічі:

Для BC

$$\beta y'' = Ax - \frac{q_1 x^2}{2} + B(x - l_0)$$

$$\text{При } x = l_0 \dots 0 = \beta\theta_1 l_0 + A \frac{l_0^3}{6} - \frac{q_1 l_0^4}{24}$$

$$\text{, } x = L \dots 0 = \beta\theta_1 L + A \frac{L^3}{6} - \frac{q_1 L^4}{24} + B \frac{l_1^3}{6}$$

$$\text{, } x = L \dots 0 = AL - \frac{q_1 L^2}{2} + Bl_1$$

З цих рівнянь можна знайти одну з невідомих θ_1, A, B .

3. Бруск на трьох підпорах.

Б) Навантаження скупченими силами (рис. 66).

При $x = 0$:

$$y_0 = 0; \theta_0 = \theta_1; M_0 = 0; Q_0 = A; q_0 = 0.$$

Немає рації писати рівняння пружистої лінії для дільниць AD й DK , бо ні в D , ні в K не знаємо ні стрілок, ні кутів повороту. Отже для KB :

$$\beta y = \beta \theta_1 x + A \frac{x^3}{6} - 2 \frac{(x-2)^3}{6} + 2 \frac{(x-4)^3}{6},$$

для EC :

$$\beta y = \beta \theta_1 x + A \frac{x^3}{6} - 2 \frac{(x-2)^3}{6} + 2 \frac{(x-4)^3}{6} + B \frac{(x-6)^3}{6} - 7 \frac{(x-8)^3}{6};$$

для EC :

$$\beta y'' = A x - 2(x-2) + 2(x-4) + B(x-6) - 7(x-8)$$

$$\text{При } x = 6 \dots 0 = \beta \theta_1 \cdot 6 + A \frac{6^3}{6} - 2 \frac{4^3}{6} + 2 \frac{2^3}{6}$$

$$\therefore x = 10 \dots 0 = \beta \theta_1 \cdot 10 + A \frac{10^3}{6} - 2 \frac{8^3}{6} + 2 \frac{6^3}{6} + B \frac{4^3}{6} - 7 \frac{2^3}{6}$$

$$\therefore x = 10 \dots 0 = A \cdot 10 - 2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 + B \cdot 4 - 7 \cdot 2.$$

збос:

$$\left. \begin{array}{l} 36 \beta \theta_1 + 216A = 112 \\ 60 \beta \theta_1 + 1000A + 64B = 648 \\ 10A + 4B = 18 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Звідсіль } A = \frac{13}{36} t \\ B = 3,6 t \\ \beta \theta_0 = \frac{17}{18} \end{array}$$

Жорсткі рами.

Так називають ламаний стрижень чи балку (рис. 67), що її склеяно з двох частин, припустімо, під прямим кутом так, що під час згинання цей склепаний кут залишається прямим.

Візьмімо раму (рис. 67) за Клейнштедтом (формули для розрахунку рамних конструкцій стор. 2 і стор. 18). Випростовуючи раму, як показано на рисунку, одержимо пряму балку ABC , яка буде згинатися так, що в точці B елементи згинутої осі будуть під кутом 180° до їх після деформації. Нижче нарисовано балку на трьох підпорах, до якої її зводиться жорстка рама.

При $x = 0$: $y_0 = 0; \theta_0 = \theta_1; M_0 = 0; Q_0 = -A$

При $x = 4$ функція Q робить схід на $+12t$.

При $x = 6$ функція q робить схід з нуля на $-3 t/m$.

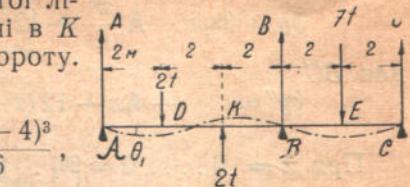


Рис. 66.

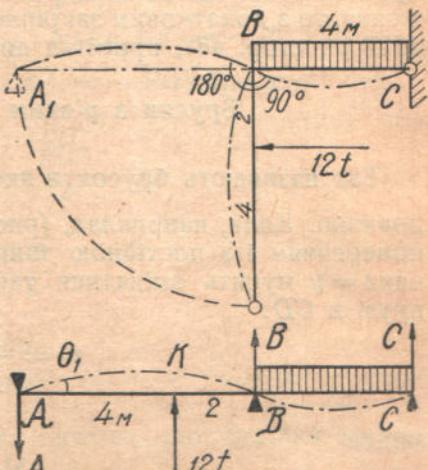


Рис. 67.

Рівнання пружистої лінії:
для KB

$$\beta y = \beta \theta_1 x - A \frac{x^3}{6} + 12 \frac{(x-4)^3}{6}$$

для BC

$$\beta y = \beta \theta_1 x - A \frac{x^3}{6} + 12 \frac{(x-4)^3}{6} + B \frac{(x-6)^3}{6} - 3 \frac{(x-6)^4}{24}$$

для BC.

$$\beta y'' = -Ax + 12(x-4) + B(x-6) - 3(x-6).$$

$$\text{При } x = 6 \dots 0 = \beta \theta_1 \cdot 6 - A \frac{6^3}{6} + 12 \cdot \frac{2^3}{6}$$

$$\text{При } x = 10 \dots 0 = \beta \theta_1 \cdot 10 - A \frac{10^3}{6} + 12 \cdot \frac{6^3}{6} + B \frac{4^3}{6} - \frac{3 \cdot 4^4}{24}$$

$$\text{При } x = 10 \dots 0 = -A \cdot 10 + 12 \cdot 6 + B \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4^2}{2}$$

Найкраще розв'язувати рівнання детермінантами

$$A = \begin{vmatrix} 6 & 16 & 0 \\ 60 & 2400 & 64 \\ 0 & 48 & 4 \end{vmatrix} = \frac{6 \cdot 16 \cdot 4}{6 \cdot 2 \cdot 4} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 10 & 150 & 16 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 140 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{8(140-18)}{320-80} = 3 \frac{1}{15} t.$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 36 & 0 \\ 60 & 1000 & 64 \\ 0 & 10 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 18 & 0 \\ 10 & 500 & 16 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 18 & 0 \\ 0 & 320 & 16 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Тут ми віднімаємо з другого рядка перший, помножений на 10; через це детермінанти 3-го порядку перетворюються в детермінанти 2-го порядку. Спочатку було виведено за дужки: 16, 6, 4 і т. д.

Для брусків на 4-х підпорах, чи для жорстких рам у вигляді літери „П“ одержимо 5 рівнань з 5 невідомими, але детермінанти 5-го порядку так само перетворюються одразу в детермінанти 3-го порядку

Ці задачі виходять за межі цього курсу.

Треба зауважити, що на практиці часто спрощують статично невизначний брускок відкиданням додаткового закріплення. Розраховують його як статично-визначений; якщо він витримає навантаження, то з додатковим закріпленням витримає й поготів. (див. „Hütte“ I 1912 р., стор. 482, примітка до таблиці згинних моментів).

Бруски з рівним опором згинові. Ресора.

Так називають брускок, в якому $n_5 = \frac{M}{W}$ стала величина по цілій довжині. Коли, наприклад, (рис. 68) $M = Px$, а брускок з прямокутнім попереччям і з постійною шириною $= b$, то змінна висота прямокутника $= y$ мусить змінятися так, щоб напруга в AB дорівнювала напрузі в CD :

$$n_5 = \frac{Px}{by^2} = \frac{Pl}{bh^2};$$

звідси

$$y^2 = \frac{h^2}{l} x \text{ (парабола).}$$

Площа параболи $= \frac{2}{3} hl$; отже вага такого бруска на $\frac{1}{3}$ (33%) менш за вагу бруска з постійним попереччям $= b \cdot h$ по цілій довжні l .

Якщо, навпаки, постійна буде висота прямокутника h , а ширина z змінна, то (рис. 69)

$$n_5 = \frac{Px}{zh^2} = \frac{Pl}{bh^2};$$

звідси

$$z = \frac{b}{l} x \text{ (проста).}$$

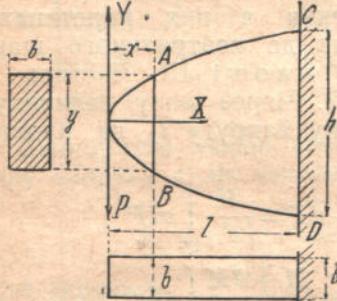


Рис. 68.

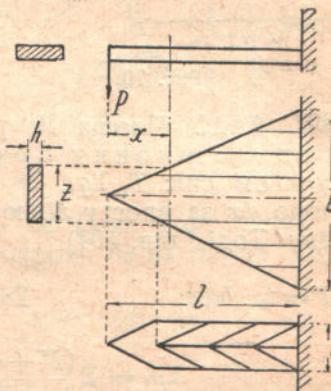


Рис. 69.

Якщо розрізати трикутник ABC , як показано вздовж і скласти, як показано нижче, то утворимо аркушеву ресору з трьох штаб. Вона працюватиме так само, як трикутня ресора ABC . Тоді $b = mb_1 =$ = число штаб \times ширина штаби \cdot й для розрахунку аркушової ресори з гартованої сталі ($n_5 = 4300 \text{ кг/см}^2$) маємо

$$n_5 = \frac{6Pl}{mb_1 h^2}.$$

Стрілку згину такої ресори знайдемо з рівняння: $\beta y'' = -Px$; тут $\beta = EI =$ змінна $= E \frac{zh^3}{12} = E \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{x}{l} = \beta_0 \frac{x}{l}$; отже $\beta_0 y'' = -Pl$. Помножуємо на dx , інтегруємо від 0 до x : $\beta_0 y - \beta_0 y_0 = -Plx$; при $x = l$ буде $y = 0$; отже $\beta_0 y_0 = Pl^2$. Далі:

$$\beta_0 y - \beta_0 y_0 - Pl^2 x = -\frac{Plx^2}{2}.$$

При $x = l$ $y = 0$; отже:

$$\beta_0 y_0 = -Pl^3 + \frac{Pl^3}{2};$$

звідси

$$y_0 = f = -\frac{Pl^3}{2EI_0}.$$

Порівнюючи це з $f = \frac{Pl^3}{33}$ (таблиця 9) бачимо, що стрілка згину трикутної ресори в $1\frac{1}{2}$ рази більш за стрілку прямокутної, тобто трикутня ресора більш еластична, м'яка.

ДОТИЧНІ СИЛИ ПРИ ЗГІНІ.

Візьмімо дві рейшини, складімо їх так, щоб кінці зрівнялися, затиснемо з другого кінця й зігнемо. Ми побачимо, що одна рейшина по другій зсунулася. Отже в площині розділу існує зсув при згині. Якщо зіб'ємо рейшини цвяхами, то зсуву не буде, а згинати буде трудніше. Отже, при згині бруска вздовж його існують дотичні сили й дотичні напруги. Знайдімо величину дотичної напруги на віддалені z_1 від невтрального шару. Виріжмо з угнутого бруска частину A (рис. 70) площами I, II й III. Нехай між площами I й II віддалення $= dx$, згинні моменти в цих перетинах нехай

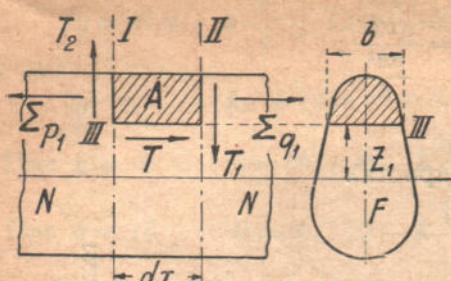


Рис. 70.

$M + dM$ є M . Площа III рівнобіжна до невтрального шару NN . Визначмо b — ширину бруска по площині III. Частина A буде під впливом сил: T , Σq_1 , ΣP_1 , T_1 й T_2 . Через малу величину згину вважаємо dx за просту лінію й дотичну напругу t_5 на площині III за постійну. Тоді (див. 101)

$$T = t_5 \cdot b dx; \quad \Sigma q_1 = \Sigma \frac{Mz}{I} dF = \frac{M}{I} \int zdF \dots \dots \quad (132)$$

$$\Sigma P_1 = \Sigma \frac{(M + dM)z}{I} dF = \frac{M + dM}{I} \int zdF \dots \dots \quad (133)$$

Тут $\int zdF = S_1$ — статичний момент частини площини F , що лежить вище z_1 (заштрихованої); I — екваторіальний момент інерції цілої площини F . З рівняння рівноваги:

$$T = \Sigma P_1 - \Sigma q_1 = \frac{dM}{I} S_1;$$

маємо

$$t_5 \cdot b dx = \frac{dM}{I} S_1 \dots \dots \dots \quad (134)$$

або

$$t_5 = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{S_1}{bI}$$

Але $\frac{dM}{dx} = Q$ — перерізна сила (див. 112), отже

$$t_5 = \frac{QS_1}{bI} \dots \dots \dots \quad (135)$$

Значення величин Q , S_1 , b , I — з'ясовано вище.

Приклади.

1. Брусок прямокутного перетину $b \times h$ см. Знайти дотичну напругу на невтральному шарові (рис. 71).

Для заштрихованої частини перетину:

$$S_1 = \int zdF = b \int_0^{\frac{h}{2}} zdz = b \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{8}$$

і напруга

$$t_5 = \frac{Q \cdot \frac{bh^2}{8}}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \dots \dots \dots \quad (136)$$

тобто: напруга на нейтральному шарові перевищує рівномірно розподілену напругу $t_5 = \frac{Q}{bh}$ (див. 38) в $1\frac{1}{2}$ рази.

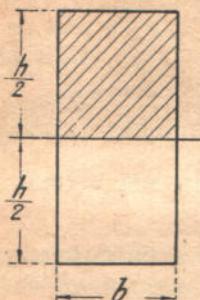


Рис. 71.

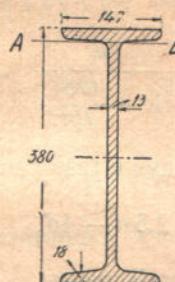


Рис. 72.

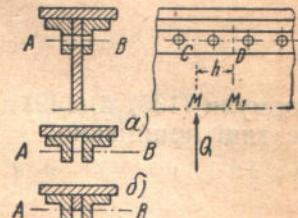


Рис. 73.

2. Двокоритне залізо (рис. 72) № 38 (див. сортамент). Знайти дотичну напругу а) на нейтральному шарові, б) на площині АВ.

$$\text{a)} \quad S_1 = 1,3 \int_0^{17,2} zdz + 14,7 \int_{17,2}^{19} zdz = 670 \text{ см}^3;$$

або так (краще)

$$S_1 = 14,7 \int_0^{19} zdz - 13,4 \int_0^{17,2} zdz = 670 \text{ см}^3.$$

$$I = 21499 \text{ см}^4 \text{ (таблиця); } t_5 = \frac{Q \cdot 670}{21499 \cdot 1,3} = \frac{Q}{41,7}$$

$$\text{б)} \quad S_1 = 14,7 \int_{17,2}^{19} zdz = 478; \quad t_5 = \frac{Q \cdot 478}{21499 \cdot 1,3} = \frac{Q}{58,5} \dots \quad (137)$$

3. Нютована двокоритна балка. Знайти віддалення між нютами (нютовий крок, чи поступ) (рис. 73).

а) Нюта зрізається по двом площадкам круга; отже (див. 38)

$$t_3 = \frac{T}{2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}}.$$

Зрізну силу T знайдемо як в (134); тільки тут різниця моментів буде не dM , а

$$M_1 - M = Qh.$$

Зрізна сила $T = \frac{Qh S_1}{I}$ (на основі 134).

Дорівнюючи T тій, що вище наведено:

$$\frac{Qh S_1}{I} = t_3 \cdot \frac{\pi d^2}{2}.$$

Звідсіль

$$h = \frac{\pi d^2 t_3 I}{2 Q S_1} \dots \dots \dots \quad (138)$$

Тут S_1 — статичний момент фігури (а)коло осі X .

б) Вертикальна стінка зрізається по лінії $CD = h - d$. Та сама зрізна сила T працює на зріз стінки. На основі (38)

$$t_3 = \frac{T}{(h-d)b};$$

отже

$$t_3(h-d)b = \frac{QhS_1'}{I}.$$

Тут S_1' — статичний момент площини (б)коло осі X .

Звідсіль

$$h = \frac{d}{1 - \frac{QS_1'}{Ibt_3}} \quad \dots \dots \dots \quad (139)$$

Формули (138) й (139) дають дуже різну вартість для h (max і min). В практиці приймаємо:

$$h = 2,5d - 4d.$$

КОСИЙ ЗГИН.

Так називають згин, коли площа згинного моменту не спадається ні з однією з головних площ бруска. Не

хай всі поперечні сили, що згибають брускок, лежать в площині UU (рис. 74), що робить кут φ з віссю Y (рис. 74). Всі сили, що є в площині UU перпендикулярно до осі бруска (X) переносимо за їх напрямком до перетину з цією віссю, тоді

$$M = \sum P_i x_i \quad \dots \dots \dots \quad (140)$$

Нехай P — проекція одної з таких сил на площину YOZ ; розкладаємо її на дві складові:

$$P_1 = P \cos \varphi; P_2 = \sin \varphi \quad \dots \dots \dots \quad (141)$$

Тоді й згинний момент розкладається:

$$1) \text{ моментколо осі } Z: M_z = M \cos \varphi;$$

$$2) \text{ моментколо осі } Y: M_y = M \sin \varphi \quad \dots \dots \quad (142)$$

За II законом Ньютона можна розглянути зокрема дію цих сил: вертикальних і поземих. Ясно, що вертикальні сили (P_2) вчиняють розтяг (+) в I та в II квадрантах і стиск (-) в III та IV квадрантах (див. верхні знаки). Поземі сили (P_1) вчиняють розтяг (+) в II та III квадрантах і стиск (-) в I та IV квадрантах (див. нижні знаки).

Знайдемо напругу в точці A ($y > 0, z > 0$). Як і раніше (див. 101)

$$n_1 = \frac{M_y z}{I_y}; \quad n_2 = \frac{M_z y}{I_z}.$$

Результативна напруга в точці A :

$$n = n_1 - n_2 = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \quad \dots \dots \dots \quad (143)$$

Підставляючи значення з (142), маємо:

$$n = M \frac{z \sin \varphi}{I_y} - M \frac{y \cos \varphi}{I_z} \dots \dots \dots \quad (144)$$

Щоб знайти рівнання нейтральної осі NN (рис. 74б), треба знайти, при яких y і z буде $n=0$; отже:

$$\frac{z \sin \varphi}{I_y} - \frac{y \cos \varphi}{I_z} = 0 \dots \dots \dots \quad (145)$$

буде рівнання нейтральної осі NN .

Простіш:

$$z = \frac{I_y}{I_z} \operatorname{ctg} \varphi \cdot y \dots \dots \dots \quad (146)$$

Бресова (й Сен-Венанова) теорема.

Нарисуймо на даних головних осях Z і Y еліпс інерції, якого рівнання буде (див. 89)

$$\frac{y^2}{r_z^2} + \frac{z^2}{r_y^2} = 1$$

Проведімо слід площини згинного момента UU (рис. 75). Рівнання цієї прямої буде

$$z = -\operatorname{tg} \varphi \cdot y \dots \dots \dots \quad (147)$$

Порівнюючи (146) та (147), знаходимо: слід площини згинного момента й нейтральна вісь йдуть по спряжених діаметрах еліпса інерції.

Справді, бо якщо рівнання якогось діаметра:

$$z = k \cdot y,$$

то рівнання діаметра, спряженого з цим, буде:

$$z = -\frac{r_y^2}{r_z^2 \cdot k} \cdot y,$$

бо добуток кутових коефіцієнтів двох спряжених діаметрів еліпса:

$$k \cdot k_1 = -\frac{r_y^2}{r_z^2}.$$

Якраз такі кутові коефіцієнти простих (146) і (147), бо

$$\frac{I_y}{I_z} = \frac{r_y^2}{r_z^2}.$$

Розрахунок лат.

Латами називають бруски, що перекривають крокв'яні ферми й підтримують дах. Нехай кут крокви з поземою лінією $= \varphi$ (рис. 76). Тоді кут площини діяння сил тяжіння з площею XOY буде $= 90 - \varphi$. Найбільша напруга на стиск буде в точці M

$$\left(y = \frac{b}{2}; z = \frac{h}{2} \right);$$

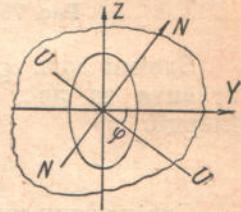


Рис. 75.

формулою (144) дістанемо:

$$n = M \left(-\frac{\frac{h}{2} \cos \varphi}{\frac{bh^3}{12}} + \frac{\frac{b}{2} \sin \varphi}{\frac{hb^3}{12}} \right) = 6M \left(\frac{\cos \varphi}{bh^2} + \frac{\sin \varphi}{hb^2} \right)$$

Тут напруги на стиск додаються, бо й сили в площині XOZ в цьому квадранті вчиняють стиск. Якщо винести за дужки $\frac{1}{h^2 b^2}$, то

$$n = \frac{6M}{h^2 b^2} (b \cos \varphi + h \sin \varphi) = \frac{6Ma}{h^2 b^2},$$

бо $a = b \cos \varphi + h \sin \varphi$ — сума проекцій b та h на позему площину.

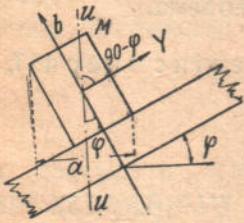


Рис. 76.

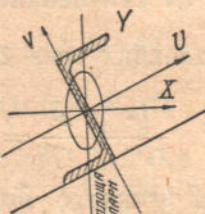


Рис. 77.

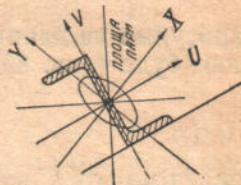


Рис. 78.

Залізні лати роблять із зетового заліза, при чому його треба ставити за рис. 77, а не за рис. 78, як це видно з форми еліпса інерції.

Нютована балка.

Скріплюючи нютами листи кутівки, та інше фасонне залізо утворюють дуже міцні балки для зводів (кранів) та мостів. Прикладений в кінці книги сортамент дає потрібні величини для обчислення I та W балки. Наприклад, (рис. 78-а)

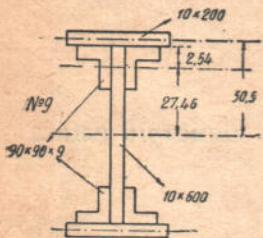


Рис. 78-а.

$$I = \frac{1 \cdot 60^3}{12} + 4 \left\{ 115,7 + 27,46^2 \cdot 15,52 \right\} +$$

$$+ 2 \left\{ \frac{20 \cdot 1^3}{12} + 30,5^2 \cdot 20,1 \right\}$$

$$W = \frac{I}{e} = \frac{I}{31}.$$

Головні напруги.

Виріжмо з угнутого бруска через усю ширину його безкрайньо близькими площами призму ABC (рис. 79), при чому стінка AC рівнобіжна до невтрального шару, стінка BA перпендикулярна до нього, а стінка BC йде під кутом α до нього. Якщо визначити площу стінки BC через F , то

$$\text{пл. } AB = F \sin \alpha; \text{ пл. } AC = F \cos \alpha.$$

На цю призму діють сили: N_0 , T_0 , N_1 , T_1 й T_2 . Під впливом цих сил призма ABC мусить бути в рівновазі. Напруги на стінках AB й AC рівні між собою (див. 42); величина напруг $= t_5$ (див. 135). Напруга на AB

буде n_5 (див. 101), Через малу величину AB й AC вважаємо n_5 й t_5 постійними по цих площах. Напруги на похилій стінці BC невідомі: n_0 , t_0 .

Сила = напруга \times площа (див. 3). Отже сили:

$$N_0 = n_0 F; T_0 = t_0 F; N_1 = n_5 F \sin \alpha; T_1 = t_5 F \sin \alpha; T_2 = t_5 F \cos \alpha.$$

Розкладемо кожну силу на дві складові по напрямках N_0 й T_0 й візьмімо суму проекцій їх на ці осі:

$$1) n_0 F - n_5 F \sin^2 \alpha + t_5 F \sin \alpha \cos \alpha + t_5 F \sin \alpha \cos \alpha = 0 \quad \dots \quad (148)$$

$$2) t_0 F - n_5 F \sin \alpha \cos \alpha - t_5 F \sin^2 \alpha + t_5 F \cos^2 \alpha = 0 \quad \dots \quad (149)$$

В дальншому не пишемо значків „5“, пам'ятаючи, що ці напруги — від згину. Поділімо на F , введімо кут $\beta = 2\alpha$:

$$n_0 = n \frac{1 - \cos \beta}{2} - t \sin \beta \quad \dots \quad (150)$$

$$t_0 = n \frac{\sin \beta}{2} - t \cos \beta \quad \dots \quad (151)$$

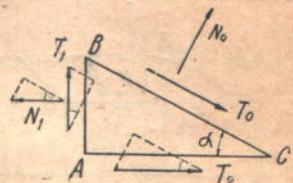


Рис. 79.

При якому β буде $\max n_0$?

$$\frac{dn_0}{d\beta} = \frac{n}{2} \sin \beta - t \cos \beta = 0; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2t}{n} \quad \dots \quad (152)$$

Звідсіль

$$\frac{d^2 n_0}{d\beta^2} = + \frac{n}{2} \cos \beta + t \sin \beta.$$

Через те, що $\operatorname{tg} \beta > 0$, β лежить або в I, або в III квадранті; отже $0 < \beta_1 < 90^\circ$ і $180^\circ < \beta_2 < 270^\circ$, або $0 < \alpha_1 < 45^\circ$ й $90^\circ < \alpha_2 < 135^\circ$. тобто α має дві вартості, що відрізняються на 90° .

Коли $\alpha < 45^\circ$, то $\frac{d^2 n_0}{d\beta^2} > 0 \dots n_0$ досягає \min

„ $90^\circ < \alpha < 135^\circ$, то $\frac{d^2 n_0}{d\beta^2} < 0 \dots n_0$ „ \max

З рівняння (152) визначаємо:

$$\sin \beta = \pm \frac{2t}{V n^2 + 4t^2}; \quad \cos \beta = \pm \frac{n}{V n^2 + 4t^2} \quad \dots \quad (153)$$

Підставляючи в (150) значення (153) спочатку з нижніми, а потім з верхніми знаками, одержимо:

$$\text{При } 90^\circ < \alpha < 135^\circ \quad \text{Max } n_0 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} V n^2 + 4t^2 \quad \dots \quad (154)$$

$$\text{При } 0 < \alpha < 45^\circ \quad \text{Min } n_0 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} V n^2 + 4t^2 \quad \dots \quad (155)$$

Ці напруги наз. головними напругами, а напрямки, що визначаються рівнянням (152), головними напрямками. Аналогічно шукаючи $\max t$, можна прийти до висновку, як і в (42), що $\max t$ існує на площинках, що перпендикулярні між собою й складають кут 45° з головними напрямками. Отже

$$\max t = \frac{1}{2} V n^2 + 4t^2 \quad \dots \quad (156)$$

СКЛАДНА ДЕФОРМАЦІЯ.

Розтяг (стиск) позацентровою силою.

Якщо силу прикладено не в центрі ваги площини поперечного перетину бруска (див. рис. 10), то ця сила не тільки розтягає (стискує) брусок, а й згинає його. В кожній точці площини F ми маємо тоді: 1) n_1 (n_2), напругу на розтяг (стиск) і 2) n_5 , напругу на згин. Результивна складна напруга n_6 є алгебрична сума цих напруг. Нехай проекція подовжньої сили P попадає в точку A , сюди й перенесемо точку прикладу сили (рис. 80). Координати $A : y = m; z = n$;

знайдім напругу в точці B (y, z). В центрі ваги площини F в C прикладаємо дві сили рівні P й протилежні напрямком. Тоді маємо: розтяг центральною силою P й згин парою $= P \cdot AC$, що згибає брусок в площині AC . Такий момент, як в (142), розкладемо на момент коло осі Y , а саме $M_y = Pn$ й момент коло осі Z , а саме $M_z = Pm$. Якщо припустимо, що силу P спрощено до нас, то обидва моменти вчиняють в I квадранті сили розтягу (одного знаку). Отже на підставі (103)

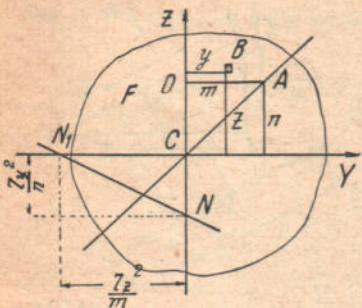


Рис. 80.

Підставляючи:

$$I_y = r_y^2 F; I_z = r_z^2 F;$$

дістанемо:

$$n_6 = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{n z}{r_y^2} + \frac{m y}{r_z^2} \right) \dots \dots \dots \quad (158)$$

На невтральній осі $n_6 = 0$, отже рівняння невтральної осі

$$1 + \frac{n z}{r_y^2} + \frac{m y}{r_z^2} = 0,$$

або

$$\frac{y}{r_z^2} + \frac{z}{r_y^2} = 1 \dots \dots \dots \quad (159)$$

Це рівняння простої, що відтинає від осі Y відтинок $= -\frac{r_z^2}{m}$ і від осі Z відтинок $= -\frac{r_y^2}{n}$.

Якщо точка прикладу сили A пересувається ліворуч по прямій AD (рис. 80), то є рівнобіжна осі Y , та $n = \text{const}$, m зменшується; тоді $\frac{r_y^2}{n} = \text{const}$, а $\frac{r_z^2}{m}$ — збільшується; отже невтральна вісь повертається коло точки N .

Коли точка прикладу сили прийде в A_1 (сила в головній площині бруска) (рис. 81), то координати A_1 : $m = 0$, $n = n$, і рівняння невтральної осі:

$$z = -\frac{r_y^2}{n} \text{ (проста, } \parallel \text{ осі } Y) \dots \dots \dots \quad (160)$$

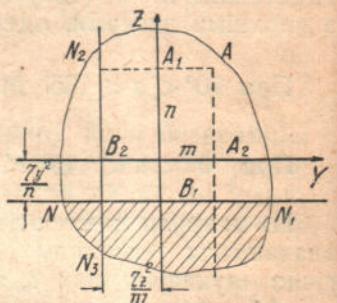


Рис. 81.

Коли точка прикладу сили прийде до A_2 , координати якої є:

$$m = m, \quad n = 0,$$

то рівнання невтральної осі:

$$y = -\frac{r_z^2}{m} \quad (\text{проста } \parallel \text{ осі } Z) \dots \dots \dots \quad (161)$$

Якщо P — стискова сила, то на заштрихованій частині площині F (рис. 81) повстане розтяг, а по незаштрихованій стиск.

Цікаво, що коли перемістити точку прикладу сили в B_1

$$\left(m = 0, \quad n = -\frac{r_y^2}{n} \right),$$

то рівнання невтральної лінії знайдемо, підставляючи в (159) замість $n \dots -\frac{r_y^2}{n}$ і замість $m \dots 0$:

$$1 + \frac{-\frac{r_y^2}{n} \cdot z}{r_y^2} = 0,$$

або

$$z = n \quad (\text{проста } AA_1) \dots \dots \dots \quad (162)$$

Тобто точки A_1 й B_1 взаємно зв'язані так, що, коли сила в одній з них, то невтральна вісь проходить через другу. Аналогічно: коли сила в B_2 , то рівнання невтральної осі:

$$y = m \quad (\text{проста } AA_2) \dots \dots \dots \quad (163)$$

Ядро перетину.

Застосуймо виведені формули для різних форм поперечного перетину бруска.

1. Прямоугольник (рис. 82)

$$I_y = \frac{bh^3}{12}; \quad r_y^2 = \frac{bh^3}{12}; \quad bh = \frac{h^2}{12}; \quad I_z = \frac{hb^3}{12}; \quad r_z^2 = \frac{b^2}{12}.$$

Якщо сила в $A_1 \left(0, \frac{h}{2}\right)$, то рівнання невтральної осі (див. 160):

$$z = -\frac{r_y^2}{n} = -\frac{\frac{h^2}{12} \cdot 2}{12 \cdot h} = -\frac{h}{6} \quad (\text{проста } BC) \dots \dots \quad (164)$$

Якщо сила в $A_2 \left(\frac{b}{2}, 0\right)$, то рівнання невтральної осі:

$$y = -\frac{r_z^2}{m} = -\frac{\frac{b^2}{12} \cdot 2}{12 \cdot b} = -\frac{b}{6} \quad (\text{проста } DE) \dots \dots \quad (165)$$

Якщо проекція сили йде по A_1A , то невтральна вісь BC повертаєтьсяколо N_1 за годинниковою стрілкою й коли сила в A , то невтральна вісь займає положення N_1N_2 (порівняти з рис. 80). Отже коли сила десь на ламаній A_1AA_2 , то в заштрихованій частині площині F повстають розтягові напруги (рис. 82).

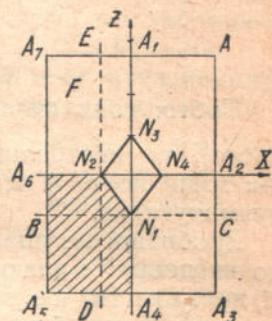


Рис. 82.

Тепер навпаки, нехай сила в N_1 . Тоді в рівнання нейтральної осі (159) треба підставити: 0 замість $\frac{h}{2}$ та $-\frac{h}{6}$ замість n ; рівнання нейтральної осі:

$$1 + \frac{-\frac{h}{6} \cdot z}{\frac{h^2}{12}} = 0,$$

або

$$1 - \frac{\frac{z}{h}}{\frac{2}{2}} = 0,$$

або

$$z = \frac{h}{2} \text{ (проста } AA_1A_7) \dots \dots \dots \quad (166)$$

Тобто: коли сила на $\frac{h}{6}$ від центра ваги (чи може ще більше до нього), то нейтральна вісь проходить по периметру прямокутника (чи зовні його) й нема розтягових напруг в верхній половині прямокутника.

Зробивши це для всіх точок периметру $AA_2A_3A_4A_5A_6A_7$, прийдемо до висновку: якщо точка прикладу стискової сили (чи її проекція) не виходить за межі ромба $N_1N_2N_3N_4$, то на площині F не буде розтягових напруг. Цей ромб з діагоналями $\frac{h}{3}$ та $\frac{b}{3}$ наз. ядром перетину прямокутника.

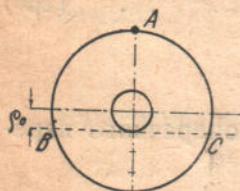


Рис. 83.

2. Круг (рис. 83)

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}; r_x^2 = r_y^2 = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{\pi d^2}{4} = \frac{d^4}{16}$$

Коли сила в A

$$\left(m=0, n=\frac{d}{2} \right),$$

то рівнання нейтральної осі:

$$z = -\frac{r_y^2}{n} = -\frac{d^2 \cdot 2}{16 \cdot d} = -\frac{d}{8} = -\frac{r}{4} \text{ (проста } BC) \dots \quad (167)$$

Пересуваючи A по колу, знайдемо ядро перетину. Це буде коло радіусом $= \frac{r}{4} = \rho_0$.

3. Кільце (перстень) (рис. 84).

$$I_z = I_y = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}; r_z^2 = r_y^2 =$$

$$= \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} : \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} = \frac{R^2 + r^2}{4}.$$

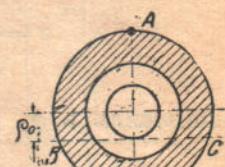


Рис. 84.

Якщо сила в A ($m=0, n=R$), то рівнання нейтральної осі:

$$1 + \frac{R \cdot z}{R^2 + r^2} = 0;$$

$$\text{або } z = -\frac{R^2 + r^2}{4R} = \rho_0 \text{ (проста } BC) \dots \dots \quad (168)$$

Пересуваючи A по зовнішньому колу, знайдемо ядро перетину кільця. Це є круг радіусом

$$\rho_0 = \frac{R^2 + r^2}{4R}.$$

Обрахунок димаря на стійкість.¹

Визначмо: $\begin{cases} H_0 = \text{повна висота димаря в метрах.} \\ H = \text{висота димаря в метрах до даного перетину.} \end{cases}$

$\omega = 125 - 250 \text{ кг/м}^2$ — тиск вітру на 1 м^2 площині \perp до його напрямку.

$\phi = 0,5 - 1$ — коефіцієнт, що залежить від форми димаря (див. таблицю)

$D = 2R$ — довільний зовнішній діаметр димаря
 $D_0 = 2R_0$ — верхній " " " } $R = R_0 + Hm$
 $m = \operatorname{tg}$ кута нахилу зовнішньої стінки.

$d_0 = 2r_0$ — внутрішній " " } $r = r_0 + Hm_1$
 $d = 2r$ — довільний " " } $m_1 = \operatorname{tg}$ кута нахилу внутр. стінки

$F = c(D^2 - d^2)$ — площа попер. перетину димаря (див. таблицю)

$\rho_1 = c_1 \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)$ — найбільший } радіуси ядра перетину димаря

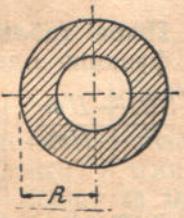
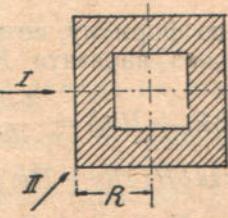
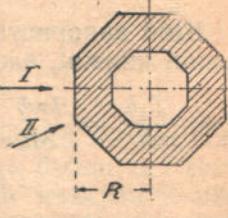
$\rho_2 = c_2 \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)$ — найменший } (див. таблицю)

$h = \frac{H}{3} \frac{R + 2R_0}{R + R_0}$ — висота від даного перетину до центра ваги трапеза (проекції частини димаря на верт. площину)

$P_1 = k\omega\phi H(R + R_0)$ — тиск вітру на площину цього трапеза, збільшений навмисно в k разів для запасу (див. таблицю)

G — вага розглянутої частини димаря

$\gamma = 1600 - 2000 \text{ кг/м}^3$ — вага 1 кб м цегли в кг.

Ф о р м а					
Напрям вітру	Довільний	I	II	I	II
ϕ	$\frac{2}{3}$	1	0,5	0,707	0,646
Площа трапеза	$(R + R_0)H$	$(R + R_0)H$	$1,414(R + R_0)H$	$(R + R_0)H$	$0,082(R + R_0)H$
C	$\pi/4$		1		0,828
C_1	0,25	0,333	—	0,264	—
C_2	0,25	—	0,236	—	0,244

¹ Див. роботу автора, вид. проф. Деппом „Расчет дымовых труб“. Петербург, 1906 г.

Вживані величини

$D_0 =$	1 м.	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
$m =$		0,025									0,02				
$k =$		1,6		1,8					2,0				2,4		

Необхідна й достатня умова стійкості:

$$GR = P_1 \cdot h \dots \dots \dots \quad (169)$$

де $M_2 = G \cdot R$ — момент власної ваги димаря коло осі, що проходить через B_1 (далі, рис. 86); $M_1 = P_1 h$ — момент рівнодійної сили вітру коло тієї ж осі, навмисно збільшений в $\frac{1}{3}$ разів (запас). Щоб умова (169) виконувалася по всіх перетинах димаря, потрібно, щоб:

$$dM_1 = dM_2 \dots \dots \dots \quad (170)$$

Перемножмо варності P_1 та h (див. раніше) і підставмо замість

$$R = R_0 + Hm; \text{ тоді } M_1 = \frac{k\omega\Phi}{3} H^2 (3R_0 + Hm)$$

$$dM_1 = \frac{k\omega\Phi}{3} (6HR_0 + 3H^2m) dH = k\omega\Phi H (2R_0 + Hm) dH = P_1 \cdot dH. \quad (171)$$

$$M_2 = G \cdot R; \quad dM_2 = GdR + RdG;$$

але

$$G = \gamma \int_0^H F \cdot dH; \quad dG = \gamma F dH;$$

отже

$$dM_2 = (Gm + \gamma FR) dH \dots \dots \dots \quad (172)$$

Дорівнюючи (171) до (172) й поділяючи на dH :

$$Gm + \gamma FR = P_1;$$

звідсіль

$$F = \frac{P_1 - Gm}{\gamma R} \text{ (формула Піча)} \dots \dots \dots \quad (173)$$

Щоб використати цю формулу, потрібні Пічові таблиці, що є в названій книжці, але можна виразити F , як функцію одної змінної H :

$$G = \frac{P_1 h}{R} = \frac{k\omega\Phi}{3R} H^2 (3R_0 + Hm) = \frac{k\omega\Phi}{3} H^2 \frac{3R_0 + Hm}{R_0 + Hm} \quad \left. \begin{array}{l} \text{підставмо} \\ \text{до (173)} \end{array} \right\}$$

$$P_1 = k\omega\Phi H (2R_0 + Hm)$$

$$F = \frac{3k\omega\Phi H (2R_0 + Hm) (R_0 + Hm) - k\omega\Phi H^2 (3R_0 + Hm)m}{\gamma (R_0 + Hm)^2} =$$

$$= \frac{k\omega\Phi}{3\gamma} H \frac{6R_0^2 + 3HR_0m + 6R_0Hm + 3H^2m^2 - 3HR_0m - H^2m^2}{(R_0 + Hm)^2} =$$

$$= \frac{2k\omega\Phi}{3\gamma} H \frac{3R_0^2 + 3R_0Hm + H^2m^2}{(R_0 + Hm)^2} = \alpha H \frac{3\beta^2 + 3\beta H + H^2}{(\beta + H)^2},$$

тут

$$= \frac{2k\omega\Phi}{3\gamma} \text{ и } \beta = \frac{R_0}{m}.$$

Щоб викреслити цю криву, треба замість H підставляти числа від $H = 0$ до $H = H_0$.

Ще простіша для обчислення така формула:

$$F = \alpha H \left[\left(\frac{\beta}{\beta + H} \right)^2 + \frac{\beta}{\beta + H} + 1 \right] \dots \quad (174)$$

Коли знайдено потрібні для належної тяги величини H_0 , d_0 , d_1 , то за таблицями приймаємо величини: k , ω , ϕ , γ , m , а величину R_0 треба прийняти так: товщина стінки вверху приймається:

якщо $0,6 < d_0 < 1,5$ то	$\delta = 0,15 \text{ см}$
" $1,5 < d_0 < 2$ "	$\delta = 0,20 \text{ см}$
" $2 < d_0$ "	$\delta = 0,25 \text{ см}$

Далі викреслюємо Пічову криву (рис. 85), відкладаємо можливі площини на верхній простій: OA_1 , OA_2 , OA_3 і т. д. і на нижній простій O_1M_1 , O_1M_2 , O_1M_3 ... і т. д., проводимо прости A_1M_1 , A_2M_2 ... Вони покажуть, як змінялося б F , коли б товщина стінки δ зверху до низу була однакова. Ламана $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1K_1M_1$, що йде по простих, то врізаючись у криву, то виходячи з неї, дасть найкорисніші товщини стінок і висоти $h_1, h_2, h_3 \dots$, на яких треба змінити цю товщину. Щодо можливої товщини стінок, то лекальна цегла має такі розміри:

10, 14, 18, 22, 27 см довжини (ширина 19 см, а товщина 10 см у всіх).

Отже, комбінуючи вартості довжини, можна дістати такої товщини

10, 14, 18, 22, 24, 27, 28, 32, 34, 36, 37, 38, 40 см

і вище 40 см — всі числа, крім 53 й 63 (розчин на увагу не взято).

Обрахунок димаря на міцність.

Коли обчислимо G — вагу димаря, то треба перевірити n_6 — складну напругу від стиску й згину, не допускаючи: на стиск більш за $7 \text{ кг}/\text{см}^2$ і на розтяг — більш за $0,5 \text{ кг}/\text{см}^2$ (див. далі). При найкращій цеглі допускають до $11 \text{ кг}/\text{см}^2$ на стиск і, коли зовсім нема вітру, $1,5 \text{ кг}/\text{см}^2$ на розтяг, але це числа виняткові. Напруги знаходимо так:

$$\text{напруга стискова} \dots n_2 = \frac{G}{F} \dots \dots \dots \quad (175)$$

$$\text{напруга згину} \dots \dots \dots n_5 = \frac{Ph}{W} \dots \dots \dots \quad (176)$$

Ці нормальні напруги, складаючись альгебрично, дають складну напругу:

$$\text{искову} n_6'' = \frac{G}{F} + \frac{Ph}{W} \dots \dots \dots \dots \quad (177)$$

$$\text{й розтягову} n_6' = \frac{G}{F} - \frac{Ph}{W} \text{ (див. далі)} \dots \dots \dots \quad (178)$$

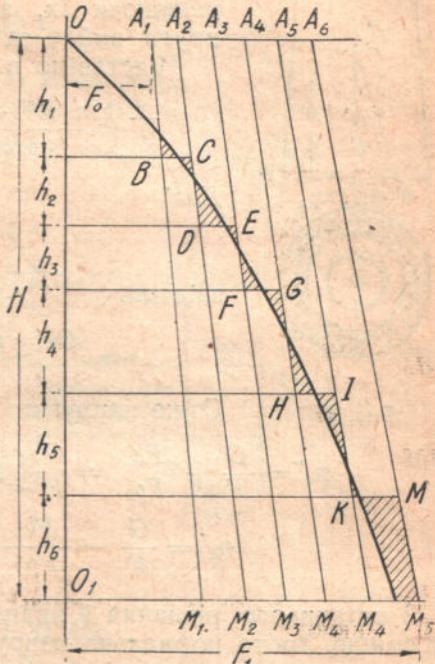


Рис. 85.

Якщо рівнодійна сил G й P не виходить за межі ядра перетину, чи

$$Ok < \frac{R_1^2 + r_1^2}{4R_1} \text{ (див. 168),}$$

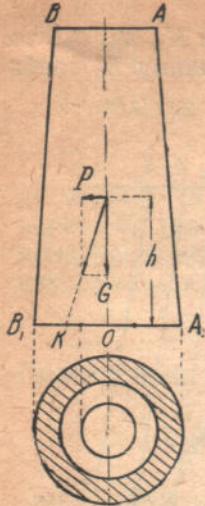


Рис. 86.

Отже напруги:

$$n_6'' = \frac{G}{F} + \frac{Ph}{F\rho_0} = \frac{G}{F} \left(1 + \frac{Ph}{G\rho_0} \right) = \frac{G}{F} \left(1 + \frac{\rho}{\rho_0} \right) \dots \quad (180)$$

$$n_6' = \frac{G}{F} - \frac{Ph}{F\rho_0} = \frac{G}{F} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) \dots \quad (181)$$

З останнього рівняння й видно, що при $\rho > \rho_0$ величина n_6' буде від'ємною, тобто нормальні напруги згину перевищують стискову й дає розтягову напругу в точці A_1 . Якщо $\rho < \rho_0$, то обидві напруги будуть стискові

$$n_6'' = \frac{G}{F} \left(1 + \frac{\rho}{\rho_0} \right) = \max$$

$$n_6' = \frac{G}{F} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) = \min$$

II. Згин і закручування. Вал.

Натяг паса, що лежить на крутні, одночасно згинає й закручує вал; покажемо, як розрахувати вал на цю складну деформацію. Нехай M = найбільший згинний момент, в якомунебудь перетині вала; M_k = момент крутіння в цьому самому перетині вала. Тоді в якісь точці на поверхні вала:

$$n_5 = \frac{M}{W}; \quad t_4 = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M_k}{2W};$$

бо $W_k = 2W$ для круга.

Одна з теорій міцності, найбільш певна, учиє, що слід вести розрахунок на максимальні дотичні сили, бо вони, головним чином, руйнують матеріал. Отже головна дотична напруга (див. 156)

$$\max t_0 = \frac{1}{2} \sqrt{n^2 + 4t^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M^2}{W^2} + \frac{4M_k^2}{4W^2}} = \frac{1}{2W} \sqrt{M^2 + M_k^2}.$$

Якщо прийняти, що ця напруга не повинна перевищувати $300 \text{ кг}/\text{см}^2$, то одержимо таку формулу для розрахунку вала:

$$\frac{\pi d^3}{32} \cdot 600 = \sqrt{M^2 + M_k^2};$$

або при $\pi = 3,2 \dots 60d^3 = \sqrt{M^2 + M_k^2}$

Приклад: Вал з двома крутнями (рис. 87) згинається й закручується двома силами: 60 і 120 кг.

Реакції підпор:

$$- 60 \cdot 5 + 120 \cdot 20 - B \cdot 30 = 0 \dots B = 70 \text{ кг.}$$

$$- 60 \cdot 35 + A \cdot 30 - 120 \cdot 10 = 0 \dots A = 110 \text{ кг.}$$

$$M = 70 \cdot 100 = 7000 \text{ кг см (max)}$$

$$M_k = 120 \cdot 20 = 62 \cdot 40 = 2400 \text{ кг см.}$$

$$60d^3 = \sqrt{7000^2 + 2400^2} = 7400; d^3 = 123; d = \approx 5 \text{ см.}$$

Знаходження цього кореня треба робити графічно. В даному разі збудовано прямокутній трикутник з катетами 70 і 24 мм, одержано гіпотенузу = 74 мм. (перевірити). Коли потрібно знайти

$$\sqrt{152135^2 + 86532^2},$$

то цілком достатню точність одержимо, коли збудуємо прямокутний трикутник з катетами 152 і 86 мм (на клітчастому папері). Гіпотенуза = 175, отже той корінь = 175000.

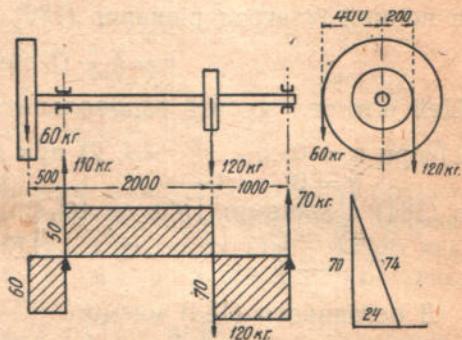


Рис. 87.

ПОДОВЖНИЙ ЗГИН.

Нехай один кінець бруска закріплено в О (рис. 88), цю точку приймімо за початок координат. На другому нехай прикладено силу P , рівнобіжну осі X. Припустімо, що P досягає такої величини, що бруск згибається на величину h , яку можна виміряти навіть без точних приладів. Згинний момент в точці C:

$$M_x = \beta \frac{d^2y}{dx^2} = P(h - y), \text{ де } \beta = E'I_{min};$$

або

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Py = Ph \dots \dots \dots (182)$$

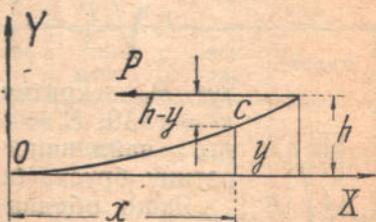


Рис. 88.

Повний інтеграл цього рівняння

$$y = y_1 + z;$$

де y_1 = частинний інтеграл рівняння (182) ... $y_1 = h$,
а z = повний інтеграл рівняння:

$$\beta \frac{d^2y}{dx^2} + Pz = 0 \dots \dots \dots (183)$$

Спочатку знайдім частинний інтеграл:

$$z_1 = e^{\frac{tx}{\beta}}$$

де t — корінь характеристичного рівняння $\beta t^2 + P = 0$; з нього дістанемо

$$t_1 = Ait; \quad t_2 = -Ait;$$

тут $A = \sqrt{\frac{P}{\beta}}$. Тоді

$$z_1 = e^{Aix}; \quad z_2 = e^{-Aix}$$

будуть два уявних інтеграли, а з них за допомогою Ейлерових формул виводимо дійсні частинні інтеграли:

$$z_3 = \frac{e^{Aix} + e^{-Aix}}{2} = \cos Ax; \quad z_4 = \frac{e^{Aix} - e^{-Aix}}{2i} = \sin Ax.$$

Отже повний інтеграл рівняння (183)

$$z = C_1 \cos Ax + C_2 \sin Ax,$$

а повний інтеграл рівняння (182)

$$y = h + C_1 \cos Ax + C_2 \sin Ax \dots \dots \dots \quad (184)$$

Цей інтеграл мусить задовольнити три умови:

1) при $x = 0 \dots$ $y = 0;$	2) при $x = 0 \dots$ $y' = 0;$	3) при $x = l$ $y = h$
з (184) дістанемо: $y' = -AC_1 \sin Ax + AC_2 \cos Ax$	$0 = AC_2$	$y = h - h \cos Al$
$0 = h + C_1$	$C_2 = 0$	$h = h - h \cos Al$
$C_1 = -h$		$\cos Al = 0 \dots \quad (185)$

З останнього (185) маємо:

$$Al = (2k + 1) \frac{\pi}{2};$$

беручи найменше

$$Al = \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots \quad (185 \text{ a}).$$

Підставляючи замість $A = \sqrt{\frac{P}{\beta}}$ з (185 a), дістанемо:

$$l \sqrt{\frac{P}{\beta}} = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{Pl^2}{\beta} = \frac{\pi^2}{4}; \quad P_{kp} = \frac{\pi^2 E' I_{min}}{4 l^2}, \dots \dots \quad (186)$$

тут P_{kp} — критична сила, що виводить бруск з рівноваги; $\pi^2 \approx 10$; E' — коефіцієнт пружності на стиск (таблиця 1); I_{min} — найменший екваторіальний момент інерції площини попереку бруска (cm^4); l — довжина бруска в cm .

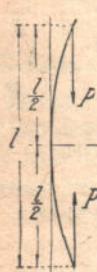


Рис. 89.

Якщо обидва кінці бруска можуть вільно повертатися (рис. 89), то кожна половина його працює, як бруск за рис. 86. Тоді в Ейлерову формулу (186) треба підставити замість $l \dots \frac{l}{2}$. Отже критична сила

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 E' I_{min}}{4 \left(\frac{l}{2} \right)^2} = \frac{\pi^2 E' I_{min}}{l^2} \dots \dots \quad (187)$$

Дозволена сила буде з таким запасом: $k = 5$ для заліза; $k = 8$ для чавуну; $k = 10$ для дерева

$$P_{dovz.} = \frac{1}{5} P_{kp}; \quad P_{dovz.} = \frac{1}{8} P_{kp}; \quad P_{dovz.} = \frac{1}{10} P_{kp}.$$

Це найбільш уживана формула Ейлера.

Наводимо без виводу інші випадки навантаження й відповідні формулі для них:



Рис. 90.

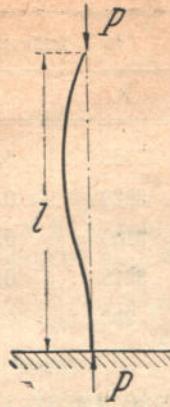


Рис. 91.

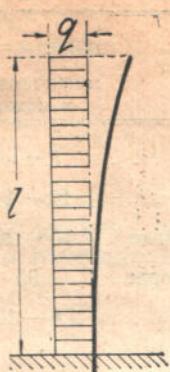


Рис. 92.



Рис. 93.

$$P_{kp} = \frac{4\pi^2 E I_{min}}{l^2} \quad P_{kp} = \frac{2\pi^2 E' I_{min}}{l^2} \quad ql_{kp} = \frac{\pi^2 E' I_{min}}{1,25 l^2} \quad \frac{ql_{kp}}{2} = \frac{\pi^2 E' I_{min}}{1,93 l^2}$$

Формули Ейлера не дають величини напруги, що є в брускі. Отже критичну напругу, при якій може починатися викривлення бруска, знайдемо з формули (11) і з формули (187), якщо підставимо $I_{min} = r_m^2 \cdot F$, де r_m = найменший радіус інерції площини F ; тоді

$$n_{kp} = \frac{P_{kp}}{F} = \pi^2 E' \left(\frac{r}{l} \right)^2 = \frac{\pi^2 E'}{\left(\frac{l}{r} \right)^2} \quad \dots \quad (188)$$

Для кожного матеріалу й для деяких форм F можна знайти таке відношення $l:r$, при якому n_{kp} не перевищує граници пропорційності (див. стор. 6). Далі наводимо найменші вартості відношень $l:a$ (де a = найменший поперечний розмір бруска), при яких можна застосувати формули Ейлера.

Форма F	Відношення	Чавун	Спогрівне залізо	Лите залізо	Лита сталь	Дерево
	$\frac{l}{b}$	14,4	21	20,1	17,1	12,8
	$\frac{l}{d}$	12,5	18,1	17,4	14,8	11,1
	$\frac{l}{d}$	17,6	25,6	24,5	20,9	—
При цьому	$\frac{l}{r_m}$	50	72,5	69,5	59	44,4

Тетмаер, після низки спроб, довів, що останній рядок таблиці, тобто відношення довжини бруска до найменшого радіуса інерції занадто малі, й дав свою формулу для визначення критичної напруги:

$$n_{kp} = A (1 - ax - bx^2) \quad \dots \quad (189)$$

вартості A , a , b та $x = \frac{l}{r_m}$ наведено в таблиці:

Матеріал	Якщо $x = \frac{l}{r}$ знаходить ся в межах	то в наведеній форм. (189)		
		A	a	b
Чавун	5 — 80	7760	0,01546	0,00007
Спогр. залізо . .	10 — 112	3080	0,00426	0
Лите залізо м'яке .	10 — 105	3100	0,00368	0
Лите залізо тверде .	90	3210	0,00185	0
Дерево	1,8 — 100	293	0,00662	0

Приклад: Швелер № 24 (див. сортамент, коритне залізо) мусить правити за колону висотою 4 метри. Яку можна безпечно допустити силу? Кінці вважаємо за вільні. З таблиць сортаменту: $I_{\min} = I_y = 264 \text{ см}^4$; $r_m^2 = \frac{I_y}{F} = \frac{264}{44,28} = 5,96$; $r_m = 2,44 \text{ см}$; $\frac{l}{r_m} = \frac{400}{2,44} = 164$.

Для заліза навіть за Тетмаєром, що дає більші вартості, $\frac{l}{r_m} = 105$; отже можна застосувати Ейлерову формулу. Число π^2 можна прийняти за 10 (точно 9,87); тоді:

$$P_{kp} = \frac{10.2150000.264}{160000} = \infty 35500 \text{ кг.}$$

Для заліза $k = 5$, отже дозволена сила = 7100 кг.

Тоді

$$n_{kp} = \frac{P_{kp}}{F} = \frac{35500}{44,28} = \infty 800 \text{ кг/см}^2;$$

$$n_2 = \frac{7100}{44,28} = \infty 160 \text{ кг/см}^2.$$

Тепер припустімо, що $l = 2$ метри, тоді

$$\frac{l}{r_m} = \frac{200}{2,44} = 82,$$

отже треба вжити формули Тетмаєра, вважаючи, що матеріал є тверде лите залізо

$$n_{kp} = 3210 (1 - 0,00185 \cdot 82) = \infty 2730 \text{ кг/см}^2.$$

Тоді

$$P_{kp} = 2730 \cdot 44,28 = 121000 \text{ кг};$$

$$P_{\text{дозв.}} = 24200 \text{ кг.}$$

Ейлерова формула дала б для цього випадку:

$$P_{kp} = 142000 \text{ кг}; P_{\text{дозв.}} = 28400 \text{ кг.}$$

УДАР.

I. Розтяг.

Нехай бруск AB (рис. 94) має на нижньому кінці заплечик, і ванта Q , падаючи з висоти h , робить удар по цьому заплечику. Кінетична енергія в мент удару

$$V = \frac{mv^2}{2} = \frac{Q}{g} \cdot 2gh = Qh$$

Коли ударне здовження досягне величини $\lambda_{y\partial}$, то кинетична енергія вантажу буде:

$$V = Q (h + \lambda_{y\partial}) \dots \dots \dots \quad (190)$$

а робота внутрішніх сил пружності

$$V_1 = \frac{P \lambda_{y\partial}}{2} = \frac{\lambda_{y\partial}^2 F E}{2 l} \text{ (див. 63)} \dots \dots \quad (191)$$

Нехай вантаж витягне брусков на таку величину $\lambda_{y\partial}$, при якій він зупиниться й дальнього здовження нема. Тоді вся кинетична енергія перейшла в потенціальну:

$$V = V_1, \text{ або } Q (h + \lambda_{y\partial}) = \frac{\lambda_{y\partial}^2 F E}{2 l} \dots \dots \quad (192)$$

Це квадратове рівняння:

$$\lambda_{y\partial}^2 - \frac{2 Q l}{F E} \lambda_{y\partial} - \frac{2 Q l}{F E} h = 0,$$

або

$$\lambda_{y\partial}^2 - 2 \lambda_1 \lambda_{y\partial} - 2 \lambda_1 h = 0,$$

де $\lambda_1 = \frac{Q l}{F E}$ — статичне здовження від сили Q . Роз'язуючи це рівняння й беручи на увагу тільки додатний корінь:

$$\lambda_{y\partial} = \lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 + 2 \lambda_1 h} \dots \dots \quad (193)$$

Ударну напругу одержимо через множення обидвох частин цього рівняння на $\frac{E}{l}$ (див. 7 і 10)

$$n_{y\partial} = n_1 + \sqrt{n_1^2 + 2 h n_1 \frac{E}{l}} \dots \dots \quad (194)$$

Тепер припустімо, що $h = 0$, тобто вантаж лежить на заплечику, і ми дамо йому можливість раптово розтягнути брусков (не підтримуючи рукою) (див. рис. 27). Тоді динамічне здовження

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\partial} &= \lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 + 2 \lambda_1 h} = 2 \lambda_1 \\ n_{\partial} &= 2 n_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \quad (195)$$

Це ми розглянули вище. На рис. 26 нарисовано руку, яка приймає на себе половину роботи зовнішньої сили.

Для роботи внутрішніх сил ми мали (див. 63)

$$V_1 = \frac{P^2 l}{2 F E} = \frac{P^2 F l}{F^2 2 E} = \frac{n_1^2}{2 E} \cdot v;$$

тут $v = \text{об'єм бруска} = F \cdot l$. Очевидно, що робота розтягу пропорційна об'ємові брусков, який зазнає вдару, а не його довжині чи площі F — зокрема.

Аналогічні формулі будуть і для ударного стиску й для ударного зсуву.

II. Згин.

Нехай вантаж Q падає з висоти $= h$ на середину бруска AB (рис. 95) і нехай $f_{y\partial}$ буде та стрілка вгину, при якій вантаж перестав

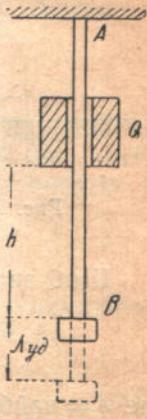


Рис. 94.

онускатися. Назвімо, як раніш, f ту стрілку вгину, яку утворює вантаж Q при статичному навантаженні і таблиця 9 дає нам:

$$f = \frac{Q l^3}{48 \beta}; Q = \frac{48 f^3}{l^3}; V = \frac{Q f}{2} = \frac{24 f^2 \beta}{l^3} \quad \dots \quad (196)$$

Застосовуючи цю формулу для роботи до ударної сили Q , одержимо ударну стрілку вгину з:

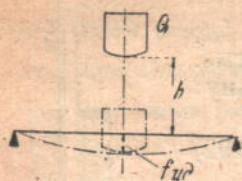


Рис. 95.

$$Q(h + f_{y\theta}) = \frac{24 f^2 \beta}{l^3} \quad \text{Звідси}$$

$$f_{y\theta}^2 - 2 \frac{Q l^3}{48 \beta} f_{y\theta} - 2 h \frac{Q l^3}{48 \beta} = 0,$$

$$\text{або} \quad f_{y\theta}^2 - 2 f \cdot f_{y\theta} - 2 h \cdot f = 0.$$

$$\text{Отже } f_{y\theta} = f + \sqrt{f^2 + 2 h f} \quad \dots \quad (197)$$

Щоб знайти ударну напругу при згині, треба згадати, що

$$n_5 = \frac{M}{W} = \frac{P l}{4 W} = \frac{P l e}{4 I},$$

де e — найбільша відстань від невтрального шару. Заміняючи P ударною силою

$$Q = \frac{48 f_{y\theta} \beta}{l^3},$$

дістанемо

$$n_{y\theta} = \frac{48 f_{y\theta} E I}{l^3} \cdot \frac{e}{4 I} = \frac{12 f_{y\theta} E e}{l^2} \quad \dots \quad (198)$$

І тут при $h=0$ маємо динамічну стрілку й динамічну напругу:

$$\left. \begin{array}{l} f_\theta = 2 f \\ n_\theta = 2 n_5 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (199)$$

ІНШІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА СТАТИЧНО-НЕВИЗНАЧЕНИ БРУСКИ.

Тут покажемо інші методи розв'язання задач, а потім розв'яжемо одну задачу всіми методами.

I. Метод порівнювання деформацій.

У статично невизначеного бруска завжди є або додаткові підпори, або додаткові закріплення; отже додаткова невідома величина буде: або реакція додаткової підпори, або момент додаткового закріплення. Відкиньмо додаткову підпору (або закріплення), тоді брусок буде статично визначений, отже можемо знайти стрілку вгину f (або кут повороту θ) в тому перетині, де була відкинута величина. Потім розгляньмо окремо дію на цей брусковидкинутої сили тобто реакції підпори (або дію моменту) й знайдемо стрілку вгину (або кут повороту від цього моменту). В дійсності в цьому перетині стрілки (або кута повороту) нема. Отже, дорівнюючи абсолютні величини обчислених стрілок (або кутів повороту), одержимо рівнання для визначення додаткової невідомої величини. Число рівнань = числу невідомих. (див. приклад)

ІІ. Метод Кастільяно.

Ми бачили, що абсолютні деформації є лінійні функції сил, а сили—лінійні функції деформацій (див. табл. 10). Також бачили, що робота деформації, чи потенціальна енергія V , є функція другого степеня від сили й функції 2-го степеня від деформації.

Припустімо, що на пружисте тіло чинять дві сили Φ й Ψ . Те, що ми доведемо для двох сил, буде справедливо й для трьох, і для довільного числа сил. Точки прикладу цих двох сил нехай переміщаються на φ й ψ . Тоді робота зовнішніх сил

$$V = \Phi \cdot \varphi + \Psi \cdot \psi.$$

Після цих переміщень брускок знаходитьсь в стані напруженості рівноваги. Даймо Φ безкрайньо малий довільний приріст $\delta\Phi$ (варіація). Тоді й обидві деформації φ й ψ , а також і потенціальна енергія V одержуть безкрайньо малі приrosti: $\delta\varphi$, $\delta\psi$, δV ; отже:

$$\delta V = (\Phi + \delta\Phi) \delta\varphi + \Psi \delta\psi,$$

згадуючи, що φ = функція Φ й ψ теж є функція Φ відкидаючи (при обчисленні границі) безкрайньо малі 2-го порядку $\delta\Phi \cdot \delta\varphi$

$$\delta V = \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} \delta\Phi + \Psi \frac{\partial \psi}{\partial \Phi} \delta\Phi \quad \dots \quad (200)$$

поділяючи на $\delta\Phi$, переходимо до границі

$$I_p \left(\frac{\delta v}{\delta\Phi} \right) = \frac{\partial v}{\partial\Phi} = \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} + \Psi \frac{\partial \psi}{\partial \Phi} \quad \dots \quad (201)$$

З другого боку, статична робота внутрішніх сил (подвоєна)

$$2V = \Phi \varphi + \Psi \psi \quad \dots \quad (202)$$

Звідсіль

$$2 \frac{\partial V}{\partial \Phi} = \varphi + \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} + \Psi \frac{\partial \psi}{\partial \Phi} \quad \dots \quad (203)$$

Віднімаючи (201) з (203), одержимо:

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = \varphi \quad \dots \quad (204)$$

тобто часткова приросткова від потенціальної енергії по силі дорівнює відповідному переміщенню. Це є теорема Кастільяно. Зauważмо, що Φ = узагальнена сила, тобто Φ може бути й силою, і моментом; отже φ буде тоді відповідно й стрілкою, і кутом повороту і т. д. Коли φ утворюється іншими силами, а Φ немає, то вводять фіктивну силу Φ_0 у вираз для момента. Після обчислення $\frac{\partial v}{\partial \Phi}$ дають Φ_0 значення нуль (див. приклад на стор. 77).

ІІІ. Метод найменшої роботи.

У частинному випадку теореми Кастільяно, коли Φ є реакція нерухомої підпори (або момент закріплення), то вона переміщення не утворює. Отже, $\varphi = 0$ і тоді

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0 \quad \dots \quad (205)$$

Коли перша похідна якоїсь функції дорівнює нулеві, а друга похідна >0 , то функція досягає minimum'a. Тут функція V = однорідна функція 2-го степеня від Φ та Ψ , отже:

$$V = A\Phi^2 + B\Psi^2 + C\Phi\Psi.$$

Ясно, що $\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^2} = A > 0$, бо $V > 0$. Отже, функція V досягає minimum'a, а тому (205) є умова найменшої роботи.

IV. Метод взаємних переміщень.

Розглянемо два стани тої самої системи. Нехай в I стані сили Φ_1 й Ψ_1 (узагальнені) утворюють відповідно переміщення φ_1 й ψ_1 , в двох якихось перетинах чи точках. А в II стані сили Φ_2 і Ψ_2 утворюють в тих самих точках переміщення φ_2 і ψ_2 . Тоді потенційльна енергія I стану:

$$V_1 = a\Phi_1^2 + b\Psi_1^2 + c\Phi_1\Psi_1,$$

а II стану:

$$V_2 = a\Phi_2^2 + b\Psi_2^2 + c\Phi_2\Psi_2.$$

За теоремою Кастільяно:

$$\varphi_1 = \frac{\partial V_1}{\partial \Phi_1} = 2a\Phi_1 + c\Psi_1; \quad \varphi_2 = \frac{\partial V_2}{\partial \Phi_2} = 2a\Phi_2 + c\Psi_2 \dots \dots \quad (206)$$

$$\psi_1 = \frac{\partial V_1}{\partial \Psi_1} = 2b\Psi_1 + c\Phi_1; \quad \psi_2 = \frac{\partial V_2}{\partial \Psi_2} = 2b\Psi_2 + c\Phi_2 \dots \dots \quad (207)$$

Помножмо сили I стану на переміщення II стану, і навпаки:

$$\Phi_2\varphi_1 + \Psi_1\psi_1 = 2a\Phi_1\Phi_2 + c\Psi_1\Phi_2 + 2b\Psi_1\Psi_2 + c\Phi_1\Psi_2 = \Phi_1\varphi_2 + \Psi_1\psi_2 \dots \dots \quad (208)$$

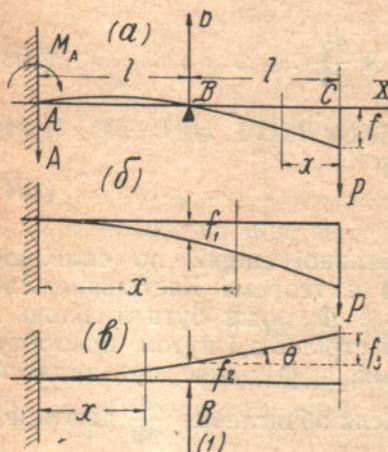


Рис. 96.

Отже, робота сил I стану на переміщеннях II стану дорівнює роботі сил II стану на переміщеннях I стану.
V. Приклад (див. рис. 96 а).

I. Метод порівнювання деформацій. З рис. 96 а) відкидаючи додаткову підпору B, шукаємо f_1 за старим методом:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -P(2l-x).$$

інтегруємо перший раз:

$$EI \frac{dy}{dx} = +P \frac{(2l-x)^2}{2} + C_1;$$

інтегруємо ще раз:

$$EIy = -P \frac{(2l-x)^3}{6} + C_1x + C_2.$$

Щоб знайти C_1 , зауважмо, що при $x=0$ буде $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$ (немає кута повороту). Отже,

$$0 = EI \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = +P \frac{4l^2}{2} + C_1 \dots C_1 = -2Pl^2.$$

Щоб знайти C_2 , зауважмо, що при $x = 0$ буде $y_0 = 0$ (немає стрілки)

$$EIy_0 = -P \frac{8l^3}{6} + C_2 = 0; \text{ звідсіль } C_2 = \frac{4Pl^2}{3}.$$

Отже рівнання пружистої лінії

$$EIy = -P \frac{(2l-x)^3}{6} - 2Pl^2x + \frac{4Pl^2}{3} \dots \dots \dots (209)$$

При $x = l$

$$EIf_1 = -P \frac{l^3}{6} - 2Pl^2 \cdot l + \frac{4Pl^2}{3} = -\frac{5Pl^3}{6}.$$

Тепер з рис. 96 в шукаємо стрілку від невідомої сили B , що на рис. 96 а є реакція додаткової підпори теж старим методом:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = B(l-x),$$

помножимо на dx та проінтегруємо

$$EI \frac{dy}{dx} = -B \frac{(l-x)^2}{2} + C_1;$$

ще раз те саме

$$EIy = +B \frac{(l-x)^3}{6} + C_1x + C_2.$$

Щоб знайти C_1 , зауважмо, що при $x = 0$ буде $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$.

$$EI \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -B \frac{l^2}{2} + C_1 = 0,$$

Звідсіль:

$$C_1 = \frac{Bl^2}{2}.$$

При $x = 0$ буде й $y_0 = 0$, отже

$$EIy_0 = B \frac{l^3}{6} + C_2 = 0.$$

Звідсіль

$$C_2 = -\frac{Bl^3}{6}.$$

Отже рівнання пружистої лінії

$$EIy = B \frac{(l-x)^3}{6} + \frac{Bl^2}{2}x - \frac{Bl^3}{6} \dots \dots \dots (210)$$

$$\text{При } x = l \dots EI f_2 = \frac{Bl^2}{2} \cdot l - \frac{Bl^3}{6} = \frac{Bl^3}{3}.$$

Дорівнюючи абсолютні величини цих деформацій

$$|f_1| = |f_2|,$$

маємо:

$$\frac{Bl^3}{3} = \frac{5Pl^3}{6} \dots \text{звідсіль } B = \frac{5P}{2}.$$

З рівнань рівноваги тепер можемо знайти

$$A = \frac{3P}{2}; M_A = \frac{Pl}{2}.$$

ІІ. Метод найменшої роботи. Для спрощення вважаймо C за початок координат.

Тоді для дільниці CB (рис. 96 а) . . . $M_1 = -Px$,
для дільниці BA („ „) . . . $M_2 = -Px + B(x-l)$.

Потенціальна енергія цілого бруска CBA :

$$V = \frac{1}{2EI} \int_0^l M_1^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_l^{2l} M_2^2 dx.$$

Реакція підпори B не дає переміщення, отже зважаючи що: $\frac{\partial M_1}{\partial B} = 0$:

$$\frac{\partial V}{\partial B} = \frac{1}{EI} \int_l^{2l} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial B} dx = \frac{1}{EI} \int_l^{2l} [-Px + B(x-l)](x-l) dx = 0$$

Цей інтеграл розкладається на три:

$$\begin{aligned} & -P \int_l^{2l} x^2 dx + Pl \int_l^{2l} x dx + B \int_l^{2l} (x-l)^2 dx = 0. \\ & -P \left| \frac{x^3}{3} \right|_l^{2l} + Pl \left| \frac{x^2}{2} \right|_l^{2l} + B \left| \frac{(x-l)^3}{3} \right|_l^{2l} = 0. \\ & -P \frac{7l^3}{3} + Pl \frac{3l^3}{2} + B \frac{l^3}{3} = 0. \end{aligned}$$

Звідсіль:

$$B = \frac{5P}{2}.$$

Далі з рівнань рівноваги:

$$A = \frac{3P}{2}; M_A = \frac{Pl}{2}.$$

ІІІ. Метод взаємних переміщень: Приймімо за I стан дійсний стан бруска (рис. 96 а), а за II стан — згин його силою $B=1$ кг (рис. 96 в). Отже

Сили: Переміщення:

I стан	B	O	$\left. \begin{array}{l} Bf_2 - P(f_2 + f_3) = 1 \cdot O + O \cdot -f = 0. \\ \text{Звідсіль:} \end{array} \right\}$
$-P$	$-f$		
II стан	1	f_2	$B = P \frac{f_2 + f_3}{f_2}$
	O	$f_2 + f_3$	

Отже треба обчислити стрілки f_2 та f_3 .

Для обчислення f_2 треба повторити те, що зроблено вище, або скористатися з таблиці готових стрілок (див. табл. 9). Нехай знайдено:

$$f_2 = \frac{1 \cdot l^3}{3EI}.$$

Стрілку f_3 знайдемо як катет прямокутного трикутника (рис. 96 в). Тільки кут θ , нам невідомий, треба знайти або диференціюванням (210):

$$EI \frac{dy}{dx} = -B \frac{(l-x)^2}{2} + B \frac{l^2}{2};$$

при $B=1$ та $x=l$. . . $EI\theta = \frac{1 \cdot l^2}{2}$,

отже

$$\theta = \frac{1 \cdot l^2}{2EI},$$

або взяти θ з готової таблиці (див. табл. 9).

Через кут θ (що дорівнює $tg\theta$ через малість деформації)

$$f_3 = \theta \cdot l = \frac{l^3}{2EI}.$$

Огже

$$B = P \frac{\frac{l^3}{3EI} + \frac{l^2}{2EI}}{\frac{l^3}{3EI}} = \frac{5P}{2}.$$

Далі, як вище:

$$A = \frac{3P}{2}; M_A = \frac{Pl}{2}.$$

IV. Метод пружистої лінії.

При $x=0$, маємо $y_0=0, \theta_0=0, M_0=M_A, Q_0=-A$.

Застосовуючи, як для всіх задач, рівняння (128):

$$\text{Для } AB \dots \beta y = M_A \frac{x^2}{2} - A \frac{x^3}{6}$$

Друга похідна . . . $\beta y'' = M_A - Ax$

$$\text{При } x=l \text{ буде } y=0 \dots 0 = M_A \frac{l^2}{2} - A \frac{l^3}{6}$$

" " " $\beta y'' = -Pl \dots -Pl = M_A - Al$ (це дає й статика).

Розв'язуючи ці два рівняння, знайдемо $M_A = \frac{Pl}{2}; A = \frac{3P}{2}$; потім

$$B = \frac{5P}{2}.$$

КРИВИЙ БРУС.

Розглянемо чистий згин бруса, що його геометрична вісь є плоска крива. Аналогічно з прямим бруском (див. рис. 45) виріжмо з кривого бруса безкрайньо малу частину двома площинами під кутом $d\varphi$ (рис. 97). Нехай центр тяжіння поперечня в C . Перед згином волокно CD вже є крива, якої радіус кривини $= R$. Після згину перетин EF нахиляється на кут, який є приріст $d\varphi$, або $\delta d\varphi$. Але ми ще не знаємо, коло якої точки цей перетин EF повертається, тобто не знаємо, де пройде невтральний шар. Припустімо, що волокно OH буде невтральним і визначмо його радіус кривини, невідомий нам, через r . Вісь x проведено дотично до OH , вісь z угору. Розглянемо волокно AB , що є на віддаленні z від невтрального шару. Абсолютне здовжження його $= BB_1 = z \cdot \delta d\varphi$; довжина цього волокна перед згином $= AB = (r+z) d\varphi$. Отже відносне здовжження (див. 7)

$$\epsilon_1 = \frac{BB_1}{AB} = \frac{z \delta d\varphi}{(r+z) d\varphi}.$$

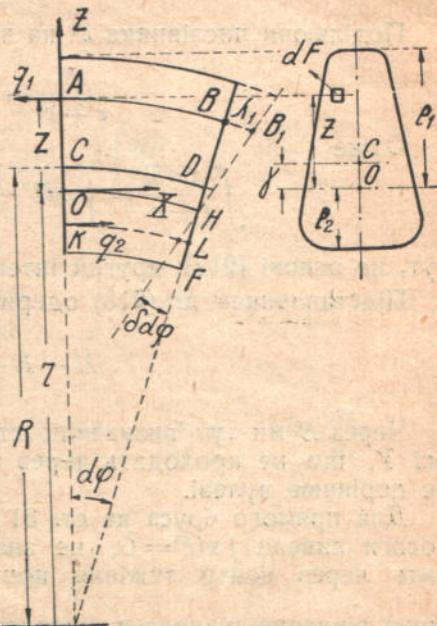


Рис. 97.

Нормальна напруга в точці A (д. 10)

$$n_1 = E\epsilon_1 = E \frac{z\delta d\varphi}{(r+z)d\varphi} \quad \dots \quad (211)$$

Нормальна розтягова сила в $A: q_1 = n_1 dF = E \frac{z\delta d\varphi}{(r+z)d\varphi} \cdot dF (z > 0)$

Аналогічно стискова сила в $K: q_2 = n_2 dF = E' \frac{z\delta d\varphi}{(r+z)d\varphi} \cdot dF (z < 0)$

Сума проекцій всіх сил на вісь X повинна = 0.

$$\Sigma E' \frac{z\delta d\varphi}{(r+z)d\varphi} dF - \Sigma E \frac{z\delta d\varphi}{(r+z)d\varphi} dF = 0.$$

Для заліза й сталі $E = E'$, отже маємо:

$$E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{zdF}{r+z} = 0, \text{ або } \int \frac{zdF}{r+z} = 0 \quad \dots \quad (212)$$

Сума моментів всіх силколо осі Y повинна = 0.

$$M - \Sigma E \frac{z^2 \delta d\varphi}{(r+z)d\varphi} dF - \Sigma E' \frac{z^2 \delta d\varphi}{(r+z)d\varphi} dF = 0.$$

Для заліза й сталі $E = E'$, отже

$$M - E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{z^2 dF}{r+z} = 0 \quad \dots \quad (213)$$

Поділяючи числівника z^2 на знаменника $z+r$, знайдемо:

$$\frac{z^2}{z+r} = z - \frac{rz}{z+r}.$$

Отже

$$\int \frac{z^2 dF}{r+z} = \int zdF - r \int \frac{zdF}{r+z} = \int zdF = S;$$

тут, на основі (212), другий інтеграл мусить = 0.

Підставленням до (213) одержимо:

$$M - E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \cdot S = 0 \quad \dots \quad (214)$$

Через S ми тут визначили статичний момент попереччя F коло осі Y , що не проходить через центр тяжіння C , а тому тут $\int zdF$ не дорівнює нулеві.

Для прямого бруса на ст. 31 (див. 96) ми з першого рівняння рівноваги вивели $\int zdF = 0$; це значило, що невтральний шар проходить через центр тяжіння попереччя. Для кривого бруса з пер-

шого рівняння рівноваги виведено, що $\int \frac{zdF}{r+z} = 0$, а не $\int zdF = 0$;

отже при згині кривого бруса невтральний шар не проходить через центр тяжіння попереччя.

Коли з рівняння (212) знайдемо r , то можемо обчислити $R - r = \gamma$ (див. рис. 97).

Але брус малої кривини (великого радіуса) має r дуже велике в порівнанні з z ; тоді замість суми $r+z$ можна вважати r .

Отже для бруса малої кривини рівнання (212) — (214) дадуть:

$$\int \frac{z dF}{r} = 0, \text{ або } \int z dF = 0 \quad \dots \quad (215)$$

$$M - E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{z^2 dF}{r} = 0, \text{ або } M - E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{J}{r} \quad \dots \quad (216)$$

тобто можна вважати, що в такого бруса нейтральний шар проходить через центр тяжіння попереччя, або $R = r$ (див. рис. 97).

Інші рівнання, як і раніше (див. стор. 27) задовольняються, коли припустимо, що z є вісь симетрії попереччя й осі Y та Z є головні центральні осі фігури F .

Обчислення r .

Для простіших фігур (див. рис. 98) невідомий r можна знайти інтегруванням.

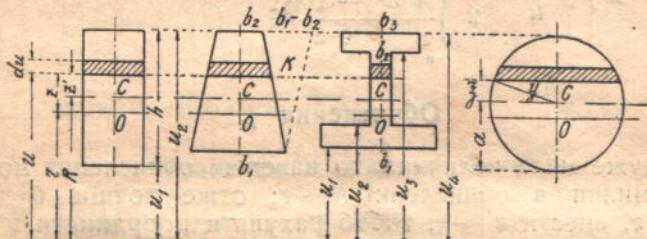


Рис. 98.

Вводимо нову змінну:

$$u = r + z, \text{ тоді } z = u - r$$

$$\int \frac{z dF}{r+z} = \int \frac{u-r}{u} dF = \int dF - r \int \frac{dF}{u} = 0.$$

З цього рівняння

$$r = \frac{F}{\int \frac{dF}{u}} \quad \dots \quad (217)$$

Для прямокутника:

$$F = bh; dF = b du; \int \frac{dF}{u} = b \int \frac{du}{u} = b [\ln u_2 - \ln u_1] = b \ln \frac{u_2}{u_1}.$$

Отже

$$r = \frac{bh}{b \ln \frac{u_2}{u_1}} = \frac{h}{\ln \frac{u_2}{u_1}}.$$

Для трапеза:

$$dF = y du; y = b_1 - k; \frac{k}{b_1 - b_2} = \frac{u - u_1}{u_2 - u_1};$$

звідсіль:

$$\begin{aligned} k &= \frac{b_1 - b_2}{u_2 - u_1} (u - u_1); y = b - \frac{b_1 - b_2}{u_2 - u_1} (u - u_1) = \\ &= \frac{b_1 u_2 - b_2 u_1}{u_2 - u_1} - \frac{b_1 - b_2}{u_2 - u_1} \cdot u. \end{aligned}$$

Отже

$$\int \frac{dF}{u} = \frac{b_1 u_2 - b_2 u_1}{u_2 - u_1} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u} - \frac{b_1 - b_2}{u_2 - u_1} \int_{u_1}^{u_2} du = \frac{b_1 u_2 - b_2 u_1}{u_2 - u_1} \ln \frac{u_2}{u_1} - (b_1 - b_2)$$

і т. д.

Для двотавра, який складається з трьох прямокутників з площами: $F_1 = b_1(u_2 - u_1)$; $F_2 = b_2(u_3 - u_2)$; $F_3 = b_3(u_4 - u_3)$, маємо:

$$r = \frac{F_1 + F_2 + F_3}{b_1 \ln \frac{u_2}{u_1} + b_2 \ln \frac{u_3}{u_2} + b_3 \ln \frac{u_4}{u_3}}$$

Для круга, радіусом $= a$: $dF = 2y du$, де

$$r = \frac{F}{2 \int y \frac{du}{u}} = \frac{F}{2 \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{R + \xi} d\xi} = \frac{2\pi (R - \sqrt{R^2 - a^2})}{F}$$

Обчислення γ .

Якщо γ дуже мала величина, то наведені обчислення можуть привести до помилки в обчисленні $R - r$; отже точніш буде зробити так: замість z , внести $z' + \gamma$, тобто рахувати координати z не від невідомої невтральної осі, а від осі, що проходить через відомий центр тяжіння.

Визначмо $z' = z - \gamma$, тоді $z = z' + \gamma$; $r + z = R + z'$; отже:

$$\int \frac{z dF}{r + z} = \int \frac{z' + \gamma}{R + z'} = \int \frac{z' dF}{R + z'} + \gamma \int \frac{dF}{R + z'} = 0 \quad \dots (218)$$

Перший інтеграл є площа попереччя, в якої кожний елемент dF змінено в відношенні $\frac{z'}{R + z'}$. Як показують обчислення, це дає від'ємну величину, пропорційну площі F ; отже визначмо цей інтеграл через $-\varphi F$. Другий інтеграл:

$$\int \frac{dF}{R + z'} = \frac{1}{R} \int \frac{R dF}{R + z'} = \frac{1}{R} \int \frac{R + z' - z'}{R + z'} dF = \frac{1}{R} (F + \varphi F).$$

Підставленим до (218) одержимо:

$$-\varphi F + \frac{\gamma}{R} F (1 + \varphi) = 0,$$

звідсіль

$$\gamma = \frac{R\varphi}{1 + \varphi} \quad \dots \dots \dots (219)$$

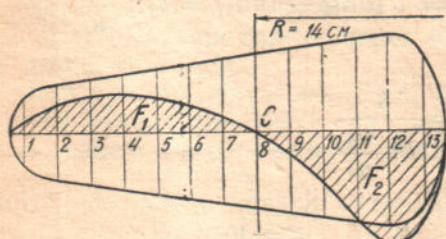


Рис. 99.

Величину φ знайдемо графічно, розділяючи площу F на довільне число частин (див. рис. 99) так, щоб одна з ліній розділу пройшла через відомий нам центр тяжіння C й ширина смужок була однакова. Крайні частинки можна прийняти за сегменти параболи, середні за трапези і обчислити площу цілої фігури F . Далі складаємо таблицю для обчислення φ . Числа взято приблизно.

№ орди- нати	Величина ординати	Її відстань від цент- ра кри- вини $R + z'$	Ширина смужки Δz	Площа смужки $\Delta z \cdot \frac{z'}{R + z'}$	Змінені площі	Коефіцієнт φ
	1,3	7	21	$1 \cdot 1,3 \cdot \frac{7}{21}$		
2	1,5	6	20	$1 \cdot 1,5 \cdot \frac{6}{20}$	F_1	$-\varphi = \frac{F_1 - F_2}{F}$
...		
7	2,1	1	15	$1 \cdot 2,1 \cdot \frac{1}{15}$		
9	2,3	-1	13	$-1 \cdot 2,3 \cdot \frac{1}{13}$		
10	2,5	-2	12	$...$	$F_2 (> F_1)$	
...		
13	3,0	-5	9	$-1 \cdot 3,0 \cdot \frac{5}{9}$		

За обчисленим φ знаходимо γ (див. 219)

Напруги в кривому брусі.

Ми бачили, що нормальні напруги на віддаленні z від невтрального шару (див. стор. 72)

$$n_1 = E \varepsilon_1 = E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{z}{r+z}.$$

Отже напруга в крайньому волокні, що на віддаленні e_1 від невтрального шару, припустімо, розтягова (див. рис. 97)

$$n_5 = E \varepsilon_5 = E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{e_1}{r+e_1}.$$

Коли знайдемо r , то e_1 відомо з розмірів F . Отже треба знайти $E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi}$ з рівняння (214)

$$E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{S} \text{ для бруса малого радіуса . . . (220)}$$

і з рівняння (216)

$$E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M \cdot r}{I} \text{ для бруса великого радіуса . . . (221)}$$

Тоді маємо розтягову напругу:

$$\left. \begin{aligned} n_5 &= \frac{M}{S} \cdot \frac{e_1}{r+e_1} \\ n'_5 &= \frac{M}{S} \cdot \frac{e_2}{r-e_2} \end{aligned} \right\} \text{для бруса малого радіуса . . (222)}$$

Загальний випадок згину.

Коли плоска система сил приводиться до 1 пари й 1 сили, то, крім M , на перетин F чинить сила P (рис. 100), прикладена в C . Роз-

кладемо її на нормальну N і дотичну T . Сила N розподілиться по волокнах площини F , що мають різну довжину $= (r+z) d\varphi$ і різне абсолютно здовжнення $\lambda_1 = \frac{N(r+z)d\varphi}{F \cdot E}$, але однакове відносне здовжнення.

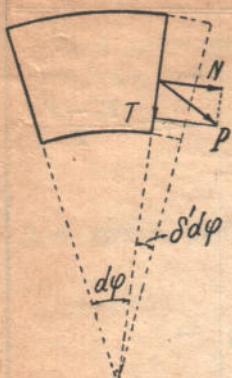


Рис. 100.

$$\varepsilon_1 = \frac{N}{F \cdot E}.$$

Приріст кута $d\varphi$ буде $\delta'd\varphi = \frac{\lambda_1}{r+z}$ (відношення дуги до відповідного радіуса); отже

$$\delta'd\varphi = \frac{N d\varphi}{F E} \quad \dots \dots \dots \quad (223)$$

Сила T утворить дотичні напруги, такі самі як у прямого бруса.

Енергія кривого бруса.

Коли пара сил з моментом M згибає кривий брус статично, то внутрішні сили зроблять роботу

$$dV_1 = \frac{M d\varphi}{2} = \frac{M^2 d\varphi}{2 E S} = \frac{M^2 ds}{2 E S r}.$$

Коли N — нормальна складова рівнодійної P утворить приріст кута $d\varphi$ на $\delta'd\varphi$, то робота розтягових унутрішніх сил буде = півдобуткові сили N на здовжнення невтрального волокна $= r \cdot \delta'd\varphi$, а саме

$$dV_2 = \frac{N \cdot r \cdot \delta'd\varphi}{2} = \frac{N^2 r d\varphi}{2 E F} = \frac{N^2 ds}{2 E F}.$$

Коли N утворює $\delta'd\varphi$, то M те ж робить роботу, але вже не зростаючи від O до M , а залишаючись незмінним:

$$dV_3 = M \delta'd\varphi = \frac{M N d\varphi}{E F} = \frac{M N d s}{E F r}.$$

Нарешті сила T зробить роботу, пропорційну квадрату її величини (див. роботу зсуву)

$$dV_4 = \frac{k T^2 ds}{2 F G}.$$

Отже повна елементарна робота деформації

$$dV = \frac{M^2 ds}{2 E S r} + \frac{N^2 ds}{2 E F} + \frac{M N d s}{E F r} + \frac{k T^2 ds}{2 F G} \quad \dots \dots \quad (224)$$

Для бруса малої кривини (великого радіуса) два останніх члени мають незначну величину, крім того, $S r = I$ (досить точно). Отже для цього бруса:

$$dV = \frac{M^2 ds}{2 E I} + \frac{N^2 ds}{2 E F}.$$

Часто можна зневажати й роботою сили N , тоді енергія кривого бруса

$$V = \int \frac{M^2 ds}{2 E I} = \frac{1}{2 E I} \int M^2 ds = - \frac{r}{2 E I} \int M^2 d\varphi. \quad (225)$$

Деформація кривого бруса.

Приклад. Кривий брус (рис. 101) великого радіуса згинається силою P . Знайти переміщення за напрямком осі X верхнього кінця бруса Δx . Прикладаємо фіктивну силу $P_0 \parallel$ осі X . Знаходимо M у довільному перетині під кутом φ до осі X . Сили P та P_0 , плечі AB та BK

$$M = P \cdot r \cos \varphi + P_0 r (1 - \sin \varphi),$$

$$\frac{\partial M}{\partial P_0} = r (1 - \sin \varphi),$$

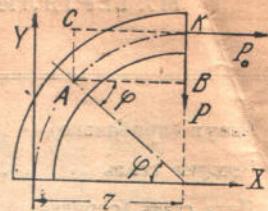


Рис. 101.

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{\partial v}{\partial P_0} = \frac{\partial}{\partial P_0} \int \frac{M^2 r d\varphi}{2 EI} = \frac{r}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial P_0} d\varphi = \\ &= \frac{r}{EI} \int [P r \cos \varphi + P_0 r (1 - \sin \varphi)] r (1 - \sin \varphi) d\varphi.\end{aligned}$$

Коли б ми тепер не прийняли $P_0 = 0$, то знайшли б переміщення Δx від двох дійсних сил P та P_0 . Але нам треба знайти переміщення Δx тільки від сили P ; отже під інтегралом $P_0 = 0$ й маємо:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{Pr^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi (1 - \sin \varphi) d\varphi = \frac{Pr^3}{EI} \left\{ \left| \sin \varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left| \frac{\cos^2 \varphi}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \right\} = \\ &= -\frac{Pr^3}{2EI}.\end{aligned}$$

Таблиця 1.

Коефіцієнти пружності й тимчасові напруги.

МАТЕРІАЛИ	Кг/см ² Коеф. пружності		Кг/см ² Тимчасові напруги	
	E на розтяг	E' на стиск	N ₁ на розтяг	N ₂ на стиск
Чавун (приблизно)	800 000	1 300 000	1 200	7 000
Ресорна сталь	2 200 000	2 200 000	7 500—10 000	7 500—10 000
Лита сталь (середнє)	2 200 000	2 200 000	8 000	8 000
Стальові відливки	2 150 000	2 150 000	3 500—7 000	3 000
Лите залізо (сер.)	2 150 000	2 150 000	3 600	4 400
Спогрівне залізо (сер.)	2 000 000	2 000 000	3 300	4 400
Дріт стальовий	2 150 000	—	6 500	—
залізний	2 000 000	—	4 000	—
Червона мідь (листова)	1 100 000	—	2 200	—
Цинок (вальц. при 16°)	960 000	—	2 350	—
Бронза (навант. II роду)	900 000	600 000	2 000	1 500
Алюміній {				
вздовж. вальц.	726 000	—	1 500	—
литий	675 000	—	930—1 000	—
Ціна (рос. олово)	400 000	—	350	—
Оліво (рос. свінець)	50 000	—	125	—
Дуб	108 000 ¹	108 000 ¹	965 ¹	{ 600 ¹ 345 ²
Сосна	92 000 ¹	99 000 ¹	750 ¹	{ 500 ¹ 220 ²
Граніт	Залежить від навантаження	400 000	45	800—2 000
Бетон		315 000	—	80—250
Цегла (звичайна)		93 000	20	280
Мотузя	6 500—15 000	—	{ нов. 1 200 стар. 500	—
Шкіра	1 250	—	{ нов. 450 стар. 250	—
Шкло	700 000	—	250	—
Вовна	—	—	1 000	—
Бавовна	—	—	3 700—4 100	—
Джут	—	—	2 800	—
Лyon	—	—	3 500	—
Куделя	—	—	4 500	—

¹ Сила || волокнам.² Сила ⊥ волокнам.

Для чавуну:

Габарит.

кг/см².

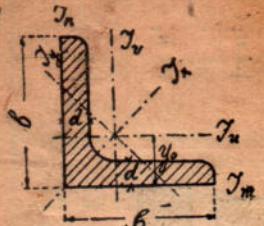
Дозволені напруги в

Матеріали деформації	Позиція загіза	Спогр. загіза	Літе залізо		Лита сталь		Стальні відливки		Червона мідь		Чавун	
			Від	До	Від	До	Від	До	Від	До	Від	До
Розтяг n_1	I	900	900	1 200	1 200	1 500	600	900	600	900	300	300
	II	600	600	800	800	1 000	400	600	300	300	200	200
	III	300	300	400	400	500	200	300	—	—	100	100
Стиск n_2	I	900	900	1 200	1 200	1 500	900	1 200	1 200	—	900	900
	II	600	600	800	800	1 000	600	900	900	—	600	600
	III	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Зсува t_3	I	720	720	960	960	1 200	480	840	840	—	300	300
	II	480	480	640	640	800	320	560	560	—	200	200
	III	240	240	320	320	600	160	280	280	—	100	100
Закручування t_4	I	360	600	840	900	1 200	480	840	840	—	—	—
	II	240	400	560	600	800	320	560	560	—	—	—
	III	120	200	280	300	400	160	280	280	—	—	—
Згин n_5	I	900	900	1 200	1 200	1 500	750	1 050	1 050	—	—	—
	II	600	600	800	800	1 000	500	700	700	—	—	—
	III	300	300	400	400	500	250	350	350	—	—	—

Форма

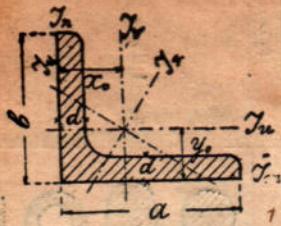
 $t_4 =$ $n_5 =$ $n_1 =$ $n_1 =$ $n_1 =$ $n_1 =$ $n_1 =$ $n_1 =$ \perp \perp

Рис. 1.



ОСТ № 14. (Рис. 1)

Рис. 2.



Рівнобічне кутове залізо.

Рис. 3.

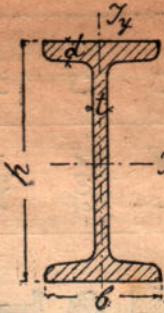


Рис. 4.

Таблиця № 3.

№	Ширина Товщина	Площа	Вага 1 п. м.	Координ. п. ваги	Моменти інерції				№	Ширина Товщина	Площа	Вага 1 п. м.	Координ. п. ваги	Моменти інерції					
					b мм	d мм	F см ²	g кг						y ₀ см	I _m см ⁴	I _u см ⁴	I _y см ⁴	I _x см ⁴	
¹ / ₂	15	3	0,82	0,64	0,47	0,338	0,153	0,240	0,066	⁶ / ₂	65	6	7,51	5,89	1,81	54,0	29,4	46,6	12,1
		4	1,05	0,82	0,51	0,465	0,190	0,292	0,087		7	8,68	6,81	1,85	63,4	33,6	53,3	13,9	
2	20	3	1,12	0,88	0,60	0,793	0,392	0,618	0,165	⁸ / ₂	8	9,83	7,72	1,89	72,9	37,7	59,7	15,6	
		4	1,45	1,14	0,64	1,080	0,492	0,771	0,212		9	10,96	8,60	1,93	82,5	41,5	65,7	17,3	
² / ₂	25	3	1,43	1,12	0,72	1,535	0,798	1,262	0,333	7	70	7	9,89	7,37	1,97	79,0	42,4	67,3	17,5
		4	1,86	1,46	0,76	2,084	1,012	1,597	0,427		8	10,64	8,35	2,02	90,8	47,6	75,5	19,7	
		*5	2,27	1,78	0,80	2,646	1,206	1,888	0,524		9	11,87	9,32	2,06	102,7	52,6	88,3	21,9	
3	30	*3	1,73	1,36	0,84	2,654	1,424	2,260	0,590	71/ ₂	75	10	13,08	10,27	2,09	114,7	57,3	90,7	24,0
		4	2,26	1,77	0,88	3,59	1,824	2,884	0,764		8	11,47	9,00	2,13	110,9	58,9	98,3	24,4	
		5	2,77	2,17	0,92	4,54	2,183	3,44	0,925		10	14,11	11,08	2,21	140,2	71,2	112,7	29,7	
³ / ₂	35	4	2,67	2,10	1,00	5,64	2,954	4,681	1,227	8	80	12	16,67	13,00	2,29	170,0	82,6	130,3	34,8
		5	3,28	2,57	1,04	7,13	3,564	5,641	4,493		10	15,11	11,86	2,34	170,0	87,2	138,6	35,8	
		*6	3,87	3,04	1,08	8,65	4,13	6,501	1,754		12	17,87	14,03	2,41	205,8	102,0	160,7	43,2	
4	40	4	3,08	2,42	1,12	8,33	4,47	7,091	1,859	9	90	10	17,13	13,45	2,58	241,0	127,0	201,3	52,5
		5	3,79	2,97	1,16	10,54	5,43	8,592	2,263		12	20,29	15,93	2,66	291,5	148,0	234,4	61,4	
		6	4,48	3,52	1,20	12,78	6,31	9,982	2,654		14	23,37	18,35	2,74	342,6	167,8	265,4	70,3	
⁴ / ₂	45	4	5,15	4,04	1,24	15,06	7,14	11,543	3,040	10	100	10	19,17	15,05	2,82	328,7	176,3	280	72,7
		5	5,80	4,55	1,28	17,37	7,91	12,4	3,434		12	22,73	17,84	2,90	397,6	206,4	327	85,7	
		6	6,59	4,00	1,32	18,11	9,19	14,55	3,84		14	26,21	20,57	2,98	467	234,5	371	97,6	
5	50	5	4,80	3,77	1,40	20,43	10,96	17,38	4,55	12	120	16	29,61	23,24	3,05	538	262	412	112,0
		6	5,69	4,47	1,44	24,74	12,85	20,34	5,35		12	27,54	21,62	3,40	685	367	584	150	
		7	6,56	5,15	1,48	29,10	14,62	23,10	6,13		14	31,82	24,98	3,48	804	419	666	172	
⁵ / ₂	55	6	7,41	5,82	1,52	33,50	16,28	25,70	6,87	13	130	16	36,02	28,28	3,55	924	470	743	197
		7	8,24	6,47	1,56	37,96	17,86	28,70	7,63		10	25,20	19,78	3,56	721	402	640	163	
		8	9,16	7,19	1,68	50,2	24,04	38,2	10,25		12	27,96	23,52	3,64	870	473	751	196	
⁵ / ₂	55	6	6,31	4,95	1,56	32,7	17,3	27,4	7,19	14	140	14	34,64	27,19	3,72	1021	541	958	225
		7	7,28	5,71	1,60	38,46	19,73	31,2	8,22		16	39,24	30,80	3,80	1172	606	960	252	
		8	8,23	6,46	1,64	44,3	22,04	34,8	9,24		12	32,37	25,41	3,89	1086	596	947	245	
6	60	6	6,91	5,42	1,69	42,5	22,84	36,15	9,53	15	150	14	37,45	29,40	3,97	1273	683	1084	281
		7	7,98	6,26	1,73	49,9	26,05	41,3	10,82		16	42,45	33,32	4,05	1462	765	1215	316	
		8	9,03	7,09	1,77	57,4	29,16	46,15	12,16		18	50,97	40,01	4,38	2029	1054	1674	434	
⁶ / ₂	60	9	10,06	7,90	1,81	65,0	32,1	50,7	13,5	15	150	12	34,77	27,29	4,14	1336	740	1177	303
		10	11,07	8,69	1,85	72,6	34,9	55,10	14,8		14	40,25	31,60	4,22	1565	849	1349	349	

* До ОСТ не входить.

Рис. 2. Нерівнобічне кутове залізо.

ОСТ № 15.

Таблиця 4.

№	Розміри (м.м.)			Пло- ща F с.м ²	Вага 1 п. м. кг	Координати центра ваги см		Моменти інерції (с.м ⁴)			
	a	b	d			y_o	x_o	I_b	I_m	I_v	I_u
3/2	30	20	3	1,42	1,11	0,50	0,99	2,66	0,802	1,267	0,447
			4	1,85	1,45	0,54	1,03	3,58	1,101	1,597	0,561
4 $\frac{1}{2}$ /3	45	30	4	2,87	2,25	0,74	1,47	11,95	3,584	5,74	2,08
			6	4,17	3,27	0,81	1,55	18,16	5,590	8,08	2,83
6/4	60	40	6	5,69	4,47	1,01	1,99	42,6	12,84	20,06	7,07
			8	7,41	5,82	1,08	2,07	57,3	17,63	25,50	8,91
7 $\frac{1}{2}$ /5	75	50	6	7,21	5,66	1,20	2,43	84,6	24,75	42,2	14,33
			8	9,43	7,40	1,28	2,51	111,4	33,77	51,9	18,27
			10	11,57	9,08	1,36	2,59	140,2	43,20	62,5	21,84
8/4	80	40	6	6,91	5,42	0,88	2,84	100,6	12,88	44,8	7,52
			8	9,03	7,09	0,96	2,93	135,0	17,89	57,5	9,55
			10	11,07	8,69	1,04	3,01	169,7	23,30	69,1	11,36
9/6	90	60	8	11,45	8,99	1,48	2,95	192,0	57,6	92,1	32,65
			10	14,09	11,06	1,56	8,04	241,4	73,4	111,4	39,30
10/6 $\frac{1}{2}$	100	50	8	12,65	9,93	1,56	3,28	263,5	73,2	127,1	42,5
			10	15,59	12,24	1,64	3,37	331,0	93,0	154,3	51,2
			12	18,45	14,48	1,72	3,45	399,1	113,4	179,9	59,1
12/8	120	80	10	19,13	15,02	1,94	3,92	570	171	276	98,2
			12	22,69	17,81	2,03	4,00	686	207	323	114,3
			14	26,17	20,54	2,10	4,08	804	245	368	129,8
13/9	130	90	10	21,15	16,60	2,18	4,15	728	241	358	141
			12	25,11	19,71	2,26	4,24	871	293	420	165
			14	28,99	22,76	2,34	4,32	1020	345	479	187
15/10	150	100	12	28,74	22,56	2,42	4,89	1336	400	649	232
			14	33,22	26,08	2,50	4,97	1564	471	743	264
			16	37,62	29,53	2,57	5,05	1793	544	833	295
16/8	160	80	12	27,54	21,62	1,77	5,72	1620	208	719	122
			14	31,82	24,98	1,85	5,80	1896	248	823	139

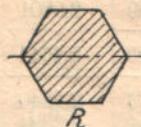
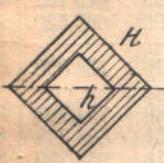
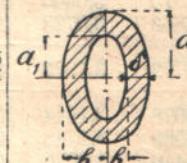
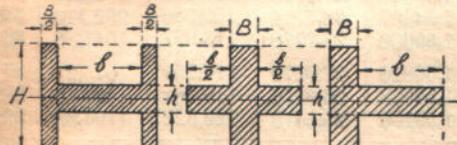
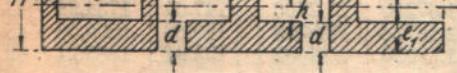
№	Розміри в м.м				Площа <i>F</i> с.м ²	Вага 1 п. м. кг	Коорд. ц. ваги <i>x₀</i>	Моменти інерції (с.м ⁴)			Моменти опору	
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>				<i>I_n</i>	<i>I_x</i>	<i>I_y</i>	<i>W_x</i>	<i>W_y</i>
5	50	38	5	7,5	7,47	5,86	1,41	24,2	27,6	9,44	11,03	3,94
6 ^{1/2}	65	42	5,5	8	9,62	7,55	1,43	34,8	59,9	15,0	18,43	5,42
8	80	45	6	9	11,85	9,30	1,53	48,4	114	20,9	28,5	7,02
10	100	50	6	9	13,92	10,93	1,60	65,6	213	30,2	42,6	8,86
12	120	55	6,5	9,5	17,26	13,55	1,65	92,0	372	44,9	61,9	11,67
14	140	60	7	10,5	20,92	16,42	1,80	132	624	64,5	89,2	15,35
16	160	65	7,5	11	24,92	18,56	1,86	176	954	89,0	119	19,2
18	180	70	8	12	29,26	22,97	2,01	240	1433	121	159	24,3
20	200	75	8,5	12,5	33,93	26,64	2,08	306	2018	159	202	29,4
22	220	80	9	13,5	38,94	30,57	2,23	402	2831	208	257	36
24	240	85	9,5	14	44,28	34,76	2,30	499	3773	264	314	42,6
26	260	90	10	15	49,95	39,21	2,45	635	5045	334	388	51
*28	280	95	10,5	15,5	55,96	43,93	2,53	771	6472	413	462	59,2
30	300	100	11	16,5	62,30	48,91	2,68	957	8361	510	557	69,7

№	Розміри в м.м				Площа <i>F</i> с.м ²	Вага 1 п. м. кг	Моменти інерції с.м ⁴		Моменти опору с.м ³	
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>			<i>I_x</i>	<i>I_y</i>	<i>W_x</i>	<i>W_y</i>
*8	80	50,6	3,9	5,5	8,16	6,41	86,3	9,71	21,6	3,84
10	100	57,0	4,5	6,3	11,03	8,66	180,4	16,1	36,1	5,65
12	120	63,4	5,1	7,1	14,34	11,26	333,4	25,2	55,7	7,95
14	140	69,8	5,7	7,9	18,08	14,19	569	37,7	81,3	10,8
16	160	76,2	6,3	8,8	22,26	17,47	909	54,3	113,6	14,26
18	180	82,6	6,9	9,6	26,87	21,09	1381	75,9	153,4	18,4
20	200	89,0	7,5	10,4	31,91	25,05	2014	103	201	23,2
22	220	95,4	8,1	11,3	37,38	29,34	2843	137	258	28,8
24	240	101,8	8,7	12,1	43,29	33,98	3903	180	325	35,4
26	260	108,2	9,3	13,0	49,63	38,96	5234	231	403	42,8
28	280	114,6	9,9	13,9	56,40	44,27	6878	293	491	51,1
30	300	121,0	10,5	14,7	63,61	49,93	8881	366	592	60,5
32	320	127,4	11,1	15,5	71,25	55,93	11292	452	706	70,9
34	340	133,8	11,7	16,4	79,32	62,27	14161	552	833	82,5
36	360	140,2	12,3	17,2	87,82	68,94	17544	668	975	95,3
38	380	146,6	12,9	18,0	96,76	75,96	21499	801	1132	109,3
40	400	153,0	13,5	18,9	106,13	88,31	26087	954	1304	124,7
45	450	170,0	16,2	24,3	147,00	115,00	45888	1722	2040	208,0

* До ОСТ не входить.

Таблиця 7.

Моменти інерції і моменти опору відносно осі, що проходить через центр тяжіння фігури.

Попереччя	I	W	Попереччя	I	W
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$		$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{24}$
	$\frac{b^4}{12}$	$\frac{b^3}{6}$		$\frac{5\sqrt{3}}{16} R^4$	$\frac{5}{8} R^3$
	$\frac{b^4}{12}$	$\frac{b^3\sqrt{2}}{12}$		$\frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{4}$
	$\frac{b(H^3 - h^3)}{12}$	$\frac{b(H^3 - h^3)}{6H}$		$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D}$
	$\frac{H^4 - h^4}{12}$	$\frac{H^4 - h^4}{6H}$		$\frac{\pi a^4 b}{4}$	$\frac{\pi a^4 b}{4}$
	$\frac{H^4 - h^4}{12}$	$\frac{(H^4 - h^4)\sqrt{2}}{12H}$		$\frac{\pi(a^4 b - a_1^4 b_1)}{4} = \frac{\pi a^4 (a + 3b)}{4}$	$\frac{\pi a^4 (a + 3b)}{4}$
		$I = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$		$W = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$	
		$I = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$		$W = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$	
		$I = \frac{Be_1^3 - bh^3 + ae_1^3}{3}$		$W_1 = \frac{J}{e_1}$	
		$e_1 = \frac{aH^2 + bd^2}{2(aH + bd)}$		$W_2 = \frac{J}{e_2}$	

Таблиці степенів, коренів, Бриггових логаритмів, кол і площ кругів.

n	n^2	n^3	$\sqrt[n]{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	π
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000	1000,000	3,142	0,7854	1
2	4	8	1,4142	1,2599	0,30103	500,000	6,283	3,1416	2
3	9	27	1,7321	1,4422	0,47712	333,333	9,425	7,0686	3
4	16	64	2,0000	1,5874	0,60206	250,000	12,566	12,5664	4
5	25	125	2,2361	1,7100	0,69897	200,000	15,708	19,6350	5
6	36	216	2,4495	1,8171	0,77815	166,667	18,850	28,2743	6
7	49	343	2,6458	1,9129	0,84510	142,857	21,991	38,4845	7
8	64	512	2,8284	2,0000	0,90309	125,000	25,133	50,2655	8
9	81	729	3 0000	2,0801	0,95424	111,111	28,274	63,6173	9
10	100	1 000	3,1623	2,1544	1,00000	100,000	31,416	78,5398	10
11	121	1 331	3,3166	2,2240	1,04139	90,9091	34,558	95,0332	11
12	144	1 728	3,4641	2,2894	1,07918	83,3333	37,699	113,097	12
13	169	2 197	3,6056	2,3513	1,11394	76,9231	40,841	132,732	13
14	196	2 744	3,7417	2,4101	1,14613	71,4286	43,982	153,938	14
15	225	3 375	3,8730	2,4662	1,17609	66,6667	47,124	176,715	15
16	256	4 096	4,0000	2,5198	1,20412	62,5000	50,265	201,062	16
17	289	4 913	4,1231	2,5713	1,23045	58,8235	53,407	226,980	17
18	324	5 832	4,2426	2,6207	1,25527	55,5556	56,549	254,469	18
19	361	6 859	4,3589	2,6684	1,27875	52,6316	59,690	283,529	19
20	400	8 000	4,4721	2,7144	1,30108	50,0000	62,832	314,159	20
21	441	9 261	4,5826	2,7589	1,32222	47,6190	65,973	346,361	21
22	484	10 648	4,6904	2,8020	1,34242	45,4545	69,115	380,133	22
23	529	12 167	4,7958	2,8439	1,36173	43,4783	72,257	415,476	23
24	576	13 824	4,8990	2,8845	1,38021	41,6667	75,398	452,389	24
25	625	15 625	5,0000	2,9240	1,39794	40,0000	78,540	490,874	25
26	676	17 576	5,0990	2,9625	1,41497	38,4615	81,081	530,929	26
27	729	19 683	5,1962	3,0000	1,43136	37,0370	84,823	572,555	27
28	784	21 952	5,2915	3,0366	1,44716	35,7143	87,965	615,752	28
29	841	24 389	5,3852	3,0723	1,46240	34,4828	91,106	660,520	29
30	900	27 000	5,4772	3,1072	1,47712	33,3333	94,248	706,858	30
31	961	29 791	5,5678	3,1414	1,49136	32,2581	97,389	754,768	31
32	1024	32 768	5,6569	3,1748	1,50515	31,2500	100,531	804,248	32
33	1089	35 937	5,7446	3,2075	1,51851	30,3030	103,673	855,299	33
34	1156	39 304	5,8310	3,2396	1,53148	29,4118	106,814	907,920	34
35	1225	42 875	5,9161	3,2711	1,54407	28,5714	109,956	962,113	35
36	1296	46 656	6,0000	3,3019	1,55630	27,7778	113,097	1017,88	36
37	1369	50 653	6,0828	3,3322	1,56820	27,0270	116,239	1075,21	37
38	1444	54 872	6,1644	3,3620	1,57978	26,3158	119,381	1134,11	38
39	1521	59 319	6,2450	3,3912	1,59106	25,6410	122,522	1194,59	39
40	1600	64 000	6,3246	3,4200	1,60206	25,0000	125,66	1256,64	40
41	1681	68 921	6,4081	3,4482	1,61278	24,3902	128,81	1320,25	41
42	1764	74 088	6,4807	3,4760	1,62325	23,8095	131,95	1385,44	42
43	1849	79 507	6,5574	3,5034	1,63347	23,2558	135,09	1452,20	43
44	1936	85 184	6,6332	3,5303	1,64345	22,7273	138,23	1520,53	44
45	2025	91 125	6,7082	3,5569	1,65321	22,2222	141,37	1590,43	45
46	2116	97 336	6,7823	3,5830	1,66276	21,7391	144,51	1661,90	46
47	2209	103 823	6,8557	3,6088	1,67210	21,2766	147,65	1734,94	47
48	2304	110 592	6,9282	3,6342	1,68124	20,8333	150,80	1809,56	48
49	2401	117 649	7,0000	3,6593	1,69020	20,4082	153,94	1885,74	49
50	2500	125 000	7,0711	3,6840	1,69897	20,0000	157,08	1963,50	50

Таблица 8.

n	n^2	n^3	$\sqrt[n]{V_n}$	$\sqrt[3]{V_n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
50	2500	125000	7,0711	3,6840	1,69897	20,0000	157,08	1963,50	50
51	2601	132651	7,1414	3,7084	1,70757	19,6078	160,22	2042,82	51
52	2704	140608	7,2111	3,7325	1,71600	19,2308	163,36	2123,72	52
53	2809	148877	7,2801	3,7563	1,72428	18,8679	166,50	2206,18	53
54	2916	157464	7,3485	3,7798	1,73239	18,5185	169,65	2290,22	54
55	3025	166375	7,4162	3,8030	1,74036	18,1818	172,79	2375,83	55
56	3136	175616	7,4833	3,8259	1,74819	17,8571	175,93	2463,01	56
57	3249	185193	7,5498	3,8485	1,75587	17,5439	179,07	2551,76	57
58	3364	195112	7,6158	3,8709	1,76348	17,2414	182,21	2642,08	58
59	3481	205379	7,6811	3,8930	1,77085	16,9492	185,35	2733,97	59
60	3600	216000	7,7460	3,9149	1,77815	16,6667	188,50	2827,43	60
61	3721	226981	7,8102	3,9365	1,78533	16,3934	191,64	2922,47	61
62	3844	238328	7,8740	3,9579	1,79239	16,1290	194,78	3019,07	62
63	3969	250047	7,9373	3,9791	1,79934	15,8730	197,92	3117,25	63
64	4096	262144	8,0000	4,0000	1,80618	15,6250	201,06	3216,99	64
65	4225	274625	8,0623	4,0207	1,81291	15,3846	204,20	3318,31	65
66	4356	287496	8,1240	4,0412	1,81954	15,1515	207,35	3421,19	66
67	4489	300763	8,1854	4,0615	1,82607	14,9254	210,49	3525,65	67
68	4624	314432	8,2462	4,0817	1,83251	14,7059	213,63	3631,68	68
69	4761	328509	8,3066	4,1016	1,83885	14,4928	216,77	3739,28	69
70	4900	343000	8,3666	4,1213	1,84510	14,2857	219,91	3848,45	70
71	5041	357911	8,4261	4,1408	1,85126	14,0845	223,05	3959,19	71
72	5184	373248	8,4853	4,1602	1,85733	13,8889	226,19	4071,50	72
73	5329	389017	8,5440	4,1793	1,86332	13,6986	229,34	4185,39	73
74	5476	405224	8,6023	4,1983	1,86923	13,5135	232,48	4300,84	74
75	5625	421875	8,6603	4,2172	1,87506	13,3333	235,62	4417,86	75
76	5776	438976	8,7178	4,2358	1,88081	13,1579	238,76	4536,46	76
77	5929	456533	8,7750	4,2543	1,88649	12,9870	241,90	4656,63	77
78	6084	474552	8,8318	4,2727	1,89209	12,8205	245,04	4778,36	78
79	6241	493039	8,8882	4,2908	1,89763	12,6582	248,19	4901,67	79
80	6400	512000	8,9443	4,3089	1,90309	12,5000	251,33	5026,55	80
81	6561	531441	9,0000	4,3267	1,90849	12,3457	254,47	5153,00	81
82	6724	551368	9,0554	4,3445	1,91381	12,1951	257,61	5281,02	82
83	6889	571787	9,1104	4,3621	1,91908	12,0482	260,75	5410,61	83
84	7056	592704	9,1652	4,3795	1,92428	11,9048	263,89	5541,77	84
85	7225	614125	9,2195	4,3968	1,92942	11,7647	267,04	5674,50	85
86	7396	636056	9,2736	4,4140	1,93450	11,6279	270,18	5808,80	86
87	7569	658503	9,3274	4,4310	1,93952	11,4943	273,32	5944,68	87
88	7744	681472	9,3808	4,4480	1,94448	11,3636	276,46	6082,12	88
89	7921	704969	9,4340	4,4647	1,94939	11,2360	279,60	6221,14	89
90	8100	729000	9,4868	4,4814	1,95424	11,1111	282,74	6361,73	90
91	8281	753571	9,5394	4,4979	1,95904	10,9890	285,88	6503,88	91
92	8464	778688	9,5917	4,5144	1,96379	10,8696	289,03	6647,61	92
93	8649	804357	9,6437	4,5307	1,96848	10,7527	292,17	6792,91	93
94	8836	830584	9,6954	4,5468	1,97313	10,6388	295,31	6939,78	94
95	9025	857375	9,7468	4,5629	1,97772	10,5263	298,45	7088,22	95
96	9216	884736	9,7980	4,5789	1,98227	10,4167	301,59	7238,23	96
97	9409	912673	9,8489	4,5947	1,98677	10,3093	304,73	7389,81	97
98	9604	941192	9,8995	4,6104	1,99123	10,2041	307,88	7542,96	98
99	9801	970299	9,9499	4,6261	1,99564	10,1010	311,02	7697,69	99
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	2,00000	10,0000	314,16	7853,98	100

З М И С Т.

	Стор.
В с т у п	3
Прості деформації	4
Однорідність матеріалу	5
Напруга матеріалу	5
Тимчасова й дозволена напруги	6
Коефіцієнт запасу	6
Р о з тя г	7
Міра деформації й Гуків закон	7
Діаграма розриву бруска	7
Вплив власної ваги бруска	9
Здовжнення бруска від власної ваги	9
Бруск з рівним опором на розтяг	10
Ступенчастий бруск	11
Тонкостійні посудини	11
Товстостійні посудини	12
Циліндер	12
Куля	13
С т и с к	13
Подовжній згин	14
Л я б о р а т о р н і д о с л і д и	15
Вплив часу на здовжнення	15
Підвищення критичної точки	15
Вплив температури	16
Втома металів	17
Дія раптового навантаження	18
М е т о д п е р е т и н у	18
Нормальні й дотичні сили	19
З с у в	19
Залежність між нормальними та дотичними напругами	20
Залежність між G та E	21
З а к р у ч у в а н и я	22
Вивід рахункового рівняння	23
Р о б о т а д е ф о� м а ц і ї	24
Циліндрична ресора	25
М о м е н т и і н е р ц і ї	26
Головні моменти інерції	27
Середній радіус інерції	28
Еліпс інерції	28
З г и н	29
Рівнання рівноваги	30
Вивід рахункового рівняння	31
Гуків закон для згину	32
Реакції підпор	33
Перерізна сила та згинний момент	34
Епюра перерізних сил	34
Суцільне навантаження	36
Пружиста лінія	38
Вивід рівняння пружистої лінії	39
Несуцільне навантаження	41
Статично невизначні бруски:	43
1) Бруск з додатковим закріплленням	44
2) Бруск на трьох підпорах: а) з навантаженням суцільним	44
б) з навантаженням скученими силами	45
3) Жорсткі рами	45
Бруски з рівним опором згинові. (Ресора)	46

Дотичні сили при згині	48
Косий згин	50
Бресова й Сен-Венанова теорема	51
Розрахунок лат	51
Нютонова балка	52
Головні напруги	52
Складна деформація	54
I. Розтяг (стиск) по зентровою силою.	54
Обрахунок димаря на стійкість	57
Обрахунок димаря на міцність	59
II. Згин і закручування (вал)	60
Подовжній згин	61
Удар	64
1) Розтяг	64
2) Згин	65
Інші методи розв'язання задач на стат. невизначні бруски	66
1) Метод порівнювання деформацій	66
2) Метод Кастільяно	67
3) Метод найменшої роботи	67
4) Метод взаємних переміщень	68
5) Приклад, розв'язаний всіми методами	68
Кривий брус	71
Обчислення r	73
"	74
Напруги в кривому брусі	75
Загальний випадок згину	75
Деформація кривого бруса	77
Таблиці	78
1) Коефіцієнти пружності й тимчасові напруги	78
2) Дозволені напруги	79
3) Нормальний сортамент. Рівнобічне кутове залізо	80
4) " " " Нерівнобічне	81
5) " " " Коритне залізо	82
6) " " " Двокоритне залізо	82
7) Моменти інерції та моменти опору	83
8) Квадрати, куби, корні і т. д.	84

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000

Стрілки вгину й кути нахилю дотичної

№	Е е к і з Початок коорд. в A; вісь Y угору довжина бр. по осі X = l	П р и $x=0$:					Рівняння пружистої лінії (див. 129) (при $x=l$ одержимо одно або два алгебричних рівняння для визначення невідомих)	Реакцій підпор	Згинні моменти	Кути нахилу дотичної до осі X	Стрілки вгину	
		y_0	θ_0	M_0	Q_0	q_0						
1		f невід.	θ_1 невід.	0	$-P$	0	0	$\ddot{\gamma}y = \beta f + \beta\theta_1 x - P \frac{x^3}{6}$ $\ddot{\gamma}y' = \beta\theta_1 - P \frac{x^2}{2}$ при $x=l$: $y=0$; $y'=0$; звідси θ_1 й f	$B=P$	$M_1=0$; $M_2=-Pl$	$\theta_1 = \frac{Pl^2}{2\beta}$; $\theta_2=0$	$f=-\frac{Pl^3}{3\beta}$
2		0	θ_1 невід.	0	$\frac{Pc}{l}$	0	0	Для DB: $\ddot{\gamma}y = \beta\theta_1 x + \frac{Pc}{l} \frac{x^3}{6} - P \frac{(x-c_1)^3}{6}$ при $x=l$: $y=0$... звідси θ_1	$A=\frac{Pc}{l}$; $B=\frac{Pc}{l}$	$M_1=M_2=0$	$\theta_1 = -\frac{Pcc_1(2c+c)}{6l\beta}$ $\theta_2 = \frac{Pcc_1(2c_1+c)}{6l\beta}$	$x=c_1 \dots f=-\frac{Pc^2c_1^2}{3l\beta}$
3	при $c=c_1=\frac{l}{2}$ буде:	0	θ_1	0	$\frac{P}{2}$	0	0		$A=B=\frac{P}{2}$	$M_1=M_2=0$	$-\theta_1=\theta_2=\frac{Pl^2}{16\beta}$	$x=\frac{l}{2} \dots f=-\frac{Pl^3}{48\beta}$
4		f невід.	θ_1 невід.	0	0	$-q_1$	0	$\ddot{\gamma}y = \beta f + \beta\theta_1 x - \frac{q_1 x^4}{24}$ $\ddot{\gamma}y' = \beta\theta_1 - \frac{q_1 x^3}{6}$ при $x=l$: $y=0$; $y'=0$	$B=q_1 l$	$M_1=0$; $M_2=-\frac{q_1 l^2}{2}$	$\theta_1 = -\frac{q_1 l^3}{6\beta}$; $\theta_2=0$	$f=-\frac{q_1 l^4}{8\beta}$
5		f невід.	θ_1 невід.	0	0	$-q_1$	$+\frac{q_1}{l}$	$\ddot{\gamma}y = \beta f + \beta\theta_1 x - \frac{q_1 x^4}{24} + \frac{q_1}{l} \frac{x^5}{120}$ $\ddot{\gamma}y' = \beta\theta_1 - \frac{q_1 x^3}{6} + \frac{q_1 x^4}{l 24}$ при $x=l$: $y=0$; $y'=0$	$B=\frac{q_1 l}{2}$	$M_1=0$; $M_2=-\frac{q_1 l^2}{8}$	$\theta_1 = \frac{q_1 l^3}{8\beta}$; $\theta_2=0$	$f=-\frac{11q_1 l^4}{120\beta}$
6		f невід.	θ_1 невід.	0	0	$-\frac{q_1}{l}$		$\ddot{\gamma}y = \beta f + \beta\theta_1 x - \frac{q_1}{l} \frac{x^5}{120}$ $\ddot{\gamma}y' = \beta\theta_1 - \frac{q_1}{l} \frac{x^4}{24}$ при $x=l$: $y=0$; $y'=0$	$B=\frac{q_1 l}{2}$	$M_1=0$; $M_2=-\frac{q_1 l^2}{6}$	$\theta_1 = \frac{q_1 l^3}{24\beta}$; $\theta_2=0$	$f=-\frac{q_1 l^4}{30\beta}$
7		0	θ_1 невід.	0	$\frac{q_1 l}{2}$	$-q_1$	l	$\ddot{\gamma}y = \beta\theta_1 x + \frac{q_1 l}{2} \frac{x^3}{6} - \frac{q_1 x^4}{24}$ при $x=l$: $y=0$	$A=B=\frac{q_1 l}{2}$	$M_1=M_2=0$	$-\theta_1=\theta_2=\frac{q_1 l^3}{24\beta}$	$f=-\frac{5q_1 l^4}{384\beta}$
8		0	θ_1 невід.	0	A невід.	0	0	Для DB: $\ddot{\gamma}y = \beta\theta_1 x + A \frac{x^3}{6} - P \frac{(x-c_1)^3}{6}$ $\ddot{\gamma}y' = \beta\theta_1 + A \frac{x^2}{2} - P \frac{(x-c_1)^2}{2}$ $\ddot{\gamma}y'' = Ax - P(x-c_1)$ при $x=l$: $y=0$; $y'=0$ (2 рівн.)	$A=\frac{Pc^2(3l-c)}{2l^3}$ $B=\frac{Pc_1(l^2-c_1^2)}{2l^3}$ $M_{\max}=0, 192 Pl$	$M_1=0$ $M_2=-\frac{Pc_1(l^2-c_1^2)}{2l^3}$ $M_{\max} M=0, 192 Pl$	$\theta_1 = -\frac{Pc_1 c^2}{4l\beta}$; $\theta_2=0$	
9	при $c=c_1=\frac{l}{2}$ буде:	теж	теж	теж	теж	теж			$A=\frac{5}{16}P$; $B=\frac{11}{16}P$	$M_1=0$; $M_2=-\frac{3}{16}Pl$ $M_{\max} M=0, 174 Pl$	$\theta_1 = -\frac{Pl^2}{32l\beta}$	$x=\frac{l}{5}; f_{\max}=-\frac{Pl^3}{48\sqrt{5}\beta}$
10		0	0	M_1 невід.	A невід.	0	0	Для DB: $\ddot{\gamma}y = M_1 \frac{x^3}{2} + A \frac{x^3}{6} - \frac{P(x-c_1)^3}{6}$ $\ddot{\gamma}y' = M_1 x + A \frac{x^2}{2} - \frac{P(x-c_1)^2}{2}$ $\ddot{\gamma}y'' = M_1 + Ax - P(x-c_1)$ при $x=l$: $y=0$; $y'=0$ (2 рівнання)	$A=\frac{Pc^2(c+3c_1)}{l^3}$ $B=\frac{Pc^2(3c+c_1)}{l^3}$	$M_1=-\frac{Pc^2c_1}{l^2}$ $M_2=-\frac{Pc_1^2c}{l^2}$	$\theta_1=\theta_2=0$	
11	при $c_1=c=\frac{l}{2}$ буде:	0	0	M_1 невід.	P 2	0	0		$A=B=\frac{P}{2}$	$M_1=M_2=-\frac{Pl}{8}$		$при x=\frac{l}{2}; f=-\frac{Pl^3}{192\beta}$
12		0	θ_1 невід.	0	A невід.	$-q_1$	0	$\ddot{\gamma}y = \beta\theta_1 x + A \frac{x^3}{6} - \frac{q_1 x^4}{24}$ $\ddot{\gamma}y' = \beta\theta_1 + A \frac{x^2}{2} - \frac{q_1 x^3}{6}$ $\ddot{\gamma}y'' = Ax - \frac{q_1 x^2}{2}$ при $x=l$: $y=0$; $y'=0$	$A=\frac{3}{8}q_1 l$; $B=\frac{5}{8}q_1 l$	$M_1=0$; $M_2=-\frac{q_1 l^2}{8}$	$\theta_1 = -\frac{q_1 l^3}{48\beta}$; $\theta_2=0$	$при x=0,42l; f_{\max}=\frac{Pp}{185\beta}; P=q_1 l$
13		0	0	M_1 невід.	$\frac{q_1 l}{2}$	$-q_1$	0	$\ddot{\gamma}y = M_1 \frac{x^3}{2} + \frac{q_1 l}{2} \frac{x^3}{6} - \frac{q_1 x^4}{24}$ при $x=l$: $y=0$	$A=B=\frac{q_1 l}{2}$	$M_1=M_2=-\frac{q_1 l^2}{12}$	$\theta_1=\theta_2=0$	$f=-\frac{q_1 l^4}{384\beta}$
14		0	0	M дано	0	0	0	$\ddot{\gamma}y = M \frac{x^2}{2}$ при $x=l$ $\ddot{\gamma}y' = Mx$ при $x=l$; $y=f$; $y'=\theta_2$	$A=B=0$	$M_1=M_2=M$	$\theta_2=\frac{Ml}{\beta}$	$f=\frac{Ml^2}{2\beta}$
15		0	θ_1 невід.	0	$\frac{M_2}{l}$	0	0	$\ddot{\gamma}y = \beta\theta_1 x + \frac{M_2}{l} \frac{x^3}{6}$ при $x=l$: $y=0$	$A=+\frac{M_2}{l}$; $B=-\frac{M_2}{l}$	$M_1=0$; $M_2=M_2$; $M_1=M_2 \frac{x}{l}$	$\theta_1=-\frac{Ml}{6\beta}$; $\theta_2=\frac{Ml}{3\beta}$	$при x=\frac{l}{\sqrt{3}}; f_{\max}=\frac{0,064 M^2}{\beta}$
16		0	θ_1 невід.	M_1	$\frac{M_2-M_1}{l}$	0	0	$\ddot{\gamma}y = \beta\theta_1 x + M_1 \frac{x^2}{2} + \frac{M_2-M_1}{l} \frac{x^3}{6}$ при $x=l$: $y=0$	$A=+\frac{M_2-M_1}{l}$; $B=-\frac{M_2-M_1}{l}$	$M_1=M_1+\frac{M_2-M_1}{l} x$	$\theta_1=-(M_2+2M_1) \frac{l}{6\beta}$	$при M_1=M_2=M; f=-\frac{Ml^2}{8\beta}$
17		0	θ_1 невід.	$-M_1$	$\frac{M_2+M_1}{l}$	0	0	$\ddot{\gamma}y = \beta\theta_1 x - M_1 \frac{x^2}{2} + \frac{M_2+M_1}{l} \frac{x^3}{6}$ при $x=l$: $y=0$	$A=+\frac{M_2+M_1}{l}$; $B=-\frac{M_2+M_1}{l}$	$M_1=-M_1+\frac{M_2+M_1}{l} x$	$\theta_1=(2M_1-M_2) \frac{l}{6\beta}$	$при M_1=M_2=M; f=-\frac{Ml^2}{8\beta}$
18		0	θ_1 невід.	$-Pc$	0	0	0	$\ddot{\gamma}y = \beta\theta_1 x - Pc \frac{x^3}{6}$ при $x=l$: $y=0$	$A=B=P$	$M_1=M_2=-Pc$	$\theta_1=\frac{Pcl}{2\beta}$	$f=\frac{PcP}{8\beta}$ $f_1=-\frac{Pc^2(3l+2c)}{6\beta}$

Порівняльний метод розгляду деформацій.

Таблиця 10.

Деформації		Розтяг	Сгинання	Зсув	Закручування	Згинання	Складна деформація
Величини							
Сила	(кг)	P	P	T	—	—	P й T
Момент сили	(кгсм)	—	—	—	M _x = Pa = P ₀ R	M (за таблицею)	M _x й M
Довжина бруска	(с.м)	l	l	h	l	dx = ds = R · dθ	l
Площа поперечного перекрою ⊥ до осі бруска	(с.м ²)	F	F	F	F	F	F
Момент опору	(с.м ³)	—	—	—	W _x = $\frac{I_0}{R} = \frac{\pi d^3}{16}$	W = $\frac{I_y}{l}$	W _x й W
Коефіцієнт пружності	(кг/с.м ²)	E	E'	G = 0.4E	G	E й E'	E, E' й G
Міра деформації	абсолютна подовжня	$\lambda_1 = l_1 - l$	$\lambda_2 = l - l_1$	—	—	$\lambda_3 = ed\theta = 6$, мала величина	
	поперечна	$\lambda_1' = b - b_1$	$\lambda_2' = b_1 - b$	$\lambda_3 = AB$ (абс. зсув.)	$\lambda_4 = AB =$ абс. дуга закруч.	$\lambda_5' = e'd\theta_1 = 6$, м. в.	
	кутова	—	—	τ — кут нахилу	$\varphi = \frac{\lambda_4}{R} =$ абс. кут закруч.	$d\theta =$ кут подовжньої кривини $d\theta_1 =$ " поперечної	
	відносна подовжня	$\varepsilon_1 = \frac{\lambda_1}{l}$	$\varepsilon_2 = \frac{\lambda_2}{l}$	—	—	$\varepsilon_5 = \frac{\lambda_5}{ds} = \frac{e}{R}$	
	поперечна	$\varepsilon_1' = \frac{\lambda_1'}{b}$	$\varepsilon_2' = \frac{\lambda_2'}{b}$	$\varepsilon_3 = \frac{\lambda_3}{h} = t_g \tau = \tau$	$\varepsilon_4 = \frac{\lambda_4}{l} =$ відн. дуга закруч.	$\varepsilon_5' = \frac{\lambda_5'}{ds'} = \frac{e'}{R_1} = \alpha \varepsilon_5$	
	кутова	—	—	τ = 2ε ₁	$\Theta = \frac{\varepsilon_4}{R} = \frac{\varphi}{l} =$ відн. кут закруч.	—	
	нормальна до площин F	$n_1 = \frac{P}{F}$ по всіх точках F	$n_2 = \frac{P}{F}$ по всіх точках F	$n_3 = 0$	$n_4 = 0$	$n_5 = \frac{M}{W}$ в крайньому волокні на віддаленні e від нецентр. шару	
Напруга матеріалу	дотична до площин F	t ₁ = 0	t ₂ = 0	$t_3 = \frac{T}{F}$ по всіх точках F	$t_4 = \frac{M_x}{W_{kp}}$ на поверхні бруска	$t_5 = \frac{QS}{Ib}$ на віддаленні z від нецентр. шару	
	абсолютна міра деформації	$\lambda_1 = \frac{Pl}{FE}$	$\lambda_2 = \frac{Pl}{FE'}$	$\lambda_3 = \frac{Th}{FG}$	$\lambda_4 = \frac{M_x \cdot l}{W_x \cdot G}$	$\lambda_5 = \frac{Mdx}{WE}$	Формула Сен-Венана
Гуків закон	кутова міра деформації	—	—	—	$\varphi = \frac{M_x \cdot l}{I_0 G}$	$d\theta = \frac{Mdx}{EI} = \frac{Mdx}{\beta}$	$n_6 = \frac{3}{8} n + \frac{5}{8} \sqrt{n^2 + 4t^2}$ $n = n_1 \dots n_2 \dots n_5$ $t = t_3 \dots t_4$
	напруга матеріалу	$n_1 = E \cdot \varepsilon_1$	$n_2 = E' \cdot \varepsilon_2$	$t_3 = G \cdot \varepsilon_3$	$t_4 = G \cdot \varepsilon_4$	$n_5 = E \cdot \varepsilon_5 = E \frac{e}{R}$	
Рахункове рівняння		$n_1 = \frac{P}{F} \leqslant$ дозволеної (табл. II)	$n_2 = \frac{P}{F} \leqslant$ дозволеної (табл. II)	$t_3 = \frac{T}{F} \leqslant$ дозволеної (табл. II)	$t_4 = \frac{M_{kp}}{W_{kp}} \leqslant$ дозволеної (табл. II)	$n_5 = \frac{M}{W} \leqslant$ дозволеної (табл. II)	$\max n - \min n \leqslant$ дозвол.
Напруга	на площині поперечного перекрою F	нормальна	$n = n_1$ в кожній точці F	$n = n_2$ в кожній точці F	—	$n = E \frac{z}{R} - \frac{M}{I} = \frac{n_2 e}{z}$ на відстані z від нецентр. шару	$n_6 = \frac{P}{F} + \frac{Pay}{I_z} + \frac{Pbz}{I_y}$ напруга в A (y ₁ z) сила в B (a ₁ b)
	дотична	t = 0	t = 0	t = t ₃ в кожній точці F	$t = t_4 \frac{r}{R}$ в точці на відстані r від центра	$t = \frac{QS}{Ib}$	
на площині під кутом β до площині F	нормальна	$n = n_1 \cos^2 \beta$	$n = n_2 \cos^2 \beta$	—	—	—	$\max n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{n^2 + 4t^2}$ $\min n = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{n^2 + 4t^2}$
	дотична	$t = n_1 \sin \beta \cos \beta$	$t = n_2 \sin \beta \cos \beta$	—	—	—	$tg 2\beta = \frac{2t}{n}$
Безкрайньо мала внутрішня сила	нормальна до площин F	$q_1 = n_1 \cdot dF$	$q_2 = n_2 \cdot dF$	—	—	$q_a = n \cdot dF = E \frac{z}{R} dF$	$\max t = \frac{1}{2} \sqrt{n^2 + 4t^2} \quad \beta = 45^\circ$
	дотична до площин F	—	—	$q_3 = t_3 \cdot dF$	$q_4 = t_4 \frac{r}{R} dF$	$q_t = t \cdot dF$	—
Рівняння рівноваги безкрайньо малої частини бруска за методом перетину		$P = \Sigma q_1 = n_1 \int dF = n_1 \cdot F$	$P = \Sigma q_2 = n_2 \int dF = n_2 \cdot F$	$T = \Sigma q_3 = t_3 \int dF = t_3 \cdot F$	$M_x = \Sigma q_4 \cdot r = \frac{t_4}{R} \int r^2 dF = t_4 \frac{I_0}{R} = t_4 \cdot W_x$	$M = \Sigma q_5 \cdot z = \frac{E}{R} \int z^2 dF = \frac{EI}{R} = n_5 \cdot W$	—
Робота внутрішніх сил		$V_1 = \frac{P \lambda_1}{2} = \frac{\lambda_1^2 FE}{2l} = \frac{P^2 l}{2FE}$	$V_2 = \frac{P \lambda_2}{2} = \frac{\lambda_2^2 FE'}{2l} = \frac{P^2 l}{2FE'}$	$V_3 = \frac{T \lambda_3}{2} = \frac{\lambda_3^2 FG}{2lh} = \frac{T^2 h}{2FG}$	$V_4 = -\frac{P \lambda_4}{2} = -\frac{M_x \lambda_4}{2} = \frac{M_x \varphi}{2} = \frac{M_x \cdot 2l}{2I_0 G} = \frac{\varphi^2 I_0 G}{2l}$	$dV_5 = \frac{P \lambda_5}{2} = \frac{Md\theta}{2} = \frac{M^2 dx}{2EI} ; V_5 = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$	—
Р	$Q(h + \lambda) = \frac{\lambda^2 FE}{2l}$	абсолютна деформація	$\lambda_{ya} = \lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 + 2\lambda_1 h}$	теж, тільки λ ₂	теж, тільки λ ₃	$\varphi_{ya} = \omega \sqrt{\frac{l \cdot \Theta}{G}}$	$f_{ya} = f + \sqrt{f^2 + 2hf}$
	ударна напруга	$n_{ya} = n_1 + \sqrt{n_1^2 + n_1^2 h \frac{E}{l}}$	—	—	$t_{ya} = \frac{M_x}{W_x} = \omega R \sqrt{\frac{G}{l} \cdot \frac{\Theta}{I}}$	$n_{ya} = \frac{12Ee}{l^2} \cdot f_{ya}$	—
	$Qh = \frac{\lambda^2 FE}{2l}$	теж при значній висоті h	$\lambda_{ya} = \sqrt{2\lambda_1 h} ; n_{ya} = \sqrt{n_1^2 h \frac{E}{l}}$	—	—	$\lambda_{ya} = \sqrt{\frac{Qh^2}{48EI} \cdot 2h} ; n_{ya} = \frac{12Ee}{l^2} f_{ya}$	—
P	$h=0$	теж при h = 0	$\lambda_{ya} = 2\lambda_1 ; n_{ya} = 2n_1$	—	—	—	—

