ҐЕОРҐ ФРІДРІХ БЕРНГАРД РІМАН
GEORG FRIDRICH BERNHARD RIEMANN

ПРО ГІПОТЕЗИ, ЩО СТАНОВЛЯТЬ ОСНОВУ ГЕОМЕТРІЇ

(Über die Hipothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen)

ДВОУ / ДЕРЖТЕХВИДАВ

ҐЕОРҐ ФРІДРІХ БЕРНҐАРД РІМАН
GEORG FRIDRICH BERNHARD RIEMANN

ПРО ГІПОТЕЗИ, ЩО СТАНОВЛЯТЬ ОСНОВУ ГЕОМЕТРІЇ

(Über die Hipothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen)

Переклад та редакція М. ЛАШКО

ДЕРЖТЕХВИДАВ
ХАРКІВ 1931 КИЇВ

Київськ. Міськліт № 1018

Зам. № 1042 Тир. 2,000 3 арк.

ВСТУП

Ріманові, щоб вступити до професорської колеґії, треба було прочитати лекцію перед Ґеттінґенським філософським факультетом. Він запропонував Ґавсові вибрати одну тему з трьох, дві з яких він уже опрацював. Ґавс вибрав тему цієї праці, з чого Ріман був не зовсім задоволений, бо саме ця тема ним була не опрацьована.

1854 року лекція була прочитана й написана, певно, для самого Ґавса.

Праця написана конспективно, деякі питання тільки намічені й немає математичних обрахувань. Ці математичні обрахування, зв'язані з перетворенням диференціяльної форми, подані в праці на тему, запропоновану Паризькою академією наук 1858 року щодо поширення теплового струма Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab III-ma Academia Parisiensi propositae, 1861, Riemans Werke, вид. II, стор. 391-404.

Необробленість, а то й просто довільність деяких основних понять даної праці були, певно, очевидні й для Рімана, чим і можна пояснити, що ця праця не була опублікована за його життя. Її знайшов, розбираючи посмертні Ріманові рукописи, Дедекінд і вперше опублікував у Göttingener Abhandlungen, XIII, 1867). Неясність деяких понять цієї праці призводила часто до того, що як каже Софус Лі у своїй ґрунтовній праці, де він завершив і довів до повної ясности основні поняття Рімана „математики часто й густо не розуміли, що власно хотів сказати Ріман" (Theorie der Transformationsgruppen, Bd. III, 1893, стор. 485).

Ріманова праця перекладена багатьома европейськими мовами, принаймні нам відомо: французький (Гоюеля), англійський (Гальстеда й Кліфорда), італійський (Паскаля), польський (Дікштейна) і російський (Сінцова).

Ми перекладали з німецького видання 1923 р., виданого за редакцією й з коментарями Вайля. Ми вважали за потрібне перекласти й Вайлеві коментарі, що подають сучасну математичну розробку питань, порушених від Рімана.

Щодо точної передачі деяких важких слів, ми вдавалися до англійського перекладу Кліфорда (Mathematical papers W. K. Clifford, 1882, стор. 55-71), до французького (Hoüel), вміщеного у французькому виданні Ріманових праць (Ouevres mathématiques de Riemann, 1898) і до російського перекладу Д. М. Сінцова (Збірник „Об основаниях геометрии", вид. II, Казань, 1895).

ЗНАЧЕННЯ РІМАНОВИХ ІДЕЙ В ІСТОРИЧНІЙ ПЕРСПЕКТИВІ

Розгортання змісту неевклідової геометрії може правити за яскравий зразок діялектичного розвитку поняття. Напочатку виступає поняття з невеликим об'ємом. Що більшає об'єм, то конкретнішає поняття, то більшим змістом воно обростає, вбираючи в себе дедалі більше конкретних визначень і, всупереч формальній логіці, де зі збільшенням об'єму меншає зміст, вироджуючись у пусту абстракцію, діялектичне поняття все більше відображає реальність, відбиттям якої вона є в мисленні, стає многостатністю в єдності.

Розвиток конкретних наук висуває проблеми математичного порядку, в яких вони (науки) так би мовити, „розкриваються". Зміст науки більшає щодо об'єму і разом з тим конкретнішає Отже й математика повинна, щоб не бути відірваною від свого ґрунту, на якому вона зростає, розгортатися поруч із розвитком науки.

Цілі позитивні числа, дрібні позитивні числа, від'ємні числа, іраціональні, комплексні величини, векторні величини і, нарешті, теорія відносности, що знаходить свій математичний вираз у теорії тензорів, так званого „Ricci-Kalkul". Нова квантова механіка збуджує розробляти теорію безконечних матриць і т. і.

Кожна послідовна величина (як, наприклад, комплексні щодо дійсних) має більший логічний об'єм, але разом з тим і більше змісту, всупереч формальній логіці.

І „абстрактніша" величина краще й точніше відбиває багатогранний конкретніший зміст.

Неевклідова геометрія виникла із заперечення 5 постуляту

„Елементів“ Евкліда, відштовхуючись від нього. Коли глибше вдуматись, ясно виявиться випадковий характер цього приводу, його недоконечність. Адже ж до вершин неевклідової геометрії можна дійти й простішим шляхом, навпростець, не кружляючи навколо, та цьому заважала інтуїція обмеженого набутого досвіду, так званого, евклідового простору. Порушивши обмежену інтуїцію, що оповивала застиглою формою розмаїтість геометрій, відкрили нові світи.

Перший період неевклідової геометрії не виходив за межі синтетичної методи, Евклідового способу побудови доведень. Другий період — метрико-диференціяльний — почався, принаймні так пишуть офіційні історики, з праці Рімана. І третій період розпочав Келі й разом з ним Клайн, виходячи з проєктивної геометрії.

Синтетична неевклідова геометрія, побудована працями Лобачевського й Боляя, була цими працями майже вичерпана й залишалася тільки детальна облицьовка побудови.

Геометричне багатство фігур за евклідовою методою залишається обмеженим. Кожна фігура потрібувала власного математичного апарату. Із багатющого запасу геометричних образів наша інтуїція винесла надто мало.

Аналітична Декартова метода кинула блискуче світло на дослідження геометрії. Відкрився цілий новий світ незнаних досі геометричних образів, що появлялися ніби за допомогою помаху чарівної палички — аналітичної методи.

Роз'єднані досі аналіза й геометрія запліднили одна одну, створивши новий синтез.

„Доки альґебра й геометрія залишалися роз'єднаними, їхні успіхи були незначними й їхнє прикладання обмеженим; та коли ці обидві науки об'єдналися, підсилили одна одну й пішли рядом швидко до завершення“ (Ляґранж, цит. за Veronese, „Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen, 1894, стор. XXIII).

Грецька й середньовічна філософія й культура бар'єром відділяли якісні визначення між собою, що випливало із переважно якісного тодішнього світогляду. Кількість теж була якістю. Звідси пітагореїзм в його первісному розумінні.

На початку торговельного капіталізму для потреб практики кількість відограє дедалі більшу ролю. Вироблюється механістичний світогляд, цей перевернутий пітагореїзм. Геометрія, об'єднавшись з аналізою, по суті стає частиною аналізи.

Та внутрішній зв'язок фізики й геометрії ще тоді був не зрозумілий, хоча евклідова геометрія не можлива без ньютонової механіки й навпаки.

Ріман вніс фізичні елементи в геометрію, оплідниз її новим світоглядом, що виріс на базі фізики безконечно-малого, що прийшла на зміну фізиці далекодії (actio in distantia).

І цікаво, що коли в Декарта були попередники — Орезм і Ферма, перед Ріманом подібні ж ідеї плекалися вже віддавна.

Інакше й не може бути, бо тодішня епоха була вагітна на них і історія абсолютно не зацікавлена, щоб обов'язково ці ідеї зародилися в одній „вибраній" голові.

Ідея n-мірної многостатности вже давно пробивалася крізь товщу інтуїції тримірного евклідового простору.

Вже в XVII ст. говорить про чотиримірний світ англійський філософ Г. Мор (H. More) (Zimmermann. Henry More und die vierte Dimension des Raumes. Sitz Ber. der phil. hist. Classe der Ac. Wien, 1881).

Пастор Фрікер року 1750 поклав початок зливі праць, що появились досі, де n-мірному просторові надавалося „божественних" властивостей.

Дідро в Енциклопедії в статті прр виміри писав, що можна розглядати світ як чотирьох вимірів, де четвертий вимір є час; про це ж писав і Ляґранж.

Молодий Кант, що ще не відкидав об'єктивного існування простору, писав про можливість світу вище трьох вимірів (Gedanke von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte... 1746 р. Immanuel Kants Werke, Bd. I, 1922, стор. 21-24).

Мебіюс (Baryc. Calkül. 1827, або Math. Werke, Bd I), говорячи про симетричні фігури в тримірному просторі, допускає існування чотиримірного простору. Та повне розуміння n-мірної многостатности в усій його абстрактності ми знаходимо в п'ятьох видатних математиків, що їхніх праць, можливо, Ріман не знав.

У Ґрасмана (Grassmann. Die lineale Ausdehnungslehre. 1844) поняття n-мірної многостатности дійшло цілковитого завершення. Та довгий час Ґрасманова праця залишалася невідомою.

Келі оперував з поняттям n-мірного аналітичного простору (Cabley, Capters in the analitical geometrie of (n) dimension, Collected Papers, Bd. I).

Коші дав чисто аналітичне визначення многостатності, що за

словами Веронезе ріжниться від Ріманового тільки тим, що вона розглядається як числова многостатність, чого в Рімана не має. Це „тільки“ для багатьох геометрів дуже характеристичне.

Цікава історія сталася з працею Людвіґа Шлефлі (Schlöfli), що розвинув 1850 р. більше ніж інші поняття n-мірного простору. Та ця праця залишилася неопублікованою аж до 1901 року (H. de Vries. Die vierte Dimension, 1926.

Всі ці праці залишилися невідомими Ріманові. І безпосереднього впливу зазнав Ріман, як про це він сам каже, від філософії Гербарта і від свого вчителя Ґавса.

Всі попередні спроби визначити n-мірну многостатність не виходили поза межі математики. Гербарт же поширив поняття многостатности і на інші об'єкти, як то: звуки, кольори тощо. (Herbart. Psychologie der Wissenschaft, Bd. I, § 100 і Bd. II, § 139).

Це поширене розуміння многостатности (Гербарт писав: Reihenform) Ріман цілком переніс до своєї теорії.

Досі не цілком виясненим залишалося питання про вплив Ґавса на Рімана і взагалі Ґавсове ставлення до опрацювання проблеми n-мірного простору й метрико-диференціяльного напрямку в обґрунтуванні неевклідової геометрії.

Сталло (The concepts and teories of modern physics, 1882, стор. 248) взагалі заперечував самостійність Ріманової праці.

Ердман (B. Erdmann, Die Axiome der Geometrie, 1877), на підставі деяких даних вважав, що Ґавс з повним правом може претендувати на Ріманового попередника.

Ґавс у листах писав про різні шляхи, якими він дійшов до неевклідової геометрії, порівнюючи з синтетично-елементарним шляхом Лобачевського, що за словами Ґавса йшов часто геометричним шляхом. Сарторіус („Gauss zum Gedächtnis“) згадував, що Ґавс допускав геометрію вищих ніж три вимірів.

Ґавсові студії над комплексними числами теж лежали в пляні тієї ж концепції. У листі до Ґрасмана він пише, що Ґрасманові ідеї він давно плекає й розробляє, а Ґрасманові праці, як ми знаємо, щільно підійшли до вивчання геометрії, як многостатности.

Дедекінд у біографії Рімана, доданої до Ріманових творів, згадує спомини Вебера про величезне враження, що справила доповідь Рімана на Ґавса. Все це були натяки, що допускали різні тлумачення. І тільки нові знайдені матеріяли, опубліковані у X томі Ґавсових творів, стверджують, що поняття простору

як n-мірної многостатности було предметом Ґавсових праць, його листування й навіть темою лекцій (Werke, Bd. X_I, стор. 478-481).

Це звичайно не зменшує значення Рімана, та й не в тім справа, чи позичив Ріман від Ґавса, чи самостійно дійшов до їх. Важливо, що Ріман висловив виразно те, що вистигло в той час, що був ґрунт, на якому виростали й прищеплювалися ідеї, відомі тепер під назвою Ріманових, важливо те, що ці ідеї були предметом серьозного розгляду й праці багатьох тодішніх математиків і навіть філософів.

Поняття кривини простору Ріман взяв від Ґавса щодо кривини поверхні й переніс до n-мірної многостатности. Отже, тут ми маємо тільки формальне узагальнення; він не подає нічого посутньо нового.

Це абстрактне поняття кривини поверхні й простору має досить „низьке" земне походження. Тут ми бачимо, як „дух" того часу „визирає" в найабстрактніших визначеннях. Тодішня механіка потрібувала аналізи безконечно-малих і ця аналіза прийшла переможно й до геометрії. Потреба геодезії в уточненому математичному апараті, надто ж численні тодішні геодезичні вимірювання, якими цікавився Ґавс (Ґавс має чимало праць з геодезії) спричинилась до появлення абстрактної теорії поверхень.

Як відомо, увесь сенс Ріманових ідей полягає в тім, що він досліджує геометричні елементи в безконечно-малому, будуючи всю геометрію на диференціяльному виразі лінійного елемента.

Ріманові залишилося зробити з геометрією те, що фізики зробили з фізикою далекодії (actio in distantia).

Фур'є став досліджувати теплові явища в безконечно-малому, Пуасон зробив це з механікою, Мактвел, вже пізніше Рімана в принципах електромагнетного поля досліджував електромагнетні явища в безконечно малому, об'єднавши їх з оптичними, Айнштайн за нашого часу принципи фізики близькодії переніс до теорії тяжіння.

Отже, принципіяльна настанова, так би мовити, тодішньої фізики переносилася з принципу далекодії до близькодії і відповідно до цього створювався аналітичний апарат, і Ріман цей „дух" фізичної думки застосував у досліджуванні геометрії, щоб також прискорити процес перероблювання фізики, як це й сталося з теорією тяжіння. Вайль називає Ріманову геометрію „гео-

метрією близькодії" (Weyl. Reine Infinitesimal Geometrie, Mathematische Zeitschrift, 1920, стор. 389).

Новий етап в розвитку неевклідової геометрії — метріко-диференціяльний, початий від Рімана, відразу прищепився між математиків, бо ґрунт був підготовлений.

В час появи з друку Ріманового „Habilitationschrift" відразу появилося, незалежно від Рімана, чимало подібних теорій. Так, наприклад, 1868 року появилася праця Бельтрамі Saggio di nterpretazione della geometria non-Euclidea. Giornale di matem. Vol. VI є російський переклад у збірн. „Об основаниях геометрии", що була наслідком Бельтрамових студій над теорією геодезичних ліній.

В тому ж році появляється відома праця Гельмгольтца — „Über die Tatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (є російський переклад у тому самому збірнику). Гельмгольтц взявся до дослідження як фізіолог, порівнюючи простір з іншими многостатностями, надто ж працюючи над фізіологічною оптикою, що становила вдячний ґрунт для такого дослідження.

Геометрія, як і всяка наука, має об'єкт свого дослідження. Та цей предмет дослідження є неясний, не визначений для самих геометрів. Поняття лінії, поверхні є найтемнішими місцями в усій геометрії. І проблема дефініції основних понять завжди стояла перед математиками. Кричущу потребу визначити елементи геометричного дослідження розуміли геометри й навіть деякі з них вважали, що саме через брак такої дефініції не можна довести 5-го евклідового постуляту про паралельні лінії. У французькій академії відбулася дискусія про визначення прямої лінії. Ламберт, Фур'є, Монж і пізніше Ґавс говорили про значення дефініції прямої лінії для геометрії. А то геометр уподоблявся ремісникові, що оперуючи з набором предметів, не знаючи до тогож їхньої природи, провадив різну комбінацію з різних елементів, не знаючи міри дозволеного й недозволеного.

Цей стан речей залишився подекуди й до цього часу.

Аксіоматична метода, виникнувши з геометричних досліджень тепер перекидається й до інших наук: до фізики тощо. Дехто вважає її за ідеальну, універсальну методу, що повинна заступити всі інші.

В чім же її „цілюща" сила? Аксіоматична метода, не виходячи за межі формальної логіки й оперуючи з поняттями й предложеннями, зв'язками понять, знижуючись по дедуктивній „дра-

бині“ вниз до дедалі „простіших“ (ми поставили це слово навмисно в лапках, бо деякі „прості“ поняття й аксіоми аж ніяк не прості; взяти хоча б Дедекіндову аксіому неперервности) нарешті приводить до понять, що залишаються без визначення й до предложень без їхнього доказу.

Ці основні невизначені поняття й не доведені постуляти чи аксіоми без певного критерія їхнього існування повинні стати підвалиною розгалуженого вчення — геометрії й мати чомусь прикладання до дійсности. Ми з повним правом пишемо це чомусь, бо в аксіоматичній методі відповіді на це немає та й не може бути по самій її природі. Бутру пише цілком щиро, що збігання математичних понять і дійсности є „щаслива випадковість“. Гільбертові в „Основах геометрії“ цілком байдуже, чим саме він оперує у своїй науці. Адже це є просто „системи речей“ без визначення, з якими не зв'язано жодного конкретного змісту.

Різностатний і багатий зміст геометрії ніби то повинен виходити із цих пустих і незв'язаних між собою логічних елементів. Та формальна логіка безпорадна чимсь зарадити лихові. Її простолінійний характер не дає критерія розгортання, еволюції поняття. За образ формальної логіки й її „останнього слова“— аксіоматики може правити пряма лінія, де нанизані її предложення. Початок лінії починається за уподобанням так званого широкого принципа „довільного вибору аксіом“. Та прямою лінією, або краще, за Геґелем, „безглуздою безконечністю“ годі охопити реальність.

Абстрактне поняття в діялектичній логіці не є початком мислення, а результатом, де увібрано увесь процес в усій його конкретності. Поняття не є незв'язаними й незалежними одно від одного. Процес утворення понять базується на даному ступені розвитку пізнання. Основні, початкові поняття стають кінцем всього ходу мислення, його завершенням. Мисленню доводиться увесь час, розвиваючись і вбираючи в себе дедалі більше конкретности, повертатися до вихідного пункту.

Аксіоматична метода подібна до механізму комбінацій, де без кінця комбінують кожний за уподобанням, основні поняття (за Гільбертом розвиток математики полягає в підборі нових аксіом і в виведенні з аксіом теорем. (Die logische Grundlagen der Mathematik. Math. Annalen, Bd. 88, 1922, стор. 153).

Цікаво, що деякі з прихильників аксіоматики вважають нашу епоху за епоху аксіоматичної методи. Аксіоматика свідчить ніби за скепсис, за передсмертя знання (Фредерікс і Фрідман. Основы теории относительности, 1924, стор. 27).

Та аксіоматична метода не може бути до кінця послідовною, як цього не хочуть. Вона є величезним circulus vitiosus. Як не уникай від відзначення основних понять, а вони примусово нав'язуються й входять неявно, контрабандно. „Так звані математичні аксіоми — пише Енґельс, — це ті з небагатьох розсудкових визначень, що потрібні в математиці як вихідний пункт. Математика, — це наука про величини, вона виходить із поняття величини. Вона недостатньо визначає останню й додає потім зовнішньо, як аксіоми, інші елементарні визначення величини, що не фігурують у дефініції. По цьому вони показуються недоведеними і, розуміється, їх так не можна довести математично. Аналізуючи поняття величини всі ці визначення аксіом виявляться доконечними властивостями величини. Спенсер правий в тому розумінні, що самоочевидність цих аксіом передається нам спадково. Вони доводяться діялектично, якщо вони не чисті „тавтології“ („Диалектика природы“, Архив Маркса и Энгельса, том II, стор. 13).

Енґельсові думки в цій справі являють собою матеріялістичну переробку деяких Геґелевих положень. Геґель вважав, що аксіоми, про які „звичайно говорять, що їхній зміст не можна довести, та він і не потрібує цього доведення, бо він безпосередньо очевидний. Проте, насамділі, ці математичні аксіоми є ніщо інше як логічні положення, які, тому що в їх висловлюються особливі й визначені думки, повинні виводитись із загального мислення, що само себе визначає, а це їхне виведення й слід якраз розглядати як їхній доказ“. (Геґель. Сочинения, том I, 1929, стор. 295).

Ріман, розуміючи неспроможність зрозуміти нові ідеї „клясичною“ аксіоматикою, що базуючись на аксіомах оперувала тільки, як він каже, з номінальними визначеннями, хотів усунути „темноту“ в геометрії.

Та він був безсилий розвіяти цю темряву, виходячи тільки з формальної логіки. І на перших кроках він посковзнувся.

Він хотів вивести геометричні предложення із загального поняття багатократно протяженої величини. Для цього він шукає вищий рід поняття, абстрактніший, де тримірний простір був

би окремим видом. Але відразу ж ми нариваємося в його визначенні цього загального поняття на petitio principii. Загальне поняття, з якого треба вивести поняття простору, створене просто „по образу и подобию“ простору. А з цього ж універсального поняття треба вивести й поняття дискретного числа. Аналогія не може бути методою дослідження й буває тільки іноді евристичним способом як це, мабуть, і було в Рімана.

Це petitio principii зустрінемо й в інших місцях. Наприклад, що таке прикладання однієї величини до другої в абстрактній n-мірній многостатності? Поширення поняття за аналогією й до того не зовсім удале. Тут властивості твердих предметів переносяться на абстрактні многостатності.

Ріманова математична теорія міцно пов'язана з його філософськими поглядами.

У другому виданні його творів вміщено філософські фрагменти, де видно, якого значення він надавав методологічній, ув'язці математики й філософії.

Гербартівська філософія поклала на хід Ріманових думок нестираний слід, проте не вся Гербартівська філософія, а її деякі радикальні риси. Метафізику Гербартівську Ріман відкидав. Він сам відзначив, що саме запозичено від Гербарта.

„Я майже повністю приєднуюсь до ранішніх Гербартових досліджень, висловлених в його промоційних тезах (22 і 23 жовтня 1852), але повинен відзначити, що не поділяю в істотних пунктах дальшого ходу його спекуляцій, що обумовили ріжницю щодо його натурфілософії й тих предложень психології, що мають зв'язок з натурфілософією“ (Werke, стор. 508).

В зв'язку з тенденцією тлумачити простір чисто кількісно, аналітично не розглядаючи якісного його характеру, цікаво навести думку Рімана про критерій істини.

„Коли наше розуміння світу істинне?“—запитує Ріман, і відповідає:—„Тоді, як зв'язок наших уявлень відповідає зв'язку речей. Елементи нашої картини світу цілком відріжняються від відповідних елементів відображеної реальности. Вони перебувають у нас; елементи ж реальности зовні нас. Але зв'язок між елементами в картині й у відображенні повинні збігатися, коли картина повинна бути істинною“ (Werke, стор. 523).

Та Ріман, попавши в полон формального визначення многостатности в дусі панівної формальної логіки, помимо своїх ма-

теріялістичних нахилів, що найяскравіше позначались у заключних словах, де він шукає внутрішні метричні визначення зовні геометрії, у фізиці, не зумів виплутатись і, зробивши сміливий крок, відразу перериває думку.

Характеристичне ще заперечливе ставлення Рімана до Кантової філософії, що об'єктивно стояла на перепоні неевклідової геометрії. Сталося так, що основоположники неевклідової геометрії повинні були стати в опозицію до Кантівського апріоризму.

Це найбільше стосується Ґавса й Рімана (Werke, стор. 525, проти апріоризму поняття причиновости).

Ріман допускає декілька гіпотез, називаючи їх не доконечними фактами, а гіпотезами, припущеннями щодо властивостей n-мірної многостатности, не доводячи їх.

Наприклад, він вважає, що кожний елемент n-мірної многостатности визначається n числами, n — координати незалежних між собою й навпаки n координат, незалежних між собою, визначають елемент многостатности.

Це предложення не є очевидним і було предметом розгляду кількох праць Кантора, Нетто, Лорія, Пеано й інших. Кантор (Une contribution à la théorie des ensembles, стор. 312—328. Acta mathematica, Bd. 2, 1883) доводить, що ця взаємна однозначність визначення елемента многостатности буває тільки тоді, коли є неперервний зв'язок між елементами многостатности й координатами $(x_1, x_2 \ldots x_n)$, що безконечно-малій зміні між елементами відповідає безконечно-мала зміна координат. Так само й навпаки. Коли ж немає цієї посутньої залежности й вона може бути довільною, то взаємна однозначність не справджується.

Кантор довів, що в цьому разі елемент n-мірної многостатности визначається довільним числом $m \gtrless n$ координат, тобто, що n-мірну многостатність можна відобразити на m-мірній і навіть на одномірній, оба на лінії. Мовою теорії многостей це означає, що потужність (Mächtigkeit) обох многостей однакова (континуум). Пеано збудував криву з координатами $f(x)$ і $\varphi(x)$, що виповнювала цілком квадрат, коли зміна t переходила всі значення від 0 до 1. Отже, в даному разі елемент двомірної многостатности — площини визначається одним чисельним заданням t. Навпаки ж деяким значенням f і φ відповідає не одно а 2 або 4 значення t. Теорема Кантора не справджується.

Два факта: Канторова теорія многостей і крива Пеано захитали на деякий час визначення вимірности простору (многостатности взагалі).

Вперше повнотою й остаточно довів Браувер (Brouwer), що не можливо відобразити однозначно й неперервно многостатності різних вимірів одна на другу (Mathematische Annalen, Bd. 70, 1911).

Природа просторової многостатності проте залишається невиясненою й досі.

До того ми мали формальне визначення Коші (раніш цитоване), до якого приєдналося чимало дослідників, як Бельтрамі, Кронекер, Йордан, Лі, Кляйн, Дарбу тощо.

Цей напрямок по суті розчиняв геометрію в аритметиці, позбавляв її особливости.

Геометрія не опліднюється аналізом, створюючи синтетичну єдність, щоб у неевклідовій геометрії влитися до фізики, а стає в суверенну залежність до аритметики, стає частиною чисельної многостатности.

Ріманове визначення, до якого приєднуються Ґрасман, Гельмгольтц і Келі, дає менше приводу до формалізму; многостатність не є обов'язково чисельною многостатністю.

Цю ріжницю визначень часто й густо не розуміють, зводячи їх в одно.

Лі навіть вбачає у другому визначенні непослідовність. („В усякому разі у Рімана не випливає істинне значіння предложення, що простір є числова многостатність" — там само, стор. 394).

У Лі цей формалізм математичний; повне відкидання особливостей предмету геометричного дослідження доходить до крайніх меж. Істину геометрії створює число. „Заведення числової многостатности до досліджень над основами геометрії ні в якому разі не є довільність, а становить природу речей" (там само стор. 495).

Наприклад, що таке точка? Прихильник цієї теорії де-Фріз відповідає просто: „точка є послідовний ряд чисел" (Hk. de-Vries. Die vierte Dimension, стор. 5). І щоб не було ніякого сумніву, додає: „визначення говорить не: послідовний ряд числа визначає точку, а „послідовний ряд чисел є точка" (там само, стор. 5).

Обидва ці визначення виходять із атомістичного, чисто кіль-

кісного розуміння основних елементів геометрії. Лінії, поверхні розглядаються складеними із точок — атомів геометрії. Тут, між іншим, наочно видно, як механістично-атомістичне мислення тяжило досі над математикою, показуючи її неподільний зв'язок із загальним розвитком природничих наук.

Нещодавно Браувер висунув нову цікаву теорію, де робить спробу (правда, лише спробу), відкинувши геометричний атомізм, збудувати без цього припущення континуум. Його спроба є повною протилежністю, запереченням клясичної теорії і як вся його концепція шкутильгає на цьому екстремалізмі.

Розв'язку цього питання треба шукати в матеріялістично-діялектичному понятті єдности, дискретности та неперервности, шляхи до чого вже намацала сучасна фізика, стверджуючи давнє Ленінове передбачення, що сучасна фізика народжує діялектичний матеріялізм.

Нові дослідження над теорією вимірів, виходять не з координат, а з перекрою. N-мірний простір набуває топологічних якостей і з цього топологічного визначення, з його топологічної природи випливає інваріянтність числа вимірів для кожної многости.

Пуанкаре, здається, перший увів цей інтуїтивний елемент у вивчення теорії вимірів (Последние мысли, 1923, стор. 36).

Менґер на підставі топології дає таке визначення n-мірного простору: „простір зветься n-мірним, коли до кожної точки простору довільної малої царини (Umgebung), є щонайбільше $(n-1)$ мірне обмеження", і ще: „простір зветься n-мірним в точці P, коли є довільно-мала царина коло P з щонайбільше $(n-1)$ мірним обмеженням і якщо n є найменше число цієї властивості (Menger, Dimensionstheorie. 1928; Menger, Bericht über die Dimensionstheorie, Jahresbericht der deut. Math. Vereinigung. 1926, Bd. 35, стор. 120; W. Hurewicz, Grundgriss der Mengerschen Dimensionstheorie, Math. Annalen, Bd. 98, стор. 65, 1928).

Ріман виходить також із другої гіпотези, що будь-яка фігура в n-мірній многостатності не залежить від її руху і від місця. Та він не показав, в чому саме полягає ця незалежність. Не видно також, що розуміти під рухом у n-мірної многостатности. Цю важливу гіпотезу про незалежність величини фігури від її перенесення відкинув Вайль (Raum, Zeit, Materie, 1925) у своїй інтерпретації теорії відносности.

Айнштайн у новій праці (Neue Möglichkeit für einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie, 1917, стор. 224—226), теж відкидаючи Ріманову гіпотезу про незалежність величини фігури від напрямку і завівши поняття „Fernparallelismus", об'єднав, досі роз'єднані ґравітаційні й електромагнетні поля в єдину закономірність, правда ціною відмови від деяких положень теорії відносности.

Маємо цікавий факт: щоб створити певну фізичну теорію, в даному разі об'єднати ґравітаційні й електромагнетні поля, треба виходити за геометрію, за геометричні гіпотези.

Ріманова геометрія вростає в фізику й деякі геометричні факти не можна вже відрізнити від фізичних, як не можна сказати про простіших у біології чи вони є рослини, чи тварини.

Отже, маємо покищо три варіяції Ріманової геометрії:

1. самого Рімана: порівнювання на віддалі можливе за величиною вектора, але не за напрямком;

2. Вайля: порівнювання на віддалі не можливе, ні за величиною, ані за напрямком;

3. Айнштайна: порівнювання на віддалі можливе за величиною і за напрямком:

(Einstein. Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus, там само, 1928, стор. 221).

Третя Ріманова гіпотеза про сталу міру кривини n-мірної многостатности, що спричинилась до численої кількости праць, впирається в проблему „гомогености" простору (Weyl. Raum, Zeit, Materie, 1923, стор. 98). і в проблему внутрішніх причин міровизначення кривини. Ці внутрішні причини віднайшлись у ґравітаційних масах з погляду теорії відносности.

Якщо попередні Ріманові гіпотези, пройшовши довгий шлях переробок, доповнень, змін, і перехресного „допиту" математиків і фізиків, залишаються й досі остаточно не розв'язаними проблемами, то четверта гіпотеза дістала своє повне й остаточне розв'язання у працях Софуса Лі.

Ми говоримо про те, що квадрат довжини лінійного елемента, його диференціяльний вираз є позитивною однородною квадратичною диференціяльною формою. Чому саме він визначається так, а не інакше? Ріман намагався дати пояснення цьому, але всі визнають їх за незадовільні, невдалі. Бо всі його міркування

говорять і за квадратичну форму, і за форму четвертого ступеня, і за чимало інших. Та й сам Ріман це визнавав.

Звідки ж ми виводимо цей певно математично-визначений елемент довжини? Гельмгольтц перший дав відповідь на це питання, виходячи з погляду на геометрію, як на природознавчу науку (Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, 1868).

Він виходив із вільної рухомости твердих тіл і з цього виводив вираз лінійного елемента. Для математика його доведення є незадовільне і Лі докладно показав, що праця Гельмгольтца не витримує математичної критики. Але факт залишається фактом. Природник, виходячи із інтуїтивних даних, як кажуть деякі математики, а, просто кажучи, виходячи із давно відомих фактів руху тіл (між іншим характеристично, що Гельмгольтц не говорить обережно про гіпотези, що становлять основу геометрії, а з самовпевненістю представника часу розквіту механістичного матеріялізму говорить про факти, на яких ґрунтується будова геометрії), наробивши чимало математичних помилок, дійшов правильних результатів.

Що по суті зробив Гельмгольтц? Він замінив Ріманову гіпотезу про диференціяльну форму іншим постулятом про властивості рухів і з них вивів диференціяльну квадратичну форму.

Лі виходив із групи перетворень, що визначають рухи твердих тіл.

Геометр Лі звів задачу Рімана й Гельмгольтца до властивостей теорії конечних неперервних груп, що визначають рухи ріманової геометрії.

Він поставив питання ширше. А саме: треба знайти ряд властивостей, що справджують групу евклідових і неевклідових рухів, розуміючи їх як конечні непреривні групи і відзначивши характерні особливості їх. І він найшов розв'язку. Позитивна однородна квадратична форма стала з гіпотези фактом, поступившись своїм місцем іншій гіпотезі, математичній гіпотезі. (Sophus Lie. Theorie der Transformationsgruppen, Bd. III, стор. 494).

Гільберт, виходячи з теорії многости, також виводить диференціяльний квадратовий однородний вираз лінійного елемента (Grundlagen der Geometrie. Anhang. IV).

Отже, замітки Ріманові, його чернетки витримали іспит, розворушивши гніздо досі нерозв'язаних суперечностей і, певно, надалі правитимуть за вихідну путь для багатьох дослідників.

В чому ж епохальне значення Ріманових чернеток? Після всього раніш сказаного, не буде дивним, що однакової відповіді на це досі немає й не може бути, бо в цих поглядах позначається загальний світогляд, що не є чисто технологічна справа, а впирається в клясову ідеологію, в клясову свідому чи то несвідому ідеологічну заінтересованість.

Самі основоположники неевклідових геометрій взагалі розглядали геометрію як природознавчу науку, що має позначати собою об'єктивний світ. Справа йшла лише про те, яка з геометрій найвірніше, найточніше виявляє фізичні явища.

Ґавс пише, що геометрія, в протилежність до аритметики, є досвідна наука, подібна до механіки.

Лобачевський писав, що фізичні сили визначають геометричні властивості простору і він хотів експериментально дізнатися про фізичний простір.

Ріман, маючи глибоку фізичну інтуїцію, що привела його, за словами Кмайна, до теорії функцій від гідромеханіки, дійшов, крім того і до своїх геніяльно простих (для нашого, звичайно, часу) ідей про те, що „основу метричних відношень ми мусимо шукати зовні неї (многостатности) в діянні на неї зв'язкових сил". Геометрія для нього мала характер фізичної гіпотези.

Про те розвиток природознавчих наук того часу, насамперед Ньютонова механіка, що безроздільно панувала тоді і доконечно зв'язана з евклідовим характером простору, і побудований на базі цих наук механістичний світогляд не „увібрав" у себе, як щось закономірне, Рімановых поглядів на структуру простору, що залежить від поширення матерії.

Бельтрамі, не виходячи за межі цього механістичного світогляду, знаходить реальний образ аналітичних відношень неевклідової геометрії у відношенні геодезичних ліній на псевдосфері.

Гельмгольті, зазирнувши далеко в глибину природничих підстав геометрії, як один із найпослідовніших механістів, міг мислити тільки натяками і механістичними аналогіями.

Ідеалістична ж реакція в математиці прибрала на довгий час до своїх рук тлумачення Рімановоі геометрії.

Ріманова геометрія втрачає свого об'єкта і ставиться на котурни „славнозвісної" „вільної творчости духу".

А саме: „математичні теорії є справді, послідовно формальні

дисципліни, продукт вільної творчости людського духу, що керується тільки міркуваннями доцільности, а не доконечности; треба було виявити, що математичні теорії можна справді будувати, не апелюючи до реальних уявлень, з якими ми звикли їх зв'язувати". (В. Коган. „Основания геометрии", II том, 1907, стр. 61).

Отже, „Ріман абстрагував геометрію від того субстрату, що зветься реальним простором" (так само стор. 169).

Можна було б навести зливу цитат, де Рімана всіляко вихваляють за те, що він ніби усунувши той пак „реальний субстрат", дав „міцну" підвалину під „вільну творчість духу" в математиці.

Виходячи з ідеалістичного трактування ряду натуральних чисел, намагаються звести все до аритметики (і саме такої— Дедекіндової). Проблема аритметизації математики, що її порушив з інших причин, стала приводом, як писав цілком слушно Гаймслев, до аритметизації цілого світу („Naturliche Geometrie" 1922).

Ріманові ідеї про взаємозалежність просторової структури і будови матерії тепер у наш час конкретизуються, починають обростати конкретним матеріялом новітньої фізики, що правда, виходячи часто й густо поза межі власне-Ріманової геометрії.

Проте ці спроби часто заводять з неминучістю в закут.

Діялектичне взаємопроникнення геометричної і фізичної „структури" матерії нехтується в працях чималого числа дослідників.

Переважає механістична (методологічно „підперта") комбінація довільної геометрії і фізичних фактів. Часто справа зводить на довільне „підтасовування" до відповідно поширеної Ріманової геометрії всього конкретного багатства сучасної фізики.

Нова Айнштайнова теорія, вперто ним обстоювана, вперлася в проблему руху матерії, не може пояснити основної властивости матерії.

Вайль нещодавно відмовлювався від своєї попередньої теорії і починає працювати в іншому напрямку.

В єдиній теорії поля намацуються шляхи діялектичного синтезу матерії та простору.

Говорячи про Ріманові ідеї, ніяк не можна оминути основних проблем фізики, бо ці ідеї стоять на хисткій грані обох наук, взаємно вливаючись одна в одну, де ми бачимо обрій нового синтезу.

Перший крок, може не смілий, до нього зробив Ріман. Другий крок, сміливіший, розгорнувши перспективу, знищивши „традиційні забобони“ й показавши неясний мінливий світ химерного багатства непізнаної досі реальности, зробила теорія відносности.

І переконливіші кроки зроблять, увібравши в себе все попереднє надбання, — новітні досягнення математики на основі матеріялістичної діялектики, подолавши методологічні труднощі, перед якими безсилі механічний матеріялізм і різні ідеалістичні теорії в математиці (формалізм, інтуїціонізм, конвенціоналізм).

М. Лашко

ПРО ГІПОТЕЗИ, ЩО СТАНОВЛЯТЬ ОСНОВУ ГЕОМЕТРІЇ

ПЛЯН ДОСЛІДЖЕННЯ

Відомо, що геометрія припускає так поняття простору, як і певні основні поняття про побудови в просторі, як щось дане наперед. Вона дає для них тільки номінальні визначення, тоді як посутні визначення виступають у формі аксіом. Взаємовідношення цих припущень залишається при цьому в темряві; не видно, чи необхідний зв'язок між ними і в якій мірі; а priori не видно навіть чи можливий він.

Ця неясність не була усунута ні математиками, ні філософами, що опрацьовували це питання, починаючи від Евкліда до Лежандра, щоб назвати тільки знаменитіших із нових досліджувачів геометрії. Причина цього полягає в тім, що залишилось неопрацьованим загальне поняття багатократно протяженої величини, окремий приклад яких є просторові величини.

Тому я й поставив собі насамперед завдання сконструювати поняття багатократно протяженої величини із загальних понять про величину. Звідси випливає, що багатократним величинам властиві різні метричні співвідношення і, отже, простір є тільки окремий вид трикратно протяженої величини. Та звідси необхідний висновок, що предложення геометрії не можна вивести із загального поняття про величину, а що ті властивості, якими відзначається простір від інших мислимих трикратно протяжених величин, можна вивести тільки з досвіду. Звідси виникає задача — відшукати простіші факти, з яких можна було б визначити метричні співвідношення простору,— завдання, що, по суті речей, не цілком не визначене; тому що можна задати декілька систем простих фактів, яких достатньо, щоб визначити метричні співвідношення простору; для нашої мети важливіші ті, що покладені в основу від Евкліда. Ці факти, як і всі факти, не доконечні,— вони мають емпіричну вірогідність, вони є гіпотези; от-

же, можна дослідити їхню ймовірність, яка в межах спостереження в усякому разі надто велика, і потім вже судити про можливість їхнього поширення поза межами спостереження, як в сторону незмірно-великого, так і незмірно-малого.

I. ПОНЯТТЯ N-КРАТНО ПРОТЯЖЕНОЇ ВЕЛИЧИНИ

Роблячи спробу розв'язати тут першу із цих задач,— розвиток поняття n-кратно протяженої величини, я гадаю, що можу сподіватись на несуворий суд, тим більше, що маю мало досвіду в подібних працях філософського характеру, де труднощі більше в поняттях, аніж в конструкціях, і до того не міг використати жодних попередніх праць, крім декількох надто коротких зауважень, поданих від добродія таємного радника Ґавса у другій статті про квадратичні вичети в Ґетінґенських „Gelehrten Anzeiger" та в його ювілейній промові щодо цього й деяких філософських досліджень Гербарта.

§ 1. Поняття величини можливе тільки там, де є загальне поняття, що допускає різні способи визначення (Bestimmungweisen [1]). Зважаючи на те, чи відбувається неперервний перехід між ними, чи ні, вони утворюють неперервну або дискретну многостатність (Mannigfaltigkeit [2]) окремі способи визначення звуться в першому разі точками, у другому елементами цієї многостатности. Поняття, спосіб визначення яких утворює дискретну многостатність, так часто зустрічається, що для довільно даних речей можна завжди знайти, принаймні, в розвинутих мовах таке поняття, під яке вони б підходили (і математики могли звідси, не вагаючись, виходити у вченні про дискретні величини з вимоги розглядати дані речі як однородні); навпаки

---

[1] Найбільшого клопоту завдав переклад слова „Bestimmungweisen". Сам термін не досить визначений, бо як відзначив і Сталло (там само, стор. 253), під ним можна розуміти й вид, визначений родом, і частини, що складають ціле. Кліфорд переклав його словом „the specialisations"; в російському перекладі передано як „образы обособления". Гоюєль переклав дослівно як „les modes de déterminations". Інші, як наприклад L. Kougier „La philosophie géometrie de H. Poincaré", говорить про многостатність, що „susceptible de déterminations diversés". Ми вважали за краще йти за французькими перекладачами.

[2] Треба признатись, що наш переклад слова „die Mannigfaltigkeit" нам не зовсім до вподоби. Можна втішатись тільки тим, що станеться так, як із французьким перекладом. Hoüel переклав його невдало як „la variete", а потім інші виправили на краще „la multiplicite".

привід утворити поняття, способи визначення яких утворюють неперервну многостатність, трапляється так рідко у звичайному житті, що місце предметів відчування (die Orte der Sinnengegenstände) та фарби мабуть єдині прості поняття, спосіб визначення яких утворює неперервну многостатність. Часто й густо привід до утворення й поширення таких понять зустрічається вперше у вищій математиці.

Визначені частини многостатности, виділені через якусь ознаку або границю, звуться визначеними кількостями (Quanta). Уже порівнання за кількістю (Quantität) відбувається в дискретних величинах через обчислення, у неперервних же через вимір. Вимір полягає в накладанні порівнюваних величин; для виміру, отже, потрібно мати спосіб переносити одну величину, як маштаб до іншої. Коли цього немає, то дві величини можна тільки тоді порівнювати, коли одна є частина іншої, і то можна сказати тільки, що одна більша, чи менша за іншу, не знаючи наскільки саме. Дослідження, що можна провадити в даному разі про їх, складають загальну частину вчення про величини, незалежну від метричних визначень; в ній величини не є незалежні від положення і не можна визначати через якусь одиницю, але розглядаються як царина в якійсь многостатності. Такі дослідження стали доконечною потребою для деяких частин математики, а саме для вивчення багатозначних аналітичних функцій і відсутність таких є головною причиною того, що знаменита Абелева теорема та дослідження Ляґранжа, Пфафа, Якобі з загальної теорії диференційних рівнань довгий час залишались безплідними. Для нашої мети досить виставити два пункта із цієї загальної частини теорії про протяженні величини, де не припускається нічого більшого, як те, що вже є в тому ж понятті; при чім перше стосується відтворення поняття багатократно протяженої многостатности; друга ж,— приведення визначень місця в даній многостатності до визначень кількости й виявляє посутню ознаку n-кратної протяженности.

§ 2. Коли в якомусь понятті, способи визначення якого утворюють неперервну многостатність, переходимо якимось способом від одного способа визначення до іншого, то пройдені способи визначення утворюють однократно протяжену многостатність, посутня ознака якої є та, що в ній від одної точки неперервний перехід можливий тільки у дві сторони — вперед або

назад. Уявіть собі, що ця многостатність переходить в іншу, цілком особливу й при тому знову певним способом, тобто так, що кожна точка переходить у певну точку іншої, то всі так утворені способи визначення визначають двократно протяжену многостатність. Подібним теж чином дістанемо трикратно протяжену многостатність, якщо уявимо собі, що двопротяжена переходить певним способом в іншу цілком особливу від неї; легко побачити, як можна продовжувати ці побудови. Коли ж замість розглядати поняття, як визначене, розглядатимемо його об'єкт змінним, то цю побудову можна означити як сполучення змінности $n+1$ вимірів із змінности n вимірів та змінности одного виміру.

§ 3. Я покажу тепер, як навпаки змінність, царина якої дана, можна розкласти на змінність одного виміру та на змінність меншого ніж дану числа вимірів. Для цієї мети уявімо собі змінну частину многостатности одного виміру, починаючи вираховувати від певної вихідної точки, так що значення її порівнювані між собою, — яка має для кожної точки даної многостатности певне значення, що разом з нею неперервно змінюється, або іншими словами візьмемо в середині даної многостатности неперервну функцію місця; при тому таку функцію, що не є сталою впродовж якоїсь частини цієї многостатности. Кожна система точок, де функція має стале значення, утворює неперервну многостатність меншого числа вимірів, ніж дана. Ці многостатності переходять зі зміною функцій неперервно одна в другу; звідси можна вважати, що з однієї такої многостатности виходять всі останні й, взагалі кажучи, це може статись так, що кожна точка перейде в певну точку іншої многостатности; виключні приклади, дослідження яких дуже важливе, можна тут залишити не розглянутими. Таким чином, визначення місця в даній многостатності зводиться до визначення величини й до визначення місця в меншекратно протяженій многостатності. Тепер легко показати, що ця многостатність має $n-1$ вимір, коли дана многостатність має n вимірів. Через n трикратне повторення цього способу визначення місця в даній многостатності, в разі це можливо, зводиться до конечного числа кількісних визначень. Є, проте, також такі многостатності, де визначення місця потрібує не конечного числа визначень величини, а або безконечного ряду, або неперервної многостатности. Такі мно-

гостатності утворюють, наприклад, можливі значення якоїсь функції в даній царині, можливі види просторових фігур тощо.

II. МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ, ВЛАСТИВІ ДЛЯ МНОГОСТАТНОСТИ N-ВИМІРІВ, ПРИПУСКАЮЧИ, ЩО ЛІНІЇ МАЮТЬ ДОВЖИНУ НЕЗАЛЕЖНО ВІД ПОЛОЖЕННЯ, ТАК ЩО КОЖНУ ЛІНІЮ МОЖНА ВИМІРЯТИ КОЖНОЮ ІНШОЮ

По тому, як сконструйовано поняття n-кратно протяженої многостатности й знайдено посутні ознаки такої многостатности в тім, що визначення місця в ній зводиться до n кількісних визначень, випливає друга вищенаведена задача дослідити метричні співвідношення, що властиві такій многостатності та достатні умови для визначення цього метричного співвідношення. Ці метричні співвідношення можна дослідити тільки в абстрактних поняттях величини й представити формулами; за певних припущень можна, проте, їх розкласти на такі співвідношення, що взяті окремо, матимуть геометричний образ і звідси можливо надати геометричної інтерпретації результатам обчислення. Тому, хоча й не можна уникнути абстрактного дослідження з формулами, та щоб стати на твердий ґрунт, результати дослідження можна представити в геометричній формі. Основи для обох є в знаменитих статтях таємного радника Ґавса про криві поверхні.

§ 1. Метричні визначення потрібують незалежности величини від місця, що досягається більше ніж одним способом; насамперед постає припущення, яке я приймаю тут, що довжина ліній не залежить від положення, так що кожна лінія виміряється іншою. Коли ж визначення місця зводиться до визначення величини, так, що положення якоїсь точки в даній n протяженій многостатності визначається через n змінних величин x_1, x_2, x_3 і т. д. до x_n, то визначення лінії зводиться до того, аби дати величини x в функції однієї змінної. Завдання тоді полягає в тім, щоб винайти математичний вираз для довжини ліній; для цієї мети величини x треба розглядати визначеними в певних одиницях. Я розгляну цю задачу тільки з певним обмеженням і обмежусь, поперше, такими лініями, де відношення між величинами dx — сукупними змінами величин x — змінюється неперервно; тоді лінії можна розглядати розкладеними на елементи, в середині яких відношення величин x — треба вважати сталими й тоді задача полягає в тім, аби знайти для кожної точки загальний вираз

лінійного елемента ds, що виходить із неї, який, отже, матиме величини x та величини dx. Подруге, я припускаю, що довжина лінійного елемента, відкидаючи величини другого ступеня, залишається незмінною, якщо всі точки цього елемента перемістяться на безконечно-мале віддалення; звідси безпосередньо випливає, що, коли всі величини dx зростають у тому самому відношенні, лінійний елемент змінюється теж у тому відношенні. При такому припущенні лінійний елемент може бути довільною однородною функцією першого ступеня од величин dx, що не змінюється, коли всі dx змінюють свій знак, і якщо довільні коефіцієнти є неперервні функції величин x. Щоб знайти простіші приклади, я шукаю насамперед вираз для $(n-1)$ — протяжених многостатностей, всюди рівновіддалених від початкової точки лінійного елемента, тобто я шукаю неперервну функцію місця, якою вона відріжняє одно місце від другого. Ця функція, починаючи від початкової точки, повинна збільшуватись, або зменшуватись в усі сторони; я припускаю, що вона збільшується в усіх напрямках, і, отже, в точці має свій мінімум. Тоді, коли її перша та друга похідна конечні, диференціял першого ступеня повинен стати нулем, а другий диференціял не може бути від'ємним; я приймаю, що він залишається завжди позитивним. Цей диференціяльний вираз другого ступеня залишається сталим, якщо dx стала величина й зростає пропорційно до другого ступеня якоїсь величини, коли величина dx, а, отже, і ds змінюються пропорційно до першого ступеня цієї величини; він дорівнює тому const ds^2, і отже ds дорівнює квадратовому корневі з однорідної функції другого ступеня величини dx, де коефіцієнти є неперервні функції величин x. Для простору, якщо визначимо положення точки в прямокутніх координатах, маємо $ds=\sqrt{\Sigma(dx)^2}$ простір таким чином підходить до цього простішого прикладу. Другий простий приклад охоплює многостатності, в яких лінійний елемент можна визначити через корінь четвертого степеня із диференціяльного виразу четвертого ступеня. Дослідження цього загальнішого прикладу, хоча й не потрібує ніяких посутньо інших принципів, та відібрало б чимало часу й кидало б, порівнюючи, мало нового світла на вчення про простір, до того ж результатів його не можна подати геометрично; я обмежуся тому многостатностями, де лінійний елемент визначається через квадратовий корінь із диференціяльного виразу другого

ступеня. Такий вираз можна перетворити в інший йому подібний, замінюючи n незалежних змінних функціями від n нових незалежних змінних. Таким способом не можна, проте, перетворити кожний вираз в кожний інший, тому що вираз має $\frac{n(n+1)}{2}$ коефіцієнтів, які є довільні функції незалежних змінних; заводячи нові змінні, справдимо тільки n відношень і, отже, тільки n коефіцієнтів даних величин можуть стати рівними. Останні $\frac{n(n-1)}{2}$ вже цілком визначені природою даної многостатности, й щоб знайти його метричні співвідношення, треба, таким чином, $\frac{n(n-1)}{2}$ функцій місця. Многостатності, в яких, як на площині та в просторі, лінійний елемент визначається в формі $\sqrt{\Sigma(dx)}$ становлять тільки окремий приклад досліджуваних тут многостатностей; їм слід дати особливу назву, і я такі многостатності, де квадрат лінійного елемента можна привести до суми квадратів повних диференціялів, називатиму плоскими. Щоб можна було робити огляд посутніх особливостей всіх многостатностей, визначених у припущеній формі, треба усунути ті особливості, що спричинюються від способу уявлення; це досягається вибором змінних величин за певним принципом.

§ 2. З цією метою уявімо собі збудовану систему найкоротших ліній, що виходять із якоїсь точки; положення якоїсь точки тоді визначатиметься початковим напрямком найкоротшої лінії, на якій вона лежить та її віддаленням на цій лінії від початкової точки й визначається тому відношенням величин dx°, тобто, величин dx в початковій точці цієї найкоротшої лінії та довжиною s цієї лінії. Заведемо тепер замість dx° такі складені з них лінійні вирази dx, щоб початкове значення квадрату лінійного елементу дорівнювало сумі квадратів цих виразів, так що незалежні змінні є: величина s та відношення величин dx; і підставимо нарешті замість dx такі їм пропорційні величини $x_1, x_2, \ldots x_n$, що сума квадратів дорівнюватиме s^2. Коли вставимо ці величини, то для безконечно-малих значень x квадрат лінійного елемента становитиме $\Sigma\, dx^2$; член же наступного порядку в ньому дорівнює однорідному виразові другого ступеня від $\frac{n(n-1)}{2}$ величин $(x_1 dx_2 - x_2\, dx_1)\ (x_1\, dx_3 - x_3\, dx_1)$, ... отже, безко-

нечно-малій величині четвертого виміру (Dimension), так що дістаємо конечну величину, якщо поділимо на квадрат площі безконечно-малого трикутника з вершинами (0, 0, 0 . . . .) ($x_1, x_2, x_3 \ldots$), ($dx_1, dx_2, \ldots$). Ця величина має одне й те саме значення, якщо величини x та dx містяться в тих самих бінарних лінійних формах, або поки обидві найкоротші лінії від значень O до значень x і від значень O до значень dx залишається в тому самому елементі поверхні й залежать, отже, тільки від місця та напрямку цього елемента. Воно, очевидно $= O$, коли дана многостатність плоска, тобто квадрат лінійного елементу зводиться до Σdx^2, і може тому правити за міру відхилення многостатности від площинности (Ebenheit)[1], що є в даній точці в даному напрямку поверхні. Помножена на $^3/_4$, вона дорівнюватиме тій величині, яку таємний радник Ґавс назвав мірою кривини поверхні. Щоб визначити метричні співвідношення n — протяженої многостатности в припущеній формі даної многостатности, треба знайти для цього $\frac{n(n-1)}{2}$ функцій місця; отже, коли задано міру кривини для кожної точки в $\frac{n(n-1)}{2}$ напрямках поверхні, то звідси можна найти метричні співвідношення, коли тільки між цими значеннями не має тотожної залежности, чого насамділі, взагалі кажучи, ніколи не буває. Метричні співвідношення цих многостатностей, де лінійний елемент визначається квадратовим корнем із диференціяльного виразу другого ступеня, можна визначити таким чином цілком незалежно від вибору змінних величин. Подібно ж можна наближатись до тієї мети і в таких многостатностях, де лінійний елемент визначається не так просто, тобто за допомогою корня четвертого ступеня із диференціяльного виразу четвертого ступеня. Тоді лінійний елемент, взагалі кажучи, не можна привести до форми квадратового кореня із суми квадратів диференціяльних виразів, і, таким чином, у виразі для квадрата лінійного елемента відхилення від плоского становитиме безконечно-малу величину другого виміру, тоді як у раніш наведених многостатностей — безконечно-малу величину четвертого виміру. Цю властивість останніх многостатностей

[1] Відтінок слова „die Ebenheit" не віддано в інших перекладах крім французького, що переклав як „la planarité". Ми, зважаючи на абстрактність Ріманового дослідження, подаємо його теж досить незграбним словом „площинність".

можна тому назвати площинністю (Ebenheit) в безконечно-малих частинах. Та для нашої мети найважливіша властивість цих многостатностей, заради якої тут тільки й провадитиметься дослідження, полягає в тім, що співвідношення двократно протяжених многостатностей геометрично відображаються поверхнями, а співвідношення багатократно протяжених многостатностей зводиться до співвідношень поверхень, що містяться в них; останнє вимагає ще деякого короткого пояснення.

§ 3. В уявленні поверхонь разом із внутрішніми відношеннями, де розглядається тільки довжина шляху в їх, входить також завжди й їхнє положення зовнішніх до них точок. Та від зовнішніх точок можна абстрагуватись, при чому вони відбувають такі зміни, при яких довжина ліній на них залишається незмінною, тобто уявляючи їх собі довільно зігнутими без розтягнення й розглядаючи всі такі поверхні однородними між собою. Таким чином, довільні циліндричні або конічні поверхні, напр., подібні до площини, бо вони можуть бути утворені з неї простим згинанням, причому внутрішні метричні співвідношення не змінюються і всі теореми про їх, отже вся пляніметрія, — зберігають своє значення; навпаки, вони істотньо відріжняються від кулі, яку не можна перетворити в площину без розтягнення. За попередніми дослідженнями, коли лінійний елемент визначається квадратовим корнем із диференціяльного виразу другого ступеня, як це саме буває в поверхнях, внутрішні метричні співвідношення двократно протяженої величини характеризуються мірою кривини. В поверхнях цій величині можна дати наочне значення, а саме, що міра кривини є добуток із двох кривин поверхні в тій самій точці, або що її добуток на безконечно-малий трикутник, утворений із найкоротших ліній, дорівнює зайвині суми кутів цього трикутника над двома прямими, визначеної в частинах радіуса. Перше визначення, потрібувало б припущення теореми, що добуток обох радіюсів кривини залишається незмінним, при простому згинанні поверхні, друге — що зайвина суми кутів безконечно-малого трикутника над двома прямими в тому самому місці пропорційна до його площі. Щоб дати зрозумілий сенс кривині n-протяженої многостатности в даній точці і в даному напрямку поверхні, що проходить через неї, треба виходити з того, що найкоротша лінія, проведена через цю точку цілком визначена, якщо дано її початковий напрямок. Відповідно

до цього дістанемо певну поверхню, коли продовжимо всі найкоротші лінії в початковому напрямку, що проходять через дану точку на даному елементі поверхні. Ця поверхня має в даній точці певну міру кривини, що водночас є мірою кривини n-протяженої многостатности в даній точці і в даному напрямку поверхні.

§ 4. Перед тим, як зробити застосування до простору, слід подати деякі зауваження про плоскі многостатності взагалі, тобто про такі, де квадрат лінійного елементу визначається через суму квадратів повних диференціялів.

У плоскій n-протяженій многостатності міра кривини в кожній точці в усякому напрямкові дорівнює нулеві, та за попередніми дослідженнями, щоб визначити метричні співвідношення, досить знати, що вона дорівнює нулеві в кожній точці в $\frac{n(n-1)}{2}$ напрямках елементів поверхні, міри кривини яких незалежні одна від одної. Многостатності, у яких міра кривини завжди $= O$, можна розглядати як окремий приклад таких многостатностей, міра кривини яких скрізь стала. Загальний характер цих многостатностей з сталою мірою кривини можна визначити й тим, що фігури в них можуть рухатись без згинання. Бо, очевидно, фігури не могли б довільно переміщатись та крутитись, коли б міра кривини не була однаковою для кожної точки в усіх напрямках. Та, подруге, міра кривини цілком визначає метричні співвідношення многостатності; тому метричні відношення біля однієї точки в усіх напрямках цілком однакові, як і біля інших, отже, можна провадити такі ж побудови, й тому у многостатностях і з сталою мірою кривини фігурам можна давати будь-яке положення. Метричні співвідношення цих многостатностей залежать тільки від значення міри кривини й щодо аналітичного визначення можна зауважити, що, означаючи цю величину через σ, виразові лінійного елементу можна дати такий вигляд:

$$\frac{1}{1+\frac{\sigma}{4}\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma dx^2}$$

§ 5. Для геометричного пояснення може правити розгляд поверхонь із сталою мірою кривини. Легко бачити, що поверхні, міра кривини яких позитивна, нагортається на кулю, радіюс якої

дорівнює 1, поділеної на квадратовий корінь із міри кривини; щоб оглянути всю многостатність цих поверхень, дамо одній із них форму кулі й останнім — форму поверхонь повороту, дотичних з нею по екваторові. Поверхні з мірою кривини більшою, ніж міри кривини кулі, дотикатимуться з внутрішньої сторони й прибиратимуть форми частини зовнішньої поверхні кільця, одвернутої від осі; вони нагортаються на зони куль з меншим радіюсом, але покривають їх більше одного разу. Поверхні з меншою позитивною мірою кривини дістанемо, коли виріжемо з поверхень куль великого радіюсу частину, обмежену двома півколами й сполучимо лінії розрізу. Поверхня нулевої міри кривини є циліндрична поверхня, дотична до екватора кулі; поверхні ж з від'ємною мірою кривини дотикаються цього циліндра зовні й мають вигляд внутрішньої частини кільця, повернутої до його осі. Уявімо собі ці поверхні як місце, де рухаються частини поверхні, подібно до того, як простір є місце для речей, то в усіх цих поверхнях частини поверхні можуть рухатись, не розтягуючись. Поверхні з позитивною мірою кривини завжди можуть мати таку форму, що куски поверхні можуть в них довільно рухатись, не розтягуючись, а саме прибравши форми поверхні кулі; цього не буває в поверхнях з від'ємною мірою кривини. Крім цієї незалежности частин поверхні від їхнього місця, в поверхнях з нулевою мірою кривини є незалежність напрямку від місця, чого не має в останніх поверхнях.

III. ЗАСТОСУВАННЯ ДО ПРОСТОРУ

§ 1. Після цих досліджень про визначення метричних відношень n-протяженої величини можна дати умови, доконечні й достатні, щоб визначити метричні відношення простору, припускаючи наперед незалежність ліній від положення та можливість уявити лінійного елемента корнем із диференціяльного виразу другого ступеня, тобто площини в безконечно малих частинах.

Ці умови визначаються так, що міра кривини в кожній точці в трьох напрямках поверхні дорівнює O, і звідси випливає, що метричні відношення тоді є визначені, коли сума кутів трикутника скрізь дорівнює двом прямим.

Коли ж припустімо, подруге, за Евклідом, існування ліній незалежне не тільки від положення, але й існування предметів

(Körper), то звідси випливає, що міра кривини завжди стала, й тому в усіх трикутниках сума кутів визначена, коли вона визначена в одному.

Нарешті, потрете, замість припускати незалежність довжини ліній від місця та напрямку, можна було б припустити незалежність довжини та напрямку від місця. За цим світоглядом зміни місця або ріжниці місця є комплексні величини, визначені в трьох незалежних одиницях.

Протягом попереднього розгляду відокремлювалось спочатку співвідношення протяжености від метричних відношень й було знайдено, що в тих же самих співвідношеннях протяжености мислимі різні метричні відношення; потім відшукувалось системи простих метричних визначень, через які цілком визначаються метричні відношення простору й від яких усі предложення про них є необхідний наслідок. Залишається пояснити питання, як, в якій мірі й в якому обсязі перевіряються ці припущення від досвіду, що до цього є посутня ріжниця між простими відношеннями протяжености та метричними відношеннями, бо щодо перших, де можливі приклади утворюють дискретну многостатність, свідчення досвіду хоч і не цілком певні, та й не неточні, тоді як щодо останніх, де можливі приклади утворюють неперервні многостатності, кожне визначення із досвіду завжди залишається неточним — хоча й можлива ймовірність, що воно майже правильне, є дуже великою.

Це важливо для поширення цих емпіричних визначень поза межі спостереження в незмірновеликому та в незмірномалому; тому що останні поза межами спостереження стають завжди неточними, перші ж ні.

Поширюючи просторові побудови в незмірно велике, ми повинні розріжняти необмеженість та безконечність; необмеженість відноситься до відношень протяжености, безконечність до метричних відношень. Що простір є безмежна трикратно протяжена многостатність, є припущення, що прикладається при всіх пізнаваннях зовнішнього світу; за цим припущенням в кожний момент царина дійсного сприймання може бути доповнена й можливі місця цього предмету можуть бути збудовані; що, постійно й підтверджується при цих прикладаннях. Необмеженість простору набуває звідси великої емпіричної певности ніж будь-який зовнішній досвід. Та звідси ні в якому разі не

випливає безконечности, навпаки, коли припустити незалежність предметів від місця, тобто надати просторові сталої міри кривини, то простір був би необхідно конечний, коли ця міра кривини матиме позитивне значення, хоча би й будь-яке мале.

Продовжуючи найкоротші лінії, що лежать на якомусь елементові поверхні в сторону початкових напрямків, дістанемо безконечну поверхню сталої позитивної кривини, яка в плоскій трикратно протяженій многостатності мала б вигляд поверхні кулі, і яка, отже, конечна.

§ 3. Питання про незмірно-велике є зайві питання для пояснення природи. Інша справа питання про незмірно-мале. На точності, з якою ми досліджуємо явище в безконечно-малому, ґрунтується, по суті, пізнання їхнього причинового зв'язку. Успіхи останніх століть в пізнанні механічної природи ґрунтується майже виключно на точності побудови, що стали можливі в наслідок винаходу аналізи безконечно-малих та в наслідок основних понять, винайдених від Архімеда, Галілея, Ньютона, якими користується сучасна фізика. Та в тих природознавчих науках, де й досі немає простих основних понять для таких побудов,— щоб пізнати причиновий зв'язок, слідкують за явищами в просторово-малому, як це дозволяє мікроскоп. Питання про метричні співвідношення простору в незмірно-малому не є, отже, зайвими.

Припустімо, що предмети існують незалежно від місця, то міра кривини всюди стала, й тоді із астрономічних вимірів випливає, що вона не може ріжнитись від нуля; в усякому разі її зворотне значення повинно відповідати поверхні, порівнюючи до розмірів якої, розміри, доступні нашим телескопам, є мізерними. Та коли ж немає такої незалежности предметів від місця, що вони посідають, то не можна переносити метричні співвідношення у великому до безконечно-малого; тоді в кожній точці міра кривини може мати довільне значення по трьох напрямках, коли тільки повна кривина кожної вимірної частини простору не ріжниться помітно від нуля; ще складніші співвідношення можуть зустрічатись, коли не має місця припущена нами можливість визначити лінійний елемент через квадратовий корінь із диференціяльного виразу другого ступеня. Та емпіричні поняття, на яких ґрунтується просторові метричні визначення,— поняття про тверді речі та світовий промінь, мабуть ґублять свою значимість в безконечно-малому; отже, легко уявити собі, що метричні

співвідношення простору в безконечно-малому не відповідають до припущень геометрії й ми повинні прийняти це насамділі, коли в наслідок цього явища пояснювалися б простіше.

Питання про законність припущень геометрії в безконечно-малім перебуває в зв'язку з питанням про внутрішню підставу метричних співвідношень простору. У цьому питанні, яке ще можна причислити до вчення про простір, прикладається вищенаведене зауваження, що в дискретній многостатності принцип метричних співвідношень міститься вже в понятті многостатности, у непереривній же він повинен заводитись звідкись зовні. Отже або реальність, що становить основу простору, повинна утворювати дискретну многостатність, або ж основу метричних співвідношень треба шукати зовні неї, в діянні на неї зв'язкових сил.

Розв'язання цих питань можна найти тільки, виходячи з ранішнього погляду на явища, що підтверджується досвідом (фундамент якого заклав Ньютон), і поступово перероблюючи його, пристосовуючи до фактів, які не можна пояснити цим світоглядом. Такі дослідження, як тут наведені, що виходять від загальних понять, можуть мати значення тільки для того, щоб ця праця не утруднювалась обмеженістю понять і успіхам в пізнанні взаємного зв'язку речей не стояли на перепоні зайві забобони.

Та тут переходимо до царини іншої науки, до царини фізики, вступати куди не дозволяє характер сьогоднішнього виступу.

ЗМІСТ

Плян дослідження.

I. Поняття про n-протяжену величину [1].

§ 1. Неперервні та дискретні многостатності. Означені частини многостатности звуться визначеними кількостями (Quanta). Поділ учення про неперервні величини на вчення:

1. Про царини відношення, в яких не робиться припущення незалежности величини від місця.

2. Про метричні співвідношення, в яких повинно робитись припущення такої незалежности.

§ 2. Творення поняття про однократні, двократні... n-кратні протяжені многостатності.

§ 3. Приведення визначення місця в даній многостатності до кількісних визначень. Істотна ознака n-кратно протяженої многостатности.

II. Метричні співвідношення, властиві многостатності n-вимірів [2], припускаючи, що лінії мають довжину, незалежну від положення, так що кожна лінія виміряється кожною іншою.

§ 1. Вираз лінійного елементу. Плоскими вважаються такі многостатності, в яких лінійний елемент визначається через корінь із суми квадратів повних диференціялів.

§ 2. Дослідження n-кратно протяжених многостатностей, в яких лінійний елемент можна визначити квадратовим коренем із диференціяльного виразу 2 ступеня. Міра їхнього відхилу від плоскої многостатности (міра кривини) в даній точці й у даному напрямку елементу поверхні. Щоб визначити їхні метричні співвідношення (з певними обмеженнями), можливо й достатньо вважати, що в кожній точці дана міра кривини для $n\frac{(n-1)}{2}$ напрямків елементів поверхні.

[1] Розд. I є одночасно підготовча праця до вступу в analisis situs.

[2] Дослідження про можливі метричні визначення n-протяженої многостатности надто неповне, та для цієї мети досить.

§ 3. Геометричні пояснення.

§ 4. Плоскі многостатності (де міра кривини скрізь = 0) можна розглядати, як окремі приклади многостатностей з сталою мірою кривини. Їх можна визначити також тим, що в їх є незалежність n-протяжених величин від місця (рухомість їх же без розтягнення).

§ 5. Поверхні зі сталою мірою кривини.

III. Прикладання до простору.

§ 1. Система фактів, достатніх, шоб визначити метричні співвідношення простору, як їх припускає геометрія.

§ 2. Наскільки ймовірна значимість цього емпіричного визначення поза межами спостереження в незмірно-великому?

§ 3. Як у безконечно-малому? Зв'язок цього питання з поясненням природи[1].

---

[1] § 3 розд. III потрібує ще обробки і дальшого розвитку.

ПОЯСНЕННЯ

1. (До част. 1). Нещодавно робилися спроби дізнатись, встановлюючи точні аксіоми, які властивості взагалі має неперервна многостатність, так, щоб це поняття могло становити певний фундамент для математичної аналізи. (Порівн. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, 1913, Розд. I, §. 4; Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 1914, розд. VII і VIII); про генетичну побудову через послідовне ділення, при якому континуум вже не уявляється атомістично, як система окремих дискретних елементів (Brouwer. Mathemat. Ann. Bd. 71, 1912, стор. 97; Weyl. Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, Mathem. Zeitschrift, Bd. 10, стор. 77).

За характеристику n-мірної многостатности може правити та проста умова, щоб така многостатність (або принаймні кожна достатньо мала частина її) могла відображатись взаємно-однозначно та неперервно на систему значень n координат x_i (неперервні функції місця в многостатності). Коли многостатність відноситься до такої системи координат, є можливість всі величини, зв'язані з многостатністю, характеризувати заданням чисел. Довільність припущення (Willkürlichkeit) координатної системи наочно виявилась у „теорії інваріянтів", в якій інваріянт розглядається як протиставлення до довільних взаємно-однозначних неперервних перетворень.

Передовсім само число виміру повинно показати, що воно є такий інваріянт, бо інакше поняття виміру є цілком безглузде. Це доведення дав Brouwer (Math. Ann., Bd. 70, 1911, стор. 161-165; порівн. також Math. Ann., Bd. 72, 1912, стор. 55-56). Для дальших Ріманових досліджень про метричні визначення треба, звичайно, зробити припущення, що з внутрішньої природи многостатности випливає таке поняття координат, що зв'язок між якиминебудь двома системами координат визначається за допо-

могою функцій, які не тільки неперервні, але й неперервно диференціюються й приводять до взаємно-однозначного лінійного відношення між диференціялами координат обох систем; бо інакше взагалі нічого не можна сказати про лінійний елемент. В цьому разі інваріянт числа вимірів є самозрозумілий; функціональний детермінат перетворення координат $\neq 0$. Аналогічне пояснення числа вимірів подібно до Ріманового пояснення подав Пуанкаре (Revue de métaphysique et de morale, 1912, стор. 487), що міцніше зв'язано з наочністю, ніж „аритметичне" визначення за допомогою числа координат; це відношення „натурального" поняття виміру до аритметичного було досліджено від Браувера (Journal f. d. reine und angew. Mathematik, Bd. 142, стор. 146-152).

2. (До част. II, розділ 1). Припущення, що ds^2 має квадратичну диференціяльну форму випливає певно з того, що в безконечно малому має силу теорема Пітагора. Це припущення не тільки найпростіше з можливих, але воно відзначається перед усіма іншими також цілковитою своєрідністю. Виходячи разом із Ріманом із припущення вимірного лінійного елемента, то многостатність матиме в якійсь точці P метричне визначення в наслідок того, що кожному лінійному елементові (з компонентами dx_i) приписується в P числова міра (Masszahl).

$$ds = f_p(dx_1\, dx_2, \ldots, dx_n) \tag{1}$$

f_p вважається як однородна функція першого порядку в тому розумінні, що перемножуючи арґумент dx_i на загальний дійсний коефіцієнт пропорційности ρ функція f_p перемножується з $|\rho|$. Далі буде природньо припустити, що різні точки многостатности не відріжняються між собою щодо метричного визначення в кожній із них; це аналітично формулюється тим, що відповідні функції f_p щодо різних точок виводяться всі із однієї, f, лінійним перетворенням змінних. Це буває тоді, коли f_p^2 в кожному місці має позитивно-визначену квадратичну форму:

$$f = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \ldots + (dx_n)^2}; \tag{2}$$

та цього не буває, коли f_p є корінь з форми 4 ступеня із змінними коефіцієнтами від місця до місця. Тому можливо краще формулювати проблему простору таким чином: всі функції, що виводяться з однієї, f, лінійним перетворенням змінних причис-

ляються до першої кляси (f). Кожній такій клясі (f) однородних функцій першого порядку відповідає особливий вид геометрії: у метричному просторі виду (f) є функція f_p кляси (f), яка за (I) в кожному місці P простору визначає числову міру лінійного елементу. Це предложення незалежне від вибору координат x_i. Між цими видами простору пітагорово-рімановий є єдиний, якому відповідає функція (2). Постає питання, на якому внутрішньому ґрунті перебуває її виключне положення.

Першу відповідальну відповідь на це питання дано від Гельмгольця та Лі (Helmholtz. Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Götingen, 1868, стор. 193-221. Lie. Über die Grundlagen der Geometrie, Verh. d. Wissensch. zu Leipzig, Bd. 42, 1890, стор. 284-321).

N-мірна многостатність має властивість безконечно-малого руху в тому сенсі, що безконечно-мале тіло (Körper) з прикріпленою точкою 0 вільно вертиться навколо 0, таким чином, що при цьому її метричне співвідношення залишається незмінним в першому порядку і в наслідок цього вертіння, лінійному елементові в 0 можна дати довільний напрямок; елементові поверхні, що проходить через неї — довільний напрямок поверхні, яка проходить через цей напрямок ліній і т. д. до елемента $(n-1)$ вимірів; та коли таку систему вказаних напрямків елемента від 1 до $(n-1)$ вимірів закріпити в 0, то тіло більше не вертітиметься навколо 0. Вертіння утворюватиме певну групу однорідних лінійних перетворень диференціялів dx_i. І тепер дістанемо, що ця група складається з усіх лінійних перетворень, які переводять певну позитивно-визначену квадратичну форму ds^2 саму в себе. Так з умови безконечно малого руху випливає факт, що лінійні елементи можна порівнювати між собою на тому самому місці і, подруге, що для його числової міри ds справджується пітагорова теорема.

Цілком інше розв'язання проблеми простору висунув Вайль, що має цілком особливе значення в ситуації, створеній теорією відносности. Див. про це доповідь Das Raumproblem, Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereinig. 1923; і далі: Math. Zeitschr. Bd. 12 (1922), стор. 114, і лекції видані під назвою „Mathematische Analyse des Raumproblems".

Геометричні дослідження в просторі, що виходять із довільного метричного визначення в кожній точці із рівнання (I), нещо-

давно видані від П. Фінслера (Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Göttinger Dissertation, 1918).

3. (До розд. II, § 1). Коли лінійний елемент має форму[1] .

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k, \quad (g_{ki} = g_{ik}) \tag{3}$$

то клясичні методи варіяційного числення дають можливість найти із многостатности ліній $x_i = x_i(s)$, що проходять через дані точки A, B, лінію найкоротшу або принаймні з сталою довжиною, порівнюючи до достатньо до неї близьких ліній (дорівнюванням нулеві першої варіяції). Рівнання таке:

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx_j}{ds}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}. \tag{4}$$

При цьому робиться припущення, що за параметр править довжина дуги кривої виміряної від певної початкової точки або ж величина пропорційна до неї; так що впродовж кривої, як це випливає з (4)

$$g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} \text{ є сталою.} \tag{5}$$

Ліва сторона від (4)

$$= \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x_\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} + g_{ij}\frac{d^2x_j}{ds^2}.$$

Перенесемо перший член на праву сторону і заведемо для скорочення „хрістоффелевський триіндексовий символ", тобто величину

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\right) = \Gamma_{i,\alpha\beta}$$

і інший $\Gamma^i_{\alpha\beta}$, що дістанемо однозначно з нього за рівнанням

$$\Gamma_{i,\alpha\beta} = g_{ij}\,\Gamma^i_{\alpha\beta}$$

Звідси випливає таке рівнання, характеристичне для „геодезичної лінії":

$$\frac{\partial^2 x_i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = O \tag{6}$$

---

[1] Щодо індексів k та i, які в даному рівнанні подвійні, то вони показують сумування; це умовне означення позбавляє нас від написання кількох знаків сумування.

Ті, від Рімана заведені „центральні координати“ до довільної точки O, які він означив $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$, дістанемо тепер таким чином. Хай будуть, поперше, z_i довільні координати, що безконечно маліють в O. Тому що позитивно-визначена квадратична форма переводиться лінійним перетворенням завжди в однозначну форму з коефіцієнтами

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1\,(i = k) \\ 0\,(i \neq k) \end{cases}$$

можна зробити наперед припущення, що для точки O коефіцієнти g_{ik} лінійного елемента (3) мають значення δ так, що тоді $ds^2 = \Sigma\, dz_i^2$.

Рівнання (6), що справджує геодезичну лінію, для якої O є початкова точка ($z_i = O$ для $s = o$), одночасно визначається через початкове значення похідної

$$\left(\frac{dz_i}{ds}\right)_0 = \xi^i;$$

його параметричні визначення такі:

$$z_i = \psi_i(s; \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n).$$

Відразу видно, що функції ψ_i залежать тільки від добутків $s\xi^1$, $s\xi^2, \ldots, s\xi^n$:

$$z_i = \varphi_i(s\xi^1, s\xi^2, \ldots, s\xi^n).$$

Центральні координати дістанемо потім із початкових z_i перетворенням

$$z_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Вони характеристичні тим, що при використанні лінійної функції від s,

(7) $$x_i = \xi^i s$$

справджують довільну сталу ξ рівнань (5), (6). Так само для їх в O: $ds^2 = \Sigma\, dx_i^2$. Отже, коли ми сталим ξ^i поставим умову справджувати рівнання $\Sigma(\xi^i)^2 = 1$, при чому заміщення (7) незалежне від s, і до того $= 1$, як це випливає з підстановки значення $s = 0$; крім того

(8) $$\Gamma^i_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha \xi^\beta = 0$$

Так само маємо тотожності

(9) $$g_{ik} x_i x_k = x_i^2, \quad (8^1)\ \Gamma^i_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0,$$

з яким ми насамперед зробимо деякі висновки.

Рівнання (8^1) можна написати

$$\Gamma_{i,\alpha\beta}x_\alpha x_\beta = 0 \text{ або } (10)\left(\frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\right)x_{\alpha i\beta} = 0.$$

$$\text{Тепер } \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x_\alpha}.x_\beta = \frac{\partial x_i'}{\partial x_\alpha} - g_{i\alpha}$$

коли підставимо $x'_i = g_{ij}x_j$;
звідси маємо ліву сторону (10)

$$= \left(\frac{\partial x^1{}_i}{\partial x_\alpha}x_\alpha = x^1_i\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^1{}_\alpha}{\partial x_i}x_\alpha - x^1{}_i\right)$$

$$= \frac{\partial x^1{}_i}{\partial x_\alpha}x_\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^1{}_\alpha}{\partial x_i}x_\alpha + x^1{}_i\right) = \frac{\partial x^1{}_i}{\partial x_\alpha}x_\alpha - \frac{1}{2}\frac{\partial(x^1{}_\alpha x_\alpha)}{\partial x_i}$$

Та за (9) $x^1{}_\alpha x_\alpha = x^2_\alpha$, отже дістанемо остаточно

$$\frac{\partial x^1{}_i}{\partial x_\alpha}x_\alpha - x_i = \frac{\partial(x^1{}_i - x_i)}{\partial x_\alpha}x_\alpha = 0.$$

При заміщенні (7) дістанемо

$$\frac{d(x^1{}_i - x_i)}{ds} = 0,$$

і тому, що для $s = 0$ ріжниця $x^1{}_i - x_i$ зникає, приходимо до простого результату щодо x

(11) $$x^1{}_i = g_{i\alpha}x_\alpha = x_i$$

Далі випливає через диференціювання по x_k:

(12) $$\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x_k}.x_\alpha = \delta_{ik} - g_{ik}.$$

Ліва сторона є симетрична щодо i та k:

(13) $$\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x_k} - x_\alpha = \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x_i}.x_\alpha$$

Множенням (12) на x_k або x_i та сумуванням по k, відповідно дістанемо, використовуючи (11).

(14) $$\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x_\beta}x_\alpha x_\beta = 0, \ (14^1)\ \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}x_\alpha x_\beta = 0.$$

Таким способом можна розкласти початкове рівнання (10) на дві складові частини.

Тепер розкладемо в ступенний ряд коефіцієнтів g_{ik} лінійного елемента в царині 0;

$$g_{ik} = \delta_{ik} + c_{ik,\alpha} x_\alpha + c_{ik,\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + \ldots\ldots$$

При цьому $c_{ik,\alpha}$ є значення першої похідної $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha}$, $2\, c_{ik,\alpha\beta}$ — значення другої похідної $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ в точці 0.

Ріман стверджує, що тут зникає лінійний член. Це випливає з (14[1]): підставимо туди $x_i = \xi^i s$ і, звільнившись від s^2, дістанемо тотожність щодо s

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \xi^\alpha \xi^\beta = 0.$$

Воно дає для $s = 0$ бажаний результат, що похідна $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}$ безконечно маліє в 0, бо там ξ може бути довільним числом. Та диференціюючи те рівнання насамперед по s і підставляючи потім $s = 0$, дістанемо таке відношення

$$c^\beta_{\gamma,\alpha i} + c_{\gamma\alpha,\beta i} + c_{\alpha\beta,\gamma i} = 0.$$

Оперуючи так само з (14) дістанемо

(15) $$c_{i\alpha,\beta\gamma} + c_{i\beta,\gamma\alpha} + c_{i\gamma,\alpha\beta} = 0.$$

Переставляємо в останньому рівнанні i та γ і, віднімаючи його від попереднього, дістанемо остаточно ще одну симетричну умову

(16) $$c_{ik,\alpha\beta} = c_{\alpha\beta,ik}$$

В ступенному ряді від ds^2 член 0-го порядку буде

$$[0] = \Sigma\, dx_i^2;$$

не вистачає члена 1-го порядку, член же другого порядку буде мати такий вигляд

(17) $$[2] = c_{ik,\alpha\beta} x_\alpha x_\beta dx_i\, dx_k.$$

Ріман стверджує далі, що (2) є квадратична форма величини $x_i dx_k - x_k dx_i$. Використаємо для безконечно-малих x_i тотожність знаків δx, так що ці величини

(18) $$\delta x_i dx_k - dx_i \delta x_k = \Delta x_{ik}$$

є „компонентами" паралелограма елемента поверхні, створеного обома лінійними елементами з компонентами δx_i і відповідно dx в точці 0.

Квадратичну форму цієї змінної поверхні можна написати одним і тільки одним способом у формі

$$\Delta\sigma^2 = \frac{1}{4} R_{\alpha\beta 1, \gamma\delta} \Delta x_{\alpha\beta} \Delta x_{\gamma\delta} \tag{19}$$

коли до коефіцієнтів R додати інші умови:

$$\left\{ \begin{array}{c} R_{\beta\alpha, \gamma\delta} = -R_{\alpha\beta, \gamma\delta} \quad R_{\alpha\beta, \gamma\delta} = -R_{\alpha\beta, \gamma\delta}; \\ R_{\gamma\delta, \alpha\beta} = R_{\alpha\beta, \gamma\delta}; \\ R_{i\alpha, \beta\gamma} + R_{i\beta, \gamma\alpha} + R_{i\gamma, \alpha\beta} = 0. \end{array} \right. \tag{20}$$

Щоб (2) привести до цієї форми, потрібні відношення (15), (16), тому що завдяки їм може заступити $C_{ik, \alpha\beta}$ через

$$\left. \begin{array}{c} \frac{2}{3} \quad {}_{ik, \alpha\beta} \\ + \frac{1}{3} c_{ik, \alpha\beta} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{3}(c_{ik, \alpha\beta} + c_{\alpha\beta, ik}) \\ -\frac{1}{3}(c_{i\alpha, \beta k} + c_{i\beta, k\alpha}), \end{array} \right.$$

Підставляючи це значення коефіцієнта $c_{ik, \alpha\beta}$ до (17), ми повинні ще переставити в третьому члені $c_{i\alpha, k\beta}$ індекси i та k Напишемо, таким чином, за (19) форму $\Delta\sigma^2$ з такими коефіцієнтами

$$R_{\alpha\beta, \gamma\beta} = c_{\alpha\gamma, \beta\delta} + c_{\beta\delta, \alpha\beta} - c_{\alpha\delta, \beta\gamma} - c_{\beta\gamma, \alpha\delta}, \tag{21}$$

що справджують загальним умовам (20); дістанемо

$$[2] = -\frac{1}{3} \Delta\sigma^2.$$

Нещодавно створено дуже природній та наочний образ Рімановоі кривини, для чого заведено поняття про безконечне-мале, паралельне зміщення вектора в Рімановській многостатності. Безконечно-малий поворот, який робить тіло вектора в точці 0, по тому, як він обійшов паралельним зміщенням навколо елементу поверхні в 0 — вектор r з компонентами ξ^i дістає при цьому приріст $\Delta r = (\Delta\xi^i)$ —, таку форму:

$$\Delta\xi^i = -\Delta r^i_k . \xi^k;$$

Δr^i_k незалежні від вектора r, але залежать від компонентів Δx_{ik} обійденого елементу поверхні:

$$\Delta r^i_k - \frac{1}{2} R^i_{k, \alpha\beta} \Delta x_{\alpha\beta}.$$

Це пояснення приводить до рівнання:

$$(22) \qquad R_{\alpha}^{\beta}{}_{,\gamma\delta} = \left(\frac{\partial \Gamma_{\rho\delta}^{\alpha}}{\partial x_{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}{\partial x_{\delta}}\right) + \left(\Gamma_{\rho\delta}^{\alpha}\, \Gamma_{\beta\gamma}^{\rho} - \Gamma_{\rho\gamma}^{\alpha}\, \Gamma_{\beta\delta}^{\rho}\right).$$

В наслідок цього форма $\Delta\sigma^2$ з коефіцієнтами

$$(22') \qquad R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = g_{\alpha\rho}\, R_{\beta,\gamma\delta}^{\rho}$$

є інваріянт. Вона тотожня з Рімановою формою кривини, бо її коефіцієнти R, використовуючи центральні координати, для яких перша похідна g_{ik} зникає в даній точці 0, переходять у (21). Квадрат площі безконечно-малого паралелограма Δf^2, утвореного обома лінійними елементами δ та d (Ріман замість паралелограма використовував трикутник) так само визначатиметься в квадратичній формі змінних (18) і при тому в довільних координатах

$$\Delta f^2 = \frac{1}{4}\left(g_{\alpha\gamma}\, g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}\, g_{\beta\gamma}\right) \Delta x_{\alpha\beta}\, \Delta x_{\gamma\delta}.$$

Частка $\frac{\Delta\sigma^2}{\Delta f^2}$, що залежна тільки від відношення Δx_{ik} є число, яке за Ріманом означається як кривина многостатности, де елемент поверхні подається з компонентами Δx_{ik} напрямків поверхні.

Ріманова теорія кривини була вперше опрацьована від Хрістоффеля та Ліпшіця (декілька статтей у „Journal f. d. reine und angew. Mathematik, Bd. 70, 71, 72, 82). Ріман сам проробив відповідні обчислення в праці посланій до Паризької академії, та що не дістала премії і тому не опублікована; вона вперше появилась на світ у збірці творів за редакцією Дедекінда та Вебера, де доданий до неї докладний коментар. Теорія інваріянтів у метричній многостатності опрацьована від Річчі та Леві-Чівіта (пор. Méthodes de calcul différential absolu, Math. Annalen, Bd. 54, 1901, стор. 125-201). Нещодавно під впливом Айнштайнової теорії відносности ці дослідження знову продовжуються; в ній виникає нове фундаментальне поняття безконечно-малого паралельного зміщення. (Пор. Levi-Civita, Notione di parallelismo in una varietà qualunque..., Rend. d. Circ, Matem. di Palermo, Bd. 42 (1917); Hessenberg, Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie, Math. Annalen, Bd. 78 (1917); Weyl, Raum, Zeit, Materie, 5 Auflage (1923), стор. 88; I. A. Schouten, Die direkte Analisis zur neueren Relativitätstheorie, Verhand. d. K. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, XII. Nr. 6 (1919).

4. (До част. II, розд. 3). Метрична многостатність, метричне визначення якої визначається позитивною квадратичною диференціяльною формою ds^2, зветься Рімановою многостатністю. Зв'язок із звичайною теорією поверхонь, як вона обґрунтована від Ґавса, полягає в тім, що кожна поверхня в тримірному евклідовому просторі у встановленому розумінні є Ріманова многостатність (двовимірна). Та це виходить з тої єдиної підстави, що евклідів простір сам є такою многостатністю; взагалі метричні визначення n-вимірної Рімановоі многостатности переносяться на всі в ній дані m-вимірні многостатності ($m = 1$, або $2 \ldots$, або $n - 1$), таким способом, що вона матиме також Ріманову метрику. Точку в n-вимірному „просторі" можна характеризувати n координатами x_i, точку m-вимірної „поверхні" — через m координат u_k. Поверхню опишеться за допомогою параметричного виразу

$$x_i = x_1 \ (u_1 u_2, \ldots, u_m) \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

що добирається в кожній точці поверхні u, де просторова точка має значення x. Підставимо, взятий звідси диференціял

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial u_m} du_m$$

в метричну фундаментальну форму ds^2 простору й дістанемо певну квадратичну форму du_k як метричну фундаментальну форму („лінійний елемент") поверхні. Тоді як у Евкліда просторові надається a priori чимало особливих властивостей із можливих в нім поверхонь, а саме як плоского — поняття Рімановоі многостатности має якраз таку ступінь узагальнености, що цілком усуває цю ріжницю.

За Ґавсом, основу теорії поверхонь

$$x = x(u_1 u_2), y = y(u_1 u_2), z = z(u_1 u_2)$$

у тримірному евклідовському просторі з декартовими координатами xyz становлять такі дві диференціяльні форми:

$$(23) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{ik=1}^{2} g_{ik} du_i du_k,$$

$$-(dxdX + dydY + dzdZ) = \sum_{ik} G_{ik} du_i du_k.$$

Z, Y, Z є косинуси напрямків до вісів. Проводячи через якусь нерухому точку простору паралельні лінії до нормалів, що про-

ходять через усі точки безконечно-малого елемента поверхні do, дістанемо якийсь просторовий кут dw. Границя відношення $\frac{dw}{do}$, коли do зводиться до однієї точки, є Ґавсовою кривиною поверхні в цій точці. Аналітично, вона є часткою з детермінанту обох фундаментальних форм:

$$K = \frac{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2}.$$

Що Ґавсова кривина залежить тільки від геометрії на поверхні, але не від способу її вкладування в простір, точніше: що K збігається з тією величиною, означеною за Ріманом, як кривина двомірної метричної многостатности з лінійним елементом (23) і яка вичисляється з формули (22), доводиться в кожному підручникові теорії поверхонь (див. наприклад W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 1921, стор. 59 і 96).

Наочне пояснення Ріманової кривини двомірної многостатности найкраще дістанемо за допомогою геодезичного трикутника, як спеціяльного прикладу, коли він утворений безконечно-малим паралельним зміщенням векторів. Зміщуючи ∞^1 двомірну многостатність напрямків, що проходять через точку паралельно до „компасу" впродовж замкненої кривої C многостатности, що проходить через центр компаса, то напрямок компасу не повертається у вихідне положення, а повернеться на якийсь кут; він дорівнює, як це безпосередньо випливає з раніше згадуваного натурального визначення, інтегралові кривини впродовж царини, що її обходить крива C. Коли візьмемо на C геодезичний трикутник і зважимо, що геодезична лінія має властивість незмінного напрямку, то прийдемо до даного в тексті Ґавсового значення.

Що конечна двомірна геодезична поверхня, побудована із усіх геодезичних ліній, що виходять із точок O в напрямку елемента Δ має кривину в точці O, і дорівнює просторовій кривині в напрямку елемента поверхні Δ, доводиться так само просто. Хай в даній точці O x_i є центральні координати простору; ці геодезичні поверхні можна характеризувати тим, що для всіх її точок зникають всі координати, крім x_1, x_2. Тому що похідні g_{ik} і так само величини $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ зникають в точці O, g_{ik} має особливе

значення δ_{ik}, дістанемо відразу ж з формули (22), що просторова кривина $R_{12,12}$ її залежать тільки від коефіцієнтів g_{11}, g_{12}, g_{22}; останні g_{ik} не входять до її виразу.

5. (До част. II, розд. 4). Многостатність має центр в O, коли вона за допомогою маліючих координат x_i в O так відображається на декартовській картині простору з метричним визначенням

$$ds^2_0 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx^2,$$

що лінійне збільшення виразу $\frac{ds}{ds_0}$, частка довжини ds лінійного елементу та довжина ds_0 відповідного лінійного елемента в декартівській картині простору, має певне значення: 1) для всіх радіяльно розположених лінійних елементів ds_0 в картині простору, що перебувають на рівному віддалені r від нулевої точки.

$$(r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$$

та 2) для всіх танґенціяльно (дотично), перпендикулярно до радіюсу розположених лінійних елементів ds на цьому віддаленні. Аналітично це визначається так, що ds^2 стає лінійною комбінацією ортогонально-інваріянтних диференціяльних форм

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 \text{ та } (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + \ldots + x_n dx_n)^2$$

а саме:

$$ds^2 = \lambda \sum_i dx_i^2 + l(\sum_i x_i dx_i)^2;$$

де коефіцієнти λ та l залежать тільки від r. Танґенціяльне збільшення відношення є λ, радіяльне h визначається з рівнання $h^2 = \lambda^2 + lr^2$. Радіяльну шкалу можна, очевидно, так привести, що $\lambda = 1$:

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2 + l(\sum_i x_i dx_i)^2. \tag{24}$$

x_i є „модифіковані центральні координати" до точки O в такому сенсі: кожний промінь

$$x_i = \xi^i r$$

(ξ^i довільна константа від суми квадратів i, r змінний параметр) є геодезична лінія; але r не є на ній вимірною довжиною дуги, а це s зв'язано з r у рівнанні

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + lr^2 = h^2 \tag{24'}$$

На n-мірній кулі радіюса a в $(n+1)$ мірному евклідовому просторі в декартових координатах $x_0, x_i \ldots x_n$

$$(25) \qquad \begin{aligned} x_0^2 + x_i^2 + \ldots + x_n^2 &= a^2, \\ ds^2 &= dx_0^2 + dx_i^2 + \ldots dx_n^2. \end{aligned}$$

Отже, використавши $x_1, \ldots x_n$ як координати на кулі ми дістанемо для її ds^2 формулу (24) $l = \frac{1}{a^2 - r^2} = \frac{\alpha}{1 - \alpha r^2}$ $\left(\alpha = \frac{1}{a^2}\right)$ бо в ній $x_0 dx_0 = -(x_1 dx_1 + \ldots + x_n dx_n)$.

$$dx_0^2 = \frac{(x_1 dx_1 + \ldots + x_n dx_n)^2}{a^2 - r^2}$$

Тепер ясно, що многостатності, лінійний елемент яких можна визначити в вигляді (24), де l означає щойно дану функцію $\frac{\alpha}{1 - \alpha r^2}$ мають сталу кривину, незалежну від місця та від напрямку елемента поверхні; це твердження звичайно так само правильне й коли стала α від'ємна як і в разі позитивної α. Подібні ж обчислення, крім того показують, що значення кривини дорівнює α. Замість цієї нормальної форми для ds^2, що відповідає ортогональній проєкції кулі на „екватор" $x_0 = 0$, Ріман використав ту, що відповідає стереографічній проєкції. Ми дістанемо її з щойно даної, коли перейдемо до нових координат x_i^* перетворенням $x_i = \frac{x_i^*}{1 + \frac{\alpha}{4} r^{*2}}$ $\left[\begin{aligned} r^{*2} &= \Sigma (x_i^*)^2 \\ i &= 1, 2, \ldots n \end{aligned}\right]$,

Щоб довести зворотне[1] заведемо до довільної многостатности в якійсь точці O „модифіковані центральні координати" x_i, при чому функція l є довільною від r. Її дістанемо з „власних" центральних координат, сконструйованих у прим. 3, коли ми зробимо заміщення натуральної вимірної шкалі (Maßskala) з геодезичних ліній, що виходять з точки O, на модифіковану шкалу з рівнання (24[1]). Подібним же способом, як ми найшли в прим. 3 формули (8), (13), (11) для „власних" координат, від-

[1] Пор. Lipschitz, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 72; F. Schur. Math. Annalen, Bd. 27, стор. 537—567; H. Weyl, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 1921, стор. 109.

повідно вибору $l=0$, дістанемо так само (26) $\Gamma'_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta=\frac{h'}{h}\xi^i$ (акцент означає похідну по r; завжди можна зробити таке заміщення $x_i=\xi^i r$, і ξ^i довільною сталою суми квадратів 1)

(27) $$\frac{dg_{i\alpha}}{dx_k}\xi^\alpha=\frac{dg_{k\alpha}}{dx_i}\xi^\alpha,$$

(28) $$g_{i\alpha}.\xi^\alpha=h^2\xi^i.$$

Ми питаємо: коли точка O центр цієї многостатности визначається точніше: чи тоді як є рівнання

(29) $$g_{ik}=\delta_{ik}+lx_ix_k?$$

Конечною та достатньою умовою для цього, очевидно, буде те, що $\frac{d}{dr}(g_{ik}-lx_ix_k)=0$

або

(30) $$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha}\xi^\alpha=\frac{d}{dr}(lr^2).\xi^i\xi^k;$$

тому, що коли ріжниця $g_{ik}-lx_ix_k$ незалежна від r, то вона повинна бути рівною її значенню для $r=0$, тобто $=\delta_{ik}$.

Рівнання ж (27) та (28) еквівалентні таким рівнанням

$$\Gamma_{i,\,k\alpha}\xi^\alpha=hh'.\xi^i\xi^k,$$

так що

$$\Gamma_{k\alpha}\xi^\alpha=\frac{h'}{h}\xi^i\xi^k$$

Підставляючи тому

(31) $$\varphi^i_k=\Gamma^i_{k\alpha}\xi^\alpha-\frac{h'}{h}\xi^i\xi^k,$$

і дорівнюючи нулеві цю величину φ^i_k, знайдемо умови для (29).

Щоб зв'язати цю проблему з кривиною, диференціюємо ще раз по r; дістанемо

(32) $$\frac{d\varphi^i_k}{dr}=\frac{\partial\Gamma^i_{k\alpha}}{\partial x_\beta}\xi^\alpha\xi^\beta-(lgh)''\xi^i\xi^k.$$

Перший член праворуч є складова частина від

(33) $$R^i_{\alpha k\beta},\xi^\alpha\xi^\beta$$

коли візьмемо R із виразу (22). Щоб вичислити (33), треба знайти ряд по $\frac{\partial\Gamma^i_{\alpha k}}{\partial x_\beta},\xi^\alpha\xi^\beta,\frac{\partial\Gamma^i_{\alpha\beta}}{\partial x_k}.\xi^\alpha\xi^\beta$

та

(34) $$(\Gamma^i_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\alpha k} - \Gamma^i_{\rho k}\ \Gamma^\rho_{\alpha\beta})\,\xi\alpha\xi\beta\,.$$

Перший член знайдемо з (32)

$$= \frac{d\varphi^i_k}{\partial r} + (lgh)''\xi^i\xi^k\,.$$

Щоб знайти останній, диференціюємо (26)

$$\Gamma^i_{\alpha\beta}\,x_\alpha x_\beta = \frac{rh'}{h}\,x_i$$

по x_k: $$\frac{\partial\Gamma^i_{\alpha\beta}}{\partial x_k}\,x_\alpha x_\beta + 2\Gamma^i_{\alpha k}\,x_\alpha = \frac{x_i x_k}{r}\frac{h'}{h} + x_i x_k (lgh)'' + \frac{rh'}{h}\,\delta_{ik}\,.$$

Визначивши ще $\Gamma^i_{\alpha k}\,\xi^\alpha$ з (31) через φ^i_k, дістанемо таким чином

$$\frac{\partial\Gamma^i_{\alpha\beta}}{\partial x_k}\,\xi^\alpha\xi^\beta = \xi^i\xi^k(lgh)'' + \frac{h'}{rh}(\delta_{ik} - \xi^i\xi^k) - \frac{2}{r}\,\varphi^i_k\,,$$

$$\left(\frac{\partial\Gamma^i_{\alpha k}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\Gamma^i_{\alpha\beta}}{\partial x_k}\right)\xi^\alpha\xi^\beta = \left(\frac{\partial\varphi^i_k}{\partial r} + \frac{2}{r}\,\varphi^i_k\right) + \frac{h'}{rh}(\xi^i\xi^k - \delta_{ik}).$$

Третій же член проходить такі операції:

$$(\Gamma^i_{\rho\beta}\,\xi^\beta)(\Gamma^\rho_{\alpha k}\,\xi^\alpha) - \Gamma^i_{k\rho}(\Gamma^\rho_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha\xi^\beta)$$

$$= \Gamma^i_{\rho\beta}\,\xi^\beta\left(\varphi^\rho_k + \frac{h'}{h}\xi^\rho\beta^k\right) - \Gamma^i_{k\rho}\cdot\frac{h'}{h}\,\xi^\rho$$

$$= \Gamma^i_{\rho\beta}\,\xi^\beta\varphi^\rho_k + \frac{h'}{h}\,\xi^k(\Gamma^i_{\rho\beta}\,\xi^\rho\xi^\beta) - \frac{h'}{h}\left(\varphi^i_k + \frac{h'}{h}\,\xi^i\xi^k\right)$$

$$= \Gamma^i_{\beta\rho}\,\xi^\beta\varphi^\rho_k - \frac{h'}{h}\,\varphi^i_k\,.$$

Остаточна формула буде, коли введемо ще $\dfrac{r^2\varphi^i_k}{h} = \phi^i_k$

(35) $$-R^i_{\alpha k\beta}\,\xi^\alpha\xi^\beta = \frac{h}{r^2}\left[\frac{d\phi^i_k}{\partial r} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha\phi^\beta_k\right] + \frac{h'}{rh}(\xi^i\xi^k - \delta_{ik})\,.$$

Подруге

(36) $$(\delta_{ik}g_{\alpha\beta} - \delta_{i\beta}g_{\alpha k})\,\xi^\alpha\xi^\beta = \delta_{ik}h^2 - \xi^i\xi_k = h^2(\delta_{ik} - \xi^i\xi^k)\,.$$

Коли центр $= 0 : \phi^i_k = 0$, то з цього випливає: кривина многостатности в довільній точці P та в довільному напрямку еле-

мента поверхні, що містить в собі геодезичний промінь OP, залежить тільки від r, а саме:

$$\frac{h'}{rh} : h^2 = -\frac{1}{2r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{h^2}\right). \tag{37}$$

(Надто ж кривина в O незалежна від напрямку поверхні $= l(o)$).

Ця умова так само достатня для того, щоб 0 було в центрі тому що за (35) та (36) вона ідентична з рівнанням

$$\frac{d\psi_k^i}{\partial r} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \xi^\alpha \psi_k^\beta = 0, \tag{38}$$

і з неї випливає, що $\psi_k^i = 0$. Насамділі: C, Γ є такі сталі, що наприклад для $0 \leqq r \leqq 1$ справджується нерівність

$$|\Gamma_{\alpha\beta}^i| \leqq \frac{\Gamma}{n^2}, \ |\psi_k^i| \leqq c \tag{39}$$

для кожного невід'ємного числа m справджується

$$(\psi_k^i) \leqq C . \frac{(\Gamma r)^m}{m!}. \tag{40}$$

Доводиться за допомогою повної індукції. Це твердження справджується за (39) для $m = 0$; та висновок від m до $m+1$ виводиться в наслідок оцінки

$$|\psi_k^i| = |\int_0^r \Gamma_{\alpha\beta}^i \xi^\alpha \psi_k^\beta dr| \leqq \frac{C\Gamma^{m+1}}{m!}\int_0^r r^m dr = C\frac{(\Gamma r)^{m+1}}{(m+1)!}$$

Коли ціле число m у (40) зростатиме над усяку границю, дістанемо, що $\psi_k^i = 0$.

Ми застосуємо наш результат на особливому прикладі многостатности сталої кривини α. Ми вибираємо

$$l = \frac{\alpha}{1 - \alpha r^2}, \ h^2 = 1 + lr^2 = \frac{1}{1 - \alpha r^2}$$

тоді (37) матиме стале значення α. Заведемо тому в якійсь довільній точці O многостатности щодо цієї функції модифіковані центральні координати, так що справджується рівнання (38), із якого випливає $\psi_k^i = 0$ і остаточно дістанемо

$$g_{ik} - lx_i x_k = \delta_{ik}.$$

Ми вже близько мети: лінійний елемент многостатности сталої кривини α має у вибраних кординатах вигляд

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2 + \frac{\alpha}{1 - \alpha r^2} (\sum_i x_i dx_i)^2 .$$

Тому, що при цьому центр 0 можна пересунути в довільну точку многостатности й нормальна форма при припущенні закріпленої точки O, так само не змінюється від будь-якого лінійного ортогонального перетворення координат, все це показує, що многостатність має властивість руху в Рімановому сенсі. Навпаки многостатність з цими властивостями однородности повинна мати сталу кривину. Виключаючи віддавна відомий Евклідовий приклад $\alpha = 0$, розглянемо коли $\alpha = \pm 1$. Введемо в першому прикладі ($\alpha = +1$) відношення, раніш — у формулі (25) — використаних координат.

$$x_0 : x_1 \ldots : x_n$$

як однородні координати до многостатности, то можемо написати, не нормуючи, як у (25), для лінійного елемента

$$ds^2 = \frac{\Omega(x, x)\Omega(dx, dx) - \Omega(x_1 dx)}{\Omega^2(x, x)}, \tag{41}$$

де $\Omega(x, y)$ є симетрична δ_i лінійна форма

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + \ldots x_n y_n$$

(відповідна квадратична форма від $\Omega(x, x)$ подібно до

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

є позитивно-визначена з уявним індексом 0). Це ds^2 залежить, насамділі, тільки від відношення координат x в обох безконечно-близьких точках. Рух многостатности в собі самій можна тепер просто визначити через ці лінійні перетворення однородних координат x, що переводять квадратове рівнання $\Omega(x, x) = 0$ само в себе. Аналогічно справджується й для многостатности з кривиною -1; тільки ds^2 у формулі (41) треба заступити через $-ds^2$ і під $\Omega(x, x)$ розуміти квадратичну форму з n уявними індексами $x_0^2 - (x^2_1 + \ldots + x^2_n)$.

Так само обмежуємося на такому значенні змінних, для яких $\Omega > 0$. Взагалі для Ω можна добрати довільну квадратичну форму з уявним індексом 0 (тому що її можна перетворити лінійно до обох основних нормальних форм; число уявних індексів можливе тільки 0 та n, бо ds^2 повинно бути визначеним). Геодезичні лінії (прямі) визначаються лінійними рівнаннями між нашими однородними координатами.

Отже, ми маємо в n-мірному просторі проєктивну геометрію, що на підставі „конічного перекрою“ („Kegelschnitts“) $\Omega(x, x) = 0$ має певне метричне визначення (метричне визначення Келі). Пор. Cayley, Sixth Memoir upon Quantics, Philosophical Transactions, t. 149 (1859); F. Klein, Über die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Annalen, Bd. 4 (1871) і інші статті Кляйнові в Math. Annalen, Bd. 6 та 37. Приклади, коли $\alpha = +1$ та $\alpha = -1$ названі від Кляйна як „еліптична“ та „гіперболічна“ геометрії, між якими міститься евклідова як перехідний і перекручений приклад. Гіперболічна геометрія була першою з „неевклідових геометрій“ систематично побудована від Лобачевського та Боляє. Еліптична геометрія збігається в досить обмеженій царині, як ми бачили, з сферичною геометрією, що справджується на n-мірній кулі в $(n+1)$ мірному евклідовому просторі. У більшій же царині „еліптичний простір“ має інші співвідношення ніж на кулі; він виникає з кулі якщо дві діяметрально розположені точки її ідеально збігаються в одній точці, або, що зводиться до того самого, коли застосовують замість кулевої точки як елемент пряму лінію, що проходить через центр кулі. Про різні метричні визначення, зв'язані з властивостями простору з погляду analisis situs пор. Кляйна, Math. Annalen, Bd. 37 (1890), стор. 544; Killing, Math. Annalen, Bd. 39 (1891) стор. 257, і Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Paterborn 1893; також Koebe, Annali di Matematica, Ser. III, 21, стор. 57, та Weyl, Math. Annalen, Bd. 77 стор. 349, 6. (До част. III, розд. 3.). Цілковитого розуміння останніх Ріманових зауважень про внутрішню підставу метричних співвідношень простору ми вперше дійшли в Айнштайновій загальній теорії відносности. Ми відкидаємо першу можливість, що „дійсність, яка становить основну простору є дискретною многостатністю“ (хоча в ній, можливо, й міститься остаточна відповідь на проблему простору); Ріман перебуває в опозиції до всіх тих математиків та філософів, які захищали погляди про метрику простору як незалежну від фізичних процесів, що відбуваються в ньому та що реальність убгана в цей метричний простір, як переповнений будинок пожильцями; він стверджував навіть більше, а саме, що простір в собі є тільки безформена тримірна многостатність в розумінні першої частини доповіді й тільки виповнюваний матеріяльний зміст формує простір та визначає його метричне співвідношення. „Метричне поле“

є, принципіяльно, такої-ж природи, як і електромагнетне поле. Тому що простір є гомоґенний, поскільки він є формою явищ, здається випливає з доконечністю (і з старого погляду цей висновок насамділі неминучий), що він повинен бути рімановою многостатністю спеціяльного виду, а саме: постійної кривини. В наслідок праць Гельмгольця й Лі, цитованих у примітці 2, було встановлено, що тільки в такому просторі тіло рухається, не змінюючи своїх метричних співвідношень і це випливає із рівнозначности всіх положень і напрямків. Та ця вимога відкидається, якщо метричне визначення мислиться залежним від розміщення матерії. Тіло набуває можливости зміщуватися без розтягнення в будь-якій рімановій многостатності, якщо тіло рухаючись несе в собі створене ним метричне поле; точніше, тому, що маса, яка під впливом створеного нею самою силового поля приймає форми рівноваги, повинна деформуватися, якщо зберігається силове поле й маса, отже повинна зміститися; та насамділі її форма зберігається, бо вона несе з собою створене від неї самої силове поле.

У фізичному світі до трьох просторових вимірів додається четвертий — час, і спеціяльна теорія відносности (Айнштайн, Мінковський) приводить до погляду, що ця чотиримірна многостатність точок простору-часу є евклідова, де простір та час невіддільні одно від одного; евклідова, проте з тією ріжницею, що її квадратична форма, що становить основу метричного визначення, не позитивна, а з уявним індексом. У загальній теорії відносности відбувається перехід від Евкліда до Рімана: світ є чотиривимірний континуум, де метричне поле залежить від стану, розподілу й руху матерії і визначається квадратичною диференціяльною формою ds^2 з уявним індексом 1. Із цього метричного поля виникають передовсім явища ґравітації (тяжіння). Так Ріманова ідея, що усунула стару стіну поділу між геометрією та фізикою знайшла тепер у Айнштайна блискуче завершення. Література щодо цього подана в книжці автора пояснень, „Raum, Zeit, Materie“ (5 вид. 1923).

Г. Вайль.

ЗМІСТ

Ціна 65 коп.