Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики і
обчислювальної техніки
Кафедра вищої математики

04-02-52М

МЕТОДИЧН І ВКАЗІВКИ

та завдання до практичних занять та самостійного
вивчення навчальної дисципліни **«Вища математика»**
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського)
рівня за освітньо-професійними програмами спеціальностей
274 «Автомобільний транспорт», і
133 «Галузеве машинобудування»
денної та заочної форм навчання

Рекомендовано науково-
методичною радою з якості
ННМІ
Протокол № 7 від 15.06.2022 р.

Рівне – 2022

Методичні вказівки та завдання до практичних занять та самостійного вивчення навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня, що навчаються за інтегрованими освітньо-професійними програмами спеціальності 274 «Автомобільний транспорт» і спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» денної та заочної форми навчання [Електронне видання] / Іващук Я. Г. – Рівне : НУВГП, 2022. – 54 с.

Укладач: Іващук Я. Г., к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск:
Тадеєв П. О., д.пед.н., професор, завідувач кафедри вищої математики.

Керівник групи забезпечення спеціальності
274 «Автомобільний транспорт»:
Марчук М. М., к.т.н., професор.

Керівник групи забезпечення спеціальності
133 «Галузеве машинобудування»:
Кравець С. В., д.т.н., професор.

Голова науково-методичної ради
з якості ННМІ Марчук М. М.

Зміст

Вступ

Курс вищої математики є одним із способів розвитку логічного і алгоритмічного мислення студентів, оволодіння основними методами дослідження та розв’язування математичних задач, вироблення уміння самостійно розширювати свої знання з математики і застосовувати математичний апарат до аналізу та розв’язання практичних та інженерних задач.

Дисципліна спрямована на формування загальнонаукових, інструментальних, загально-професійних та спеціалізовано-професійних компетенцій.

1. Диференціальне числення функцій двох змінних

Нехай задано деяку множину $D \subset R_2$ площини Oxy.

Якщо кожній точці $M(x, y) \in D$ за певним законом f відповідає одне і тільки одне дійсне значення z, то кажуть, що на множині D визначено функцію від двох незалежних змінних x і y, та записують її так: $z = f(x, y)$, або $z = z(x, y)$.

При цьому множину D називають областю визначення функції, або областю існування функції $z = f(x, y)$.

Частинною похідною по x від функції $z = f(x, y)$ називається границя відношення частинного приросту $\Delta_x f$ до приросту Δx при прямуванні Δx до нуля і позначають $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, або $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, або $z'_k(x_0, y_0)$.

Таким чином

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta_x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0 . y_0)}{\Delta x}.$$

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ по змінній y називається границя відношення частинного приросту $\Delta_y f$ до приросту Δy при прямуванні Δy до нуля ї позначають $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$, або $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, або $z'_y(x_0, y_0)$.

Таким чином

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

При знаходженні частинної похідної функції $z = f(x, y)$ по x, змінна y вважається сталою, а при знаходженні частинної похідної по y, змінна x вважається сталою.

Нехай задано поверхню неявним рівнянням $F(x,y,z)=0$, точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ на цій поверхні, і нехай функція $F(x,y,z)$ є диференційованою в цій точці.

Тоді рівняння дотичної площини матиме вигляд:

$$F_x'(M_0)(x-x_0)+F_y'(M_0)(y-y_0)+F_z'(M_0)(z-z_0)=0$$

Якщо поверхню задано явним рівнянням $z=f(x,y)$, то це рівняння легко перетворити у неявне $f(x,y)-z=0$. Тоді ліва частина останньої рівності є функцією від трьох змінних $F(x,y,z)=f(x,y)-z$, причому $F_x'=f_x'(x,y)$, $F_z'=-1$, $F_y'=f_y'(x,y)$, і рівняння дотичної площини буде таким:

$$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

Рівняння нормалі до поверхні $F(x,y,z)=0$ має вигляд,

$$\frac{x-x_0}{F_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M_0)},$$

а до поверхні $z=f(x,y)$ рівняння нормалі буде таким:

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Область простору, кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$ називають скалярним полем.

Похідною функції $f(x,y)$ в точці M за даним напрямом $\vec{l}$ і позначають $\frac{\partial z}{\partial l}$ називають величину

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta z_l}{\Delta l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

де $\cos\alpha = \dfrac{\Delta x}{\Delta l}$, $\cos\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta l}$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$, тобто, $\cos\alpha$ і $\cos\beta$ є координатами одиничного вектора

$$\vec{l}_0 = (\cos\alpha;\cos\beta) = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j}\ .$$

Вектор, що визначає напрям, в якому швидкість зміни скалярного поля в даній точці найбільша називається градієнтом і позначається:

$$\overrightarrow{grad}\,z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}\ .$$

Щоб дослідити двічі диференційовану функцію $z = f(x, y)$ на екстремум необхідно:

1. Знайти частинні похідні першого порядку $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$,

прирівняти їх до нуля і розв’язати систему рівнянь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0\,;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

з якої знайдемо стаціонарні точки. Нехай $M_0(x_0, y_0)$ одна із таких точок.

2. Знайти частинні похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ і обчислити їх значення в кожній стаціонарній точці.

Позначимо величини:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0)\,,\quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\ ,\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0)\,.$$

3. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

4. Якщо в стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$ $\Delta > 0$, то функція $z = f(x, y)$ в цій точці має максимум при $A < 0$ і має мінімум при $A > 0$; якщо $\Delta < 0$, то в цій точці немає екстремуму; якщо $\Delta = 0$, то висновку про стаціонарну точку зробити не можна і потрібне додаткове дослідження.

5. Обчислити значення функції в екстремальній точці.

1.1 Зразки розв'язання завдань

Приклад 1. Знайти градієнт $\overrightarrow{grad\ z}(A)$ та похідну $\frac{\partial z}{\partial l}(A)$ функції $z = 2x^2 + 3y^2 - 5xy + 19y$ в точці $A(-2;1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, де точка $B(1;5)$. З'ясувати характер зміни поля в даному напрямі $\vec{l}$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 5y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 6y - 5x + 19.$$

Обчислимо значення цих похідних у точці $A(-2;1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(A) = \frac{\partial z}{\partial x}(-2;1) = 4(-2) - 5\cdot 1 = -13 < 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(A) = \frac{\partial z}{\partial y}(-2;1) = 6\cdot 1 - 5(-2) + 19 = 35 > 0.$$

Тоді

$$\overrightarrow{grad\ z}(A) = \frac{\partial z}{\partial x}(A)\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}(A)\vec{j} = -13\vec{i} + 35\vec{j} = (-13;35)$$

Знаходимо вектор $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$ і його напрямні косинуси:

$$\vec{l} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (1+2;5-1) = (3;4),$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,\ \cos\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\beta = \frac{4}{5}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial l}(A)=\frac{\partial z}{\partial x}(A)\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}(A)\cos\beta=-13\cdot\frac{3}{5}+35\cdot\frac{4}{5}=\frac{101}{5}$$

Оскільки $\frac{\partial z}{\partial l}(A)=\frac{101}{5}>0$, то функція в даному напрямі $\vec{l}$ зростає. Крім того, дана функція в напрямі осі Ox спадає $\left(\frac{\partial z}{\partial x}(A)=-13<0\right)$, а в напрямі осі Oy функція зростає $\left(\frac{\partial z}{\partial y}(A)=35>0\right)$.

Приклад 2. Функцію $z=-4+6x-x^2-xy-y^2$ дослідити на екстремум.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$: $\frac{\partial z}{\partial x}=6-2x-y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-x-2y$,

прирівняємо їх до нуля і розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}6-2x-y=0,\\-x-2y=0.\end{cases},\ \Rightarrow\ \begin{cases}x+2y=0,\\2x+y=6\end{cases},$$

з якої знаходимо стаціонарну точку: $x_0=4$, $y_0=-2$. Отже, дана функція має тільки одну стаціонарну точку $M_0(4;-2)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку і їх значення у точці M_0:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-1,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2.$$

Як ми бачимо, що частинні похідні другого порядку є сталими величинами в будь-якій точці області визначення , в тому числі і в точці M_0. Тому позначимо величини:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(M_0\right)=-2,\; B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\left(M_0\right)=-1,$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(M_0\right)=-2.$$

Визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2=(-2)(-2)-(-1)^2=3>0.$$

Оскільки $\Delta>0$ і $A<0$, то в точці $M_0(4;-2)$ дана функція має максимум, причому

$$z_{\max}=z\left(M_0\right)=z(4;-2)=-4+24-16+8-4=8.$$

1.2. Завдання для самостійної роботи

<u>**Завдання 1.**</u> Знайти градієнт $\overrightarrow{grad\, z}(A)$ та похідну $\frac{\partial z}{\partial l}(A)$ функції $z=f(x,y)$ в точці A за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$. З'ясувати характер зміни поля в даному напрямі $\vec{l}$.

1. $z=\ln\left(y^2+4y+x^2\right)$, $A(1,1)$, $B(4,5)$.

2. $z=x^2-2xy+2y^2$, $A(0,1)$, $B(3,5)$.

3. $z=5\,arctg(xy)$, $A(1,0)$, $B(7,8)$.

4. $z=10y\arccos x$, $A(0,-5)$, $B(4,-2)$.

5. $z=x^3+x+y^3-16y$, $A(-2,-1)$, $B(3,11)$.

6. $z=\ln\left(y^2+5x^2\right)$, $A(1,0)$, $B(-2,-4)$.

7. $z=-x^2+3xy+2y^2+8x-5y$, $A(2,3)$, $B(-3,15)$.

8. $z=\arcsin(x/y)$, $A(0,-2)$, $B(4,-2)$.

9. $z = -x^2 + 5xy + y^2 + x - 2y$, $A(1,2)$, $B(2,2)$.

10. $z = arctg(y/x)$, $A(-1,1)$, $B(-4,5)$.

11. $z = \ln\left(y^2 + xy + x^2\right)$, $A(0,1)$, $B(-3,5)$.

12. $z = 3x^2y^4 - 2x^3y^2 - 3y$, $A(2,1)$, $B(7,-11)$.

13. $z = x \arcsin y$, $A(5,0)$, $B(1,-3)$.

14. $z = 2x^3y^2 - xy + 4y + x$, $A(1,-1)$, $B(4,3)$.

15. $z = y^2/x$, $A(1,1)$, $B(-2,-3)$.

16. $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$, $A(2;1)$, $B(6;4)$.

17. $z = x^2 - 2xy + 3y - 1$, $A(1;2)$, $B(4;-2)$.

18. $z = 2x^2y + 3xy^2 - x + y$, $A(3;0)$, $B(0;4)$.

19. $z = 3x^4 - xy + y^3 + 2$, $A(1;2)$, $B(-2;6)$.

20. $z = x\sin y + y\cos x$, $A(0;\pi)$, $B(2;\pi)$.

21. $z = x^2 + 3xy - 4y^2 + 5$, $A(1,1)$, $B(4,-3)$.

22. $z = 3xy^2 + x^2y - 3x - 1$, $A(-1,0)$, $B(3,3)$.

23. $z = xy + x^3 + y^3 - 2x$, $A(-1,1)$, $B(5,9)$.

24. $z = 2x^2 + 3y^2 - 4xy + 5y$, $A(2;0)$, $B(6,3)$.

Завдання 2. Дослідити на екстремум функцію $z = f(x,y)$.

1. $z = x^2 + y^2 - 8x + 6y + 24$.

2. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2 - 6$.

3. $z = -2x^2 - y^2 + 8x - 4y - 9$.

4. $z = x^2 + y^2 - 2x - 5y - xy - 31$.

5. $z=-x^2-4y^2+2x-8y$.

6. $z=4x^2+y^2+16x-6y+31$.

7. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y+14$.

8. $z=2x^2+y^2-8x+6y+9$.

9. $z=-x^2-y^2+4x-8y$.

10. $z=6(x-y)-3x^2-3y^2+4$.

11. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

12. $z=-3x^2-y^2+6x+2y+8$.

13. $z=x^2+y^2+xy-3x-6y$.

14. $z=-x^2-2y^2+2xy+4x+2y+1$.

15. $z=3xy-x^2+4y^2+4x-6y-1$.

16. $z=xy-x^2-2y^2+x+10y-8$.

17. $z=3x^2+3xy+y^2-6x-2y+1$.

18. $z=4-5x^2-y^2-4xy-4x-2y+3$.

19. $z=3xy-x^2-3y^2-6x+9y-4$.

20. $z=3x^2+3y^2+5xy+4x+7y+5$.

21. $z=-x^2-y^2+6x+4y+2$.

22. $z=x^2+y^2+xy+x-y+4$.

23. $z=3x^2+y^2+3xy-6x-2y+1$.

24. $z=x^2+2y^2-xy+3x+2y+2$.

2. Подвійний інтеграл та його застосування

Подвійним інтегралом від функції $z=f(x,y)$ по області $\overline{D}$ називається границя

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max diam\,\overline{D}_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k = \iint_{\overline{D}} f(x,y)\,dS$$

за умови, що вона не залежить від способу розбиття області $\overline{D}$ на частини, та вибору точок (x_k, y_k) в кожній частині області $\overline{D}_k$.

Діаметром замкненої області $\overline{D}$ називають найбільшу відстань між двома точками цієї області і позначають $diam\,\overline{D}$. Наприклад, діаметром плоского паралелограма є довжина його найбільшої діагоналі.

Область $\overline{D}$ називають правильною в напрямі осі Oy, якщо будь-яка пряма паралельна осі Oy проведена через довільну точку області перетинає її границю лише у двох точках, тобто $\overline{D} = \{(x,y): \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ a \le x \le b\}$. (Рис.3)

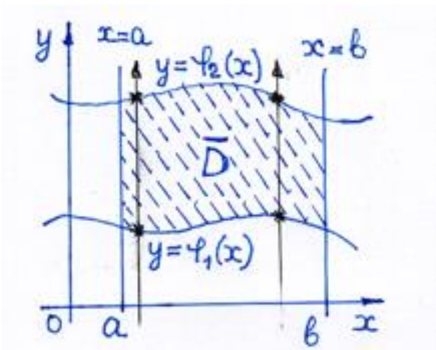


Рис. 3. Плоска область правильна в напрямі осі Oy

Якщо область $\overline{D}$ правильна в напрямі осі Oy, то обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення двох визначених інтегралів

$$\iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Відомо, що полярні координати ρ і φ довільної точки зв'язані з її декартовими координатами x і y формулами

$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,$

де $0\le\rho<+\infty,\quad 0\le\varphi<2\pi$.

Тоді

$$\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)dx\,dy=\iint\limits_{E} f\left(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi\right)\rho\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f\left(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi\right)\rho\,d\rho\right)d\varphi .$$

Площа S плоскої області D обчислюється за формулою

$$S=\iint\limits_{D} dxdy$$

У полярній системі координат площа

$$S=\iint\limits_{E}\rho d\rho d\varphi .$$

Об'єм циліндричного тіла V, обмеженою зверху неперервною поверхнею $z=f\left(x,y\right)$, де $f\left(x,y\right)\ge 0$, знизу – замкненою обмеженою областю D площини $z=0$, з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D, а твірні паралельні осі Oz

$$V=\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)dx\,dy$$

Площа P поверхні σ, що проектується на площину Oxy в область D і задається функцією $z=f\left(x,y\right)\ge 0$ ($f,\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ - неперервні функції в області D), знаходиться за формулою

$$P=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy\ .$$

Нехай матеріальна пластинка, що має форму обмеженої замкненої плоскої області D, лежить на площині Oxy. Густина в кожній точці пластинки задається неперервною функцією $\gamma = \gamma(x, y)$ (в системі СІ розмірність поверхневої густини кг/м^2).

Маса пластинки визначається за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x, y)\, dx\, dy$$

Статичні моменти пластинки відносно осі Oy та Ox обчислюються за формулами:

$$M_y = \iint_D x\,\gamma(x, y)\, dx\, dy; \quad M_x = \iint_D y\,\gamma(x, y)\, dx\, dy$$

Центр маси плоскої області (пластинки) має властивість:

Статичний момент центра маси пластинки відносно осі дорівнює статичному моменту всієї пластинки відносно цієї осі.

Якщо точка $C(x_c, y_c)$ є центром маси пластинки, то згідно цієї властивості $x_c m = M_y$, а $y_c m = M_x$. З цих формул отримуємо формули за якими обчислюються координати центра маси пластинки:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x\,\gamma(x, y)\, dx\, dy}{\iint_D \gamma(x, y)\, dx\, dy}; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y\,\gamma(x, y)\, dx\, dy}{\iint_D \gamma(x, y)\, dx\, dy}.$$

Формули для обчислення моментів інерції пластинки відносно осей Oy та Ox мають вигляд:

$$I_y = \iint_D x^2\,\gamma(x, y)\, dx\, dy; \quad I_x = \iint_D y^2\,\gamma(x, y)\, dx\, dy.$$

Враховуючи те, що моменти інерції $\overline{I}_0$ матеріальної точки з масою m відносно початку координат визначається за формулою $\overline{I}_0 = m\left(x^2 + y^2\right)$, то аналогічно дістанемо формулу обчислення моменту інерції I_0 плоскої пластинки відносно початку координат:

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y)\,dx\,dy = I_x + I_y .$$

2.1. Зразки розв'язання завдань

Приклад 1. Змінити порядок інтегрування. Область інтегрування зобразити на рисунку.

$$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)\,dy .$$

Розв'язання. Даний інтеграл дорівнює подвійному інтегралу від функції $f(x,y)$ по області D, заданій нерівностями: $1 \le x \le 2$, $\frac{1}{x} \le y \le x$.

Отже, область D обмежена гіперболою $y = \frac{1}{x}$, прямою $y = x$ і вертикальними прямими $x = 1$ і $x = 2$. Оскільки пряма $x = 1$ проходить через точку перетину гіперболи $y = \frac{1}{x}$ з прямою $y = x$, то частина межі області D, що лежить на прямій $x = 1$, є точкою $A(1;1)$. Область D зображена на рис. 1.

Для зміни порядку інтегрування розіб'ємо область D на дві області D_1 і D_2 прямою, що проходить через точку $A(1;1)$ паралельно осі Ox (рис. 2). З рівняння гіперболи $y = \frac{1}{x}$

знаходимо $x=\dfrac{1}{y}$, а з рівняння прямої $y=x$ також знаходимо $x=y$. Області D_1 і D_2 визначаються такими нерівностями

$$D_1\begin{cases}\dfrac{1}{2}\le y\le 1,\\ \dfrac{1}{y}\le x\le 2.\end{cases}\qquad D_2\begin{cases}1\le y\le 2,\\ y\le x\le 2.\end{cases}$$

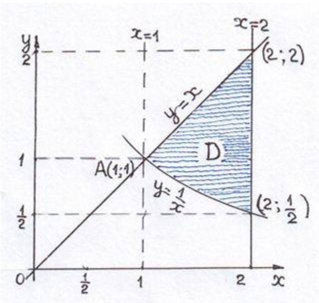


Рис. 1

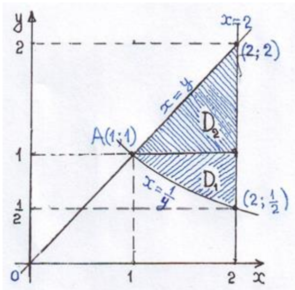


Рис. 2

Скориставшись властивістю адитивності:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy,$$

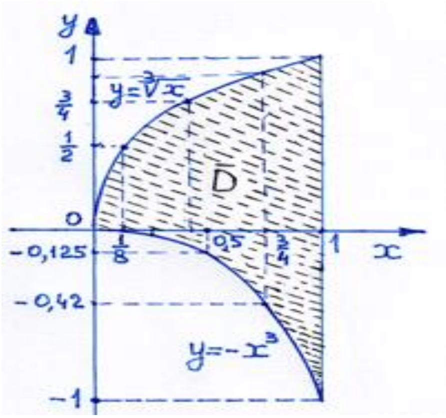
отримаємо

$$\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)\,dy=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)\,dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_y^2 f(x,y)\,dx.$$

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл. Область інтегрування D зобразити на рисунку та обчислити її площу.

$$\iint\limits_{D}\left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy,\qquad D:\quad x=1,\quad y=\sqrt[3]{x},\quad y=-x^3.$$

Розв'язання. Зробимо рисунок області D



$$\iint\limits_D \left(4x\,y+16x^3y^3\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x^3}^{\sqrt[3]{x}}\left(4x\,y+16x^3y^3\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(2xy^2+4x^3y^4\right)\Big|_{-x^3}^{\sqrt[3]{x}}dx=$$

$$=\int_0^1\left(2xx^{\frac{2}{3}}+4x^3x^{\frac{4}{3}}-2xx^6-4x^3x^{12}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(2x^{\frac{5}{3}}+4x^{\frac{13}{3}}-2x^7-4x^{15}\right)dx=\left(\frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}}+\frac{3}{4}x^{\frac{16}{3}}-\frac{x^8}{4}-\frac{x^{16}}{4}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=1.$$

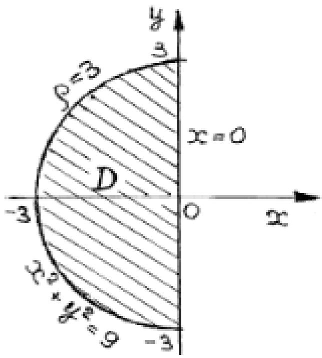
Площа плоскої області D

$$S=\int_0^1 dx\int_{-x^3}^{\sqrt[3]{x}}dy=\int_0^1 y\Big|_{-x^3}^{\sqrt[3]{x}}dx=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{3}}+x^3\right)dx=$$

$$=\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$$ (кв. од.).

Приклад 3. Перейти до полярної системи координат і обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, де область D є лівою половиною круга $x^2+y^2 \le 9$.

Розв'язання. Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тоді $x^2+y^2=\rho^2$, а елемент площі $dxdy=\rho d\rho d\varphi$. Рівняння кола $x^2+y^2=9$ в полярній системі координат матиме вигляд $\rho=3$. Зробимо рисунок лівої половини круга на фоні декартової системи координат .



З рисунка бачимо, що параметр φ змінюється від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, тобто $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$, а параметр ρ лежить в межах $0 \le \rho \le 3$.

Тоді подвійний інтеграл

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_{D'} \sqrt{\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^3 \rho^2 d\rho =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^3 d\varphi = 9\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 9\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = 9\pi .$$

2.2. Завдання для самостійної роботи

Завдання 3. Змінити порядок інтегрування. Область інтегрування зобразити на рисунку.

1. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy$.

2. $\int\limits_{1}^{4} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$.

3. $\int\limits_{0}^{0,5} dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy$.

4. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{y^2} f(x,y)\,dx$.

5. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2y} f(x,y)\,dx$.

6. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x,y)\,dx$.

7. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{3-x} f(x,y)\,dy$.

8. $\int\limits_{0}^{0,5} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$.

9. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2+1} f(x,y)\,dy$.

10. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} f(x,y)\,dy$.

11. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)\,dy$.

12. $\int\limits_{0}^{1,5} dy \int\limits_{2y^2}^{3+y} f(x,y)\,dx$.

13. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{2x^2}^{x+3} f(x,y)\,dy$.

14. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y^2}^{3-y} f(x,y)\,dx$.

15. $\int\limits_{-1,5}^{0} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)\,dy$.

16. $\int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{y}^{4} f(x,y)\,dx$.

17. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{3} f(x,y)\,dy$.

18. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x,y)\,dx$.

19. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{x+1} f(x,y)\,dy$.

20. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{y+1} f(x,y)\,dx$.

21. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f\left(x,y\right)dy$.

22. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y}^{\sqrt[3]{y}} f\left(x,y\right)dx$.

23. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{e^y} f\left(x,y\right)dx$.

24. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f\left(x,y\right)dy$.

<u>**Завдання 4.**</u> Обчислити подвійний інтеграл. Область інтегрування D зобразити на рисунку та обчислити її площу.

1. $\iint\limits_D \left(12x^2y+16x^3y^3\right)dxdy$, $D: x=1, \quad y=x^2, \quad y=-\sqrt{x}$.

2. $\iint\limits_D 48x^3y^3dx\,dy$, $D: \quad x=1, \quad y=\sqrt{x}, \quad y=-x^2$.

3. $\iint\limits_D 36\,x^2y^2dx\,dy$, $D: \quad x=1, \quad y=\sqrt[3]{x}, \quad y=-x^3$.

4. $\iint\limits_D 27\,x^2y^2dx\,dy$, $D: \quad x=1, \quad y=x^2, \quad y=-\sqrt[3]{x}$.

5. $\iint\limits_D 18\,x^2y^2dx\,dy$, $D: \quad x=1, \quad y=x^3, \quad y=-\sqrt[3]{x}$.

6. $\iint\limits_D 32\,x^3y^3dx\,dy$, $D: \quad x=1, \quad y=\sqrt[3]{x}, \quad y=-x^2$.

7. $\iint\limits_D 18\,x^2y^2dx\,dy$, $D: \quad x=1, \quad y=x^2, \quad y=-\sqrt{x}$.

8. $\iint\limits_D 27\,x^2y^2dx\,dy$, $D: \quad x=1, \quad y=\sqrt{x}, \quad y=-x^3$.

9. $\iint\limits_D 4\,x\,y\,dx\,dy$, $D: \quad x=1, \quad y=x^2, \quad y=-\sqrt{x}$.

10. $\iint\limits_D 12\,x\,y\,dx\,dy$, $D: \quad x=1, \quad y=\sqrt{x}, \quad y=-x^2$.

11. $\iint\limits_D 8\,x\,y\,dx\,dy$, $D: \quad x=1, \quad y=\sqrt[3]{x}, \quad y=-x^3$.

12. $\iint\limits_D 24\,x\,y\,dx\,dy$, $D: \quad x=1, \quad y=x^3, \quad y=-\sqrt[3]{x}$.

13. $\iint\limits_D 12\,x\,y\,dx\,dy$, $\qquad D:\quad x=1,\quad y=x^2,\quad y=-\sqrt[3]{x}$.

14. $\iint\limits_D 8\,x\,y\,dx\,dy$, $\qquad D:\quad x=1,\quad y=\sqrt[3]{x},\quad y=-x^2$.

15. $\iint\limits_D \frac{4}{5}\,x\,y\,dx\,dy$, $\qquad D:\quad x=1,\quad y=x^3,\quad y=-\sqrt{x}$.

16. $\iint\limits_D \left(xy-4x^3y^3\right)dx\,dy$, $\quad D:\quad x=1,\quad y=x^3,\quad y=-\sqrt{x}$.

17. $\iint\limits_D 54\,x^2y^2dx\,dy$, $\qquad D:\quad x=1,\quad y=x^2,\quad y=-\sqrt[3]{x}$.

18. $\iint\limits_D \left(xy-9x^5y^5\right)dx\,dy$, $\quad D:\quad x=1,\quad y=\sqrt[3]{x},\quad y=-x^2$.

19. $\iint\limits_D 150\,x^4y^4dx\,dy$, $\qquad D:\quad x=1,\quad y=x^3,\quad y=-\sqrt{x}$.

20. $\iint\limits_D \left(6xy+24x^3y^3\right)dx\,dy$, $D:\quad x=1,\quad y=\sqrt{x},\quad y=-x^2$.

21. $\iint\limits_D 16x^3y^3dx\,dy$, $\qquad D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}$.

22. $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dx\,dy$, $D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2$.

23. $\iint\limits_D \left(xy-4x^3y^3\right)dx\,dy$, $\qquad D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.

24. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dx\,dy$, $D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2$.

<u>Завдання 5.</u> Перейти до полярної системи координат, і обчислити подвійний інтеграл. Зробити рисунок області D .

1. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$, де область D є четвертою частиною круга $x^2+y^2\le 1$, що лежить у четвертому квадранті.

2. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, де область D є лівою половиною круга $x^2+y^2\le 4$.

3. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dx\,dy$, якщо область D - круг $x^2+y^2\le 4$.

4. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, якщо область D - верхня половина круга $x^2+y^2\le 1$.

5. $\iint\limits_D \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dx\,dy$, якщо область D - нижня половина круга $x^2+y^2\le 9$.

6. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, якщо область D - круг $x^2+y^2\le 16$

7. $\iint\limits_D \left(1+x^2+y^2\right)dx\,dy$, якщо область D - нижня половина круга $x^2+y^2\le 2$.

8. $\iint\limits_D \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dx\,dy$, де область D є правою половиною круга $x^2+y^2\le 16$.

9. $\iint\limits_D \left(2+x^2+y^2\right)dx\,dy$, якщо область D - круг $x^2+y^2\le 2$.

10. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, якщо область D - кільце $1\le x^2+y^2\le 4$.

11. $\iint\limits_D \left(1+x^2+y^2\right)dx\,dy$, якщо область D - верхня половина круга $x^2+y^2\le 3$.

12. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, якщо область D обмежена лініями $y=\sqrt{9-x^2}$, $y=x$, $x=0$.

13. $\iint\limits_D \left(4x^2+4y^2\right)dx\,dy$, якщо область D є частиною круга $x^2+y^2\le 2$, що лежить в першій чверті між прямими $y=x$ і $y=0$.

14. $\iint\limits_D \left(1+x^2+y^2\right)^3 dx\,dy$, якщо область D - верхня половина круга $x^2+y^2\le 4$.

15. $\iint\limits_D \left(1-x^2-y^2\right)^5 dx\,dy$, якщо область D - верхня, права четвертина круга $x^2+y^2\le 1$.

16. $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy$, якщо область D обмежена лініями $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=x$ ($x\ge 0$), $x=0$.

17. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2-9}\,dx\,dy$, якщо область D - кільце $9\le x^2+y^2\le 25$.

18. $\iint\limits_D \left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)dx\,dy$, якщо область D - частина кільця $1\le x^2+y^2\le 9$, всі точки якого задовольняють нерівність $0\le y\le x$.

19. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, якщо область D - кільце $0\le x^2+y^2\le \pi^2$.

20. $\iint\limits_D y\,dx\,dy$, якщо область D - верхня половина круга радіуса $R=3$, з центром у точці $C(3;0)$.

21. $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$, якщо область D - кільце $0\le x^2+y^2\le 3$.

22. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dx\,dy$, якщо область D - круг $x^2+y^2\le 4x$.

23. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, якщо область D обмежена лініями $y=\sqrt{8-x^2}$, $y=x$ ($x\ge 0$), $x=0$.

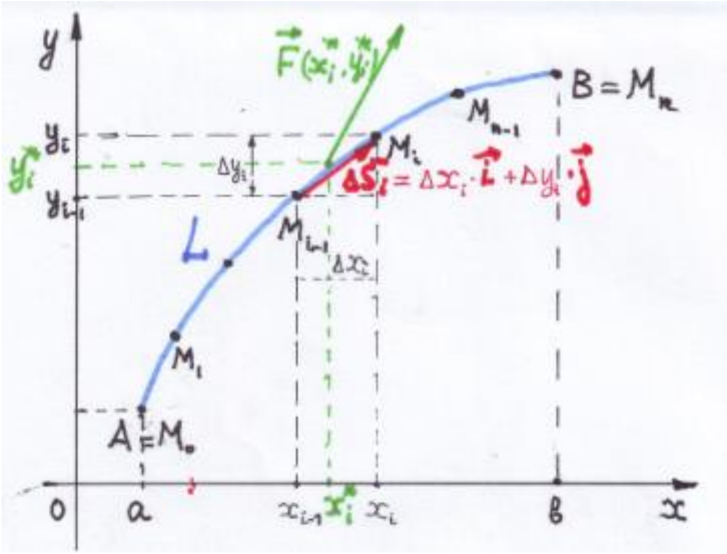
24. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, якщо область D обмежена колами $x^2+y^2\le 2x$ і $x^2+y^2\le 4x$.

3. Криволінійний інтеграл другого роду

Задача про роботу змінної сили. Нехай на площині Oxy матеріальна точка рухається під дією сили

$$\vec{F}\,(x,y)=P(x,y)\,\vec{i}+Q\,(x,y)\,\vec{j}$$

вздовж плоскої кривої $L=\breve{A}B$ від точки A до точки B. Знайдемо виконану при цьому роботу. Зробимо рисунок кривої та допоміжні позначення на ньому.



$$A = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} P\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i + Q\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i =$$

$$= \int_L P\left(x, y\right)dx + Q\left(x, y\right)dy$$

1) Якщо криву $L = \overset{\cup}{AB}$ задано рівнянням $y = y\left(x\right)$, $x \in \left[a;b\right]$, похідна $y'\left(x\right)$ неперервна на $\left[a;b\right]$ і $dy = y'(x) \cdot dx$, а функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ неперервні в кожній точці дуги L, то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

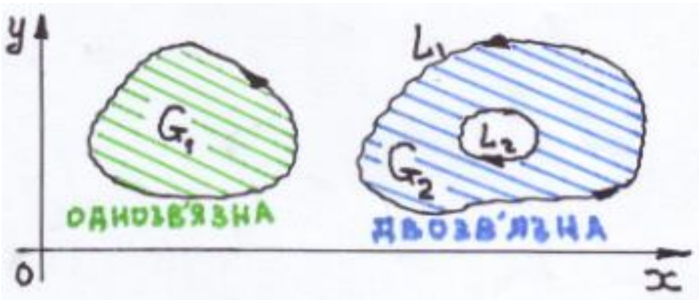
$$= \int_a^b \left(P\left(x, y\left(x\right)\right) + Q\left(x, y\left(x\right)\right) y'(x)\right)dx$$

2) Дуга $L = \overset{\cup}{AB}$ задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$; похідні $x_t'(t)$, $y_t'(t)$ неперервні при $t \in [\alpha;\beta]$, а $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні при відповідних значеннях x і y, то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(P\left(x(t), y(t)\right) x_t'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right) y_t'(t)\right)dt .$$

Область називається однозв'язною, якщо довільний замкнений контур, розміщений в ній, можна стягнути в точку не виходячи за межі області.



G_1 - однозв'язна область, G_2 - двозв'язна область.

Напрям обходу вздовж замкненого контуру, який обмежує деяку однозв'язну область називається додатнім, якщо область при обході залишається зліва.

<u>Теорема-1</u> (Гріна-Остроградського): Якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ разом з похідними $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в деякій однозв'язній області $\overline{G} = G + L$, а L - границя області G , то

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

3.1. Зразки розв'язання завдань

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$$I = \oint_L (2x^2 + 3y + 1)\,dx + (y^2 + 4x)\,dy,$$

де L - замкнений контур трикутника ABC.

Інтегрування виконати в додатному напрямку, тобто у напрямку проти руху стрілки годинника двома способами:

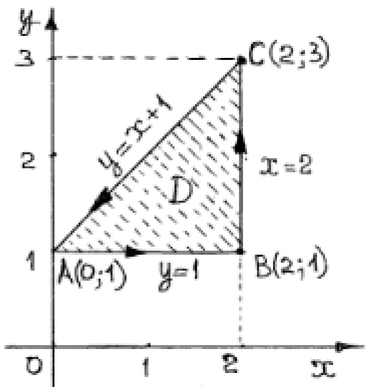
а) безпосередньо;

б) за формулою Гріна-Остроградського.

Вершини трикутника ABC лежать в точках:

$A(0;1)$, $B(2;1)$, $C(2;3)$.

Розв'язання. Зобразимо на рисунку точки і відрізки прямих що їх з'єднують та область обмежену контуром трикутника



а) Застосуємо властивість адитивності криволінійного інтеграла і запишемо, що

$$I = I_{AB} + I_{BC} + I_{CA}.$$

Шлях інтегрування $AB:\ y = 1,\ \Rightarrow\ dy = 0$. Тоді

$$I_{AB} = \int\limits_{AB} (2x^2 + 3y + 1)\,dx + (y^2 + 4x)\,dy$$

$$= \int\limits_0^2 \left(2x^2 + 4\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + 4x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3} + 8 = \frac{40}{3};$$

Шлях інтегрування $BC:\ x = 2,\ \Rightarrow\ dx = 0$. Тоді

$$I_{BC} = \int\limits_{BC} (2x^2 + 3y + 1)\,dx + (y^2 + 4x)\,dy = \int\limits_1^3 \left(y^2 + 8\right) dy =$$

$$= \left(\frac{y^3}{3} + 8y\right)\Bigg|_1^3 = 9 + 24 - \frac{1}{3} - 8 = \frac{74}{3};$$

Шлях інтегрування $CA:\ y = x + 1,\ \Rightarrow$

$$dy = y'dx = \left(x + 1\right)'\,dx = \left(1 + 0\right)dx = dx.$$

Тоді

$$I_{CA} = \int\limits_{CA} (2x^2 + 3y + 1)\,dx + (y^2 + 4x)\,dy$$

$$= \int\limits_2^0 \left(2x^2 + 3\left(x + 1\right) + 1\right)dx + \left(\left(x + 1\right)^2 + 4x\right)dx =$$

$$= \int\limits_2^0 \left(2x^2 + 3x + 4 + x^2 + 2x + 1 + 4x\right) dx =$$

$$= \int\limits_2^0 \left(3x^2 + 9x + 5\right) dx = \left(x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 5x\right)\Bigg|_2^0 = -36.$$

Інтеграл по замкненому контуру трикутника

$$I = I_{AB} + I_{BC} + I_{CA} = \frac{40}{3} + \frac{74}{3} - 36 = \frac{114}{3} - 36 = 2 .$$

б) Застосуємо формулу Гріна-Остроградського

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

для обчислення заданого криволінійного інтеграла

$$I = \oint_L (2x^2 + 3y + 1)\,dx + (y^2 + 4x)\,dy .$$

$$P(x,y) = 2x^2 + 3y + 1, \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 3,$$

$$Q(x,y) = y^2 + 4x, \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 4, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4 - 3 = 1.$$

Тоді

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_D dx\,dy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_1^{x+1} dy = \int_0^2 y\Big|_1^{x+1} dx = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2 .$$

3.2. *Завдання для самостійної роботи*

<u>Завдання 6.</u> Обчислити криволінійні інтеграли другого роду по замкненому контуру L :

1) $\oint_L (3x + 4y + 2)\,dx + (y^2 + 5x)\,dy$;

2) $\oint_L (4xy + 2y - 1)\,dx + (2x^2 + 3x + y)\,dy$

3) $\oint\limits_L \left(2xy - y + 11\right)dx + \left(x^2 - 2 + y^2\right)dy$;

4) $\oint\limits_L \left(x + y + 4\right)dx + \left(2x + y - 3\right)dy$;

5) $\oint\limits_L \left(x + 2y - 5\right)dx + \left(3x - 2y\right)dy$,

де L - замкнений контур трикутника ABC. Інтегрування виконати в додатному напрямку, двома способами:

а) безпосередньо;

б) за формулою Гріна-Остроградського.

Зробити рисунок замкненого контура і заштрихувати область обмежену цим контуром.

Вершини трикутника ABC лежать в точках:

1. $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;3)$.

2. $A(0;0)$, $B(2;2)$, $C(0;2)$.

3. $A(-2;-2)$, $B(0;0)$, $C(-2;0)$.

4. $A(-3;1)$, $B(-1;1)$, $C(-3;3)$.

5. $A(0;0)$, $B(0;2)$, $C(-2;2)$.

6. $A(-3;-3)$, $B(-1;-3)$, $C(-1;-1)$.

7. $A(1;-1)$, $B(3;-3)$, $C(3;-1)$.

8. $A(-1;1)$, $B(-1;3)$, $C(-3;3)$.

9. $A(-2;-2)$, $B(0;-2)$, $C(0;0)$.

10. $A(0;-2)$, $B(2;-2)$, $C(0;0)$.

11. $A(1;1)$, $B(3;3)$, $C(1;3)$.

12. $A(-3;-3)$, $B(-1;-1)$, $C(-3;-1)$.

13. $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;2)$.

14. $A(-2;0)$, $B(0;0)$, $C(-2;2)$.

15. $A(0;0)$, $B(0;2)$, $C(-2;2)$.

16. $A(2;2)$, $B(4;2)$, $C(4;4)$.

17. $A(-4;0)$, $B(-4;-4)$, $C(0;-4)$.

18. $A(1;1)$, $B(5;1)$, $C(5;5)$.

19. $A(-2;2)$, $B(-2;4)$, $C(-4;4)$.

20. $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(3;3)$.

21. $A(0;-2)$, $B(2;-2)$, $C(2;0)$.

22. $A(0;1)$, $B(2;1)$, $C(2;3)$.

23. $A(1;0)$, $B(1;2)$, $C(0;1)$.

24. $A(1;1)$, $B(1;3)$, $C(0;2)$.

4. Ряди

Нехай задана послідовність дійсних чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тоді вираз

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n + \ldots \qquad (4.1)$$

називається **числовим рядом** і скорочено позначається $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

де a_1 – перший член ряду, a_2 – другий член ряду, ... , a_n – n-ий член ряду, який називається **загальним членом ряду** (4.1). Найчастіше ряд задається формулою загального члена $a_n = f(n)$.

Сума n перших членів ряду називається n-ою частиною сумою ряду (4.1) і позначається символом $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Ряд називається **збіжним,** якщо існує скінченна границя послідовності $\left\{S_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, його частинних сум, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, а число S називається сумою ряду.

Ряд називається **розбіжним,** якщо границя послідовності його частинних сум, або нескінченна, або не існує.

Геометричний ряд є сумою нескінченної геометричної прогресії

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = a\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}\ , \tag{4.2}$$

де *a, q* – невідомі числа.

Якщо $|q| < 1$, ряд (4.2) збіжний і сума його $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Якщо $|q| \geq 1$, то ряд (4.2) розбіжний.

Ряд $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, де $a_n = \dfrac{1}{n}$ (4.3)

називається **гармонійним рядом**, який є розбіжним.

Теорема 1. ***(Необхідна ознака збіжності ряду)***

Якщо ряд $\sum\limits_{n-1}^{\infty} a_n$ збіжний, то послідовність його членів прямує до нуля, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Теорема 2. ***(Достатня ознака розбіжності ряду)***

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

Теорема 3. ***(Ознаки порівняння)***

Нехай маємо знакододатні ряди

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4.1}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{4.4}$$

Причому $a_n \leq b_n$, для всіх $n \geq n_0$, де n_0 – деяке натуральне число.

Тоді із збіжності ряду (4.4) випливає збіжність ряду (4.1), а з розбіжності ряду (4.1) випливає розбіжність ряду (4.4).

Теорема 4. ***(Гранична ознака порівняння)***

Якщо задано два ряди з додатними членами (4.1) і (4.4), причому існує скінченна, відмінна від нуля границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A\ \left(A\neq 0,\quad A\neq\infty\right),$$

то обидва ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Теорема 5. ***(Ознака Д'Аламбера)***

Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (4.1) існує границя

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, $0\leq l\leq+\infty$, то

1) при $l<1$ ряд (4.1) збіжний;

2) при $l>1$ ряд (4.1) розбіжний;

3) при $l=1$, ознака не чинна: існують ряди збіжні, для яких $l=1$, і розбіжні, для яких теж $l=1$. Беруть іншу ознаку.

Теорема 6. ***(Радикальна ознак Коші)*** Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ існує границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=K$, де $0\leq K\leq+\infty$, то цей:

1) ряд збіжний при $K<1$;
2) ряд розбіжний при $K>1$;
3) при $K=1$ беруть іншу ознаку.

Теорема 7. ***(Інтегральна ознака Коші-Маклорена)***

Нехай функція $f\left(x\right)$, визначена на проміжку $\left[1;+\infty\right)$, є додатною та монотонно спадною на цьому проміжку. Тоді невласний інтеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$, збіжний або розбіжний одночасно із знакододатним числовим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + ... + f(n) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Знакозмінні ряди, в яких знаки членів строго чергуються, досліжуються на збіжність за допомогою такої достатньої ознаки:

Теорема 8. ***(Ознака Лейбніца)*** Знакозмінний ряд

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots,$

де $a_n > 0, n = 1,2,\cdots,$ збіжний, якщо послідовність членів ряду є спадною, тобто $a_n > a_{n+1}$ та $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ і для суми ряду справджується оцінка $0 < S < a_1$.

Нехай задамо послідовність функції $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ визначену на множині X. Вираз виду

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

називають ***функціональним рядом.***

Якщо членами функціонального ряду є степеневі функції, то такий ряд називається ***степеневим.***

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (4.5)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ - дійсні числа. Степеневий ряд (4.5) збіжний в точці $x = 0$ і його сума дорівнює a_0.

Теорема Абеля. (Нільс Абель (1802-1829) норвезький математик) ***Якщо степеневий ряд (4.5) збіжний при $x = x_1 \neq 0$, то він абсолютно збіжний при всіх значеннях x, що задовольняють нерівність $|x| < |x_1|$. Якщо при $x = x_2 > x_1$ степеневий ряд розбіжний, то він розбіжний всюди, де $|x| > |x_2|$.***

Радіус збіжності степеневого ряду знаходять за формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, або $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$. Тоді, інтервалом збіжності даного ряду буде інтервал $(x_0-R;x_0+R)$, який знаходять з нерівності $|x-x_0|<R$.

Якщо функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0 і має в цьому околі похідні всіх порядків, то степеневий ряд

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

називається рядом Тейлора.

Якщо $x_0=0$, то степеневий ряд

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

називається рядом Маклорена.

Ряди Маклорена деяких елементарних функцій з вказаними їх інтервалами збіжності:

$$\boldsymbol{e^x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad (x\epsilon(-\infty;\infty));$$

$$\boldsymbol{\sin x}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\quad (x\epsilon(-\infty;\infty));$$

$$\boldsymbol{cosx}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\quad (x\epsilon(-\infty;\infty));$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{1-x}}=1+x+x^2+\cdots x^n+\cdots,\quad (x\epsilon(-1;1));$$

$$\boldsymbol{ln(1-x)}=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots,\quad (x\in(-1;1));$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{1+x}}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^n+\cdots,\quad (x\epsilon(-1;1));$$

$$\boldsymbol{ln(1+x)} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots,$$
$$\big(x\epsilon(-1;1)\big);$$

$$\boldsymbol{ln\frac{1+x}{1-x}} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right), \ \big(x \in (-1;1)\big);$$

$$\boldsymbol{arctg\, x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots,$$
$$(x\epsilon[-1;1]);$$

$$\boldsymbol{(1+x)^m} = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots +$$
$$+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot\big(m-(n-1)\big)}{n!}x^n \ldots, \quad \big(x\epsilon(-1;1)\big);$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3}x^6 + \cdots, \big(x\epsilon(-1;1)\big)$$

$$\boldsymbol{arcsinx} = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3\cdot 7}x^7 + \cdots +$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!\cdot 2^n\cdot(2n+1)}x^{2n+1} + \cdots, \quad \big(x\epsilon(-1;1)\big);$$

4.1. Зразки розв’язання завдань

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5n+7}$.

Розв’язання. Перевіримо виконання достатньої ознаки розбіжності ряду. Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5n+7} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)'_n}{(5n+7)'_n} = \frac{1}{5} \neq 0, \Rightarrow$$

Даний ряд розбіжний.

Приклад 2 . Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{11^n}$.

Розв'язання. 1-й спосіб) Маємо геометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{11}\right)^n$ із знаменником $q=\frac{5}{11}<1$, тому даний ряд збіжний;

2-й спосіб) скористаємося ознакою Д'Аламбера:

загальний член ряду $a_n=\frac{5^n}{11^n}$, звідси $a_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{11^{n+1}}$.

Границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\cdot 11^n}{11^{n+1}\cdot 5^n}=\frac{5}{11}<1$. Ряд збіжний.

3-й спосіб) за радикальною ознакою Коші границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5}{11}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{11}=\frac{5}{11}<1.$$ Ряд збіжний.

Приклад 3 . Дослідити на збіжність числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(2n+1)!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{5n-2}\right)^n$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$.

а) Розв'язання. $a_n=\frac{n\cdot 3^n}{(2n+1)!}$, $\Rightarrow$

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)\cdot 3^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}=\frac{(n+1)\cdot 3^{n+1}}{(2n+3)!}$$, тобто $a_{n+1}=\frac{(n+1)\cdot 3^{n+1}}{(2n+3)!}$

Скористаємося ознакою Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^{n+1}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{n\cdot 3^n}=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}=3\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=$$

$$=3\cdot 1\cdot 0=0<1,$$
отже, заданий ряд збіжний;

б) ***Розв'язання.*** Застосуємо радикальну ознаку Коші до ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{5n-2}\right)^{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{5n-2}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5n-2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\frac{1}{5}<1,$$

тобто заданий ряд збіжний ;

в) ***Розв'язання.*** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$. Застосуємо інтегральну ознаку Коші-Маклорена: візьмемо функцію $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$, де $x\in[1;+\infty)$, тоді заданий ряд можна подати як

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)+\cdots.$$

Дослідимо на збіжність невласний інтеграл

$$\int_{1}^{+\infty}f(x)dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}arctg\left.\frac{x}{2}\right|_{1}^{b}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(arctg\frac{b}{2}-arctg\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-arctg\frac{1}{2}\right).$$

Інтеграл збіжний, тому і даний ряд збіжний.

Приклад 4. Знайти **радіус, інтервал та область збіжності** степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\,5^n}.\quad\Rightarrow\quad x_0=0.$$

Розв'язання. Радіус збіжності знайдемо за формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. За умовою прикладу маємо: $a_n=\frac{1}{n^2\,5^n}$.

Звідси $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2\,5^{n+1}}$. Тоді

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2\,5^{n+1}}{n^2\,5^n}\right|=5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=$$

$$=5\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=5.\Rightarrow\ R=5.$$

Таким чином, інтервалом збіжності є інтервал $(-5;+5)$, який випливає з нерівності $|x|<5$. Дослідимо на збіжність степеневий ряд у крайніх точках інтервалу:

1) якщо $x=5$, то зі степеневого ряду ми отримаємо такий числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2\,5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

тобто ми отримали **узагальнений гармонійний ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ із степенем $\alpha=2>1$, який при такому α є збіжним. Це означає, що значення $x=5$ входить в область збіжності степеневого ряду; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$;

2) якщо $x=-5$, то зі степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\,5^n}$ ми отримаємо такий числовий знакозмінний ряд, знаки членів якого строго чергуються

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{n^2\,5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

і який є абсолютно збіжним, оскільки його знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збіжний. Це означає, що значення $x=-5$ також входить в область збіжності степеневого ряду.

Відповідь. Областю збіжності даного степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\,5^n}$ є відрізок $[-5;\,5]$.

Приклад 5. Обчислити наближено визначений інтеграл $\int_0^{0,25} x\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$ з точністю $\varepsilon=0,001$.

Розв'язання. Попередньо подамо підінтегральну функцію у вигляді степеневого ряду Маклорена. Використаємо при цьому, відомий степеневий ряд функції $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots.$$

Інтервалом збіжності цього ряду є інтервал $(-1;1)$. Отже, підінтегральна функція розкладеться в такий ряд:

$$x\ln\left(1+\sqrt{x}\right)=x\left(\sqrt{x}-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}+\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{3}-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^4}{4}+\ldots\right)=$$

$$=x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots.$$

Тоді

$$\int_0^{0,25} x\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx = \int_0^{0,25}\left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(\frac{2\cdot x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{x^3}{6} + \frac{2\cdot x^{\frac{7}{2}}}{21} - \frac{x^4}{16} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{6\cdot 4^3} + \frac{2}{21}\left(\frac{1}{2}\right)^7 - \frac{1}{4^6} + \ldots .$$

Ми отримали знакозмінний ряд, що задовольняє умовам теореми Лейбніца. Третій член цього ряду за абсолютною величиною менший 0,001, тому обмежимося першими двома членами.

Отже,

$$\int_0^{0,25} x\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx \approx \frac{1}{80} - \frac{1}{384} \approx 0,0125 - 0,0026 \approx 0,010$$

4.2. Завдання для самостійної роботи

<u>**Завдання 7.**</u> Дослідити на збіжність числові ряди.

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{5n+2}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-5}{2n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{6n-1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{5n+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+2}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{6n+1}}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+7}{5n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+9}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5n-1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{8^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{5n+4}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$.

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n}{3n+2}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{8n+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$.

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+3)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{4n+7}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+1}$.

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{n}\right)^n$. в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^3 n}$.

15. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{6^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n^3+1}$.

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{4n-3}\right)^n$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$

.

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n(2n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{2n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(3n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n}{7n-5}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2}$.

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{5n-4}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$.

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n^3+8}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^{n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n-4}\right)^n$.

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{4n+5}\right)^n$.

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{9n+2}\right)^n$.

23. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+3}{3n+7}\right)^n$.

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n-1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+2}{8n-3}\right)^n$.

Завдання 8. Знайти радіус, інтервал та область збіжності степеневого ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^3}$. **2.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,x^n}{2^n}$. **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,3^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$. **5.** $\sum_{n=1}^{\infty}n\,(x+3)^n$. **6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^{n+1}}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3n+1}$. **8.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$. **9.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{3^n}$. **11.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^5}$. **12.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n+1}}$. **14.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{4^{n+1}}$. **15.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$. **17.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\,2^n}$. **18.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{5^{n+1}}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n}$. **20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{n+6}$. **21.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n^2+1}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{5^n\sqrt{n}}$. **23.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,(x+3)^n}{6^{n+1}}$. **24.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}\,x^n$.

__**Завдання 9.**__ Попередньо розкладіть підінтегральну функцію в степеневий ряд, а потім обчисліть визначений інтеграл із заданою точністю $\varepsilon=0,001$.

1. $\int_0^{0,5}\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^3}}$. **2.** $\int_0^{0,5}\frac{\sin x^2}{x^2}\,dx$. **3.** $\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

4. $\int_0^{0,5} arctg\, x^2\,dx$. **5.** $\int_0^{1}\sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$. **6.** $\int_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^5}$.

7. $\int\limits_0^1 \sin x^2\, dx$. **8.** $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. **9.** $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}$.

10. $\int\limits_0^{0,25} e^{-x^2} dx$. **11.** $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin 2x}{x} dx$. **12.** $\int\limits_0^{0,5} \ln\left(1+x^4\right) dx$.

13. $\int\limits_0^{0,25} \cos\sqrt{x}\, dx$. **14.** $\int\limits_0^1 x^3 \sin x\, dx$. **15.** $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

16. $\int\limits_0^{0,25} \frac{\sin 4x}{x} dx$. **17.** $\int\limits_0^1 x^2 \cos\sqrt{x}\, dx$. **18.** $\int\limits_0^{0,25} x\ln\left(1+x\right) dx$.

19. $\int\limits_0^{0,25} x\, e^{-\sqrt{x}} dx$. **20.** $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\, \sin x\, dx$. **21.** $\int\limits_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$.

22. $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\, \sin x\, dx$. **23.** $\int\limits_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$. **24.** $\int\limits_0^{0,5} x\, arctg\, x\, dx$.

5. Елементи теорії ймовірностей

Випадковою величиною пов’язаною з деяким експериментом називається змінна величина, яка може набувати тих або інших числових значень в залежності від випадку.

Дискретною називається випадкова величина, яка може набувати тільки скінчене або злічене числа значень.

Законом розподілу випадкової величини називається закон (правило, функція) згідно якого кожному значенню випадкової величини відповідає певна ймовірність цього значення, причому $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$

Математичним сподіванням $M\left(X\right)$ дискретної випадкової величини X яка набуває n значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$, з ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ називається величина

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i .$$

Дисперсією $D(\mathrm{X})$ **випадкової величини** X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання.

Обчислювати дисперсію можна за однією із формул:

$D(X)=M(X-M(X))^2$, або $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$

Середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X)$ випадкової величини X називається корінь квадратний з її дисперсії, тобто $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Випадкова величина називається неперервною, якщо її інтегральна функція $F(x)$ ($F(x)=P(X<x)$) неперервна при всіх значеннях x.

Щільністю розподілу ймовірностей (диференціальною функцією) НВВ в даній точці називається границя відношення ймовірності того, що випадкова величина належатиме інтервалу, який містить дану точку, до довжини цього інтервалу за умови, що інтервал стягується до даної точки

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le X<x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x).$$

Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в проміжок (x_1,x_2) обчислюється за формулою

$$P(x_1<X<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Умова нормування неперервної випадкової величини $X\in(-\infty;+\infty)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать проміжку $[a;b]$, то умова нормування є такою:

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Якщо неперервна випадкова величина(НВВ) задана в інтервалі $(-\infty;+\infty)$ з щільністю ймовірностей $f(x)$, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

Дисперсія $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx,$ або

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X),$$

а середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Якщо всі значення НВВ лежать на відрізку $[a;b]$, то

$M(X) = \int_a^b x\, f(x)dx$, $D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx$, або

$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(X)$ і $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Випадкова величина X називається розподіленою за нормальним законом, якщо диференціальна функція

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

де $a = M(X)$ -математичне сподівання, $\sigma^2 = D(X)$ - дисперсія, $\sigma = \sigma(X)$ - середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина (НРВВ) X належатиме інтервалу (α, β) дорівнює

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - інтегральна функція Лапласа, значення якої затабульовані і знаходимо їх в таблиці додатку 1.

Ймовірність відхилення НРВВ X від математичного сподівання за абсолютною величиною не більше ніж ε обчислюється за формулою:

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

5.1. Зразки розв'язання завдань

Приклад 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	1	2	3	4
p	0,2	0,25	0,4	0,15

Обчислити: $M(X)$, $M(X^2)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1 \le X \le 2)$.

Розв'язання. $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}15 = 0{,}2 + 0{,}5 + 1{,}2 + 0{,}6 = 2{,}5;$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i ,$$

$$M(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}25 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 4^2 \cdot 0{,}15 = 7{,}2 ;$$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)$$

$$D(X)=7,2-2,5^2=7,2-6,25=0,95;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,95}\approx 0,97;$$

$$P(1\le \mathrm{X}\le 2)=0,2+0,25=0,45. \ \blacksquare$$

Приклад 2. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) $\mathrm{M}(\mathrm{X})=a$ кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) важити не менше α кг і не більше β кг;

2) відхилятись від проектної маси за абсолютною величиною менше ніж на δ кг.

$M(X)=a=600$ кг, $\sigma=10$ кг, $\alpha=580$ кг,
$\beta=610$ кг; $\delta=20$ кг.

Розв'язання. 1) Для нормально розподіленої випадкової величини X з математичним сподіванням $a=600$ кг і середнім квадратичним відхиленням $\sigma=10$ кг ймовірність того, що маса навмання взятого блока буде не менше $\alpha=580$ кг і не більше $\beta=610$ кг, знаходиться за формулою:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ - інтегральна функція Лапласа, значення якої знаходимо з таблиці її значень (стор. 53).

Отже, маємо:

$$P(580 < X < 610) = \Phi\left(\frac{610-600}{10}\right) - \Phi\left(\frac{580-600}{10}\right) =$$

$= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) =$ 0,3643+0,4772=0,8415

2) Ймовірність того, що маса навмання взятого блока буде відхилятися від проектної маси за абсолютною величиною менше ніж на $\delta = 20$ кг знайдемо за формулою:

$$P(|\ x-a\ | < \delta\ ) = 2\,\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Згідно з умовою задачі, знаходимо:

$$P(|\ x-600| < 20) = 2\,\Phi\left(\frac{20}{10}\right) = 2\,\Phi(2) =$$

$$= 2 \cdot 0.4772 = 0.9544\,.\ \blacksquare$$

5.2. Завдання для самостійної роботи

Завдання 10. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$\text{X},\ x_i$	1	2	3	4	5
$p,\ p_i$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

Знайдіть математичне сподівання $\text{M}(\text{X})$, дисперсію $D(\text{X})$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(\text{X})$. Побудуйте многокутник розподілу ймовірностей і покажіть на цьому рисунку математичне сподівання $\text{M}(\text{X})$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(\text{X})$. Значення величин x_i та p_i для відповідного варіанту завдання виберіть з таблиці 1:

Таблиця 1.

Варіант	x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1.	p_i	0,1	0,35	0,2	0,15	0,2

2.	p_i	0,2	0,25	0,2	0,25	0,1
3.	p_i	0,3	0,2	0,1	0,2	0,2
4.	p_i	0,4	0,2	0,1	0,1	0,2
5.	p_i	0,4	0,25	0,1	0,15	0,1
6.	p_i	0,2	0,15	0,4	0,15	0,1
7.	p_i	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
8.	p_i	0,1	0,25	0,3	0,15	0,2
9.	p_i	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1
10.	p_i	0,4	0,15	0,2	0,15	0,1
11.	p_i	0,2	0,35	0,2	0,15	0,1
12.	p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4
13.	p_i	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3
14.	p_i	0,3	0,15	0,1	0,15	0,3
15.	p_i	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
16.	p_i	0,1	0,1	0,2	0,25	0,35
17.	p_i	0,2	0,2	0,25	0,25	0,1
18.	p_i	0,3	0,1	0,1	0,1	0,4
19.	p_i	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1
20.	p_i	0,4	0,25	0,15	0,1	0,1
21.	p_i	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2
22.	p_i	0,1	0,25	0,25	0,2	0,2
23.	p_i	0,1	0,25	0,3	0,15	0,2
24.	p_i	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1

Завдання 11. Маса залізобетонних колон прямокутного перерізу для одноповерхових будівель є нормально розподіленою випадковою величиною X з математичним сподіванням (проектною масою) $\mathrm{M}(\mathrm{X}) = a$ кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятої залізобетонної колони буде:

1) важити не менше α кг і не більше β кг;

2)відхилятися від проектної маси за абсолютною величиною менше ніж на δ кг.

Значення величин $a, \sigma, \alpha, \beta, \delta$ для кожного варіанта задані в табл. 2:

Таблиця 2.

Варіант	a	σ	α	β	δ
1.	850	5	835	860	10
2.	900	10	880	920	15
3.	950	10	940	965	20
4.	1000	10	980	1010	20
5.	1100	15	1070	1115	30
6.	1200	15	1185	1230	36
7.	1300	15	1285	1320	30
8.	1400	20	1360	1420	40
9.	1680	20	1650	1700	20
10.	2220	25	2170	2245	50
11.	2750	25	2700	2800	25
12.	3000	30	2910	3090	30
13.	3600	30	3540	3630	60
14.	4000	40	3960	4060	80
15.	4200	40	4150	4280	60
16.	800	5	780	820	10
17.	750	5	720	760	10
18.	950	10	940	980	15
19.	1050	10	1010	1060	20
20.	1150	10	1120	1170	20
21.	1200	10	1180	1230	25
22.	1350	10	1330	1370	20
23.	1420	15	1400	1450	30
24.	1450	15	1430	1480	20

Таблиця значень функції Лапласа $\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	0,3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3883	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706

1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	0,4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4924	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	0,4981	4982	4983	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986

Для значень $x \geq 3,0$ значення функції $\Phi(x)$ такі:

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
$\Phi(x)$	0,49865	0,49903	0,49931	0,49952	0,49966	0,49977	0,49984

x	3,7	3,8	3,9	4,0	4,5	x≥5
$\Phi(x)$	0,49989	0,49993	0,49995	0,499968	0,499997	0,5

Список рекомендованої і використаної літератури

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посібн. К. : «А.С.К.», 2006. 648 с. https://edu-lib.com/izbrannoe/dubovik-v-p-yurik-i-i-vishha-matematika-na

2. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М. Вища математика: Визначений інтеграл, функції багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди К. : Либідь, 1994. 512 с.

3. Ярмуш Я. І., Самолюк І. В. Вища математика. Практикум : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2015. 148 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/5632

3. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод. посібник. У 2 ч.: Ч. 1. Теорія ймовірностей. К. : КНЕУ, 2000. 304 с.

4. Бугір М. К. Посібник з теорії ймовірності та математичної статистики. Тернопіль : Підручники і посібники, 1998. 176 с.

5. Брушковський О. Л. Вища математика. Ряди. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики. Ч. IV : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2010. 246 с. http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/4539

6. Рабик В. М. Основи теорії ймовірностей : навчальний посібник. Львів : Магнолія плюс, 2004. 176 с.

7. Вища математика (основи) – Все для студента: https://www.twirpx.com/files/mathematics/short_courses/