Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та природокористування

В. Г. МІЗЮК

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчально–методичний посібник

Частина 2

Європейська кредитно-трансферна система

Для студентів напряму підготовки 6.060103
„Гідротехніка (водні ресурси)”

Рівне – 2010

УДК 517 (073)
ББК 22.11 (я7 – 6)
М57

Затверджено вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування.
(Протокол № від 04.2010р.)

Рецензенти:
Ткачук М.М., доктор технічних наук, професор Національного університету водного господарства та природокористування;
Ярмуш Я.І., кандидат фізико-математичних наук, доцент Національного університету водного господарства та природокористування.

Мізюк В.Г.
М57 Вища математика. Навчально-методичний посібник. – Рівне: НУВГП, 2010. – с.

Даний навчально-методичний посібник призначений для студентів 2 курсу напряму 6.060103 “Гідротехніка (водні ресурси)”, для яких навчальним планом передбачено вивчення курсу вищої математики в обсязі 594 години (16,5 кредитів): 128 лекційних годин, 128 практичних годин і 338 годин самостійної роботи.

Зміст глав навчально-методичного посібника і їх послідовність відповідає програмі нормативної навчальної дисципліни ”Вища математика”, яка розроблена на кафедрі вищої математики НУВГП доцентами О.Л. Брушковським, В.Г. Мізюком, Я.І. Ярмушем і рекомендована Президією науково – методичної комісії напряму 0926 “Водні ресурси” Міністерства освіти і науки України до впровадження в навчальний процес.

УДК 517 (073)
ББК 22.11 (я7 – 6)

Передмова

Даний навчально-методичний посібник призначений для студентів 2 курсу спеціальності 6.060103 „Гідротехніка (водні ресурси)”. Він є другою частиною інтерактивного комплексу навчально-методичного забезпечення дисципліни „Вища математика” автора для студентів 1 курсу вказаної спеціальності.

Посібник складається з двох модулів, відповідно до третього і четвертого семестрів навчання студентів другого курсу. Для кожного модуля дано робочу програму лекційних і практичних занять, вказано кількість відведених для них годин.

Кожний модуль містить три змістових модулі. У змістових модулях подано питання для самоконтролю вивчення теоретичного матеріалу, приведено багато прикладів розв’язання практичних задач, підібрано 30 варіантів задач для індивідуальної роботи студентів. Задачі взято з відомих посібників, задачників з вищої математики, а також методичних розробок кафедри вищої математики НУВГП.

Теоретичний матеріал змістових модулів курсу і його окремих тем відображено у відповідних розділах навчального посібника В.Г. Мізюка „Вища математика” для студентів 2 курсу спеціальності 6.060103 „Гідротехніка (водні ресурси)” [16].

Наведені в кожному модулі теоретичні питання є заліковими чи екзаменаційними питаннями.

Усі задачі для індивідуальної роботи повинні бути розв’язані самостійно в окремому зошиті. Номери задач в усіх завданнях відповідають порядковому номеру прізвища студента в списку групи.

III семестр

Структура програми навчальної дисципліни

1.Опис предмета навчальної дисципліни

Денна форма навчання

Призначення : підготовка бакалаврів	Напрям, освітньо кваліфікаційний рівень, проф-не спрямування	Характеристика навчальної дисципліни
Кількість кредитів відповідних ЕСТЗ - 4,5	Напрям : 6.060103 – “Гідротехніка (водні ресурси)”	Обов'язкова, нормативна
Модулів: 2	Професійне спрямування: Гідромеліорація, ВіВ	Рік підготовки 2-й, семестр 3
Змістовних модулів - 3		Лекцій – 30 год, практичних – 32 год
Загальна кількість годин: 144		Самостійна та індивідуальна робота 82 год
Тижневих годин: аудиторних — 4, СРС-6	Освітньо кваліфікаційний рівень - **Бакалавр**	МКР - 1 Вид контролю: залік

Заочна форма навчання

Призначення : підготовка бакалаврів	Напрям, освітньо кваліфікаційний рівень, проф-не спрямування	Характеристика навчальної дисципліни
Кількість кредитів відповідних ЕСТЗ - 4,5	Напрям : 6.060103 – “Гідротехніка (водні ресурси)”	Обов'язкова, нормативна
Модулів: 2	Професійне спрямування: Гідромеліорація, ВіВ	Рік підготовки 2-й, семестр 3
Змістовних модулів - 3		Лекцій – 8 год, практичних – 8 год
Загальна кількість годин: 108		Самостійна та індивідуальна робота –96 год
Тижневих годин: аудиторних , СРС-10	Освітньо кваліфікаційний рівень - **Бакалавр**	КР- Диференціальне та інтегральне числення функцій декількох змінних”. Вид контролю – залік

2. Програма навчальної дисципліни

Змістовний модуль 1. Диференціальне числення функцій декількох змінних

Тема 1. Диференціювання функцій декількох змінних.

Тема 2. Застосування диференціального числення функції декількох змінних

Змістовний модуль 2. Інтегрування функцій декількох змінних

Тема 3. Подвійний інтеграл та його застосування

Тема 4. Потрійний інтеграл та його застосування

Змістовний модуль 3. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля

Тема 5. Криволінійні інтеграли І і ІІ роду. Формула Гріна.

Тема 6. Поверхневі інтеграли І і П роду

Тема 7. Векторні поля. Дивергенція.

3. Структура залікового кредиту

Назви тем змістовних модулів	Кількість годин			
	Лекцій	Практ.	Сам. роб-та	Разом
Змістовний модуль 1 Диференціальне числення функцій кількох змінних	**8/2**	**8/2**	**16/26**	**32/30**
Тема 1 . Диференціювання функцій декількох змінних Функція двох змінних: означення, способи завдання, область існування, графічне зображення. Поняття функції багатьох змінних. Границя і неперервність функції двох змінних у точці і в області. Часткові похідні функції двох змінних, їх геометричний зміст. Диференційованість функцій двох змінних, їх повний диференціал. Застосування диференціала до наближених обчислень. Диференціювання складної функції декількох змінних. Диференціювання неявно заданих функцій однієї і декількох змінних. Часткові похідні і диференціали вищих порядків.	4/1	4/1	8/13	16/15
Тема 2. Застосування диференціального числення функції декількох змінних Похідна за напрямком. Градієнт	4/1	4/1	8/13	16/15

скалярного поля. Звичайні і особливі точки поверхні. Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні. Геометричний зміст повного диференціала. Екстремум функції декількох змінних. Необхідна умова екстремуму. Стаціонарні і критичні точки. Достатні умови екстремума функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції двох змінних у обмеженій замкнутій області				
Змістовний модуль 2 **Інтегрування функцій декількох змінних**	12/2	14/2	36/44	62/48
Тема 3. Подвійний інтеграл Поняття подвійного інтеграла, його геометричний зміст і властивості. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах. Подвійний інтеграл у полярних координатах та його обчислення. Обчислення об'ємів тіл і площ плоских фігур за допомогою подвійного інтеграла	7/1	10/1	16/20	33/22
Тема 4. Потрійний інтеграл Поняття потрійного інтеграла, його основні властивості.Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах. Циліндричні і сферичні координати, їх зв'язок з декартовими. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних і сферичних координатах. Обчислення об'єму тіла за допомогою потрійного інтеграла.	5/1	4/1	20/24	29/26

Обчислення з допомогою кратних інтегралів маси, статичних моментів, моментів інерції та координат центра мас плоскої фігури і тіла				
Змістовний модуль 3. Криволінійні і поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля	10/2	10/2	30/26	50/30
Тема 5.Криволінійні інтеграли. Задачі, що приводять до поняття криволінійного інтеграла по довжині дуги. Означення, теорема існування, властивості та обчислення інтеграла. Застосування криволінійного інтеграла 1-го роду (довжина дуги, маса, моменти інерції та координати центра мас матеріальної кривої). Поняття криволінійного інтеграла по координатах, його основні властивості, фізичний зміст та обчислення. Формула Гріна про зв'язок між криолінійним інтегралом по замкнутому контуру і подвійним інтегралом по області, яка обмежена цим контуром. Обчислення за допомогою криволінійного інтеграла роботи і площі плоскої фігури.	5/1	5/1	12/10	22/12
Тема 6. Поверхневі інтеграли Поняття поверхневого інтеграла по площі поверхні, його існування , основні властивості, обчислення та застосування (площа, маса, моменти інерції та координати центра мас поверхні). Поняття поверхневого інтеграла від векторної функції по вибраній стороні поверхні, його існування та	3/1	3/1	12/8	18/10

основні властивості. Поверхневий інтеграл, як потік векторної функції через сторону поверхні. Обчислення поверхневого інтеграла II-го роду				
Тема 7. Елементи теорії поля Поняття векторного поля. Потік векторного поля через замкнену поверхню, джерела і стоки поля, поняття про дивергенцію. Поняття про теорему Гаусса-Осгроградського. Соленоїдне поле. Лінійний інтеграл і циркуляція векторного поля, ротор. Поняття про теорему Стокса. Умови незалежності лінійного інтеграла від форми контура. Поняття потенціального поля. Знаходження потенціалу векторного поля та обчислення лінійного інтеграла у потенціальному полі	2/0	2/0	6/8	10/8
Всього годин	30/6	32/6	82/96	144/108

• В чисельнику вказані години для денної форми навчання, в знаменнику - для заочної.

4. **Практичні заняття**

№	Теми практичних занять	Кількість годин	
		Денна форма	Заочна форма
1	Область визначення і графічне зображення функції двох змінник. Знаходження часткових похідних	2	1
2	Диференціювання складної і неявної		

	функцій. Знаходження часткових похідних вищих порядків	2	
3	Похідна за напрямком і градієнт. Дотична площина і нормаль	2	
4	Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах	2	2
5	Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах	2	
6	Обчислення об'ємів тіл і площ плоских фігур за допомогою подвійного інтеграла	2	
7	Обчислення з допомогою подвійних інтеїралів статичних моментів, моментів інерції та центра маси плоскої фігури	2	1
8,9	Обчислення потрійного інтеграла в декартових, циліндричних і сферичних координатах. Обчислення об'єму тіла з допомогою потрійного інтеграла	4	
10	Обчислення з допомогою потрійних Інтегралів статичних моментів, моментів інерції та координат центра мас просторових тіл	2	
11	Обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду і його застосування (довжина дуги, маса, моменти інерції і координати центра мас матеріальної кривої)	2	1
12	Обчислення криволінійного інтеграла II роду. Формула Гріна і її застосування до обчислення криволінійно го інтеграла II-го роду. Обчислення з допомогою кри-криволінійного інтеграла роботи і площі плоскої фігури	2	1
13	Обчислення та застосування поверхневого інтеграла 1-го роду (площа, маса, моменти інерції та коорди-нати центра мас поверхні)	2	
14	Обчислення поверхневого інтеграла		

	П-го роду	2	
15	Дивергенція. Соленоїдне поле. Використання форму-ли Остроградського-Гаусса. Обчислення лінійного інтеграла і циркуляції векторного поля. Ротор. Використання теореми Стокса	2	
16	Поняття потенціального поля. Знаходження потенціала векторного поля та обчислення лінійного інтеграла в потенціальному полі	2	
Всього		32	6

5. Розподіл балів, що присвоюються студентам згідно кредитно-модупьної системи

Модуль 1 Поточний контроь							Модуль 2 Інд-ні завд.
Зміст. мод. 1		Зміст. мод. 2		Зміст. мод. 3			30
25		30		15			
Т-1	Т-2	Т-3	Т- 4	Т-5	Т-6	Т-7	
15	10	15	15	5	5	5	

Питання для самоконтролю (розділ 9)

1. Які основні відмінності між функціями однієї, двох і трьох змінних?

2. Як можна задати функцію однієї, двох і трьох змінних?

3. Що таке окіл точки в області визначення функції однієї, двох і трьох змінних?

4. Дайте означення границі функції двох змінних.

5. Чи може функція двох змінних мати кілька границь в околі деякої точки?

6. Границя функції характеризує її поведінку в околі деякої точки чи в самій точці?

7. Що таке повний приріст функції двох змінних?

8. Дайте означення неперервності в точці функції двох змінних.

9. Як знайти границю неперервної в точці функції двох змінних?

10. Що таке часткові похідні функції двох змінних?

11. Дайте означення часткових похідних функції двох змінних. Який їх геометричний зміст?

12. Як знайти повний диференціал функції двох змінних і як його застосувати до наближених обчислень?

13. Запишіть складну функцію двох змінних і формулу для знаходження її похідних.

14. Запишіть формулу для знаходження похідної функції $z = F(x, y)$, якщо $y = \varphi(x)$. Як її називають?

15. Сформулюйте теорему про існування неявної функції $F(x, y) = 0$. Як знайти її похідну?

16. Означте похідні вищих порядків функції двох змінних.

17. Що визначає похідна скалярного поля в точці за напрямком вектора?

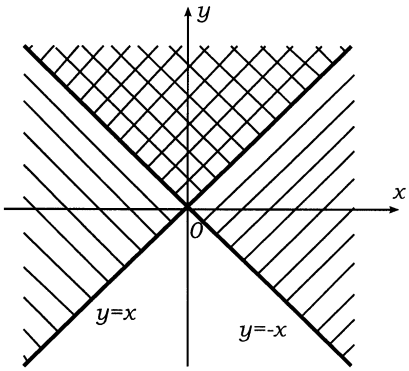
18. Який зв'язок між похідною скалярного поля за напрямком вектора і його градієнтом? Що характеризує градієнт скалярного поля?

19. Дайте означення точок максимума і мінімума функції двох змінних. Яка необхідна умова існування екстремума функції?

20. Сформулюйте достатню умову існування екстремума функції двох змінних.

Приклади розв'язання задач

1.Знайти область визначення функції $z=\sqrt{y+x}\cdot\ln(y^2-x^2)$.



Дана функція визначена, якщо $\begin{cases} y+x\geq 0, \\ y^2-x^2>0 \end{cases}$, звідки $\begin{cases} y>x, \\ y>-x \end{cases}$.

2. Знайти часткові похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z=\frac{1}{2}x^3y^2+3x^2y-$ $-2xy+3x+y^2-4$.

Нагадаємо, що при знаходженні часткових похідних функцій декількох змінних по одній із змінних, інші змінні слід рахувати сталими. Часткова похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ функції $z=f(x,y)$ характеризує швидкість зміни функції у деякій точці $M_0(x_0,y_0)$ з області визначення функції в напрямку, паралельному осі *Ox*, тобто при сталому значенні змінної $y=y_0$. Аналогічно, часткова похідна $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z=f(x,y)$ характеризує швидкість зміни цієї функції в точці M_0 у напрямку, паралельному осі *Oy*, тобто при сталому значенні змінної $x=x_0$.

Знаходимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{1}{2}x^3y^2\right)'_x+(3x^2y)'_x-(2xy)'_x+(3x)'_x+(y^2)'_x-4'=$$

$$= \frac{1}{2} y^2 \cdot 3x^2 + 3y \cdot 2x - 2y \cdot 1 + 3 + 0 - 0 = \frac{3}{2} x^2 y^2 + 6xy - 2y + 3.$$

Аналогічно, $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{1}{2} x^3 y^2\right)'_y + (x^2 y)'_y - (xy)'_y + (3x)'_y +$

$+ (y^2)'_y - 4' = \frac{1}{2} x^3 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 2x \cdot 1 + 0 + 2y - 0 = x^3 y + 3x^2 -$

$- 2x + 2y$.

А чи можна знайти швидкість зміни функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ в довільному напрямку?

Для цього треба визначитись з напрямком, узявши, наприклад, в області визначення функції точку $M_1(x_1, y_1)$. Тоді потрібний напрямок буде заданий вектором $\vec{S} = \overrightarrow{M_0 M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0)$, а шукана швидкість зміни функції

$$\frac{\partial z}{\partial S}_{|M_0} = \frac{\partial z}{\partial x}_{|M_0} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}_{|M_0} \cos\beta, \qquad (1)$$

де $\cos\alpha$ і $\cos\beta$ є проекції одиничного вектора $\vec{S_0}$ на осі координат, відповідно, Ox і Oy: $\vec{S}_0 = (\cos\alpha; \cos\beta)$.

3. Знайти швидкість зміни функції $z = xy^2 + x^2 y - 4xy +$ $+ x^2 - 3y^2 + 1$ в точці $M_0(1;-1)$ у напрямку від цієї точки до точки $M_1(2;1)$.

Знаходимо: 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + 2xy - 4y + 2x$, а

$\frac{\partial z}{\partial x}_{|M_0} = (-1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 5$.

Аналогічно, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x^2 - 4x - 6y$, $\frac{\partial z}{\partial y}_{|M_0} = 1$.

2) $\vec{S} = \overrightarrow{M_0 M_1} = (2-1; 1-(-1)) = (1;2)$, $\left|\vec{S}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

За формулою (1) $\frac{\partial z}{\partial S}_{|M_0} = 5\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 1\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$ - шукана швидкість зміни даної функції.

4. Знайти швидкість зміни скалярного поля функції $u = x^2yz^2 + 3xy^2z + x^2 + xy - yz^2 - 2$ у точці $M_0(1;-1;2)$ в напрямку від цієї точки до точки $M_1(2;1;0)$.

Швидкість зміни скалярного поля знайдемо за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma . \qquad (2)$$

Отримуємо:

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyz^2 + 3y^2z + 2x + y$, $\frac{\partial u}{\partial x}_{|M_0} = -8 + 6 + 2 - 1 = -1$;

$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2z^2 + 6xyz + x - z^2$, $\frac{\partial u}{\partial y}_{|M_0} = 4 - 12 + 1 - 4 = -11$;

$\frac{\partial u}{\partial z} = 2x^2yz + 3xy^2 - 2yz$, $\frac{\partial u}{\partial z}_{|M_0} = -4 + 3 + 4 = 3$.

2) $\vec{S} = \overrightarrow{M_0M_1} = \{-1; 1-(-1); 0-2\} = (1;2;-2)$, тоді

$|\vec{S}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{-2}{3}$.

За формулою (2) шукана швидкість зміни даного скалярного поля $\frac{\partial u}{\partial S}_{|M_0} = (-1)\cdot\frac{1}{3} + (-11)\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\frac{-2}{3} = -\frac{29}{3}$.

5. Знайти найбільшу швидкість зростання скалярного поля функції $u = yz^2 + xy^2 - x^2z + xyz - x + y - 1$ у точці $M_0(2;-1;2)$.

Скалярне поле функції $u = u(x, y, z)$ у деякій його точці найбільше зростає в напрямку вектора $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$,

причому $$\frac{\partial u}{\partial S}_{|M_0} = |\operatorname{grad} u| . \qquad (3)$$

Знаходимо:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2 - 2xz + yz - 1$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}_{|M_0} = 1 - 8 - 2 - 1 = -10$;

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = z^2 + 2xy + xz + 1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}_{|M_0} = 4 - 4 + 4 + 1 = 5$;

$\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2yz - x^2 + xy$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}_{|M_0} = -4 - 4 - 2 = -10$, а

$\text{grad}u = -10\vec{i} + 5\vec{j} - 10\vec{k}$.

За формулою (3) $\dfrac{\partial u}{\partial S}_{|M_0} = \sqrt{(-10)^2 + 5^2 + (-10)^2} = 15$.

6. Довести, що функція $z = x^2 y - y^2 + x - 2$ задовольняє рівняння $\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 1$.

Знаходимо $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 1$, а $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 2y$, тоді

$\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 1 + x(x^2 - 2y) = 2xy + 1 + x^3 - 2xy = x^3 + 1$.

7. Знайти похідні неявно заданих функцій:

1) $x^y + \sin(xy) + x^2 - y^2 = 0$; 2) $\dfrac{y}{z} = \ln\dfrac{z}{x}$.

Для неявно заданої функції $F(x, y) = 0$ похідна

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \qquad (4)$$

а для неявної функції $F(x, y, z) = 0$ часткові похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}. \qquad (5)$$

Знаходимо:

1) $F(x,y)=x^y+\sin(xy)+x^2-y^2=0$, а

$\frac{\partial F}{\partial x}=yx^{y-1}+y\cos(xy)+2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=x^y\ln x+x\cos(xy)-2y$.

За формулою (4) $\frac{dy}{dx}=\frac{yx^{y-1}+y\cos(xy)+2x}{x^y\ln x+x\cos(xy)-2y}$.

2) $F(x,y,z)=\frac{y}{z}-\ln\frac{z}{x}=0$, а $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{x}{z}\cdot\left(-\frac{z}{x^2}\right)=\frac{1}{x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{z}$,

$\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{y}{z}-\frac{x}{z}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{y+1}{z}$. За формулою (5) отримуємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{y+1}{z}}=\frac{z}{x(y+1)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{y+1}{z}}=\frac{1}{y+1}.$$

8. Знайти похідні складної функції $z=\ln\frac{u}{v}$, де $u=x^y$, а $v=\sqrt{xy}$.

Якщо $z=F(u,v)$, а $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, то похідні складної функції знаходять за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (6)$$

Знайдемо всі часткові похідні даних функцій

$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{v}{u}\cdot\frac{1}{v}=\frac{1}{u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{v}{u}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right)=-\frac{1}{v}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x$,

$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{xy}}\cdot y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{xy}}\cdot x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}$.

За формулами (6) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{u}\cdot yx^{y-1}-\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{u}x^y\ln x-\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{x}{y}}$,

де $u=x^y$, $v=\sqrt{xy}$.

9. Знайти повну похідну функцій: 1) $z=e^{xy}$, де $y=\sqrt{x}$;

2) $z = x^y$, де $y = \sin t$, $x = \cos t$.

Якщо $z = z(x, y)$, а $y = y(x)$, то повна похідна

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \qquad (7)$$

Якщо ж $z = z(x, y)$, а $x = x(t)$, $y = y(t)$, то повна похідна

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \qquad (8)$$

Знайдемо всі похідні від даних функцій:

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

За формулою (7)

$\frac{dz}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = e^{xy}\left(y + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)$, де $y = \sqrt{x}$.

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$, $\frac{dy}{dt} = \cos t$, $\frac{dx}{dt} = -\sin t$

За формулою (8)

$\frac{dz}{dt} = -yx^{y-1} \sin t + x^y \ln x \cdot \cos t = x^y\left(\ln x \cdot \cos t - \frac{y}{x} \sin t\right)$,

де $y = \sin t$, а $x = \cos t$.

10. Знайти другі похідні функції $z = x^2 e^y + y^2 \sin x + xy^2$.

За означеням

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

За теоремою Шварца змішані похідні рівні: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Знайдемо часткові похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^y + y^2 \cos x + y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 e^y + 2y \sin x + 2xy.$$

Ці часткові похідні, як і дана функція, залежать від x та y. Диференціюючи їх по цих змінних, отримаємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_x=\left(2xe^y+y^2\cos x+y^2\right)'_x=2e^y-y^2\sin x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y=\left(2xe^y+y^2\cos x+y^2\right)'_y=2xe^y+2y(\cos x+1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x=\left(x^2e^y+2y\sin x+2xy\right)'_x=2xe^y+2y\cos x+2y=$$

$$=2xe^y+2y(\cos x+1).$$

Отже, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2xe^y+2y(\cos x+1)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_y=(x^2e^y+2y\sin x+2xy)'_y=x^2e^y+2\sin x+2x.$$

11. Дослідити на екстремум функції

a) $z=x^2+y^2-3xy-\dfrac{1}{2}x+2y+2$; b) $z=x^2+y^2-xy-2x+y$.

a) Використовуючи необхідну умову $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ екстремума функції $z=f(x,y)$, отримаємо $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-3y-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y-3x+2$, $\begin{cases}2x-3y=\dfrac{1}{2},\\ -3x+2y=-2\end{cases}$. Оскільки $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-5\neq 0$, $\Delta_x=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -3\\ -2 & 2\end{vmatrix}=1-6=-5$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & \frac{1}{2}\\ -3 & -2\end{vmatrix}=-4+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{5}{2}$, то за формулами Крамера $x=\dfrac{-5}{-5}=1$, $y=\dfrac{-\frac{5}{2}}{-5}=\dfrac{1}{2}$.

Отже, $M_0\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ є критична точка.

Знайдемо другі похідні функції :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3\ ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\ .$$

Використовуючи достатню умову екстемума функції, отримуємо $\Delta(M_0)=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 2\end{vmatrix}=4-9=-5<0$.

Таким чином, функція не має в точці $M_0\left(1;\frac{1}{2}\right)$ екстремума.

b) Використовуючи необхідну умову екстемума функції, отримаємо $\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y-2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2y-x+1$, звідки $\begin{cases}2x-y=2,\\ -x+2y=-1\end{cases}$.

Оскільки $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=4-1=3\neq 0$, $\Delta_x=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=0$, то за формулами Крамера $x=\frac{3}{3}=1$, $y=\frac{0}{3}=0$.

Отже, $M_0(1;0)$ - критична точка.

Знайдемо другі похідні функції : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$.

Використовуючи достатню умову екстремума, отримуємо $\Delta(M_0)=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=4-1=3>0$.Оскільки $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0$, то у точці $M_0(1;0)$ функція має мінімум, $z_{\min}(1;0)=1^2+0-0-2\cdot 1=-1$.

Самостійна робота

Завдання 1. Знайти і зобразити на рисунку область визначення функцій

1.1. $z=\ln(x-y)$. 1.2. $z=\sqrt{x+y}$.

1.3. $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

1.4. $z=\dfrac{y}{x-y}$.

1.5. $z=\arccos\dfrac{y}{x}$.

1.6. $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

1.7. $z=\dfrac{1}{4-x^2-y^2}$.

1.8. $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}}$.

1.9. $z=\ln(y^2-2x+4)$.

1.10. $z=\ln xy$.

1.11. $z=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

1.12. $z=\ln(-x^2-y^2)$.

1.13. $z=\arcsin(x+y)$.

1.14. $z=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$.

1.15. $z=\arccos(x^2+y^2)$.

1.16. $z=\sqrt{1+x-y^2}$.

1.17. $z=\sqrt{1-x-y^2}$.

1.18. $z=\ln(-x^2-y^2)$.

1.19. $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$.

1.20. $z=\sqrt{y^2-x^2}$.

1.21. $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$.

1.22. $z=\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$.

1.23. $z=\sqrt{1-x^2}$.

1.24. $z=\sqrt{1-y^2}$.

1.25. $z=\sqrt{xy}$.

1.26. $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

1.27. $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$.

1.28. $z=\ln(x^2-y^2)$.

1.29. $z=\ln(x-y)$.

1.30. $z=\sqrt{1-x^2-y}$.

Завдання 2. Часткові похідні першого порядку функції $z=f(x,y)$.

2.1. Довести, що функція $z = x\ln\frac{y}{x}$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

2.2. Довести, що функція $z = x^y$ задовольняє рівняння $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$

2.3. Знайти повний диференціал функції $z = arctg\frac{x}{y}.$

2.4. Довести, що функція $z = \ln\frac{x}{y} + x^3 - y^3$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^2).$

2.5. Довести, що функція $z = e^{\frac{x}{y}}\ln y$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\ln y}.$

2.6. Довести, що функція $z = x^3y^2 - 2xy^4 + 3x^2y^3$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 5z.$

2.7. Довести, що функція $z = xy + xe^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$

2.8. Довести, що функція $z = \arcsin\frac{x}{y}$ задовольняє рівняння $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

2.9. Довести, що функція $z = arctg\,\dfrac{y}{x}$ задовольняє рівняння $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

2.10. Довести, що функція $z = \ln(x^2 + y^2)$ задовольняє рівняння $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2.$

2.11. Довести, що функція $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ задовольняє рівняння $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

2.12. Довести, що функція $z = xe^{\frac{y}{x}}$ задовольняє рівняння $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{x}.$

2.13. Довести, що функція $z = \dfrac{xy}{x+y}$ задовольняє рівняння $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z.$

2.14. Довести, що функція $z = \dfrac{1}{3}\dfrac{y^2}{x} + \arcsin(xy)$ задовольняє рівняння $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$

2.15. Довести, що для функції $z = x^3y^2 - 2xy^4 + 3x^2y^3$ $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 5z.$

2.16. Довести, що функція $z = x^2y + xy^2$ задовольняє рівняння $x\dfrac{\partial z}{\partial y} + y\dfrac{\partial z}{\partial x} = x^3 + y^3 + 2z.$

2.17. Довести, що для функції $z = \ln\frac{x}{y} + x^3 - y^3$ $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$.

2.18. Довести, що функція $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ задовольняє рівняння $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1$.

2.19. Довести, що функція $z = x^2y^2 + x^3 + y^3 + x - 4y$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2(x^3 + y^3) + z$.

2.20. Довести, що функція $z = ye^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{x}$.

2.21. Довести, що функція $z = y\ln\frac{x}{y}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x}$.

2.22. Довести, що функція $z = e^{\frac{x}{y}}\ln x$ задовольняє рівняння $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y}e^{\frac{y}{x}}$.

2.23. Довести, що функція $z = xy + ye^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

2.24. Довести, що функція $z = \arcsin\frac{y}{x}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

2.25. Довести, що функція $z = arctg\frac{x}{y}$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

2.26. Довести, що функція $z = \sqrt{y^2 - x^2}$ задовольняє рівняння $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

2.27. Довести, що функція $z = xe^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y}.$

2.28. Довести, що функція $z = ye^{\frac{y}{x}}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{x}.$

2.29. Довести, що функція $z = x^2y + xy^2 + xy$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3z - xy.$

2.30. Довести, що функція $z = \frac{x}{y} + x^2 + y^2$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2\left(z - \frac{x}{y}\right).$

Завдання 3. Знайти похідні неявно заданих функцій

3.1. $x^y = y^x$.

3.2. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

3.3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3.4. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

3.5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3.6. $\ln xy - e^{xy} + x^2y = 0$.

3.7. $\sqrt{xy}+\ln\frac{x}{y}+x^2-y^2=0$.

3.8. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$.

3.9. $xyz+x^2+y^2+z^2=0$.

3.10. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

3.11. $z^2+\frac{2}{x}=\sqrt{y^2-z^2}$.

3.12. $x^2+y^2+z^2-2axyz=0$.

3.13. $z^2=x^2+\sqrt{y^2-z^2}$.

3.14. $xy+xz+yz=x^2y^2z^2$.

3.15. $4xy^2z+x^3y-x^2z+4y=0$.

3.16. $xyz^2+2y^2+3yz-4=0$.

3.17. $x^2z^2+x^2y^2+y^2z^2=0$.

3.18. $x^2z-xyz-y^2-x-3=0$.

3.19. $x^2+xy^2-z+tgz=0$.

3.20. $\frac{z}{x}=\sin\left(\frac{y}{z}\right)$.

3.21. $\frac{z}{y}=\ln\frac{x}{z}$.

3.22. $x^y-\cos xy-x+y=0$.

3.23. $\sin y+\sin x+\sin z-1=0$.

3.24. $z^2-\sqrt{xyz}=0$.

3.25. $x^2z+4xy-y^2z=0$.

3.26. $yz-x^2+2xz-1=0$.

3.27. $y^x+x^z-z^y=0$.

3.28. $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$.

3.29. $\frac{z}{x}+\frac{y}{z}-\frac{x}{y}+1=0$.

3.30. $x^2y^2z^2+y+x-z=0$.

Завдання 4.Знайти похідну скалярного поля функції $u=u(x,y,z)$ в точці $M_1(x_1,y_1,z_1)$ за напрямком вектора $\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}$, якщо $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

4.1. $u=x^2y+xyz+yz^2+x$, $M_1(2,1,-1)$, $M_2(0,2,1)$.

4.2. $u=xy^2z+x^2yz-xz^2+y$, $M_1(0,1,2)$, $M_2(-1,1,0)$

4.3. $u=yz^2+x^2y^2+x^2z+xyz$, $M_1(1,-2,3)$, $M_2(2,-2,3)$.

4.4. $u=xzy^2+xz+y^2z^2+z$, $M_1(2,-1,1)$, $M_2(0,-2,1)$.

4.5. $u=z^3+xy+yz+4x^2-z$, $M_1(1,0,-1)$, $M_2(-3,2,0)$.

4.6. $u=x^2z^2+xyz-y^2-xz^2$, $M_1(0,1,-1)$, $M_2(1,-2,2)$.

4.7. $u=yz+xz^2+x^2y^2-x$, $M_1(1,1,1)$, $M_2(-1,2,2)$.

4.8. $u = x^2 + y^2 + z^2 + xyz - y$, $M_1(2,-1,1)$, $M_2(0,2,-1)$.

4.9. $u = x^2y^2z^3 + xyz - z$, $M_1(0,1,-1)$, $M_2(2,-1,2)$.

4.10. $u = x^2yz + xz + xy$, $M_1(2,-1,0)$, $M_2(1,1,1)$.

4.11. $u = xy^2z + x^2 + 4y^2 - z$, $M_1(1,-1,2)$, $M_2(-1,2,0)$.

4.12. $u = xyz^2 - 4y^2 - y - x^2$, $M_1(0,2,-1)$, $M_2(1,1,2)$.

4.13. $u = \sqrt{xyz} + xy^2z + y^2$, $M_1(1,1,1)$, $M_2(1,-1,0)$.

4.14. $u = x^2y^2z + xy^2z^2 + x^2z$, $M_1(2,1,2)$, $M_2(0,-1,0)$.

4.15. $u = xy + y^2z + xz^2 - z$, $M_1(0,1,-1)$, $M_2(1,4,1)$.

4.16. $u = y^2z^2 - xyz + x^2 - z^2$, $M_1(1,-1,2)$, $M_2(0,2,0)$.

4.17. $u = yz + x^2y + xyz - x + 3$, $M_1(2,0,-1)$, $M_2(1,1,2)$.

4.18. $u = x^3yz^2 + x^2y^2 + yz - 1$, $M_1(-1,2,1)$, $M_2(0,1,2)$.

4.19. $u = xyz^2 + x^2y - y^2z + 2$, $M_1(0,3,1)$, $M_2(2,1,2)$.

4.20. $u = x^2yz + yz - xz + y$, $M_1(1,-1,2)$, $M_2(1,0,-1)$.

4.21. $u = xy^2z + 2x - 4y^2 - 3z$, $M_1(2,1,0)$, $M_2(0,-1,2)$.

4.22. $u = -3xyz - 2yz + x^2z$, $M_1(1,-1,1)$, $M_2(2,1,2)$.

4.23. $u = x^2y^2z - 3xy^2z + xy + z^2$, $M_1(-1,2,1)$, $M_2(0,1,-1)$.

4.24. $u = y^3z^2 + x^2y + xz - 4$, $M_1(2,-2,0)$, $M_2(3,1,1)$.

4.25. $u = xy^2z + xz - 3y + 5$, $M_1(-1,2,3)$, $M_2(1,-1,0)$.

4.26. $u = xyz^2 + xy - 3z - 2$, $M_1(1,-1,0)$, $M_2(3,1,1)$.

4.27. $u = y^2z - x^2y - xz + 1$, $M_1(0,1,-1)$, $M_2(1,2,1)$.

4.28. $u = xz^2 + x^2y - y^2z - 1$, $M_1(2,-1,1)$, $M_2(1,1,2)$.

4.29. $u = x^2yz - y^2 - 3yz^2 + 3$, $M_1(-2,3,1)$, $M_2(1,1,2)$.

4.30. $u = 4y^2z - x^2 + 2xyz - 1$, $M_1(1,-1,2)$, $M_2(0,1,1)$.

Завдання 5. Знайти найбільшу швидкість зростання скалярного поля функції $u = u(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$

5.1. $u = xy^2z + x^2z - 3yz^2 - 2x + 1$, $M_0(1,-1,2)$.

5.2. $u = xy + yz + x^2 z + y^2 x + 5$, $M_0(2,1,-1)$.

5.3. $u = x^3 y^2 + yz^3 + y^2 xz - xyz$, $M_0(1,2,3)$.

5.4. $u = x^2 y^2 z^2 - xyz + 5x - y + 2z$, $M_0(-1,2,0)$.

5.5. $u = 4x^2 - y^3 z + xyz + 3x + 1$, $M_0(1,-1,3)$.

5.6. $u = 2yz - x^2 z + 4y^2 z - 3y + 2$, $M_0(2,-2,3)$.

5.7. $u = 3xy - 2y^2 z - 2xz^2 - 3z - 1$, $M_0(-2,1,-1)$.

5.8. $u = y^2 z^2 x - x^2 y - 2xz^3 - x + 1$, $M_0(-1,1,-2)$.

5.9. $u = 2xy^2 z - 3x^2 y + yz^2 - 2$, $M_0(1,-1,1)$.

5.10. $u = x^2 y^2 z - z^2 x + 4yz - 1$, $M_0(-2,2,1)$.

5.11. $u = xyz^2 + x^2 y - xyz + 1$, $M_0(1,-1,3)$.

5.12. $u = y^2 z - x^2 y + 3xyz^2 + 4x$, $M_0(2,2,-1)$.

5.13. $u = x^2 z + y^2 z - xyz^2 - y$, $M_0(1,2,-2)$.

5.14. $u = yz^2 - x^2 y - xz - 5z + 1$, $M_0(1,-1,2)$.

5.15. $u = xy^2 z - 3x^2 z^2 - 2x^2 - 1$, $M_0(2,-2,1)$.

5.16. $u = yz + xy + x^2 z + y^2 x - 1$, $M_0(2,1,1)$.

5.17. $u = x^2 z - xy^2 z + 3yz^2 + 2x - 1$, $M_0(1,-1,2)$.

5.18. $u = yz - x^2 y + 4yz^2 - 3y - 1$, $M_0(2,2,-2)$.

5.19. $u = x^2 y^2 z - z^2 x + yz^2 - 1$, $M_0(-1,2,2)$.

5.20. $u = 2xy - 3y^2 z - z^3 + 3y - 2$, $M_0(1,-1,2)$.

5.21. $u = yz - 3yz^2 + x^2 y - 2x + 1$, $M_0(2,-3,1)$.

5.22. $u = yz^2 - x^2 z - xy^2 + y - 1$, $M_0(-1,-1,3)$.

5.23. $u = xyz^2 - x^2 yz + xz + 4y$, $M_0(1,-1,2)$.

5.24. $u = x^2 yz^2 + xy^2 - 5z - 1$, $M_0(1,2,-3)$.

5.25. $u = 3x^2 z - 2xy + yz^2 + 1$, $M_0(-1,-2,1)$.

5.26. $u = xyz^2 + 3x^2 z - y^2 x - 2$, $M_0(1,2,-1)$.

5.27. $u = x^3 y^2 - yz^2 + xyz - 1$, $M_0(2,-1,1)$.

5.28. $u = xz + y^2 z + x^2 y + 2$, $M_0(1,1,-1)$.

5.29. $u = x^2 z - xyz + xy^2 - z$, $M_0(-1,1,1)$.

5.30. $u = yz + x^2 y^2 - y^2 z - x$, $M_0(-2,1,-1)$.

Завдання 6. Знайти похідні складних функцій.

6.1. $z = \sqrt{u^2 + v^2}$, $u = \dfrac{x}{y}$, $v = x^y$.

6.2. $z = \sqrt{u^2 + v^2}$, $u = x^2 \cos^2 y$, $v = y^2 \sin^2 x$.

6.3. $z = \ln \dfrac{u}{v}$, $u = x^2 y^2 + xy + 5$, $v = x^2 + y^2 + x - y + 2$.

6.4. $z = \dfrac{\sqrt{u}}{v}$, $u = 5^x y + x4^y$, $v = x^y + xy$.

6.5. $z = e^{uv}$, $u = \sin x \cos y + x^2 + y^2$, $v = \dfrac{\sin x}{\cos y} + \sqrt{x^2 + y^2}$.

6.6. $z = \sqrt{xy}$, $x = u^2 + v^2$, $y = \dfrac{u}{v}$.

6.7. $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = u^v$, $y = v^u$.

6.8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = 3^u v + 4^v u$, $y = u^2 v + uv^2 + uv$.

6.9. $z = \cos \dfrac{u}{v}$, $u = \ln \dfrac{x}{y}$, $v = \dfrac{y}{x}$.

6.10. $z = u^v$, $u = x^y$, $v = x^3 y + xy^3$.

6.11. $z = e^{x^2 + y^2}$, $x = \sqrt{u} + \sqrt{v} + u^2 v^2$, $y = \sin u \cos v$.

6.12. $z = tg \dfrac{x}{y}$, $x = \cos^2 u \sin^2 v$, $y = \ln uv$.

6.13. $z = \ln^2 \dfrac{y}{x}$, $x = \sqrt{u^2 v^2 + u + v}$, $y = u^v + v^u$.

6.14. $z = \sin \dfrac{u}{v}$, $u = \sqrt{x^2 y^2 + x + y}$, $v = tg \dfrac{y}{x}$.

6.15. $z=\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, $x=\dfrac{\sqrt{u}}{v}$, $y=\dfrac{\sqrt{v}}{u}$.

6.16. $z=u^2v+uv^2$, $u=x^3y^3+\sqrt{x}y$, $v=x^2y^2+x\sqrt{y}$.

6.17. $z=\dfrac{u}{\sqrt{v}}$, $u=\sin x\cos y-x^2+4y$, $v=\sin^2(xy)+\sqrt{xy}$.

6.18. $z=e^{u^2+v^2}$, $u=x\ln y+y\ln x$, $v=\sqrt{x}+\sqrt{y}+xy$.

6.19. $z=\ln\dfrac{x}{y}$, $x=\sqrt{uv}$, $y=u^v$.

6.20. $z=tg(xy)$, $x=u^2-v^2$, $y=u^2v+uv^2$.

6.21. $z=x^2-xy+y^2$, $x=u\cos v$, $y=v\sin u$.

6.22. $z=u^2+2uv+v^2$, $u=\dfrac{x}{y}$, $v=\dfrac{y}{x}$.

6.23. $z=(u+v)^2$, $u=x\sin y$, $v=y\sin x$.

6.24. $z=x^2+2xy+y^2$, $x=(u-v)^2$, $y=u^v$.

6.25. $z=(x+y)^2$, $x=\sqrt{u^2+v^2}$, $y=\sqrt{xy}$.

6.26. $z=\sqrt{u^2-v^2}$, $u=\arcsin(xy)$, $v=4^{x^2+y^2}$.

6.27. $z=3^{\sqrt{xy}}$, $x=\ln(u^2-v^2)$, $y=\sqrt{u^2-v^2}$.

6.28. $z=v^u$, $u=y^x$, $v=\dfrac{y}{x}$.

6.29. $z=\sqrt{\dfrac{y}{x}}$, $x=\sqrt{u^2-v^2}$, $y=u^v$.

6.30. $z=u^2-2uv+v^2$, $u=\sqrt{xy}$, $v=(x-y)^2$.

Завдання 7. Знайти повну похідну функцій

7.1. $y=\sqrt{u^2+v^2}$, $u=\sin x$, $v=\cos x$.

7.2. $z=\dfrac{u}{v}$, $u=3^t$, $v=t^3$.

7.3. $z=u^2+v^2+uv$, $u=\sqrt{x^2+1}$, $v=\sqrt{x}$.

7.4. $z = x^y$, $y = \ln x$.

7.5. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = e^x$.

7.6. $z = \ln \dfrac{x}{y}$, $y = \ln x$.

7.7. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = arctg\, t$, $y = arcctg\, t$.

7.8. $z = e^{x^2+y^2}$, $y = \sqrt{x}$.

7.9. $z = e^t + \sin(xy)$, $y = \ln t$, $x = e^t$.

7.10. $z = \sqrt{x^2 + y^2 + t^2}$, $y = \sqrt{t}$, $x = 2^t$.

7.11. $z = \sin^2 x \cdot \sin^2 y$, $y = ctgx$.

7.12. $u = \sqrt{y^2 - 3z}$, $y = x^2$, $z = \sin x$.

7.13. $z = arctg \dfrac{x}{y}$, $y = \ln x$.

7.14. $y = \ln(e^x + e^t)$, $x = \sqrt{t}$.

7.15. $z = x^2 y^2 + xy$, $y = x^2 + 3x + 7$.

7.16. $z = e^{xy}$, $x = \sqrt{t}$, $y = \dfrac{1}{t}$.

7.17. $y = \sqrt{x^2 + t^2}$, $x = \ln t$.

7.18. $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$, $y = \dfrac{1}{x}$.

7.19. $z = u^v$, $u = \sqrt{x}$, $v = x^2$.

7.20. $z = x^2 + y^2 + \sin x - \cos y$, $y = x^2 + x + 1$.

7.21. $z = tg \dfrac{x}{y} + xy$, $x = t^2$, $y = \sqrt{t}$.

7.22. $u = \arcsin \dfrac{x}{y}$, $y = x^3$.

7.23. $z = e^{x^2+y^2}$, $y = \ln x$.

7.24. $z = x^2 y + xy^2 + xy - 1$, $y = \sqrt{t}$, $x = \dfrac{1}{t}$.

7.25. $z = \ln(xy)$, $y = \ln x$.

7.26. $y = \sqrt{x^2 + t^2}$, $x = \sqrt{t}$.

7.27. $z = \sqrt{x^y}$, $y = 2^t$, $x = t^2$.

7.28. $z = x^3 + y^3 - 3axy$, $y = \ln x$.

7.29. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \sqrt{t}$, $y = \sin t$.

7.30. $z = \sqrt{xy}$, $y = \sqrt{x}$.

Завдання 8. Похідні і диференціали вищих порядків

8.1. Знайти похідні другого порядку від функції

$$z = \frac{1}{3}x^3 y^3 + x^2 y + 3xy^2 + xy - 3.$$

8.2. Знайти похідні другого порядку від функції

$$z = e^x \cos y + \sqrt{y} \ln x + x + y.$$

8.3.Довести, що для функції $z = \ln(x^2 + y^2)$ $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8.4.Довести, що для функції

$$z = x^3 y^2 + x^2 y^3 + 3x^2 y^2 - x + 4y^2 - 1 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

8.5. Знайти другі похідні функції $z = e^x \ln y + x^2 e^y + x^2 + y^2 - 2$.

8.6.Довети, що для функції $z = 2\cos^2(y - \dfrac{x}{2})$ $\quad 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

8.7.Довести, що для функції $z = \ln \dfrac{y}{x}$ $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8.8.Довести, що функція $z = e^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

8.9.Довести, що для функції $z = x^2 y^2 + x^2 y + xy^2 + \cos y - \sin x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

8.10. Довести, що для функції $z = \ln(xy)$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8.11. Знайти другі похідні функції $z = e^x y^2 + x^2 \cos y + x^2 y^2$.

8.12.Знайти диференціал другого порядку функції $z = 3x^2 y^2 + 2x^2 y + xy^2 + x - 2y + 1$.

8.13.Знайти диференціал другого порядку функції $z = x\cos y + ye^x + x^2 + 3y^2 - 1$.

8.14.Знайти другі похідні функції $z = x^2 e^y - x\sin y + e^x + \cos y$.

8.15.Довести, що для функції $z = \frac{x}{y}$ $x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

8.16. Довести, що для функції $z = e^{xy}$ $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

8.17.Довести, що для функції $z = x^y$ $y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}$.

8.18.Знайти другі похідні функції $z = e^{xy} - x^2 - y^2$.

8.19.Знайти другі похідні функції $z = xe^y - y^2 \ln x + \sin x + 2^x + 1$.

8.20.Знайти другий диференціал функції $z = x^4 y^4 + 3x^2 y - xy^2 + x + y - 1$.

8.21.Знайти другий диференціал функції $z = x^2 e^y + y^2 e^x + xy$.

8.22.Знайти другий диференціал функції $z = 2xy^3 + x^2 y +$
$+ e^x \cos y$.

8.23.Довести, що для функції $z = \sin(xy) + \frac{x}{y} + x^2 + y^2 - 1$
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

8.24.Довести, що для функції $z = \sin(xy) + \frac{x}{y} + x^2 + y^2 - 1$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin(xy)(y^2 - x^2) - \frac{2x}{y^3}.$$

8.25. Знайти другий диференціал функції $z = 5x^2 y^2 + \frac{x}{y} + x^y$.

8.26. Знайти другий диференціал функції $z = x^3 y^2 + 3x^2 y^3 + x^2 - y^3 + 1$.

8.27.Довести, що для функції $z = \ln\frac{y}{x}$ $\quad x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$.

8.28. Довести, що для функції $z = x^3 y^3 + x^2 - y^2$ $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2(x^2 + y^2)$.

8.29. Знайти другий диференціал функції $z = \frac{x}{y} + e^{xy} + x^3 - y^2$.

8.30. Знайти другий диференціал функції $z = \frac{y}{x} + \cos(xy) - 4x^2 + y^3$.

Завдання 9. Дослідити на екстремум функції

9.1. $z = 3y^2 + 3x^2 + 5xy + x - y + 5$.

9.2. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y + 1$.

9.3. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y + 3$.

9.4. $z = 4x + 5y - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4$.

9.5. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$.

9.6. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$.

9.7. $z = 2y^2 - xy + x^2 + 3x + 2y + 2$.

9.8. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$.

9.9. $z = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$.

9.10. $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$.

9.11. $z = -5x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 4$.

9.12. $z = 5xy + 3x^2 + 3y^2 + x - y + 5$.

9.13. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$.

9.14. $z = y^2 + xy + x^2 - 2x - y + 5$.

9.15. $z = -x^2 - 4y^2 + 3xy + 4x - 6y - 1$.

9.16. $z = 5xy + 3y^2 + 3x^2 + 4x + 7y + 5$.

9.17. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2$.

9.18. $z = -x^2 + xy - 2y^2 + x + 10y - 8$.

9.19. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$.

9.20. $z = 4y^2 - x^2 + 3xy + 4x - 6y - 1$.

9.21. $z = y^2 + 3x^2 + 3xy - 6x - 2y + 1$.

9.22. $z = 3x^2 + 5xy + 3y^2 + x - y + 5$.

9.23. $z = y^2 + xy + x^2 + x - y + 4$.

9.24. $z = x^2 - xy + y^2 + x + y + 2$.

9.25. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x - y - 1$.

9.26. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 - x - y + 1$.

9.27. $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$.

9.28. $z = x^2 + y^2 - 3xy - 3x + 2y + 1$.

9.29. $z = x^2 + y^2 - 3xy - \frac{1}{2}x + 2y + 2$.

9.30. $z = x^2 + 3y^2 + 3xy + 6y - 2x - 1$.

Завдання 10. Написати рівняня дотичної площини і нормалі до поверхні
$F(x, y, z) = 0$ або $z = f(x, y)$ у точці $M_o(x_o, y_o, z_o)$

10.1. $yz - x^2 + 2xz + 1 = 0$, $M_o(3,-2,z_o)$.

10.2 . $x^3y + 4xyz - y^2z - x - 3 = 0$, $M_o(1,4,z_o)$.

10.3. $x^2 + y^2z + xyz - y^3 + 1 = 0$, $M_o(-1,2,z_o)$.

10.4. $4xyz - y^2z + x^3y - x - 3 = 0$, $M_o(1,4,z_o)$.

10.5. $xyz + y^2 - x^2 z + x + 3 = 0,\quad M_o(-2,3,z_o).$

10.6. $x^3 y^2 + 4xy^2 z - x^2 z + 4y = 0,\quad M_o(2,-1,z_o).$

10.7. $xyz + 4x^2 - yz + y - 1 = 0,\quad M_o(1,-1,z_o).$

10.8. $y^2 z - y^3 + x^2 + xyz + 1 = 0,\quad M_o(-1,2,z_o).$

10.9. $xyz - 4xy + x^2 z - y^2 + 1 = 0,\quad M_o(1,0,z_o).$

10.10. $x^2 + y^2 z - xz + x - 2y - 3 = 0,\quad M_o(1,-1,z_o).$

10.11. $z = 2y^2 - 2x + xy,\quad M_o(1,2,z_o).$

10.12. $z = 3y^2 + 2xy - 5x,\quad M_o(3,4,z_o).$

10.13. $z = xy + x^2 + y^2,\quad M_o(1,2,z_o).$

10.14. $z = x + y - xy + 3x^2,\quad M_o(1,3,z_o).$

10.15. $z = 3xy - 6y + x^2,\quad M_o(4,1,z_o).$

10.16. $z = x^2 + y^2 + 6x + 3y,\quad M_o(2,3,z_o).$

10.17. $z = 2xy + 3y^2 + x^2,\quad M_o(2,1,z_o).$

10.18. $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1,\quad M_o(1,1,z_o).$

10.19. $z = 2y^2 + x^2 + xy,\quad M_o(2,1,z_o).$

10.20. $z = x^2 + 3y^2 - 5x + 4y,\quad M_o(3,-2,z_o).$

10.21. $z = 3x^2 + y^2 - xy + x - 2y,\quad M_o(1,0,z_o).$

10.22. $xy + xz^2 + xy^2 + x + yz = 0,\quad M_o(1,1,z_o).$

10.23. $xy^3 + x^3 y + xz + yz = 0,\quad M_o(2,-1,z_o).$

10.24. $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - 3,\quad M_o(-1,2,z_o).$

10.25. $z = 3x + 4y + x^2 - y^2 + xy,\quad M_o(1,-1,z_o).$

10.26. $x^3 y + xy^3 + xy + 3x - y = 0,\quad M_o(2,1,z_o).$

10.27. $z = 2x^2 + 3y^2 + xy - 2x + y,\quad M_o(-2,2,z_o).$

10.28. $z = 3xy + x + y^2 - 4x^2,\quad M_o(1,2,z_o).$

10.29. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + 4xz - y = 0,\quad M_o(2,1,z_o).$

10.30. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x + 4y - 1,\quad M_o(1,3,z_o).$

Теоретичні питання

1.Означення функції декількох змінних, область її визначення, типи областей.
2. Способи задання функцій декількох змінних.
3. Границя функцій двох змінних.
4. Неперервність функції двох змінних.
5. Часткові похідні функцій декількох змінних.
6. Геометричний зміст часткових похідних.
7. Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні.
8. Диференційовність функції двох змінних.
9. Диференціал функції двох змінних.
10. Застосування диференціала до наближеного обчислення функцій двох змінних.
11. Похідна складної функції двох змінних.
12. Повна похідна функції двох змінних.
13. Похідна неявної функції.
14. Похідні вищих порядків функції двох змінних.
15. Диференціали вищих порядків функцій двох змінних.
16. Похідна скалярного поля за напрямком вектора.
17. Градієнт скалярного поля, його зв'язок з похідною за напрямом вектора.
18. Екстремуми функції двох змінних. Необхідна умова екстремума.
19. Достатня умова екстремума функції двох змінних.

Приклад тестового завдання

1. Знайти часткові похідні функції $z = 3x^2 + xy^3 + y^2$.

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3xy^2 + 2y$. б) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3xy^2 + 2y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 6x + y^3$.

в) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 6x + 2y$.

2. Знайти диференціал dz функції $z = \frac{x^2}{y}$.

а) $dz = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy$. б) $dz = -\frac{x^2}{y^2}dx + \frac{2x}{y}dy$.

в) $dz = \frac{x}{y}dx + \frac{x^2}{y^2}dy.$

3. Довести, що для функції $z = x^2 y - xy^2 + 2$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2(x - y)$. б) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = x + y$.

в) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x - y^2.$

4. Дано складну функцію $z = arctg\frac{y}{x}$, $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Знайти $\frac{dz}{dx}$.

а) $\frac{dz}{dx} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

б) $\frac{dz}{dx} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

в) $\frac{dz}{dx} = -\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

5. Знайти $\frac{dy}{dx}$, якщо $x^2 + 2xy^2 + y^4 = 0$.

а) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$. б) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$. в) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$.

6. Знайти похідну функції $z = x^2 + y^2 + xy$ в точці $A(1,1)$ за напрямом вектора $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(2,3)$.

а) $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{9}{\sqrt{5}}$. б) $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{3}{\sqrt{5}}$. в) $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

7.Визначити напрям і величину градієнта функції $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ в точці $M(1,1,1)$.

а) $gradU = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, |gradU| = \sqrt{3}.$

б) $gradU = 2(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}), |gradU| = 2\sqrt{3}.$

в) $gradU = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, |gradU| = \sqrt{5}.$

Питання для самоконтролю (розділ 10)

1. Подвійний інтеграл

1.1.Сформулюйте і розв'яжіть задачу про об'єм циліндричного тіла.

1.2. Сформулюйте і розв'яжіть задачу про масу неоднорідної плоскої пластини.

1.3. Дайте означення подвійного інтеграла від функції $z = f(x, y)$ по області (D). Який його геометричний зміст?

1.4. Які властивості подвійного інтеграла?

1.5. Сформулюйте теорему про середнє для подвійного інтеграла. Який її геометричний зміст?

1.6. Задайте рівняннями і зобразіть на рисунках області (D) інтегрування правильні відносно осей координат *Ox* і *Oy*.

1.7. Запишіть формули для обчислення подвійних інтегралів по правильних областях відносно осей координат *Ox* і *Oy*.

1.8. Задайте область інтегрування у полярній системі координат і запишіть подвійні інтеграли по цих областях.

1.9. Як обчислити площу плоскої фігури за допомогою подвійного інтеграла в декартовій і полярній системах координат?

1.10. Як обчислити об'єм тіла і площу поверхні за допомогою подвійного інтеграла?

2. Потрійний інтеграл

2.1. Як знайти масу неоднорідного просторового тіла?

2.2. Дайте означення потрійного інтеграла від функції *f(x, y, z)* по області (V). Сформулюйте умову інтегровності цієї функції.

2.3.Як обчислити потрійний інтеграл по заданій області?

2.4. Запишіть формули переходу від декартових до циліндричних координат.

2.5. Запишіть формулу для обчислення потрійного інтеграла у циліндричних координатах.

2.6. Запишіть формули переходу від декартових до сферичних координат.

2.7. Обчисліть об'єм кулі радіус *R*.

2.8. Запишіть формули для обчислення маси, статичних моментів і моментів інерції неоднорідних плоского і просторового тіл.

Приклади розв'язання задач

1.Знайти межі інтегрування і обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} \frac{x^2}{y^2} dxdy$, якщо $D = \left\{ (x, y) \middle| y \le x, y \ge \frac{1}{x}, x \le 2 \right\}$.

Область інтегрування (D) обмежена лініями $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ і $x = 2$.

Будемо рахувати її правильною відносно осі Оу:

$$D = \left\{ (x, y) \middle| 1 \le x \le 2, \frac{1}{x} \le y \le x \right\}.$$

По такій області $\iint\limits_{(D)} \frac{x^2}{y^2} dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy = \int\limits_1^2 x^2 (-\frac{1}{y}) \Big|_{1/x}^{x} dx =$

$$= \int\limits_1^2 x^2 (x - \frac{1}{x}) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

Обчислимо даний інтеграл, рахуючи область правильною відносно осі Ох. $\forall y \in \left[\frac{1}{2}; 2 \right]$ область (D) обмежена знизу лініями $x = y$, $x = \frac{1}{y}$. Розіб'ємо її на дві області $D_1 = \left\{ (x, y) \middle| \frac{1}{2} \le y \le 1, \frac{1}{y} \le x \le 2 \right\}$ і $D_2 = \{(x, y) | 1 \le y \le 2, y \le x \le 2$ (рис.1).

Тоді $\iint\limits_{(D)} \frac{x^2}{y^2} dxdy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} \frac{x^2}{y^2} dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_y^2 \frac{x^2}{y^2} dx = = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{y^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_{\frac{1}{y}}^{2} dy +$

$$+ \int\limits_1^2 \frac{1}{y^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_y^2 dy = \frac{1}{3} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{y^2} \left(8 - \frac{1}{y^3} \right) dy + \frac{1}{3} \int\limits_1^2 \frac{1}{y^2} (8 - y^3) dy =$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{8}{y}+\frac{1}{4y^4}\right)\Bigg|_{1/2}^{1}+\left(-\frac{8}{y}-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2}\right]=\frac{9}{4}.$$

Очевидно, що обчислювати даний інтеграл доцільніше по області (D), правильній відносно осі Oy.

2. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{(D)} e^{x^2}\,dxdy$, якщо область інтнгрування

$D=\{(x,y)\,|\,y\ge 2x,\ y\le 3x,\ x\le 1\}$ (рис.2).

Область інтегрування обмежена лініями $y=2x$, $y=3x$ і $x=1$.

Цю область не можна рахувати правильною відносно осі Ox, оскільки для обчислення по ній повторного інтеграла

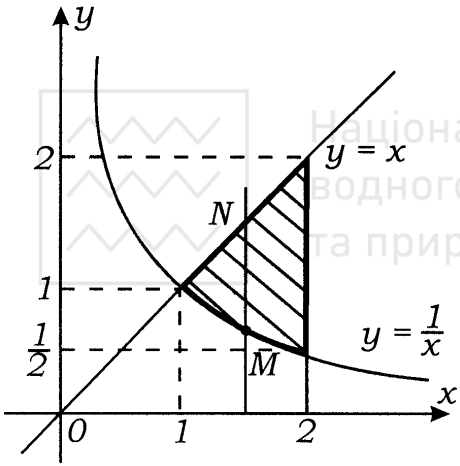


Рис.1

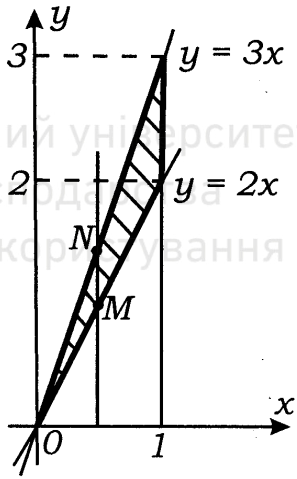


Рис.2

$\iint\limits_{(D)} e^{x^2}\,dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} e^{x^2}\,dx$ треба обчислити внутрішній інтеграл $\int e^{x^2}\,dx$, який не виражається через елементарні функції .

Будемо рахувати область (D) правильною відносно осі Oy:

$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 2x\le y\le 3x\}$. Тоді $\iint\limits_{(D)} e^{x^2}\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x}^{3x} e^{x^2}\,dy=$

$$= \int_0^1 e^{x^2} y \Big|_{2x}^{3x} dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

3.Обчислити $\iint\limits_{(D)} y dx dy$ по області $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le ax, y \ge 0\}$.

Область обмежена лініями $x^2 + y^2 = ax$ і $y = 0$.

З першого рівняння, виділивши по змінній x повний квадрат, знаходимо $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$. Отже, область інтегрування обмежена верхнім півколом і віссю Ox (рис.3).

У полярних координатах $D = \left\{(\rho, \varphi) \mid 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \rho \le a\cos\varphi\right\}$,

де $\rho = a\cos\varphi$ - рівняння даного кола.

Отримаємо $\iint\limits_{(D)} y dx dy = \iint\limits_{(D)} \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi d\rho =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{a\cos\varphi} d\varphi = -\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d(\cos\varphi) = -\frac{a^3\cos^4\varphi}{12}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{12}.$$

4. Знайти площу фігури, обмежену кардіоїдою $\rho = a(1+\cos\varphi)$ і колом $\rho = a\cos\varphi$ $(a \ge 0)$ (рис.4).

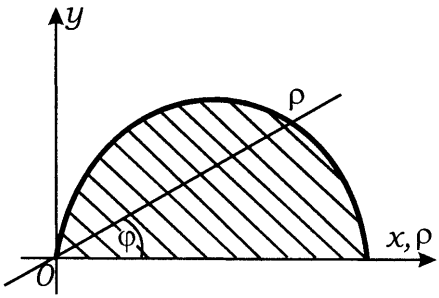


Рис.3

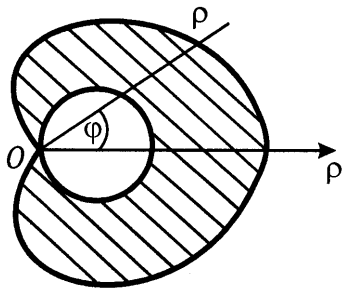


Рис.4

Шукана площа S є різниця площі S_1 кардіоїди і площі $S_2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$ круга.

Знаходимо $S_1 = 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho d\rho = a^2 \int\limits_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^2 d\varphi =$

$$= a^2 \int\limits_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = a^2 \left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$= \dfrac{3}{2}\pi a^2$. Тоді $S = \dfrac{3}{2}\pi a^2 - \dfrac{\pi a^2}{4} = \dfrac{5}{4}\pi a^2$ (кв.од.).

Зауваження. Шукану площу можна обчислити й так:

$$1)\ S = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} \rho d\rho + 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho d\rho .$$

$$2)\ S = 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho d\rho - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \rho d\rho .$$

5.Знайти площу частини конуса $x^2 + y^2 = 3z^2$ $(z > 0)$, яка знаходиться всередині циліндра $x^2 + y^2 = 4y$ (рис.5).

Використаємо формулу $\sigma = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$

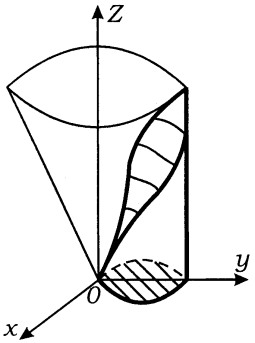


Рис.5

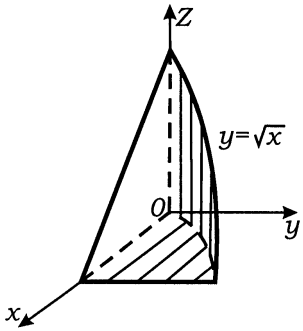


Рис.6

З рівняння конуса $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}}$, а $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}}$. Тоді $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=$

$=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{3(x^2+y^2)}+\dfrac{y^2}{3(x^2+y^2)}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Оскільки

$D=\{\rho,\varphi \mid 0\le\varphi\le\pi, 0\le\varphi\le 4\sin\varphi\}$, то $\sigma=\iint\limits_{(D)}\dfrac{2}{\sqrt{3}}dxdy=$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{(D)}dxdy=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{4\sin\varphi}\rho d\rho=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_0^{\pi}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{4\sin\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{16}{\sqrt{3}}\int\limits_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi=\frac{8}{\sqrt{3}}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{8}{\sqrt{3}}\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}.$$

Область (D) інтегрування обмежена колом $x^2+(y-2)^2=4$, тому задачу можна розв'язати зовсім просто:

$$\sigma=\iint\limits_{(D)}\frac{2}{\sqrt{3}}dxdy=\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{(D)}dxdy=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi 2^2=\frac{8}{\sqrt{3}}\pi.$$

6. Обчислити $\iiint\limits_{(V)}y\cos(z+x)dxdydz$, якщо область інтегрування

$V=\left\{x,y,z \,\middle|\, y\le\sqrt{x}, y\ge 0, z\ge 0, x+z\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$ (рис.6).

Область (V) обмежена поверхнями $y=\sqrt{x}, y=0, z=0, x+z=\dfrac{\pi}{2}$.

Таким чином, $V=\left\{x,y,z \,\middle|\, 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\sqrt{x}, 0\le z\le\dfrac{\pi}{2}-x\right\}$, а

$$\iiint\limits_{(V)}y\cos(z+x)dxdydz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int\limits_0^{\sqrt{x}}dy\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-x}y\cos(z+x)dz=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}y\sin(z+x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}y(1-\sin x)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{x}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(1-\sin x)dx=\begin{vmatrix}u=x, du=dx\\ dv=(1-\sin x)dx\\ v=x+\cos x\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\,x(x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right).$$

7.Обчислити $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)dxdydz$, якщо область інтегрування $V=\{x,y,z \mid x^2+y^2\ge 2z\ ,\ z\le 2\}$ (рис.7).

Область (V) обмежена поверхнями $x^2+y^2=2z$ *і* $z=2$.

У циліндричних координатах дана область інтегрування

$$V=\left\{\rho,\varphi,z \,\middle|\, 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\rho\le 2, \frac{\rho^2}{2}\le z\le 2\right\}.$$

Тоді $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)dxdydz=\iiint\limits_{(V)}\rho^3 d\rho d\varphi dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho^3 d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz=$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho^3 z\Big|_{\frac{\rho^2}{2}}^2 d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho^3(2-\frac{\rho^2}{2})d\rho=\varphi\Big|_0^{2\pi}(\frac{\rho^4}{2}-\frac{\rho^6}{12})\Big|_0^{2\pi}=\frac{16}{3}\pi.$$

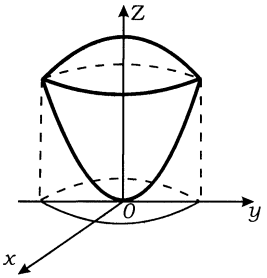


Рис.7

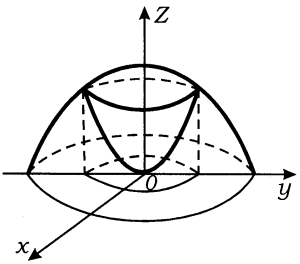


Рис.8

8. Обчислити $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, якщо область інтегрування

$V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le R^2, x^2+y^2\le z^2\}$ (рис.8).

Область (V) обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=R^2$ і конусом $x^2+y^2=z^2$.У сферичних координатах дана область інтегрування

$V=\left\{(\rho,\varphi,\theta)\,\middle|\,0\le\varphi\le 2\pi, \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le R\right\}$, а шуканий

інтеграл $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\theta d\theta\int\limits_0^R\rho^4 d\rho=$

$$=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\sin\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^R=\frac{2}{5}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\ \pi R^5.$$

9. Обчислити об'єм тіла, обмеженого сферою $x^2+y^2+z^2=4$ і параболоїдом $x^2+y^2=3z$ (в середині параболоїда) (рис.9).

Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases}x^2+y^2+z^3=4,\\ x^2+y^2=3z\end{cases}$, отримаємо $z_1=1, z_2=-4$. Таким чином, сфера і параболоїд перетинаються в площині $z=1$ по колу $\begin{cases}x^2+y^2=3,\\ z=1\end{cases}$, тому область інтегрування

$$V=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2\le 3, \frac{x^2+y^2}{3}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}.$$

Оскільки область (D) інтегрування є круг, то обчислення будемо виконувати в циліндричних координатах.

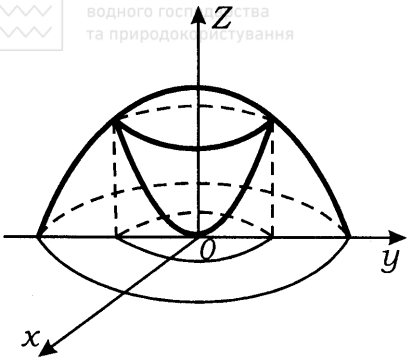


Рис.9

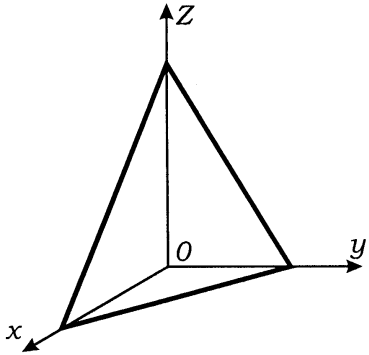


Рис.10

У циліндричних координатах область інтегрування

$V = \{(\rho,\varphi,z)\,|\, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \rho \le \sqrt{3}, \frac{\rho^2}{3} \le z \le \sqrt{4-\rho^2}\}$, а шуканий об'єм $V = \iint\limits_{(D)} (\int\limits_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} dz)\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{(D)} (\sqrt{4-\rho^2} - \frac{\rho^2}{3})\rho d\rho d\varphi =$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-\rho^2} - \frac{\rho^2}{3})\rho d\rho = \varphi\Big|_0^{2\pi} (-\frac{1}{2}\frac{(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3/2} - \frac{\rho^4}{3\cdot 4})\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{19}{6}\pi \text{ (куб.од).}$$

10. Знайти момент інерції однорідної піраміди, обмеженої площинами $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$, відносно координатної площини Oxy (рис.10).

Шуканий момент інерції

$$J_{Oxy} = \iiint\limits_{(V)} z^2 \gamma(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} z^2 dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{z^3}{3}\Big|_0^{1-x-y} dy = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)^3 dy = -\frac{1}{12}\int\limits_0^1 (1-x-y)^4\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{12}\int\limits_0^1 (1-x)^4 dx = -\frac{1}{60}(1-x)^5\Big|_0^1 = \frac{1}{60}.$$

Самостійна робота

Завдання 1.У подвійному інтегралі $\iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy$ знайти межі інтегрування повторних інтегралів по заданих областях

1. $D = \{(x, y) \mid y \ge x, xy \le 1, y \le 2, x \ge 0\}$.
2. $D = \{(x, y) \mid y \ge -x, x^2 + y^2 \le 2x\}$.
3. $D = \{(x, y) \mid y \ge x, xy \ge 1, y \le 2\}$.
4. $D = \{(x, y) \mid x \le 2, x \ge 1, y \ge x, y \le 2x\}$.
5. $D = \{(x, y) \mid x \ge 0, x + y \le 6, y \ge 2x\}$.
6. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le x\}$.
7. $D = \{(x, y) \mid x + y \le 1, x - y \le 1, x \ge 0\}$.
8. $D = \{(x, y) \mid y \le 2x, 2y \ge x, xy \le 2\}$.
9. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le y\}$.
10. $D = \{(x, y) \mid y \le x, x + y \le 1, y \ge 0\}$.
11. $D = \{(x, y) \mid y \le x^2, xy \le 8, y \ge 1\}$.
12. $D = \left\{(x, y) \mid y \le x, y \ge \frac{x}{2}, x \le 4,\right\}$.
13. $D = \left\{(x, y) \mid y \le 4 - (x-1)^2, x \ge 0, y \ge \frac{3}{2}x\right\}$.
14. $D = \left\{(x, y) \mid y \le 2x, y \ge \frac{x}{2}, xy \le 2\right\}$.
15. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1, y \ge x, x \ge 0\}$.
16. $D = \{(x, y) \mid y \le x, xy \ge 1, x \le 2\}$.
17. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2y\}$.
18. $D = \{(x, y) \mid y \ge x, x^2 + y^2 \le 2Rx\}$.

19. $D = \{(x, y) \mid y \le x, xy \le 1, y \ge 0, x \le 2\}$.

20. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$.

21. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2, x^2 \le y\}$.

22. $D = \{(x, y) \mid x^2 \le y - 1, x \ge 0, x + y \le 2\}$.

23. $D = \{(x, y) \mid x \ge 0, y \le x^2, x^2 + y^2 \le 2\}$.

24. $D = \{(x, y) \mid x^2 < y, x^2 + y^2 \le 2y, x \ge 0\}$.

25. $D = \{(x, y) \mid y \le x, y \ge x^2\}$.

26. $D = \{(x, y) \mid y - 1 \le x^2, y + x \le 2, x \ge 0, y \ge 0\}$.

27. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2, y \le x^2, y \ge 0\}$.

28. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2, y \le x^2, y \ge 0\}$.

29. $D = \{(x, y) \mid y \le x, x^2 + y^2 \le 2Rx\}$.

30. $D = \{(x, y) \mid x + y \le 1, y \ge x^2, xy \le -1\}$.

Завдання 2. Змінити порядок інтегрування в повторних інтегралах

1. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy$.

2. $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x, y)\,dx$.

3. $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$.

4. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx$.

5. $\int_0^R dy \int_y^{R+\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y)\,dx$.

6. $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x, y)\,dy$.

7. $\int_0^2 dx \int_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} f(x, y)\,dy$.

8. $\int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} f(x, y)\,dy$.

9. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2+1} f(x, y)\,dy$.

10. $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$.

11. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int\limits_{y}^{\frac{2}{y}} f(x, y)\, dx$.

12. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{8-y}} f(x, y)\, dx$.

13. $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y)\, dy$.

14. $\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}} dy \int\limits_{2y^2}^{y+3} f(x, y)\, dx$.

15. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dy$.

16. $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{x^2}^{8-x^2} f(x, y)\, dy$.

17. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y)\, dy$.

18. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x, y)\, dx$.

19. $\int\limits_{1}^{4} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy$.

20. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{3-x} f(x, y)\, dy$.

21. $\int\limits_{0}^{\frac{3}{4}} dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x, y)\, dy$.

22. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx$.

23. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{y^2} f(x, y)\, dx$.

24. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2+1} f(x, y)\, dy$.

25. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y}^{2y} f(x, y)\, dx$.

26. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} f(x, y)\, dy$.

27. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dx$.

28. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x, y)\, dy$.

29. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dx$.

30. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dx$.

Завдання 3. Обчислити повторні інтеграли

1. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{x} (y+1)\, dy$.

2. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{y} (x^2 + y^2)\, dx$.

3. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{x^2+1} \left(x^2 y - xy^2\right) dy$.

4. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{2x} \left(x + 2xy\right) dy$.

5. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{x^2} \frac{dy}{x^2 + y^2}$.

6. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{y^2} \frac{dx}{x^2 + y^2}$.

7. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{x^2} \frac{dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

8. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y}^{e} \frac{y}{x} dx$.

9. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y}^{1} e^y dx$.

10. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{x} \cos \frac{y}{x} dy$.

11. $\int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{1}^{\frac{1}{y}} \left(x + y\right) x dx$.

12. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y^2}^{y} \left(x + y\right) dx$.

13. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{1} e^x dy$.

14. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y+1}^{3} xy^2 dx$.

15. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{x^3} e^{\frac{y}{x}} dy$.

16. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2}^{x} \frac{x}{y} dy$.

17. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{e^x} x dy$.

18. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{e^{-x}} x dy$.

19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_{0}^{y} \cos \frac{x}{y} dx$.

20. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x} \left(x + y\right) dy$.

21. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{x^2+1} \frac{y}{x} dy$.

22. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{2} xy^2 dx$.

23. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{4} \frac{x}{y^2} dx$.

24. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{y^2} \frac{dx}{\sqrt{y^2 - x^2}}$.

25. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{x^2} e^{\frac{y}{x}} dy$.

26. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y^2}^{e^2} \frac{y}{x} dx$.

27. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{y^2} \frac{y}{x^2} dx$.

28. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{x} \sin\frac{y}{x} dy$.

29. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{e^{-x}}^{e^x} xy^3 dy$.

30. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{1} (x - 3y) dx$.

Завдання 4. Обчислити подвійний інтеграл, переходячи до полярних координат.

1. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}, D = \{(x, y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.

2. $\iint\limits_D xy^2 dxdy, D = \{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 \le 1, x^2 + y^2 \le 4y\}$.

3. $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2} dxdy, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le a^2\}$.

4. $\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dxdy, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2x\}$.

5. $\iint\limits_D arctg \frac{y}{x} dxdy,$

$D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \ge 1, x^2 + y^2 \le 9, y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}, y \le x\sqrt{3}\right\}$.

6. $\iint\limits_D \ln(1 + x^2 + y^2) dxdy, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$.

7. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

8. $\iint\limits_D \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} dxdy, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

9. $\iint\limits_D ydxdy, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le ax, y \ge 0\}$.

10. $\iint\limits_D dxdy, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le x\}$.

11. $\iint\limits_D \sin(x^2 + y^2) dxdy, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le \pi^2,\}$.

12. $\iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2ay\}$.

13. $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 2x\}$.

14. $\iint\limits_D xdxdy$, $D = \{(x, y) \mid y \le x, x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$.

15. $\iint\limits_D \sqrt{9 - x^2 - y^2}\, dxdy, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 9, y \ge x, y \le x\sqrt{3}\}$.

16. $\iint\limits_D \frac{y}{x} dxdy, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le x\}$.

17. $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le ax\}$.

18. $\iint\limits_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy, D = \{(x, y) \mid y \ge x, x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0\}$.

19. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

20. $\iint\limits_D (1 - x^2 - y^2)\, dxdy$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4y\}$.

21. $\iint\limits_D y^2 dxdy$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4, y \le x, y \ge -x\}$.

22. $\iint\limits_D \cos(x^2 + y^2)\, dxdy$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\pi^2\}$.

23. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2} dxdy, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

24. $\iint\limits_D \ln(x^2 + y^2)\, dxdy$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 9, x > 0, y \ge 0\}$.

25. $\iint\limits_D (x + y)\, dxdy$, $D = \{(x, y) \mid y \ge 0, x^2 + y^2 \le 4y\}$.

26. $\iint\limits_D yx^2 dxdy$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2y\}$.

27. $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2 + 4}\, dxdy, D = \{(x, y) \mid y \ge 0, x^2 + y^2 \le 4\}$.

28. $\iint\limits_D xydxdy$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2y, y \le x\}$.

29. $\iint\limits_{D} x^2 dxdy$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2y\}$.

30. $\iint\limits_{D} y^2 dxdy$, $D = \{(x, y) \mid y \ge -x, y \le x, x^2 + y^2 \le 1\}$.

Завдання 5. Обчислити потрійний інтеграл по вказаних областях

1. $\iiint\limits_{V} yz dxdydz$, $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z \ge 0\}$.

2. $\iiint\limits_{V} \frac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^3}$, $V = \{(x, y, z) \mid x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + y + z \le 1\}$.

3. $\iiint\limits_{V} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dxdydz$, $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.

4. $\iiint\limits_{V} xyz dxdydz$,

$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz, x \ge 0, y \ge 0\}$.

5. $\iiint\limits_{V} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$,

$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \le z^2, x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, z > 0\}$.

6. $\iiint\limits_{V} dxdydz$, $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 2Ry\}$.

7. $\iiint\limits_{V} z^2 dxdydz$, $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \le z, z \le 4\}$.

8. $\iiint\limits_{V} \frac{dxdydz}{(x + y + z + 1)^3}$,

$V = \{(x, y, z) \mid y \le 2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + z \le 3\}$.

9. $\iiint\limits_{V} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$, $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\}$.

10. $\iiint\limits_{V} z dxdydz$, $V = \{(x, y, z) \mid z \le h, (h > 0), x^2 + y^2 \le z^2\}$.

11. $\iiint\limits_V (2x+3y-z)\,dxdydz$,

$V=\{(x,y,z)\mid x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x+y\le 2, z\le 1\}$.

12. $\iiint\limits_V \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dxdydz, V=\{(x,y,z)\mid 4z^2\ge x^2+y^2, x\ge 0, y\ge 0, z\le 1\}$.

13. $\iiint\limits_V x^2y^2\,dxdydz$, $V=\{(x,y,z)\mid x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1, z\ge 0, z\le 4\}$.

14. $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz$, $V=\{(x,y,z)\mid x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

15. $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1, z\ge 0, z\le 3\}$.

16. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, $V=\{(x,y,z)\mid z\le 2, x^2+y^2\le 2z\}$.

17. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz, V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le z\}$.

18. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$

$V=\{(x,y,z)\mid y\ge 0, z\ge 0, z\le a, x^2+y^2\le 2x\}$.

19. $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, $V=\left\{(x,y,z)\,\middle|\, z^2\le \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2), z\le h\right\}$.

20. $\iiint\limits_V dxdydz$,

$V=\{(x,y,z)\mid z\ge 0, x^2+y^2\le 2Rx, x^2+y^2+z^2\le 4R^2\}$.

21. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$,

$V=\{(x,y,z)\mid x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2+z^2\le a^2\}$.

22. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$,

$V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\ge 9, x^2+y^2+z^2\le 16$

23. $\iiint\limits_V z\,dxdydz\ ,V=\{x,y,z \mid z\ge 0, x^2+y^2+z^2\le R^2\}$.

24. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz\ ,V=\{x,y,z \mid z\ge 0, x^2+y^2+z^2\le R^2\}$.

25. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz, V=\{x,y,z \mid x^2+y^2\le z^2, z\le 1\}$.

26. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz\ ,V=\{x,y,z \mid x^2+y^2\le 2z, z\le 2\}$.

27. $\iiint\limits_V z(x^2+y^2)\,dxdydz\ ,V=\{x,y,z \mid x^2+y^2\le 2y, z\ge 0, z\le a\}$.

28. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz\ ,V=\{x,y,z \mid x^2+y^2+z^2\le 2x\}$.

29. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz, V=\{x,y,z \mid x^2+y^2+z^2\le 2y\}$.

30. $\iiint\limits_V xy\,dxdydz\ ,V=\{x,y,z \mid z\ge 0, x^2+y^2\le 1, x^2+y^2+z^2\le 4\}$.

Завдання 6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями.

Зробити рисунок тіла і його проекції на площину Oxy (області інтегрування).

1. $y=0$, $y=4$, $x=\sqrt{25-y^2}$; $z=0$, $z=x$.
2. $z=9-y^2$, $x^2+y^2=9$; $z=0$.
3. $x^2+y^2=4$; $z=0$, $z=4-x-y$.
4. $x^2+y^2=4$; $z=0$, $y+z=2$.
5. $z^2=xy$, $x+y=2$; $z=0$.
6. $x^2+y^2=a^2$, $z=0$; $x+y+z=2a$.
7. $x^2+y^2=a^2$, $z=0$; $z=x$.
8. $az=a^2-x^2-y^2$, $z=0$.
9. $y=x^2$; $z=0$, $z=1-y$.
10. $y=ax^2$, $z=0$; $z=a-x$, $y=0$.

11. $x^2+y^2=4az,\ y^2=ax,\ x=3a$.

12. $z^2=(x-a)^2,\ x^2+y^2=a^2$.

13. $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=2x$.

14. $z=x^2+y^2;\ z=1$.

15. $x^2+y^2=3z,\ x^2+y^2+z^2=4$.

16. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ z^2=x^2+y^2$.

17. $x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2=z^2$.

18. $y=x^2,\ x^2+y^2=z;\ z=0,\ y=1$.

19. $y^2=4a-3ax,\ y^2=ax,\ z=\pm h$.

20. $x^2+y^2=2ax,\ x^2+y^2=2az,\ z=0$.

21. $x^2+y^2=ax,\ x^2+y^2+z^2=a^2$.

22. $z+x^2+y^2=1,\ z=0$.

23. $x^2+y^2+z^2=2z,\ x^2+y^2=2-z$.

24. $x^2+y^2=4z,\ x^2+y^2+z^2=12$.

25. $x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2+z^2=8z$.

26. $x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2+z^2=2z$.

27. $x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2=6-z$.

28. $x^2+y^2=Rx,\ x^2+y^2+z^2=R^2$.

29. $y^2+z^2=x,\ y=x,\ z=0$.

30. $az=x^2+y^2,\ z=0,\ x^2+y^2=2ax$.

Завдання 7. Обчислити площі поверхонь або плоских фігур

1. Обчислити площу тієї частини поверхні конуса $x^2+y^2=z^2$, яка відсікається циліндром $x^2+y^2=2ax$.

2. Обчислити площу тієї частини площини $x+y+z=2a$, яка лежить в першому октанті і обмежена циліндром $x^2+y^2=a^2$.

3. Обчислити площу поверхні сферичного сегмента (меншого), якщо радіус сфери a, а радіус основи сегмента b.

4. Обчислити площу частини поверхні параболоїда $2z = x^2 + y^2$, вирізаної циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

5. Обчислити площу поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, вирізаної циліндром $x^2 + y^2 = R^2 \ (R \le a)$.

6. Обчислити площу частини поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, яка вирізається циліндром $x^2 + y^2 = 2ay$.

7. Обчислити площу частини поверхні конуса $y^2 = x^2 + z^2$, вирізану циліндром $x^2 + z^2 = 2z$.

8. Знайти частину поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, яка знаходиться між площинами $x = -8$, $x = 6$.

9. Знайти площу частини поверхні конуса $y^2 + z^2 = x^2$, яка відсікається циліндром $x^2 = 2py$.

10. Знайти частину поверхні гіперболічного параболоїда $xy = z^2$, вирізану циліндром $x^2 + y^2 = R^2$.

11. Обчислити частину поверхні еліпсоїда $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$, вирізану циліндром $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

12. Обчислити частину поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, вирізану циліндром $x^2 + y^2 = 2x$.

13. Знайти частину поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, вирізану поверхнею $x^2 + y^2 = 1$.

14. Знайти площу частини півсфери $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, зовнішньої по відношенню до параболоїда $x^2 + y^2 + z = 10$.

15. Обчислити площу тієї частини поверхні $x^2 + z^2 = ay$, яка знаходиться в першому октанті і обмежена площиною $y = 2a$.

16. Знайти площу частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, зовнішньої по відношенню до циліндра $x^2 + y^2 = b^2 \ (a > b)$.

17. Обчислити площу тієї частини параболоїда $z=\left(\frac{1}{2a}\right)(x^2+y^2)$, яка обмежена площинами $y=x\cdot tg\alpha$; $y=0$; $z=0$; $z=\frac{a}{2}$, $\left(a>0;\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

18. Обчислити площу поверхні сфери радіуса R.

19. Обчислити площу бічної поверхні конуса $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, який стоїть на площині Oxy.

20. Обчислити площу частини сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$, вирізану циліндром $x^2+y^2=R^2\ (R<a)$ і яка знаходиться зовні циліндра.

21. Знайти площу області, яка знаходиться зовні кола $\rho=2$ і всередині кардіоїди $\rho=2(1+\cos\varphi)$.

22. Знайти площу області, яка знаходиться всередині кола $\rho=4\sin\theta$ і зовні лемніскати $\rho^2=8\cos 2\varphi$.

23. Знайти площу області, обмеженої кривими $\rho=a(1+\cos\varphi)$ і $\rho=a\cos\varphi$.

24. Знайти площу області, обмеженої лініями $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=2$.

25. Знайти площу області, обмеженої лініями $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=0$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

26. Знайти площу області, обмежену лініями $x^2+y^2=2ax$, $x^2+y^2=ax$.

27. Знайти площу, обмежену лініями $x^2+y^2=R^2$, $x^2+y^2=2Ry$, $x=0$.

28. Знайти площу фігури, обмежену лініями $x^2+y^2=2ax$ і $x^2+y^2=2ay$.

29. Знайти площу, обмежену лініями $xy=a^2$, $x^2=ay$, $y=2a$, $x=0\ (a>0)$.

30. Знайти площу області, обмеженої колами $x^2 + y^2 = a^2$ і $x^2 + y^2 = 2ay$ (яка містить точку $A\left(0; \frac{a}{2}\right)$).

Завдання 8. Застосування подвійного інтеграла в механіці.

1. Знайти координати центра маси плоскої області, обмеженої лініями $\rho = 1$ (зовнішня частина) і $\rho = 1 + \cos\varphi$ (внутрішня частина).

2. Знайти момент інерції кардіоїди $\rho = 1 + \cos\varphi$ по відношенню до полюса.

3. Знайти момент інерції області, обмеженої лемніскатою $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ по відношенню до полюса.

4. Знайти координати однорідної плоскої області, обмеженої лініями $x^2 + y^2 = a^2$, $y = 0$, $(y > 0)$.

5. Знайти координати центра маси однорідної площі кардіоїди $\rho = a(+\cos\varphi)$.

6. Знайти момент інерції кардіоїди $\rho = a(-\cos\varphi)$ по відношенню до полюса.

7. Знайти статичний момент однорідного півкруга, який лежить в площині Oxy, відносно діаметра.

8. Знайти момент інерції квадрата з стороною a, поверхнева густина якого пропорційна y, відносно однієї з вершин.

9. Знайти координати центра маси однорідної пластини, обмеженої параболою $y^2 = 2x$ і прямою $x = 2$.

10. Знайти момент інерції круга радіуса R відносно центра.

11. Знайти момент інерції круга радіуса R відносно діаметра.

12. Знайти координати центра маси плоскої однорідної пластинки, обмеженої колом $x^2 + y^2 = R^2$ і двома радіусами $y = 0$ і $y = x$.

13. Знайти статичний момент однорідного прямокутника з сторонами a і b відносно сторони b.

14. Знайти масу квадратної пластинки з стороною a $(0 \le x \le a, 0 \le y \le a)$, якщо густина речовини пластинки в кожній точці пропорційна відстані цієї точки до однієї з вершин квадрата.

15. Знайти координати центра маси однорідної пластини, обмеженої лініями $ay = x^2$ і $x + y = 2a$ $(y > 0)$.

16. Знайти масу однорідної пластини, обмеженої лінією $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ $(x\ge 0, y\ge 0)$.

17. Знайти момент інерції однорідної пластини, обмеженої лініями $y=0$, $x=0$ і $x^2+y^2=a^2$ відносно осі OX.

18. Знайти момент інерції однорідної пластини, обмеженої кардіоїдою $\rho=a(1+\cos\varphi)$ відносно осі Ox.

19. Знайти момент інерції однорідної пластини, обмеженої кардіоїдою $\rho=a(1+\cos\varphi)$ відносно початку координат.

20. Знайти момент інерції однорідної пластини, обмеженої лініями $x=0$, $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ і $y=0$ відносно осі Oy.

21. Знайти масу однорідної пластини, обмеженої лемніскатою $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

22. Знайти статичний момент однорідної пластини, обмеженої лініями $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$, $x=0$, $y=0$ відносно осі Ox.

23. Знайти момент інерції однорідного прямокутника зі сторонами a і b відносно сторони a.

24. Знайти статичний момент квадрата з стороною a, поверхнева густина якого рівна y, відносно сторін, які співпадають з осями координат.

25. Знайти момент інерції однорідного півкруга $x^2+y^2=a^2$, $y\ge 0$ відносно осі OX.

26. Знайти масу однорідної пластини, обмеженої колом $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$.

27. Знайти масу однорідної області, обмеженої лініями $\rho=1$ (зовнішня частина) і $\rho=1+\cos\varphi$ (внутрішня частина).

28. Знайти координати центра маси однорідної чверті круга $x^2+y^2=R^2$ $(x\ge 0; y\ge 0)$.

29. Знайти статичний момент квадратної пластинки з стороною a $(0\le x\le a; 0\le y\le a)$ відносно осі Oy, якщо густина речовини пластинки в кожній точці пропорційна відстані цієї точки від однієї з вершин.

30. Знайти масу однорідної пластинки, обмеженої кардіоїдою $\rho=a(1-\cos\varphi)$.

Завдання 9. Застосування потрійного інтеграла в механіці.

1. Знайти центр маси однорідного тіла, обмеженого параболоїдом $z = x^2 + y^2$, циліндричною поверхнею $x^2 + y^2 = 4$ і площиною Oxy.

2. Знайти центр маси однорідного тіла, обмеженого конічною поверхнею $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і площиною $z = h$.

3. Знайти центр маси однорідного тіла, обмеженого параболоїдом $x^2 + y^2 = 2z$ і площиною $z = h$.

4. Знайти центр маси однорідного тіла, обмеженого конічною поверхнею $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, циліндричною поверхнею $x^2 + y^2 = 9$ і площиною $z = 0$.

5. Знайти масу піраміди, обмеженої координатними площинами і площиною $x + y + z = a$, якщо густина в кожній її точці чисельно дорівнює абсцисі x цієї точки.

6. Знайти масу піраміди, обмеженої координатними площинами і площиною $x + y + z = a$, якщо густина в кожній її точці чисельно дорівнює добутку xy абсциси і ординати цієї точки.

7. Знайти масу тіла, обмеженого площиною $z = 0$, циліндричною поверхнею $x^2 + y^2 = 9$ і конічною поверхнею $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, якщо густина в кожній її точці чисельно рівна відстані цієї точки до осі Oz.

8.Знайти момент інерції однорідної піраміди, обмеженої координатними площинами і площиною $x + y + z = a$ відносно осі Oz.

9. Знайти момент інерції однорідного циліндра $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$ відносно осі Oy.

10. Знайти центр маси однорідного тіла, обмеженого параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$, циліндричною поверхнею $x^2 + y^2 = R^2$ і площиною $z = 0$.

11. Знайти цент маси однорідної півкулі, обмеженої поверхнями $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ і $z = 0$.

12. Знайти координати центра маси однорідного тіла, обмеженого конусом $z^2 = x^2 + y^2$ і площиною $z = 0$.

13. Знайти координати центра маси однорідного тіла, обмеженого поверхнями $z = 1$ і $z = x^2 + y^2$.

14. Знайти момент інерції однорідного тіла, обмеженого параболоїдом обертання $x^2 + y^2 = 2az$ і площиною $z = h$, відносно осі Oz.

15. Знайти центр маси однорідного параболоїда $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

16. Знайти масу кулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$, якщо густина розподілу маси в кожній точці дорівнює її відстані до початку координат.

17. Знайти масу кільця між колами радіусів $R > r$, якщо густина розподілу маси пропорційна відстані від центра.

18. Знайти момент інерції циліндра радіуса R, висотою h відносно діаметра основи.

19. Знайти масу кулі радіуса R, якщо густина розподілу маси обернено пропорційна квадрату відстані точки до початку координат.

20. Знайти центр маси тіла, обмеженого параболоїдом $y^2 + z^2 = 4x$ і площиною $x = 2$.

21. Знайти центр маси прямого кругового конуса з висотою h і радіусом основи R, якщо густина дорівнює відстані точки до основи конуса.

22. Знайти момент інерції однорідної кулі радіуса $R = 1$ відносно її центра.

23. Знайти координати центра маси однорідного тіла, обмеженого параболоїдом $y = 3 - x^2 - z^2$ і площиною $y = 0$.

24. Знайти момент інерції відносно координатної площини $z = 0$ тіла, обмеженого конусом $z^2 = y^2 + x^2$ і площиною $z = h$ $(h > 0, x > 0)$.

25. Знайти момент інерції відносно початку координат тіла, обмеженого параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і площиною $z = 4$.

26. Знайти момент інерції неоднорідної кулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ відносно її діаметра, якщо густина кулі в кожній точці $M(x, y, z)$ дорівнює відстані цієї точки до центра кулі.

27. Визначити момент інерції однорідного порожнинного кругового циліндра відносно його осі (вісь Oz). Висота циліндра рівна h см, внутрішній радіус a см, зовнішній b см.

28. Знайти масу однорідного тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

29. Визначити момент інерції відносно осі Oz тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$.

30. Знайти центр маси однорідної півкулі радіуса R.

Теоретичні питання

1. Подвійний інтеграл

1.1. Задача про об'єм циліндричного тіла.
1.2. Задача про масу неоднорідної плоскої пластини.
1.3. Означення подвійного інтеграла.
1.4. Властивості подвійного інтеграла.
1.5.Обчислення подвійного інтеграла (основні типи областей інтегрування).
1.6. Обчислення подвійного інтеграла.
1.7. Подвійний інтеграл у полярних координатах.
1.8.Обчислення площ плоских фігур за допомогою подвійних інтегралів.
1.9. Обчислення об'ємів тіл за допомогою подвійних інтегралів.
1.10. Обчислення площ поверхонь за допомогою подвійних інтегралів.
1.11. Обчислення мас плоских неоднорідних фігур.
1.12. Обчислення статичних моментів і координат центрів маси неоднорідних плоских фігур.
1.13. Обчислення моментів інерції неоднорідних плоских фігур.

2. Потрійний інтеграл

2.1. Задача про масу неоднорідного просторового тіла.
2.2. Означення потрійного інтеграла.
2.3. Обчислення потрійного інтеграла.
2.5. Властивості потрійного інтеграла.
2.6. Потрійний інтеграл у циліндричних координатах.
2.7. Потрійний інтеграл у сферичних координатах.
2.8. Обчислення обємів тіл за допомогою потрійного інтеграла.
2.9. Обчислення маси неоднорідного тіла.
2.10. Обчислення статичних моментів і координат центра маси неоднорідного тіла.
2.11. Обчислення моментів інерції неоднорідного тіла.

Приклади тестового завдання

1. Обчислити $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2x}(3x+2y)dy.$

а) I=1. б) I=2. в) I=-2.

2. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^3}^{x} f(x,y)dy.$

а) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx.$ б) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{y} f(x,y)dx.$ в) $\int\limits_1^0 dy\int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{y} f(x,y)dx.$

3. Обчислити $\iint\limits_{(D)} e^{x+y}dxdy$ по області *(D)*, обмеженій лініями $y=e^x$, $y=2$, $x=0$.

а) $I=3.$ б) $I=2.$ в) $I=e.$

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $y=3-x^2$, $y=x-3.$

а) $S=\dfrac{15}{16}.$ б) $S=\dfrac{125}{6}.$ в) $S=\dfrac{17}{9}.$

5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=4-x^2-y^2$, $x=0, y=0$, $z=0.$

а) $V=\pi.$ б) $V=\dfrac{4}{3}.$ в) $V=\dfrac{3}{5}.$

6. Обчислити $I=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy\int\limits_0^1 dz.$

а) $I=2.$ б) $I=\dfrac{1}{3}.$ в) $I=\dfrac{1}{8}.$

7. Казан має форму параболоїда обертання $az=x^2+y^2.$ Яка його місткість (у літрах), якщо висота казана $h=25$ см, а діаметр верхньої частини $d=40\,\text{см}^2$.

а) $V\approx 10$ л. б) $V\approx 18$ л. в) $V\approx 16$ л.

8. Обчислити масу m тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $x^2+y^2=1$, якщо густина в кожній його точці дорівнює відстані цієї точки до осі Oz.

а) $m=\dfrac{\pi}{2}$. б) $m=4$. в) $m=1{,}5$.

Питання для самоконтролю (розділ 11)

1. Криволінійні інтеграли I роду

1.1. Як знайти масу неоднорідної дуги?

1.2.Дайте означення криволінійного інтеграла I роду і сформулюйте теорему його існування.

1.3.Виведіть формулу для обчислення криволінійного інтеграла I роду, якщо область інтегрування задана у декартовій системі координат рівнянням $y = f(x), x \in [a, b]$.

1.4.Запишіть формулу для обчислення криволінійного інтеграла I роду, якщо область інтегрування задана:

а) рівняннями $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [t_0, T]$;

б)рівнянням $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\varphi_0, \Phi]$ у полярній системі координат.

1.5.Запишіть формули для диференціала дуги. Що вони визначають?

1.6.Напишіть формули для обчислення маси статичних моментів, центра маси і моментів інерції неоднорідної дуги.Що визначає вираз $\gamma(x. y)dl$?

2. Криволінійний інтеграл II роду

2.1. Дайте означення криволінійного інтеграла II роду.

2.2. Який механічний зміст криволінійного інтеграла II роду?

2.3.Чи залежить криволінійний інтеграл II роду від напрямку інтегрування?

2.4.Виведіть формулу для обчислення криволінійного інтеграла II роду, якщо область інтегрування задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [t_0, T]$.

2.5.Запишіть формулу для обчислення криволінійного інтеграла II роду, якщо область інтегрування задана рівнянням $y = f(x), x \in [a, b]$ у декартових координатах.

2.6.Запишіть формулу Гріна. Яке її призначення?

2.7.Як застосувати формулу Гріна до обчислення площ плоских фігур?

2.8.Яка необхідна і достатня умови незалежності криволінійного інтеграла II роду від шляху інтегрування?

2.9.Як записати і обчислити криволінійний інтеграл II роду у випадку його незалежності від шляху інтегрування?

2.10.Запишіть формулу для знаходження первісної функції $U = U(x.y)$.

Питання для самоконтролю (розділ 12)

1.Поверхневий інтеграл I роду

1.1.Як знайти масу неоднорідної поверхні?

1.2.Дайте означення поверхневого інтеграла I роду по заданій поверхні. Сформуйте теорему про його існування.

1.3.Запишіть диференціал поверхні заданої рівнянням $z = \varphi(x.y)$.

1.4.Запишіть формулу для обчислення поверхневого інтеграла I роду.

1.5.Як знайти площу поверхні заданої рівнянням $z = \varphi(x.y)$?

1.6.Як знайти масу неоднорідної поверхні? Що означає вираз $\gamma(x.y.z)dP$?

1.7.Запишіть формулу для обчислення статичних моментів і координат центра маси неоднорідної поверхні.

1.8.Запишіть формули для обчислення моментів інерції неоднорідної поверхні.

2. Поверхневий інтеграл II роду

2.1.Які поверхні називають односторонніми і двохсторонніми? Наведіть приклади.

2.2.Дайте означення поверхневого інтеграла II роду.

2.3.Запишіть формулу для обчислення поверхневого інтеграла II роду.

2.4.Запишіть формулу Стокса і поясніть її застосування.

2.5.Запишіть формулу Остроградського і поясніть її застосування.

2.6.Що характеризує похідна скалярного поля функції $u = u(x.y.z)$ за напрямком вектора. Запишіть формулу для її обчислення.

2.7.Що означають у цій формулі числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$?

2.8.Який зв'язок між градієнтом скалярного поля і його похідною за напрямком вектора?

2.9.Що визначає потік вектора через поверхню? Запишіть формулу для його обчислення.

2.10.Що визначає циркуляція векторного поля? Запишіть формулу для її обчислення.

2.11.Що визначає дивергенція векторного поля ? Запишіть формулу для її обчислення.

2.12.Що визначає ротор (вихор) векторного поля? Запишіть формулу для його обчислення.

2.13.Які векторні поля називаються соленоїдальними і які потенціальними?

2.14.Що таке оператор Гамільтона? Наведіть приклади його використання.

Приклади розв'язання задач

1.Обчислити криволінійний інтеграл I роду $\int\limits_{(L)} \frac{dl}{x^2+y^2+1}$ вздовж прямої, яка проходить через точки $A(1,2)$ і $B(2,3)$.

Запишемо рівняння прямої AB : $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$, $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{3-2}$.

Звідки $x-1=y-2, y=x+1, x\in[1,2]$. Оскільки $y'=1$, а $dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{2}dx$, то $\int\limits_{(L)} \frac{dl}{x^2+y^2+1}=\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{2}dx}{x^2+(x+1)^2+1}=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+x+1}=\left|\begin{array}{l} t=\frac{1}{2}(x^2+x+1)'=x+\frac{1}{2}, \\ t=x+\frac{1}{2}, x=t-\frac{1}{2}, dx=dt \end{array}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_{3/2}^{5/2} \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+(t-\frac{1}{2})+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_{3/2}^{5/2} \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}\Bigg|_{3/2}^{5/2}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}(arctg\frac{5}{\sqrt{3}}-arctg\frac{3}{\sqrt{3}})=\sqrt{\frac{2}{3}}arctg\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

2.Обчислити $\int\limits_{(L)}\sqrt{x^2+y^2}dl$, якщо крива є коло $x^2+y^2=2ax\,(a>0)$.

Проведемо обчислення у полярних координатах : $\rho^2=2a\rho\cos\varphi$, звідки $\rho=2a\cos\varphi$ - рівняння даного кола, причому $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Оскільки $\rho'_\varphi=-2a\sin\varphi$, то $dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2_\varphi}d\varphi=$

$=\sqrt{4a^2\cos^2\varphi+4a^2\sin^2\varphi}d\varphi=2ad\varphi$. Знаходимо $\int\limits_{(L)}\sqrt{x^2+y^2}dl=$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho\cdot 2ad\varphi=4a^2\sin\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=8a^2.$$

3. Знайти координати центра маси однорідної циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

Циклоїда симетрична відносно прямої $x=\pi$, тому $x_G=\pi$. Знайдемо $y_G=\frac{S_{Ox}}{m}$. Циклоїда однорідна, тому приймемо, що її густина $\gamma(x,y)=1$. Оскільки $x'_t=a(1-\cos t)$, $y'_t=a\sin t$, то $dl=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=a\sqrt{2(1-\cos t)}dt=$

$=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$. Тоді маса $m=\int\limits_{(L)}dl=\int\limits_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a$.

Статичний момент $S_{Ox}=\int\limits_{(L)}ydl=\int\limits_0^{2\pi}a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}dt=$

$$=4a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt=-8a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})d\cos\frac{t}{2}=-8a^2\Big(\cos\frac{t}{2}-$$

$$-\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\Big)\Big|_0^{2\pi}=\frac{32}{3}a^2.$$

Отже, $y_G = \dfrac{\frac{32}{3}a^2}{8a} = \dfrac{4}{3}a$, а $G(\pi, \dfrac{4}{3}a)$ - шуканий центр маси.

4. Обчислити криволінійний інтеграл II роду $\int\limits_{(L)} y^2dx + x^2dy$, якщо (L) - верхня половина еліпса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, яка пробігається за стрілкою годинника.

Оскільки $dx = -a\sin tdt$, а $dy = b\cos tdt$, то $\int\limits_{(L)} y^2dx + x^2dy =$

$$= \int\limits_{\pi}^{0} [illegible]^2 \sin^2 t(-a\sin t) + a^2\cos^2 tb\cos t\,\underline{dt} = ab^2\int\limits_{\pi}^{0}(1-\cos^2 t)d\cos t +$$

$$+ a^2b\int\limits_{\pi}^{0}(1-\sin^2 t)d\sin t = ab^2(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3})\Big|_{\pi}^{0} + a^2b(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3})\Big|_{\pi}^{0} =$$

$$= ab^2\left[(\cos 0 - \frac{1}{3}\cos^3 0) - (\cos\pi - \frac{1}{3}\cos^3\pi\right] + 0 = \frac{4}{3}ab^2.$$

5. Знайти роботу сили $\overrightarrow{F(x,y)} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 + 2xy)\vec{j}$, яку треба виконати при переміщенні матеріальної точки вздовж параболи $y = x^2$ від точки $A(-1,1)$ до точки $B(1,1)$.

Заходимо, що робота $A = \int\limits_{(L)}(x^2 - 2xy)dx + (y^2 + 2xy)dy =$

$$= \left| \begin{matrix} y = x^2,\ dy = 2xdx \\ -1 \le x \le 1 \end{matrix} \right| = \int\limits_{-1}^{1} [illegible]^2 - 2x\cdot x^2 + ((x^2)^2 + 2x\cdot x^2)2x\,\underline{dx} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}(2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + x^2)dx = (2\cdot\frac{x^6}{6} + 4\cdot\frac{x^5}{5} - 2\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= (\frac{x^6}{3} + \frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1} = \frac{34}{15}.$$

6. За допомогою криволінійного інтеграла II роду знайти площу, обмежену астроїдою $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Оскільки $dx = -3a\cos^2 t\sin t dt$, a $dy = 3a\sin^2 t\cos t dt$, то за формулою $S = \frac{1}{2}\oint\limits_{(L)} xdy - ydx$ отримуємо $S = 4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cdot$

$$\cdot\cos t + a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t)dt = 6a^2\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)dt =$$

$$= 6a^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{\pi/2}4\cos^2 t\sin^2 t dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2t dt = \frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{3}{4}a^2(t - \frac{1}{4}\sin 4t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{8}\pi a^2 .$$

7. За формулою Гріна обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{(L)}(xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, якщо (L) - коло $x^2 + y^2 = ax$.

Використовуючи формулу Гріна $\oint\limits_{(L)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$

$= \iint\limits_{(D)}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$, оскільки $P(x, y) = xy + x + y$, $Q(x, y) = xy + x - y$,

а $\frac{\partial P}{\partial y} = x + 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = y + 1$, отримаємо $\oint\limits_{(L)}(xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy =$

$$= \iint\limits_{(D)}(y + 1 - x - 1)dxdy = \iint\limits_{(D)}(y - x)dxdy = \left|\begin{matrix} x^2 + y^2 = ax \Rightarrow \rho = a\cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right| =$$

$$= \iint\limits_{(D)}\rho(\sin\varphi - \cos\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin\varphi - \cos\varphi)d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}\rho^2 d\rho =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin\varphi - \cos\varphi)\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{a\cos\varphi}d\varphi = \frac{a^3}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin\varphi - \cos\varphi)\cos^3\varphi d\varphi =$$

$$=\frac{a^3}{3}\left(-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\varphi d(\cos\varphi)-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos^2\varphi)^2 d\varphi\right)=\frac{a^3}{3}\left(-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2}-$$

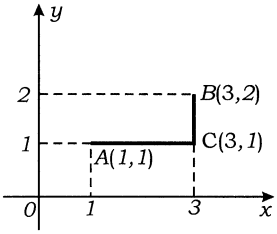
$$-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi=-\frac{a^3}{3\cdot 4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{a^3}{12}\left(\frac{3}{2}\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=-\frac{\pi a^3}{8}.$$

8. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $I=\int_{(1,1)}^{(3,2)}(3x^2-2xy+y^2)dx-(x^2-2xy+3y^2)dy$.

Оскільки $P(x,y)=3x^2-2xy+y^2$, $Q(x,y)=-(x^2-2xy+3y^2)$, а $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x+2y$, то даний інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

Виконаємо інтегрування вздовж ламаної ACB, де $C(3,1)$:



$$I=\int_{(AC)}(3x^2-2xy+y^2)dx-(x^2-2xy+3y^2)dy+$$

$$+\int_{(CB)}(3x^2-2xy+y^2)dx-(x^2-2xy+3y^2)dy=$$

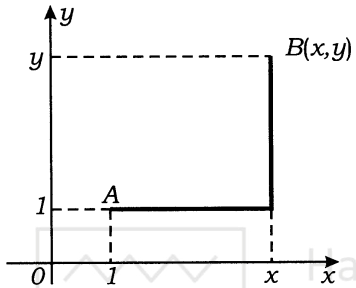
$$=\left|\begin{matrix}(AC): y=1, dy=0,\ 1\le x\le 3,\\ (CB): x=3, dx=0,\ 1\le y\le 2\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_1^3(3x^2-2x+1)dx+\int_1^2(9-6y+3y^2)dy=(x^3-x^2+x)\Big|_1^3-$$

$$-(9y-3y^2+y^3)\Big|_1^2=13.$$

9. Знайти первісну функцію $U(x,y)$, якщо її повний диференціал $dU=6xy\vec{i}+(3x^2-2y)dy$.

Маємо $U(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} 6xydx+(3x^2-2y)dy.$ Оскільки $P(x,y)=6xy$, $Q(x,y)=3x^2-2y$, а $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=6x$, то цей інтеграл не залежить від шляху інтегрування. За початкову точку інтегрування візьмемо точку $A(1,1)$, а за кінцеву – *B(x,y).* Інтегрування виконаємо вздовж ламаної *ACB*, де $C(x,1)$.



Рівняння прямої AC є $y=1, x\in[1,x], dy=0$, а рівняння прямої CB є $x=x,\ y\in[1,y], dx=0$.

Знаходимо

$$U(x,y)=\int\limits_{(1,1)}^{(x,y)} 6xydx+(3x^2-2y)dy=$$

$$=\int\limits_1^x 6xdx+\int\limits_1^y (3x^2-2y)dy=$$

$$=6\frac{x^2}{2}\Big|_1^x+(3x^2y-2\frac{y^2}{2})\Big|_1^y=3x^2y-y^2+C.$$

10.Знайти масу сфери радіуса R, якщо поверхнева густина у кожній її точці дорівнює квадрату відстані точки від деякого її діаметра.

Якщо рівняння сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, а за діаметр взяти вісь Oz, то, виходячи з умови задачі, густина $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2$.

З рівняння сфери $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, а $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$.Тоді $d\sigma=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial x})^2}\,dxdy=$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy=\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Оскільки маса $m=\iint\limits_{(\sigma)}\gamma(x,y,z)d\sigma$, то отримуємо

$$m=2\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)\frac{dxdy}{\sqrt{R-x^2-y^2}}=\left|\begin{matrix}x^2+y^2=R^2\\ \rho=R,0\le\varphi\le 2\pi\end{matrix}\right|=$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^R\frac{\rho^3d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\left|\begin{matrix}\rho=R\sin t,d\rho=R\cos tdt,\\ \rho=0\to t=0,\rho=R\to t=\pi/2\end{matrix}\right|=$$

$$=4\pi\int\limits_0^{\pi/2}\frac{R^3\sin^3 tR\cos t}{R\cos t}dt=-4\pi R^3\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos^2 t)d\cos t=$$

$$=-4\pi R^3(\cos t-\frac{\cos^3 t}{3})\Big|_0^{\pi/2}=\frac{8}{3}\pi R^3.$$

11. За допомогою формули Остроградського-Гаусса обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{(\sigma)}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)d\sigma$, якщо (σ) – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Оскільки $P(x,y,z)=x^3, Q(x,y,z)=y^3, R(x,y,z)=z^3$, а $\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial y}=3y^2, \frac{\partial R}{\partial z}=3z^2$, то за формулою Остроградського-Гаусса

$$\oiint\limits_{(\sigma)}[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]d\sigma=$$

$$=\iiint\limits_{(V)}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz$$ отримуємо $\iint\limits_{(\sigma)}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+$

$$+z^3\cos\gamma)d\sigma=3\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=$$

$$=\left|\begin{matrix}x^2+y^2+z^2=\rho_2, dxdydz=\rho^2\cos\theta d\varphi d\rho d\theta,\\ 0\le\rho\le R,0\le\varphi\le 2\pi,-\pi/2\le\theta\le\pi/2\end{matrix}\right|=$$

$$=3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta\int\limits_0^R\rho^4d\rho=3\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\cdot\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^R=\frac{12}{5}\pi R^5.$$

12. Обчислити циркуляцію векторного поля $\overrightarrow{F(x,y,z)} = xy\vec{i} +$ $+ yz\vec{j} + xz\vec{k}$ вздовж лінії $L = \{x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$.

Циркуляція вектора $\overrightarrow{F(x,y,z)} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} +$ $+ R(X,y,z)\vec{k}$ по замкнутому контуру (L) $Ц = \oint\limits_{(L)} P(x,y,z)dx +$ $+ Q(X,y,z)dy + R(x,y,z)dz$. Оскільки $P(x,y,z) = xy, Q(x,y,z) = yz,$ $R(x,y,z) = xz$, то циркуляція $Ц = \oint\limits_{(L)} xydx + yzdy + xzdz$.

Використаємо параметричне рівняння контура $L: x = \cos t,$ $y = \sin t,\ z = 1 - \cos t - \sin t, t \in [0, 2\pi]$. Знаходимо $dx = -\sin t\, dt,$ $dy = \cos t\, dt,\ dz = (\sin t - \cos t)dt.$

Тоді циркуляція $Ц = \oint\limits_{(L)} xydx + yzdy + xzdz =$

$$= \int\limits_0^{2\pi} [-\cos t \sin^2 t + \sin t(1 - \cos t - \sin t)\cos t + \cos t(1 - \cos t - \sin t) \cdot$$

$$\cdot (\sin t - \cos t)]dt = \int\limits_0^{2\pi} (-3\cos t \sin^2 t + 2\sin t \cos t - \cos^2 t \sin t - \cos^2 t +$$

$$+ \cos^3 t)dt = -\pi.$$

13. Знайти потік векторного поля $\overrightarrow{F(x,y,z)} = x^2\vec{i} + xy\vec{j} + x\vec{k}$ через зовнішню сторону поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2, 0 \le z \le 1$, розміщеного у першому октанті.

Потік $П = \iint\limits_{(\sigma)} x^2 dydz + xydxdz + xdxdy = \left| \begin{array}{c} z = x^2 + y^2, \\ z'_x = 2x, z'_y = 2y \end{array} \right| =$

$$= \iint\limits_{(D)} [x^2(+2x) + xy(+2y) + (-1)x]dxdy = \iint\limits_{(D)} (2x^3 + 2xy^2 - x)dxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le \rho \le 1 \end{array} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 [2\rho^3(\cos^3\varphi + \cos\varphi \sin^2\varphi) - \rho\cos\varphi]d\rho =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2\rho^5}{5}(\cos^3\varphi+\cos\varphi\sin^2\varphi)-\frac{\rho^3}{3}\cos\varphi\right]d\varphi=$$

$$=\frac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi+\frac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\sin\varphi-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{2}{5}(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3})\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{5}\frac{\sin^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\sin\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{5}(1-\frac{1}{3})+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}.$$

Самостійна робота

Завдання 1. Обчислити криволінійні інтеграли I роду

1.1. $\int\limits_{(L)}\frac{dl}{x-y}$, якщо (L) – відрізок прямої $y=\frac{1}{2}x-2$ від точки A(0,-2) до точки B(4,0).

1.2. $\int\limits_{(L)}\frac{y}{\sqrt{x}}dl$, якщо (L) – дуга параболи $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $3\le x\le 8$.

1.3. $\int\limits_{(L)}xdl$, якщо (L) – дуга параболи $y=x^2$ між точками O(0,0) і A(1,1) .

1.4. $\int\limits_{(L)}x^2ydl$, якщо (L) – дуга кола $x^2+y^2=1$, розміщеного в першій чверті .

1.5. $\int\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, якщо (L) є частина прямої , між точками O(0,0) і A(1,2) .

1.6. $\int\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+3}}$, якщо (L) є частини прямої між точками O(0,0) і A(1,2).

1.7. $\int\limits_{(L)}\sqrt{x^2+y^2}dl$, якщо (L) – контур кола $x^2+y^2=ax\,(a>0)$.

1.8. $\int\limits_{(L)} y^2 dl$, якщо (L) – одна арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$,

$y = a(1 - \cos t), (0 \le t \le 2\pi)$.

1.9. $\int\limits_{(L)} (x^2 + y^2) dl$, якщо (L) – коло $x^2 + y^2 = 4$.

1.10. $\int (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl$, якщо (L) – відрізок прямої, яка проходить через точки A(-1,0) і B(0,1).

1.11. $\int\limits_{(L)} \frac{dl}{x - y}$, якщо (L) – відрізок прямої , яка проходить через точки A(0,4) і B(4,0).

1.12. $\int \frac{ydl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, якщо (L) – дуга кардіоїди $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

1.13. $\int\limits_{(L)} arctg \frac{y}{x} dl$, якщо (L) – дуга кардіоїди $\rho = 1 + \cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

1.14. $\int\limits_{(L)} \sqrt{2y} dl$, якщо (L) – перша арка циклоїди x=2(t-$\sin t$) , y=2(1-$\cos t$).

1.15. $\int \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, якщо (L) – відрізок прямої, яка проходить через точки O(0,0) і A(1,2).

1.16. $\int\limits_{(L)} (x + y) dl$, якщо (L) – контур трикутника з вершинами A(1,0), B(0,1) і O(0,0).

1.17. $\int\limits_{(L)} (x + y) dl$, якщо (L) – контур трикутника з вершинами O(0,0), A(-1,0) , B(0,1).

1.18. $\int\limits_{(L)} (x + y) dl$, якщо (L) – дуга лемніскати Бернуллі $\rho^2 = \cos 2\varphi$,

$-\frac{\pi}{4} \le \varphi \ge \frac{\pi}{4}$.

1.19. $\int\limits_{(L)} \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, якщо (L) - коло $x^2+y^2=2y$.

1.20. $\int\limits_{(L)} (x^2+y^2)dl$, якщо (L) – коло $x^2+y^2=4x$.

1.21. $\int (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y})dl$, якщо (L) – частина астроїди $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ між точками A(1,0) і B(0,1).

1.22. $\int\limits_{(L)} y^2 dl$, якщо (L) – перша арка циклоїди $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t, (0\le t\le 2\pi)$.

1.23. $\int\limits_{(L)} (x+y)dl$, якщо (L) – коло $x^2+y^2=2x$.

1.24. $\int\limits_{(L)} (x+y)dl$,якщо (L) – права пелюстка лемніскати $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

1.25. $\int\limits_{(L)} xydl$, якщо (L) – чверть еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, яка лежить у першому квадранті .

1.26. Обчислити $\int\limits_{(L)} \frac{dl}{x+y}$, якщо (L) – відрізок прямої $y=x+2$, що з'єднує точки A(2,4) , B(1,3).

1.27 Обчислити $\int\limits_{(L)} x^2 ydl$, якщо (L) – частина кола радіуса R, яка лежить у першій чверті .

1.28.Обчислити $\int\limits_{(L)} y^2 dl$,якщо (L) перша арка циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t), (0\le t\le 2\pi)$.

1.29.Обчислити $\int\limits_{(L)} \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, якщо (L) – коло $x^2+y^2=2y$.

1.30. Обчислити $\int\limits_{(L)} y^2 dl$, якщо (L) – дуга верхньої половини кола $x^2 + y^2 = R^2$.

Завдання 2.

2.1. Знайти масу чверті еліпса $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, розміщеної у першій чверті, якщо густина $\gamma(x, y) = y$.

2.2. Знайти масу однорідної дуги циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

2.3. Знайти статичний момент відносно осі OX однорідної дуги циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

2.4. Знайти момент інерції відносно осі OX чверті однорідного кола $x = R\cos t$, $y = R\cos t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

2.5. Знайти момент інерції відносно осі OY чверті однорідного кола $x = R\cos t$, $y = R\cos t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

2.6. Знайти масу однорідної ланцюгової лінії $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \le x \le \ln 2$.

2.7 Знайти масу дуги кола $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$, якщо густина в кожній її точці $\gamma(x, y) = y$.

2.8. Знайти масу дуги AB кривої $y = \ln x$, $1 \le x \le 3$, якщо її густина пропорційна квадрату абсциси точки.

2.9.Обчислити довжину дуги евольвенти кола $x = R(\cos t + t\sin t)$, $y = R(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

2.10. Обчислити довжину лінії $y = \ln(1 - x^2)$, $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$.

2.11.Знати довжину дуги параболи $y = 2\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$.

2.12. Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{1}{2}x^2$, $0 \le x \le 1$.

2.13. Знайти довжину кардіоїди $\rho = a(1-\cos\varphi)$.

2.14.Знайти довжину ланцюгової лінії $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \le x \le 1$.

2.15.Знайти масу чверті однорідного кола $x^2 + y^2 = R^2$, яка знаходиться в першому квадранті.

2.16. Знайти центр маси однорідного півкола $x^2 + y^2 = 1$, симетричного відносно осі OX.

2.17. Знайти момент інерції відносно початку координат однорідного відрізка прямої, яка знаходиться між двома точками A(2,0) і B(0,1).

2.18. Знайти статичні моменти відносно осей координат однорідної дуги астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, яка знаходиться в першому квадранті.

2.19. Знайти масу відрізка прямої $y = 2 - x$, який знаходиться між координатними осями, якщо лінійна густина в кожній його точці $\gamma(x, y) = x^2$.

2.20. Знайти моменти інерції відносно координатних осей чверті однорідного кола $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, яка лежить у першому квадранті.

2.21. Знайти довжину однієї арки однорідної циклоїди $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

2.22. Знайти момент інерції відносно осей координат однорідного відрізка прямої $y = 2x$, який знаходиться між точками A(1,2) і B(2,4).

2.23. Знайти момент інерції відносно осей координат однорідного відрізка прямої $4x + 2y - 3 = 0$, якщо $0 \le x \le 2$ (зробити рисунок).

2.24. Знайти масу чверті еліпса $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, яка лежить у першій чверті, якщо лінійна густина $\gamma(x, y) = xy$.

2.25. Знайти статичний момент відносно осі OX однорідної дуги ланцюгової лінії $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$.

2.26. Знайти довжину дуги однієї арки циклоїди $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

2.27. Знайти масу чверті однорідного кола $x^2 + y^2 = 4$, яка знаходиться у першому квадраті.

2.28. Знайти центр маси однорідного півкола $x^2 + y^2 = 1$, симетричного відносно осі OY.

2.29. Знайти масу однорідної дуги ланцюгової лінії $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \le x \le 1$.

2.30. Знайти масу однорідного півкола $x^2 + y^2 = 4$, $y \ge 0$.

Завдання 3. Обчислити криволінійні інтеграли II роду:

3.1. $\int\limits_{(L)} (x - y)dx + (x + y)dy$ вздовж параболи $y = x^2 + 1$ від точки A(0,1) до точки B(1,2).

3.2. $\int\limits_{(L)} (x^2 - y)dx + (x + y^2)dy$ вздовж чверті кола $x^2 + y^2 = R^2$ $(x \ge 0, y \ge 0)$.

3.3. $\int\limits_{(L)} (xy - x^2)dx + xdy$ вздовж параболи $y = x^2 - 1$ від точки A(0,-1) до точки B(1,0).

3.4. $\int\limits_{(L)} xydx - xdy$ вздовж ламаної OAB, якщо O(0,0), A(1,1), B(2,3).

3.5. $\int\limits_{(L)} (x + y)dx - (x^2 - y)dy$ вздовж кубічної параболи $y = x^3$ від точки A(1,1) до точки B(2,8).

3.6. $\int\limits_{(L)} x^2 y - (x^2 - y)dy$ вздовж прямої, яка проходить через точки A(1,1) і B(2,3).

3.7. $\int\limits_{(L)} ydx + \dfrac{x}{y^2}dy$ вздовж лінії $y = e^{-x}$ від точки A(0,1) до точки B(1, $\dfrac{1}{e}$).

3.8. $\int\limits_{(L)} \frac{y}{x}dx - xdy$ вздовж лінії $y = \ln x$ від точки A(1,0) до точки B(e,1).

3.9. $\int\limits_{(L)} xdy - ydx$ вздовж кола $x^2 + y^2 = 4$ у напрямку проти стрілки годинника від точки A(2,0) до точки B(0,2).

3.10. $\int\limits_{(L)} xydx - x^2dy$ вздовж кола $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ $(0 \le t \le \pi)$.

3.11. $\int\limits_{(L)} \frac{y}{x}dx + (x^2 + 1)dy$ вздовж лінії $y = \ln x$ від точки A(1,0) до точки B$(e,1)$.

3.12. $\int\limits_{(L)} xdx + y^2dy$ вздовж верхньої половини еліпса $x = 5\cos t$, $y = 3\sin t$ $(0 \le t \le \pi)$.

3.13. $\int\limits_{(L)} (x^2y - 2x)dx - (xy^2 + 2)dy$ вздовж дуги параболи $y = x^2$ від точки A(1,1) до точки B(2,4).

3.14. $\int\limits_{(L)} (x^2 + y)dx - (x + y^2)dy$ вздовж ламаної ABC, де A(1,1), B(2,2), C(3,4).

3.15. $\int\limits_{(L)} xydx + (x + y)dy$ вздовж параболи $y = x^2 + 1$ від точки A(0,1) до точки (B(1,2).

3.16. $\int\limits_{(L)} xydx + (x + y)dy$ вздовж кола $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ $(0 \le t \le \pi)$, обходячи його проти стрілки годинника.

3.17. $\int\limits_{(L)} \frac{x}{y}dx + xydy$ вздовж лінії $y = e^x$ від точки A(0,1) до точки B$(2, e^2)$.

3.18. $\int\limits_{(L)} (x^2+y)dx-(x+y)dy$ вздовж прямої $y=2x+1$ від точки A(0,1) до точки B(1,3).

3.19. $\int\limits_{(L)} (x-y)dx+xydy$ вздовж лінії $y=\sin x$ від точки O(0,0) до точки A $(\frac{\pi}{2},1)$.

3.20. $\int\limits_{(L)} x^2dy+y^2dx$ вздовж лінії $y=1-x^2$ від точки A(0,1) до точки B(1,0).

3.21. $\int\limits_{(L)} (x-1)dy-ydx$ вздовж прямої $y=2x+1$ від точки A(0,1) до точки B(1,3).

3.22. $\int\limits_{(L)} ydx+(x^2+y)dy$ вздовж ламаної ABC, якщо A(1,1), B(2,2) і C(3,5).

3.23. $\int\limits_{(L)} xydx+xdy$ вздовж лінії $y=\ln x$ від точки A(1,0) до точки B $(2,\ln 2)$.

3.24. $\int\limits_{(L)} xydx-\frac{x}{y}dy$ вздовж лінії $y=e^{-x}$ від точки A(0,1) до точки B $(1,\frac{1}{e})$.

3.25. $\int\limits_{(L)} (x+y)dx-(x-y)dy$ вздовж лінії $y=2^x$ від точки A(0,1) до точки B(1,2)

3.26. $\int\limits_{(L)} ydx+xdy$ вздовж лінії $y=2^{-x}$ від точки A(0,1) до точки B $(1,\frac{1}{2})$.

3.27. $\int\limits_{(L)} (3x-2y)dx-(2x-y)dy$ вздовж параболи $y=\frac{1}{2}x^2$ від точки A(0,0) до точки B $(1,\frac{1}{2})$.

3.28. $\int\limits_{(L)} (x^2+3y)dx$ вздовж дуги параболи $y=x^2$ від точки A(1,1) до точки B(2,4).

3.29. $\int\limits_{(L)} 2xydx-x^2dy$ вздовж дуги параболи $y=\frac{1}{4}x^2$ від точки A $(1,\frac{1}{4})$ до точки B(2,1).

3.30. $\int\limits_{(L)} x^2ydx-(x-y)dy$ вздовж кола $x^2+y^2=R^2$ $(x\geq 0, y\geq 0)$ у напрямку проти стрілки годинника.

Завдання 4.

1*. За допомогою криволінійного інтеграла II роду знайти площі плоских фігур обмежених :

4.1. еліпсом $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\leq t\leq 2\pi$.

4.2. однією аркою циклоїди $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$, $0\leq t\leq 2\pi$.

4.3. астроїдою $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t, 0\leq t\leq 2\pi$.

4.4. кардіоїдою $x=2a\cos t-a\cos 2t,\ y=2a\sin t-a\sin 2t,\ 0\leq t\leq 2\pi$.

4.5. колом $x^2+y^2=R^2$.

2*. Обчислити криволінійні інтеграли II роду

4.6. $\int\limits_{(1,1)}^{(2,3)}(x-y)dx-(x-2y)dy$.

4.7. $\int\limits_{(0,1)}^{(2,2)}(2+xy)dx+(\frac{x^2}{2}-y)dy$.

4.8. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)}(x^3-2y)dx-(2x-5)dy$. 4.9. $\int\limits_{(1,1)}^{(2,2)}(2x-3y)dx-(3x-4y)dy$.

4.10. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)}(5x^4y^2+e^x)dx+(2x^5y-\sin y)dy$.

4.11. $\int\limits_{(1,1)}^{(2,3)}(2x+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y})dx+(\frac{1}{x+y}-\frac{x}{y^2})dy$.

4.12. $\int\limits_{(0,0)}^{(2,2)}(4+xy^2)dx+(x^2y-3y^2)dy$.

4.13. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)}(3x-2y)dx-(2x+y)dy$. 4.14. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)}(1+2xy)dx+(x^2-y)dy$.

4.15. $\int\limits_{(0,0)}^{(2,3)}(3x^2y-1)dx+(x^3-1)dy$.

3*. Знайти роботу сили:

4.16. $\overrightarrow{F(x,y)}=(x^2+2y)\vec{i}+(y^2+2x)\vec{j}$, рухаючись вздовж параболи $y=x^2$ від точки $O(0,0)$ до точки $B(2,4)$.

4.17. $\overrightarrow{F(x,y)}=(x+y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}$, рухаючись вздовж кола $x^2+y^2=4$ проти стрілки годинника.

4.18. $\overrightarrow{F(x,y)}=(2xy-y)\vec{i}+(x^2+x)\vec{j}$, рухаючись вздовж півкола $x^2+y^2=9$, $y\geq 0$ проти стрілки годинника.

4.19. $\overrightarrow{F(x,y)}=x^2y\vec{i}-y\vec{j}$, рухаючись по прямій від точки $M(-1,0)$ до точки $N(0,1)$.

4.20. $\overrightarrow{F(x,y)}=(x+y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}$, рухаючись вздовж еліпса $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ $(x\geq 0, y\geq 0)$ проти стрілки годинника.

4.21. $\overrightarrow{F(x,y)}=(y^2-y)\vec{i}+(2xy+x)\vec{j}$, рухаючись вздовж півкола $x^2+y^2=9$, $y\geq 0$ проти стрілки годинника.

4.22. $\overrightarrow{F(x,y)} = xy\vec{i}$, рухаючись вздовж лінії $y = \sin x, 0 \le x \le \pi$ проти стрілки годинника.

4.23. $\overrightarrow{F(x,y)} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j}$, рухаючись вздовж лінії $y = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ проти стрілки годинника.

4.24. $\overrightarrow{F(x,y)} = (xy - x)\vec{i} + \dfrac{x^2}{2}\vec{j}$, рухаючись вздовж лінії $y = 2\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$.

4.25. $\overrightarrow{F(x,y)} = (xy - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$, рухаючись вздовж лінії $y = 2x^2$, $0 \le x \le 1$.

4.26. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл $\oint\limits_{(L)} \frac{1}{x} arctg \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} arctg \frac{x}{y} dy$, якщо (L) є замкнутий контур, обмежений колами $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ $(y \ge 0)$ і прямими $y = x$, $y = \sqrt{3}x$.

4.27. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл $\oint\limits_{(L)} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, якщо (L) є контур трикутника з вершинами у точках $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(3,3)$.

4.28. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл $\oint\limits_{(L)} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, якщо (L) є коло $x^2 + y^2 = 2x$.

4.29. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл $\oint\limits_{(L)} - x^2 ydx + xy^2 dy$, якщо (L) є коло $x^2 + y^2 = R^2$.

4.30. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл $\oint\limits_{(L)} (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$, якщо (L) є коло $x^2 + y^2 = 4$.

Завдання 5. Знайти первісну функцію $U(x,y)$, якщо її повний диференціал

5.1. du = $(xy^2 + e^x)dx + (yx^2 + e^y)\,dy$.

5.2. $du = (xy + \sin x)dx + (\frac{1}{2}x^2 + \cos y)\,dy$.

5.3. $du = (3x^2 + e^{2y})dx + (\sin y + 2xe^{2y})\,dy$.

5.4. $du = (\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^y})dx - \frac{2y}{x^3}\,dy$.

5.5. $du = (\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2})dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)dy$.

5.6. $du = (\sin y + y\cos x)dx + (x\cos y + \sin x)dy$

5.7. $du = (5x^4y^2 + e^x)dx + (2x^5y - \sin y)\,dy$.

5.8. $du = (4x^3 - y^2)dx + \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - 2xy\right)dy$.

5.9. $du = (3x^2y^4 - 1)dx + \left(4x^3y^3 + \frac{1}{y}\right)dy$.

5.10. $du = (\frac{2x}{y} + 3\cos 3x)dx + (2 - \frac{x^2}{y^2})\,dy$.

5.11. $du = (2xy^6 - \frac{y}{x^2})dx + \left(6x^2y^5 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2}\right)dy$.

5.12. $du = (3x^2e^{2y} - y\sin x)dx + (2x^3e^{2y} + \cos x)\,dy$.

5.13. $du = (y - \frac{1}{1+x^2})dx + (x + e^{2y})\,dy$.

5.14. $du = (xy + e^x)dx + \left(\frac{1}{2}x^2 + e^y\right)dy$.

5.15. $du = (x^2y^3 + \sin x)dx + (\cos y + x^3y^2)\,dy$.

5.16. $du = (4x + 2y)dx + (2x - 6y)\,dy$.

5.17. $du = (3x + 4y)dx + (4x - 3y)\,dy$.

5.18. $du = (y^2 - 2x)dx - (3y^2 - 2xy)\,dy$.

5.19. $du = (3x^2 + xy^2)dx - (y^2 - yx^2)\,dy$.

5.20. $du = (3x^2y - y^3)dx + (x^3 - 3y^2x)\,dy$.

5.21. $du = (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)\,dy$.

5.22. $du = (1 - \sin 2x)dy - (3 + 2y\cos 2x)\,dx$.

5.23. $du = (3x^2y + 1)dx + (x^3 - 1)\,dy$.

5.24. $du = (\frac{2x}{y} + e^x)dx - \left(\frac{x^2}{y^2} + \sin y\right)dy$.

5.25. $du = (x^2 - y^2)dx - (2xy - y^2)\,dy$.

5.26. $du = (xe^y + \sin x)dx - (\cos y - \frac{1}{2}x^2e^y)\,dy$.

5.27. $du = (xy^2 - 3^x)dx - (2^y - x^2y)\,dy$.

5.28. du = $(x^2e^{2y} - \cos x)dx - (\cos y - \frac{2}{3}x^3e^{2y})\,dy$.

5.29. du = $(x^2 + e^{3y})dx + (3xe^{3y} - 1)\,dy$.

5.30. du = $(x^2y^3 - \frac{1}{x})dx + \left(\frac{1}{y} + x^3y^2\right)dy$.

Завдання 6.

6.1. Знайти масу однорідної півсфери радіуса R .

6.2. Знайти статичний момент однорідної півсфери радіуса R відносно координатної площини Oxy .

6.3. Знайти момент інерції однорідної півсфери радіуса R відносно площі основи .

6.4. Знайти момент інерції однорідної півсфери радіуса R відносно осі обертання .

6.5. Знайти масу частини однорідного параболоїда $z = x^2 + y^2$, обмеженого площиною $z = 1$.

6.6. Знайти статичний момент відносно координатної площини Oxy частини параболоїда $z = x^2 + y^2$, обмеженого площиною $z = 1$.

6.7. Знайти масу однорідного конуса $z^2 = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 1)$.

6.8. Знайти статичний момент однорідного конуса $z^2 = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 1)$ відносно координатної площини Oxy .

6.9. Знайти масу конуса $z^2 = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 1)$, якщо густина у кожній його точці пропорційна відстані цієї точки до осі конуса .

6.10. Знайти статичний момент відносно координатної площини Oxy конуса $z^2 = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 1)$.

6.11. Знайти момент інерції відносно осі обертання конуса $z^2 = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 1)$.

6.12. Знайти статичний момент відносно осі обертання конуса $z^2 = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 1)$.

6.13. Знайти масу частини площини x + y + z = 1 , яка знаходиться в першому октанті , якщо її поверхнева густина $\gamma(x, y, z) = xyz$.

6.14. Знайти статичний момент однорідної частини сфери $x^2+y^2+z^2 = R^2$, яка знаходиться в першому октанті, відносно координатної площини Oyz .

6.15. Знайти статичний момент частини площини x+y+z=1, яка знаходиться в першому октанті, відносно координатної площини Oxy, якщо поверхнева густина $\gamma(x, y, z) = xy$.

6.16. Знайти масу однорідної сфери радіуса R .

6.17. Знайти масу сфери, якщо поверхнева густина в кожній її точці дорівнює відстані цієї точки до одного з діаметрів сфери .

6.18. Знайти масу однорідного конуса $z^2 = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 1)$.

6.19. Знайти статичний момент півсфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ відносно координатної площини y=0 .

6.20. Знайти масу півсфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, якщо її поверхнева густина $\gamma(x, y, z) = y$.

6.21. Знайти центр маси однорідної півсфери радіуса R .

6.22. Знайти момент інерції однорідної півсфери радіуса R відносно площини основи .

6.23. Знайти момент інерції однорідної півсфери радіуса відносно осі симетрії .

6.24.Знайти центр маси поверхні однорідного параболоїда $z = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 1)$.

6.25.Знайти статичний момент півсфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ відносно координатної площини y=0 .

6.26.Знайти статичний момент однорідної частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, яка знаходиться в першому октанті, відносно

6.27.Знайти статичний момент півсфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ відносно координатної площини y=0 .

6.28.Знайти момент інерції відносно осі обертання конуса $z^2 = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 1)$.

6.29.Знайти статичний момент відносно осі обертання конуса $z^2 = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 1)$.

6.30. Знайти масу частини площини x + y + z = 1 , яка знаходиться в першому октанті , якщо її поверхнева густина $\gamma(x, y, z) = xyz$.

Завдання 7.

7.1. Знайти циркуляцію вектора $\overrightarrow{F(x, y)} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} +$

$+(x-y)\vec{k}$ вздовж замкнутого контура (Γ), обмеженого лінією $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2(1-\cos t)$.

7.2. Знайти циркуляцію вектора $\overrightarrow{F(x,y)}=x^2\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}$ вздовж замкнутого контура (Γ), обмеженого лінією $x=\cos t,\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t,$ $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t$.

7.3. Знайти циркуляцію вектора $\overrightarrow{F(x,y)}=x\vec{i}+z^2\vec{j}+y\vec{k}$ вздовж замкнутого контура (Γ), обмеженого лінією $x=\cos t,\ y=2\sin t,$ $z=2\cos t-2\sin t-1$.

7.4. Знайти циркуляцію вектора $\overrightarrow{F(x,y)}=xz\vec{i}+x\vec{j}+z^2\vec{k}$ вздовж замкнутого контура (Γ), обмеженого лінією $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=\sin t$.

7.5. Знайти циркуляцію вектора $\overrightarrow{F(x,y)}=x\vec{i}+2z^2\vec{j}+y\vec{k}$ вздовж замкнутого контура (Γ), обмеженого лінією $x=\cos t,\ y=3\sin t,$ $z=2\cos t-3\sin t-2$.

7.6. Знайти циркуляцію вектора $\overrightarrow{F(x,y)}=xy\vec{i}+x\vec{j}+y^2\vec{k}$ вздовж замкнутого контура (Γ), обмеженого лінією $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=5$.

7.7. Знайти циркуляцію вектора $\overrightarrow{F(x,y)}=x\vec{i}-z^2\vec{j}+y\vec{k}$ вздовж замкнутого контура (Γ), обмеженого лінією $x=2\cos t,\ y=3\sin t,$ $z=4\cos t-3\sin t-3$.

7.8. Знайти циркуляцію вектора $\overrightarrow{F(x,y)}=2y\vec{i}-3x\vec{j}+x\vec{k}$ вздовж замкнутого контура (Γ), обмеженого лінією $x=2\cos t,\ y=3\sin t,$ $z=2-2\cos t-2\sin t$.

7.9. . Знайти циркуляцію вектора $\overrightarrow{F(x,y)}=z\vec{i}-y^2\vec{j}-x\vec{k}$ вздовж замкнутого контура (Γ), обмеженого лінією $x=\sqrt{2}\cos t,\ y=2\sin t,$ $z=\sqrt{2}\cos t$.

7.10. Знайти циркуляцію вектора $\overrightarrow{F(x,y)}=x\vec{i}-3z^2\vec{j}+y\vec{k}$ вздовж замкнутого контура (Γ), обмеженого лінією $x=\cos t,\ y=4\sin t,$ $z=2\cos t-4\sin t+3$.

7.11. Знайти потік векторного поля $\overrightarrow{F(x,y,z)} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$ через частину площини $\frac{x}{2} + y + z = 1$ $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

7.12. Знайти потік векторного поля $\overrightarrow{F(x,y,z)} = (x + xy)\vec{i} +$ $+ (y - yx^2)\vec{j} + (z - 3)\vec{k}$ через частину поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, відрізаного площиною $z = 1$.

7.13. Знайти потік векторного поля $\overrightarrow{F(x,y,z)} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + 2z\vec{k}$ через частину площини $x + y + z = 1$ $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

7.14. Знайти потік векторного поля $\overrightarrow{F(x,y,z)} = 2x\vec{i} + 5y\vec{j} + 5z\vec{k}$ через частину площини $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$, розміщену в першому октанті.

7.15. Знайти потік векторного поля $\overrightarrow{F(x,y,z)} = x\vec{i} + y\vec{j} + (1 - z)\vec{k}$ через бічну поверхню конуса $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leq z \leq H)$.

7.16. Знайти потік векторного поля $\overrightarrow{F(x,y,z)} = (x - 2z)\vec{i} +$ $+ (3z - 4x)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$ через частину площини $x + y + z = 1$, розміщену в першому октанті.

7.17. За допомогою формули Остроградського обчислити потік векторного поля $\overrightarrow{F(x,y,z)} = x\vec{i} + y\vec{j} + (1 - z)\vec{k}$ через повну поверхню конуса $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leq z \leq 1)$.

7.18. За допомогою формули Остроградського обчислити потік векторного поля $\overrightarrow{F(x,y,z)} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$ через повну поверхню сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

7.19. Користуючись формулою Стокса, обчислити циркуляцію вектора $\overrightarrow{F(x,y,z)} = e^x\vec{i} + z(x^2 + y^2)^{3/2}\vec{j} + yz^3\vec{k}$ вздовж лінії перетину конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ площинами $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1$.

7.20. Користуючись формулою Стокса, обчислити циркуляцію вектора $\overrightarrow{F(x,y,z)} = x\vec{i} + xz\vec{j} + z\vec{k}$ вздовж лінії перетину поверхні $z^2 = 4 - x - y$ з координатними площинами.

7.21. За допомогою формули Остроградського обчислити потік векторного поля $\overrightarrow{F(x,y,z)} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ через частину поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, обмеженої координатними площинами.

7.22. За допомогою формули Остроградського обчислити потік векторного поля $\overrightarrow{F(x,y,z)} = 3x\vec{i} - 2z\vec{j} + y\vec{k}$ через поверхню $\sigma = \{(x,y,z) | x + y + z \le 2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$.

7.23. За допомогою формули Остроградського обчислити потік векторного поля $\overrightarrow{F(x,y,z)} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$ через зовнішню поверхню сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

7.24. Знайти роботу сили $\overrightarrow{F(x,y,z)} = x\vec{i} + y\vec{j} + (x + y - 1)\vec{k}$ по переміщенню матеріальної точки вздовж прямої AB, від точки $A(1,1,1)$ до точки $B(2,3,4)$.

7.25. Довести, що векторне поле $\overrightarrow{F(x,y,z)} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ є потенціальним і знайти його потенціал.

7.26. Довести, що векторне поле $rot\vec{F}$ є соленоїдальним, де $\overrightarrow{F(x,y,z)} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$.

7.27. Знайти дівергенцію векторного поля $\overrightarrow{F(x,y,z)} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z^3\vec{k}$ в точці $A(1,-1.3)$.

7.28. Довести, що векторне поле $\overrightarrow{F(x,y,z)} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ є потенціальним і знайти його потенціал.

7.29. Знайти $grad(div\vec{F})$, якщо $\overrightarrow{F(x,y,z)} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$.

7.30. Знайти $rot(rot\vec{F})$, якщо $\overrightarrow{F(x,y,z)} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$.

Теоретичні питання

1. Криволінійний інтеграл I роду

1.1. Означення інтеграла. Теорема про його існування.

1.2. Обчислення криволінійного інтеграла, якщо крива *(AB)* задана рівнянням $y = f(x), x \in [a, b]$.

1.3. Обчислення криволінійного інтеграла, якщо крива *(AB)* задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [t_0, T]$.

1.4. Обчислення криволінійного інтеграла, якщо крива *(AB)* задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi), \quad \varphi \in [\varphi_0, \ \Phi]$ у полярній системі координат.

1.5. Обчислення довжини дуги кривої за допомогою криволінійного інтеграла I-го роду.

1.6. Обчислення маси неоднорідної кривої.

1.7. Обчислення статичних моментів, координат центра маси і моментів інерції неоднорідної кривої.

2. *Криволінійний інтеграл II роду*

2.1. Означення криволінійного інтеграла II роду. Теорема про його існування.

2.2. Обчислення криволінійного інтеграла II роду, якщо крива задана рівнянням $y = \varphi(x), \quad x \epsilon [a, b]$.

2.3. Обчислення криволінійного інтеграла II роду, якщо крива задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \epsilon [t_0, T]$.

2.4. Обчислення роботи сили за допомогою криволінійного інтеграла II роду.

2.5. Властивості криволінійного інтеграла II роду.

2.6. Формула Гріна.

2.7. Обчислення площ плоских фігур за допомогою криволінійного інтеграла II роду.

2.8. Незалежність криволінійного інтеграла II роду від шляху інтегрування.

2.9. Обчислення криволінійного інтеграла II роду у випадку його незалежності від шляху інтегрування.

2.10. Знаходження первісної функції за допомогою криволінійного інтеграла II роду.

3. *Поверхневі інтеграли I роду*

3.1. Означення поверхневого інтеграла I роду.

3.2. Теорема існування поверхневого інтеграла I роду, його властивості.

3.3. Обчислення поверхневого інтеграла I роду.

3.4. Обчислення площі поверхні за допомогою поверхневого інтеграла I роду.

3.5. Обчислення маси, статичних моментів і центра маси неоднорідної поверхні.

3.6. Обчислення моментів інерції неоднорідної поверхні.

4. *Поверхневі інтеграли II роду*

4.1. Поняття про орієнтовні поверхні.

4.2. Означення поверхневого інтеграла II роду.

4.3. Теорема існування поверхневого інтеграла II роду, його властивості.

4.4. Обчислення поверхневого інтеграла II роду.

4.5. Формула Стокса.

4.6. Формула Остроградського.

4.7. Похідна скалярного поля за напрямом вектора.

4.8. Градієнт скалярного поля, його зв'язок з похідною за напрямом вектора.

4.9. Потік вектора через поверхню.

4.10. Циркуляція, дивергенція і ротор векторного поля.

4.11. Соленоїдальні та потенціальні поля.

4.12. Оператор Гамільтона та його застосування.

Приклади тестових задач

1. Обчислити криволінійний інтеграл I роду $\int\limits_{(OA)} xdl$, якщо *(OA)* – дуга
парабола $y = x^2$ від точки O(0,0) до точки A(1,1).

а) $\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$. б) $\frac{5\sqrt{5}}{12}$. в) $\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$.

2. Знайти масу неоднорідного кола $x^2 + y^2 = 1$, розміщеного у першій чверті, якщо густина у кожній його точці дорівнює добутку квадрата абсциси точки на її ординату.

а) $m = \frac{2}{3}$. б) $m = \frac{5}{4}$. в) $m = \frac{1}{3}$.

3. За допомогою криволінійного інтеграла I роду знайти довжину L кола радіусом *R=2*.

а) $L = 2\pi$. б) $L = \pi$. в) $L = 4\pi$.

4. Обчислити роботу сили $\vec{F} = y^2\vec{i} + x\vec{j}$ вздовж прямої, яка проходить через точки $M_1(1,2)$ і $M_2(2,4)$.

а) $A = \frac{11}{3}$. б) $A = \frac{8}{3}$. в) $A = \frac{37}{3}$

5. За допомогою криволінійного інтеграла II роду знайти площу еліпса $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

а) S = ab. б) $S = \pi ab$. в) $S = \pi a^2 b^2$.

6. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$ вздовж кола $x^2 + y^2 = 1$, z = 0 в додатньому напрямку.

а) $C = 2\pi$. б) $C = \pi$. в) $C = 3\pi$.

7.Обчислити потік вектора $\overrightarrow{F(x, y.z)} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, розміщену в першому октанті.

а) $\ddot{I} = \frac{\pi}{4}$. б) $\ddot{I} = \frac{\pi}{2}$. в) $\ddot{I} = \pi$.

IV семестр

Структура програми навчальної дисципліни

1.Опис предмета навчальної дисципліни

Денна форма навчання

Призначення : підготовка бакалаврів	Напрям, освітньо кваліфікаційний рівень, проф-не спрямування	Характеристика навчальної дисципліни
Кількість кредитів відповідних ЕСТЗ - 4	Напрям : 6.060103 – “Гідротехніка (водні ресурси)”	Обов'язкова, нормативна
Модулів: 3	Професійне спрямування: Гідромеліорація, ВіВ	Рік підготовки 1-й, семестр 2
Змістовних модулів - 3		Лекцій – 30 год, практичних – 32 год
Загальна кількість годин: 144		Самостійна та індивідуальна робота –82 год
Тижневих годин: аудиторних — 4, СРС-6	Освітньо кваліфікаційний рівень - **Бакалавр**	МКР - 1 Вид контролю: іспит

Заочна форма навчання

Призначення : підготовка бакалаврів	Напрям, освітньо кваліфікаційний рівень, проф-не спрямування	Характеристика навчальної дисципліни
Кіл-ть кредитів відповідних ЕСТЗ - 4	Напрям : 6.060103 – “Гідротехніка (водні ресурси)”	Обов'язкова, нормативна
Модулів: 3	Професійне спрямування: Гідромеліорація, ВіВ	Рік підготовки 2-й, семестр 1V
Змістовних модулів - 3		Лекцій – 8 год, практичних –8 год
Загальна кількість годин: 162		Самостійна та індивідуальна робота –146 год
Тижневих годин: аудиторних — , СРС-7	Освітньо кваліфікаційний рівень - **Бакалавр**	КР - “Ряди.Теорія ймовірностей”. Вид контролю: іспит

2.Програма навчальної дисципліни

Змістовний модуль 1. Ряди

Тема 1.Числові ряди.

Тема 2. Степеневі ряди і їх застосування до наближених обчислень.

Тема 3 Ряди Фур'є.

Змістовний модуль 2. Елементи теорії ймовірностей

Тема 4. Випадкові події.

Тема 5. Випадкові величини.

Тема б. Основи математичної статистики.

Тема 7. Статистичні гіпотези. Елементи теорії кореляції.

3. Структура залікового кредиту

Назви тем змістовних модулів	Кількість годин			
	Лекцій	Практ.	Сам. роб.	Разом
Змістовний модуль 1. Ряди	**10/4**	**10/4**	**26/46**	**46/54**
Тема 1 .Числові ряди Поняття числового ряду. Збіжність ряду, його сума. Властивості числових ряди, їх необхідна ознака збіжності. Достатні ознаки збіжності числових рядів з додатніми членами. Знакопочережні числові ряди, теорема Лейбніца. Знакозмінні ряди, їх абсолютна і умовна збіжність.	6/2	6/2	8/15	20/19
Тема 2. Степеневі ряди і їх застосування до наближених обчислень Степеневі ряди. Теорема Абеля. Інтервал і радіус збіжності степеневих рядів, їх основні властивості. Ряди Тейлора і Маклорена. Необхідна і достатня умови розкладу функції в ряд Тейлора (Маклорена). Розклад в степеневий ряд функцій e^x, sinx, cosx, логарифмічної і обернених тригонометричних функцій. Біноміальний ряд. Застосування степеневих рядів до наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів та інтегрування диференціальних рівнянь	4/2	4/2	7/10	15/14
Тема 3. Ряди Фур'є. Тригонометричні многочлени. Означення ряду Фур'є. Знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є для функції з			11/21	11/21

періодом 2π. Поняття про теорему Діріхлє. Розклад в ряд Фур'є парних і непарних функцій з періодом 2π. Розклад в ряди Фур'є функцій з довільним періодом. Розклад в ряд Фур'є неперіодичних функцій, парне і непарне продовження.				
Змістовний модуль 2. Основи теорії ймовірностей	16/4	16/4	18/30	50/38
Тема 4. Випадкові події Масові випадкові явища. Предмет теорії ймовірностей. Події і їх класифікація. Ймовірність події. Статистичне і класичне означення ймовірностей випадкових подій. Елементи комбінаторики. Властивості ймовірностей . Алгебра подій. Основні теореми теорії ймовірностей. Формули повної ймовірності і Бейєса. Повторні незалежні дослідження Бернуллі. Формула Бернулі . Наймовірніша частота появи події в незалежних дослідженнях. Граничні теореми Лапласа і Пуассона.	8/2	8/2	9/15	25/19
Тема 5. Випадкові величини Поняття випадкової величини. Дискретні і неперервні випадкові величини. Функція розподілу і її властивості. Розподіл дискретних випадкових величин.Типові розподіли дискретних випадкових величин: біноміальний і пуассонівський Числові характеристики дискретних випадкових величин, їх властивості. Неперервні випадкові величини, їх функція і щільність розподілу.	8/2	8/2	9/15	25/19

Властивості щільності розподілу. Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в заданий інтервал. Рівномірний і нормальний закони розподілу, їх числові характеристики. Крива Гаусса. Ймовірність попадання в заданий інтервал і ймовірність заданого відхилення для нормально розподіленої випадкової величини. Правило трьох сігм. Числові характеристики дискретних випадкових величин, їх властивості. Початкові і центральні моменти. Нерівність Чебишова. Закон великих чисел для незалежних випадкових величин. Теореми Чебишова і Бернуллі. Поняття про центральну граничну теорему				
Тема 6. Елементи математичної статистики і корреляції. Задачі математичної статистики. Генеральна сукупність і вибірка. Репрезентативність вибірки. Емпіричні ряди розподілу, їх графічне зображення. Числові характеристики одномірної вибірки. Статистичні оцінки параметрів розподілу. Вимоги до статистичних оцінок.Точкові оцінки. Інтервальні оцінки. Інтервал надійності. Знаходження інтервалу надійності для математичного сподівання	4/0	6/0	8/10	18/10
Тема 7. Елементи теорії корреляції Функціональна, статистична і корреляційна залежності.			10/20	10/20

Рівняння регресії.Знаходження параметрів рівняння лінійної регресії. Коефіцієнт корреляції				
Тема 8. Основи рівнянь математичної фізики. Диференціальні рівняння II-го порядку в часткових похідних і їх класифікація. Метод Фур'є розв'язання хвильового рівняння, рівнянь теплопровідності та Лапласа			10/22	10/22
Тема 9.Елементи операційного числення Перетворення Лапласа. Поняття про оригінал і зображення. Теореми лінійності, подібності і зміщення для перетворень Лапласа. Таблиця оригіналів і зображень. Зображення похідної оригінала. Теорема про згортку. Оригінал для зображення раціональної функції. Операційний метод роз’язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами			10/18	10/18
Всього годин	30/8	32/8	82/ 146	144/ 162

• В чисельнику вказані години для денної форми навчання, в знаменнику - для заочної.

4. **Практичні заняття**

№	Теми практичних занять	Кількість годин	
		Денна форма	Заочна форма
1	Дослідження на збіжність числових рядів за означенням їх збіжності	2	

2	Достатні ознаки збіжності числових рядів з додатніми членами.	2	2
3	Знакозмінні і знакопереміжні числові ряди. Теорема Лейбніца. Абсолютна і умовна збіжність.	2	
4	Степеневі ряди. Теорема Абеля. Знаходження області збіжності	2	
5	Ряд Тейлора (Маклорена), розклад функцій у степеневі ряди	2	2
6	Застосування степеневих рядів до наближених обчислень	2	
7	Елементи комбінаторики. Події і їх класифікація. Класичне означення ймовірності випадкової події	2	
8	Теореми додавання і множення ймовірностей та їх застосування	2	
9	Формула повної ймовірності. Формули Байєса	2	2
10	Незалежні проби. Формула Бернуллі. Локальна та інтегральна теореми Лапласа. Формула Пуассона	2	
11	Знаходження числових характеристик дискретної випадкової величини. Біноміальний і Пуассона закони розподілу	2	1
12	Неперервні випадкові величини: функція розподілу і щільність розподілу, ймовірність попадання в заданий інтервал	2	
13	Числові характеристики неперервних випадкових величин	2	
14	Рівномірний і нормальний закони розподілу	2	1
15	Основи математичної статистики	2	
16	Рівняння лінійної регресії	2	

Всього		32	8

5. Розподіл балів, що присвоюються студентам згідно кредитно-модупьної системи

Модуль 1 Поточний контроль							Мод. 2 Інд. завд.	Мод. 3 Підсум. контр-ль
Зміст. мод. 1		Змістовий модуль 2					30	Іспит 40
15		15						
Т-1	Т-2	Т-3	Т- 4	Т-5	Т-6	Т-7 Т-8,9		
5	10	5	5	5	5	5 -		

Змістовий модуль №1. Ряди

Питання для самоконтролю (розділ 13)

1.Дайте означення числового ряду.

2.Дайте означення збіжності і розбіжності числового ряду.

3.Який числовий ряд називають гармонічним? Гармонічний ряд збіжний чи розбіжний?

4.Який числовий ряд називають геометричним? Геометричний ряд збіжний чи розбіжний?

5.Сформулюйте властивості числових рядів.

6.Яка необхідна умова збіжності числових рядів?

7.Сформулюйте необхідну і достатню умови збіжності числових рядів з додатніми членами.

8.Доведіть першу теорему порівняння числових рядів з додатніми членами.

9.Сформулюйте другу теорему порівняння числових рядів з додатніми членами. Наведіть приклад її застосування.

10.Сформулюйте і доведіть ознаку Даламбера для числових рядів з додатніми членами.

11.Сформулюйте радикальну ознаку Коші для числових рядів з додатніми членами.

12.Сформулюйте інтегральну ознаку Коші. Наведіть приклад її використання.

13.Доведіть теорему Лейбніца збіжності знакопочережних рядів.

14.Сформулюйте теорему Коші збіжності знакозмінних рядів.

15.Які знакозмінні ряди називають абсолютно і які умовно збіжними?

16.Запишіть степеневий ряд по степеня x. Як знайти його інтервал і радіус збіжності?

17.Запишіть степеневий ряд по степенях $x-a$. Який його інтервал і радіус збіжності?

18.Запишіть ряд Тейлора для нескінченно диференційовної функції $y=f(x)$.

19.Яка необхідна і достатня умови збіжності ряду Тейлора?

20.Запишіть ряд Маклорена для нескінченно диференційовної функції.

21.Запишіть ряди Маклорена для функцій $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$,

$f(x) = \cos x$ і вкажіть їх інтервал збіжності..

22.Запишіть біноміальний ряд, вкажіть його інтервал збіжності.

23.Як знайти за допомогою рядів Тейлора (Маклорена) розв'язок диференціального рівняння $y'' = f(x, y, y')$, який задовольняє початковим умовам $y_{|x=x_0} = y_0$, $y'_{|x=x_0} = y'_0$?

24.Як обчислити за допомогою степеневих рядів визначений інтеграл з заданою точністю? Наведіть приклад.

Приклади розв'язання задач

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{5n-3}$.

Оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{5n-3} = (\frac{\infty}{\infty}) = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{5-\frac{3}{n}} = \frac{3}{5} \neq 0$, то даний ряд розбіжний (не виконується необхідна умова збіжності чисового ряду).

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n (n+1)}$.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, який збіжний як геометричний ряд з знаменником $q = \frac{1}{3} < 1$.

Оскільки члени даного ряду менші членів збіжного геометричног ряду $(\frac{1}{3^n (n+1)} < \frac{1}{3^n})$, то за теоремою 1 порівняння рядів даний ряд збіжний.

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+3}$.

Розглянемо узагальнений гармонічний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, який збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $\alpha < 1$. За α слід прийняти число

$\alpha = k - l$, де k і l - степені многочленів, відповідно знаменника і чисельника в a_n.

У нашому прикладі $a_n = \dfrac{2n-1}{n^2+3}$, а $\alpha = 2-1=1$, тому розглянемо для порівняння розбіжний гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)n}{n^2+3} = (\frac{\infty}{\infty}) = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n^2}} = 2,$$

то за другою теоремою порівняння рядів обидва ряди однієї природи.

Отже, даний ряд розбіжний.

1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n\cdot 3^n}$.

Використаємо ознаку Даламбера. Маємо $a_n = \dfrac{n!}{n^n\cdot 3^n}$,

$a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\cdot 3^{n+1}}$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\cdot 3^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n\cdot 3^n}{n!} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)\cdot 3^n\cdot 3}\cdot\frac{n^n\cdot 3^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n\cdot 3} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{3e} < 1$$

Отже,за ознакою Даламбера даний ряд збіжний.

1.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{n+1}{3n-1})^n$.

За радикальною ознакою Коші знаходимо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\dfrac{n+1}{3n-1})^n} =$

$$= = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n-1} = (\frac{\infty}{\infty}) = \lim_{n\leftarrow\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1$$ - даний ряд збіжний.

1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

Розглянемо невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}=$

$$=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{d\ln(x+1)}{\sqrt{\ln(x+1)}}=2\lim_{b\to\infty}\sqrt{\ln(x+1)}\Big|_1^b=2\lim_{n\to\infty}(\sqrt{\ln(b+1)}-\sqrt{\ln 2})=\infty,$$

який розбіжний. За інтегральною ознакою Коші даний ряд теж розбіжний.

Дослідити на збіжність знакопочережні ряди:

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}+\ldots.$

Оскільки модулі членів ряду спадають ($\frac{1}{2}>\frac{1}{5}>\frac{1}{8}>\ldots$) і

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n-1}=0$, то за теоремою Лейбніца даний ряд збіжний.

2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3n+2}.$

Цей знакопочережний ряд розбіжний оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+2}=\frac{1}{3}\neq 0$ (не виконується друга умова теореми Лейбніца).

3.Дослідити на абсолютну і умовну збіжність знакозмінні ряди.

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n\sqrt{n}}.$

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n\sqrt{n}}$, складений з модулів членів даного ряду. Оскільки $|\sin n\alpha|\le 1$, то члени останнього ряду не більші членів збіжного узагальненого гармонічного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$. при $\alpha=\frac{3}{2}>1$.

Отже, даний ряд абсолютно збіжний.

3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}.$

Це збіжний за теоремою Лейбніца знакопочережний ряд. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$, складений з модулів його членів, розбіжний. Справді, розглянемо розбіжний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. За теоремою 2 порівняння рядів $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}:\frac{1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n})=3.$

Отже, ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ однієї природи, а даний ряд умовно збіжний.

3.3. Знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ абсолютно збіжний, оскільки збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, складений з модулів членів даного ряду (як узагальнений гармонічний ряд при $\alpha=2>1$).

4.Знайти інтервал і радіус збіжності степеневих рядів:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n\cdot\sqrt{2n-1}}$.

За ознакою Даламбера $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}\sqrt{2n+1}}:$

$$:\frac{|x|^n}{n3^n\sqrt{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n\cdot|x|}{(n+1)3^n\cdot 3\cdot\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{n3^n\sqrt{2n-1}}{|x|^n}=$$

$$=\frac{|x|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{2n-1}}{(n+1)\sqrt{2n+1}}=\frac{|x|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n})\sqrt{2+\frac{1}{n}}}=\frac{|x|}{3}\cdot 1=\frac{|x|}{3}.$$

Отже, даний ряд збіжний якщо $\frac{|x|}{3}<1$, звідки $-3<x<3$ - інтервал збіжності ряду.

Встановимо збіжність даного ряду на кінцях $x=\pm 3$ його інтервалу збіжності.

При $x=-3$ з даного ряду отримуємо знакопочережний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{2n-1}}$. Цей ряд абсолютно збіжний, оскільки збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{2n-1}}$, складений з модулів його членів.

При $x=3$ з даного ряду отримуємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{2n-1}}$ з додатніми членами. Цей ряд збіжний. Справді, розглянемо збіжний узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ $(\alpha=\frac{3}{2}>1)$. За теоремою 2 порівняння числових рядів з додатніми членами отримуємо $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=$

$$=\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{1}{n\sqrt{2n-1}}:\frac{1}{n^{3/2}}=\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{2n-1}}=\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$ - обидва ряди збіжні.

Отже, $-3\le x\le 3$ є інтервал збіжності даного ряду, а $R=3$ - його радіус збіжності.

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2\cdot 2^n}$.

За ознакою Даламбера знаходимо $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}}\cdot$

$$\cdot\frac{n^2 2^n}{|x-2|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|^n\cdot|x-2|}{(n+1)^2 2^n\cdot 2}\cdot\frac{n^2 2^n}{|x-2|^n}=\frac{|x-2|}{2}\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{|x-2|}{2}\cdot$$

$$\cdot\lim_{n\leftarrow\infty}(\frac{n}{n+1})^2=\frac{|x-2|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}=\frac{|x-2|}{2}\cdot$$ Даний ряд збіжний, якщо $\frac{|x-2|}{2}<1$, звідки $-2<x-2<2,\ 0<x<4$.

Дослідимо природу ряду на кінцях $x=0, x=4$ інтервалу його збіжності.

При $x=0$ з даного ряду отримуємо знакопочережний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\cdot 2^n}$. Цей ряд абсолютно збіжний, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot 2^n}$, складений з модулів його членів збіжний за теоремою 1 порівняння числових рядів з додатніми членами (його члнени не більші членів збіжного геометричного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ з знаменником $q=\frac{1}{2}<1$.

При $x=4$ з даного ряду отримуємо $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збіжний узагальнений гармонічний ряд $(\alpha=2>1)$.

Отже, $0\le x\le 4$ є інтервал збіжності даного степеневого ряду, а $R=2$ - його радіус збіжності.

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{2n+1})^n x^n$.

За радикальною ознакою Коші $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n-1}{2n+1})^n|x|^n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n-1}{2n+1})^n|x|^n}=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1}=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=|x|\cdot\frac{1}{2}.$$

Отже, даний ряд збіжний якщо $\frac{|x|}{2}<1$, звідки $-2<x<2$ - його інтервал збіжності.

На кінцях $x=\pm 2$ числові ряди розбіжні, оскільки $\lim_{n\to}a_n\ne 0$.

Отже, $-2<x<2$ є інтервал збіжності даного ряду, а $R=2$ - його радіус збіжності.

5. За допомогою степеневих рядів обчислити визначений інтеграл $\int_0^{1/2}\frac{\sin 2x}{x}dx$ з точністю до 0.001.

Знаходимо $\int_0^{1/2}\frac{\sin 2x}{x}dx = \left|\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots, t = 2x\right| =$

$$= \int_0^{1/2}\frac{1}{x}(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \ldots)dx = \int_0^{1/2}(2 - \frac{2^3}{3!}x^2 + \frac{2^5}{5!}x^4 -$$

$$-\frac{2^7}{7!}x^6 - \ldots)dx = (2x - \frac{2^3}{3!}\frac{x^3}{3} + \frac{2^5}{5!}\frac{x^5}{5} - \frac{2^7}{7!}\frac{x^7}{7} + \ldots)\Big|_0^{1/2} = 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{2^3}{3!\cdot 3}\cdot\frac{1}{2^3} +$$

$$+\frac{2^5}{5!\cdot 5}\frac{1}{2^5} - \frac{2^7}{7!\cdot 7}\frac{1}{2^7} - \ldots = 1 - \frac{1}{3!\cdot 3} + \frac{1}{5!\cdot 5} - \frac{1}{7!\cdot 7} + \ldots = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \ldots$$

Оскільки $\frac{1}{35280} < 0.001$, то, відкинувши всі члени, починаючи з члена $\frac{1}{35280}$, за теоремою Лейбніца похибка не перевищуватиме 0.001. Знаходимо $\int_0^{1/2}\frac{\sin 2x}{x}dx = 1\text{-}0.0556\text{+}0.0017 \approx 0/946.$

6. Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку $y = f(x)$ диференціального рівняння $y' = y^2 + \cos x$, який задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Використаємо ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + \ldots.$$

З початкової умови знаходимо, що $f(0) = y(0) = 1$, а з даного рівняння - $f'(0) = y'(0) = 1^2 + \cos 0 = 2$. Диференціюючи послідовно обидві частини диференціального рівняння , отримуємо $y'' = 2yy' - \sin x,\ \ y''' = 2y'^2 + 2yy'' - \cos x, \ldots,$ тоді $f''(0) = y''(0) = 2\cdot 1\cdot 2 - \sin 0 = 4$, а $f'''(0) = y'''(0) = 2\cdot 2^2 + 2\cdot 1\cdot 4 - \cos 0 = 15$, ... Підставляючи отримані результати в ряд Маклорена, отримаємо $f(x) = 1 + 2x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{15}{3!}x^3 + \ldots = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \ldots$-- шуканий розв'язок даного диференціального рівняння.

Самостійна робота №1

Завдання 1. Дослідити на збіжність числові ряди з додатніми членами:

1.1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+3}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)^2}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$.

1.2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-1}{n^2+3}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n^2+1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{(n+1)^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$. е) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

1.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n-1}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\sin n\alpha}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+n-1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

1.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2n+1}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot 2^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n^3+1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(\sqrt{2})^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

1.5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{4n+2}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n2^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg^2 n}{1+n^2}$.

1.6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2n-1}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n-1)^2}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n-1}}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+3}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$.

1.7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n-2}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2\cdot 3^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n^3+1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{2^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

1.8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n-1}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{4n+1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

1.9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{5n-1}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot 2^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$.

1.10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\cdot 2^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+1}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

1.11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n+3}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2\cdot 2^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3}{n^3+n-1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n(n+1)}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n-1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

1.12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{2n-1}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot n^2}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3+1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n3^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

1.13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{4n+3}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n3^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2}$.

1.14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n-2}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n^2+1)4^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n^3+1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^n}{4n+1}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{3n-1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

1.15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^n$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)\cdot 2^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^3-n}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{3^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n-1}$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-3)^2}$.

1.16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n-1}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^2-1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)\,arctgn}$.

1.17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\cdot 3^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{4n^3+5}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

1.18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{6n+5}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n\cdot 3^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+3}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$.

1.19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{4n-1}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\cdot e^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+2}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$.

1.20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n-2}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{n^3+1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$.

1.21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3n^2+2}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n(n+1)}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+2}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,n}{1+n^2}$.

1.22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2+1}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n(n^2+1)}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^3-2n+1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 x}$.

1.23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3}{4n^2+1}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n^2}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^2+4}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{3n+2}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}}}{n^2}$.

1.24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n+5}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot(3n+2)}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\cdot 2^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n-1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

1.25. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-2}{5n^2+3}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3n^4+1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$. е) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

1.26. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+2}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3\cdot 3^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{2n^4-3}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+3}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2\,arctg^2 n}$.

1.27. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2-3}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-3}{n^3+1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\sqrt{3})^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+3}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg^2 n}{1+n^2}$.

1.28. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-3}{n^2}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\sin n\alpha}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^3+4}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{4^{n-1}}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n-2}\right)^n$. е) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

1.29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3n-1}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 4^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^3+3}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n3^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$.

1.30. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{6n-5}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2e^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{n^2+1}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{e^n}$. д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{3n^2+2}\right)^n$. е) $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}$.

Завдання 2. Дослідити на абсолютну чи умовну збіжності, або встановити розбіжність знакозмінних рядів.

2.1. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}$. 2.2. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}$. 2.3. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+3}$.

2.4. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}$. 2.5. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$. 2.6. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n-1}}$.

2.7. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$. 2.8. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. 2.9. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

2.10. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$. 2.11. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^5}}$. 2.12. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt[4]{n^5}}$.

2.13. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n}{2n+1}$. 2.14. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n\sqrt{n}}$. 2.15. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$.

2.16. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{n+2}{2n+1})^{n}$. 2.17. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n}tg\frac{1}{n}$. 2.18. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3^n}$.

2.19. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{2n+3}{3n+1})^{n}$. 2.20. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n}tg\frac{1}{n^2}$. 2.21. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$.

2.22. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{n}{n+1})^{n}$. 2.23. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+3)}$. 2.24. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n}$.

2.25. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}$. 2.26. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(3n+1)^2}$. 2.27. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n-2}}$.

2.28. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$. 2.29. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$. 2.30. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n+n}$.

Завдання 3. Знайти інтервал і радіус збіжності степеневих рядів

3.1. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$. 3.2. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$. 3.3. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}$.

3.4. $\sum_{i=1}^{\infty}10^n x^n$. 3.5. $\sum_{i=1}^{\infty}2^n(x+1)^n$. 3.6. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot x^n}{n!}$.

3.7. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$. 3.8. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. 3.9. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}(\frac{x}{2})^n$.

3.10. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}$. 3.11. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 2^n}$. 3.12. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

3.13. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$. 3.14. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2}$. 3.15. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$.

3.16. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^{n-1}}$. 3.17. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2}$. 3.18. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}$.

3.19. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1}$. 3.20. $\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{n-1}{n+1})^n x^n$. 3.21. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2\cdot 3^n}$.

3.22. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x}{2})^n$. 3.23. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 2^n}$. 3.24. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n-1}$.

3.25. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\cdot 2^n}$. 3.26. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n}$. 3.27. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$.

3.28. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{3n+2}}$. 3.29. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$. 3.30. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n\sqrt{2n+1}}$.

Завдання 4. Розкласти в ряд Маклорена функції

4.1. $f(x)=\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$. 4.2. $f(x)=\cos^2 x$. 4.3. $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$.

4.4. $f(x)=\sin^2 x$. 4.5. $f(x)=\cos 3x$. 4.6. $f(x)=x\,arctgx$.

4.7. $f(x)=\sin x^3$.4.8. $f(x)=\frac{x}{x+1}$.4.9. $f(x)=\cos\frac{3x^2}{2}$.

4.10. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x}}$. 4.11. $f(x)=x\cos\sqrt{x}$. 4.12. $f(x)=\frac{\sin 2x}{x}$.

4.13. $f(x)=e^{2x}$. 4.15. $f(x)=xe^{-2x}$. 4.16. $f(x)=(x-tgx)\cos x$.

4.17. $f(x)=\frac{x^3}{1+x}$.4.18. $f(x)=x^2 arctgx$. 4.19. $f(x)=e^{-2x}$.

4.20. $f(x)=\cos x^2$. 4.21. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.4.22. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4.23. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 4.24. $f(x)=\frac{1-\cos x}{x}$. 4.25. $f(x)=\frac{x-\sin x}{x}$.

4.26. $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$.4.27. $f(x)=\sqrt{1-x}$.4.28. $f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$.

4.29. $f(x)=e^{-x}$.4.30. $f(x)=x-arctgx$..

Завдання 5. Обчислити визначений інтерал з точністю до 0.001, розклавши підінтегральну функцію в степеневий ряд і проінтегрувавши його почленно

5.1. $\int_0^{1/4} e^{-x^2}dx..$ 5.2. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx.$ 5.3. $\int_0^{1/2} \frac{arctgx}{x}dx.$

5.4. $\int_0^{0.3} \frac{\ln(1+x)}{x}dx..$ 5.5. $\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx.$ 5.6. $\int_0^1 arctgx^2dx.$

5.7. $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{x}dx.$ 5.8. $\int_0^1 \sin x^2dx.$ 5.9. $\int_0^1 e^{-x^2/3}dx.$

5.10. $\int_0^{1/2} xarctgxdx.$ 5.11. $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx.$ 5.12 $\int_0^{1/2} x\ln(1-x^2)xdx.$

5.13. $\int_0^{1/2} xe^{-x}dx.$ 5.14. $\int_0^{1/2} arctgx^2dx.$ 5.15. $\int_0^{1/2} \frac{\sin x^2}{x^2}dx.$

5.16. $\int_0^{1/2} \sqrt{1+x^2}dx.$ 5.17. $\int_0^1 x\cos\sqrt{x}dx.$ 5.18. $\int_0^{1/4} xe^{-\sqrt{x}}dx.$

5.19. $\int_0^{1/3} \frac{\sin 3x}{x}dx.$ 5.20. $\int_0^1 x^2\cos\sqrt{x}dx.$ 5.21. $\int_0^{1/4} x\ln(1+\sqrt{x})dx.$

5.22. $\int_0^1 x\sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx.$ 5.23. $\int_0^{1/2} \frac{arctgx^2}{x}dx.$ 5.24. $\int_0^{1/2} x\cos\sqrt{2x}dx.$

5.25. $\int_0^{1/4} \frac{\sin 4x}{x}dx.$ 5.26. $\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}dx.$ 5.27. $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{x}dx.$

5.28. $\int_0^{1/2} x^2arctgxdx.$ 5.29. $\int_0^1 x^2\cos\sqrt{x}dx.$ 5.30. $\int_0^{1/2} \frac{\sin x^2}{x}dx.$

Завдання 6. Знайти три перших, відмінних від нуля члени розкладу у степеневий ряд розв'язку даного диференціального рівняння, який задовольняє заданій початковій умові

6.1. $y' = e^y + xy,\ y(0) = 0.$ 6.2. $y' = e^x + y,\ y(0) = 2.$

6.3. $y' = y^2 + \sin x,\ y(0) = 1.$ 6.4. $y' = y^2 + e^x,\ y(0) = 0.$

6.5. $y' = x^2 + y,\ y(0) = 1.$ 6.6. $y' = xe^x + y,\ y(0) = 1.$

6.7. $y' = \sin x + \cos x,\ y(0) = 0.$ 6.8. $y' = x^2 - y^2,\ y(1) = 2.$

6.9. $y' = x + \cos y,\ y(0) = 0.$ 6.10. $y' = y + xe^{x^2},\ y(0) = 1.$

6.11. $y' + xy = e^x,\ y(0) = 1.$ 6.12. $y' - xy = e^y,\ y(0) = 1.$

6.13. $y' = x^2 + y^2,\ y(1) = 1.$ 6.14. $y' - xy = e^y,\ y(0) = 1.$

6.15. $y' = x^2 - e^x,\ y(0) = 1.$ 6.16. $y' = y^2 + e^x,\ y(0) = 1.$

6.17. $y' = xe^x,\ y(0) = 1.$ 6.18. $y' = xe^x,\ y(1) = 1.$

6.19. $y' = x^2 + \cos y,\ y(0) = 0.$ 6.20. $y' = xe^{-x} + \ln y,\ y(0) = 1.$

6.21. $y' = e^x + y^2,\ y(0) = 0.$ 6.22. $y' = e^y + xy,\ y(0) = 0.$

6.23. $y' = x + \ln y,\ y(1) = 1.$ 6.24. $y' = x^2 + y,\ y(1) = 1.$

6.25. $y' = x^2 + \cos y,\ y(1) = 0.$ 6.26. $y' = e^x + y,\ y(0) = 1.$

6.27. $y' = ye^x,\ y(0) = 1.$ 6.28. $y' = x^2 + \cos y,\ y(0) = 0.$

6.29. $y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 1.$ 6.30. $y' = e^x + xy,\ y(0) = 0.$

Теоретичні питання

1. Числові ряди. Основні означення.
2. Гармонічний ряд і його природа.
3. Геометричний ряд і його природа.
4. Властивості числових рядів.
5. Необхідна умова збіжності числових рядів.
6. Необхідна і достатня умови збіжності числових рядів з додатніми членами.
7. Теореми порівняння числових рядів з додатніми членами.
8. Ознака Даламбера.
9. Радикальна ознака Коші.
10. Інтегральна ознака Коші.
11. Узагальнений гармонічний ряд та його природа.
12. Властивості рядів з додатніми членами.
13. Знакопочережні числові ряди. Теорема Лейбніца.
14. Теорема Коші збіжності знакозмінних числових рядів.
15. Абсолютна і умовна збіжності знакозмінних числових рядів, їх властивості.
16. Степеневі ряди, їх інтервал і радіус збіжності.

17. Властивості степеневих рядів.

18. Степеневі ряди по степенях $x-a$.

19. Ряди Тейлора і Маклорена, необхідна і достатня умови їх збіжності.

20.Ряди Маклорена для функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, їх інтервал і радіус збіжності.

21. Біноміальний ряд.

22. Застосування рядів до наближеного обчислення визначених інтегралів.

23. Застосування рядів до знаходження розв'язків диференціальних рівнянь.

Приклади тестових задач

1. Виходячи з означення збіжності числового ряду, встановити природу ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

а) $\lim_{u\to\infty} S_u = 1$ -ряд збіжний. б) $\lim_{u\to\infty} S_u = 0$ -ряд розбіжний.

в) $\lim_{u\to\infty} S_u = \infty$ - ряд розбіжний.

2. Встановити природу ряду $\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{-}$.

а) ряд збіжний за інтегральною ознакою Коші.
б) ряд збіжний за теоремою 1 порівняння рядів.
в) ряд збіжний за радикальною ознакою Коші.

3. Встановити природу ряду $\sum_{u=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$.

а) ряд збіжний, оскільки збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ і $\lim_{u\to\infty}\frac{a^u}{\ln} = 1$.

б) ряд розбіжний, оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

в) ряд збіжний, оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. Встановити природу ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$.

а) ряд розбіжний за радикальною ознакою Коші: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^2>1$.

б) ряд збіжний, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

в) ряд збіжний за ознакою ……..

5. Дослідити на абсолютну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$.

а) ряд абсолютно збіжний.
б) ряд абсолютно розбіжний.
в) ряд розбіжний.

6. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$.

а) [-2.2). б) (-2.2). в) (-2.2].

7. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$.

а) $f(x)=1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2^1\cdot 2^2}+\dfrac{x^3}{3^1\cdot 2^2}+\ldots$

б) $f(x)=1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{x^3}{2^3}+\ldots$

в) $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2\cdot 1}+\dfrac{x^3}{3\cdot 1}+\ldots$

8. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ з точністю до 0,001.

а) 0,832. б) 0,7476. в) 0,747.

Змістовий модуль №2. Елементи теорії ймовірностей

Питання для самоконтролю (розділ 14)

1. Елеменити комбінаторики

1.1. Дайте означення і запишіть формулу для обчислення числа розміщень взятих з n по m елементів.

1.2. Дайте означення і запишіть формулу для обчислення числа перестановок m елементів.

1.3. Дайте означення і запишіть формулу для обчислення числа комбінацій взятих з n по m елементів. Що більше C_n^m чи A_n^m?

2. Випадкові події

2.1. Що таке ймовірність випадкової події?

2.2. У чому полягає статистичне означення ймовірності випадкової події?

2.3. Дайте означення сумісних і несумісних випадкових подій.

2.4. Дайте означення залежних і незалежних випадкової події.

2.5. Дайте класичне означення ймовірності випадкової події. Поясніть нерівність $0 < P(A) < 1$.

2.6. Що таке сума і добуток випадкових подій?

2.7.Сформулюйте теорему додавання несумісних випадкових подій.

2.8.Сформулюйте теорему множення незалежних випадкових подій.

2.9.Сформулюйте теорему додавання сумісних випадкових подій.

2.10. Що таке умовна ймовірність? Сформулюйте теорему множення залежних випадкових подій.

2.11. Запишіть формулу повної ймовірності і поясніть її використання.

2.12. Запишіть формулу Бейеса і поясніть її використання.

2.13. Які дослідження називають дослідженнями Бернуллі? Запишіть і поясніть формулу Бернуллі.

2.13. Запишіть і поясніть використання формули Пуассона.

2.14. Запишіть і поясніть використання локальної формули Лапласа.

2.15. Запишіть і поясніть використання інтегральної формули Лапласа.

3. Випадкові величини

3.1. Які випадкові величини називають дискретними?

3.2. Що таке закон розподілу дискретних випадкових величин?

3.3. Як можна задати дискретні випадкові величини?

3.4. Запишіть закони розподілу Бернуллі і Пуассона .

3.5. Дайте означеня числових характеристик дискретних випадкових величин. Які їх властивості?

3.6. Запишіть інтегральну функцію розподілу ймовірностей. Які її властивості?

3.7. Наведіть приклад дискретної випадкової величини, запишіть для неї функцію розподілу ймовірностей і побудуйте її графік.

3.8. Які властивості функції розподілу неперервної випадкової величини, її графік.

3.9. Яку функцію називають густиною розподілу ймовірностей? Вкажіть і доведіть її властивості.

3.10. Які числові характеристики неперервних випадкових величин? Запишіть формули для їх обчислення.

3.11. Яку випадкову велчину називають рівномірно розподіленою?

3.12.Запишіть функцію і густину розподілу ймовірностей рівномірно розподіленої неперервної випадкової величини.

3.13. Знайдіть числові характеристики рівномірно розподіленої випадкової величини .

3.14. Яку неперервну випадкову величину називають нормально розподіленою?

3.15. Знайдіть числові характеристики нормально розподіленої неперервної випадкової величини.

3.16.Для неперервної випадкової величини X знайдіть ймовірність $P(\alpha < X < \beta)$.

3.17. Знайдіть ймовірність $P(\alpha < X < \beta)$ для нормально розподіленої випадкової величини.

3.18. Знайдіть ймовірність $P(|X - a| < \delta)$ для нормально розподіленої випадкової величини.

3.19. У чому полягає правило “трьох сігм”?

Приклади розв'язання задач

1. Доля браку для виробів деякого заводу складає 0.1%. Знайти ймовірність того, що серед 1000 навмання відібраних виробів буде не більше одного бракованого.

Оскільки $m=0$ і $m=1$, а число досліджень $n=1000$ - велике, ймовірність браку $p=0.001$ - мала, то для розв'язання задачі використаємо формулу Пуассона $P_n(m)\approx\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, де $\lambda=np<10$.

Маємо $\lambda=1000\cdot 0.001=1$ і шукана ймовірність $P_{1000}(0)+P_{1000}(1)\approx$

$$\approx\frac{1^0\cdot e^{-1}}{0!}+\frac{1^1\cdot e^{-1}}{1!}=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{2}{e}=0.736.$$

2. При встановленні зараженості зерна жита знайдено, що в 1 кг міститься в середньому 10 шкідників. Яка ймовірність того, що в 100 г немає жодного шкідника?

Формулу Пуассона можна використовувати і коли задано середнє число λ_1 появи випадкової події в якійсь одиниці області (площі, об'єму, часу) і розмір S цієї області, в середині якої мають місце випадкові події. В цьому випадку $\lambda=\lambda_1\cdot S$.

З умови задачі знаходимо $\lambda_1=10$, а $S=100г=0.1кг$. Тоді параметр $\lambda=\lambda_1\cdot S=10\cdot 0.1=1$. Оскільки $m=0$, то за формулою Пуассона $P_S(0)\approx\dfrac{e^{-1}}{0!}\cdot\lambda^0=e^{-1}=0.368.$

3. На 1 м^2 площі посіву є в середньому 0.5 стеблин бур'яну. Знайти ймовірність того, що на 4 м^2 буде дві стеблини бур'яну.

За умовою задачі $m=2,\ \lambda_1=0.5,\ S=4$, тоді $\lambda=0{,}5\cdot 4=2$ і за формулою Пуассона $P_S(2)\approx\dfrac{2^2}{2!}\cdot e^{-2}=\dfrac{2}{e^2}=0.271$.

4. У групі серед 15 студентів є 5 відмінників. Знайти ймовірніс того, що:

1) навмання назване прізвище є студент-відмінник.
2) серед трьох навмання названих прізвищ немає відмінників.
3) серед трьох навмання названих прізвищ два відмінники.
4) серед трьох навмання тназваних прізвищ хоч один відмінник.

Розв'язання.

1) Виходячи з умови задачі $N=15$, а $N(A)=5$. За класичним означенням ймовірності випадкової події $P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

2). Оскільки $N=C_{15}^{3}=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}=455$, а

$N(A)=C_{10}^{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$, то $P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{120}{455}=0.264.$

3). Оскільки $N=C_{15}^{3}=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}=455$, а $N(A)=C_{5}^{2}\cdot C_{10}^{1}=$ $=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot 10=100$, то $P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{100}{455}=0.22.$

4). Події: серед трьох названих прізвищ є хоч один відмінник *(A)* і жодного відмінника $(\overline{A})$ утворюють повну групу подій, тобто $P(A+\overline{A})=1$. Оскільки ці події несумісні, то за теоремою додавання несумісних подій отримуємо $P(A)+P(\overline{A})=1$. У другій задачі встановлено, що $P(\overline{A})=0.264$. Тоді $P(A)=1-0.264=0.736.$

5. Схожість насіння деякої рослини дорівнює 95%. Знайти ймовірність того, що з 10 посіяних насінин зійде: 1) шість насінин; 2) не менше девяти.

Використаємо формулу Бернуллі $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, де n – загальне число незалежних повторних досліджень, m – число реалізації в них випадкової події A, p – ймовірність появи випадкової події A в одному дослідженні Бернуллі, $q=1-P(A)=P(\overline{A})$.

1) За умовою задачі $n=10$, а $m=6$. За формулою Бернуллі $P_{10}(6)=C_{10}^{6}\cdot 0.95^{6}\cdot 0.05^{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=0.00096.$

2) За умовою задачі $n=10$, а $m=9$ і $m=10$. За формулою Бернуллі знаходимо

а) $P_{10}(9)=C_{10}^{9}\cdot 0.95^{9}\cdot 0.05=C_{10}^{1}\cdot 0.95^{9}\cdot 0.05=0.315.$

б) $P_{10}(10)=C_{10}^{10}\cdot 0.95^{10}\cdot 0.05^{0}=C_{10}^{0}\cdot 0.95^{10}\cdot 1=0.6.$

Тоді $P_{10}(9)+P_{10}(10)=0.315+0.6=0.915.$

6, Виконано 500 пострілів у мішень. Знайти ймовірність того, що буде 400 попадань, якщо ймовірність попадання при одному пострілі для деякого стрілця дорівнює 0.7.

За умовою задачі $n = 500, m = 400, p = 0.78, q = 1 - 0.78 = 0.22.$

Оскільки числа n і m великі, то використання формули Бернуллі приводить до дуже громіздких обчислень і її використання практично неможливе.

У таких випадках використовують наближену формулу Лапласа

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad \text{де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ а } x = \frac{m - np}{\sqrt{noq}}.$$

Функція $\varphi(x)$ парна, існує таблиця значень цієї функції для $0 \le x < 3{,}99$. Якщо $x. > 5$, то приймають, що $\varphi(x) = 0$.

Знаходимо $x = \dfrac{400 - 500 \cdot 0.78}{\sqrt{500 \cdot 0.78 \cdot 0.22}} = 1.08.$ За таблицею значень функції $\varphi(x)$ знаходимо $\varphi(x) = 0.2227$.

Отже, $P_{500}(400) \approx \dfrac{0.2227}{9.26} = 0.024.$

7. Всановлено, що в насіневій пшениці є 0.04% бракованих насінин.Знайти ймовірність того, що серед 1000 навмання взятих насінин буде виявлено 5 бракованих.

Оскільки ймовірність випадкової події дуже мала, то використаємо формулу Пуассона $P_n(m) \approx \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^m}{m!}$, де $\lambda = np < 10$.

За умовою задачі $n = 1000, p = 0.004$, тоді $\lambda = 1000 \cdot 0.004 = 4.$

За формулою Пуассона знаходимо $P_{1000}(5) \approx \dfrac{e^{-4} \cdot 4^5}{5!} = 0.154.$

8. Виконано 500 пострілів у мішень. Знайти ймовірність того, що буде від 450 до 480 попадань, якщо ймовірність попадання при одному пострілі для деякого стрільця дорівнює 0.85.

Для розв’язання таких задач використовують інтегральну теорему Лапласа, зміст якої визначається формулою

$$P_n(a < m < b) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \text{ де } \alpha = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \beta = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}.$$

Якщо ввести функцію Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$ то останню формулу можна записати у вигляді $P_n(a<m<b)=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha).$ Функція $\Phi(x)$ непарна, складена таблиця її значень для $0<x<5$. Якщо $x>5$, то функція $\Phi(x)=0.5.$

За умовою задачі $n=500, a=450, b=480, p=0.85,$ тоді $q=1-0.85=0.15.$ Знаходимо $\alpha=\frac{450-500\cdot 0.85}{\sqrt{500\cdot 0.85\cdot 0.15}}=2.7,$

$\beta=\frac{480-500\cdot 0.85}{\sqrt{500\cdot 0.85\cdot 0.15}}=5.9.$ Оскільки $\Phi(2.7)=0.4965, \Phi(5.9)=0.5$, то шукана ймовірність $P_{500}(450<m<480)\approx 0.5000-0.4965=0.0035.$

9. На окремих картках написані букви *в, е, і, н, р.* Перемішавши картки, складають їх послідовно в рядок. Знайти ймовірність того, що отримаємо слово "*Рівне*".

Оскільки $N=P_5=5!=120,$ а $N(A)=1,$ то $P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{1}{120}.$

10. У колоді 32 карти.Навмання беруть 4 карти. Яка ймовірність того, що серед них буде хоч один туз?

Позначимо подію "хоч один туз" через *T,* а "жоден туз" – через $\overline{T}$. Ці події утворюють повну групу подій,тобто $P(T+\overline{T})=1.$ Події T і $\overline{T}$ несумісні, тому $P(T)+P(\overline{T})=1$, звідки $P(T)=1-P(\overline{T})$. Оскільки

$P(\overline{T})=C_{28}^4$, а $N=C_{32}^4$, то $P(T)=1-\frac{C_{28}^4}{C_{32}^4}=1-\frac{\frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{4!}}{\frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}{4!}}=$

$=1-\frac{4095}{7192}\approx 0.43.$

11. У коробці 4 білих і 6 чорних куль. З коробки беруть по одній усі кулі. Знайти ймовірність того, що останньою буде чорна куля (подія *A*).

Оскільки $N=6$, а $N(A)=4,$ то $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$

12. На книжній полиці ї 5 підручників з математики і 3 з фізики. Знайти ймовірність того, що два підручники з одного предмета стоять поряд (подія A).

За умовою задачі $N = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$, а $N(A) = C_5^2 + C_3^2 = = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 10 + 3 = 13$. Отже, $P(A) = \frac{13}{28}$.

13. У групі 25 студентів. Іспит з вищої матаматики здали 3 студенти на “відмінно”, 6 - на “добре” і 9 - на “задовільно”. Знайти ймовірність того, що прізвища студенів, які не здали іспит стоять поряд (подія A).

Виходячи з умови задачі $N = C_{25}^2 = \frac{25 \cdot 24}{1 \cdot 2} = 25 \cdot 12 = 300$, а $N(A) = C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$. Отже, шукана ймовірність $P(A) = \frac{21}{300} = \frac{7}{100}$.

14. В одній коробці є 5 білих і 7 чорних куль, а в другій – 3 білих і 5 чорних. З кожної коробки беруть по одній кулі. Знайти ймовірність того, що одна з вийнятих куль є біла, а друга – чорна.

Введемо події:

B_1 - з першої коробки взято білу кулю, $P(B_1) = \frac{5}{12}$;

$\overline{B_1}$ - з першої коробки взято чорну кулю, $P(\overline{B}_1) = \frac{7}{12}$;

B_2 - з другої коробки взято білу кулю, $P(B_2) = \frac{3}{8}$;

$\overline{B}_2$ - з другої коробки взято чорну кулю, $P(\overline{B}_2) = \frac{5}{8}$.

Тоді подія $A = B_1 \cdot \overline{B}_2 + B_2 \cdot \overline{B}_1$. За теоремою додавання несумісних і множення незалежних подій отримуємо

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(\overline{B}_2) + P(B_2) \cdot P(\overline{B}_1) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{12} = \frac{23}{48}.$$

15. У магазин надійшли економні електричні лампочки з трьох заводів з ймовірностями 0.2; 0.5 і 0.3. Ймовірність вийти з ладу протягом року лампочки, виготовленої на першому заводі, дорівнює

0.2, на другому – 0.1, на третьому – 0.3. Знайти ймовірність того, що навмання взята лампочка працювала протягом року (подія А).

Введемо події:

B_1 - навмання взята лампока виготовлена на першому заводі, $P(B_1) = 0.2$;

B_2 - навмання взята лампока виготовлена на другому заводі, $P(B_2) = 0.5$;

B_3 - навмання взята лампока виготовлена на третьому заводі, $P(B_3) = 0.3$.

За умовою задачі ймовірності виготовлення заводами бракованих лампочок дорівнюють, відповідно, $P_{B_1}(A) = 0.2$, $P_{B_2}(A) = 0.1$, $P_{B_3}(A) = 0.3$.

За формулою повної ймовірності шукана ймовірність $P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) P_{B_i}(A)$, звідки $P(A) = 0.2 \cdot 02 + 0.5 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.3 = 0.18$.

16. У магазин надійшли економні електричні лампочки з трьох заводів.з ймовірностями 0.2; 0.5 і 0.3. Ймовірність ви з ладу протягом року лампочки, виготовленої на першому заводі, дорівнює 0.2, на другому – 0.1, на третьому – 0.3.Навмання взята лампочка вийшла з ладу протягом року . Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на третьому заводі.

Використавши результати попередньої задачі, за формулою Бейеса знаходимо $P_A(B_3) = \dfrac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)} = \dfrac{0.3 \cdot 0.3}{0.18} = 0.5$.

17. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	-1	6	13	20	27	$\sum p_i$
P	0.2	0.1	0.4	0.2	0.1	1

Знайти:

1) математичне сподівання $M(X)$;
2) дисперсію $D(X)$;
3) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;
4) інтегральну функцію розподілу, побудувати її графік.

Розв’язок.

1). За означенням математичне сподівання $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Знаходимо $M(X)=-1\cdot 0.2+6\cdot 0.1+13\cdot 0.4+20\cdot 0.2+27\cdot 0.1=12.3.$

2). За означенням дисперсія $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$, де

$M(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$.

Оскільки $M(X^2)=(-1)^2 0.2+6^2\cdot 0.1+13^2\cdot 0.4+20^2\cdot 0.2+$

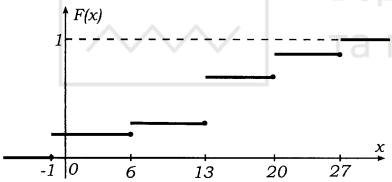
$+27^2\cdot 0.1=224.3$, то $D(X)=224.3-12.3^2=223.3-151.29=73.01.$

3).Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$

Знаходимо $\sigma(X)=\sqrt{73.01}\approx 8.55.$

4). За означенням інтегральна функція розподілу $F(x)=P(X<x)=P(-\infty<X<x)$.

Знаходимо



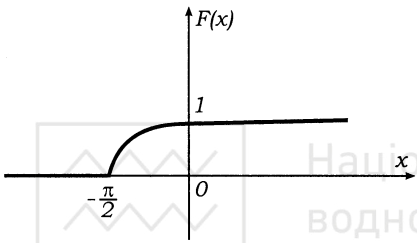
$$F(x)=\begin{cases} 0,\ якщо\ x\le -1, \\ 0.2,\ якщо\ -1<x\le 6, \\ 0.2+0.1=0.3,\ якщо\ 6<x\le 13, \\ 0.3+0.4=0.7,\ якщо\ 13<x\le 20, \\ 0.7+0.2=0.9,\ якщо\ 20<x\le 27, \\ 0.9+0.1=1,\ якщо\ x>27. \end{cases}$$

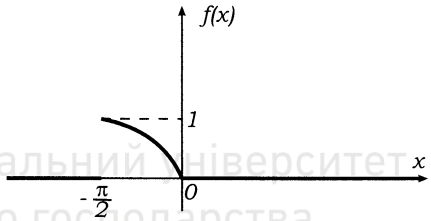
18. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(x)=\begin{cases} 0,\ якщо\ x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x,\ якщо\ -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0, \\ 1,\ якщо\ x>0. \end{cases}$ розподілу.

Знайти густину $f(x)$ розподілу ймовірностей, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

За означенням густина ймовірностей

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, \ x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ -\sin x, \ -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0, \\ 0, \ x>0. \end{cases}$$





Математичне сподівання $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} x\cdot 0dx+$

$$+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x\cdot(-\sin x)dx+\int\limits_{0}^{\infty} x\cdot 0dx=-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x\sin xdx=\left|\begin{matrix} u=x, du=dx \\ dv=\sin xdx, v=-\cos x \end{matrix}\right|=$$

$$=-(-x\cos x\Big|_{-\pi/2}^{0}+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos xdx)=-\sin x\Big|_{-\pi/2}^{0}=-1.$$

Дисперсія $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$. Знаходимо

$$M(X^2)=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x^2(-\sin x)dx=-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x^2\sin xdx=\left|\begin{matrix} u=x^2, du=2xdx, \\ dv=\sin xdx, v=-\cos x \end{matrix}\right|=$$

$$= -(-x^2\cos x\Big|_{-\pi/2}^{0} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x\cos x dx) = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx, \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= -2(x\sin x + \cos x)\Big|_{\pi/2}^{0} = -2(-\frac{\pi}{2}+1) = \pi - 2.$$

Тоді дисперсія $D(X) = \pi - 2 - (-1)^2 = \pi - 3 \approx 0.14.$

19. Неперервна випадкова величина задана інтегральною функцією $F(x) = \begin{cases} 0, x \le 3, \\ \frac{1}{25}(x-3)^2, 3 < x \le 8, \\ 1, x > 8. \end{cases}$ розподілу ймовірностей.

Знайти:

1) густину ймовірностей $f(x)$;

2) побудувати графік функцій $F(x)$ і $f(x)$;

3) знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

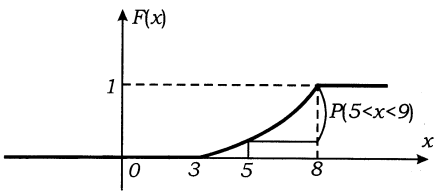
4) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(5, 9)$.

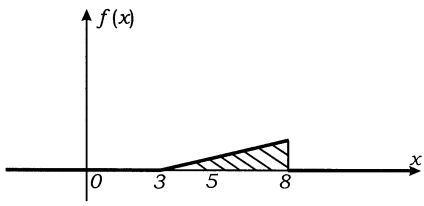
Розв'язання.

1). За означенням густина ймовірностей

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, x \le 3, \\ \frac{2}{25}(x-3), 3 < x \le 8, \\ 0, x > 8. \end{cases}$$

2). Графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$ мають вигляд





3). Математичне сподівання $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{3} x\cdot 0dx+$

$$+\int\limits_{3}^{8} x\cdot\frac{2}{25}(x-3)dx+\int\limits_{8}^{\infty} x\cdot 0dx=\frac{2}{25}\int\limits_{3}^{8}(x^2-3x)dx=\frac{2}{25}\left(\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_3^8=$$

$$=\frac{2}{25}\left[\left(\frac{8^3}{3}-3\cdot\frac{3^2}{2}\right)-\left(\frac{3^3}{3}-3\cdot\frac{3^2}{2}\right)\right]=\frac{19}{3}.$$

Дисперсія $D(X)=V(X^2)-M^2(X)$, де $M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$.

Аналогічно до попереднього знаходимо

$$M(X^2)=\int\limits_{3}^{8} x^2\frac{2}{25}(x-3)dx=\frac{2}{25}\int\limits_{3}^{8}(x^3-3x^2)dx=\frac{2}{25}\left(\frac{x^4}{4}-3\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_3^8=\frac{83}{2}.$$

Тоді дисперсія $D(X)=\frac{83}{2}-\left(\frac{19}{3}\right)^2=\frac{83}{2}-\frac{361}{9}=\frac{25}{18}=1.39$.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1.39}\approx 1.18$.

4). Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (α,β) знайдемо за формулами $P(\alpha<X<)=F(\beta)-F(\alpha)$ або $P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Оскільки $\alpha=5$, а $\beta=9$, то знаходимо

$$P(5<X<9)=F(9)-F(5)=1-\frac{1}{25}(5-3)^2=1-\frac{4}{25}=\frac{21}{25}$$ або

$$P(5<X<9)=\int\limits_{5}^{9} f(x)dx=\int\limits_{3}^{5} 0dx+\int\limits_{5}^{8}\frac{2}{25}(x-3)dx+\int\limits_{8}^{9} 0dx=\frac{2}{25}\cdot\frac{(x-3)^2}{2}\Bigg|_5^8=\frac{21}{25}.$$

20. Випадкові відхилення розміру деталі від номіналу розподілені нормально. Математичне сподівання розміру деталі дорівнює 250 мм, а середнє квадратичне відхилення – 0.8мм. Якісними рахують деталі в яких розміри знаходяться в інтервалі (249,252). Знайти : 1) ймовірність виготовлення якісної деталі; 2) ймовірність того, що розмір навмання взятої деталі буде відхилятись від проектного по абсолютній величині менше ніж на 2мм.

Нехай X -- випадковий розмір деталі. За умовою задачі $M(X)=a=250$ мм, $\sigma(X)=0.8$ мм, $\alpha=249$ мм, $\beta=252$ мм, а $\delta=2$мм.

1). Використаємо формулу $P(\alpha<X<\beta)=\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma})$.

Знаходимо $P(249<X<252)=\Phi(\frac{252-250}{0.8})-\Phi(\frac{249-250}{0.8})=$

$=\Phi(2.5)-\Phi(1.25)=0.869$.

2). Використаємо формулу $P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$. Отримуємо

$P(|X-250|<2)=2\Phi(\frac{2}{0.8})=2\Phi(2.5)=2\cdot 0.494=0.988$.

Самостійна робота

Завдання 1. Знайти вказані ймовірності

1.1. Фірма має три автомобілі. Ймовірність того, що на протязі робочого часу вийде з ладу перший автомобіль дорівнює 0,7. Для другого і третього автомобілів ця ймовірність, відповідно, 0,6 і 0,8 . Яка ймовірність того, що на протязі робочого часу:

1) вийде з ладу тільки один автомобіль ;

2) вийдуть з ладу тільки два автомобілі ;

3) працюватимуть три автомобілі .

1.2. На залік винесено 12 питань. Студент отримає залік, якщо відповість на 2 питання. Яка ймовірність отримати студентом залік, якщо він не знає 4 питання ?

1.3. У магазин завезено 10 мішків борошна вищого гатунку і 5 мішків борошна з домішками борошна першого ґатунку.Яка ймовірність того, що все борошно буде прийнято, як борошно вищого ґатунку , якщо буде перевірено три навмання взяті мішки .

1.4. Для побудови зрошувальної системи господарство має два екскаватори . Ймовірність того , що перший екскаватор виконає план дорівнює 0,8 , а другий – 0,7 . Знайти ймовірність того , що :

1) план виконає тільки один екскаватор ;

2) план виконає хоч один екскаватор ;

3) план виконає господарство .

1.5. У бригаді працюють 9 чоловіків і 6 жінок. Знайти ймовірність того , що :

1) навмання назване прізвище є чоловік ;

2) навмання названі 3 прізвища є жінки ;

3) серед трьох названих прізвищ буде 1 жінка і 2 чоловіки .

1.6. Студент знає 25 з 40 екзаменаційних питання. Екзаменаційні білети містять три питання. Знайти ймовірність того, що студент відповість :

а) на три питання ;

б) тільки на два питання ;

в) тільки на одне питання .

1.7. У двох коробках є по 7 білих і 12 чорних однакових куль. З першої коробки навмання взяли одну кулю і переклали її в другу коробку. Затім з другої коробки взяли одну кулю. Яка ймовірність того , що то буде чорна куля .

1.8. Два мисливці незалежно один від одного стріляють у вовка . Ймовірність попадання при одному пострілі для першого мисливця є 0,7, а для другого – 0,6.Мисливці зробили по одному пострілу. Знайти ймовірність того, що :

1) буде тільки одне попадання ;

2) буде хоч одне попадання .

1.9. Три мисливці стріляють незалежно один від одного у дикого кабана. Ймовірність попадання при одному пострілі для першого мисливця дорівнює 0,6, для другого – 0,7 і для третього – 0,8. Мисливці зробили по одному пострілу у біжучого кабана. Знайти ймовірність того , що :

1) буде тільки два попадання ;

2) буде хоч одне попадання .

1.10. У двох коробках є по 8 білих і 7 чорних однакових куль. З першої коробки навмання взяли одну кулю і переклали її в другу коробку . Затім з другої коробки взяли одну кулю. Яка ймовірність того, що то буде біла куля .

1.11. Два мисливці незалежно один від одного стріляють у вовка. Ймовірність попадання при одному пострілі для першого мисливця є 0,7, а для другого – 0,6. Мисливці зробили по одному пострілу . Знайти ймовірність того , що :

1) буде два попадання ;

2) не буде жодного попадання ;

3) буде хоч одне попадання .

1.12. Три мисливці стріляють незалежно один від одного у дикого кабана . Ймовірність попадання при одному пострілі для першого мисливця дорівнює 0,6, для другого – 0,7 і для третього – 0,8. Мисливці зробили по одному пострілу у біжучого кабана . Знайти ймовірність того , що :

1) буде тільки одне попадання ;

2) не буде жодного попадання ;

3) буде хоч одне попадання .

1.13. Для сигналізації про аварію в приміщенні встановлено три незалежно працюючих сигналізатори . Ймовірність того, що при аварії спрацює перший сигналізатор дорівнює 0,6 , для другого і третього сигналізаторів ці ймовірності дорівнюють, відповідно, 0,7 і 0,8 . Знайти ймовірність того , що при аварії спрацюють :

1) тільки один сигналізатор ;

2) хоч один сигналізатор .

1.14. Для сигналізації про аварію в приміщенні встановлено три незалежно працюючих сигналізатори . Ймовірність того , що при аварії спрацює перший сигналізатор дорівнює 0,6, для другого і третього сигналізаторів ці ймовірності дорівнюють , відповідно, 0,7 і 0,8. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацюють :

1) три сигналізатори ;

2) тільки два сигналізатори ;

3) хоч один сигналізатор .

1.15. На трьох станках при однакових і незалежних умовах виготовляють однакові деталі . Які зберігаються в одному місці на складі . На першому станку виготовляють 20 % , на другому – 30% , а на третьому – 50% усіх деталей . Ймовірність того , що навмання взята деталь, яка виготовлена на першому станку, бракована дорівнює 0,03, для другого і третього станків ці ймовірності дорівнюють , відповідно, 0,02 і 0,01. Знайти ймовірність того, що навмання взята на складі деталь бракована .

1.16. На трьох станках при однакових і незалежних умовах виготовляють однакові деталі. Які зберігаються в одному місці на складі . На першому станку виготовляють 20 % , на другому – 30% , а на третьому – 50% усіх деталей . Ймовірність того , що навмання взята деталь, яка виготовлена на першому станку , бракована дорівнює 0,03, для другого і третього станків такі ймовірності дорівнюють,

відповідно, 0,02 і 0,01. Навмання взята на складі деталей бракована . Яка ймовірність того , що вона виготовлена на другому станку?

1.17. У ящику 15% яблук мають вади. Знайти ймовірність того, що навмання взятих 10 яблук буде :

1) три яблука з вадами ;

2) не більше трьох яблук матимуть вади .

1.18. Три стрільці в однакових і незалежних умовах стріляють в одну мішень. Ймовірність попадання в мішень при одному пострілі 0,75, для другого і третього стрільців така ймовірність дорівнює, відповідно, 0,7 і 0,8 . Знайти ймовірність того , що при одному залпі :

а) попадуть три стрільці ;

б) попаде хоч один стрілець .

1.19. Три стрільці в однакових і незалежних умовах стріляють в одну мішень . Ймовірність попадання в мішень при одному пострілі 0,75 , для другого і третього стрільців ця ймовірність дорівнює, відповідно , 0,7 і 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному залпі :

а) попадуть тільки два стрільці ;

б) жоден стрілець не попаде у мішень .

1.20. В одній коробці є 5 білих і 6 синіх куль, а в другій коробці – 4 білих і 5 синіх куль. З першої коробки навмання взято одну кулю і перекладено у другу коробку. Затім з другої коробки навмання взято одну кулю . Знайти ймовірність того, що взята куля буде білою.

1.21. В одній коробці є 5 білих і 6 синіх куль, а в другій коробці – 4 білих і 5 синіх куль. З першої коробки навмання взято одну кулю і перекладено у другу коробку. Затім з другої коробки взято навмання послідовно дві кулі . Знайти ймовірність того , що обидві кулі сині.

1.22. Через зупинку „Студентська” проходять 5 маршруток № 33 і 9 маршруток № 43. Знайти ймовірність того, що другою маршруткою , яка пройде з певного моменту часу буде маршрутка № 43.

1.23. На овочеву базу надходить вода з трьох джерел, причому з першого джерела надходить 40% необхідної кількості води, з другого – 45% і з третього – 15%. Ймовірність того , що рівень мінералізації води з першого джерела не перевищує норму дорівнює 0,7 , дорівнює , відповідно, 0,75 і 0,8. Знайти ймовірність того, що вода, яка надходить на базу не перевищує рівень мінералізації .

1.24. Студент знає 20 з 35 винесених на залік питань. Яка ймовірність того , що студент отримає залік, якщо для цього треба відповісти не менше, як на два питання ?

1.25. Для сигналізації про пожежу в приміщенні встановлено три незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії спрацює перший сигналізатор дорівнює 0,75 , для другого і третього сигналізаторів ця ймовірність дорівнює, відповідно, 0,8 і 0,85. Яка ймовірність того, що при аварії спрацюють не менш, ніж два сигналізатори .

1.26. На станцію очистки води поступає по трьох водогонах з різних джерел, причому по першому водогону подається половина всієї необхідної кількості води , а по двох інших, відповідно, 20% і 30% . Ймовірність подачі води першим водогоном з підвищеним вмістом заліза дорівнює 0,05 для двох інших водогонів ця ймовірність дорівнює, відповідно, 0,04 і 0,03 . На станцію поступила вода з підвищеним вмістом заліза . Знайти ймовірність того, що вода поступила по другому водогону .

1.27. На ділянці зрошувального каналу є три незалежно працюючі затвори на водовипусках . Ймовірність того, що на протязі дня буде відкритим перший затвор дорівнює 0,2 , для другого і третього затворів така ймовірність дорівнює, відповідно, 0,3 і 0,2. Знайти ймовірність того, що на протязі дня буде :

1) відкритим не більше , як один затвор ;

2) відкритим хоч один затвор .

1.28. На склад поступає 50% однакових деталей виготовлених на заводі №1, 20% і 30% деталей виготовлених на заводах, відповідно , № 2 і № 3 . Заводи дають , відповідно , 0,1 % , 0,3 % і 0,2 % браку . Яка ймовірність того , що навмання взята на складі деталь якісна ?

1.29. На склад поступає 50% однакових деталей виготовлених на заводі №1, 20% і 30% деталей виготовлених на заводах , відповідно, № 2 і № 3. Заводи дають , відповідно , 0,1 % , 0,3 % і 0,2 % браку . Навмання взята на складі деталь бракована. Яка ймовірність того, що її виготовлено на заводі № 3.

1.30. Серед 20 студентів групи є 7 відмінників. Зі … групи навмання називають 8 студентів. Яка ймовірність того, що серед них буде 4 відмінники ?

Завдання 2. Знайти вказані ймовірності

2.1. Ймовірність реалізації випадкової події в кожному з повторних незалежних досліджень дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що в 1500 дослідженнях подія наступить 1100 разів .

2.2. Ймовірність реалізації випадкової події в кожному з повторних незалежних досліджень дорівнює 0,02 . Знайти ймовірність того , що в 100 дослідженнях подія наступить 10 разів .

2.3. На складі є 1000 однакових деталей. Серед них 8 деталей бракованих. Навмання взято 100 деталей. Знайти ймовірність того , що серед них є три бракованих .

2.4. Проведено 150 повторних незалежних досліджень. Знайти ймовірність того , що подія наступить від 70 до 90 разів, якщо ймовірність її в одному дослідженні дорівнює 0,6.

2.5. Врожайність насіння деякої рослини дорівнює 85%. Знайти ймовірність того, що з 500 посіяних насінин цієї рослини зійде 350 .

2.6. Ймовірність попадання при одному пострілі для деякого стрільця дорівнює 0,9.Стрілець виконав 100 пострілів. Знайти ймовірність того, що буде не менше 70 попадання .

2.7. Завод випускає 0,5 % бракованих деталей. Знайти ймовірність того , що з 200 відібраних навмання деталей буде 2 бракованих.

2.8. Завод випускає 0,5 % бракованих деталей. Знайти ймовірність того, що серед 200 навмання взятих деталей буде не більше однієї бракованої .

2.9. Ймовірність того , що прийметься навмання взятий кущ рози дорівнює 90% . Куплено чотири кущі . Знайти ймовірність того , що приймуться :

1) три кущі ;

2) не менше трьох кущів.

2.10. Для сигналізації про аварію встановлено три незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того , що при аварії спрацює кожний сигналізатор дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацюють:

1) два сигналізатори;

2) не менше двох сигналізаторів .

2.11. Насіння огірків містить 0,1 % бракованих насінин. Знайти ймовірність того , що серед 1000 насінин буде 5 бракованих .

2.12. Завод випускає 0,7% бракованих деталей . Знайти ймовірність того, що серед 500 навмання відібраних деталей буде три бракованих .

2.13. Ймовірність того, що витрата води на підприємстві не перевищує на протязі дня норму дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що витрата води буде нормальною протягом 5 з 6 робочих днів.

2.14. Відомо, що в середньому 20 % яблук мають скриті дефекти . Яка ймовірність того, що серед 15 куплених яблук не більше як два яблука мають дефекти ?

2.15. В 1 кг зерна знаходять в середньому 6 бракованих зернин . Яка ймовірність того, що в 200 г зерна не буде жодної бракованої зернини ?

2.16. Відомо , що в середньому в 1 кг овочів 0,2 % мають скриті дефекти . Яка ймовірність того, що в 1000 кг овочів буде не більше 2 кг з дефектами ?

2.17. Відомо, що в середньому 25 % мандарин мають скриті дефекти. Знайти ймовірність того, що серед 20 куплених мандарин буде від трьох до п'яти з дефектами .

2.18. Знайти ймовірність того, що при 625 повторних незалежних дослідженнях випадкова подія А з'явиться 415 разів, якщо ймовірність реалізації подій А в одному дослідженні дорівнює 0,64 .

2.19. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання 5000 зернин жита буде знайдено 5 бракованих , якщо жито має 0,04 % браку .

2.20. Знайти ймовірність того, що при 600 пострілах у мішень буде від 330 до 375 попадань, якщо ймовірність попадання в мішень при одному пострілі для деякого стрільця дорівнює 0,6 .

2.21. Яка ймовірність того, що серед 500 навмання відібраних деталей буде 3 бракованих, якщо ймовірність браку дорівнює 0,008 .

2.22. Ймовірність попадання в ціль при одному пострілі для деякого стрільця дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що серед 100 пострілів буде не менше 80 попадань .

2.23. Ймовірність виживання бактерій після радіоактивного опромінення дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що після опромінення з 1000 бактерій залишиться не менше 3 бактерій .

2.24. Ймовірність правильної відповіді на кожне з чотирьох питань екзаменаційного білета для деякого студента дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що студент відповість :

а) на три питання ;

б) не менше ніж на три питання .

2.25. Станок – автомат виготовляє пакети. Відомо , що він дає 0,7 % браку. Пакети реалізують пачками по 100 штук. Знайти ймовірність того , що у навмання взятий пачці буде три бракованих пакети .

2.26. Схожість насіння кукурудзи дорівнює 90 %. Знайти ймовірність того, що з 1000 посіяних насінин зійде не менше 800.

2.27. Станок – автомат розфасовує крупи у кілограмові пачки. Пачку рахують бракованою , якщо в ній відхилення від норми становить більше 15 г. Знайти ймовірність того , що серед 100 навмання взятих пачок круп буде не більше однієї бракованої, якщо ймовірність браку дорівнює 0,07 % .

2.28. Знайти ймовірність того, що при 1000 пострілах у мішень буде не менше 850 попадань, якщо ймовірність попадання при одному пострілі для деякого стрільця дорівнює 0,9 .

2.29. Серед 100 навмання взятих лимонів виявлено 3 зіпсованих . Лимони продають у ящиках по 200 лимонів . Знайти ймовірність того , що у навмання взятому ящику буде не менше 2 зіпсованих .

2.30. Відомо, що в середньому 20 % яблук мають скриті дефекти . Яка ймовірність того, що серед 15 куплених яблук не більше як два яблука мають дефекти ?

Завдання 3. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу у вигляді таблиці. Знайти її числові характеристики: математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

3.1.

X	23	25	28	29	31
P	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2

3.2.

X	17	21	25	27	29
P	0.2	0.3	0.2	0.1	0.2

3.3.

X	22	24	26	28	30
P	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

3.4.

X	10	12	16	19	21

P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

3.5.

X	22	25	27	30	32
P	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

3.6.

X	27	30	32	35	40
P	0.2	0.1	0.3	0.2	0.2

3.7.

X	10	12	14	16	20
P	0.2	0.1	0.2	0.3	0.2

3.8.

X	18	21	25	28	31
P	0.1	0.1	0.3	0.2	0.3

3.9.

X	56	60	64	67	70
P	0.1	0.1	0.3	0.3	0.2

3.10.

X	42	45	47	50	52
P	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

3.11.

X	41	46	49	51	55
P	0.1	0.2	0.3	0.1	0.3

3.12.

X	14	18	22	23	26

P	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

3.13.

X	75	78	80	84	85
P	0.1	0.2	0.3	0.1	0.3

3.14.

X	34	37	41	43	45
P	0.2	0.2	0.1	0.3	0.2

3.15.

X	21	25	28	30	33
P	0.2	0.1	0.2	0.3	0.2

3.16.

X	52	56	58	60	64
P	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

3.17.

X	29	31	34	37	40
P	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1

3.18.

X	15	17	20	23	27
P	0.2	0.1	0.2	0.3	0.2

3.19.

X	24	28	32	34	36
P	0.2	0.1	0.2	0.2	0.3

3.20.

X	30	35	39	42	46

P	0.1	0.1	0.3	0.2	0.3

3.21.

X	25	30	35	40	45
P	0.2	0.3	0.2	0.1	0.2

3.22.

X	5	10	15	20	25
P	0.1	0.3	0.4	0.1	0.1

3.23.

X	5	15	25	35	45
P	0.1	0.1	0.3	0.3	0.2

3.24.

X	3	8	13	18	23
P	0.2	0.2	0.3	0.2	0.1

3.25.

X	2	3	4	5	6
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

3.26.

X	-5	-1	3	7	11
P	0.2	0.4	0.2	0.1	0.1

3.27.

X	110	120	130	140	150
P	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1

3.28.

X	-10	0	10	20	30

P	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

3.29.

X	10	12	14	16	18
P	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1

3.30.

X	29	31	34	37	40
P	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1

Завдання 4. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(x)$ розподілу ймовірностей. Знайти : 1) густину $f(x)$ ймовірностей ; 2) числові характеристики : математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$; 3) ймовірність значень випадкової величини, належних заданому інтервалу (α, β) ; 4) побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$, вказати на них ймовірність $P(\alpha < X < \beta)$.

4.1. $F(x) = \begin{cases} 0, \ якщо \ x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, \ якщо \ 0 < x \le 2, \\ 1, \ якщо \ x > 2. \end{cases} \quad \alpha = 1, \beta = 3$

4.2. $F(x) = \begin{cases} 0, \ якщо \ x \le 0, \\ x, \ якщо \ 0 < x \le 1, \\ 1, \ якщо \ x > 1. \end{cases} \quad \alpha = 0.5, \beta = 2$

4.3. $F(x) = \begin{cases} 0, \ якщо \ x \le 2, \\ \dfrac{1}{2}x - 1, \ якщо \ 2 < x \le 4, \\ 1, \ якщо \ x > 4. \end{cases} \quad \alpha = 3, \beta = 5$

4.4. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 0, \\ \frac{1}{4}x, \text{ якщо } 0<x\le 4, \\ 1, \text{ якщо } x>4. \end{cases} \quad \alpha=2, \beta=5$

4.5. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le -1 \\ \frac{1}{3}(x+1), \text{ якщо } -1<x\le 2, \\ 1, \text{ якщо } x>2. \end{cases} \quad \alpha=0, \beta=3$

4.6. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 1, \\ x-1, \text{ якщо } 1<x\le 2, \\ 1, \text{ якщо } x>2. \end{cases} \quad \alpha=1.5, \beta=3$

4.7. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le,0 \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), \text{ якщо } 0<x\le \pi, \\ 1, \text{ якщо } x>\pi. \end{cases} \quad \alpha=\frac{\pi}{2}, \beta=\frac{3}{2}\pi$

4.8. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 0, \\ \frac{1}{3}x, \text{ якщо } 0<x\le 3, \\ 1, \text{ якщо } x>3. \end{cases} \quad \alpha=2, \beta=4$

4.9. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le,0 \\ \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \text{ якщо } 0<x\le \frac{\pi}{2}, \\ 1, \text{ якщо } x>\frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad \alpha=\frac{\pi}{4}, \beta=\pi$

4.10. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}(1+\sin x), \text{ якщо } -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{4}, \\ 1, \text{ якщо } x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ $\alpha=0, \beta=\dfrac{\pi}{2}$

4.11. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}(1+\sin 2x), \text{ якщо } -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{4}, \\ 1, \text{ якщо } x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ $\alpha=0, \beta=\dfrac{\pi}{2}$

4.12. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 4, \\ \dfrac{1}{2}x-2, \text{ якщо } 4<x\le 6, \\ 1, \text{ якщо } x>6. \end{cases}$ $\alpha=5, \beta=7$

4.13. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 0, \\ x^2, \text{ якщо } 0<x\le 1, \\ 1, \text{ якщо } x>1. \end{cases}$ $\alpha=0.5, \beta=2$

4.14. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 0, \\ x^3, \text{ якщо } 0<x\le 1, \\ 1, \text{ якщо } x>1. \end{cases}$ $\alpha=0.5, \beta=2$

4.15. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 1 \\ \dfrac{x_2-x}{2}, \text{ якщо } 1<x\le 2, \\ 1, \text{ якщо } x>2. \end{cases}$ $\alpha=1.5, \beta=3$

4.16. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{9}, \text{ якщо } 0<x\le 3, \\ 1, \text{ якщо } x>3. \end{cases}$ $\alpha=2, \beta=4$

4.17. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 0 \\ 3x^2+2x, \text{ якщо } 0<x\le \dfrac{1}{3}, \\ 1, \text{ якщо } x>\dfrac{1}{3}. \end{cases}$ $\alpha=\dfrac{1}{4}, \beta=\dfrac{2}{3}$

4.18. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, \text{ якщо } 0<x\le 2, \\ 1, \text{ якщо } x>2. \end{cases}$ $\alpha=1, \beta=3$

4.19. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, \text{ якщо } -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0, \\ 1, \text{ якщо } x>0. \end{cases}$ $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}, \beta=\dfrac{\pi}{4}$

4.20. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le \dfrac{3\pi}{4}, \\ \cos 2x, \text{ якщо } \dfrac{3\pi}{4}<x\le \pi, \\ 1, \text{ якщо } x>\pi. \end{cases}$ $\alpha=\dfrac{\pi}{2}, \beta=\dfrac{3}{2}\pi$

4.21. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 0, \\ 2\sin x, \text{ якщо } 0<x\le \dfrac{\pi}{6}, \\ 1, \text{ якщо } x>\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$ $\alpha=0, \beta=\dfrac{\pi}{3}$

4.22. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 2, \\ \dfrac{x}{2}-1, \text{ якщо } 2<x\le 4, \\ 1, \text{ якщо } x>4. \end{cases}$ $\alpha=3, \beta=5$

4.23. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 1, \\ \dfrac{1}{2}(x-1), \text{ якщо}, 1<x\le 3, \\ 1, \text{ якщо } x>3. \end{cases}$ $\alpha=1, \beta=4$

4.24. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le -1, \\ x+1, \text{ якщо} -1<x\le 0, \\ 1, \text{ якщо } x>0. \end{cases}$ $\alpha=-0.5, \beta=3$

4.25. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 0, \\ 2x^2-x, \text{ якщо} 0<x\le 1, \\ 1, \text{ якщо } x>1. \end{cases}$ $\alpha=0.5, \beta=2$

4.26.. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le -1, \\ \dfrac{1}{2}(x+1), \text{ якщо} -1<x\le 1, \\ 1, \text{ якщо } x>1. \end{cases}$ $\alpha=0, \beta=2$

4.27. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 0, \\ \frac{1}{2}(x^2+x), \text{ якщо } 0<x\le 1, \\ 1, \text{ якщо } x>1. \end{cases} \quad \alpha=0.5, \beta=2$

4.28. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 1, \\ x-1, \text{ якщо}, 1<x\le 2, \\ 1, \text{ якщо } x>2. \end{cases} \quad \alpha=1.5, \beta=3$

4.29. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 1, \\ \frac{1}{2}(x-1), \text{ якщо}, 1<x\le 3, \\ 1, \text{ якщо } x>3. \end{cases} \quad \alpha=2, \beta=4$

4.30. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 0, \\ 2\sin x, \text{ якщо } 0<x\le \frac{\pi}{6}, \\ 1, \text{ якщо } x>\frac{\pi}{6}. \end{cases} \quad \alpha=\frac{\pi}{12}, \beta=\frac{\pi}{2}$

Завдання 5. У господарстві планують зібрати a центнерів пшениці з гектара. Рахуючи врожайність пшениці нормально розподіленою випадковою величиною X з середнім квадратичним відхиленням σ центнерів, знайти ймовірність того, що :

1) врожайність пшениці на навмання взятому полі буде більша α центнерів і менша β центнерів;

2) врожайність відрізнятиметься від планової не більше, ніж на δ центнерів.

Значення a, σ, α, β, δ задані в таблиці.

№ n/n	a	σ	α	β	δ
5.1	40	5	38	43	3
5.2	45	3	42	47	2
5.3	35	4	32	38	2
5.4	40	3	38	42	2

5.5	45	2	42	47	1
5.6	40	3	38	41	2
5.7	50	4	48	53	2
5.8	45	3	41	47	1
5.9	35	4	30	38	3
5.10	40	4	36	42	2
5.11	45	3	44	48	2
5.12	35	5	33	40	3
5.13	30	4	28	34	2
5.14	40	4	37	43	2
5.15	50	3	48	53	1
5.16	45	3	42	47	2
5.17	40	4	37	42	2
5.18	45	5	41	48	3
5.19	50	4	48	53	2
5.19	35	3	31	38	1
5.20	30	3	28	32	1
5.21	50	3	47	52	1
5.22	35	3	32	37	2
5.23	45	2	42	48	2
5.24	44	3	41	46	1
5.25	48	3	46	45	2
5.26	32	2	30	35	2
5.27	41	2	39	44	2
5.28	35	3	31	37	2
5.29	50	3	48	52	2
5.30	45	3	43	48	2

Теоретичні питанняі

1. Випадкові події

1.1. Ймовірність випадкової події. Статистичне означення ймовірності випадкової події.

1.2. Сумісні і несумісні випадкові події.

1.3. Залежні і незалежні випадкові події.

1.4. Класичне означення ймовірності випадкової події.

1.5. Сума і добуток випадкових подій.

1.6. Повна група подій. Протилежні випадкові події, їх ймовірності.

1.7. Теорема додавання сумісних подій.

1.8. Умовна ймовірність. Теорема множення залежних випадкових подій.

1.9. Формула повної ймовірності.

1.10. Формула Бейеса (гіпотез).

1.11. Дослідження Бернуллі.Формула Бернуллі.

1.12. Формула Пуассона.

2. Випадкові величини

2.1. Дискретні випадкові величини, їх закон розподілу.

2.2.. Закони розподілу Бернуллі і Пуассона дискретних випадкових величин.

2.3. Числові характеристики дискретних випадкових величин (означення, формули для їх обчислення, властивості).

2.4. Інтегральна формула розподілу ймовірностей (означення, властивості).

2.5.. Неперервна випадкова величина..

2.6. Густина ймовірностей неперервної випадкової величини, її властивості.

2.7. Числові характеристики неперервних випадкових величин (означення, формули для їх обчислення, властивості).

2.8. Рівномірний закон розподілу неперервних випадкових величин

2.9. Числові характеристики ріномірно розподілених випадкових величин.

2.10. Нормальний закон розподілу неперервних випадкових величин.

2.11. Числові характеристики нормально розподілених випадкових величин.

2.12. Ймовірність $P(\alpha < X < \beta)$ для неперервної випадкової величини.

2.13. Ймовірність $P(\alpha < X < \beta)$ для нормально розподілених випадкових величин.

2.14. Правило трьох “сігм” для нормально розподілених неперервних випадкових величин.

Приклади тестових задач

1. В коробці є 10 білих і 6 чорних куль. Знайти ймовірність того, що навмання взяті послідовно дві кулі будуть білі (подія А).

а) $P(A)=\frac{3}{8}$. б) $P(A)=\frac{2}{5}$. в) $P(A)=\frac{3}{7}$.

2. В коробці є 10 білих, 15 синіх, 20 жовтих і 25 зелених куль. Знайти ймовірність того, що навмання взята куля буде:

1) білою. 2) синьою. 3) білою або синьою. 4) білою, синьою або зеленою.

Відповіді:

1) а) $P(Б)=\frac{1}{10}$. б) $P(Б)=\frac{1}{7}$. в) $P(Б)=\frac{3}{7}$.

2) а) $P(C)=\frac{1}{15}$. б) $P(C)=\frac{3}{14}$. в) $P(C)=\frac{2}{7}$.

3) а) $P(Б+C)=\frac{1}{6}$. б) $P(Б+C)=\frac{5}{14}$. в) $P(Б+C)=\frac{5}{7}$.

4) а) $P(Б+C+З)=\frac{11}{21}$. б) $P(Б+C+З)=\frac{5}{7}$. в) $P(Б+C+З)=\frac{15}{14}$.

3. 4% усіх чоловіків і 0.3% усіх жінок є дальтоніки.Знайти ймовірність того, що навмання вибрана людина дальтонік (рахувати, що число чоловіків і жінок однакове) (подія А).

Відповіді:

а) $P(A)=0.0215$. б) $P(A)=0.22$. в) $P(A)=0.16$.

4. 4% усіх чоловіків і 0.3% усіх жінок є дальтоніки. Навмання вибрана людина виявилась дальтоніком. Знайти ймовірність того, що це чоловік (рахувати, що число чоловіків і жінок однакове).

Відповіді:

а) $P_A(Ч)=0.93$. б) $P_A(Ч)=0.091$. в) $P_A(Ч)=0.125$.

5. Слово „інтеграл” складено з букв розрізної азбуки. Навмання виймають три картки і кладуть в ряд одну за одною в порядку появи. Знайти ймовірність того, що вийде слово „гра”.

Відповіді:

а) $P(A)=\frac{1}{336}$. б) $P(A)=\frac{1}{56}$. в) $P(A)=\frac{3}{8}$.

6. Знайти ймовірність того, що з 500 насінин деякої рослири не зійде 130, якщо сжожість насіння має ймовірність 0.75.

Відповіді:

а) За формулою Лапласа $P_{500}(130)=0.036$.

б) За формулою Пуассона $P_{500}(130) = 0.21$.

в) За формулою Бернуллі $P_{500}(130) = 1.2$.

7. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу в вигляді таблиці

X	2	4	6
P	0.2	0.5	0.3

Знайти її числові характеристики.

Відповіді:

а) $M(X) = 4.2.$ $D(X) = 1.96.$ $\sigma(X) = 1.4.$

б) $M(X) = 4.$ $D(X) = 2.1.$ $\sigma(X) = 1.45.$

в) $M(X) = 5.1.$ $D(X) = 1.8.$ $\sigma(X) = 1.34.$

6. Шкала оцінювання в КМСОНП та ECT8

90-100 балів-“відмінно” (А),
75-89 балів - “добре” (ВС),
60-74 балів - “задовільно” (ДЕ),
35-59 балів - “незадовільно” з можливістю повторного складання (FX),
0-34 балів - “незадовільно” з обов'язковим повторним курсом (F)

7. Самостійна робота

Самостійна робота студентів включає такі види робіт:
1) Самостійне опрацювання лекційного матеріалу кожної теми.
2) Самостійне опрацювання рекомендованої літератури з навчальної дисципліни.
3) Виконання розрахункових робіт.
4) Підготовка до практичних занять.
5) Виконання домашніх завдань з кожної теми.
6) Підготовка до написань модульних контрольних робіт.
7) Підготовка до складання іспитів.

8. Нормативи обліку самостійної роботи студентів у системі КМСОНП – ECTS

№ п/п	Види навчальної Діяльності	Навантаження, год
1	Опрацювання лекційного матеріалу	0,5 год / 1 год лекції
2	Підготовка до практичних занять	0,5 год /1 год. заняття
3	Виконання розрахункової роботи	0,5 год на одного студента на семестр
4	Опрацювання окремих розділів робочої програми з навчальної дисципліни, які не винесені на лекції	до 3-х год /1 год. можливої типової лекції

5	Підготовка до написання контрольної модульної роботи, до складання заліку, іспиту	6 год/1 кредит ECTS

9. Методи навчання

1) Лекційний курс.
2) Практичні заняття.
3) Консультації.
4) Виконання індивідуальних розрахункових робіт за окремими варіантами.
5) Самостійна робота студентів.
6) Участь студентів в університетському турі предметної олімпіади з математики.

10. Методи контролю

1) Поточний контроль успішності студентів на практичних заняттях у формі усного опитування та написання контрольних робіт з окремих тем курсу.
2) Оцінювання виконання кожним студентом індивідуальних розрахункових робіт.
3) Перевірка модульних контрольних робіт.
4) Підсумковий іспит.

11. Методичне забезпечення

1. 085-110 Конспект лекцій з вищої математики для студентів-заочників І курсу спеціальностей 7.092101, 7.092102, 7.092103,7.092104,7.092 602..Брушковський О.Л., Проль А.П та інші. Рівне, УДАВГ, 1998.
2. 085-111 Конспект лекцій з вищої математики для студентів-заочників П курсу спеціальностей 7.092191,7.092102,7.092103,7.092104, 7.092 602..Водяна С.П. та інші., Рівне, УДАВГ, 1998.
3. 085-88 Робоча програма та методичні поради до виконання контрольних робіт з курсу вищої математики для студентів І курсу

спеціальностей .092101, 7.092102,7.092103, 7.092104,7.092 602..Брушковський ОЛ., Проль А.П та інші. Рівне, УДАВГ, 1997.

4. 085-87 Робоча програма та методичні поради до виконання контрольних робіт з курсу вищої математики для студентів П курсу спеціальностей .092101,7.092102,7.092103, 7.092104, 7.092 602..Водяна С.П. та інші. Рівне, УДАВГ, 1997.

12. Рекомендована література

12.І.Основна література

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч.Посібник.- К.: Вища шк.,1993.- 648 ст.: іл.

2. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу.Кн.1.- К. : Либідь, 1994.

3. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М. : Наука, 1975.

4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М. : Физматгиз, 1974.

5. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. –К. : Вища школа,1978.т.1,2.

6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М. : Высшая школа, 1981.Т. 1.2.

7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление.- М. : Наука.,1985.Т.1,2.

8. Задачи и упражнения по математическому анализу / Под редакцией Демидовича Б.П./ - М. : Наука,1978.

9. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. : Наука, 1975.

10. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей.-К.:Вища школа,1977.

11.Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. –М. : Наука, !985.

12.Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.–М. : Высшая школа, 1979.

13. Маркович Э.С.Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики.-М.:Высшая

школа,1972.
14. Шипачев В.С. Высшая математика.-М.:Высшая школа,1990.
15. Мізюк В.Г. Вища математика. Ч.1. – Рівне, НУВГП,2008.
16. Мізюк В.Г. Вища математика. Ч.2. – Рівне, НУВГП,2009.

12.2. Додаткова література

1. Беклемишев Д.Б. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. –М. : Наука, !974.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.. –М. : Наука, !971.
3.Кудрявцев Б.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.–М. : Наука, !978.
4. Бермант А.Р., Араманович Й. Т. Краткий курс математического анализа.- М. : Наука, !966.
5. Данко П.Е., Попов А.Х., Кожевникова Х.Я.- М.: Высшая школа, !980.
6. Дюженкова Л.І., Вища математика.--Київ. Вища школа, 1991.
7. Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике.—ЛГУ, 1967.
8. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Титаренко О.М., Климова Н.П. Вища математика у прикладах і задачах. ч.3,ч.4.—Київ.Кондор,2006.

Зміст

Теоретичні питання
Приклад тестового завдання
Змістоіий модуль №2. Кратні інтеграли
Питання для самоконтролю (розділ 10)
Приклади розв’язання задач
Самостійна робота №2
Теоретичні питання
Приклад тестового завдання
Змістоіий модуль №3. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля
Питання для самоконтролю (розділ 11)
Питання для самоконтролю (розділ 12)
Приклади розв’язання задач
Самостійна робота №3
Теоретичні питання
Приклад тестового завдання
IV семестр
Структура програми навчальної дисципліни
1.Опис предмета навчальної дисципліни
2. Програма навчальної дисципліни
3. Структура залікового кредиту
4. Практичні заняття
5. Розподіл балів, що присвоюється студентам згідно з кредитно-модульною системою
Змістоіий модуль №1. Ряди
Питання для самоконтролю (розділ 13)
Приклади розв’язання задач
Самостійна робота №1
Теоретичні питання
Приклад тестового завдання
Змістоіий модуль №2. Елементи теорії ймовірностей
Питання для самоконтролю (розділ 10)
Приклади розв’язання задач
Самостійна робота №2
Теоретичні питання
Приклад тестового завдання
6.Шкала оцінювання в КМСОНП та ECTS
7. Самостійна робота

8. Нормативи обліку самостійної роботи студентів у системі КМСОНП та ECTS
9. Методи навчання
10. Методи контролю
11. Методичне забезпечення
12. Рекомендована література

Навчальне видання

Мізюк Володимир Григорович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 2
Навчально-методичний посібник

Європейська кредитно-трансферна система

Друкується в авторській редакції

Підписано до друку __.__.2010 р. Формат 60×84 $^{1}/_{16.}$
Папір друкарський № 1. Гарнітура Times. Друк різографічний.
Ум.-друк. арк.9,5. Обл.-вид. арк. 9,9.
Тираж ___ прим. Зам. № ___.

Редакційно-видавничий центр
Національного університету
водного господарства та природокористування
33028, Рівне, вул.Соборна,11.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції РВ №31 від 26.04.2005 р.