

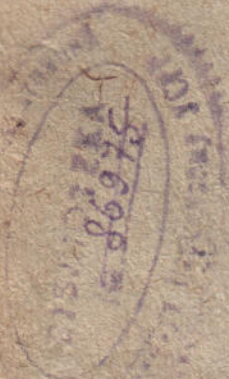
533  
A-95

295

Проф. Н. І. АХІЄЗЕР

Инж. В. І. ПУТЯТА

# АЕРОДИНАМІКА



ОНТВУ • ТРАНСПОРТІ ЗВ'ЯЗОК

11471

Проф. Н. І. АХІЄЗЕР та інж. В. І. ПУТЯТА

295  
533  
A-95

у



# АЕРОДИНАМІКА

МЕТОДСЕКТОР НКО УСРР ДОЗВОЛИВ ДО ВЖИТКУ,  
ЯК ПОСІБНИК В ІНДУСТРІАЛЬНИХ ВИШАХ



ОНТВУ/ТРАНСПОРТ І ЗВ'ЯЗОК  
Харків 1932 Київ

Бібліографічний опис цього  
видання зміщено в „Літопису  
Укр. Друку“, „Картковому  
реперт.“ та інших покажчиках  
Укр. Книжк. Палати.

Друкарня Об'єднання  
науково-технічних  
видавництв України,  
Київ, вул. Боровського 42

## ПЕРЕДМОВА

Складаючи цей курс, в основу якого покладено лекції, що їх читав Н. І. Ахієзер на механічному факультеті Київського політехнічного інституту, а потім на авіаційному відділі Київського машинобудівного інституту, ми мали на увазі подати основні відомості з аеродинаміки, потрібні студентові для аеродинамічного розрахунку літака й для вивчення спеціальних праць з аеродинаміки.

Цим пояснюється і добір матеріялу, і характер викладу окремих розділів. Подавши, як нам здається, досить повно основні відомості з клясичної гідродинаміки, теорію крила в плоско-рівнобіжному потокові та вихрову теорію монопланного крила, ми вважали за можливе, викладаючи Карман'ову теорію й теорію розривних течій, обмежитись на основних поняттях, зазначивши остаточні наслідки цих теорій.

За первісним пляном ми гадали вмістити в цій книжці вихрову теорію пропелера та теорію аеродинамічного розрахунку поліпланної коробки. Проте, через систематичний виклад вихрової теорії пропелера дуже збільшилася б сама книжка й до того ж це затримало б вихід її в світ. Щождо поліпланів, то ті наближені способи розраховувати їх, що їх застосовують тепер і що їх можна знайти в працях аеродинамічних інститутів<sup>1</sup>, здаються нам з багатьох поглядів за незадовільні.

Удосконаленню цих метод і викладанню теорії пропелера ми гадаємо присвятити дві окремі монографії.

Щодо розподілу роботи, то перші чотири розділи та додатки написав Н. І. Ахієзер, п'ятий розділ В. І. Путята, а шостий розділ обидва автори разом.

За старанно виконані рисунки дякуємо Г. І. Цереріну.

10. III. 1931.

*Автори*

В той час коли цю книжку було закінчено, в Москві відбулася I Все-союзна конференція з аеродинаміки, на якій між іншим було ухвалено прийняти єдину (відмінну від до того ж вживаної в СРСР) систему позначень для основних величин.

На великий жаль, остаточних матеріялів ще не опубліковано, а тому в цій книзі вживається стара система позначень.

2. IX. 1931.

*Автори*

<sup>1</sup> Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, 2 Lieferung, 1923 (I. Prandtl, Der induzierte Widerstand von Mehrdeckern). Б. Н. Юрьев, „Индуктивное сопротивление крыльев аэроплана“ (Праці ЦАГІ, вип. 20, 1926).

## ВСТУП

На кожне тверде тіло, що рухається в повітрі чи іншому якому течному середовищі, впливають певні сили опору від цього середовища; ці сили й дають змогу літати на тяжких машинах.

Через те, що ці сили залежать від розміру та форми рухомого тіла, то, конструюючи літак, треба надавати частинам літака такої форми й розміру, щоб величина й розподіл сил опору були найвигідніші. Наука аеродинаміка, що зросла на базі загальної науки про рух течива (гідродинаміка), і ставить перед собою одно з основних завдань — вивчати сили, що впливають на вживані в авіації тіла, коли вони рухаються в повітрі.

В аеродинаміці широко користуються наслідками численних спостережень над явищами, що бувають під час літання. Ці спостереження дають числовий матеріал, потрібний у різних розрахунках.

Збиранням такого числового матеріалу та обробленням його в СРСР на першому місці стоїть ЦАГІ у Москві, що його заснував проф. М. Є. Жуковський; це один із найбільших у світі аеродинамічних інститутів.

---

## РОЗДІЛ I

# НАЙПОТРІБНІШІ ВІДОМОСТІ З ГІДРОДИНАМІКИ

### § 1. Основні поняття

Розгляньмо якийнебудь повний рухомого течива простір з певною прямокутною системою координат і візьмімо в ньому якунебудь точку  $M$  з координатами  $x, y, z$ . Стежмо за частками течива, що проходять через точку  $M$ . Позначмо через  $v$  вектор-швидкість частки течива, що в момент  $t$  є в точці  $M$ , і назвімо  $u, v, w$  проєкції вектора  $v$  на координатні осі. Величини  $u, v, w$  — це якісь функції від незалежних змінних  $x, y, z, t$ , бо в даному місці простору швидкість течної частки, що проходить через нього, міняється, загалом кажучи, з часом, тоді як у даний момент у різних точках простору швидкість течних часток різна.

Припустімо, що для якоїнебудь течії пощастило визначити величини  $u, v, w$  у функції від незалежних змінних. Постає питання, як знайти траєкторії окремих часток течива. Щоб відповісти на це питання, візьмімо якийсь елемент течива. Для нього незалежною змінною буде тільки  $t$ , бо положення елемента, тобто координати його  $x, y, z$  будуть певними функціями від  $t$ . Величини  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  є проєкції на осі координат швидкості цієї частки в момент  $t$ . А що в момент  $t$  взята частка течива має координати  $x, y, z$ , то подані раніш похідні мають відповідно дорівнювати величинам  $u, v, w$ .

Ми маємо отже рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w. \quad (1)$$

Коли, як ми раніш припустили, розподіл швидкостей у просторі відомий для кожного моменту, то праві частини рівнянь (1) є відомі функції від  $x, y, z, t$ . Тоді, інтегруючи систему (1), матимемо:

$$x = \varphi(t, a, b, c), \quad y = \psi(t, a, b, c), \quad z = \chi(t, a, b, c). \quad (2)$$

Це й будуть рівняння траєкторій окремих часток, при чому  $a, b, c$  є довільні сталі, що їх для кожної окремої частки знаходять із початкових умов, тобто з початкового положення частки.

Приклад. Хай розподіл швидкості дається формулами:

$$u = \frac{tx - y}{t^2 + 1}, \quad v = \frac{x + ty}{t^2 + 1}, \quad w = -\frac{2tz}{t^2 + 1}.$$

Щоб визначити траєкторії, маємо систему рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{tx - y}{t^2 + 1}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x + ty}{t^2 + 1}, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{2tz}{t^2 + 1}.$$

З останнього рівняння видно, що  $z = \frac{c}{1+t^2}$ , а перші два рівняння дають:<sup>1</sup>

$$x = a - bt, \quad y = b + at.$$

Ми помічаємо, що сталі інтегрування  $a, b, c$  — це в даному разі просто координати рухомої точки в початковий момент  $t=0$ .

Ці величини часто позначають через  $x_0, y_0, z_0$ .

Візьмімо якусь функцію  $f(x, y, z, t)$  від змінних  $x, y, z, t$ .

Якщо нас цікавить, як для даної точки простору ця функція міняється з часом, то ми повинні вважати  $x, y, z$  у ній за сталі, звертаючи увагу на її залежність тільки від четвертого аргумента. Тоді похідну від цієї функції по  $t$  позначають через  $\frac{df}{dt}$  і називають локальною похідною.

Проте, може трапитись, що функція  $f(x, y, z, t)$  виявляє якусь властивість рухомої частки. Тоді ми повинні мати на увазі, що  $x, y, z$  певним способом залежать від  $t$  і міняються, коли точка описує траєкторію. Подивімось, як визначити похідну від нашої функції по  $t$  в цьому припущенні. Її ми позначатимемо через  $\frac{df}{dt}$  і називатимемо індивідуальною похідною.

Даймо величині  $t$  приріст  $\Delta t$ . Тоді  $x, y, z$  матимуть прирости  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ . Ці прирости відповідають рухові точки по траєкторії, а тому

$$\Delta x = u \cdot \Delta t, \quad \Delta y = v \cdot \Delta t, \quad \Delta z = w \cdot \Delta t.$$

Приріст функції буде такий:

$$\Delta f = f(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - f(x, y, z, t).$$

За Taylor'овою теоремою його можна подати так:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} u\Delta t + \frac{\partial f}{\partial y} v\Delta t + \frac{\partial f}{\partial z} w\Delta t + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \dots,$$

де в пропущених членах  $\Delta t$  зустрічається тільки у вищих степенях.

Звідси для індивідуальної похідної маємо вираз:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w.$$

Як приклад, знайдемо проєкції на координатні осі пришвидшення течної частки. Для цього треба знайти похідні від величин  $u, v, w$  по  $t$ . Визначаючи пришвидшення частки, ми стежимо за зміною у швидкості частки, коли вона переміщається по траєкторії, тому похідні треба взяти індивідуальні. Отож, позначаючи проєкції пришвидшення через  $j_x, j_y, j_z$ , побачимо, що

$$j_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w,$$

$$j_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w,$$

$$j_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w.$$

## § 2. Рівняння нестисливості (нерозривності)

Мало не в усіх питаннях з аеродинаміки повітря можна вважати за нестисливе течиво, тож, значить, уважати, що густина його є стала величина<sup>2</sup>. Позначають її звичайно через  $\rho$ .

<sup>1</sup> У цьому можна переконатися простою перевіркою.

<sup>2</sup> Тільки при швидкостях, близьких до швидкості звуку, треба вважати на стисливість повітря. З такими швидкостями доводиться мати діло, наприклад, у балістиці й у теорії парових турбін.



Візьмімо в течиві прямокутній рівнобіжностінник (паралелепіед) з рівнобіжними з осями координат ребрами  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ .

На підставі сказаного маса течива, що заповнює цей рівнобіжностінник, повинна бути стала за весь час руху, що призводить до певного співвідношення між компонентами  $u$ ,  $v$ ,  $w$  швидкості  $v$ . Щоб мати це співвідношення, так зване рівняння нестисливості, обчислимо масу течива, що входить у наш рівнобіжностінник через кожну з його стінок за час  $\Delta t$ , і напишім, що сума цих мас дорівнює нулеві. Легко бачити, що через площинку  $ABCD$  за час  $\Delta t$  входить маса

$$\rho u \delta y \delta z \Delta t,$$

де через  $u$  позначено швидкість по осі  $x$ -ів у точці  $A$  (варто було б узяти замість швидкості в точці  $A$  пересічну швидкість на площинці  $ABCD$ , але це при безконечно малих розмірах не має значення). Так само через площину  $A'B'C'D'$  входить маса

$$-\rho \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z \Delta t,$$

бо швидкість  $u$  в точці  $A'$  дорівнює за формулою приростів

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x,$$

а знак мінус відповідає тому фактові, що при додатному  $u$ , а значить, при додатному  $u_1$ , через площинку  $A'B'C'D'$  течиво фактично не входить, а виходить.

Так, через дві такі площинки входить кількість

$$-\rho \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \Delta t.$$

Роблячи це саме з рештою площинок і беручи на увагу сказане раніш, ми маємо рівняння нестисливості в формі<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Зауважмо, що в багатьох питаннях математики й теоретичної фізики трапляється такий вираз:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (4)$$

де  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  є проєкції на координатні осі якогось (залежного від координат) вектора  $\mathcal{A}$ . Ліва частина рівняння (3) теж є окремий випадок виразу (4), а саме ми одержимо її при  $\mathcal{A} = v$ .

У зв'язку з гідродинамічним сенсом лівої частини рівняння (3) вираз (4) має назву — розходження або дивергенції вектора  $\mathcal{A}$ . При цьому стало загальноживаним позначення виразу (4) символом  $\text{div } \mathcal{A}$ .

Отже, умову нестисливості можна подати так:

$$\text{div } v = 0.$$

<sup>1</sup> Це рівняння належить Euler'ові, і звать його рівняння нестисливості в Euler'овій формі.

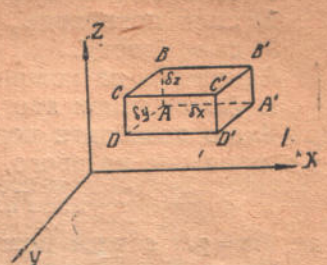


Рис. 1.

### § 3. Про сили, що чинять на виділений у течиві елемент об'єму

Ці сили можна поділити на три категорії:

- 1) сили об'ємні або масові,
- 2) сили поверхневі,
- 3) сили інерції.

Спинімось на кожній із цих категорій окремо.

1. До об'ємних або масових сил належить, приміром, сила ваги.

Якщо позначити через  $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$  елемент об'єму течива, то силу, що припадає на нього, можна подати так:

$$Fdm = F\rho d\tau \quad (Xdm, Ydm, Zdm),$$

де  $dm = \rho d\tau$  є маса розгляданого елемента.

Отож  $F$  є та сила, що припадає на одиницю маси, а  $X, Y, Z$  — проєкції цієї сили на осі.

В аеродинаміці звичайно нехтують вагою повітря і взагалі масовими силами, бо вони нікчемні, як порівняти їх з вагою літального апарату та його частин та з силами інших категорій.

2. Щоб мати уявлення про поверхневі сили, припустімо, що ми виділили якийсь об'єм течива й спустили решту течива.

Спочатку течиво було в певному стані, що, очевидно, зміниться, коли спустимо течиво, що було поза виділеним об'ємом. Щоб не дати змінитись первісному станові, варто було б по поверхні об'єму розподілити якісь сили, що всі разом давали б той самий ефект, як і спущене течиво. Ці сили й зуть поверхневі.



Рис. 2.

Поверхнева сила, що припадає на якунебудь площину, пропорційна до величини цієї площинки і, взагалі кажучи, залежить від її орієнтування. Як і кожену силу, поверхневу силу  $P$  можна розкласти на дві складові:  $N$  — нормальну до площинки й  $T$  — тангенціальну до неї.

Далі ми вважатимемо на тангенціальну силу  $T$ , а покищо нехтуватимемо нею, вважаючи, що поверхнева сила завжди нормальна до площинки. Нехтуючи величиною  $T$ , ми мовчки приймаємо, що в течиві цілком можливі ковзання одного шару по іншому, тобто, що в течиві немає внутрішнього тертя, або в'язкості. Таке течиво зуть ідеальним. Хоч його в природі й не буває (так само, як і абсолютно твердого тіла), проте ввести й вивчати його корисно, бо це призводить здебільшого до першого наближення в дослідженні реальних процесів.

Отже з поверхневих сил залишається тільки нормальна сила. Через властивість течива вона завжди спрямована до середини об'єму. Величину її, що припадає на одиницю площі, зуть тиск. Основний факт — це незалежність тиску від орієнтування елемента.

Тиск — це якась скалярна величина, що залежить від  $x, y, z$  і від  $t$ . Її позначають звичайно через  $p$ .

3. Перейдімо до сил інерції. Тому що пришвидшення точки має проєкції  $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ , то для елемента  $dm = \rho d\tau$  з центром у цій точці сила інерції має проєкції

$$-\rho \frac{du}{dt} d\tau, \quad -\rho \frac{dv}{dt} d\tau, \quad -\rho \frac{dw}{dt} d\tau.$$

### § 4. Рівняння руху ідеального течива

Ці рівняння можна знайти, дорівнявши нулеві за d'Alembert'овим принципом суму всіх сил, що чинять на виділений у течиві об'єм у напрямі кожної з координатних осей. Щоб було простіше, припустімо, що

виділений елемент об'єму є безконечно малий прямокутній рівнобіжно-стінник, поданий на рис. 1. Випишімо всі сили, що чинять на цей елемент у напрямі осі  $X$ -ів.

1. Об'ємна сила:  $\rho X \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$ .
2. Поверхнева сила (тиск) на площину  $ABCD$ :  $p \delta y \cdot \delta z$ ,  
на площину  $A'B'C'D'$ :  $-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x\right) \delta y \cdot \delta z$ .
3. Сила інерції:  $-\rho \frac{du}{dt} \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$ .

Склавши це все й спростивши, маємо перше рівняння (що відповідає осі  $X$ -ів):

$$\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \frac{du}{dt} = 0.$$

Так само матимемо й два рівняння для осі  $Y$ -ів та  $Z$ -ів.

Нехтуючи, як було сказано раніш, величинами  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , можемо на підставі § 1 написати основні рівняння аеродинаміки так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ці рівняння вперше подав Euler і їх звать його іменем.

З математичного погляду завдання вивчити рух течива полягає в тому щоб знайти чотири функції  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ . Для цього ми маємо чотири диференційні рівняння (3), (5), що їх повинні справджувати шукані функції в середині рухомого течива. З курсу математики відомо, що, коли інтегрувати диференційні рівняння, завжди постають довільні елементи, а саме довільні константи, або довільні функції. Тому, крім рівнянь (3), (5), треба мати ще певні умови, так звані початкові умови (що стосуються до початку руху) та граничні умови (що стосуються до вільної поверхні або поверхні, де течиво стикається з твердими тілами), за допомогою яких можна визначити згадані довільні елементи.

## § 5. Граничні та початкові умови

Припустімо, що в рухомому течиві є тверде тіло. Швидкість якоїнебудь точки цього тіла в будь-який момент можна розкласти в трьох взаємно-нормальних напрямках; за них ми беремо нормалю до поверхні тіла й два нормальні (сторчові) напрями в дотичній площині. В тих самих напрямках можна розкласти швидкість частки течива, що в даний момент є коло вибраної точки  $M$  поверхні тіла (рис. 3). Тому, що в ідеальному течиві ковзання течива по поверхні тіла можливе, тангенціальні складові швидкості точки тіла й тої частки течива, що коло неї, можуть бути різні. Проте, нормальні складові швидкості повинні бути однакові, бо течиво не може ні проходити в тіло, ні відставати від нього. Це і є основна гранична умова для ідеального течива.



Рис. 3.

Перейдімо тепер до другого питання, а саме до початкових умов. У багатьох завданнях, з якими нам доведеться обізнатись, ми обмежу-

ватимемося вивченням так званих стаціонарних станів, тобто таких станів руху, коли швидкість, тиск та інші величини не залежать від часу  $t$  явно. Тут жадні початкові умови взагалі несприятливі.

Додаймо, що при стаціонарних течіях усі локальні похідні по  $t$  дорівнюють нулеві; зокрема в рівняннях (5) треба відкинути члени

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}.$$

## § 6. Розкладання руху частки на найпростіші елементи

Візьмім якунебудь частку течива (течний елемент) з центром у точці  $P(x, y, z)$ . Нехай  $P'$  якась точка цього елемента (рис. 4); позначмо її координати відносно точки  $P$  через  $\delta x, \delta y, \delta z$ . Складові швидкості точки  $P$  позначмо через  $u, v, w$ . Тоді складові швидкості точки  $P'$  у цей момент буде подано (в першому наближенні) такими формулами:

$$\begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z, \\ v' &= v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z, \\ w' &= w + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z. \end{aligned} \quad (6)$$

Введемо позначення:

$$\alpha_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \alpha_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \alpha_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7)$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \alpha_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \alpha_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (8)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (9)$$

Усі ці величини, так само як і  $u, v, w$ , для даного елемента течива є означені числа, бо вони залежать тільки від  $x, y, z$ , тобто від координат центру елемента.

Не трудно перевірити, що на підставі цих позначень рівняння (6) можна подати так:

$$\begin{aligned} u' &= u + (\eta \delta z - \zeta \delta y) + (\alpha_{11} \delta x + \alpha_{12} \delta y + \alpha_{13} \delta z), \\ v' &= v + (\zeta \delta x - \xi \delta z) + (\alpha_{21} \delta x + \alpha_{22} \delta y + \alpha_{23} \delta z) \\ w' &= w + (\xi \delta y - \eta \delta x) + (\alpha_{31} \delta x + \alpha_{32} \delta y + \alpha_{33} \delta z). \end{aligned} \quad (10)$$

Із (10) виходить, що рух течної частки в будь-який момент складається з трьох частин.

Насамперед, з поступного руху елемента, як цілого, із швидкостями  $u, v, w$ .

Потім, з обертового руху елемента, як цілого, навколо якоїсь миттєвої осі, що проходить через точку  $P$ , з кутовою швидкістю  $\omega$ , яка має, як складові по осях, відповідно:  $\xi$  (кутова швидкість обертання навколо осі  $X$ -ів),  $\eta$  (навколо осі  $Y$ -ів),  $\zeta$  (навколо осі  $Z$ -ів).

Щоб у цьому перекоонатись, проведім через точку  $P$  осі рівнобіжні з осями координат. Відносно цих осей координати точки  $P'$  є числа  $\delta x, \delta y, \delta z$ .

Припустім, що цей елемент обертається із швидкістю  $\xi$  навколо осі  $X$ . Обчислимо проєкції лінійної швидкості точки  $P^1$  на осі.

Легко бачити, що проєкції матимуть такі величини:

на вісь  $X$ -ів  $0$ ,

на вісь  $Y$ -ів  $-\xi \delta z$ ,

на вісь  $Z$ -ів  $-\xi \delta y$ .

Щоб перевірити, досить розглянути нормальну до осі  $X$ -ів площину, що проходить через  $P^1$  (рис. 5). Ми бачимо, що числова величина лінійної швидкості точки  $P^1$  дорівнює  $\xi \sqrt{(\delta z)^2 + (\delta y)^2}$ , а щоб знайти проєкцію її на вісь  $Y$ -ів, треба цю величину помножити на  $-\cos \alpha = -\frac{\delta z}{\sqrt{(\delta z)^2 + (\delta y)^2}}$ ; так само, щоб знайти проєкцію на вісь  $Z$ -ів, треба помножити величину швидкості на  $\sin \alpha = \frac{\delta y}{\sqrt{(\delta z)^2 + (\delta y)^2}}$ .

Отож, так роблячи з величинами  $\eta$  та  $\zeta$  і складаючи, побачимо, що другі члени формули справді відповідають зазначеному раніш обертанню елемента.

Як відомо з механіки, величина цієї кутової швидкості обертання елемента дорівнює

$$\omega = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

а саме обертання краще розглядати, як вектор, що спрямований по осі обертання й має величину  $\omega$ . Цей вектор ми позначимо через  $\bar{\omega}$ .

Останньою частиною, з якої складається рух частки, є рух, що його можна подати в такій формі: розгляньмо поверхню другого порядку (в координатах  $\delta x, \delta y, \delta z$ )

$$\frac{1}{2} \alpha_{11} (\delta x)^2 + \frac{1}{2} \alpha_{22} (\delta y)^2 + \frac{1}{2} \alpha_{33} (\delta z)^2 + \alpha_{12} \delta x \cdot \delta y + \alpha_{13} \delta x \cdot \delta z + \alpha_{23} \delta y \cdot \delta z = \text{const} \quad (11)$$

Ми бачимо, що треті члени формул (10) є похідні від лівої частини рівняння (11) відповідно по  $\delta x, \delta y, \delta z$ , тобто по координатах; пам'ятаючи, що похідні від лівої частини рівняння поверхні по координатах пропорційні до косинусів кутів, які нормалю до поверхні утворює з координатними осями, і вибираючи в (11) const так, щоб поверхня (11) проходила через точку  $P^1$ , робимо висновок, що третім членам відповідає такий рух, коли кожна точка рухається по нормалі до якоїсь поверхні; цей рух спричиняє деформацію елемента.

## § 7. Вихри, вихрові лінії

В попередньому параграфі ми бачили, що в будь-якій точці течива є якесь певне величиною й напрямом (і, взагалі кажучи, відмінне від нуля) обертання. Це обертання характеризує якийсь вектор  $\bar{\omega}$ , що залежить від розподілу швидкостей. Його позначають так:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{curl } v$$

(читається керль  $v$ ).

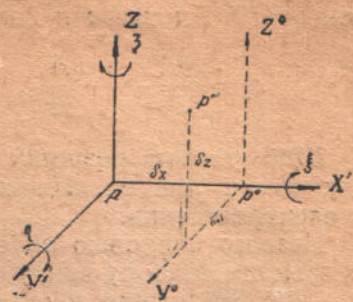


Рис. 4.

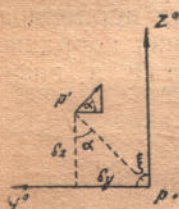


Рис. 5.

Подвоєний вектор - обертання елемента течива, тобто  $\text{curl } v = 2 \omega$  звать вихор (по-англійському вихор —  $\text{curl}$ ).

Поняття про вихор перенесено з гідродинаміки в інші математичні дисципліни, так що стало загальноживаним звати вектор  $\mathfrak{B}$  вихром вектора  $\mathfrak{A}$  і позначати його через  $\mathfrak{B} = \text{curl } \mathfrak{A}$ , якщо

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Щоб уявити розподіл вихрів у течиві, користуються так званими вихровими лініями. Це поняття аналогічне з поняттям про силові лінії з електростатики.

Назвімо вихровою лінією лінію, дотична до якої в кожній точці має напрям по вектору-вихру в цій точці.

Щоб наближено збудувати вихрову лінію, можна зробити так: узявши якунебудь точку, проводимо через неї в напрямі вихру невеликий відтинок, через його кінець проводимо новий відтинок в напрямі вихру, що є в цій другій точці, і т. д. (рис. 6).



Рис. 6.

Щоб вивести диференціальне рівняння вихрових ліній, матимемо на увазі, що косинуси кутів дотичної до якоїсь лінії з осями пропорційні до диференціалів біжучих координат уздовж цієї лінії. Отже з визна-

чення вихрової лінії матимемо таке їх рівняння:

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}.$$

Введемо ще поняття про вихрову трубку. Так звать поверхню, що утвориться, коли через усі точки якогось замкненого контуру провести вихрові лінії (для певного моменту часу).

## § 8. Лінії й трубки потоку

Щоб уявити собі розподіл швидкостей у течиві в якийсь момент, можна скористуватися з ліній і трубок потоку для цього моменту.

Лінією потоку (течії) звать лінію, дотична до якої в будь-якій точці її йде в напрямі вектора-швидкості в цій точці для цього моменту.

Рівняння ліній потоку такі:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \quad (12)$$

Зауважмо, що рівняння (1) траєкторій течних часток можна подати так:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt. \quad (1)$$

Підкреслимо різницю між системою рівнянь (12) і системою (1).

Якщо течія нестационарна, тобто  $u, v, w$  залежать явно від  $t$ , то при інтегруванні системи (12)  $t$  треба вважати за сталу. На кожний момент ми матимемо свою систему ліній течії. У рівняннях же (1)  $t$  є не стала, а незалежна змінна, у функції якої треба знайти  $x, y, z$ .

Додаймо, що для течії стационарної траєкторії будуть разом із тим і лініями потоку, що тут не залежать від часу.

## § 9. Рівняння в Lamb'овій формі

Основні рівняння аеродинаміки (5) можна легко звести до дуже короткої форми, що належить Lamb'ові (а також російському механікови Громеко).

Для цього введем вираз

$$\chi = \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}. \quad (13)$$

Пам'ятаючи, що  $\rho$  є стала (на підставі нашого припущення) величина, перепишім перше з рівнянь (5) так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right). \end{aligned}$$

Звідси на підставі (13) й (9) маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2(v\zeta - w\eta) = - \frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

Так само треба писати й останні два рівняння. Подаймо всі три Lamb'ові рівняння, припускаючи, що течія стаціонарна, бо далі вони нам будуть потрібні саме в цьому випадку:

$$\begin{aligned} 2(v\zeta - w\eta) &= \frac{\partial \chi}{\partial x}, \\ 2(w\zeta - u\eta) &= \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ 2(u\eta - v\zeta) &= \frac{\partial \chi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (14)$$

## § 10. Теорема D. Bernoulli

Розгляньмо стаціонарну течію й візьмім рівняння руху у формі (14).

Покажім, що вираз  $\chi$  при цьому припущенні (про стаціонарність течії) має сталу вартість уздовж кожної лінії течії та кожної вихрової лінії.

При цьому стала вартість може мінятися з переходом від однієї лінії течії до іншої та з переходом від однієї вихрової лінії до іншої. У цьому й полягає теорема D. Bernoulli, яку він винайшов 1738 р. Досить довести теорему для лінії течії; для вихрових ліній довід цілком аналогічний.

Щоб довести сталість якоїсь функції вздовж якоїсь лінії, треба показати, що диференціал цієї функції, який відповідає переходові від однієї точки лінії до іншої, безконечно-близької до неї точки, дорівнює нулеві.

Позначаючи через  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  прирости координат з переходом від однієї точки лінії течії до іншої її точки, на підставі рівнянь (12) для лінії течії матимемо:

$$dx = \lambda u, \quad dy = \lambda v, \quad dz = \lambda w,$$

де  $\lambda$  є спільна вартість відношень у формулі (12). Отже диференціал функції  $\chi$  вздовж лінії течії можна подати так:

$$d\chi = \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial z} dz = \lambda \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial x} u + \frac{\partial \chi}{\partial y} v + \frac{\partial \chi}{\partial z} w \right\},$$

а цей вираз на підставі рівнянь (14) дорівнює:

$$d\chi = 2\lambda \{ (v\zeta - w\eta) u + (w\xi - u\zeta) v + (u\eta - v\xi) w \} = 0,$$

і теорему доведено.

Іноді трапляється, що вираз  $\chi$  має сталу вартість для всього течива, а не тільки вздовж певних ліній.

Це буває, напр. тоді, коли в течиві немає вихрів.

Справді, коли  $\xi = \eta = \zeta = 0$ , то рівняння (14) набувають вигляду:

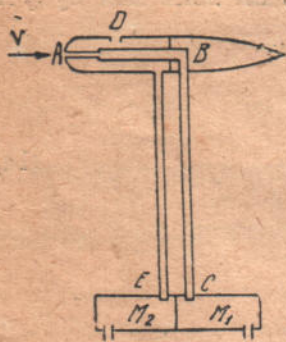
$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0.$$

Це значить, що  $\chi$  є стала величина. Отже, коли немає вихрів у стаціонарній течії, то для всього течива справедливе таке співвідношення:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} = \text{const.} \quad (15)$$

А що в рівнянні (15), справедливому для всього течива, немає похідних від невідомих функцій  $p$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , то воно є інтеграл рівнянь руху. Цей інтеграл звать інтеграл D. Bernoulli. Він дуже багато важить, бо цим рівнянням установлюється залежність між швидкістю потоку в якійсь точці й тиском, що там існує.

Справді, величина  $u^2 + v^2 + w^2$  дає квадрат швидкості частки. Величину швидкості ми позначатимемо через  $V$ ; отже рівняння (15) можна подати так:



$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const} \quad (15_1)$$

На теоремі Bernoulli основано вимірювання швидкості літака приладом, що його звать трубка Pitot.

Трубка Pitot (рис. 7) — це тіло форми сигари, що встановлюють у напрямі руху літака. Отвір  $A$  злучається з манометром  $M_1$  трубкою  $ABC$ , яка в точці  $B$  зігнана під прямим кутом. Манометр  $M_1$  показує, який тиск у точках  $B$  й  $A$ , де швидкість потоку очевидно дорівнює нулеві. З другого боку, манометр  $M_2$  показує тиск у точці  $D$ ,

повз яку протікає повітря із швидкістю  $V$ , рівною із швидкістю літака й протилежною їй.

За теоремою Bernoulli (а простір поблизу трубки Pitot можна розглядати, як вузьку трубку течії) матимемо:

$$\frac{V_A^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} = \frac{V_D^2}{2} + \frac{p_D}{\rho} \quad \text{або} \quad \frac{p_1}{\rho} = \frac{V^2}{2} + \frac{p_2}{\rho},$$

де  $p_1$  і  $p_2$  — тиски, визначувані манометрами  $M_1$  і  $M_2$ .

Отже для  $V$  маємо вираз

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)}.$$

Додаймо, що в теорії авіації часто трапляється вираз  $\frac{\rho V^2}{2}$ . Його прийнято звати швидкісний напір і позначати літерою  $q$ .

Подана далі таблиця допомагає обчислити цю величину для різних висот  $h$  над рівнем моря (цю таблицю взято з книжки R. Mises'a „Теорія авіації“).



Таблиця 1<sup>1</sup>Швидкісний напір у кг/м<sup>2</sup> для різних швидкостей

Швидкість		Швидкісний напір на висоті $h$ над рівнем моря, тобто при густині повітря $\rho$						
м/сек.	км/год.	$\rho = 0,128$ $h = 0$ м	0,115 1,00 м	0,104 2000 м	0,093 3000 м	0,083 4000 м	0,074 5000 м	0,066 6000 м
0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	18	1,60	1,44	1,30	1,16	1,04	0,93	0,83
10	36	6,40	5,75	5,20	4,65	4,15	3,70	3,30
15	54	14,40	12,94	11,70	10,46	9,34	8,33	7,43
20	72	28,60	23,00	20,80	18,60	16,60	14,80	13,20
25	90	40,00	35,94	32,50	29,06	25,94	22,13	20,63
30	108	57,60	51,75	46,80	41,85	37,35	33,30	29,70
35	126	78,40	70,44	63,70	59,96	50,84	45,32	40,43
40	144	102,40	92,00	83,20	74,40	66,40	59,20	53,80
45	162	129,60	116,44	105,30	94,16	81,04	74,92	66,82
50	180	160,00	144,00	130,00	116,00	104,00	92,50	83,00
55	198	193,60	173,94	157,30	140,66	125,54	111,92	99,83
60	216	230,40	207,00	187,20	167,40	149,40	133,20	118,60
65	234	270,40	242,94	219,70	196,46	175,34	156,32	139,42
70	252	313,60	281,75	254,80	227,85	203,35	181,30	167,70

## § 11. Поняття про циркуляцію. Stokes'ова теорема

Введемо дуже важливе в дальшому поняття про циркуляцію по замкненому контурові. Хай дано замкнений контур  $C$  (рис. 8). Візьмим елемент цього контуру  $ds$  і помножмо його на проекцію вектора швидкості  $v$  (в якійнебудь точці цього елемента) на дотичну до цього елемента (у вибраній точці). Добуток від цього можна подати так:

$$V \cdot \cos \theta \cdot ds. \quad (16)$$

Циркуляцією по контурові  $C$  і звать інтеграл від написаного виразу, взятий по контурові  $C$ , інакше кажучи, наслідок сумування виразу (16) по всіх елементах контуру. Позначаючи циркуляцію через  $\Gamma$ , маємо

$$\Gamma = \int_C V \cos \theta ds = \oint V \cos \theta ds \quad (17)$$

де символом  $\oint$  позначено інтеграл, взятий по замкненому контурові.

Додаймо, що вирази (16) і (17) мають точно таку саму структуру, як і вираз роботи сили на елементі шляху  $ds$  (вираз 16) і по замкненому контурові (вираз 17).

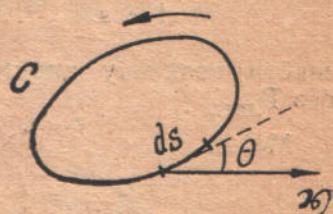


Рис. 8.

<sup>1</sup> Висоти відповідають тискові 762 мм живосрібного стовпчика та 10° Ц коло землі, коли температура падає на 0,5° Ц на 100 м.

Якби в була сила, то роботу цієї сили, коли точка переміщається по контурові  $C$ , подав би інтеграл (17).

Циркуляцію можна подати в такій формі:

$$\Gamma = \int_C (u dx + v dy + w dz) \quad (17)$$

що нагадує аналогічний вираз роботи сили, відомий із загального курсу механіки.

Покажім зв'язок між циркуляцією та вихрами. Для цього розглянемо, як контур  $C$ , безконечно малий прямокутник з боками  $\delta x$  і  $\delta y$  в площині  $XOY$ , поданий на рис. 9.

Величини  $u, v, w$  взаємно за проекції швидкості для центру  $M$  у цьому прямокутнику. Позначмо через  $V_{AB}, V_{BC}$  проекції швидкості на  $AB, BC$ , при чому швидкість обчислюватимемо для середини кожного з цих відтинків.

Легко бачити, що

$$V_{AB} = u - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\delta y}{2}; \quad V_{CD} = - \left( u + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right);$$

$$V_{BC} = v + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\delta x}{2}; \quad V_{DA} = - \left( v - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right).$$

Пояснимо, наприклад, першу формулу.

Для відтинка  $AB$  відмінну від нуля проекцію дасть тільки складова швидкості по осі  $X$ , яка проектується в натуральну величину. Щоб знайти складову швидкості по осі  $X$  для відтинка  $AB$ , звернімо увагу на те, що в середині відтинка  $AB$  та сама абсциса, що й у центрі прямокутника, а ординату матимемо, коли ординаті центру дати приріст  $\frac{\delta y}{2}$ . Залишається скористуватись із

теореми приростів, пам'ятаючи, що для відтинка  $AB$  вираз  $V \cos \theta$  має той самий знак, що й  $u_1 = u - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\delta y}{2}$ .

З цих написаних для швидкостей виразів можна легко

знайти величину циркуляції для контура  $ABCD$ , яку ми позначимо через  $\Gamma_{ABCD}$ .

Маємо

$$\begin{aligned} \Gamma_{ABCD} &= \left( u - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x + \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y - \\ &- \left( u + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x - \left( v - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y = \\ &= \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta x \cdot \delta y = 2\zeta \cdot \delta\sigma, \end{aligned}$$

де  $\zeta$  є проекція вихру на вісь  $Z$  (у центрі прямокутника), а  $\delta\sigma$  — площа прямокутника.

Здогади, що лежать в основі цього міркування, приводять до загального наслідку, відомого під назвою Stokes'ової теореми.

Stokes'ovu теорему доводять мало не по всіх курсах інтегрального числення, бо встановлюване нею співвідношення має загальний, незалежний від понять гідродинаміки, характер.

Тому ми подаємо Stokes'ову теорему без доводів, пославши читача до прекрасного курсу Філіпса<sup>1</sup>.

Припустімо, що контур  $C$ , безупинно стягаючи, можна звести в точку, не лишаючи разом із тим обсягу, зайнятого потоком. Уявімо собі, що контур  $C$  є межа якоїсь поверхні  $S$ , що вся лежить в обсягу, зайнятому потоком (рис. 10).

Тоді

$$\int_c (u dx + v dy + w dz) = \iint_s \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(N, x) + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(N, y) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(N, z) \right] d\sigma, \quad (18)$$

де  $d\sigma$  — елемент поверхні  $S$ , а  $N$  — нормаль до поверхні, спрямована так, що три прости:

$MT$  — дотична до  $C$  в напрямі обходу контура,

$Mn$  — нормаль до  $MTN$ , що йде всередину  $S$ ,

$MN$  — нормаль до  $S$ , розміщені так, які осі  $OX, OY, OZ$ .

Спинімося трохи на формулі (18), що з математичного погляду зводить обчислення якогось криволінійного інтегралу до знаходження якогось подвійного інтегралу, і з'ясуємо гідродинамічний сенс членів, що входять у неї. Криволінійний інтеграл, що в лівій частині, — це циркуляція по контурові  $C$ . Вираз праворуч складається з членів форми

$$[2\xi \cos(N, x) + 2\eta \cos(N, y) + 2\zeta \cos(N, z)] d\sigma,$$

які сумуються по поверхні, що спирається на контур  $C$ .

Легко бачити, що вираз у квадративих дужках є проєкція вектора-вихру на нормаль  $N$  до площинки  $d\sigma$ . Цей вираз множиться на величину площинки. Такий добуток часто трапляється в математичній фізиці; зветь його потік вектора (тут вектора-вихру) через площинку. Зветь його так тому, що написаний вираз дає потік течива, який проходить через дану площинку за одиницю часу, коли величини  $2\xi, 2\eta, 2\zeta$  замінити відповідно величинами  $u, v, w$ .

Отже права частина формули (18) є потік вектора-вихру через поверхню  $S$ , що спирається на контур  $C$ . Ми можемо таким чином зформулювати Stokes'ову теорему так:

Циркуляція по замкнутому контурові дорівнює потокові вектора-вихру через поверхню, що спирається на цей контур.

При цьому припущено, що контур можна стягнути в точку, не залишаючи течива, а поверхня лежить уся в обсягу, зайнятому течивом.

Звернімо увагу, що ці умови в кожному разі виконуються тоді, коли обсяг, зайнятий потоком, односпійний.

Як на приклад неодноспійного обсягу, покажемо на обсяг у середині тора (кільця). Тут уже не можна стягнути в точку позначений крапчиком контур (рис. 11), що лежить у середині обсягу.

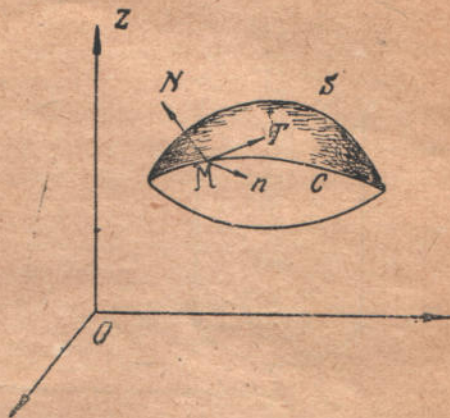


Рис. 10.

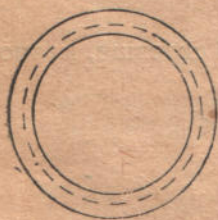


Рис. 11.

<sup>1</sup> Філіпс, „Интегральное исчисление“, переклад з додатками проф. В. Ф. Кагана, 1927, стр. 175—181.

Із Stokes'ової теореми виходить між іншим такий результат: якщо в односпійному обсягу вихрів немає, то по будь-якому замкненому контурові, що лежить у середині цього обсягу, циркуляція дорівнює нулеві.

Справді, як немає вихрів:  $\xi=0$ ,  $\eta=0$ ,  $\zeta=0$  і, значить, дорівнює нулеві права частина формули (18).

Для неодноспійних обсягів вихрів може не бути, а циркуляція проте може бути відмінна від нуля.

Роз'яснімо це на течії між двома сувісними циліндрами (рис. 12) (цей простір є двоспійний обсяг). Спрямуємо вісь  $OZ$  по осі циліндрів і розглянемо течію, що визначається формулами

$$u = -c \frac{y}{r^2}, \quad v = c \frac{x}{r^2}, \quad w = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad (c = \text{const})$$

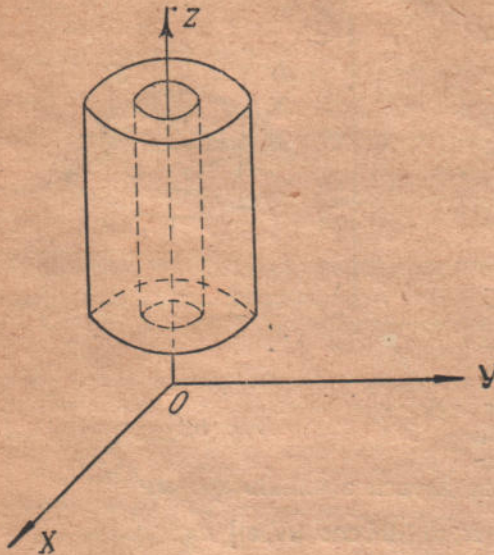


Рис. 12.

Покажемо, що ці рівняння визначають якусь течію між циліндрами.

Легко бачити, що рівняння нерозривності справджується, бо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2cyx}{r^4}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2cxy}{r^4}$$

Граничні умови справджуються теж. Це буде ясно, коли ми покажемо, що в цій течії кожна частка течива рухається по обводі кола, нормального до осі та з центром на ній. Справді, звідси виходить, що частка, яка лежить коло поверхні одного з циліндрів, має тільки тангенціальну швидкість.

Отже покажемо, що траєкторіями часток є згадані обводи.

Щоб визначити траєкторії, маємо рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = -c \frac{y}{r^2}, \quad \frac{dy}{dt} = c \frac{x}{r^2}, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

звідки, помноживши перше рівняння на  $x$ , а друге на  $y$  і склавши, маємо, що

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

отже

$$x^2 + y^2 = \text{const}, \quad z = \text{const},$$

а ці рівняння визначають справді обводи кіл, нормальних до осі та з центрами на ній.

Нарешті, зауважмо, що в середині течива вихрів немає, бо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{c}{r^2} + \frac{2cy^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{c}{r^2} - \frac{2cx^2}{r^4}$$

і, значить,

$$-\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2c}{r^2} + \frac{2c(x^2 + y^2)}{r^4} = 0$$

$\zeta$  і  $\eta$  теж дорівнюють нулеві.

Отже подані раніш формули справді визначають течію в досліджуваному двоспійному обсязі.

Обчислімо тепер для досліджуваної течії циркуляцію по замкненому контурові, що оточує вісь  $Z$ .

За визначенням циркуляції маємо:

$$\Gamma = \oint (u dx + v dy) = c \oint \frac{x dy - y dx}{r^2}.$$

Щоб знайти цей інтеграл, введемо полярні координати (рис. 13), покладаючи

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

маємо

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi,$$

а, значить,

$$\frac{x dy - y dx}{x^2} = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Отже наш інтеграл матиме форму:

$$\Gamma = c \oint \frac{x^2 d\varphi}{r^2 \cos^2 \varphi} = c \oint d\varphi.$$

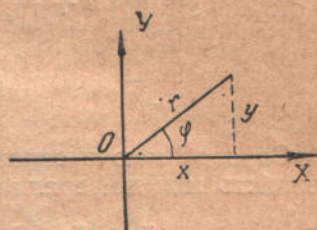


Рис. 13.

Щоб мати замкнений контур, що обіймає вісь  $Z$ , треба змінювати  $\varphi$  від 0 до  $2\pi$ . Таким чином ми матимемо, що

$$\Gamma = c \int_0^{2\pi} d\varphi = c \cdot 2\pi.$$

Отже, не зважаючи на те, що вихрив немає, циркуляція відмінна від нуля. Це пояснюється тим, що вибраний контур не можна стягнути в точку, не залишивши течива, через двоспійність обсягу, занятого потоком.

Тут двоспійність викликається тим, що є внутрішня циліндрична поверхня, яку можна вважати за межу зануреного в циліндричну посудину сувісного циліндричного стрижня.

## § 12. Thomson'ова теорема

Розгляньмо в якийсь момент  $t$  замкнений контур  $c$ , що лежить у середині течива; циркуляція по цьому контурові дорівнює:

$$\Gamma = \int_c (u dx + v dy + w dz).$$

Звернімо увагу на частки течива, що лежать на контурі  $c$  у вибраний момент  $t$ .

Ці частки через якийсь відтинок часу  $\delta t$  матимуть нове положення. Позначмо через  $c_1$  той контур, на якому в момент  $t + \delta t$  вони лежатимуть. Нехай  $\Gamma_1$  є циркуляція по контурові  $c_1$  у момент  $t + \delta t$ , так що

$$\Gamma_1 = \int_{c_1} (u_1 dx_1 + v_1 dy_1 + w_1 dz_1).$$

Thomson'ова теорема встановлює, що з нашими припущеннями про те, що немає масових сил та в'язкості і що величина  $\rho$  стала, циркуляція  $\Gamma_1$  дорівнюватиме циркуляції  $\Gamma$ ; іншими словами циркуляція по течному контурові (тобто по контурові, що утворюють його ті самі частки течива) залишається стала на весь час руху.

Щоб довести Thomson'ову теорему, треба показати, що похідна по  $t$  від циркуляції по течному контурові дорівнює нулеві.

Для цього вважатимемо  $x_1, y_1, z_1$  за координати тієї точки контура  $c_1$ , куди переходить частка, що в момент  $t$  мала координати  $x, y, z$ .

Легко бачити, що

$$x_1 = x + u\delta t, \quad y_1 = y + v\delta t, \quad z_1 = z + w\delta t,$$

так само

$$u_1 = u + \frac{du}{dt} \delta t, \quad v_1 = v + \frac{dv}{dt} \delta t, \quad w_1 = w + \frac{dw}{dt} \delta t.$$

Ці формули дозволяють подати  $\Gamma_1$  у формі

$$\Gamma_1 = \int_c \left\{ \left( u + \frac{du}{dt} \delta t \right) (dx + du\delta t) + \left( v + \frac{dv}{dt} \delta t \right) (dy + dv\delta t) + \left( w + \frac{dw}{dt} \delta t \right) (dz + dw\delta t) \right\}.$$

Справді, маючи залежність між  $x, y, z$  та  $x_1, y_1, z_1$ , ми матимемо залежність між диференціалами цих величин у формі

$$dx_1 = dx + du \cdot \delta t, \quad dy_1 = dy + dv \cdot \delta t, \quad dz_1 = dz + dw \cdot \delta t.$$

І щоб точка  $(x_1, y_1, z_1)$  описала контур  $c_1$ , досить, щоб точка  $(x, y, z)$  описала старий контур  $c$ . Отже, можна сказати, що подавши  $\Gamma_1$  у новій формі, ми в цьому інтегралі замінили змінні.

Розкладімо тепер вираз  $\Gamma_1$  по степенях величини  $\delta t$  і обмежмось членами нулевого й першого порядку щодо  $\delta t$ .

По простих перетвореннях маємо:

$$\Gamma_1 = \Gamma + \delta t \int_c \left( \frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz \right) + \delta t \int_c (u du + v dv + w dw) + (\dots)(\delta t)^2.$$

Зауважмо тепер, що

$$u du + v dv + w dw = \frac{1}{2} d(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2} d(V^2).$$

Тому інтеграл  $\int (u du + v dv + w dw)$  є приріст, що його набуває функція  $\frac{1}{2} V^2$  після обходу по контурові  $c$ . Через замкненість контура та однозначність функції  $V$  ми прийдемо після обходу до початкової вартості функції. Отже третій член правої частини дорівнює нулеві.

На підставі рівнянь (5) другий член правої частини можна подати у формі:

$$-\delta t \int_c \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = -\frac{\delta t}{\rho} \int_c dp,$$

а це дорівнює нулеві на підставі тих самих міркувань про замкнутість контура.

Отже

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\Gamma_1 - \Gamma}{\delta t} = (\dots)(\delta t),$$

і наближаючи  $\delta t$  до нуля, ми матимемо

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{d\Gamma}{dt} = 0,$$

і Thomson'ову теорему доведено.

### § 13. Helmholtz'ові теорема про вихри

Доведеною в попередньому параграфі Thomson'овою теоремою можна виявити деякі властивості вихрів в ідеальних течивах, властивості, що в реальних течивах вихри мають їх тільки наближено.

Ці властивості винайшов Helmholtz і формулюють їх у формі так званих Helmholtz'ових теорем про вихри.

**Теорема 1.** Потік вектора-вихру через будь-який перекрій вихрової трубки є величина стала для трубки.

На підставі Stokes'ової теореми досить показати, що циркуляція по замкненому контурові, який лежить на поверхні вихрової трубки й обіймає її один раз, є величина стала й не залежить від того, де та як вибрано цей контур на трубці.

Візьмімо два контури (рис. 14) й позначмо належні їм циркуляції через  $\Gamma_C$  і  $\Gamma_{C'}$ . Виберемо тепер на кожному з контурів по дві безконечно близькі точки:  $\alpha, \beta$  на контурі  $C$  і  $\alpha', \beta'$  на контурі  $C'$  і злучимо точки  $\alpha, \alpha'$ , а також  $\beta, \beta'$  двома безконечно-близькими лініями  $\alpha\alpha', \beta\beta'$ , що лежать на поверхні вихрової трубки.

Цією побудовою ми приходимо до якогось нового контура  $\beta\gamma\alpha\alpha'\gamma'\beta'$ ; його можна стягнути в точку, не сходячи з поверхні вихрової трубки.

Стрілкою позначено напрям обходу цього контура.

На побудований контур спирається частина поверхні вихрової трубки. Застосуємо до цієї частини поверхні Stokes'ову теорему. Помічаючи, що в кожній точці поверхні напрям вихру утворює прямий кут з нормалю до поверхні (бо вихрову поверхню утворюють вихрові лінії), маємо, що потік вихру через цю поверхню дорівнює нулеві.

Складаючи цю циркуляцію відповідно до частин контура, одержимо:

$$\int_{\beta\gamma\alpha} V \cos \theta ds + \int_{\alpha\alpha'} V \cos \theta ds + \int_{\alpha'\gamma'\beta'} V \cos \theta ds + \int_{\beta'\beta} V \cos \theta ds = 0.$$

Наближаймо тепер лінію  $\beta'\beta$  до лінії  $\alpha'\alpha$ . Тоді другий і четвертий інтеграли правої частини в сумі прямують до нуля, бо їх у границі беруть по тій самій лінії в протилежних напрямках.

Перший член дасть у границі:

$$\int_{\beta\gamma\alpha\beta} V \cos \theta ds = \Gamma_C;$$

а другий дасть:

$$\int_{\alpha'\gamma'\beta'\alpha'} V \cos \theta ds = -\Gamma_{C'};$$

бо тут обхід контура йде в зворотному напрямі.

Отже маємо, що  $\Gamma_C - \Gamma_{C'} = 0$ , тобто  $\Gamma_C = \Gamma_{C'}$ , звідки й випливає теорема 1.

З теореми 1 виходить, що вихрові лінії не можуть починатись або кінчатись у середині течива.

Вони мусять або бути замкнені, або йти в безконечність або, нарешті, кінчатись на межі течної маси, тобто коло вільної поверхні течива, чи коло поверхні твердих тіл. Сталу для трубки величину, однакою з потоком вихру через якийнебудь її перекрій, звать інтенсивністю вихрової трубки.

**Теорема 2.** Частилки течива, що в якийнебудь момент лежать на вихровій лінії, за весь час руху лежатимуть на вихровій лінії.

Насамперед пояснімо цю теорему. Візьмімо в момент  $t$  вихрову лінію  $PQ$ , що проходить через якусь точку  $P$ . Через час  $\Delta t$ , тобто в момент

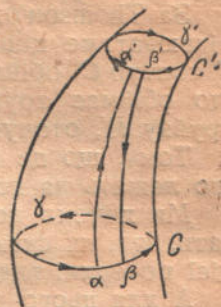


Рис. 14.

$t = t + \Delta t$  точка  $P$  займе положення  $P'$ , а решта часток, що перше були на лінії  $PQ$ , розташуються на якійсь лінії  $P'Q'$ . Теорема 2 доводить, що  $P'Q'$  — це вихрова лінія, що проходить через точку  $P'$  для моменту  $t'$ . Отже теорема 2 встановлює, що вихрові лінії — це „матеріальні лінії“. Часто теорему 2 формулюють, кажучи, що вихрові лінії в рухові зберігаються.

Тому, що вихрову лінію можна розглядати, як перетин двох вихрових поверхень, то досить довести, що в рухові зберігаються вихрові трубки.

Отже, візьмімо в момент  $t$  безконечно тонку вихрову трубку, що проходить через якийсь контур  $C$  (рис. 15). У момент  $t'$  частки течива, що були на поверхні  $R$ , лежатимуть на якійсь поверхні  $R'$ , що проходить через контур  $C'$ , який буде новим положенням контура  $C$ .

За Thomson'овою теоремою циркуляція по контурові  $C$  в момент  $t$  дорівнюватиме циркуляції по контурові  $C'$  у момент  $t'$ : значить, у момент  $t'$  контур  $C'$  обійматиме вихрові лінії. Вибираючи замість  $C$  інший контур, що обіймає трубку  $R$ , побачимо, що будь-який контур, який обіймає трубку  $R'$ , оточуватиме вихрові лінії.

Тому, що це справедливо, хоч яка б тонка була трубка  $R$ , то в точках, що лежать на поверхні  $R'$ , вектор-вихор буде відмінний від нуля.

Ми хочемо довести, що  $R'$  є вихрова трубка. Для цього досить показати, що, як сказано раніш, вихор у точках поверхні  $R'$  іде в усіх точках цієї поверхні вздовж по ній.

А для цього досить довести, що потік вихру через будь-яку частину бічної поверхні трубки  $R'$  дорівнює нулеві.

Це ж можна довести так. Візьмімо на  $R'$  якусь частину поверхні, обмежену контуром  $\delta'$ , що не обіймає  $R'$ . Нехай через цю частину поверхні потік вихру не дорівнює нулеві. Тоді по контурові  $\delta'$  циркуляція не дорівнює нулеві. Значить, не дорівнює нулеві в момент  $t$  циркуляція по контурові  $\delta$ , що в рухові перейшов в  $\delta'$ , але це неможливо, бо в момент  $t$   $\delta$  є контур, що лежить на поверхні вихрової трубки  $R$  і не обіймає її.

Отже теорему 2 доведено.

Нам залишається обізнатись із третьою та останньою теоремою.

Теорема 3. За весь час руху інтенсивність вихрової трубки стала.

Нехай  $R$  вихрова трубка, що проходить через  $C$ .  $R'$  — її нове положення, а  $C'$  нове положення контура  $C$  (рис. 15).

Циркуляція по  $C$  в момент  $t$  дорівнює циркуляції по  $C'$  у момент  $t'$ .

Але ці циркуляції і є інтенсивності цієї вихрової трубки в моменти  $t$  і  $t'$ .

Отже інтенсивності трубки в моменти  $t$  й  $t'$  однакові, що й треба було довести.

З другої й третьої Helmholtz'ових теорем між іншим виходить, що вихри не можуть ні утворитись, ні зникнути.

Цей висновок, як і дві останні Helmholtz'ові теореми, є наслідок наших основних припущень про те, що в течиві немає внутрішнього тертя або в'язкості й немає масових сил. Проте, як і є навіть масові сили, якщо тільки вони мають потенціал, Helmholtz'ові теореми справедливі. У течиві не ідеальному, а реальному у зв'язку з унутрішнім тертям, як ми бачимо далі, вихри можуть утворюватись і зникати з часом. Ми побачимо, що коли в'язкість невелика, а це якраз так і є для повітря, то через в'язкість вихри можуть утворюватись тільки поблизу твердих тіл, що рухаються в повітрі, в так званому поверхневому шарі<sup>1</sup>. З поверхневого шару вихри виносить потік у зовнішній простір, де вони з великим

<sup>1</sup> Теорію поверхневого шару опрацювали *L. Prandtl*, *T. Karman* та їхні учні.



наближенням поводитись так, як це відповідає Helmholtz'овим теоремам.

Отже, доповнюючи теорію про ідеальні течива так звану теорією поверхневого шару, ми маємо змогу дуже близько дійти до пояснення й дослідження явищ у реальних течивах.

## § 14. Приклад вихрового руху

Як приклад вихрового руху, дослідімо течію течива, що заповнює весь простір і визначається формулами:

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0$$

для  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , і формулами

$$u = -\frac{\omega y}{x^2 + y^2} a^2, \quad v = \frac{\omega x}{x^2 + y^2} a^2, \quad w = 0$$

для  $x^2 + y^2 > a^2$ ; при цьому  $\omega$  означає якусь сталу величину.

Легко бачити, що величини  $u$ ,  $v$ ,  $w$  суцільні в усьому просторі. До того, в усьому просторі умова нестисливості виконується.

А що  $u = \frac{dx}{dt}$ ,  $v = \frac{dy}{dt}$  і на підставі рівнянь для  $u$  та  $v$

$$ux + vy = 0, \quad w = 0,$$

то для кожної частки течива

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

тобто

$$x^2 + y^2 = \text{const}, \quad z = \text{const},$$

отже, кожна частка описує коло, нормальне до осі  $Z$ -ів і з центром на цій осі.

В обсягу  $x^2 + y^2 > a^2$ , тобто за циліндром, вісь якого є вісь  $Z$ -ів і радіус дорівнює  $a$ , течію визначають формули, з якими ми вже обізналися в § 11. Різниця в тому, що величину  $\omega a^2$  перше ми означали через  $c$ . Тому по контурові, що обіймає циліндер  $x^2 + y^2 = a^2$  циркуляція дорівнює

$$\Gamma = 2\pi a^2 \omega.$$

За циліндром  $x^2 + y^2 = a^2$  вихрів немає, як виявлено в § 11. В середині циліндра  $x^2 + y^2 < a^2$ , тобто для  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , навпаки, вихри не дорівнюють нулеві, бо там

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega.$$

Через кожну точку, що лежить у середині циліндра, проходить вихор, рівнобіжний з віссю  $Z$ -ів. Цей циліндер є вихрова трубка з інтенсивністю

$$2\pi a^2 \cdot \omega.$$

Незалежно від виразу  $\Gamma$  для циркуляції навколо цього циліндра в цьому можна переконатися з того, що площа перекрою вихрової трубки дорівнює  $\pi a^2$ , а інтенсивність вихру в кожній точці дорівнює  $2\omega$ .

Нетрудно зрозуміти, що таке течія в середині циліндра. Справді, ми вже бачили, що кожна точка рухається по обводі кола. Швидкість, з якою частка описує коло, дорівнює

$$V \sqrt{u^2 + v^2} = \omega \sqrt{x^2 + y^2},$$

тобто дорівнює віддалі точки від осі, помноженій на  $\omega$ .

Отже виходить, що в середині циліндра течиво обертається, як тверде тіло, з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі циліндра.

Ця картина корисна, коли досліджувати загальніші випадки вихрового руху.

Розглядаючи досить тонкі вихрові трубки можна прийняти, принаймні в першому наближенні, що течиво, заповнюючи вихрову трубку, обертається навколо своєї осі з якоюсь кутовою швидкістю, яка дорівнює відношенню циркуляції навколо трубки до подвоєної площі її перекрою.

Для криволінійних трубок цю картину, як перше наближення, можна прийняти для невеликої частини трубки.

## § 15. Визначення швидкостей часток течива при даному розділі вихрів у ньому

Раніш ми бачили, як для заданого розподілу швидкостей у течиві можна визначити ті вихри, що є в течиві. В багатьох питаннях багато важить обернена задача, а саме: в течиві відомі вихри, треба дізнатись, як розподілені швидкості.

Математична задача полягає ось у чому: дано функції  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  залежно від величин  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ ; треба визначити функції  $u$ ,  $v$ ,  $w$  так, щоб

$$\xi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Мова йде, отже, про інтегрування якоїсь системи диференціальних рівнянь. Тому, як ми вже відзначили в § 5, треба дати ще так звані граничні й початкові умови.

Не маючи змоги математично досліджувати тут цю задачу, ми обмежимося на розгляді простого випадку, що дозволить нам зробити певні висновки про деякі загальніші випадки. Цих висновків буде цілком досить для нашої дальшої мети.

Отже розглянемо такий випадок: течиво заповнює весь простір, тобто тягнеться на безконечність; на безконечності течиво в спокої, течія стаціонарна; в течиві є тонка циліндрична вихрова трубка, вісь якої є вісь  $Z$  і інтенсивність якої дорівнює  $\Gamma$ .

З умов задачі ясно, що течія повинна бути симетрична щодо осі  $Z$ . Швидкість в якійсь точці може залежати тільки від віддалі точки до осі й повинна бути нормальна до площини, що проходить через точку й вісь. Кожна частка повинна через це рухатись із сталою швидкістю по обводі кола, нормального до осі  $Z$  і з центром на ній. Залишається визначити величину цієї швидкості. Для цього візьмімо якунебудь частку й опишемо нею коло. Нехай радіус цього кола дорівнює  $r$ , а швидкість частки, що описує його, дорівнює  $V$ .

Циркуляція по цьому обводі, якщо  $r$  більше за радіус вихрової трубки, дорівнює

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} V r d\varphi = V r \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r V,$$

бо  $ds = r d\varphi$ , де  $\varphi$  є полярний кут (див. рис. 13).

Звідси

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (19)$$

Отже ми бачимо, що швидкість обернено-пропорційна до віддалі від осі вихру. Тому на безконечності течиво перебуває в спокої.

Щоб перейти до загальніших випадків, міркуватимемо так.

Візьмімо якунебудь точку  $M$ , що є на віддалі  $r$  від відомого вже нам вихру (рис. 16). Можна сказати, що наявність досліджуваного вихру потребує певної швидкості  $\frac{\Gamma}{2\pi r}$  у точці  $M$ .

Розбиймо наш вихровий шнур (вихрову трубку) на елементи й приймімо, що кожний елемент вихру (довжину його позначмо через  $ds$ ) для свого існування потребує в точці  $M$  певної швидкості  $dV$ , що залежить від  $ds$  і від положення точки  $M$  щодо  $ds$ . При цьому залежність  $dV$  від  $ds$  повинна бути така, щоб повна швидкість у точці  $M$ , що постане, коли просумувати по всіх елементах  $ds$ , дорівнювала  $\frac{\Gamma}{2\pi r}$ .

Найпростіше припущення буде таке: поперше

$$dV = C \frac{\Gamma ds \sin \varphi}{\rho^2} \quad (20)$$

де  $\rho = KM$  — віддалі точки  $M$  від елемента  $ds$ , а  $\varphi$  — кут між  $ds$  і  $KM$ ;  $C$  — якась стала; подруге, швидкість  $dV$  спрямована нормально до площини, що проходить через  $ds$  і точку  $M$  і до того в бік, відповідний до знаку циркуляції (див. рис. 16).

Сталу  $C$  можна визначити так, щоб, підсумувавши по всіх елементах вихря, в точці  $M$  мати потрібний вираз швидкості

$$\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Формулу (19) ми можемо вважати за обґрунтовану, а вираз (20) є гіпотетичний. Чи справедлива гіпотеза (20), перевірити безпосередньо не можна, бо ніколи не доводиться спостерігати частини вихру. Перевірити гіпотезу (20) можна тільки посередньо, з тих висновків, до яких вона приводить для безконечно довгих чи замкнених вихрів. Виявляється, що всі виводи з формули (20) справедливі, їх потверджують і математичні дослідження над задачею про вихор, тобто диференціальні рівняння, подані раніш, і подеколи дослід.

Значення формули (20) для нас полягає в тому, що, коли вихрова трубка криволінійна, ми можемо елементи її вважати за простолінійні й застосовувати до них формулу (20), визначаючи повний вплив вихру сумуванням, тобто інтегруванням по всій трубці.

Нам залишається, отже, визначити константу  $C$  у формулі (20). Для цього назвімо через  $s$  проекцію  $KM$  на вісь вихру (рис. 17).

Маємо

$$s \operatorname{ctg} \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) = -r \operatorname{ctg} \varphi, \quad ds = \frac{r}{\sin^2 \varphi} d\varphi, \quad \rho = \frac{r}{\sin \varphi}$$

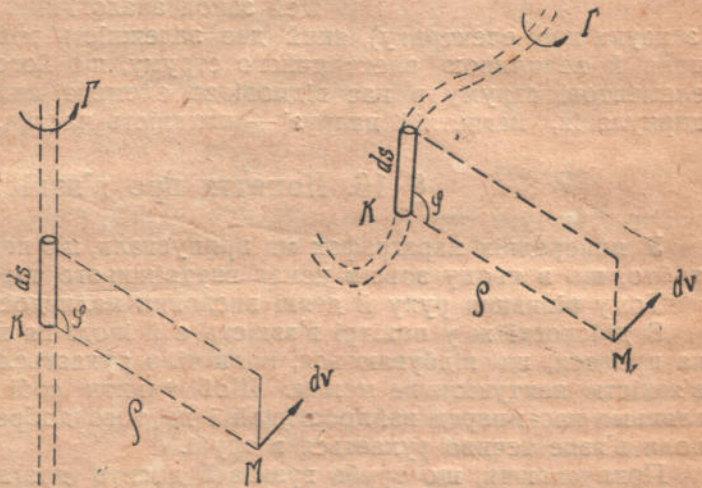


Рис. 16.

Значить,

$$dV = C \cdot \frac{\Gamma \cdot r \cdot d\varphi \cdot \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi \cdot r^2} \sin \varphi = \frac{C\Gamma d\varphi}{r} \sin \varphi.$$

Щоб мати весь шнур, треба  $\varphi$  міняти від 0 до  $\pi$ .  
Тому

$$V = \frac{C\Gamma}{r} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{C\Gamma}{r} 2.$$

Цей вираз повинен дорівнювати

$$\frac{\Gamma}{2\pi r},$$

значить,

$$C = \frac{1}{4\pi}.$$

Отже, закон, що ми його прийняли, має форму:

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{ds \cdot \sin \varphi}{r^2}. \quad (21)$$

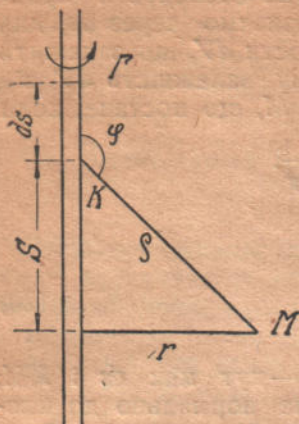


Рис. 17.

Цей закон аналогічний із законом Biot-Savart'a (з науки про електрику), який дає залежність між напругою магнетного поля й величиною електричного струму, що його спричиняє, при чому елементів струму в нас відповідає елемент вихру, величині струму — циркуляція, магнетній напрузі — швидкість частки.

## § 16. Поняття про в'язкість

У попередніх параграфах ми припускали, що повітря є течиво ідеальне, тобто, що в ньому зовсім немає внутрішнього тертя або в'язкості.

Тому рівняння руху й деякі висновки мали досить просту форму.

В дійсності ж у повітрі в'язкість є й іноді ця в'язкість дуже впливає на процеси, що відбуваються, коли тіло рухається в повітрі. Отже тоді в'язкістю нехтувати не можна. Щоб уявити собі роль в'язкості, розгляньмо насамперед найпростіший і до того добре досліджений випадок, коли в'язке течиво рухається в трубі.

Припускаючи, що труба вузька й досить довга, звернімо увагу на її середню частину, де дуже точно можна течію вважати за рівнобіжну з віссю труби.

Всі частки течива, що лежать від осі на однаковій віддалі  $r$ , матимуть однакову швидкість  $u$ . Ця швидкість залежатиме від  $r$ , тобто буде різна на різних віддальх від осі.

Отже можна собі уявити, що течиво ділиться на тонкі сувісні шари (по-латинському шар — lamina), які рухаються один відносно одного так, що в кожному шарі частки мають однакову швидкість. Саму течію звать ламінарна.

З дослідів відомо, що сила тертя, з якою один шар тягне другий, пропорційна до величини поверхні стикання шарів і до бистроти, з якою міняється швидкість при переході від одного шару до іншого.

Якщо один шар, що є на віддалі  $r$  від осі, рухається із швидкістю  $u$ , то шар, що є на віддалі  $r_1 = r + dr$ , рухатиметься із швидкістю  $u_1 = u + \frac{du}{dr} dr$ .

Їхня відносна швидкість  $\frac{du}{dr} dr$ , а значить бистрота зміни швидкості до-

рівнює  $\frac{du}{dr}$ . Тому сила, з якою перший шар тягне другий, дорівнює

$$K = \mu \cdot 2\pi r l \left( -\frac{du}{dr} \right),$$

де  $l$  — довжина цього циліндричного шару, а значить  $2\pi r l$  — його поверхня. Знак мінус поставлено тому, що з додатними  $\frac{du}{dr}$  сила  $K$  буде не тягнути, а навпаки, затримувати другий шар;

$\mu$  — сучинник пропорційності, що його звать сучинник в'язкості;  
 $K$  — сила, з якою на поверхні стикання шарів один шар чинить на другий.

Отже, на одиницю поверхні припадає сила (Newton)

$$-\mu \frac{du}{dr}$$

Цей вираз сили, з якою один шар тягне за собою інший, цілком потверджує дослід.

Обізнавшись із течією в трубі, перейдімо до загального випадку руху течива.

Щоб зрозуміти, яку форму має поданий тут раніш закон, припустімо, що шари течива рівнобіжні з площиною  $XOY$ . Бистротою зміни швидкості  $u$  при переході від одного шару до другого тут буде вже  $\frac{\partial u}{\partial z}$ , а сила, що припадає на одиницю поверхні, напишеться в формі

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Якщо ми розглянемо шар завгрубшки  $\Delta z$ , то на його верхню й нижню поверхню від тих шарів, що прилягають до нього, впливатиме по силі, що має такий вираз.

Для нижнього шару матимемо силу

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial z},$$

а для верхнього сила буде вже інша, а саме:

$$+\mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z+\Delta z} = +\mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Delta z \right).$$

У сумі ці сили дадуть

$$\mu \Delta z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Тому що площа основи елемента шару дорівнює одиниці, то об'єм цього елемента дорівнює  $\Delta z$ . Значить, на одиницю об'єму припадає сила

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Тут ми розглядали шари, рівнобіжні з площиною  $XOY$ , і вивчали зміну проекції швидкості на вісь  $X$ .

Так само можна було б дослідити і вплив змін проекцій швидкості на вісь  $Y$  і на вісь  $Z$ . Крім того, досліджуючи елемент течива у формі прямокутного рівнобіжностінника, ми мусимо зважити на ті сили, що постають на решті його граней.

Нам важливо те, що для одиниці об'єму течива згадані сили дорівнюють добуткам сучинника в'язкості  $\mu$  на другі похідні від складових швидкості по координатах.

Цього виводу нам цілком досить для того, що нам буде потрібно далі.

Якби ми захотіли скласти загальні рівняння руху в'язкого течива, то, йдучи за методою з § 4, ми мусили б знайти суму всіх сил, що впливають на елемент об'єму течива.

Тому до сил, досліджених у § 4, довелося б додати ще й ті сили, що їх спричиняє в'язкість.

Такі рівняння написати можна, і це вперше зробили Navier і Stokes; на їхню честь ці рівняння й названо рівняння Navier-Stokes'a.

Нам не потрібна точна форма цих рівнянь, а досить тільки знати, що рівняння ці мають форму

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dots,$$

де пропущені члени такої самої структури, як і член  $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ , тобто вони є добуток  $\mu$  на другі похідні від швидкостей по координатах.

Зауважмо, що дуже часто в'язкість течива характеризують величиною

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

що її звуть кінематичний сучинник в'язкості.

## § 17. Умови подібності двох течій

Ще у вступі сказано, що в аеродинаміці широко користуються з експериментальних досліджень над явищами, зв'язаними з рухом твердих тіл у повітрі.

Цих досліджень здебільшого не можна провадити на літаку. Замість цього доводиться ті чи ті частини літака вмщати в штучний повітряний потік, що його утворюють у лябораторіях у так званих аеродинамічних трубах. При цьому явище роблять оборотним у тому розумінні, що досліджуване тіло не рухається, а перебуває в спокої, а рухатись примушують повітря. На підставі загальних законів механіки ця оборотність процесів цілком дозволена. Проте тут постають ті труднощі, що багато частин літака великі й тому їм потрібні дуже широкі труби. Крім того, щоб випробувати стійкість літака та інші його властивості, треба дослідити цілий літак, а не тільки його окремі частини. Цілого ж літака в трубу вмстити не можна. Тому лябораторії змушені замість літака вмщати в трубу геометрично подібний до нього модель.]

Отже виникає питання про те, як можна перенести на якесь тіло наслідки досліджень, пророблених над моделлю цього тіла.

Припустімо, що в нас є два геометрично подібні тіла. Позначитимемо індексом 1 величини, що стосуються до першого, а індексом 2 — що стосуються до другого тіла. Через подібність усі виміри першого тіла будуть у тому самому відношенні до відповідних вимірів другого тіла. Позначаючи це відношення через  $L$ , матимемо

$$l_1 = L l_2, \quad (22)$$

де  $l_1$  і  $l_2$  — два відповідні виміри цих тіл.

Зокрема координати двох відповідних точок є відповідні виміри, отже

$$x_1 = L x_2, \quad y_1 = L y_2, \quad z_1 = L z_2. \quad (23)$$

Для того, щоб з поводження [моделю можна було судити про пово-

дження тіла, треба, щоб течії були теж подібні. Це значить, що вектори швидкості в двох будь-яких відповідних точках потоків повинні бути в сталому відношенні.

Позначаючи через  $V_1$  і  $V_2$  швидкості, з якими рухаються тіла, припустимо, що

$$V_1 = CV_2. \quad (24)$$

Тоді в двох відповідних точках 'течива  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  і  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  повинні справджуватись рівності

$$u_1 = Cu_2, \quad v_1 = Cv, \quad w_1 = Cw_2. \quad (25)$$

Позначаючи через  $\nu_1$  і  $\nu_2$  кінематичні сучинники в'язкості течив, де рухаються ці тіла, припустимо, що

$$\nu_1 = Q\nu_2. \quad (26)$$

Першу течію характеризують три рівняння, з яких перше такої форми:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} + \dots$$

Для другої течії аналогічно матимемо:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t_2} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + w_2 \frac{\partial u_2}{\partial z_2} = - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \nu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_2^2} + \dots$$

Тому що всі явища, зв'язані з течіями, визначають написані рівняння, то для того, щоб течії були цілком подібні, тобто, щоб можна було перенести наслідки для першого тіла на друге, треба, щоб ці рівняння були тотожні. При цьому тотожність цих рівнянь повинна бути висновком із формул (22), (23), (24), (25), (26).

А що

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt_1}, \quad u_2 = \frac{dx_2}{dt_2} \quad \text{і} \quad dx_1 = L dx_2$$

то маємо співвідношення

$$dt_1 = \frac{dx_1}{u_1} = \frac{L dx_2}{Cu_2} = \frac{L}{C} dt_2.$$

Отже

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} = \frac{C^2}{L} \frac{\partial u_2}{\partial t_2},$$

і перше рівняння набирає форми:

$$\frac{C^2}{L} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial t_2} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + w_2 \frac{\partial u_2}{\partial z_2} \right\} = - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} + \dots$$

або

$$\frac{\partial u_2}{\partial t_2} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + w_2 \frac{\partial u_2}{\partial z_2} = \frac{L}{C^2} \left\{ - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} + \dots \right\}$$

А що це рівняння повинне бути тотожне з другим, то ми маємо співвідношення

$$\frac{L}{C^2} \left\{ - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} + \dots \right\} = - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \nu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_2^2} + \dots$$

яке повинне бути тотожністю; значить повинна справджуватись тотожно рівність

$$\frac{L}{C^2} \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} = \nu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_2^2}, \quad (27)$$

бо ті вирази, що входять у нього,—відповідні до обох потоків.

Інших таких співвідношень ми не випикуємо, бо вони порівняно з (27) нічого нового не дають.

На підставі (23), (25) та (26) рівність (27) дає

$$\frac{L}{C^2} Q \nu_2 \frac{C}{L^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_2^2} = \nu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_2^2}$$

або

$$\frac{Q}{CL} = 1, \quad (27')$$

звідки на підставі (22), (24), (26)

$$\frac{l_1 V_1}{\nu_1} = \frac{l_2 V_2}{\nu_2} \quad (28)$$

Отже, щоб були тотожні диференційні рівняння руху, що потрібно для повної подібності, повинна справджуватись рівність (28).

Ми бачимо, що для того, щоб можна було перенести наслідки дослідження з моделю на тіло, крім геометричної та кінематичної подібностей, що їх подають формули (22) і (24), треба мати рівність (28), де  $l_1$  та  $l_2$ —дві відповідні довжини, що характеризують тіла;  $V_1$  і  $V_2$ —дві відповідні швидкості потоків і  $\nu_1$  та  $\nu_2$ —відповідні кінематичні сучинники в'язкості.

На честь Reynolds'a, що вперше дослідив з цього погляду течію течева в вузьких трубках, вираз

$$\frac{IV}{\nu}$$

має назву Reynolds'ового числа.

Отже для повної подібності потрібна рівність Reynolds'ових чисел для порівнюваних геометрично й кінематично подібних потоків.



## РОЗДІЛ II

### ПЛОСКІ ТЕЧІЇ

#### § 1. Поняття про плоску течію

Уже в § 14 першого розділу ми дослідили один приклад стаціонарної течії течива, для якої величини  $u$ ,  $v$  залежать тільки від  $x$ ,  $y$ , а величина  $w$  дорівнює нулеві.

У цьому прикладі координата  $z$  зовсім не входить у виучувані величини й рівняння, чим рівняння аеродинаміки дуже спрощуються, а разом із тим спрощується й математичне досліджування відповідного процесу.

З'ясуймо загальний характер подібних течій.

Для цього погляньмо на умови, якими характеризуються ці течії.

Перша умова в тому, що  $w=0$ . Це значить, що кожна частка течива рухається в площині, нормальній до осі  $Z$ .

Друга умова в тому, що  $u$  та  $v$  залежать тільки від  $x$  та  $y$ . Це значить, що в усіх площинах, нормальних до осі  $Z$ , течія зовсім однакова. Тому досить дослідити течію в одній із площин, нормальних до осі  $Z$ . В кожній іншій площині, нормальній до цієї осі, течія буде зовсім така, як і в вибраній площині.

Тому такі течії звуть плоскими течіями або течіями в двох вимірах.

Якщо в течиві є тверде тіло, то перекрої його площинами, нормальними до осі  $Z$ , повинні бути цілком однакові формою, величиною та положенням. Інакше різні площини були б у різних умовах, і течія не була б однакова в цих площинах.

Отже плоска течія можлива тільки тоді, коли тверді тіла в течиві є безконечно довгі циліндри з осями, рівнобіжними з віссю  $Z$ .

Очевидно, що цілком цих усіх умов у природі не може бути, бо на ділі ми завжди маємо тіла кінечні, а не безконечно довгі. Проте наближено подібні умови все таки є.

Це буває тоді, коли тверде тіло — досить довгий циліндер, що рухається простолінійно в напрямі, нормальному до своєї осі.

Тоді в середніх частинах циліндра течію з великим наближенням можна вважати за плоску. Тільки біля кінців циліндра будуть ґрунтовні відхилення. Їх можна урахувати, ввівши для кінців циліндра поправкові сучинники у формули, що ми їх матимемо для його середньої частини.

Коли аероплянне крило має майже циліндричну форму і рухається якраз нормально до своєї осі, то, щоб вивчити його рух у повітрі, ми можемо застосувати теорію плоских течій. Треба тільки пам'ятати, що ці наші наслідки для реальних крил будуть наближені й до того досить точні для середньої частини крила, а для кінців крила ці наслідки потребуватимуть деяких поправок.

Вивчаючи плоскі течії, тверде тіло можна цілком визначити профілем його нормального перекрою.

Тому ми часто говоритимемо не про обтікання тіла, а про обтікання профілю або контура.

Силу, що впливає на одиницю довжини циліндра, ми називатимемо, щоб було коротше, силою, що впливає на контур або профіль.

## § 2. Основні рівняння для плоских течій

У цьому параграфі ми дослідимо, якої форми [будуть для плоскої течії основні рівняння аеродинаміки.

Ми досліджуватимемо течії стаціонарні й невихрові.

Те, що немає вихрів, приводить нас до рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

яке показує, що  $\zeta=0$  ( $\xi$  і  $\eta$  дорівнюють нулеві тотожно, бо  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ ,  $w=0$ ).

Рівняння нестисливости матиме вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Рівняння руху в Lamb'овій формі [див. розділ 1, формули (14)] набирають на підставі (1) такого вигляду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) = 0.$$

Звідси виходить, що

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} = \text{const.} \quad (3)$$

Отже для цих течій функції  $u$  та  $v$  задовольняють системі (1), (2), а  $p$  визначається з рівняння (3).

Вже з цього видно, якої простої форми набирають для плоских стаціонарних і невихрових течій рівняння аеродинаміки.

Скажемо тепер про граничні умови.

Ми розглядатимемо тільки той випадок, коли тіло перебуває в спокої, а потік на нього набігає.

Тут на контурі тіла нормальна проекція швидкості повинна дорівнювати нулеві.

Позначаючи через  $ds$  елемент довжини контура (рис. 18), пригадаймо, що косинуси кутів дотичної до контура з осями координат дорівнюють

$$\cos(x, T) = \frac{dx}{ds}, \quad \cos(y, T) = \frac{dy}{ds}, \quad (4)$$

а для нормалі до контура

$$\cos(x, N) = -\frac{dy}{ds}, \quad \cos(y, N) = \frac{dx}{ds}. \quad (5)$$

Тому проекція швидкості на нормаль до контура дорівнює

$$u \cdot \cos(x, N) + v \cdot \cos(y, N) = \frac{vdx - udy}{ds},$$



Рис. 18.

і гранична умова набирає форми

$$vdx - udy = 0. \quad (6)$$

Крім умови на контурі тіла, повинна бути певна умова на безконечності.

Якщо в спокійному течиві контур рухається із швидкістю, проекції якої на осі дорівнюють  $u_0, v_0$ , то, щоб обернути течію, нам треба надати всім часткам течива й контура швидкість із проекціями

$$-u_0, -v_0.$$

Отже на той випадок, коли тіло перебуває в спокої, а набігає потік, на безконечності повинні бути умови:

$$\left. \begin{aligned} u_{x=\infty} &= -u_0 \\ v_{y=\infty} &= -v_0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Звернімо тепер увагу на рівняння (1) та (2).

Рівняння (1) справдиться якнайзагальніше, коли ми покладемо, що

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (8)$$

де  $\psi$  довільна функція від  $x, y$ .

У механіці кажуть, що сила  $(X, Y, Z)$  має потенціал, коли є така функція  $\Phi(x, y, z)$ , що

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

За аналогією з механікою скажемо, що швидкість  $(u, v, w)$  має потенціал, якщо

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

де  $\Phi$  — якась функція від координат.

В розгляданому випадку плоскої течії ми бачимо, що потенціал є і залежить тільки від  $x, y$ . Його саме ми позначили вище через  $\psi$ .

З рівняння (2) так само виходить, що

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (9)$$

де  $\psi$  — якась інша функція від  $x$  і  $y$ .

Справді, із (9) бачимо, що

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\}$$

звідки й випливає рівняння (21):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

З'ясуємо механічний сенс функції  $\psi$ . Для цього зауважмо, що в пло-

скій течії лінії потоку визначаються [див. розділ 1, формула (12)] рівнянням

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

або

$$udy - vdx = 0.$$

На підставі (9) це рівняння набирає форми

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial x} dx = 0.$$

Зауважмо, що ліва частина написаного рівняння є повний диференціал від функції  $\phi$ .

Тому для лінії течії матимемо:

$$d\phi = 0$$

або

$$\phi = \text{const} \quad (10)$$

Отже вздовж кожної лінії течії  $\phi$  є стала величина й навпаки. На підставі сказаного функцію  $\phi$  звать функцією течії.

Звернімо тепер увагу на граничну умову (6).

Вона нічим не відрізняється від рівняння лінії течії. Тому контур тіла повинен бути лінією течії або складатись із частин лінії течії.

На підставі сказаного дослідження плоского потоку зводиться до визначення двох функцій  $\varphi$  та  $\psi$ . До того ж, щоб справдилась гранична умова, функція  $\psi$  повинна бути константою на контурі тіла.

Порівнюючи (8) з (9), ми бачимо, що функції  $\varphi$  та  $\psi$  не незалежні одна від одної, а зв'язані співвідношеннями:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (11)$$

Співвідношення (11) багато важать у теорії функцій комплексного змінного.

У найближчих параграфах ми подамо потрібні відомості про функції комплексного змінного, щоб далі мати змогу застосовувати методи цієї важливої дисципліни в дослідженні плоских потоків.

### § 3. Функції комплексного змінного<sup>1</sup>

Розв'язуючи квадратні рівняння, а також розглядаючи деякі інші питання з елементарної математики, вводять так звані комплексні числа, що мають форму

$$z = x + iy,$$

де  $x$  та  $y$  є звичайні дійсні числа, а  $i = \sqrt{-1}$  є уявна одиниця. Якщо  $x$  та  $y$  є змінні величини, то  $z$  буде змінна комплексна величина.

Є геометричне зображення комплексних чисел, що нагадує зображення звичайних чисел точками числової простої.

Для цього беруть прямокутню систему координат  $XOY$  і числу  $z$  зіставляють точку ( $z$ ) з абсцисою  $x$  та ординатою  $y$ . Вводячи полярні координати  $r$  і  $\theta$ , можемо представити комплексне число в наступній, так званій тригонометричній, формі

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

бо

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (12)$$

<sup>1</sup> У цьому параграфі в дослідженні плоских потоків, де незалежні змінні  $x$  та  $y$ , літера  $z$  не має значення координати і її можна використати на визначення комплексної величини.

Величину

$$r = \sqrt{y^2 + x^2}$$

звуть модулем комплексного числа й позначають через  $|z| = r$ , а величину

$$\arctg \frac{y}{x} = \theta$$

звуть аргументом комплексного числа.

Зауважмо, що на підставі Euler'ових формул диференційного числення

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}, \quad (13)$$

де  $e = 2,718281828 \dots$  є основа натуральних логаритмів, а тому комплексне число можна подати у формі

$$z = re^{i\theta}.$$

Усі дії з комплексними числами роблять за звичайними правилами алгебри.

Отже, додаючи (або віднімаючи) комплексні числа, окремо додають (або віднімають) їхні дійсні чи уявні частини.

Не трудно бачити, що геометричному додаванню комплексних чисел відповідає додавання сил, прикладених до однієї точки за правилом Newton'ового рівнобіжника (рис. 19).

У множенні й діленні комплексних чисел зручно зображати їх через модуль і аргумент.

Справді, із

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

виходить, що

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Отже при множенні модулі перемножують, аргументи додають, а при діленні модулі ділять і аргументи віднімають.

Зауважмо, що число  $x - iy$  звуть супряженим щодо  $x + iy$ . Якщо  $x + iy = z$ , то звичайно число  $z - iy$  позначають через  $\bar{z}$ .

Основні алгебричні операції приводять до різних функцій від комплексного змінного  $z = x + iy$ . Як приклад, подамо

$$w = z^2, \quad w = \frac{1}{z}, \quad w = \frac{z - a}{z - b}.$$

Підставивши замість  $z$  його вираз і проробивши зазначені операції, ми побачимо, що кожна з цих функцій розіб'ється на дві частини: якийсь дійсний вираз, що залежить від  $x$  і  $y$ , і якийсь чисто уявний вираз від цих величин.

Наприклад,

$$w = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Отже, ми цілком природно приходимо до такого представлення кожної функції комплексного змінного

$$w = f(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y) \quad (14)$$

де  $\varphi(x, y)$  та  $\psi(x, y)$  — дві звичайні функції від дійсних змінних  $x$  і  $y$ .

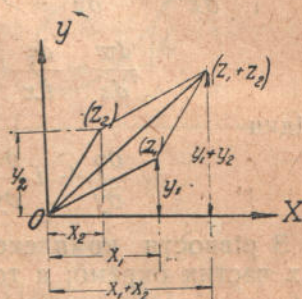


Рис. 19.

Так, у першому з цих прикладів

$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2, \quad \psi(x, y) = 2xy.$$

Далі нас будуть цікавити тільки такі функції комплексного змінного, що мають певну похідну по  $z$ . Виявляється, що через цю вимогу ми приходимо до певних умов, які функції  $\varphi$  та  $\psi$  повинні справджувати.

Щоб знайти ці умови, випишімо похідні від (14) по  $x$  і  $y$ .

На підставі основних правил диференціального числення маємо

$$\frac{d\omega}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\frac{d\omega}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + i \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

А що  $\frac{dz}{dx} = 1$ ,  $\frac{dz}{dy} = i$ , то ці вирази набирають форми

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad \frac{d\omega}{dz} = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} + i \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \frac{1}{i}, \quad (15)$$

звідки

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i \frac{\partial\psi}{\partial y} = i \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + i \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

З рівності комплексних чисел виходить рівність їхніх дійсних і уявних частин окремо; а тому

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Цих умов конче треба дотримати, щоб  $\omega = f(z)$  мала певну похідну по  $z$ . Можна довести, що цих умов і досить, тобто що справдженням їх забезпечується існування певної похідної у функції  $\omega = f(z)$ .

Ми прийшли отже до умов (так звані умови Cauchy-Riemann'a), що сходяться з умовами (11), знайденими раніш для потенціалу та функції течії в плоскому потокові.

Тепер уже не важко зрозуміти, на чому основане застосування функцій комплексного змінного до вивчення плоских потоків.

Щоб знайти плоску течію, як ми бачили раніш, досить знайти пару функцій  $\varphi$  та  $\psi$  від змінних  $x, y$  так, щоб справджувались умови (11) і щоб на контурах занурених у течиво тіл функція  $\psi$  була стала.

Ми бачимо, що умови (11) механічно справдіться, якщо ми візьмемо функцію від комплексного змінного, що має похідну (так звану аналітичну функцію), і за функції  $\varphi$  і  $\psi$  приймемо відповідно її дійсну частину та сучинник при  $i$  в уявній частині. Тому задача зводиться до того, щоб знайти таку аналітичну функцію, уявна частина якої ( $i\psi$ ) зберігає сталу вартість на контурі зануреного в течиво тіла (або кількох таких тіл).

Припустімо, що для якоїсь плоскої течії

$$\varphi = \varphi(x, y), \quad \psi = \psi(x, y)$$

являють відповідно потенціал і функцію течії (поток). Як було сказано в попередніх параграфах, функції  $\varphi$  та  $\psi$  задовольняють умовам (11), які показують, що

$$\varphi + i\psi$$

є аналітична функція комплексного змінного  $z$ . Позначмо цю функцію через  $f(z)$ , так що

$$f(z) = \varphi + i\psi. \quad (16)$$

Функцію  $f(z)$  звать комплексним потенціалом плоскої течії. На підставі формул (15), (8), (9) маємо

$$\frac{df}{dz} = u - iv. \quad (17)$$

Вираз  $u - iv$  звать комплексною швидкістю плоского потоку.

Знайшовши комплексну швидкість, ми можемо зараз таки визначити компоненти  $u, v$  вектора-швидкості, бо  $u$  є дійсна частина комплексної швидкості, а  $v$  — взятий з оберненим знаком сучинник при  $i$  у виразі комплексної швидкості.

Подивимось тепер, якої форми набуде вираз для циркуляції по замкненому контурові. Циркуляцію  $\Gamma$  визначає інтеграл

$$\Gamma = \int_C (u dx + v dy).$$

Зображаючи точку  $M(x, y)$  контура  $C$  (рис. 20) комплексним числом  $z = x + iy$ , бачимо, що

$$dz = dx + i dy$$

є приріст  $z$  при переході від однієї точки контура до іншої безконечно близької точки цього контура.

Помічаючи, що

$$\frac{df}{dz} dz = (u - iv)(dx + i dy) = u dx + v dy - i(v dx - u dy),$$

маємо для циркуляції такий вираз

$$\Gamma = \int_C \frac{df}{dz} dz + i \int_C (v dx - u dy).$$

У § 1 ми бачили, що  $\frac{v dx - u dy}{ds}$  є проєкція швидкості на нормаль до контура в якійсь точці.

Тому

$$v dx - u dy = \frac{v dx - u dy}{ds} ds$$

дорівнює потокові течива через елемент  $ds$  контура, а

$$\int_C (v dx - u dy)$$

є потік через увесь контур. А що густина течива стала, то повний потік течива через якийсь замкнений контур повинен дорівнювати нулеві. Отже

$$\int_C (v dx - u dy) = 0$$

значить, для циркуляції  $\Gamma$  маємо такий вираз:

$$\Gamma = \int_C \frac{df}{dz} dz, \quad (18)$$

якого входить тільки самий комплексний потенціал.

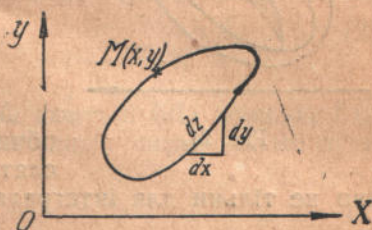


Рис. 20.

Коли лінія  $C$  не обіймає контура твердого тіла, тобто коли лінію  $C$  можна стягнути в точку, не залишаючи обсягу, що його займає течиво, то через те, що немає вихрів, циркуляція  $\Gamma$  по контурові дорівнюватиме нулеві.

Якщо ж  $C$  обіймає контур твердого тіла (рис. 21), то циркуляція по лінії  $C$  може бути відмінна від нуля. Міняючи тут лінію (прим., переводячи її в  $C'$ ) так, щоб вона весь час обіймала контур тіла, ми не введемо в обсяг, обмежений контуром, нових вихрів, бо вихрів у течиві взагалі немає.

Тому інтеграл (18) при цих змінах лінії  $C$  не мінятиметься:

$$\Gamma = \int_C \frac{df}{dz} dz = \int_{C'} \frac{df}{dz} dz.$$

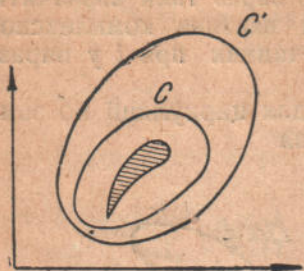


Рис. 21.

Ми скористуємось із цього, коли фактично обчислюватимемо циркуляцію, а також, коли обчислюватимемо деякі інші інтеграли, бо це справедливо не тільки для інтеграла (18), але й для будь-якого інтеграла

$$\int_C F(z) dz;$$

треба тільки, щоб аналітична функція  $F(z)$  була безперервна разом із своєю похідною в обсягу, занятому потоком; справді за цих припущень  $F(z)$  можна вважати за комплексний потенціал плоского течіння розгляданого типу.

#### § 4. Обтікання колового циліндра

Як приклад, що має в дальшому принципове значення, розгляньмо рух у течиві безконечно довгого колового циліндра.

Згідно із сказаним у § 1, приймим, що циліндер перебуває в спокої, а потік набігає на нього. Нехай профіль циліндра є коло (рис. 22) з радіусом  $a$  і центром у точці  $z=0$  і нехай швидкість потоку на безконечності має компоненти

$$u_{x=\infty} = -u_0$$

$$v_{y=\infty} = -v_0.$$

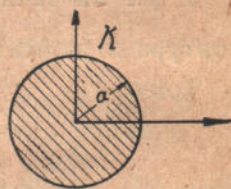


Рис. 22.

На підставі сказаного раніш задача зводиться до того, щоб знайти таку аналітичну функцію  $f(z)$ , яка на обводі кола має сталу уявну частину й для якої

$$\frac{df}{dz}_{z=\infty} = -u_0 + iv_0.$$

Ця математична задача не така то вже й важка. Ми не будемо розв'язувати її, а обмежимося на тому, що подамо потрібну функцію  $f(z)$  і перевіримо, що вона задовольняє всім вимогам задачі.

Ця функція такої форми

$$f(z) = (-u_0 + iv_0)z - (u_0 + iv_0) \frac{a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z}{a}. \quad (19)$$

Тут  $\ln$  звичайне позначення натурального логаритма, тобто логаритма при основі  $e$ , а  $\Gamma$  — якесь дійсне число.



Насамперед знайдемо диференціюванням комплексну швидкість:

$$\frac{df}{dz} = -u_0 + iv_0 + (u_0 + iv_0) \frac{a^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}. \quad (20)$$

Коли  $z$  наближається до безконечности,  $\frac{1}{z}$  і  $\frac{1}{z^2}$  прямують до нуля; отже,

$$\frac{df}{dz_{z \rightarrow \infty}} = -u_0 + iv_0,$$

тобто подана раніш умова щодо швидкості на безконечності виконується.

Покажімо тепер, що на контурі циліндра, тобто при

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (21)$$

уявна частина функції  $f(z)$  має сталу вартість.

Для цього дослідимо, яку форму матиме на контурі (21) функція  $f(z)$ .

Увівши тригонометричне зображення комплексного числа, маємо згідно з § 3 такий вираз для  $z$  на контурі (21):

$$z = a(\cos \theta + i \sin \theta) = ae^{i\theta} \quad (22)$$

Тому на обводі кола (21):

$$\frac{a^2}{z} = \frac{a^2}{ae^{i\theta}} = ae^{-i\theta} = a(\cos \theta - i \sin \theta),$$

$$\ln \frac{z}{a} = \ln e^{i\theta} = i\theta.$$

Отже ми приходимо до такого представлення функції  $f(z)$  на контурі (21)

$$f(z) = (-u_0 + iv_0)a(\cos \theta + i \sin \theta) - (u_0 + iv_0)a(\cos \theta - i \sin \theta) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta.$$

Або, спростивши,

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - 2au_0 \cos \theta - 2av_0 \sin \theta.$$

Ми бачимо, що на контурі (21) функція  $f(z)$  дійсна; отже уявна частина функції  $f(z)$  на контурі (21) дорівнює нулеві, тобто стала. Отже й ця потрібна умова справджується, так що (19) справді дає обтікання цього циліндра.

Покажімо тепер, що циркуляція навколо циліндра в цій течії дорівнює  $\Gamma$ .

Для цього обчислимо інтеграл

$$\int_K \frac{df}{dz} dz.$$

На контурі  $K$  [обвід кола (21)] функція  $\frac{df}{dz}$  має форму:

$$\frac{df}{dz} = -u_0 + iv_0 + \left( \frac{u_0 + iv_0}{e^{i\theta}} \right) (\cos \theta - i \sin \theta) + \frac{\Gamma}{2\pi i a e^{i\theta}},$$

а на підставі (22)  $dz$  дорівнює:

$$dz = aie^{i\theta} d\theta = ai (\cos \theta + i \sin \theta) d\theta.$$

При цьому, щоб описати контур  $K$ , треба збільшувати  $\theta$  від 0 до  $2\pi$ .  
Отже,

$$\int_K \frac{df}{dz} dz = (-u_0 + iv_0) ai \int_0^{2\pi} (\cos \theta + i \sin \theta) d\theta + \\ + (u_0 + iv_0) ai \int_0^{2\pi} (\cos \theta - i \sin \theta) d\theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta.$$

Помічаючи, що

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

маємо остаточно:

$$\int_K \frac{df}{dz} dz = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot 2\pi = \Gamma.$$

Отже  $\Gamma$  справді дає циркуляцію навколо циліндра в течії, що її визначає формула (19).

Пошукаймо тепер тих точок, де швидкість потоку дорівнює нулеві. Для цього ми повинні дорівняти нулеві вираз (20) і знайти відповідні вартості  $z$ .

Так ми приходимо до квадратного рівняння:

$$(-u_0 + iv_0) z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i} z + a^2 (u_0 + iv_0) = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, одержимо:

$$z_{1,2} = \frac{-\frac{\Gamma}{2\pi i} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2\pi i}\right)^2 - 4a^2 (u_0 + iv_0) (-u_0 + iv_0)}}{2(-u_0 + iv_0)}$$

або

$$z_{1,2} = \frac{-\frac{\Gamma}{2\pi i} \pm \sqrt{4a^2 V_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}}}{2(-u_0 + iv_0)},$$

де  $V_0 = |u_0 + iv_0| = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$  дає величину швидкості потоку на безконечності або при оберненій картині величину швидкості, з якою рухається циліндер.

Нехай напрям руху циліндра (рис. 23) утворює кут  $\alpha$  з напрямом осі  $x$ . Тоді комплексне число  $u_0 + iv_0$  має аргумент  $\alpha$ , так що

$$u_0 + iv_0 = V_0 e^{i\alpha}.$$

Отже,

$$u_0 - iv_0 = V_0 e^{-i\alpha},$$

і

$$-u_0 + iv_0 = -V_0 e^{-i\alpha}.$$

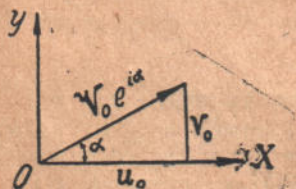


Рис. 23.

Тому для точок, де швидкість дорівнює нулеві (ці точки звать критичними точками потоку), маємо вираз:

$$z_{1,2} = \frac{e^{i\alpha}}{2V_0} \left\{ \frac{\Gamma}{2\pi i} \pm \sqrt{4a^2V_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}} \right\} \quad (24)$$

Далі розглядатимемо тільки той випадок, коли

$$4a^2V_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \geq 0 \quad (25)$$

Покажімо, що тут критичні точки потоку лежать на контурі (21). Для цього нам треба показати, що при припущенні (25)

$$|z_{1,2}| = a$$

З умови (25) виходить, що  $\sqrt{4a^2V_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}}$  є дійсне число, а через

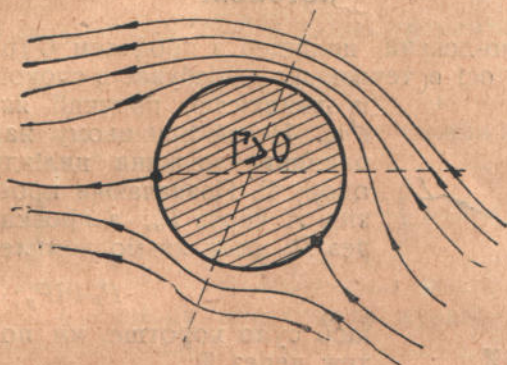


Рис. 24.

те, що квадрат модуля комплексного числа дорівнює сумі квадратів його дійсної частини та сучинника при  $i$  в уявній частині, то

$$|z_{1,2}|^2 = \frac{1}{4V_0^2} \left\{ \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + \left( 4a^2V_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \right) \right\} = \frac{4a^2V_0^2}{4V_0^2} = a^2.$$

Отже, наше твердження доведено.

На рисунках 24 й 25 показано розташування ліній течії і положення критичних точок у потокові, що його визначає формула (19), якщо  $\Gamma > 0$  і  $\Gamma < 0$ .

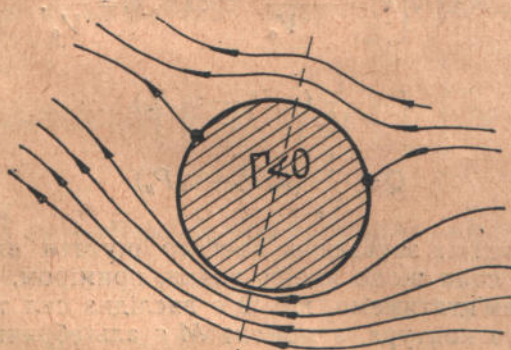


Рис. 25.

Звернімо ще увагу на два окремі випадки, а саме на випадок, коли  $\Gamma=0$  (рис. 26) і на випадок, коли  $V_0=0$ , а  $\Gamma \neq 0$  (рис. 27).

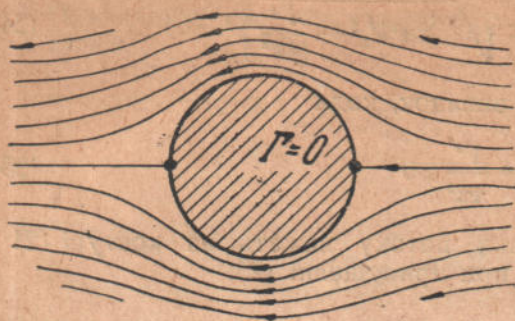


Рис. 26.

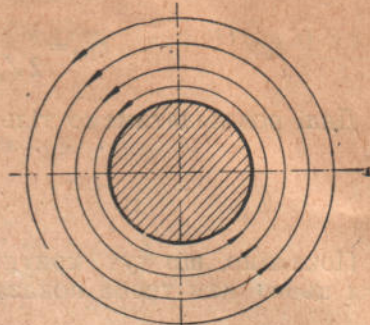


Рис. 27.

### § 5. Обчислення сил, що чинять на тіло в плоскому потокові

Нехай безконечно-довгий циліндер з профілем  $C$  (рис. 28) рухається нормально до своєї осі в течиві, що перебуває в спокої на безконечності, із швидкістю, проекції якої дорівнюють  $u_0$  і  $v_0$ . Нехай при цьому на контур (тобто на одиницю довжини циліндра) впливає сила опору  $\mathfrak{F}$ . Позначаючи проекцію цієї сили на вісь  $X$  через  $P_x$ , а проекцію на вісь  $Y$  через  $P_y$ , розгляньмо комплексне число

$$P_x + iP_y;$$

щоб було коротше, ми позначатимемо його теж через  $\mathfrak{F}$ :

$$\mathfrak{F} = P_x + iP_y. \quad (26)$$

В авіації звичайно розкладають силу  $\mathfrak{F}$  в двох інших напрямках, а саме, в напрямі, протилежному до напрямку руху тіла й у напрямі, нормальному до нього.

Позначаючи величини цих складових через  $Q$  та  $P$ , назвімо  $P$  підйнятною силою і  $Q$  — чоловим опором.

Нехай напрям руху буде  $L$ , а нормальний до нього напрям  $N$ ; тоді

$$\cos(L, x) = \frac{u_0}{V_0}, \quad \cos(L, y) = \frac{v_0}{V_0}, \quad (27)$$

$$\cos(N, x) = -\frac{v_0}{V_0}, \quad \cos(N, y) = \frac{u_0}{V_0}.$$

Тому

$$P = \frac{1}{V_0} (u_0 P_y - v_0 P_x), \quad (28)$$

$$Q = \frac{1}{V_0} (u_0 P_x + v_0 P_y). \quad (29)$$

Після цих попередніх зауважень почнімо шукати вирази для сили  $\mathfrak{F}$  і для моменту цієї сили щодо якоїсь точки, приміром, щодо точки  $z=0$ .

Разом із тим пам'ятатимемо, що  $\mathfrak{F}$  є вислідна сил тиску, що впливають на всі елементи контура, а момент  $M$  є алгебрична сума моментів елементарних сил тиску.

Щоб зробити обчислення, нам доведеться скористуватись із формули (3)

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} = \text{const}, \quad (3)$$

що визначає тиск в якійсь точці потоку через швидкість течії.

Як уже не раз говорилось, ми обертаємо процес, вважаючи, що рівномірний на безконечності потік, маючи там швидкість з проєкціями —  $u_0$ , —  $v_0$ , набігає на спокійний контур.

Розгляньмо спочатку елемент контура  $ds$ . По осі  $X$  на нього чинить сила

$$p \cdot \cos(x, N) ds,$$

яку за формулою (5) можна подати так

$$- p \cdot dy$$

так само по осі  $Y$  чинить сила

$$p \cdot \cos(y, N) ds = p dx,$$

а значить, момент щодо точки  $z=0$  для цієї елементарної сили дорівнює

$$p(xdx + ydy).$$

Отже вислідну силу й момент можна подати такими криволінійними інтегралами:

$$P_x = - \int_C p dy, \quad P_y = \int_C p dx, \quad M = \int_C p(xdx + ydy).$$

А що  $\int_C \text{const} \cdot dx$ ,  $\int_C \text{const} \cdot dy$  дорівнюють нулеві, бо, обійшовши по замкненому контурові,  $x$  і  $y$  знову вертаються до первісної вартости, то можемо на підставі (3) подати написані формули так:

$$P_x = \frac{\rho}{2} \int_C (u^2 + v^2) dy, \quad P_y = - \frac{\rho}{2} \int_C (u^2 + v^2) dx, \quad M = - \frac{\rho}{2} \int_C (u^2 + v^2)(xdx + ydy).$$

Візьмимось тепер до перетворення написаних виразів. Для цього пригадаймо, що на контурі тіла є рівність

$$v dx - u dy = 0. \quad (6)$$

На підставі (6) маємо:

$$P_x = \frac{\rho}{2} \int_C (u^2 + v^2) dy + \rho \int_C u(v dx - u dy) = \frac{\rho}{2} \int_C [(v^2 - u^2) dy + 2uv dx],$$

$$P_y = - \frac{\rho}{2} \int_C (u^2 + v^2) dx + \rho \int_C v(v dx - u dy) = \frac{\rho}{2} \int_C [v^2 - u^2] dx - 2uv dy]$$

$$M = - \frac{\rho}{2} \int_C (u^2 + v^2)(xdx + ydy) + \rho \int_C (vx - uy)(v dx - u dy) =$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_C [(v^2 - u^2)(xdx - ydy) - 2uv(ydx + xdy)].$$

( ) Перші дві формули дають:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{P}} &= P_x - iP_y = \frac{\rho}{2} \int_C [(v^2 - u^2)(dy - idx) + 2uv(dx + idy)] = \\ &= \frac{i\rho}{2} \int_C [(u^2 - v^2)(dx + idy) - 2uvi(dx + idy)].\end{aligned}$$

Помічаючи, що

$$dx + idy = dz \text{ і } u^2 - v^2 - 2uvi = (u - iv)^2,$$

маємо

$$\bar{\mathfrak{P}} = \frac{i\rho}{2} \int_C (u - iv)^2 dz.$$

Пригадуючи вираз комплексної швидкості  $u - iv$  через комплексний потенціал  $w = \varphi + i\psi$ :

$$u - iv = \frac{dw}{dz},$$

приходимо остаточно до виразу

$$\bar{\mathfrak{P}} = \frac{i\rho}{2} \int_C \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz. \quad (30)$$

Це так звана перша формула Чаплигіна—Blasius'a. Її велике значення в тому, що вона дозволяє визначити силу через комплексний потенціал за допомогою комплексного інтегрування.

Переходячи до виразу для моменту  $M$ , зауважмо, що

$$\begin{aligned}-z \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz &= -(x + iy)(u - iv)^2(dx + idy) = \\ &= \{(v^2 - u^2)(xdx - ydy) - 2uv(ydx + xdy)\} + \\ &+ i \{(v^2 - u^2)(ydx + xdy) + 2uv(xdx - ydy)\}.\end{aligned}$$

Отже, вираз

$$(v^2 - u^2)(xdx - ydy) - 2uv(vdx + xdy),$$

що входить під знак інтеграла у формулу для обчислення моменту  $M$  є дійсна частина від комплексного виразу

$$-z \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz.$$

Звичайно дійсну частину комплексного числа  $\zeta$  позначають через  $\Re$  ( $\Re$  від слова *reel*—дійсний).

Помічаючи, що інтеграл від дійсної частини якогось виразу дорівнює дійсній частині інтегралу від цього виразу, маємо другу формулу Чаплигіна—Blasius'a:

$$M = -\frac{\rho}{2} \Re \int_C z \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz. \quad (31)$$

Згідно з зауваженням у кінці § 3 комплексні інтеграли у формулах (30) і (31) не зміняться, коли ми інтегрування по контурові тіла замінимо інтегруванням по довільному (зокрема як завгодно великому) контурові

що обіймає тіло. Треба тільки, щоб поза тілом не було вихрів, але ми це припускали з самого початку.

Покажімо, що через це зауваження обчислення інтегралів дуже спрощується. При цьому формула (30) приведе нас до відомої теореми М. Є. Жуковського.

Отже напишімо (30) і (31) у формі

$$\mathfrak{P} = \frac{i\rho}{2} \int_K \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz \quad (32)$$

$$M = -\frac{\rho}{2} \Re \int_K z \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz, \quad (33)$$

де  $K$  (рис. 29) є обвід дуже великого радіуса з центром у точці  $z=0$ . Тому, що в інтеграли (32), (33) входять вар-

тості функції  $\frac{dw}{dz}$  тільки для дуже великих модулем вартостей  $z$ , то, щоб обчислити ці інтеграли, зручно розвинути функцію  $\frac{dw}{dz}$  у ряд за спадними степенями  $z$ .

Тому, що  $\frac{dw}{dz}$  є комплексна швидкість —

$$\frac{dw}{dz} = u - iv,$$

і, як ми припустили,

$$u_\infty - iv_\infty = (u - iv)_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} = -u_0 + iv_0,$$

то можна прийняти, що для досить великих  $|z|$

$$\frac{dw}{dz} = -u_0 + iv_0 + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z^3} + \dots$$

Тому

$$\left( \frac{dw}{dz} \right)^2 = (u_0 - iv_0)^2 - \frac{2A(u_0 - iv_0)}{z} + \frac{A^2 - 2B(u_0 - iv_0)}{z^2} + \frac{D_3}{z^3} + \frac{D_4}{z^4} + \dots,$$

де  $A, B, C, \dots$  якісь сучинники, що їх можна вважати за відомі для заданої течії, а  $D_3, D_4, \dots$  — якісь числа, що залежать від  $A, B, C, \dots$  і що їх не обчислюємо, бо вони нам не будуть потрібні. Зауважмо тепер, що

$$\int_K z dz = \int_K dz = \int_K \frac{dz}{z^2} = \int_K \frac{dz}{z^3} = \dots = 0$$

$$\int_K \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Справді, позначаючи через  $R$  радіус обводу кола  $K$  і вводячи полярні координати, матимемо:

$$z = Re^{i\varphi},$$

$$dz = iRe^{i\varphi} d\varphi = izd\varphi,$$

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{R^n e^{in\varphi}} = \frac{1}{R^n} e^{-in\varphi} = \frac{1}{R^n} (\cos n\varphi - i \sin n\varphi),$$

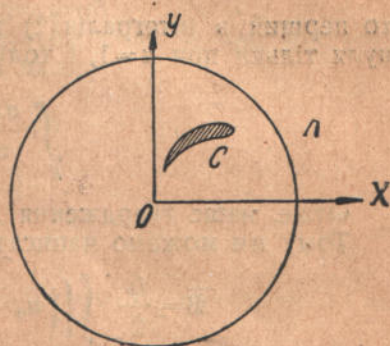


Рис. 29.

тому

$$(*) \quad \int_K z dz = iR^2 \int_0^{2\pi} (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) d\varphi,$$

$$\int_K \frac{dz}{z^n} = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} [\cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi] d\varphi.$$

А що

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin n\varphi d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

то перший з інтегралів (\*) дорівнює нулеві, а другий відрізняється від нуля тільки при  $n=1$ , і тоді дає

$$\int_K \frac{dz}{z} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Отже, наше твердження доведено.

Тому ми можемо написати, що

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{P}} &= \frac{i\rho}{2} \int_K \left\{ (u_0 - iv_0)^2 - \frac{2A(u_0 - iv_0)}{z} + \dots \right\} dz = \\ &= -i\rho A(u_0 - iv_0) \int_K \frac{dz}{z} = -i\rho A(u_0 - iv_0) 2\pi i = 2\pi\rho A(u_0 - iv_0). \end{aligned} \quad (34)$$

Так само

$$\begin{aligned} M &= -\frac{\rho}{2} \Re \int_K \frac{A^2 - 2B(u_0 - iv_0)}{z} dz = \\ &= -\frac{\rho}{2} \Re \left\{ 2\pi i \left[ A^2 - 2B(u_0 - iv_0) \right] \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

Знайдімо тепер вартість сучинника  $A$ . Для цього пригадаймо, що циркуляція  $\Gamma$  дорівнює

$$\Gamma = \int_C \frac{d\omega}{dz} dz.$$

Тому

$$\Gamma = \int_K \frac{d\omega}{dz} dz = A \int_K \frac{dz}{z} = 2\pi i A,$$

і значить

$$A = \frac{\Gamma}{2\pi i}.$$

Отже формула (34) приводить до висновку

$$\overline{\mathfrak{P}} = \frac{\rho\Gamma}{i} (u_0 - iv_0) = \rho\Gamma (-v_0 - iu_0),$$

а значить

$$\mathfrak{P} = P_x + iP_y = \rho\Gamma (-v_0 + iu_0),$$



тому виходить, що

$$\begin{aligned} P_x &= -\rho \Gamma v_0, \\ P_y &= \rho \Gamma u_0. \end{aligned} \quad (36)$$

Скористуйтесь тепер із формул (28) і (29), щоб знайти величину підіймальної сили та чолового опору.

Підставивши вирази (36), матимемо

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{V_0} \rho \Gamma (u_0^2 + v_0^2) = \rho \Gamma V_0, \\ Q &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Формули (37) і виражають теорему М. Є. Жуковського.

Теорема М. Є. Жуковського. Сила тиску потоку на одиницю довжини крила дорівнює добуткові густини течива на швидкість тіла й на циркуляцію навколо тіла; напрям сили матимемо, повернувши напрям швидкості тіла на прямий кут у напрямі циркуляції.

Таким способом ми маємо тільки підіймальну силу, а для чолового опору ми маємо нуль. Далі ми спинимось на цьому.

Перейдімо до формули (35).

Тому, що циркуляція  $\Gamma$  є величина дійсна, то

$$2\pi i A^2 = -\frac{\Gamma^2}{2\pi i} = \frac{\Gamma}{2\pi} i$$

є чисто уявне число, так що

$$\Re \left\{ \frac{\Gamma^2}{2\pi} i \right\} = 0$$

значить

$$M = \rho \Re \left\{ 2\pi i B (u_0 - i v_0) \right\}.$$

Нехай

$$B = B_1 + i B_2,$$

де  $B_1, B_2$  дійсні числа.

Тоді

$$\begin{aligned} 2\pi i B (u_0 - i v_0) &= 2\pi (v_0 + i u_0) (B_1 + i B_2) = \\ &= 2\pi \left\{ (B_1 v_0 - B_2 u_0) + i (B_1 u_0 + B_2 v_0) \right\} \end{aligned}$$

і значить

$$M = 2\pi \rho (B_1 v_0 - B_2 u_0). \quad (38)$$

Ця формула дуже зручна до застосування; вона показує, що для того, щоб знайти момент, треба знати, крім швидкості тіла, тільки числа  $B_1$  і  $B_2$  у розкладі

$$\frac{dw}{dz} = (-u_0 + i v_0) + \frac{\Gamma}{2\pi i z} + \frac{B_1 + i B_2}{z^2} + \dots \quad (39)$$

Ми бачимо, що розкласти функції в ряд за спадними степенями далі не треба, досить знати тільки три перші члени.

## § 6. Поняття про конформне відтворення

У § 4 ми знайшли розв'язання плоскої задачі, коли профілем тіла є коло. Розгляньмо тепер загальний випадок, коли профіль є довільна замкнена крива, що не перетинає сама себе. У наступному розділі ми застосуємо наслідки цього параграфу до дослідження тих кривих, що є профілі крил.

Рівнобіжно з профілем, про який оце говориться, розглядаймо коло, обтікання якого ми добре дослідили.

Позначаючи, як і раніш, через  $z$  комплексну змінну для потоку, що обтікає коло (рис. 30), назвімо через  $\zeta = \xi + i\eta$  комплексну змінну для потоку поза новим профілем  $L$  (рис. 31).

Для  $z$ -площини ми маємо таку формулу для комплексного потенціалу

$$f(z) = (-u_0 + iv_0) z - (u_0 + iv_0) \frac{a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z}{a}. \quad (19)$$

Тепер наше завдання полягає в тому, щоб знайти таку нову аналітичну функцію  $F(\zeta)$ , уявна частина якої має сталу вартість на лінії  $L$  і для якої  $\frac{dF}{d\zeta}$  на безконечності набуває заданої вартості.

Щоб розв'язати це завдання, зауважмо таке: якщо  $f(z)$  є аналітична (тобто безперервна й диференційована) функція від  $z$  і якщо  $z = g(\zeta)$  є аналітична функція від  $\zeta$ , то, замінюючи у функції  $f(z)$  змінну  $z$  через  $g(\zeta)$ , ми матимемо нову функцію:

$$F(\zeta) = f[g(\zeta)]$$

від аргумента  $\zeta$ , що, очевидно, буде теж аналітична.

При цьому, пригадуючи правило диференціювання складних функцій, матимемо:

$$\frac{dF}{d\zeta} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dg}{d\zeta}. \quad (40)$$

Уявмо собі тепер, що нам пощастило знайти таку функцію  $z = g(\zeta)$ , яка аналітична поза профілем  $L$  і має властивість, що: 1°—коли точка  $\zeta$  описує контур  $L$ , точка  $z = g(\zeta)$  описує обвід кола радіуса  $a$  з центром  $z = 0$ ; 2°,—при  $\zeta = \infty$  справджуються рівності

$$g(\zeta) = \infty, \quad \frac{dg}{d\zeta} = c \quad (c \text{ — дійсне число})$$

і 3°—кожній точці ( $\zeta$ ) поза  $L$  відповідає одна точка ( $z$ ) поза  $K$ ,

Покажімо, що, знаючи функцію  $z = g(\zeta)$  можемо знайти комплексний потенціал для потоку поза  $L$ . Справді, взявши комплексний потенціал  $f(z)$  для потоку поза колом  $K$ , утворюємо функцію  $F(\zeta) = f[g(\zeta)]$ . Коли  $\zeta$  лежить на  $L$ , то  $g(\zeta) = z$  лежить на  $K$ , а тому уявна частина функції  $f[g(\zeta)] = F(\zeta)$  матиме на  $L$  сталу вартість. Далі, на підставі (40) для  $\zeta = \infty$  буде

$$\frac{dF}{d\zeta} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} = (-u_0 + iv_0) c.$$

Отже обидві умови, яким повинен відповідати комплексний потенціал справджуються.  $F(\zeta)$  є комплексний потенціал для потоку поза  $L$  у припущенні, що швидкість на безконечності має складові  $-u_0 c$ ,  $-v_0 c$ .

Ми прийшли до такого висновку: досить визначити одну тільки функцію  $z = g(\zeta)$  з усіма зазначеними вже властивостями, щоб за потенціалом для потоку поза  $K$  (коло) знайти потенціал для потоку поза  $L$  (довільний профіль).

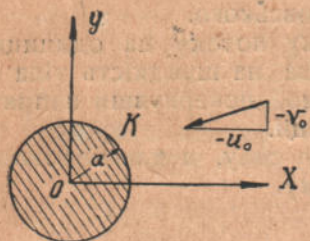


Рис. 30.

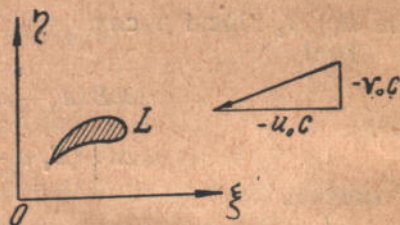


Рис. 31.

Дослідимо ближче, який сенс має співвідношення  $z=g(\zeta)$ .

Тому, що кожній точці ( $\zeta$ ) площини змінного  $\zeta$ , що лежить поза  $L$ , на підставі цього співвідношення відповідає якась точка ( $z$ ) поза  $K$ , то співвідношення  $z=g(\zeta)$  дає якесь зображення частини  $\zeta$ -площини, що лежить поза  $L$ , на частину  $z$ -площини поза  $K$ . При цьому відтворенні лінія  $L$  переходить у лінію  $K$ . Можна було б назвати таке відтворення аналітичним, бо його здійснюють за допомогою аналітичної функції.

Виведемо важливу властивість аналітичного відтворення.

Для цього візьмімо якунебудь точку  $\zeta_0$  (рис. 32), де

$$\frac{dg}{d\zeta} \neq 0.$$

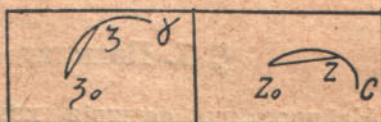


Рис. 32.

Нехай точці  $\zeta_0$  відповідає точка  $z_0$ .

Проведемо через точку  $\zeta_0$  якусь криву  $\gamma$  і візьмімо на ній точку  $\zeta = \zeta_0 + \Delta\zeta$ . Нехай кривій  $\gamma$  відповідає крива  $C$  в площині  $z$ , а точці  $\zeta$  — точка  $z$ :

$$z = z_0 + \Delta z.$$

Покладаючи

$$\Delta\zeta = \rho'e^{i\theta'}, \quad \Delta z = r'e^{it'},$$

тобто позначаючи через  $\theta'$  і  $t'$  кути, що їх утворюють з осями  $\xi$  і  $x$  тятиви  $\Delta\zeta$  і  $\Delta z$  на підставі означення похідної матимемо:

$$\frac{dg}{d\zeta} = \lim \frac{\Delta z}{\Delta\zeta} = \lim \frac{r'}{\rho'} e^{i(t' - \theta')} = \frac{r}{\rho} e^{i(t - \theta)},$$

де через  $t$  і  $\theta$  позначено кути з осями  $x$  і  $\xi$  дотичних до кривих  $C$  і  $\gamma$  в точках  $z_0$  і  $\zeta_0$ .

Тому, що  $z=g(\zeta)$  аналітична функція, то  $\frac{dg}{dz}$  має цілком певну вартість, що не залежить від того, яку лінію  $\gamma$  через точку  $\zeta_0$  ми тут вибрали.

Отже для всіх кривих  $\gamma$  і  $C$ , що проходять через точки  $\zeta_0$  і  $z_0$ , величина

$$t - \theta = \mu$$

має однакову вартість.

Звідси

$$t = \theta + \mu.$$

Це показує, що для того, щоб одержати напрям, який проходить через

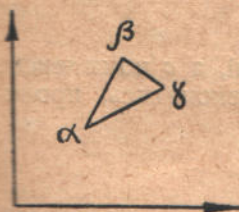


Рис. 33.

точку  $z_0$  треба відповідний напрям, що проходить через точку  $\zeta_0$ , повернути на якийсь певний кут  $\mu$ , що залежить тільки від вибраної точки. Тому<sup>1</sup>, якщо взяти два напрями  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  через точку  $\zeta_0$ , то кут між ними дорівнюватиме кутів між відповідними напрями  $C_1$  і  $C_2$ , що проходять через точку  $z_0$ <sup>1</sup>.

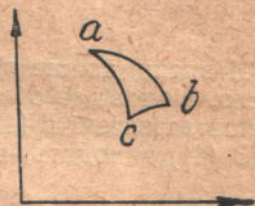


Рис. 34.

Напрям відлічування цих кутів буде однаковий в обох площинах. Коли в площині  $\zeta$  взяти простолінійний трикутник з безконечно малими боками  $\alpha\beta$ ,  $\beta\gamma$  (рис. 33), то йому відповідатиме в  $z$ -площині якийсь уже криволінійний трикутник (рис. 34) з тими самими внутрішніми кутами і з

<sup>1</sup> Так само можна довести, що при аналітичному відтворенні всі елементи, які проходять через точку  $\zeta_0$ , подовжуються (або зменшуються) в однаковому масштабі.

попереднім напрямом обходу. Тому, аналітичне відтворення називають подібністю в безконечно-малих частинах або конформним відтворенням.

Подібність порушується тільки в тих точках, де  $\frac{dg}{d\zeta} = 0$ .

Отже можна сказати, що для того, щоб визначити комплексний потенціал у випадку довільного профілю, досить знайти конформне відтворення обсягу поза цим профілем на обсяг поза колом в  $z$ -площині.

## § 7. Приклад конформного відтворення

Найпростіша функція комплексного змінного  $\zeta$  є дробова лінійна функція

$$z = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \quad (41)$$

де  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — сталі комплексні числа.

Ми припускаємо, що  $\alpha\delta - \beta\gamma$  не дорівнює нулеві.

Справді, якби  $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ , то ми мали б

$$z = \frac{\alpha\gamma\zeta + \beta\gamma}{\gamma(\gamma\zeta + \delta)} = \frac{\alpha(\gamma\zeta + \delta) + \beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma(\gamma\zeta + \delta)} = \frac{\alpha}{\gamma},$$

тобто функція звалась би до константи.

Покажімо, що функція (41) перетворює обводи кола  $\zeta$ -площини на обводи кола в  $z$ -площині. При цьому умовно просту вважати теж за обвід, але з центром на безконечності.

Для цього візьмімо якийнебудь обвід у  $z$ -площині. Нехай його рівняння має форму

$$a_0(x^2 + y^2) + 2a_1x + 2a_2y + a_3 = 0,$$

де  $a_0, a_1, a_2, a_3$  — дійсні числа (якщо  $a_0 = 0$ , то обвід перетворюється на просту).

Припускаючи, що  $c = a_1 + ia_2$ , і зауважуючи, що

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

можемо подати рівняння взятого обводу кола в формі

$$a_0 z \bar{z} + c \bar{z} + \bar{c} z + a_3 = 0. \quad (42)$$

Навпаки, кожне рівняння форми (42), де  $a_0, a_3$  дійсні, а  $c$  комплексне число, відповідає обводі кола, як у цьому легко переконатись, проробивши зазначені в (42) дії.

З (41) виходить, що

$$\bar{z} = \frac{\bar{\alpha}\bar{\zeta} + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\bar{\zeta} + \bar{\delta}}. \quad (43)$$

Підставляючи (41) і (43) в (42), матимемо

$$a_0 (\alpha\zeta + \beta) (\bar{\alpha}\bar{\zeta} + \bar{\beta}) + c (\alpha\zeta + \beta) (\bar{\gamma}\bar{\zeta} + \bar{\delta}) + \bar{c} (\alpha\zeta + \beta) (\bar{\gamma}\bar{\zeta} + \bar{\delta}) + (\gamma\zeta + \delta) (\bar{\gamma}\bar{\zeta} + \bar{\delta}) = 0.$$

Розкриваючи дужки в лівій частині, легко знайдемо, що це рівняння має форму

$$B_0\zeta\bar{\zeta} + B_1\bar{\zeta} + B_2\zeta + B_3 = 0, \quad (44)$$

де

$$B_0 = a_0 \alpha \bar{\alpha} + c \alpha \bar{\gamma} + \bar{c} \alpha \bar{\gamma} + \gamma \bar{\gamma},$$

$$B_1 = a_0 \alpha \bar{\beta} + c \alpha \bar{\delta} + \bar{c} \beta \bar{\gamma} + \delta \bar{\gamma},$$

$$B_2 = a_0 \alpha \bar{\beta} + \bar{c} \alpha \bar{\delta} + c \beta \bar{\gamma} + \delta \bar{\gamma},$$

$$B_3 = a_0 \beta \bar{\beta} + c \beta \bar{\delta} + \bar{c} \beta \bar{\delta} + \delta \bar{\delta}.$$

Тому, що  $B_0$  і  $B_3$  дійсні, а  $B_1$  і  $B_2$  комплексні супряжені, то, покладаючи, що  $B_1 = B$ ,  $B_2 = \bar{B}$ , надаємо рівнянню (44) такої форми:

$$B_0 \zeta \bar{\zeta} + B \bar{\zeta} + \bar{B} \zeta + B_3 = 0,$$

звідки й видно, що наше твердження справедливе, бо це рівняння має форму (42).

На цьому прикладі ми обмежимося. У кінці книжки ми даємо без виводів ряд конформних зображень, що найчастіше трапляються.

### РОЗДІЛ III

## АЕРОПЛЯННЕ КРИЛО В ПЛОСКО-РІВНОБІЖНОМУ ПОТОКОВІ

### § 1. Основні поняття

Уже в § 1 розділу II сказано, що течію навколо аероплянного крила, яке рухається нормально до своєї осі, принаймні в середніх її перекроях, можна з великим наближенням вважати за плоску. Ми вже знаємо, що плоску течію визначає контур нормального перекрою тіла. Тому, досліджуючи крило в плоско-рівнобіжному потокові, ми, власне кажучи, досліджуємо аеродинамічні властивості профілю цього крила.

Раніш ми вже бачили, що в вираз комплексного потенціалу для плоскої течії входить величина циркуляції  $\Gamma$ , яка, відмінно від швидкості  $u_0 + iv_0$  крила, не є величина, відома наперед.

І справді, на прикладі колового циліндра ми бачимо, що з одною швидкістю потоку на безконечності можна мати дуже багато можливих обтікань, міняючи величину циркуляції  $\Gamma$ .

Згідно з теоремою М. Є. Жуковського, циркуляція навколо крила неодмінно є, якщо підіймальна сила не дорівнює нулеві.

Але як утворюється циркуляція і якої числової вартості вона набирає на ділі? Ось основні питання в цікавій для нас теорії. Очевидно, що насамперед нам потрібна відповідь на друге питання: нам треба знати величину циркуляції, бо інакше ми не зможемо застосувати теореми М. Є. Жуковського, визначити комплексний потенціал, обчислити момент сил тиску. Разом із тим ясно, що всі ці питання тісно між собою зв'язані: знаючи докладно процес утворення циркуляції, ми змогли б

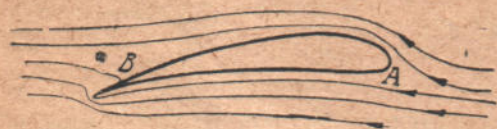


Рис. 35.

визначити ту числову вартість, якої вона набирає; і навряд чи можна відповісти на друге питання, не знаючи процесу утворення циркуляції, тобто не дослідивши спочатку першого питання.

Якщо, взагалі кажучи, це й так, то для тих контурів, яких застосовують, як профілі крил, як уперше показав М. Є. Жуковський, можна визначити величину циркуляції незалежно від того, на скільки досліджено перше питання.

Справа в тому, що на контурах, застосовуваних, як профілі крил, є ззаду кутова точка.

Коли залишити циркуляцію навколо такого крила довільною (фіг. 35), то, як ми побачимо далі, в кутувій точці швидкість течії матиме неможливі на ділі безконечно великі вартості.

Коли не міняти швидкості потоку на безконечності (як і величиною, так і напрямом), то тільки при одній вартості циркуляції, як показано далі, швидкість у кутувій точці матиме кінцеву величину. Це буде тоді, коли критична точка течії зіллється з кутовою точкою.

Як би не утворювалась циркуляція, кінець-кінцем повстає якась можлива течія, і, значить, величина циркуляції повинна одержати таку вартість, за якої в кутовій точці швидкість кінечна. Ця ідея М. Є. Жуковського приводить до наслідків, що, як побачимо далі, добре сходяться з досвідом. Тому, взявши в цьому розділі її за основу, дослідження першого питання ми відкладемо до дальшого розділу.

## § 2. Профіль М. Є. Жуковського

Вживані тепер крила — це увігнуті платівки, що мають у профілі видовжену форму, передній кінець якої (що рухається проти повітря) закруглений і погрубшений, а задній, щоб зменшувати опір, загострений і сходиться нанівець.



Рис. 36.



Рис. 37.

З рисунків 36 і 37 можна уявити форму крила (несної поверхні) та стерня (поверхні для керування).

Згідно із сказаним у розділі II (див. § 6), щоб дослідити обтікання будь-якого профілю, досить знайти аналітичну функцію, що відтворює частину площини поза профілем на частину площини поза колом.

Теоретично таке відтворення можливе завжди, практично ж визначити функцію, що дає конформне відтворення, часто дуже важко.

Тому набувають великої ваги ті профілі, для яких конформне відтворення можна одержати порівняно просто.

Ідея побудови таких профілів і теорія першого з них належить М. Є. Жуковському.

Щоб побудувати профіль М. Є. Жуковського, візьмімо обвід якогось радіуса  $R$  з центром у точці  $z=0$ . На рис. 38 цей обвід позначено через  $k$ .

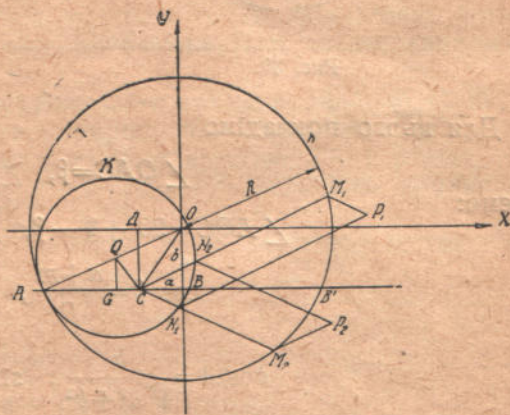


Рис. 38.

У третьому квадранті виберімо якусь точку  $C$  і покладімо, що їй відповідає комплексне число  $c = -a - bi$ , де, отже,  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Через  $C$  проведімо просту рівнобіжно з віссю  $X$  і позначмо через  $A$  її перетин з обводом  $k$ . Злучімо з центром  $O$  точку  $C$  і точку  $A$ , спустімо із  $C$  нормалю  $CD$  на дійсну вісь і проведімо просту  $CQ$  так, щоб

$$\angle QCD = \angle OCD.$$

З утвореної так точки  $Q$ , як із центру, опишімо обвід кола радіуса  $AQ$ ; цей обвід на рисунку позначено через  $K$ .

Щоб знайти якунебудь точку профілю М. Є. Жуковського, проведімо через точку  $C$  дві прості, що утворюють з  $CB$  однакові величиною й протилежні знаком кути. Точки перетину цих простих з обводами кіл позначено через  $N_1, M_2, N_2, M_1$ .

Побудувавши на відтинках  $CM_1$  і  $CN_1$  рівнобіжник і взявши його четвертий вершок, матимемо якусь точку профілю М. Є. Жуковського.

Аналогічно відтинки  $CM_2$  і  $CN_2$  дадуть ще одну точку профілю.

Практично зручно зразу провести через точку  $C$  декілька променів (приміром, 12) під однаковими один з одним кутами і, виконуючи цю побудову, сполучити такі точки профілю плавкою кривою.

Рис. 39, и 40 пояснюють сказане.

Найдімо тепер комплексні числа, що відповідають точкам  $A$  і  $B$ ; (рис. 38); вони нам далі будуть потрібні. Називаючи відтинок  $AC$  через  $m$  і згадуючи, що

$$DO = a, \quad CD = b,$$

насамперед матимемо

$$(a+m)^2 + b^2 = R^2. \quad (1)$$

Легко бачити, що точці  $A$  відповідає комплексне число  $-a - m - bi$ ; справді, абсциса точки  $A$  дорівнює  $-AC - DO = -a - m$ , а ордината дорівнює  $-DC = -b$ . Щодо точки  $B$ , то їй відповідає комплексне число  $-a - m - bi + 2AG$ .

Отже нам треба знайти довжину відтинка  $AG$ .

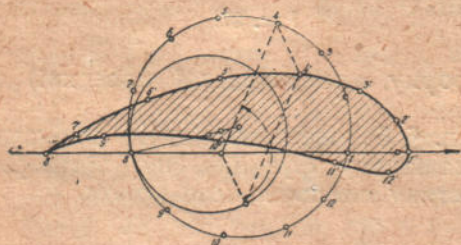


Рис. 39.

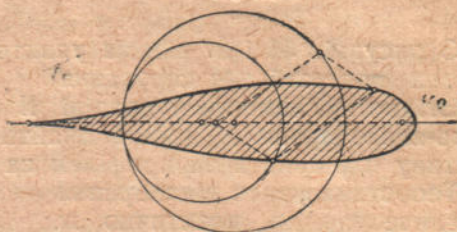


Рис. 40.

Для цього покладімо

$$\angle QAC = \beta, \quad \angle DCO = \vartheta,$$

маємо:

$$\angle AQC = 90^\circ + \vartheta - \beta, \quad \angle ACQ = 90^\circ - \vartheta,$$

$$\cos \beta = \frac{a+m}{R}, \quad \sin \beta = \frac{b}{R},$$

$$\cos \vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

так що

$$\sin \angle AQC = \cos(\vartheta - \beta) = \frac{(a+m)b + ab}{R\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b(m+2a)}{R\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin \angle ACQ = \cos \vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Після чого з трикутника  $ACQ$  маємо:

$$\frac{AQ}{m} = \frac{\sin \angle ACQ}{\sin \angle AQC} = \frac{R}{m+2a},$$

звідки

(\*)

$$AQ = \frac{Rm}{m+2a}$$

і

$$AG = AQ \cos \beta = \frac{m(a+m)}{m+2a}.$$



Отже ми бачимо, що точці  $B$  відповідає комплексне число

$$-a - bi - m + \frac{2m(a+m)}{m+2a}$$

або

$$-a - bi + \frac{m^2}{m+2a}. \quad (2)$$

Покажімо тепер, що конформне зображення частини  $\zeta$ -площини, що лежить поза профілем М. Є. Жуковського, на частину  $z$ -площини, що лежить поза колом  $x^2 + y^2 = R^2$ , дається формулою<sup>1</sup>

$$\zeta = z + \frac{m^2}{z-c}. \quad (3)$$

Для цього перепишімо цю формулу так:

$$\zeta - c = (z - c) + (Z - c), \quad (4)$$

де

$$Z - c = \frac{m^2}{z - c}. \quad (5)$$

Зауважмо, що комплексне число  $z - c$  геометрично зображається відтинком, який іде з точки  $c$  в точку, якій відповідає комплексне число  $z$ . Можна сказати, що числу  $z - c$  відповідає якийсь вектор, що йде з точки  $c$ .

Коли точка, що зображає комплексне число  $z$ , описує обвід кола  $k$ , напрям цього вектора обертається навколо точки  $c$ , а кінець його описуватиме обвід кола  $k$ . При цьому обертаються також напрями векторів  $(Z - c)$  і  $(\zeta - c)$ .

Нам треба показати, що кінець вектора  $\zeta - c$  опише профіль М. Є. Жуковського; для цього досить показати, поперше, що кінець вектора  $Z - c$  описує обвід кола  $K$  і, подруге, що аргумент вектора  $Z - c$  різниться тільки знаком від аргумента вектора  $z - c$ . Друга властивість впливає з формули (5).

Справді, покладімо, що аргумент вектора  $z - c$  дорівнює  $\theta$ , так що

$$z - c = |z - c| e^{i\theta}.$$

Тоді на підставі (5)

$$Z - c = \frac{m^2}{|z - c| e^{i\theta}} = \frac{m^2}{|z - c|} e^{-i\theta} = |Z - c| e^{-i\theta}$$

і другу властивість доведено.

Візьмімо доводити першу властивість. Насамперед видно, що кінець вектора  $Z - c$ , тобто точка  $(Z)$ , що відповідає комплексному числу  $Z$ , описує якийсь обвід кола, коли точка  $(z)$  описує  $k$ . Це виходить на підставі § 7 розділу II з того, що  $Z$  є дробова лінійна функція від  $z$ .

Тому нам досить показати, що лінія, описувана точкою  $(Z)$  проходить через точки  $A$  і  $B$  і дотикається  $k$  в точці  $A$  (рис. 38).

Точці  $B$  відповідає число  $-a - bi + \frac{m^2}{m+2a}$ , як ми бачили раніш [формула (2)].

Величині  $z$  даймо вартість

$$z = a - bi + m,$$

якій відповідає точка  $B'$ , що лежить на  $k$ .

<sup>1</sup> На рис. 38, 39, 40  $\zeta$ -площина й  $z$ -площина накладені одна на одну й при тому так, що точкам, які зливаються, відповідають однакові комплексні числа.

Для цієї вартости формула (5) дає

$$Z = c + \frac{m^2}{a - bi + m + a + bi} = -a - bi + \frac{m}{2a + m}.$$

Це число відповідає точці  $B$ , через це описуваний точкою  $(Z)$  обвід кола проходить через точку  $B$ .

Тепер даймо  $z$  вартість:

$$z = -a - bi - m,$$

що відповідає точці  $A$  на обводі  $k$ . Для цієї вартости  $z$  формула (5) дає

$$Z = -a - bi + \frac{m^2}{-a - bi - m + a + bi} = -a - bi - m,$$

тобто маємо число, що відповідає точці  $A$ . Отже, обвід кола, описуваний точкою  $(Z)$ , проходить через точку  $A$ .

Залишається довести, що обводи дотикаються в точці  $A$ . Для цього треба знайти  $dz$  і  $dZ$  для точки  $A$ . Коли виявиться, що в точці  $A$ :  $dz = \pm dZ$ , то твердження доведено, бо тут безконечно малі вектори, що йдуть із точки  $A$  до сусідньої точки кожного з обводів, лежать на тій самій простій (і йдуть в один бік, якщо є верхній знак, і в різні боки, коли є нижній).

На підставі (5) маємо:

$$dZ = -\frac{m^2}{(z - c)^2} dz,$$

але для точки  $A$ :  $z = -a - bi - m$ , так що в точці  $A$ :

$$dZ = -\frac{m^2}{(-a - bi - m + a + bi)^2} dz$$

або

$$dZ = -dz.$$

Отже формулу (3) доведено.

На підставі (3)

$$\frac{AQ}{AO} = \frac{m}{m + 2a}.$$

Ця формула дозволяє знайти точку  $Q$  (центр кола  $K$ ), коли  $b = 0$ , тобто для симетричного профіля (див. рис. 40).

### § 3. Обчислення сил, що чинять на профіль М. Є. Жуковського

Ми бачили вже, що для того, щоб знайти течію поза довільним профілем і щоб обчислити сили, які впливають на цей профіль, досить знати функцію

$$z = g(\zeta)$$

введену в § 6 розділу II.

У даному випадку на підставі формули (3) функція  $z = g(\zeta)$  має форму

$$z = \frac{c + \zeta + \sqrt{(\zeta - c)^2 - 4m^2}}{2}, \quad (6)$$

де знак радикала визначається з умови, що при  $\zeta = \infty$  також  $z = \infty$ ; щоб її одержати, ми розв'язали співвідношення (3) щодо  $z$ .

Формула (6) приводить до такого розкладу функції  $z$ , справедливого для великих модулем вартостей  $\zeta$ :

$$z = \zeta - \frac{m^2}{\zeta} - \dots \quad (7)$$

Комплексний потенціал  $F(\zeta)$  для профілю матимемо, коли у вираз<sup>1</sup>

$$f(z) = (-u_0 + iv_0)z - \frac{R^2(u_0 + iv_0)}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z}{R},$$

знайдений для потенціалу в разі, коли профілем є коло, замість  $z$  підставити вираз (6).

Ми бачили раніш, що

$$\frac{dF(\zeta)}{d\zeta} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta}, \quad (8)$$

тому

$$\frac{dF}{d\zeta} = u - iv = \left\{ (-u_0 + iv_0) + \frac{R^2(u_0 + iv_0)}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i z} \right\} \left\{ 1 + \frac{m^2}{\zeta^2} + \dots \right\}$$

бо на підставі (7)  $\frac{dz}{d\zeta} = 1 + \frac{m^2}{\zeta^2} + \dots$

Крім того, на підставі (7)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\zeta - \frac{m^2}{\zeta} + \dots} = \frac{1}{\zeta} + \frac{m^2}{\zeta^3} + \dots = \frac{1}{\zeta} + \dots$$

У § 5 розділу II ми зазначили, що у виразі  $\frac{d\omega}{d\zeta}$  (а тут у виразі  $\frac{dF}{d\zeta}$ ) досить знати тільки три перші члени розкладу за спадними степенями  $\zeta$ .

Тому то в усіх поданих розкладах ми спинялись на членах другого порядку щодо  $\frac{1}{\zeta}$ .

Збираючи подані формули, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\zeta} &= \left\{ (-u_0 + iv_0) + \frac{R^2(u_0 + iv_0)}{\zeta^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i \zeta} \right\} \left\{ 1 + \frac{m^2}{\zeta^2} + \dots \right\} = \\ &= (-u_0 + iv_0) + \frac{\Gamma}{2\pi i \zeta} + \frac{R^2(u_0 + iv_0) + m^2(-u_0 + iv_0)}{\zeta^2} + \dots \end{aligned}$$

Ми бачимо, що

$$B = R^2(u_0 + iv_0) + m^2(-u_0 + iv_0),$$

звідки

$$B_1 = u_0(R^2 - m^2)$$

$$B_2 = v_0(R^2 + m^2).$$

Зауважмо тепер, що на підставі (3)

$$\frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{m^2}{(z-c)^2},$$

тому в точці  $z=c-m$ , що лежить на профілі (це буде кутова точка  $A$ ) матимемо

$$\frac{d\zeta}{dz} \Big|_{z=c-m} = 1 - \frac{m^2}{m^2} = 0.$$

Отже в точці  $A$  похідна  $\frac{d\zeta}{dz}$  дорівнює нулеві, а, значить, вираз  $\frac{dz}{d\zeta}$  у цій точці стає безконечністю.

<sup>1</sup> Цей вираз різниться від формули (19) з розділу II тим, що тепер радіус циліндра позначено через  $R$ , а не через  $a$ .

Тому, що комплексну швидкість потоку, що обтікає профіль, дає формула (8), то в точці  $A$  профілю буде безконечна швидкість.

У § 1 цього розділу ми вже звернули увагу на це. Там таки й говорилось, що для того, щоб уникнути безконечних швидкостей, треба надати циркуляції цілком певної вартості.

Справді, щоб вираз (8) мав кінчену вартість у точці  $A$ , де другий множник  $\frac{dz}{d\zeta}$  стає безконечністю, ми повинні вимагати, щоб у точці  $A$  до-

рівнював нуліві перший множник  $\frac{df}{dz}$ . Але ми вже бачили (див. § 5, розділ II), що вираз  $\frac{df}{dz}$  стає нулем тільки в двох (критичних) точках. Тому точка  $A$ , якій відповідає число  $z = -a - bi - m$ , повинна бути одною з критичних.

Згадуючи, що комплексні числа, які відповідають критичним точкам, знаходять з рівняння

$$-u_0 + iv_0 + \frac{R^2(u_0 + iv_0)}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi zi} = 0,$$

бачимо, що комплексне число, яке відповідає точці  $A$ , повинне справджувати це рівняння.

Перше ніж підставляти в це рівняння

$$z = -a - bi - m,$$

згадаймо, що в перетвореному потокові швидкість на безконечності дорівнює

$$(-u_0 - iv_0) \left( \frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta=\infty},$$

а що  $\frac{dz}{d\zeta} = 1 + \frac{m^2}{\zeta^2} + \dots$ , то на безконечності  $\frac{dz}{d\zeta} = 1$ ; тож у перетвореному потокові величина й напрям швидкості на безконечності залишаються такими самими, що й у первісному потокові. Тому можна сказати, що  $u_0 + iv_0$  є комплексна швидкість руху крила.

Пам'ятаючи ще, що ми величину швидкості крила позначали раніш через  $V_0$ , а кут між швидкістю профілю та віссю  $x$  через  $\alpha$ , так що

$$u_0 + iv_0 = V_0 e^{i\alpha},$$

і що раніш ми ввели позначення

$$\frac{a+m}{R} = \cos \beta, \quad \frac{b}{R} = \sin \beta,$$

так що

$$z = -a - bi - m = -R(\cos \beta + i \sin \beta) = -R e^{i\beta},$$

матимемо таку умову для визначення  $\Gamma$ :

$$-V_0 e^{-i\alpha} + V_0 e^{i\alpha} \cdot e^{-2\beta i} - \frac{\Gamma}{2\pi i R e^{i\beta}} = 0,$$

звідки

$$\Gamma = 2\pi i R V_0 [e^{i\alpha} e^{-\beta i} - e^{-i\alpha} e^{i\beta}]$$

або

$$\Gamma = 4\pi R V_0 \frac{e^{i(\beta-\alpha)} - e^{-i(\beta-\alpha)}}{2i} = 4\pi R V_0 \sin(\beta - \alpha) \quad (9)$$

Отже, щоб не було безконечних швидкостей, треба, щоб циркуляція мала вартість, визначувану формулою (9).

Цей вираз дає величину підйимальної сили у формі

$$P = \rho V_0 \Gamma = 4 \pi R \rho V_0^2 \sin(\beta - \alpha) \quad (10)$$

Ми бачимо, що підйимальна сила пропорційна до квадрату швидкості і певною мірою залежить від кута устави крила щодо потоку, інакше кажучи, від кута між напрямом руху профілю та якимсь певним напрямом, зв'язаним із профілем. Цей кут звать кут атаки.

Як основний напрям для відлічувань кутів атаки, можна було б узяти, приміром, вісь  $X$ . Тоді кут атаки дорівнював би  $\alpha$ . Замість цього, зручніше за основний напрям узяти лінію  $AO$ , що йде в центр кола  $k$  (на якому побудовано профіль М. Є. Жуковського) з точки  $A$  (тобто з точки, що перетворюється в кутову точку крила).

Цей напрям звать „перша вісь профілю“. Кут між напрямом руху та першою віссю (кут атаки щодо першої осі) позначмо через  $\alpha_1$ , так що

$$\alpha_1 = \beta - \alpha$$

Тоді формула (10) набере вигляду

$$P = 4 \pi R \rho V_0^2 \sin \alpha_1, \quad (11)$$

звідки виходить, що, коли профіль рухається в напрямі першої осі, підйимальна сила дорівнює нулеві; звідси випливає важливе значення першої осі. Разом із тим ще раз підкреслюється важливість твірного кола  $k$  для профілю. Не беручи навіть на увагу зв'язок профілю з цим колом через конформне відтворення, зручно в  $\zeta$ -площині, де є профіль, разом із профілем будувати й це коло, як фігуру, „аеродинамічно“ зв'язану з профілем.

Обчислимо тепер момент  $M$  сил тиску щодо точки  $\zeta=0$ . Щоб пояснити, чому вибрано саме цю точку, як центр моментів, нагадаємо ще раз, що  $\zeta=0$  є центр кола  $k$ , на якому будовано профіль М. Є. Жуковського.

Для цього ми маємо формулу

$$M = 2 \pi \rho (v_0 B_1^* - u_0 B_2),$$

де  $B_1 + i B_2$  визначають із розкладу функції  $\frac{dw}{d\zeta}$ . У розгляданому випадку, на підставі знайдених раніш співвідношень

$$B_1 = u_0 (R^2 - m^2), \quad B_2 = v_0 (R^2 + m^2)$$

матимемо:

$$\begin{aligned} M &= 2 \pi \rho \{ u_0 v_0 (R^2 - m^2) - u_0 v_0 (R^2 + m^2) \} = \\ &= -4 \pi \rho m^2 u_0 v_0 = -4 \pi \rho m^2 V_0^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -2 \pi \rho m^2 V_0^2 \sin 2 \alpha \end{aligned} \quad (12)$$

Формула (12) дає, отже, величину моменту сил тиску щодо центру твірного кола.

Якщо швидкість профілю йде по дійсній осі (осі  $X$ ), то момент  $M$  дорівнює нулеві.

У нас дійсна вісь, отже, є якийсь напрям, що має певне механічне значення для профілю, яке за Mises'ом звать „друга вісь профілю“.

#### § 4. Параболя стійкості

У попередньому параграфі ми бачили, що момент сил тиску на профіль М. Є. Жуковського щодо центру твірного кола дорівнює

$$M = -2 \pi \rho m^2 V_0^2 \sin 2 \alpha. \quad (12)$$

Отже величина цього моменту залежить від кута атаки.

Виникає питання, чи не можна знайти такої точки в площині профілю, щодо якої момент має стале значення.

Виявляється, що це можливе, і що цій точці відповідає комплексне число

$$\frac{m^2}{R} e^{-i\beta} = \frac{m^2}{R} (\cos \beta - i \sin \beta), \quad (13)$$

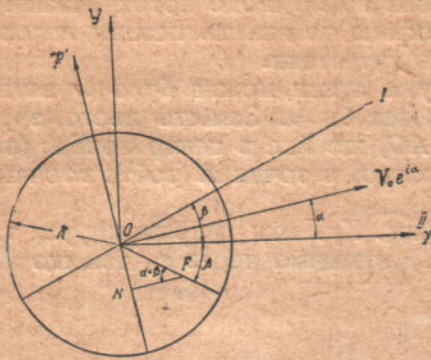


Рис. 41.

де, як і раніш,  $\beta$  є кут між першою віссю профілю та дійсною віссю (тобто кут між обома осями профілю).

Позначмо цю точку через  $F$  і навімі її фокусом профілю  $M. E. Жуковського$ .

Величину моменту сил тиску щодо фокуса позначмо через  $L$ .

Щоб обчислити  $L$ , треба до  $M$  додати момент сили  $\mathcal{P}'$ , прикладеної до точки  $O$  й рівної з підйнятною силою профілю (рис. 41).

Зауважуючи, що  $OF = \frac{m^2}{R}$ , що кут

$OFN$  дорівнює  $\alpha + \beta$  і що момент сили  $\mathcal{P}'$  щодо точки  $F$  буде від'ємний, матимемо для цього моменту вираз:

$$-\mathcal{P}' \cdot OF \cdot \cos(\alpha + \beta) = -4\pi R\rho V_0^2 \sin(\beta - \alpha) \frac{m^2}{R} \cos(\alpha + \beta).$$

Звідси

$$L = M - \mathcal{P}' \cdot OF \cdot \cos(\alpha + \beta) = -2\pi\rho m^2 V_0^2 \sin 2\alpha - 4\pi\rho V_0^2 m^2 \sin(\beta - \alpha) \cos(\alpha + \beta) = -2\pi\rho m^2 V_0^2 \{\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\alpha\} = -2\pi\rho m^2 V_0^2 \sin 2\beta. \quad (14)$$

Ми бачимо, що  $L$  справді не залежить від кута атаки.

Позначаючи через  $h$  рамено підймальної сили щодо фокуса, матимемо

$$h = -\frac{L}{P} = \frac{2\pi\rho m^2 V_0^2 \sin 2\beta}{4\pi R\rho V_0^2 \sin \alpha_1} = \frac{m^2 \sin 2\beta}{2R \sin \alpha_1} = \frac{h_0}{\sin \alpha_1},$$

де  $h_0$  є якийсь сталий для крила відтинок, а  $\alpha_1$ , як раніш ми прийняли, є кут атаки щодо першої осі.

Спустімо тепер з фокуса (рис. 42) нормаль на першу вісь і відкладемо на нормалі від точки  $F$  відтинок  $h_0$ . Цю нову точку  $S$  візьмімо за вершок, а  $F$  за фокус параболі, так що дотична до параболі в її вершкові буде рівнобіжна з першою віссю. Позначмо цю дотичну через  $T$ . Проведемо, нарешті, через  $F$  просту в напрямі швидкості профілю.

Нехай ця проста перетинає  $T$  в точці  $G$ . Тому що  $\alpha_1$  є кут між напрямом руху профілю та першою віссю, то

$$\angle SGF = \alpha_1.$$

Значить,

$$GF = \frac{h_0}{\sin \alpha_1} = h$$

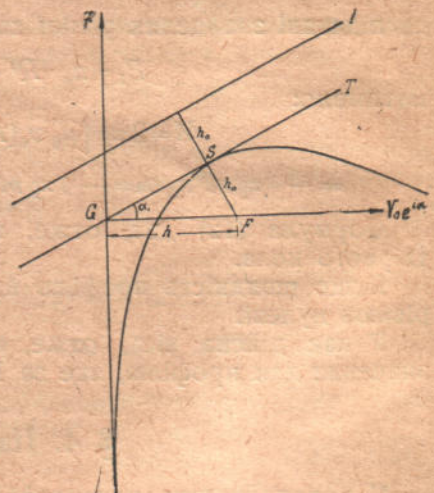


Рис. 42.

$h$  є рамено підймальної сили; через це підймальна сила проходить через точку  $G$  і нормальна до радіуса-вектора  $FG$ .

Через властивість параболі проста, нормальна до радіуса-вектора на кінці його, що лежить на дотичній до параболі у вершку, сама дотикається до параболі. Отже, побудована параболія обгортає прості, по яких іде підіймальна сила для різних кутів атаки<sup>1</sup>.

Ці міркування показують на важливе значення для профілю побудованої параболі, яку деякі автори звать параболія підіймальних сил або параболія метацентрів (а також параболія стійкості). На рис. 43 профіль нарисовано разом із параболою підіймальних сил, осями й твірним колом.

Теорію параболі підіймальних сил дали Mises і Чаплигін.

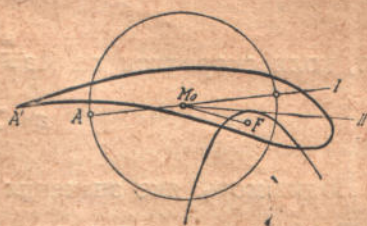


Рис. 43.

### § 5. Підіймальна сила, момент і параболія стійкості для будь-якого профілю

Ми вже говорили, що властивості будь-якого профілю можна дослідити, якщо для цього профілю знайдено функцію зображення (конформне відтворення). Тому бажано дослідити, який характер функції зображення в найзагальнішому випадку і як залежать властивості профілю від тих неозначених сучинників, що входять у склад функції зображення.

Візьмімо в площині (рис. 44) якийнебудь профіль і віднесімо його до якоїсь тимчасової системи координат  $\xi', \eta'$ , так що кожне

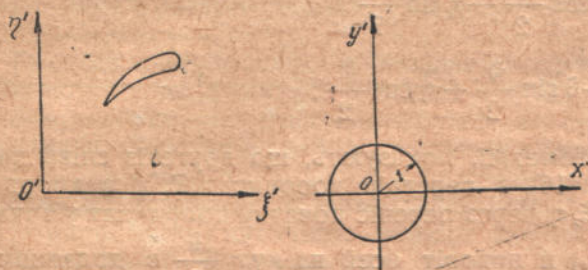


Рис. 44.

комплексне число в цій площині буде у формі  $z' = \xi' + i\eta'$ .

Обсяг поза цим профілем зображатимемо на обсяг поза певним колом, що лежить в іншій площині.

Візьмімо, що ця нова площина віднесена до тимчасових координат  $x', y'$ , у так, що кожне комплексне число у цій площині буде у формі

$$z' = x' + iy',$$

і нехай центр кола лежить у точці  $z' = 0$ ; щодо радіуса кола, то він залишається покищо неозначений.

Давши радіусові будь-яку вартість, приміром 1, ми можемо на підставі теорем теорії функцій з певністю говорити, що функція зображення існує, і для великих  $|z'|$  має розклад:

$$z' = Az' + B + \frac{C_1}{z'} + \frac{C_2}{z'^2} + \dots \quad (15)$$

Покладаючи, що

$$\frac{C_1}{A} = -m^2 e^{i\theta}$$

де  $m$  і  $\theta$  дійсні числа, введемо нові змінні замість  $z'$  і  $z'$ , а саме покладімо

$$z' = Ae^{\frac{i\theta}{2}} z, \quad z' = e^{\frac{i\theta}{2}} z - \frac{B}{A} \quad (16)$$

<sup>1</sup> Нетрудно показати, що перша вісь профілю — це директриса побудованої параболі й друга вісь профілю дотикається до параболі.

Тоді формула (15) дасть

$$Ae^{\frac{ib}{2}} z = Ae^{\frac{ib}{2}} \zeta - B + B - \frac{Am^2 e^{ib}}{e^{\frac{ib}{2}} \zeta} + \dots$$

або, коли скоротити на  $Ae^{\frac{ib}{2}}$ ,

$$z = \zeta - \frac{m^2}{\zeta} + \frac{q_2}{\zeta^2} + \dots \quad (17)$$

Подивімось, яке значення має перетворення (16).

Для цього позначмо комплексне число  $-\frac{B}{A}$  через  $\xi'_0 + i\eta'_0$  та перепишемо другу з формул (16) у формі:

$$\xi' + i\eta' = \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) (\xi + i\eta) + \xi'_0 + i\eta'_0.$$

Перемноживши і порівнявши потім дійсні та уявні члени в лівій і правій частині, матимемо дві рівності:

$$\xi' = \xi'_0 + \xi \cos \frac{\theta}{2} - \eta \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\eta' = \eta'_0 + \xi \sin \frac{\theta}{2} + \eta \cos \frac{\theta}{2},$$

що, як відомо з аналітичної геометрії, показують, що друге із співвідношень (16) є перетвір координат  $\xi', \eta'$  в координати  $\xi, \eta$  через переніс початку координат у точку  $(\xi'_0, \eta'_0)$  й поворот осей на кут  $\frac{\theta}{2}$  в додатному напрямі (рис. 45). Тому то ми раніш і назвали координатні осі  $\xi', \eta'$  тимчасовими.

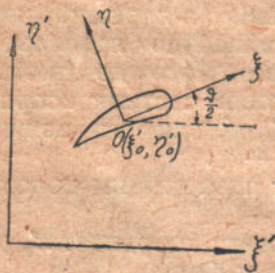


Рис. 45.

Покладаючи  $z' = Ae^{\frac{ib}{2}} z$ , ми робимо в площині кола теж якийсь поворот осей і, крім того, якщо  $|A| \neq 1$ , робимо розтяг; полягає він у тому, що модуль кожного комплексного числа множать на певне постійне число (в даному разі на  $|A|$ )

$$|z'| = |A| \cdot |z|$$

Тому коло, на обсяг поза яким робимо зображення, маючи, як і раніш, центр в початкові координат, матиме радіус уже не рівний з одиницею, а рівний з якимсь числом  $R$ , що залежить від розмірів вибраного в  $\zeta$ -площині профілю.

Отже, вибираючи відповідно радіус кола й координатні осі, можна досягти того, щоб функція зображення мала розклад

$$z = \zeta - \frac{m^2}{\zeta} + \frac{q_2}{\zeta^2} + \dots,$$

де сучинник при  $\frac{1}{\zeta}$  є від'ємне число.

Накладімо тепер  $z$ -площину на  $\zeta$ -площину так, щоб осі координат у цих площинах злилися.

Тоді коло  $z$ -площини накладається на профіль. Це коло має для довільного профілю значення, аналогічне тому, яке має твірне коло для профілю М. Є. Жуковського.



Назвімо це коло основним колом досліджуваного профілю. Припускаючи, як і раніш, що профіль має ззаду кутову точку, візьмімо точку обводу основного кола, що відповідає цій кутовій точці, і сполучімо її з центром основного кола; цей новий напрям назвімо — „перша вісь профілю“.

Другою віссю, як і раніш, назвімо дійсну вісь (вісь  $X$ ).

Кут між осями, як і раніш, позначмо через  $\beta$ .

Тепер не трудно бачити, що формула для вислідної сил тиску й формула для моменту цієї вислідної відносно центру основного кола зберігають ту саму форму, що й для профілю М. Є. Жуковського, тобто

$$P = 4\pi R\rho V_0^2 \sin(\beta - \alpha) \quad (10)$$

$$M = -2\pi\rho m^2 V_0^2 \sin 2\alpha. \quad (12)$$

Справді, виводячи ці формули, ми користалися з того, що

$$\frac{dz}{d\xi} = 1 + \frac{m^2}{\xi^2} + \dots,$$

дальші члени на силу й момент не впливали. Але й тепер у загальному випадку перші члени розкладу матимуть таку саму форму.

Тільки в загальному випадку, який ми тепер розглядаємо,  $R$  і  $m$  не мають того простого зв'язку з профілем, як це було у випадку профілю М. Є. Жуковського.

Так само переносять на загальний профіль поняття про параболу стійкості та всі формули, виведені для неї.

Збираючи сказане в цьому параграфі, ми приходимо до висновку, що для того, щоб визначити сили й момент у загальному випадку, треба знати радіус основного кола, положення точки, що відповідає задньому куту, і число  $m^2$  у розкладі функції зображення.

Найпростішим випадком функції зображення є та, що приводить до профілю М. Є. Жуковського.

Цей профіль залежить тільки від трьох параметрів  $R$ ,  $m$ ,  $\beta$ ; міняючи їх, ми можемо міняти глибину, грубіну й увігнутість профілю. Отож, через це є змога наблизитись до тих профілів, що їх уживають в авіації. Проте, коли є багато параметрів, можна мати більшу різноманітність у формах профілів, а, значить, і більшу змогу вибирати найраціональніші з них.

## § 6. Ідея методи М. Є. Жуковського та узагальнення її

Ще перед дослідями М. Є. Жуковського, які призвели до профілю, що носить його ім'я, досліджували профілі, які мали форму дуги кола або дучки, утвореної двома дугами.

Конформні відтворення обсягів поза такими профілями на обсяг поза колом були добре відомі<sup>1</sup>.

Спинімось на дучці, бо в окремому випадку вона переходить у дугу.

Нехай частину  $Z$ -площини поза дучкою (рис. 46) зображено за допомогою функції

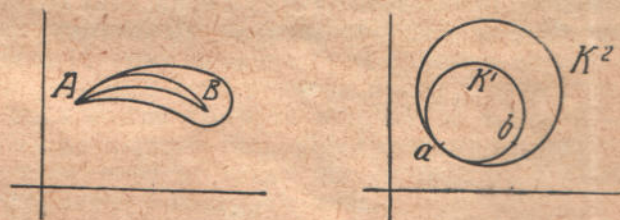


Рис. 46.

$$Z = g(z)$$

на обсяг поза якимсь колом у  $z$ -площині й нехай при цьому точки  $A$  й  $B$  зображаються в точках  $a$  й  $b$ .

<sup>1</sup> Див. додаток I у кінці книжки.

У точках  $a$  й  $b$  конформність порушується, бо в кутових точках похідна функції зображення обертається на нуль.

Головна незручність профілю  $AB$  (дучки) в тому, що тут загострений не тільки задній, а й передній кінець.

Щоб згладити передній кінець, М. Є. Жуковський побудував у  $z$ - площині друге коло, що обіймає перше й дотикається до нього в точці  $a$ .

При розгляненому конформному відтворенні цьому колу відповідатиме якась замкнена лінія, що обіймає дучку  $AB$ . Ця нова лінія проходить через точку  $A$  і в цій точці вона дотикатиметься дуг, що утворюють дучку, бо обвід кола  $K_2$  дотикається до обводу кола  $K_1$  у точці  $a$ .

А що поза точками  $a$  й  $b$  зображення конформне, то профіль, що відповідає обводі  $K_2$ , не матиме, крім  $A$ , інших кутових точок, і передня частина його буде закруглена.

У наслідок утворюється профіль, близький до вживаних на практиці. Зокрема профіль М. Є. Жуковського повстане тоді, коли ці міркування застосувати не до дучки, а до звичайної дуги. Після М. Є. Жуковського багато авторів і надто Karman, Trefftz і Mises винайшли нові, загальніші профілі. При цьому насамперед за „кістяк“ узято дучку замість звичайної дуги. Тому, що в дучці з'являється новий параметр, а саме її кут, то тут уже маємо більшу різноманітність профілів. Можна за кістяк взяти многокутник, для якого конформне відтворення дається формулою Schwarz-Christoffel'я, а потім повторити подані тут міркування.

У зв'язку з цим цікаві досліди W. Müller'a.

## РОЗДІЛ IV

### ВИХРОВІ ЯВИЩА В ПЛОСКО-РІВНОБІЖНОМУ ПОТОКОВІ

#### § 1. Роль в'язкості в процесі утворення циркуляцій

Уявімо собі, що течиво, де є нерухомий профіль  $C$  (рис. 47), спочатку перебуває в спокої, а потім поволі починає рухатись, так що через якийсь час на профіль починає набігати якийсь рівномірний на безконечності потік.

Утворення підіймальної сили (що є дослідний факт), з одного боку, і неможливість безконечної швидкості в задній кутовій точці, з другого боку, примушують нас визнати, що під час руху течива повинна постати якась циркуляція навколо досліджуваного профілю.



Рис. 47.

Візьмімо в площині профілю якийсь течний контур, що спочатку (момент  $t_0$ ) мав положення  $L_0$ , а в якийсь момент  $t$  зайняв положення  $L$ . Тому, що спочатку жадного руху взагалі не було, то в момент  $t_0$  по контурові  $L_0$  циркуляція дорівнювала нулеві. За Thomson'овою теоремою про сталість циркуляції по течному контурові повинна дорівнювати нулеві циркуляція по контурові  $L$  у момент  $t$ .

Розбиймо тепер контур  $L$  на два контури  $abca$  й  $acda$ . У момент  $t$  сума циркуляцій по цих контурах (яка рівна з циркуляцією по  $L$ ) дорівнює нулеві; але по контурові  $abca$  циркуляція не нуль, бо це є контур, що досить щільно обіймає профіль  $C$ ; тому повинна бути відмінна від нуля циркуляція по контурові  $acda$ , інакше в сумі вони не могли б дати нуля.

Але разом із тим контур  $acda$  можна стягнути в точку, не залишаючи обсягу, занятого потоком. Тому на підставі Stokes'ової теореми нерівність з нулем циркуляції по контурові  $acda$  можлива тільки тоді, як є якісь вихри, що проймають площу, обмежену контуром  $acda$ .

Отже, ми прийшли до висновку, що під час руху (принаймні тоді, коли течія нестационарна) в течиві повинні поставати вихри.

Це заперечують Helmholtz'ові теореми про вихри.

Тому що Helmholtz'ові теореми виведено для ідеального течива, то само собою виникає думка, що спричиняти постання вихрів повинна в'язкість.

Щоб з'ясувати роль в'язкості в процесі вихроутворення за крилом, дослідімо явище, що його винайшов ще 1853 року берлінський фізик Magnus і що має назву Magnus'ового ефекту.

## § 2. Magnus'ів ефект. Flettner'ів роторний корабель

Спостерігаючи літ артилерійських набоїв, Magnus помітив дуже цікаве явище, теорію якого пізніше дав Rayleigh.

Нехай у повітрі, що має на безконечності рівномірну швидкість, є круговий циліндр з нерухомою віссю, нормальною до швидкості потоку в безконечності (рис. 48).

Покладімо, що циліндр обертається з якоюсь кутовою швидкістю навколо своєї осі.

Виявляється, що на циліндр у таких умовах чинить сила, нормальна до швидкості потоку на безконечності, при чому напрям цієї сили визначається напрямом обертання циліндра.

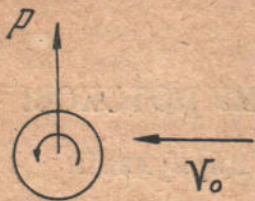


Рис. 48.

Якби повітря без перешкоди ковзалося по поверхні циліндра, то, очевидно, обертання циліндра не мало б жадного значення. До того ж підймальна сила зв'язана з утворенням циркуляції навколо циліндра. Отже доводиться прийняти, що циркуляція і разом з тим і підймальна сила постають у наслідок тертя повітря об поверхню циліндра. А priori можна було б цілком природно гадати, що через прилипання повітря до поверхні циліндра й через унутрішнє тертя в повітрі циліндр, ступнево обертаючись, тягне один за одним навколишні шари повітря і, кінець-кінцем, постає циркуляційна течія, як навколо циліндричного вихру.

Проте, в дійсності явище буде інше. Вивчаючи такі процеси теоретично й експериментально, L. Prandtl установив, що унутрішнє тертя в повітрі надто мале, щоб безпосередньо спричинитися до утворення циркуляції. Виявилось, що значення в'язкості в цьому процесі (і в багатьох інших процесах) інше. Річ у тім, що чим швидше міняється швидкість, тим більше впливає в'язкість, як про це вже говорилося в розділі I (§ 16). Тому в середині повітря в'язкість майже нічого не важить. Отже, наше зауваження в § 3 розділу I про те, що течиво з малою в'язкістю в першому наближенні можна вважати за ідеальне, є справедливе для обсягу в середині потоку.

Але коло поверхні занурених у течиво тіл картина міняється. Тут дуже падає швидкість від великих вартостей на невеликій віддалі від тіла, що перебуває в спокої, до нуля коло поверхні його, бо на поверхні тіла буває повне прилипання.

І ця зміна швидкості відбувається в надзвичайно тонкому шарі, що прилягає до поверхні тіла. У цьому шарі (у так званому поверхневому шарі) в'язкість чимало важить. За Prandtl'євою теорією саме в цьому шарі утворюються вихри, що потім відриваються від тіла й переходять у зовнішній потік.

Там вони поводяться так, як в ідеальному течиві. Ця Prandtl'єва теорія насамперед пояснює ту уявну суперечність з Helmholtz'овими теоремами, про яку ми говорили раніш, а подруге, вона дозволяє зовнішнє течиво вважати за ідеальне, а це спрощує розрахунки. Разом із тим, через малу глибину поверхневого шару, можна вивчати процеси в ньому, застосовуючи наближені методи.

Розгляньмо трохи докладніше процес утворення вихрів (а значить і циркуляції) в Magnus'овому явищі.

З того боку циліндра (рис. 49), де швидкість від обертання йде за швидкістю потоку, поверхневий шар захоплює обертовий циліндр,

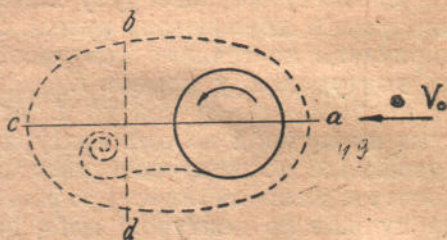


Рис. 49.

а з другого боку, де ці швидкості йдуть у протилежному напрямі, він відділяється від циліндра як вихровий спіралюватий шар, що потім відривається від циліндра, і потік несе його у вільне течиво, де від нього починається система вихрів з якоюсь циркуляцією.

Тоді ж таки так міняється розподіл швидкостей у зовнішньому просторі, що циліндер вже має певну циркуляцію, що різниться тільки знаком від циркуляції навколо вихрів, що відійшли. Вихри ступнево відходячи, змінюють і поле швидкостей, і циркуляцію навколо циліндра доти, доки вихри не почнуть відділятися від обох боків циліндра парами з протилежними циркуляціями.

Пізніше ми повернемось до утвореної від Карман'а теорії таких рядів вихрових пар (так званих „вихрових вулиць“), що відокремлюються від тіла, а покищо завважимо, що зважити на них кінче потрібно, щоб дослідити чоловий опір, бо на утворення цих рядів вихрів витрачається певна енергія. Щождо підіймальної сили, то тут можна нехтувати утворенням „вихрових вулиць“, а розглянути циліндер не з змінною циркуляцією, що є в дійсності, а з якоюсь постійною пересічною вартістю циркуляції так, щоб можна було застосувати зміщену в розділі II теорію.

Недавню Magnus'ів ефект використав Flettner для руху суден.

Flettner замінює вітрила високими обертовими вежами (рис. 50). Якщо вежа обертається, як зазначено стрілкою на рис. 48, то коли є вітер у напрямі  $V_0$  на циліндер впливатиме сила  $P$ .

Flettner робив спроби спочатку на човні, а потім на судні „Buckau“, де були дві обертові вежі. Виявилось, що корисно класти зверху циліндрів широкі шайби, щоб повітря не допливало до циліндрів зверху (рис. 51).

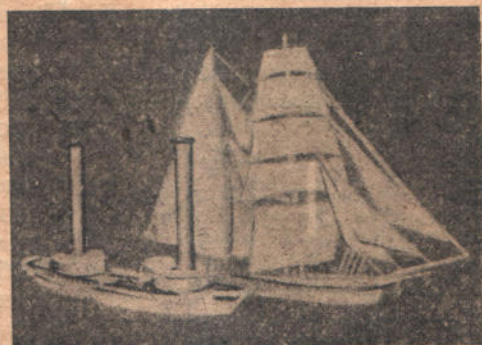


Рис. 50.

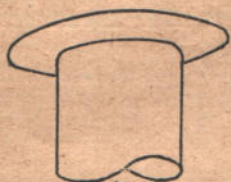


Рис. 51.

### § 3. Теорія поверхневого шару

Щоб показати, до яких наслідків математичного характеру приводить припущення, що лежить в основі Prandtl'євої теорії про утворення коло поверхні твердого тіла поверхневого шару невеликої грубини, розгляньмо плоскорівнобіжний рух течива, обмеженого з одного боку безконечно довгою плоскою стіною. Отже ми приймемо, що межею твердого тіла в площині течії буде вісь  $x$ .

Основні Prandtl'єві припущення про природу поверхневого шару такі:

1) Є якийсь тонкий шар, що його грубина  $\delta$  є якась функція від  $x$  [ми можемо через це написати, що  $\delta = \delta(x)$ ], поза яким, тобто для  $y \geq \delta(x)$  течію можна вважати за потенціальну, а течиво за ідеальне.

2) Через невелику грубину цього шару можна вважати, що проєкція швидкості на дотичну до лінії, що обмежує поверхневий шар, на границі шару має ті самі вартості, які б вона мала на границі тіла (в нас при  $y=0$ ), якби коло поверхні тіла не було прилипання, тобто якби було повне ковзання течива по цій поверхні. Цю величину позначмо через  $u_0 = u_0(x)$  (в нас  $u_0$  є константа).

3) Тиск у середині шару не залежить від  $y$  і має ту саму вартість, як і в зовнішньому потенціальному течиві коло границі шару. Взввши на увагу невелику грубину шару, можемо вважати, що в шарі тиск має ту

саму вартість, як і в потенціальному потокові коло поверхні тіла, якби ця течія доходила до самого тіла, тобто якби вздовж поверхні тіла було можливе повне ковзання.

4) Вважаючи на те, що поза шаром течію приймаємо за ідеальну, на границі шару в'язкість течива можна знехтувати.

Отже поза шаром ми маємо якусь потенціальну течію, для якої справедливі рівняння розділу II. Ці рівняння дають змогу визначити тиск у середині шару й швидкість по осі  $x$  на межі шару, тобто  $u_0(x)$ .

Для течива в середині шару треба вивести нове рівняння. Отож і почнімо його виводити, припускаючи весь час, що тіло є безкінечно довга плоска стіна. Для цього розглянемо елемент течива, обмежений віссю  $x$  (границя тіла), поверхнею  $y = \delta(x)$  (границя поверхневого шару) і двома безкінечно близькими ординатами (рис. 52). Висота шару, тобто довжина в напрямі осі  $z$ , дорівнює одиниці.



Рис. 52.

Очевидно, що в зв'язку з невеликою глибиною ми повинні знайти тільки одне рівняння, а саме рівняння, що відповідає осі  $x$ .

Пригадуючи § 16 розділу I, ми легко знайдемо, що проекція на вісь  $x$  сили тертя, яка постає коло поверхні стіни, дорівнює:

$$-\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx$$

Тиск на ліву стінку виділеного елемента дорівнює

$$p_0 \delta$$

а на праву

$$-\left( \delta + \frac{\partial \delta}{\partial x} dx \right) \left( p_0 + \frac{\partial p_0}{\partial x} dx \right) = -p_0 \delta - p_0 \frac{\partial \delta}{\partial x} dx - \frac{\partial p_0}{\partial x} \delta \cdot dx$$

Крім того, треба взяти на увагу тиск на границю шару зверху, що дорівнює  $p_0 ds$ ; проекція його на вісь  $x$  дорівнює

$$p_0 ds \cdot \sin(y, n),$$

де  $n$  — нормаль до лінії  $y = \delta(x)$ , що обмежує шар. Але  $\sin(y, n) = \sin(x, T)$ , де  $T$  — дотична до лінії  $y = \delta(x)$ . Тому

$$\sin(y, n) = \frac{\partial \delta}{\partial s}.$$

Отже зверху на поверхню шару припадає тиск

$$p_0 \frac{\partial \delta}{\partial s} ds = p_0 d\delta = p \frac{\partial \delta}{\partial x} dx.$$

Вислідна сила тиску має, отож, по осі  $x$  проекцію

$$-\delta dx \frac{\partial p_0}{\partial x}.$$

Тут згідно з  $2^\circ$   $p_0$  є величина тиску в точці стіни (що відповідає досліджуваній абсцисі) для потенціальної течії, якби вона доходила до самої стіни.

Залишається врахувати силу інерції. Для цього треба масу елемента помножити на пересічне пришвидшення по осі  $x$  і взяти його із знаком мінус.

Щоб визначити пересічне пришвидшення, треба величину пришвидшення проінтегрувати по гурбині шару й розділити на гурбину шару. Тоді для сили інерції матимемо:

$$-\rho \cdot dx \cdot \delta \cdot \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \frac{du}{dt} dy,$$

бо  $\rho dx \delta$  є маса елемента.

Дорівнюючи суму всіх сил нулевій, маємо рівняння поверхневого шару у формі:

$$-\rho \int_0^{\delta} \frac{du}{dt} dy - \delta \frac{\partial p_0}{\partial x} - \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (1)$$

Пригадуючи, що

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y},$$

скористуємось із рівняння нестисливості

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

і зробимо такі перетворення:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \frac{du}{dt} dy &= \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial t} dy + \int_0^{\delta} u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta} u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 dy - \int_0^{\delta} u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy + [uv]_0^{\delta} - u_0^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta} u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 dy + u_0 \int_0^{\delta} \frac{\partial v}{\partial y} dy - u_0^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta} u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 dy - u_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy. \end{aligned}$$

При цьому ми скористувалися з того, що

$$u_{y=0} = v_{y=0} = 0; \quad (u)_{y=\delta} = u_0;$$

а значить

$$\begin{aligned} [uv]_0^{\delta} &= [uv]_{y=\delta} - (uv)_{y=0} = \\ &= u_0 [(v)_{y=\delta} - (v)_{y=0}] = u_0 \int_0^{\delta} \frac{\partial v}{\partial y} dy = -u_0 \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy = -u_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy + u_0^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}. \end{aligned}$$

Отже ми маємо рівняння для поверхневого шару у формі:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta} u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 dy - u_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy = -\frac{\delta}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (2)$$

Не зупиняючись на наближеному розв'язанні цього рівняння, що зробив Polhausen,<sup>1</sup> зазначимо тільки, що через це інтегрування можна визначити точку контура тіла, де відбувається відокремлення вихрів з поверхневого шару в зовнішній простір. Крім того, теорія поверхневого шару дала змогу теоретично оцінити ту частину чолового опору, що постає з рухом тіла і що пояснюється тертям повітря об поверхню тіла. Експериментальна перевірка стверджує, що ця теорія поверхневого шару правильна.

#### § 4. Карман'ові вихрові вулиці

Уже раніш говорилося, що з рухом крила в повітрі весь час відділяються вихри з поверхневого шару в середину потоку.



Рис. 53 а.



Рис. 53 б.

Якщо профіль має симетричну щодо напрямку руху форму, то вихри відділяються парами (рис. 53 а, б, с) із повною циркуляцією, що дорівнює нулеві. Тут циркуляція навколо профілю не утворюється і підймальна сила не постає.

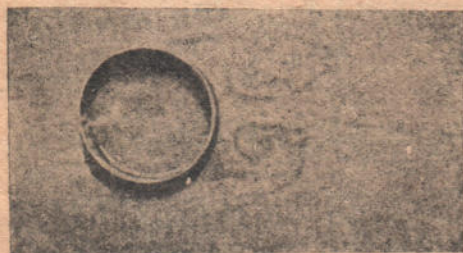


Рис. 53 с.

Якщо немає симетрії, спочатку відбувається відділення вихрів тільки з одного боку профілю; воно триває доти, доки в зв'язку з переміщенням критичної точки потоку й утворенням циркуляції вихри не почнуть відділятися парами. Нехтуючи цим новим вихротворенням і вважаючи за стаціонарний процес, що справді є

квазистаціонарний, ми не враховуємо тієї частини чолового опору, що утворюється коштом енергії, яка витрачається на це вихротворення. Але для того, щоб обчислити підймальну силу, це не так уже важливо й припустивши, що вихротворення припиняється, коли циркуляція дійде своєї граничної вартості, ми матимемо наслідки, що добре погоджуються з досвідом.

Проте, має великий інтерес вивчення парного відділення вихрів, щоб з'ясувати опір, який постає в наслідок цього явища.

В цьому дослідженні можна виходити через це з розгляду симетричного профілю. В цьому випадку утворені вихри розташовуються в якомусь правильному порядку в формі двох рівнобіжних рядів. Ми вже зазначили, що ряди ці на честь Карман'а,<sup>2</sup> який дослідив їх уперше, звуть Карман'овими „вихровими вулицями“.

<sup>1</sup> Див. Polhausen, Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht; Karman. Über Oberflächenreibung von Flüssigkeiten (Zeitschr. für angew. Math. u. Mech., Bd. I, 1921). Ще раніш над розв'язанням рівняння (правда, інакше записаного) поверхневого шару працювали L. Prandtl, Blasius, Boltze та Hiemenz. (Недавно вийшов з друку російський переклад роботи Prandtl'я 1904 р.: Л. Прандтль, Движение жидкости с очень малым трением (ЦАГИ, 1931).

<sup>2</sup> Karman, Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes, 1911—1912.



Насамперед Кагтан дослідив умови, в яких два рівнобіжні ряди правильно розташованих вихрів стійкі. Для спрощення він припускав, що вихрові вулиці тягнуться безконечно в обидва боки. Ця картина наближено має місце далеко позаду тіла.

Припустімо, що центри вихрів, що утворюють вулиці (рис. 54), лежать на двох протилежних, рівнобіжних з віссю  $x$ , у площині комплексного змінного  $z = x + iy$ . Нехай циркуляція навколо кожного вихру верхнього ряду дорівнює  $+\Gamma$ , а нижнього  $-\Gamma$ .

Якщо позначити через  $l$  віддаль між двома вихрами одного ряду, а через  $h$  віддаль між рядами, то виявляється, що стійкими досліджувані ряди будуть тільки тоді, коли вихри розташовані в шаховому порядку й при тому так,<sup>1</sup> що

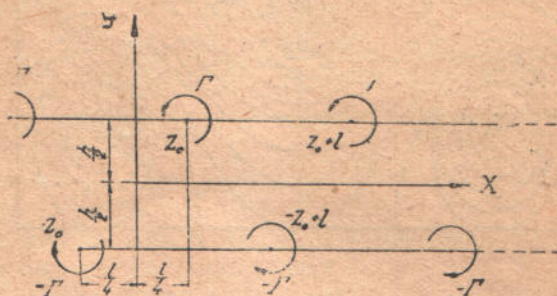


Рис. 54.

$$\cosh \frac{\pi h}{l} = \sqrt{2}, \quad (3)$$

звідки

$$\frac{h}{l} = 0,2806. \quad (4)$$

У таких умовах вихрові ряди рухатимуться вздовж додатної осі  $x$  зі сталою швидкістю

$$u = \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{tgh} \frac{h\pi}{l} = \frac{\Gamma}{2l} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

Далі, якщо вихри верхнього ряду розташовані в точках

$$z_0 = \frac{l}{4} + \frac{ih}{2}; \quad z_0 + l; \quad z_0 + 2l \dots \quad z_0 - l; \quad z_0 - 2l; \dots$$

а значить вихри нижнього ряду в точках

$$-z = -\frac{l}{4} - \frac{ih}{2}; \quad -z_0 - l; \quad -z_0 - 2l; \dots \quad -z_0 + l; \quad -z_0 + 2l; \dots$$

то комплексний потенціал течії подає така формула:

$$W = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sin(z_0 - z) \frac{\pi}{l}}{\sin(z_0 + z) \frac{\pi}{l}}. \quad (6)$$

Якщо явище обернути, надавши всім часткам течива швидкість  $-u$ , тобто протилежну тій, з якою рухаються вулиці, то вихри перебуватимуть у спокої, а комплексний потенціал подає формула:

$$W_1 = -uz + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sin(z_0 - z) \frac{\pi}{l}}{\sin(z_0 + z) \frac{\pi}{l}}. \quad (7)$$

<sup>1</sup> Нагадаймо, що  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

Користуючись з наведеного для комплексного потенціалу виразу, можна нарисувати лінії течива для досліджуваного потоку. Наслідок подано на рис. 55.

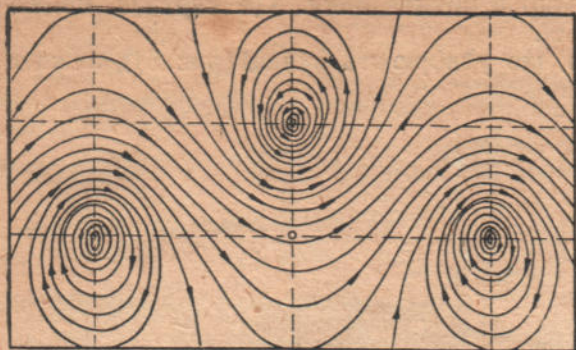


Рис. 55.

Karman і Rubach перевірили це розташування ліній течива, зробивши так, щоб у воді рухався довгий циліндр або платівка, і фотографуючи розташування вихрів, посипавши перед тим поверхню води лікоподієм, щоб вихри можна було бачити.

На рис. 56 подано фотографію дійсних вихрів. На ньому ясно видно центри вихрів. Схожість картин теоретичної й реальної цілком задовільна.

Крім того, вимір відношення  $\frac{h}{l}$  потвердив формулу (4). Після цього

Karman дослідив ту частину опору течива проти руху циліндричного тіла, що залежить від енергії, витраченої на утворення вулиць.

Не подаючи Karman'ових міркувань, ми скажемо тільки про наслідок. Виявилось, що для опору  $R$  маємо (що задовільно погоджується з дослідом) формулу:



Рис. 56.

$$R = \rho l v_0^2 \left[ 0,7936 \frac{u}{v_0} - 0,3141 \left( \frac{u}{v_0} \right)^2 \right], \quad (8)$$

Тут опір віднесено до одиниці висоти циліндра,  $v_0$  є швидкість руху циліндра, а  $u$  — введена раніш швидкість вулиць,  $l$  залежить від розміру циліндра й легко визначається фотографуванням. Відношення  $\frac{u}{v_0}$  можна знайти, підраховуючи число утворюваних вихрів.

## § 5. Струминна теорія

Досі ми досліджували тільки безперервну течію течива; тепер ми розглянемо рухи іншого характеру, що на їх можливість показав уперше Helmholtz.<sup>1</sup>

Почнемо з того, що Helmholtz говорить про характер розривних течій.

Кожний знає рівну струмину насиченого димом повітря, що виходить з димаря, і інші явища, коли течиво не розходитьсь, тільки по вийшовши з отвору, по всіх напрямках, а рухається спочатку компактною струминою, з якої потім на більшій чи меншій віддалі починають утворюватися вихри.

При цьому частки течива, що прилягають до отвору, але лежать поза струминою, залишаються майже в цілковитому спокої.

У всіх цих випадках буває ковзання одного шару течива по іншому, тобто вздовж якоїсь поверхні дотична складова швидкості зазнає розриву.

Через що постають розриви швидкості в течивах, можна за Helmholtz'ом пояснити так: нехай на платівку  $AB$  набігає потік; в точках  $A, B$  при суцільному потенціальному обтіканні (рис. 57а) були б безконечно

<sup>1</sup> Helmholtz, Über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen (Berl. Monatsberichte, 1868).

великі швидкості (як це вже зазначалося в розділі III, коли ми вивчали обтікання крила з гострим кантом); через те, що це неможливе, доводиться прийняти, що лінія течії не обгинає платівки в точках *A* й *B*, а сходиться у цих місцях у вигляді вільних струмин *AL* і *BM* (рис. 57 б).

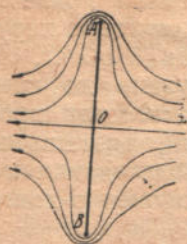


Рис. 57 а.

Математично досліджуючи розривні течії, роблять деякі спрощувальні припущення. Переходячи до установлення їх, відзначимо, що через них явища дуже ідеалізуються, і це треба мати на увазі в практичному застосовуванні.

Ми розглядатимемо тільки плоско-рівнобіжні течії і при цьому не вихрові та стаціонарні. Ми приймемо, що в кутових точках профілю (якого ми будемо вважати

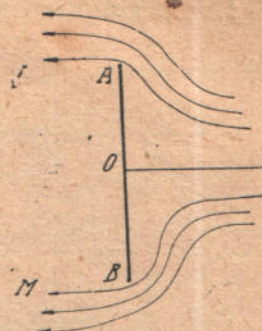


Рис. 57 б.

за нерухомий) починаються лінії розриву тангенціальної складової швидкості, і припустимо, що ці лінії розриву тягнуться на безконечність.

Лінії розриву разом із профілем тіла обмежують застійний обсяг течива (рис. 58), де швидкість течії дорівнює нулеві.

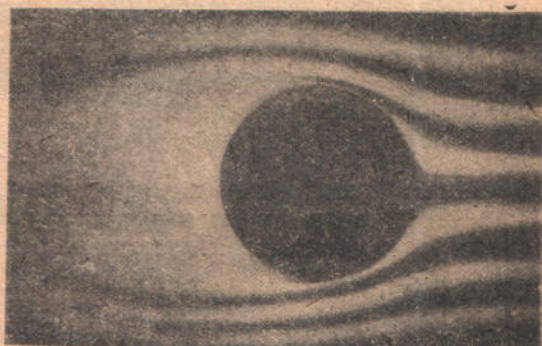
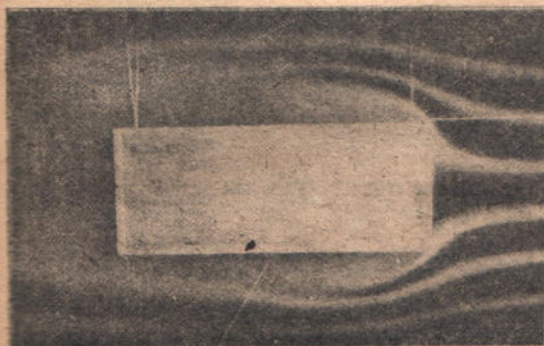


Рис. 58.

Легко бачити, що вздовж лінії розриву тиск повинен бути суцільним. Насамперед, звернімо на це увагу й використаємо інтеграл Бернуллі в обсягу, зайнятому потоком, на підставі припущення про стаціонарність руху і відсутність вихрів у течиві.

Позначаючи через  $V_0$  величину швидкості на безконечності, а через  $V$  величину швидкості в якійнебудь точці в середині течива, матимемо в обсязі, зайнятому потоком, рівняння:

$$p + \frac{\rho V^2}{2} = c = p_0 + \frac{\rho V_0^2}{2},$$

де  $p_0$  — тиск на безконечності.

Позначмо індексами 1 і 2 вартості розглянутих величин у двох безконечно-близьких точках, що лежать по різні боки від лінії розриву, при чому індекс 2 віднесемо до застійного обсягу.

На підставі сказаного раніш

$$p_1 = p_2. \quad (9)$$

Далі, з одного боку, застосовуючи інтеграл Бернуллі для потоку, матимемо

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_0 + \frac{\rho V_0^2}{2}, \quad (10)$$

з другого боку, для застійного обсягу маємо

$$p_2 = p_0. \quad (11)$$

бо в застійному обсягові швидкість скрізь дорівнює нулеві і, значить, тиск скрізь мусить бути сталий.

Порівнюючи написані формули, знайдемо, що

$$V_1 = V_0.$$

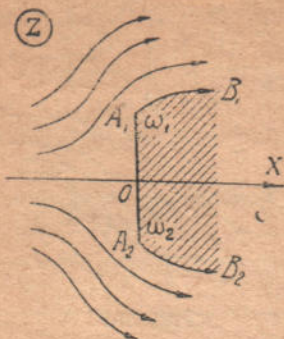


Рис. 59.

Отже, вздовж лінії розриву течиво ковзе із сталою по величині швидкістю  $V_0$  вздовж нерухомого течива, що наповнює застійний обсяг.

Перейдімо від загальних міркувань до конкретної задачі й розглянемо випадок, коли профілем тіла є відтинок простої лінії, розташованої по осі  $y$ , інакше кажучи, розглядатимемо випадок, коли перешкодою буде безконечно-довга плоска смуга.

Обмежимося на вивченні так званого простого удару (рис. 59), тобто припустимо, що потік, який набігає на платівку (смугу) на великій віддалі перед платівкою, йде нормально до платівки, так що там швидкість спрямована по осі  $x$ ; приймімо,

що вона спрямована в бік додатних  $x$ -ів.

В обсягу  $S$  площини комплексного змінного  $z = x + iy$ , зайнятому потоком, комплексна швидкість

$$\frac{dw}{dz} = u - iv \quad (12)$$

і комплексний потенціал

$$w = \varphi + i\psi \quad (13)$$

є аналітичні функції від  $z$ ; знайти їх — це наша остаточна мета.

Якби ми знайшли  $u - iv$  в функції від  $w$ , то для  $z$  на підставі (12) ми мали б інтеграл

$$z = \int \frac{dw}{u - iv} \quad (14)$$

і задача була б розв'язана. Отже, ми бачимо, що для того, щоб розв'язати задачу, досить знайти  $u - iv$  в функції від  $w$ . В цьому й полягає метода Helmholtz-Kirchhoff'a. Припустимо на мить, що функції  $u - iv = \phi(w)$  і  $w = f(z)$  знайдено. Вони дають певні конформні відтворення обсягу  $S$  на площини змінних  $u - iv$  і  $w$ . Знайдемо спочатку

обсяг змінного  $u - iv$  (рис. 60). В точці  $O$  обсягу  $S$  швидкість дорівнює нулеві. Вздовж лінії  $A_1A_2$  обсягу  $S$  вона вертикальна, нарешті, вздовж вільних струмин швидкість величиною дорівнює  $V_0$ , тобто точкам вільних струмин відповідають у площині змінного  $u - iv$  точки, що лежать на обводі кола з центром у точці  $w = 0$  і з радіусом  $V_0$ . На підставі сказаного обсяг  $S$  зображається функцією

$$u - iv = \phi(z)$$

на півколо  $G$  в площині  $u - iv$  (рис. 60).

При цьому відповідні точки обсягів  $S$  і  $G$  позначено на рис. 59 і 60 однаковими літерами.

Розглянемо тепер площину комплексного змінного  $w$ . Тому що функція  $w$  цікавить нас тільки своїми похідними, що дають проекцію швидкості, то ми можемо до  $w$  додати довільну сталу. Виберімо цю сталу так, щоб точці  $O$  обсягу  $S$  відповідала вартість  $w = 0$ . Уздовж лінії течії, що обминає профіль і збігає в вигляді вільних струмин, функція  $\phi$  є стала й, значить, дорівнює нулеві, бо в точці  $O$ :  $w = \varphi + i\psi = 0$ . Отже, як бачимо, профілеві

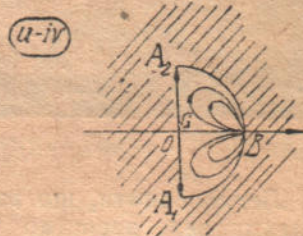


Рис. 60.

платівки й вільним струминам відповідає частина дійсної осі площини змінного  $w = \varphi + i\psi$  (рис. 61).

Із симетрії випливає, що в точках  $A_1$  і  $A_2$  потенціал  $\varphi$  матиме однакові значення; їх ми позначаємо через  $k$ .

Зіставляючи все сказане, знайдемо, що обсягові  $S$  відповідатиме в  $w$ -площині обсяг, що лежить поза дійсною додатною піввіссю. Позначмо цей обсяг через  $\Gamma$ .

Зауважмо, що одному берегові дійсної півосі  $w$ -площини відповідає одна струмина, а другому — друга.

Будемо тепер розглядати  $u - iv$ , як функцію від  $w$ . Ця функція повинна давати конформне відтворення обсягу  $\Gamma$  на обсяг  $G$ .

Знайти залежність між  $u - iv$  і  $w$  — це значить знайти функцію, що відтворює конформно обсяг  $\Gamma$  на обсяг  $G$ . У цій задачі труднощів нема, і її можна розв'язати за допомогою поданих у додатку I відтворень. Шукане співвідношення між  $u - iv$  і  $w$  має форму:

$$u - iv = \frac{V_0 \sqrt{w}}{\sqrt{w - k + i\sqrt{k}}} = \frac{V_0 (\sqrt{w - k} - i\sqrt{k})}{\sqrt{w}} \quad (15)$$

Можна безпосередньо перевірити формулу (15): справді, коли  $w$  дійсне й задовольняє нерівності  $0 < w < k$ , функція  $u - iv$  має чисто уявну вартість (для верхнього берега від'ємну, а для нижнього — додатну), так що жирна частина дійсної осі обсягу  $\Gamma$  справді відповідає уявній осі обсягу  $G$ ; коли  $w$  дійсне й  $w > k$ , то  $|u - iv| = V_0$ , і ми маємо точки півкола обсягу  $G$ .

На підставі (14) і (15)

$$z = \frac{1}{V_0} \int_0^w \frac{dw (\sqrt{w - k} + i\sqrt{k})}{\sqrt{w}} \quad (16)$$

Щоб визначити константу  $k$ , візьмімо на увагу ширину платівки (смуги). Поклавши, що ширина дорівнює  $l$ , так що  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{l}{2}$ , і пригадуючи, що коли  $z$  міняється вздовж уявної осі від 0 до  $\frac{il}{2}$ ,  $w$  міняється від 0 до  $k$ , знайдемо, що

$$\begin{aligned} i \frac{l}{2} &= \frac{1}{V_0} \int_0^k \frac{dw (\sqrt{w - k} + i\sqrt{k})}{\sqrt{w}} = \frac{i}{V_0} \int_0^k \frac{dw (\sqrt{k - w} + \sqrt{k})}{\sqrt{w}} = \\ &= \frac{ik}{V_0} \left( 2 + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Отже

$$k = \frac{lV_0}{4 + \pi} \quad (17)$$

Обчислимо тиск потоку на одиницю довжини смуги.

Позначаючи цей тиск через  $R$ , зауважмо, що на елемент  $dy$  профілю зліва впливає тиск  $p_1 dy$ , а справа  $p_0 dy$ , через що разом вони дадуть:

$$(p_1 - p_0) dy.$$

Щоб знайти повний тиск, треба просумувати цей вираз по всій ширині платівки. Так матимемо, що

$$R = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (p_1 - p_0) dy,$$

на підставі формули (10)

$$R = \frac{1}{2} \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (V_0^2 - V_1^2) dy. \quad (18)$$

Але вздовж профілю маємо  $\psi=0$ , і, значить,  $w=\varphi$ , а тому на підставі (15) вздовж профілю

$$V_0^2 - V_1^2 = 2V_0^2 \frac{\sqrt{k-\varphi}}{\sqrt{k-\varphi} + \sqrt{k}}. \quad (19)$$

Далі вздовж профілю  $z = iy$ , так що  $idy = dz$  і тому на підставі (16)

$$dy = \frac{1}{V_0} \frac{\sqrt{k-\varphi} + \sqrt{k}}{\sqrt{\varphi}} d\varphi. \quad (20)$$

При цьому, коли  $y$  зростає від 0 до  $\frac{l}{2}$ ,  $\varphi$  міняється від 0 до  $k$ .

Підставляючи вирази (19) і (20) в формулу (18), маємо:

$$\begin{aligned} R &= \rho \int_0^{\frac{l}{2}} (V_0^2 - V_1^2) dy = 2\rho V_0 \int_0^k \frac{\sqrt{k-\varphi}}{\sqrt{k-\varphi} + \sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{k-\varphi} + \sqrt{k}}{\sqrt{\varphi}} d\varphi = \\ &= 2\rho V_0 \int_0^k \frac{\sqrt{k-\varphi}}{\sqrt{\varphi}} d\varphi = \pi\rho k V_0 = \frac{\pi}{4+\pi} \rho l V_0^2, \end{aligned} \quad (21)$$

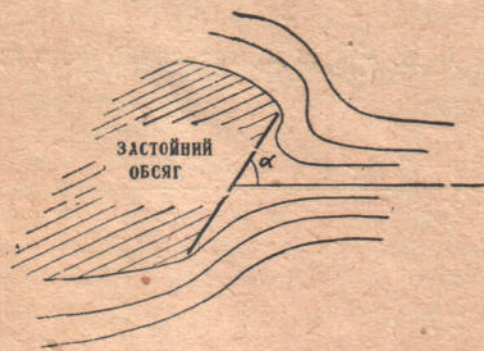


Рис. 62.

і вираз для тиску на одиницю довжини смуги знайдено.

Так само можна розв'язати задачу про косий удар, тобто дослідити потік, що набігає на платівку не під кутом  $90^\circ$ , а під довільним кутом  $\alpha$  (рис. 62).

Формулу для тиску (опору) в цьому випадку вперше знайшов Rayleigh і вона має вигляд:

$$R = \frac{\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} \rho l V_0^2. \quad (22)$$

### § 6. Експериментальна перевірка теорій

Обчислюючи в розділі III за теорією М. Є. Жуковського підймальну силу, що припадає на одиницю довжини аероплянного крила в плоскому потокові, ми мали формулу

$$P = 4\pi R\rho V_0^2 \sin \sigma_1 = c(\alpha_1) 4 R\rho V_0^2,$$

де  $R$  — радіус основного для профілю обводу кола й де ми через  $c(\alpha_1)$  позначаємо сучинник  $\pi \sin \alpha_1$ , що залежить від кута атаки.

Цю формулу ми мали, припускаючи, що обтікання крила (завдяки певній циркуляції) відбувається плавко й швидкість у кутовій точці кінчна.

Щоб перевірити цю формулу експериментально, треба поставити крило в такі умови, що (хоч і наближено) відповідали б умовам плоского обтікання.

Для цього Betz узяв модель крила, що має в усіх перекроях однако-

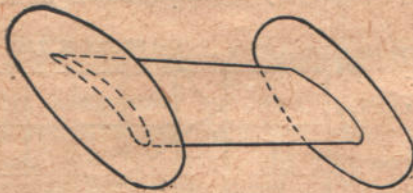


Рис. 63.

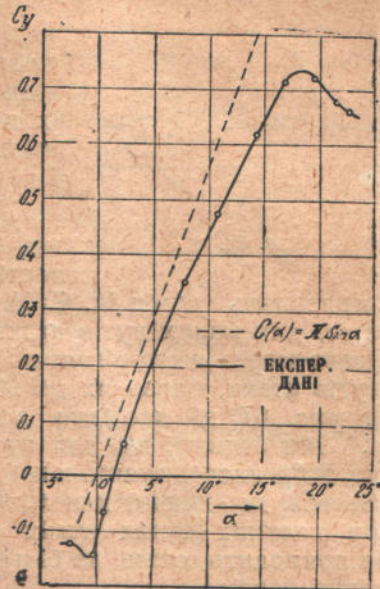


Рис. 64.

вий профіль М. Є. Жуковського, і на кінці моделі насадив плоскі шайби (рис. 63).

Ці шайби штучно відділяють потік з боків від моделю від потоку навколо самого моделю й перешкоджають повітря зовні допливати до моделю.

Вимірювання в аеродинамічній трубі привели для величини  $c(\alpha_1)$  до вартостей, що відповідають приблизно законові

$$c(\alpha) = 3 \cdot \sin \alpha_1.$$

Отже, наведена раніш формула потверджується цілком задовільно.

Betz'ові наслідки подано на рис. 64.

Причина, що приводить на ділі до менших вартостей для  $c(\alpha_1)$  є тертя в поверхневому шарі, що трохи зменшує циркуляцію. До цього питання ми ще повернемось у розділі VI.

Звернімось тепер до Rayleigh'ової формули:

$$R = \frac{\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} \rho l V_0^2,$$

що дає опір за струминною теорією (рис. 62).

Розкладаючи повний опір  $R$  на підіймальну силу  $R_y$  та на чоловий опір  $R_x$  (рис. 65), знайдемо

$$R_y = \frac{\pi \sin \alpha \cos \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} \rho l V_0^2 = r(\alpha) l \rho V_0^2.$$

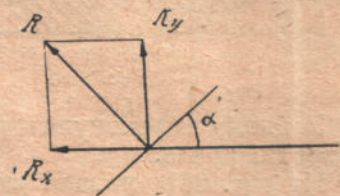


Рис. 65.

Така вартість підіймальної сили на одиницю довжини платівки за струминною теорією.

Порівняймо цей наслідок з наслідком М. Є. Жуковського.

Для цього зауважмо, що при невеликих вартостях кута, який характеризує кривину профілю М. Є. Жуковського, величина  $4R$  мало ризниться від довжини тятиви, що стягає профіль (рис. 66).

Через це досліджений раніш модель крила можна за струминною теорією наближено розглядати, як платівку завширшки  $l=4R$ .

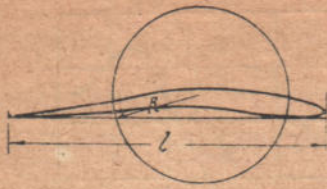


Рис. 66.

Погляньмо, до якого наслідку ми прийдемо тоді за струминною теорією. Ми бачимо, що сучинникові  $c(\alpha_1)$  теорії М. Є. Жуковського відповідатиме тепер сучинник  $r(\alpha_1)$ . Порівняймо їх для малих кутів атаки, що найцікавіші в авіації, і що для них Betz зробив виміри в трубі.

$$\text{Зауважуючи, що для малих } \alpha \quad r(\alpha) \cong \frac{\pi \sin \alpha}{4},$$

ми бачимо, що за струминною теорією вартості сучинника у 4 рази менші від тих, до яких приводить теорія М. Є. Жуковського, що потверджується на досвіді.

Отже, для малих кутів атаки струминна теорія непридатна.

Цікаво через це порівняти Rayleigh'ову формулу з наслідками вимірів для кутів атаки, близьких до  $90^\circ$ .

На рис. 67 ці наслідки подано графічно.<sup>1</sup> Ми бачимо, що для кутів, близьких до  $90^\circ$ , експериментальна крива наближається до кривої для  $r(\alpha)$ .

При великих кутах атаки струминна теорія приводить, отже, до більш-менш задовільних наслідків.

Це пояснюється тим, що при великих кутах атаки справді буває зрив струмин і, хоч у дійсності за перепобою ніколи не буває повного спокою, а, навпаки, буває вихровий рух (утворення вихрових вулиць), що збільшує чоловий опір, все таки можна вважати струминну теорію за перше наближення до дійсності в цих випадках.

Щодо малих кутів атаки, то крива для  $(ra)$  з наслідками експерименту розходиться для них найголовніше тому, що струминна теорія враховує тільки процеси перед крилом; тим часом як процеси позаду крила (відщеплювання вихрів з поверхневого шару) важать в утворенні підйімальної сили багато більше.

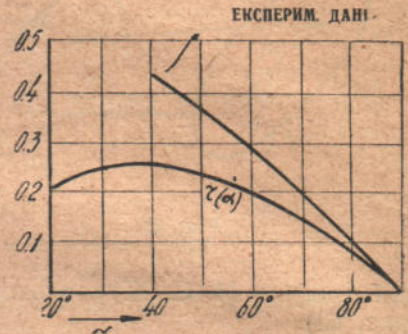


Рис. 67.



Рис. 68 а.

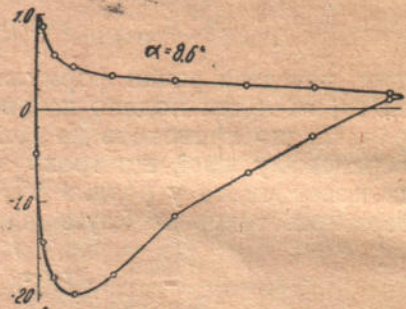


Рис. 68 б.

У цьому переконують нас наслідки вимірів тиску в різних точках коло поверхні крила.

На рис. 68 б подано графічний розподіл виміряних тисків у різних точках поверхні крила.<sup>2</sup> При цьому позема вісь спрямована по тятіві крила від переднього канту до заднього; по сторчовій осі відкладають відношення тиску до швидкісного напору. Верхня частина кривої відповідає підвищеному тискові під крилом, а нижня частина — розрідженню над крилом. Виміри зроблено в Гетінгені для профілю, поданого на рис. 68 а, при куті атаки  $8,6^\circ$ .

<sup>1</sup> Рис. 67 запозичено з книги *Frank-Mises, Die Differentialgleichungen und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, II, 1927, p. 782.*

<sup>2</sup> Про спосіб, застосований на практиці для вимірювання досліджуваних тут явищ, сказано в кінці § 6, розділу V цієї книжки.



## РОЗДІЛ V

### МЕТОДИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЇ АЕРОДИНАМІКИ

#### § 1. Потреба експериментальних дослідів в аеродинаміці

Не вважаючи на чималі успіхи, що їх дійшли останніми роками в галузі теоретичної аеродинаміки, досі величезне значення має експериментальна аеродинаміка, що дає потрібний для проектування літаків числовий матеріал через досліди.

Найприродніший і найточніший засіб, щоб мати експериментальний матеріал, було б випробовування літаків у дійсних умовах льоту. Систематично ставити й опрацьовувати такі досліди є основне завдання аеродинаміки; проте досі такі досліди науково майже не опрацьовано.

Найбільше значення мають тепер досліди над моделями літаків та їхніх частин у так званих аеродинамічних трубах, де згідно з законом відносности класичної механіки обертають дійсні процеси, залишаючи модель у спокої й примушуючи повітряний потік з певною швидкістю набігати на нього.

Інші методи випробування моделей мають тепер тільки історичне значення й ми на них спинятися не будемо.

#### § 2. Перенесення наслідків експерименту на дійсність

При дослідах над моделями постає надзвичайно важливе питання про перенесення наслідків експерименту з одних умов в інші.

Раніш було доведено, що для того, щоб зберегти повну динамічну подібність двох різних потоків, потрібна не тільки геометрична подібність обтікання тіл, але й рівність Reynolds'ових чисел для обох потоків. Нагадаймо, що Reynolds'ове число для потоку визначається формулою

$$R = \frac{vl}{\nu},$$

де  $v$  — швидкість потоку,  $l$  — лінійна характеристика обтіканого тіла, тобто яканебудь довжина, що характеризує тіло, і, нарешті,  $\nu$  — так званий кінематичний сучинник в'язкости течива (див. § 16 розділу I).

Розгляньмо це питання трохи докладніше.

Основне завдання експериментальної аеродинаміки — знайти опір, що чинить повітря тілу, яке в ньому рухається. Численні досліди показали, що опір середовища можна виразити формулою

$$R = c_p F v^2, \quad (1)$$

де  $R$  — сила опору в кг,

$\rho$  — густина середовища  $\left( \rho = \frac{\gamma}{g} \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4} \right)$ ,

$v$  — швидкість руху тіла в м/сек,

$F$  — якась площа, що характеризує тіло, приміром, площа міделевого перекрою,

$c$  — сучинник пропорційності, який є абсолютне число, що залежить від форми тіла та міри шерехатости його поверхні.

Знайти сучинник  $c$  — ось основне завдання експериментальної аеродинаміки.

Проте, зазначений закон має тільки відносну точність: при великих вартостях швидкості  $v$  (що наближаються до швидкості звуку й перевищують її) сучинник  $c$  дуже збільшується. Це пояснюється тим, що при великих швидкостях великої ваги набуває стисливість повітря, якою при малих швидкостях можна нехтувати.<sup>1</sup> Але цей відхил великої ваги для авіації не має, бо найбільші швидкості льоту, що були досі, в кожному разі не перевищують 150 м/сек. Деякої ваги набуває це явище тільки для пропелерів, бо обводсва швидкість їхніх кінців перевищує іноді швидкість звуку.

Багато більшу вагу для аеродинаміки має те, що, за законом динамічної подібности потоків, ми мусимо вважати величину сучинника за функцію Reynolds'ового числа  $Re$  і, значить, можемо ручитися за точність перенесення цих наслідків досліду над моделем на дійсне тіло, тільки з умовою рівности Reynolds'ових чисел в обох випадках:

$$\frac{v_1 l_1}{\nu} = \frac{v_2 l_2}{\nu}$$

Це надзвичайно утруднює досліди. Через те, що досліди в аеродинамічних трубах провадять здебільшого з моделями, в кілька разів меншими від справжньої величини, то зазначена умова потребує збільшити швидкість потоку в таке саме число разів, порівнюючи із справжньою швидкістю літака. Якщо, приміром, ми випробовуємо в трубі модель в  $\frac{1}{5}$  натуральної величини літака, що його швидкість у повітрі дорівнює 40 м/сек, то ми повинні дати потокові в трубі швидкість, що дорівнює  $40 \times 5 = 200$  м/сек.

Не кажучи, вже про те, як надзвичайно важко мати таку швидкість потоку, вона вже так наближається до швидкості звуку, що на наслідки досліду не можна покладатися. Можна, шоправда, замінити повітря іншим течивом з меншим кінематичним сучинником в'язкості. Якщо ми цю спробу будемо робити в воді, для якої сучинник  $\nu$  щось у 14 разів менший від сучинника  $\nu$  для повітря, то нам буде потрібна швидкість потоку в 14 разів менша, тобто близько 14 м/сек. Проте, для води здійснення й такої швидкості майже неможливе.

Останнім часом, щоб досягти порівняно великих величин  $Re$ , будують труби з якнайбільшим діаметром, бо тоді можна багато з деталей літаків, аж до фюзеляжів, випробовувати в натуральній величині (приміром, велика труба ЦАГІ). В Америці, в лябораторії N. A. C. f. A.,<sup>2</sup> в Langley Field, зроблено спробу штучно збільшити Reynolds'ове число, підтримуючи в герметичній трубі високий тиск до 20 атм, при якому сучинник  $\nu$  має значно менші вартості.

Проте, навіть максимальні вартості  $Re$ , досягнені при дослідах над цілими літаками й великими частинами, приміром крилами, багато менші від таких вартостей у дійсних умовах.

Порівняймо дійсні вартості цієї величини з тими, що дають найвідоміші труби для моделей крил.

Величина  $\nu$  для повітря в нормальних умовах (15° С і 760 мм живого срібного стовпа) дорівнює  $1,45 \times 10^{-5}$ .

За лінійну характеристику  $l$  приймімо довжину тятиви моделю або крила.

<sup>1</sup> Докладніше див. *Красноперов*, Експериментальная аеродинамика, стор. 15.

<sup>2</sup> National Advisory Committee for Aeronautics.

Тоді матимемо: для великої труби ЦАГІ, що має два робочі перекрої з діаметрами 3 м і 6 м, для швидкостей потоку відповідно 100 м/сек і 30 м/сек і для прийнятих звичайно величин  $l=0,3$  і  $0,6$  м

$$\Re' = \frac{0,3 \cdot 100}{1,45 \cdot 10^{-5}} = 2,06 \cdot 10^6$$

$$\Re'' = \frac{0,6 \cdot 30}{1,45 \cdot 10^{-5}} = 1,24 \cdot 10^6$$

для Prandtl'євої труби в Гетінгені при вартостях  $l=0,2$  м і  $v=50$  м/сек:

$$\Re = \frac{0,2 \cdot 50}{1,42 \cdot 10^{-5}} = 6,9 \cdot 10^5.$$

Для труби високого тиску N. A. C. f. A. досягнуто вартість  $\Re = 3,7 \cdot 10^6$ .

Оцінуймо тепер, приміром, порядок вартостей  $\Re$  для справжнього крила.

Взявши для прикладу монопланне крило з тятивою, що дорівнює 3 м, і середньою швидкістю 150 км/год. = 41,7 м/сек, матимемо:

$$\Re = \frac{3 \cdot 41,7}{1,45 \cdot 10^{-5}} = 8,65 \cdot 10^6.$$

Як бачимо, дійсні вартості  $\Re$  чимало перевищують дослідні. Ще більшою мірою те саме буде, як випробувати цілі літаки.

Тому, щоб мати змогу перенести наслідки дослідів з моделю на літак, треба детально вивчити залежність сучинника опору  $c$  від Reynolds'ового числа  $\Re$ .

Численні дослідники, найголовніше Prandtl, установили такий закон зміни  $c$ : при малих вартостях  $\Re$  величина  $c$  лишається приблизно стала; потім у якомусь критичному інтервалі вартостей  $\Re$  відбувається чимале зменшення величини  $c$ ; з дальшим збільшенням  $\Re$  величина  $c$  знов приблизно стала.

Звідси виходить, що ми можемо з достатньою точністю використати наслідки дослідів в тому випадку, коли між вартістю Reynolds'ового числа при досліді й у дійсності не лежить критичний інтервал для  $\Re$ .

Наслідки дослідів показують, що чим видовженішу форму має тіло, тим менші будуть критичні вартості  $\Re$ . Через те, що вартості  $\Re$  в аеродинамічних трубах набагато більші, ніж критичні вартості  $\Re$  для деталей літака, що мають видовжену форму (крила, фюзеляж, стерна тощо), то наслідки випробів у них дають достатню для практики точність.

Опір же таких деталей, як тросу, розчалки, косяка тощо може дуже відхилитися від дослідних даних.

Через це випроби в аеродинамічних трубах роблять звичайно над моделями без цих деталей, а їхній опір визначають звичайно окремо, випробовуючи їх у натуральну величину при дійсних вартостях  $\Re$ .

Докладніше вплив величини  $\Re$  на опір різних деталей літака розглянемо далі.

Треба зазначити, що через невеличке розходження величини  $\nu$  для різних лабораторій, на практиці замість Reynolds'ового числа користуються звичайно з так званої характеристики дослідів:

$$k = \nu l.$$

### § 3. Аеродинамічні труби

Як уже не раз зазначалося, дослідів над моделями роблять в аеродинамічних трубах, де модель установлюють нерухомо й обдувають потоком із вентилятора. Основні вимоги до труби такі: можливість досягти як-

найбільших вартостей характеристики досліду, певна економічність труби можливість регулювати швидкість, рівномірність потоку у перекроях і в часі і, нарешті, зручність і точність вимірів.

Збільшують характеристику досліду звичайно, збільшуючи розмір труби або швидкість потоку (крім згадуваної раніш Мунк'ової труби,<sup>1</sup> де збільшення доходять, зменшуючи кінематичний сучинник в'язкості). Теперішні труби дійшли вже досить великих вартостей  $\xi$ , проте, вони потребують при цьому чималої потужности двигунів, через що, очевидно, покищо немає змоги далі збільшувати  $\xi$  цим способом.

Економічність труби звичайно характеризують її якістю  $\xi$ , що являє собою відношення секундної живої сили потоку до потужности, підведеної до вентилятора

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{mv^2}{N}$$

де  $N$  — потужність мотора в мех. конях,  $v$  — швидкість потоку в м/сек і  $m$  — маса повітря, що проходить через якийсь перекрій за 1 сек. Підставляючи  $m = \frac{\gamma}{g} Fv$ , де  $F$  — площа цього перекрою труби в кв. м, матимемо:

$$\xi = \frac{\gamma}{g} \frac{Fv^3}{150 N} \quad (2)$$

Приймаючи для звичайних умов  $\frac{\gamma}{g} \cong \frac{1}{8}$ , матимемо

$$\xi = \frac{Fv^3}{1200 N} \quad (3)$$

Один із способів збільшити економічність труби — це збудування так званих дифузорів, де повітря, вийшовши з робочої частини, розширюється; при цьому швидкість його зменшується, а тиск за рівнянням Bernoulli збільшується. Регулюють швидкість потоку при звичайно вживаних для вентиляторів моторах сталого струму за допомогою реостатів.

Дуже важливим для труби є питання про достатню рівномірність потоку як у часі, так і в просторі. Цілком очевидно, що досягти рівномірности потоку в часі при роботі із зовнішнім повітрям зовсім неможливо, і тому всі лябораторії тепер працюють з кругобігом повітря. Проте, такий кругобіг утворює небезпеку періодичного завихрення повітря. Крім того, нерівномірне обертання вентиляторів також зумовлює якусь нерівномірність потоку. Щоб знищити нерівномірність потоку в трубах, злагоджують спрямні ґратниці, а іноді так звані дистрибутори.

Спрямні ґратниці установлюють перед робочою частиною труби; їхнє призначення — спрямляти струмини й розрізувати вихри в потокові. Дистрибутор, уживаний тільки в трубах простого чину (див. далі), уживають для того, щоб заспокоїти повітря в приміщенні труби; він являє собою звичайно стінку з отворами, крізь які повітря потрапляє до приміщення труби, порівнюючи рівномірно.

Зручність і точність у вимірюванні залежать від будови робочої частини труби й від застосовуваних для неї вимірних інструментів та їхньої устави.

Щодо будови робочої частини труби поділяють на два типи: труби з закритою робочою частиною (рис. 69) і труби з вільною струминою (рис. 70).

<sup>1</sup> В Langley Field.

В останньому випадку потік повітря проходить крізь спокійне повітря в спеціальній камері, що обіймає робочу частину труби (рис. 70). В цій камері<sup>1</sup> міститься експериментатор з усіма приладами, через що надзвичайно зручно робити досліди, бо експериментатор перебуває безпосе-



Рис. 69. Схема труби з закритою робочою частиною

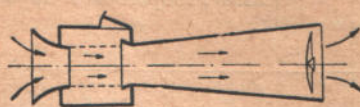


Рис. 70. Схема труби з Eiffel'евою камерою

редньо поблизу моделю. При цьому тиск у всій камері вирівнюється до тиску, відповідного до швидкості потоку і само собою розуміється, що камеру треба добре ізолювати від зовнішнього повітря.

У трубах з закритою робочою частиною експериментатор з приладами міститься в окремій спостережній камері, відокремленій від робочої частини труби стінкою з добре

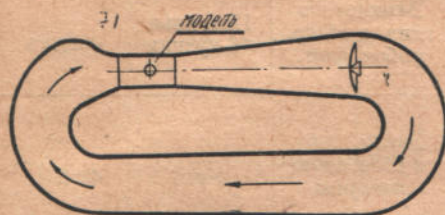


Рис. 71. Схема труби замкнутої

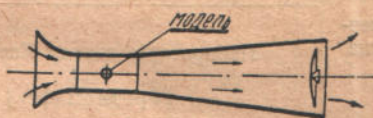


Рис. 72. Схема труби простого чину

ушільненими отворами, крізь які вводять у трубу вимірчі інструменти. Спостерігати й вимірювати в таких трубах багато тяжче, проте втрати в них (від тертя повітря об стінки) багато менші. Крім того, через труби з закритою робочою частиною можна краще регулювати потік повітря. Тепер успішно розвиваються обидва типи труб.

Раніш було зазначено, що тепер усі труби працюють з кругобігом повітря. Якщо повітря повертається в трубу окремим каналом, через що потік стає зовсім замкнений, то трубу звать замкнутою (рис. 71), що відрізняє її від труб простого чину (рис. 72), з яких повітря виходить просто в приміщення, звідки знову всмоктується в трубу.

З усього сказаного виходить, що кожна аеродинамічна труба, незалежно від типу, повинна мати такі основні частини:

- 1) лійкуватий колектор, що збирає повітря й підводить його до труби,
- 2) спрямну ґратницю перед робочою частиною,
- 3) робочу частину, де міститься модель,
- 4) проміжну частину, що утворюють її звичайно у формі конічного дифузора,
- 5) мотор з вентилятором, що звичайно являє собою многолопатний гвинт, і, нарешті,
- 6) частину для зворотного підведення повітря до труби у формі зворотного каналу в замкнених трубах, або просто у формі приміщення, що оточує трубу, в трубах простого чину.

Не маючи змоги спинятися тут на описі різних труб, відсилаємо тих, хто цікавиться цим питанням, до книжки Красноперова, що недавно

<sup>1</sup> Так звана Eiffel'ева камера

## Характеристики

Країна	Назва лабораторії й труби	Тип труби	Форма робочого перекрою	Розмір робочого перекрою в м
СРСР	ЦАГІ Велика труба Перша робоча частина Друга робоча частина	Прямого чину з закритою робоч. част.	Правильн. 8-кутник	$d=3$ $d=6$
	ЦАГІ Труба великої швидкості	Прямого чину з закритою робоч. част.	Правильн. 8-кутник	$d=1,5$
Німеччина	Die Aerodynamische Versuchsanstalt zu Göttingen Велика труба	Замкнутого типу з відкр. робоч. част.	Правильн. 16-кутник	$d=2,25$
	Лябораторія заводу Zeppelin (Фрідріхсгафен)	Замкн. типу з Eiffel'евою камерою	Коло	$d=2,9$
ПАСШ	Langley Memorial Aeronautical Laboratory (Вашінгтон) Труба № 1	Прям. чину з Eiffel'евою камерою	Коло	$d=1,525$
	L. M. A. L. Труба № 2 (Мунк'ова)	Замкн. типу з закр. робоч. част. підвищеного тиску (до 20 атм.)	Коло	$d=1,525$
	L. M. A. L. Велика труба	Замкн. типу з відкр. робоч. частиною	Коло	$d=6,1$
Англія	National Physical Laboratory (Тедінгтон) Труба 7' № 1	Прям. чину з закр. робоч. частиною	Квадрат	$2,13 \times 2,13$
	N. P. L. Труба „Duplex“	Прям. чину з закр. робоч. частиною	Прямокутн.	$2,13 \times 4,26$
Франція	Лябораторія Eiffel'я (Париж) Велика труба	Прямого чину з Eiffel'евою камерою	Коло	$d=2,00$
	Лябораторія „Section Technique de l'Aeronautique militaire“ (Париж)	Прям. чину з закр. робоч. частиною	Коло	$d=4,00$

## найважливіших труб.

Площа робочого перекрою в кв. м	Найбільша швидкість $v$ м/сек	Потужність мотора $N$ (мех. к.)	Вентилятор		Якість труби $\xi = \frac{FV^3}{1200N}$	Характери- стика дослідю $k = VI$
			Тип	Число обертів		
7,1 28,4	78 30	820	6-лопатний гвинт $D \approx 6$ м	400	3,6 0,81	117 90
1,77	95	390	4-лопатний гвинт $D = 3,19$ м	975	3,22	71,3
4,00	52	306	4-лопатний гвинт $D = 3,00$ м	1000	1,47	58,5
6,62	50	440	4-лопатний гвинт $D = 4,75$ м	550	1,67	72,5
1,83	45,0	200	Гвинт $D = 2,8$ м	—	0,69	34,3
1,83	23,0	250	2-лопатний гвинт $D = 2,135$ м	900	1,47	351
29,3	49	2000	8-лопатний гвинт $D = 8,52$ м	375	1,45	150
4,54	18,0	48	4-лопатний гвинт	1000	0,48	19,2
9,08	34,0	400	Два 4-лопатні гвинти	1400	0,71	72,4
3,14	32	62	Гелікоїд „Zeflaive“ $D = 3,8$	240	1,38	32
12,56	63	800	6-лопатний гвинт $D = 8$	300	3,27	126

вийшла,<sup>1</sup> а тут розглянемо докладніше тільки велику трубу ЦАГІ, що є одна найкращих труб у світі (рис. 73).

Труба має два закриті робочі перекрої *A* й *B* з діаметрами 3 м і 6 м, злучені дифузором *C* і рухомою частиною *D*, установленою на візку. При роботі в першому перекрої *A* рухома частина *D* злучає обидві робочі частини.

Повітря втягається з приміщення в колектор *E* вентилятором *F*; вентилятор цей являє собою шестилопатний гвинт, що його обертає електромотор на 820 мех. коней. Із колектора повітря через спрямну ґратницю *G*<sub>1</sub> потрапляє до першої робочої частини *A*, звідки через дифузор *G*, другу спрямну ґратницю *G*<sub>2</sub> й другу робочу частину *B* йде до виходу з труби. Вийшовши з труби, повітря повертається до колектора через зворотний дифузор *H*, що має вигляд кільцевого каналу, який розширюється й обходить трубу.

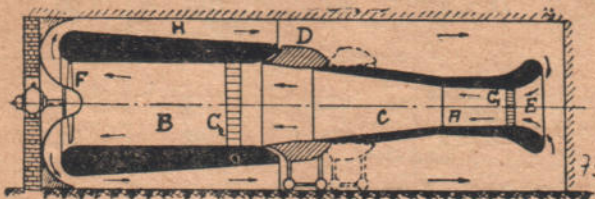


Рис. 73. Схема труби ЦАГІ

Дуже довгий дифузор робить трубу надзвичайно економічною. З відсунутою вправо рухомою частиною труба працює своїм другим робочим перекроєм. При цьому чинить тільки зворотний дифузор, що, розуміється, зменшує економічність труби, порівнюючи з роботою в першому перекрої. Проте, навіть при роботі в другому перекрої, економічність труби цього типу досить велика, як порівняти з іншими трубами.

На стор. 84—85 наводимо таблицю з характеристиками найвідоміших теперішніх труб.<sup>2</sup>

## § 4. Вимірчі інструменти

Інструменти, вживані при аеродинамічних експериментах, повинні, з одного боку, якнайменше збурювати потік, а з другого, давати точні наслідки. Через усі ці вимоги зладити раціональні струменти — завдання дуже складне. Не маючи змоги тут спинятися на тому, щоб описувати конструкції вживаних інструментів, зазначимо тут тільки ті принципи, на яких вони побудовані. Докладніші відомості можна, приміром, знайти в курсі Красноперова.

Роблячи досліди, вимірюють найголовніше швидкість потоку й сили, що чинять на модель (а також їхні моменти щодо певних осей).

Вимірюють швидкість найчастіше на підставі теореми Bernoulli, порівнюючи тиск у спокійному течиві і в потокові. Найуживаніший інструмент — це трубка Pitot, що її принцип пояснено раніш (див. § 10, розділ I).

Багато складніше вимірювати сили. Сили вимірюють звичайно терезами, на які сили впливають через передатні механізми. Ці механізми є або система важелів, або дроти, що на них закріплюють моделі. Можна вимірювати окремо кожен складову сили опору й моменти її. Проте, такий спосіб вимірювати забирає багато часу, а тому тепер застосовують майже самі тільки терези, що дають зразу кілька компонентів.

Розглянемо схеми дуже вданих конструкцій терезів Англійської національної фізичної лабораторії та Prandtl'євих терезів.

<sup>1</sup> Красноперов, Экспериментальная аэродинамика, часть I, 1930 (вийшло вже й українське видання в Технічному видавництві).

<sup>2</sup> Підраховуючи характеристику досліджу, за лінійну характеристику *I* брали розмах моделю літака, при чому вважали, що розмах моделю можна буде довести до половини поперечного розміру труби. Щоб порівняти, знайдемо характеристику справжнього літака, що має розмах 15 м і швидкість льоту 56 м/сек; вона дорівнює  $k_0 = 15 \times 56 = 840$  кв. м/сек.



Англійські терези, що їх схему подано на рис. 74,—це зразок терезів пупкої конструкції. Вони дають змогу визначити зразу дві компоненти сили опору й момент її коло подовжньої осі моделю. Досягають цього тим, що силу, яка впливає на модель, передають через рамено  $OA$  на систему важелів  $OB, OC, OD$ . На кінці  $B, C, D$  важелів впливають тягарі, зрівноважуючи силу опору. Тягар, що впливає на рамено  $OC$ , визначає складову сили опору в напрямі сили потоку; тягар, що впливає на рамено  $BO$ ,—складову у сторчовому напрямі й, нарешті, рамено  $OD$  через ламаний важіль  $KED$  визначає величину шуканого моменту. За допомогою нескладних додаткових механізмів цими терезами можна визначити також і інші 2 моменти й третю складову сили опору, якщо це потрібно.

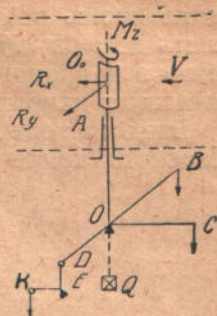


Рис. 74.

Рис. 75 дає схему Prandtl'євих терезів, що є зразок терезів з дротяною почіпкою. Ці терези також дають дві компоненти й один момент сили опору. Дроти  $b$  й  $c$  передають сторчову складову сили опору, розкладену до того ж на дві скла-

дові важелями  $h_2$  і  $h_3$ , осями  $l_2$  і  $l_3$  і, нарешті, важелями  $k_2$  і  $k_3$  на терези  $B$  й  $C$ . Знаючи величини й точки приложення складових підйимальної сили, ми легко знайдемо її величину й точку приложення, а, значить, і момент щодо будь-якої точки.

Дріт  $a$  передає позему складову сили опору на терези  $A$  через дроти  $e$  й  $f$ , утворюючи з ними кути в  $120^\circ$ . Останнім часом вийшли терези, що дають зразу 6 компонент, через що є змога швидко знайти 3 складові сили опору та її 3 моменти

щодо осей. Опис одної з конструкцій таких терезів подано в Lössl'євій статті, вміщеній у журналі ZFM<sup>1</sup>.

Треба зауважити, що вимірювана на терезах сила опору моделю різниться від дійсної, бо в неї входить також опір державки моделю, а також додатковий опір, що постає в наслідок взаємного впливу державки та моделю. Крім того, на наслідок вимірювання впливають стінки труби (надто для труб невеликого розміру), можлива косина потоку та інші чинники. Кожна лабораторія має свої методи виправляти наслідки досліду, вносячи в наслідки вимірів відповідні поправки на вплив різних чинників.<sup>2</sup>

## § 5. Кут атаки, підйимальна сила, чоловий опір та інші величини, що характеризують крило

Як уже було зазначено, при рухові тіла щодо повітря на його поверхню впливають сили тиску, вислідна яких має назву повної сили опору повітря. У загальному випадку, щоб цілком визначити силу опору, треба знайти три її складові й три моменти навколо деяких осей. Проте, у ви-

<sup>1</sup> Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1930, Н. 15, стор. 393—396.

<sup>2</sup> Див., прим., Юрєв і Леснікова.— „Аэродинамические исследования“, стор. 393—396; Красноперов, „Экспериментальная аэродинамика“.

падку тіл, що мають площину симетрії, рівнобіжну з напрямом потоку (напр., крила), можна вважати, що сила опору — в цій площині симетрії, і тому, щоб її визначити, треба знати тільки дві складові та один момент щодо якоїсь осі, нормальної до площини симетрії. Якщо тіло, як і більшість деталей літака, має дві взаємно-нормальні площини симетрії, рівнобіжні з напрямом льоту, то силу опору, спрямовану в цьому випадку рівнобіжно з напрямом льоту, визначає одна величина.

Введімо тепер деякі терміни, живані в авіаційній техніці для крил. Перекрій крила (рис. 76) площиною, рівнобіжною з площиною симетрії літака, має назву профілю або дужки крила.

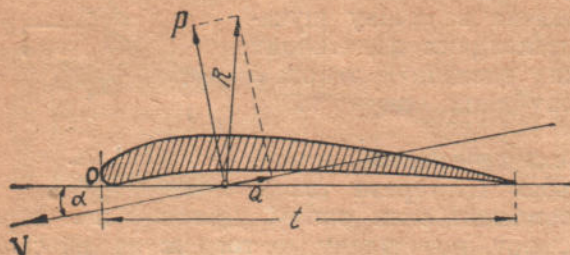


Рис. 76

Від профілю найголовніше й залежать аеродинамічні властивості крила. Застосовувані тепер на практиці форми профілів мають форму, що близько підходить до поданої на рис. 76. Розмір і форма профілю звичайно бувають різні в різних перекроях крила.

Найбільший розмір крила в напрямі, нормальному до площини симетрії, має назву розмаху крила  $l$ . Площею крила  $S$  звать площу проекції крила на площину, дотичну до нижньої поверхні крила.

Проекцію профілю крила на дотичну до нижнього обрису профілю звать тятивою (хордою) профілю, а довжину цієї проекції  $t$  — глибиною профілю.

Частку від ділення площі крила на його розмах звать середньою глибиною крила

$$t_{cp} = \frac{S}{l}. \quad (4)$$

Для прямокутного крила середня глибина крила дорівнює глибині профілю.

Відношення розмаху крила до його середньої глибини має назву подовження; позначають його звичайно через  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{l}{t_{cp}} = \frac{l^2}{S}. \quad (5)$$

Кут, утворюваний тятивою профілю з напрямом льоту (в трубі — з напрямом потоку), звать геометричним кутом атаки й позначають звичайно літерою  $\alpha$ .

Як уже зазначалося, повну силу опору крила (що лежить у площині його симетрії) цілком можна визначити її проекціями на дві взаємно-нормальні осі  $OX$  і  $OY$ , що лежать у цій площині, і моментом щодо осі  $OZ$ , нормальної до цієї площі.

За напрями осей  $OX$  і  $OY$  беруть напрям протилежний напрямку льоту й нормальний до нього. Вісь  $OZ$  звичайно проводять через проекцію  $O$  переднього крайка профілю на тятіву (рис. 76).

Складову  $P$  сили  $R$ , спрямовану по осі  $OY$ , звать підйимальною силою, а складову  $Q$ , спрямовану по осі  $OX$ , — чоловим опором.

Знаючи величини  $P$ ,  $Q$  й момент сили  $R$  щодо осі  $OZ$ , ми легко знаємо величину, напрям і точку приложення сили опору повітря. Точку перетину напрямку сили  $R$  з тятивою звать центром тиску профілю.

У відміну від досліджуваного нижче дійсного або динамічного кута атаки.

Згідно із сказаним раніш, силу опору повітря дає формула

$$R = C_x \rho S v^2 \quad (6)$$

(для крил за  $S$  беруть площу крила).

Відповідно можемо написати

$$P = C_y \rho S v^2 \quad (7)$$

і

$$Q = C_x \rho S v^2 \quad (8)$$

Так само момент повного опору, що дорівнює добутковій силі  $R$  на певну довжину  $t'$

$$M = C_x \rho S v^2 t' = C_x \rho S v^2 t \cdot \frac{t'}{t}$$

можна подати формулою (беручи  $C_x \frac{t'}{t} = C_m$ )

$$M = C_m \rho S v^2 t. \quad (9)$$

При тих самих або мало відмінних Reynolds'ових числах сучинники  $C_x, C_x, C_y, C_m$  залежать тільки від розміру й форми крила, а також від кута атаки.

Завдання випробу моделів крил — це знайти ці сучинники, залежно від кута атаки для різних профілів, при чому немає потреби випробовувати профіль при різних подовженнях, бо можна перерахувати зазначені сучинники з одного подовження на інше за допомогою вихрової теорії крила скінченного розмаху, яку розглянемо далі.

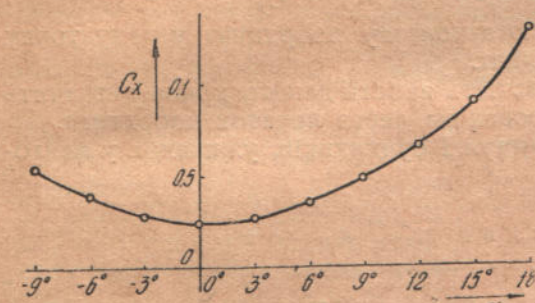


Рис. 77 б.

Наслідки експериментів можна подати в формі діаграм, що дають залежність величин сучинників  $C_y, C_x, C_m$  від кута атаки  $\alpha$  (рис. 77 а, в, с). Для

практичної мети, проте, багато зручніша так звана Lilienthal'ева крива, що дає залежність  $C_y$  від  $C_x$ , при чому точки, що відповідають певним кутам атаки, позначають на кривій, як показано на рис. 78.

При однакових мірилах для  $C_x$  і  $C_y$  вектор, проведений з початку координат у будь-яку точку Lilienthal'евої кривої, дає величиною й напрямом сучинник повного опору  $C_z$ .

Звичайно, проте, мірило по осі  $x$  (для  $C_x$ ) роблять у п'ять разів більше від мірила по осі  $Y$ , бо величини сучинників  $C_x$  багато менші від сучинників  $C_y$ .

Лябораторія ЦАГІ подає наслідки своїх дослідів над крилами у формі діаграми, на яку нанесено три дослідні криві (див. рис. 82): Lilienthal'еву

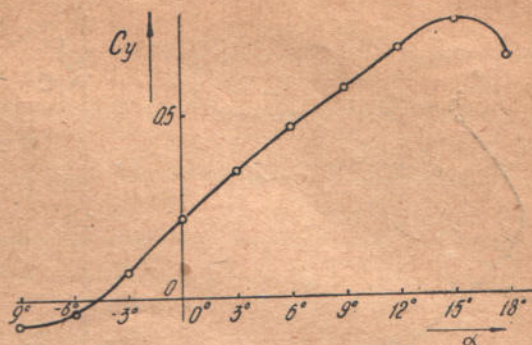


Рис. 77 а.

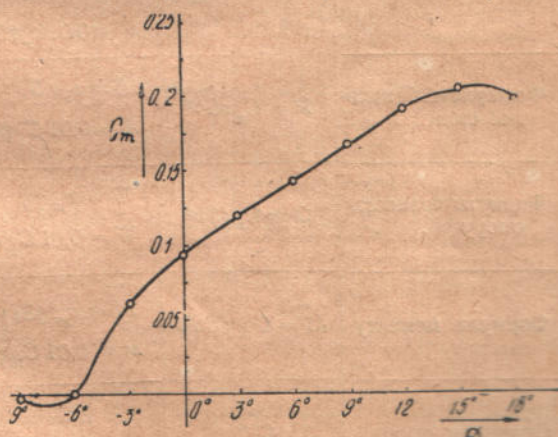


Рис. 77 с.

криву, що дає залежність  $C_y$  від  $C_x$ , криву, що дає залежність  $C_y$  від  $\alpha$ , і, нарешті, криву, що дає залежність  $C_m$  від  $C_y$ .

Крім того, на діаграмі проводять ще певну параболу, так звану параболу індуктивного опору, про яку говоритимемо далі.

До кожної діаграми додають рисунок профілю й таблицю вартостей сучинників.<sup>1</sup>

Зазначмо ще, що відношення підйімальної сили крила до його чолового опору, або, що те саме, відношення їхніх сучинників  $\frac{C_y}{C_x}$  звать якістю, а величину, обернену до цього відношення  $\mu = \frac{C_x}{C_y}$ , оберненою якістю крила.

Із рис. 78 не трудно бачити, що при однакових мірилах для  $C_y$  і  $C_x$

$$\mu = \frac{C_x}{C_y} = \operatorname{tg} \beta,$$

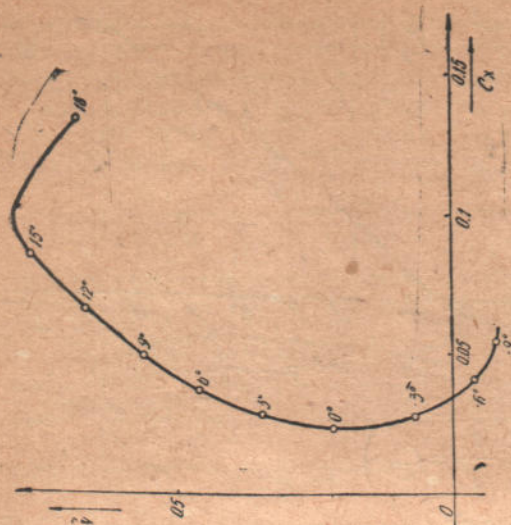


Рис. 78.

де  $\beta$  є кут між простою, проведеною з початку координат у дану точку Lilienthal'евої кривої, і віссю координат.

Цілком ясно, що максимальну вартість якості даного крила визначить дотична до Lilienthal'евої кривої, проведена через початок координат.

На кінець наводимо таблицю формул і сучинників, уживаних у найголовніших країнах.

Т а б л и ц я 3.

	СРСР	Німеччина	Франція	Англія
Формула опору .	$R = C_x \rho S v^2$	$R = c_r q S$ $\left[ q = \rho \frac{v^2}{2} \right]$ $R = 0,01 C_r q S$	$R = K_x S v^2$	$R = K_x \rho S v^2$
Формула підйімальної сили . . . .	$P = C_y \rho S v^2$	$A = c_a q S$ $A = 0,01 C_a q S$	$R_y = K_y S v^2$	$L = K_L \rho S v^2$
Формула чолового опору . . . . .	$Q = C_x \rho S v^2$	$W = c_w q S$ $W = 0,01 C_w q S$	$R_x = K_x S v^2$	$D = K_D \rho S v^2$
Формула моменту	$M = C_m \rho S v^2 t$	$M = c_m q S t$ $M = 0,01 C_m q S t$	$M = K_m S v^2 t$	$M = K_M \rho S v^2 t$
Сучинник опору .	$C_x$	$c_r = 2 C_x$ $C_r = 200 C_x$	$K_x = \rho_0 C_x = \frac{1}{8} C_x$	$K_x = C_x$

<sup>1</sup> Зібрані ці діаграми в цінній книжці Юр'єва і Леснікової, „Аэродинамические исследования“.

	СРСР	Німеччина	Франція	Англія
Сучинник підіймальної сили . .	$C_y$	$c_a = 2 C_y$ $C_a = 200 C_y$	$K_y = \frac{1}{8} C_y$	$K_L = C_y$
Сучинник чолового опору . . . .	$C_x$	$c_w = 2 C_x$ $C_w = 200 C_x$	$K_x = \frac{1}{8} C_x$	$K_D = C_x$
Сучинник моменту	$C_m$	$c_m(\text{нім.}) = 2 C_m(\text{рос.})$ $C_m(\text{нім.}) = 200 C_m(\text{рос.})$	$K_m = \frac{1}{8} C_m$	$K_M = C_M$

## § 6. Наслідки експериментальних досліджень крил<sup>1</sup>

Перше ніж подати наслідки деяких досліджень над крилами, з'ясуємо вплив на них характеристики досліді (або числа  $\Re$ ). Для цього L. Prandtl робив досліді над рядом профілів при різних вартостях характеристики досліді  $v.t$ , де  $v$  — швидкість крила в м/сек і  $t$  — глибина моделю  $M$ .

Наведені діаграми (рис. 79 і 80) є наслідки цих дослідів для грубого й тонкого профілів.

Ці діаграми показують, що, починаючи з  $vt = 6$ , при вживаних кутах атаки (від  $-2$  до  $10^\circ$ ) Lilienthal'еві криві досить щільно сходяться. При великих кутах атаки чоловий опір тонких профілів зменшується із збільшенням величини  $vt$ , а підіймальна сила збільшується; а для грубих профілів картина буде протилежна: починаючи з кута атаки, приміром  $10^\circ$ , чоловий опір крила із збільшенням  $vt$  збільшується, а підіймальна сила зменшується.

У кожному разі на підставі цих дослідів можна дійти висновку, що випробовувати крила з достатньою точністю (обумовленою дуже невеликим впливом на сучинники Reynolds'ового числа) можна тільки, починаючи з характеристики досліді, що дорівнює 6.

Із дуже численних дослідів над моделями крил найцікавіші є досліді, що виявляють вплив на аеродинамічні властивості крила його профілю, пляну та інших чинників, як скручування крила (зміна кутів атаки профілю вздовж розмаху), поперечне  $V$  тощо.

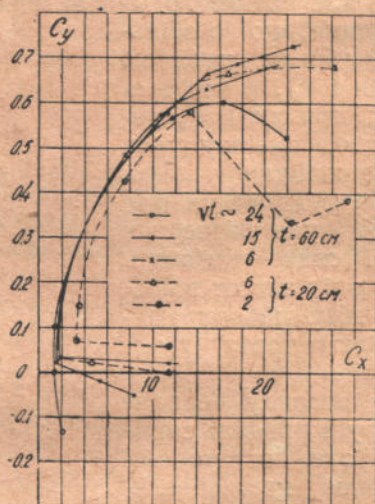


Рис. 79.

<sup>1</sup> Дані, наведені в цьому й дальшому параграфі, узяті з книжок: Юр'єв і Леснікова, „Аэродинамические исследования“; Fuchs und Hopf, „Aerodynamik“ та ін.

Досліди показали, що найбільше впливає на аеродинамічні властивості крила форма його профілю. Звідси постає дуже важливе питання — про

Götte, 358



найкращі форми профілів. Добрі профілі повинні мати якнайбільший сучинник підіймальної сили  $C_y$  з

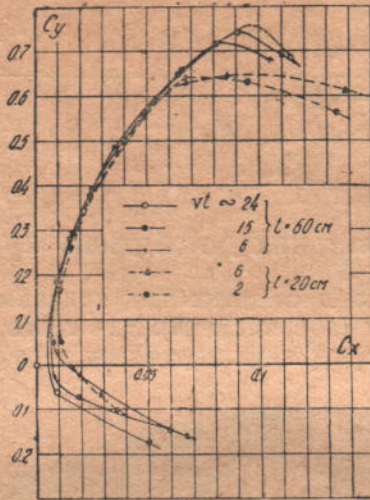


Рис. 80.

якнайменшою вартістю  $C_x$ . Проте, взагалі кажучи, зміна форми профілю, що спричиняє збільшення  $C_y$ , збільшує разом із тим і  $C_x$ . Мінімальні вартості  $C_x$  бувають для профілів із добре закругленим переднім кінцем і злегка відігненим догори заднім.

Надто великий вплив добре закругленого переднього кінця, як це видно з рис. 81a і 81b, де подано Lilienthal'єві криві 2 профілів, що мають однакову форму, але неоднаково закруглені передні кінці.

Максимальні вартості  $C_y$  бувають при великій увігнутості й гострому задньому куті профілю. Рис. 82a, 82b, 82c подають наслідки випробів для трьох профілів з однаковою

увігнутістю, але різною грубиною, випробуваних у лабораторії ЦАГІ.

З них видно, що із збільшенням грубини профілю збільшується і  $C_y$ , а вартості кутів атаки, при яких  $C_y$  дорівнює нулеві, зменшуються (абсолютною величиною збільшуються, бо кути атаки при близьких до нуля вартостях підіймальної сили — від'ємні).

Чоловий опір також збільшується із збільшенням грубини профілю, проте, дуже мало.

Отже, з погляду аеродинамічного грубі профілі сприятливіші; проте, остаточний вибір профілю крила залежить від багатьох міркувань і аеродинамічного, і конструктивного характеру. Але останнім часом у багатьох конструкторів помічається сильна тенденція погрубшувати профілі, при чому в крилах містять навіть пасажирські кабіни (Junkers).

Рис. 83a, 83b, 83c дають наслідки випробів трьох профілів, що мають однакову грубину, але різну увігнутість. Порівнюючи їх, бачимо, що збільшення увігнутості впли-



ЦАГІ 371

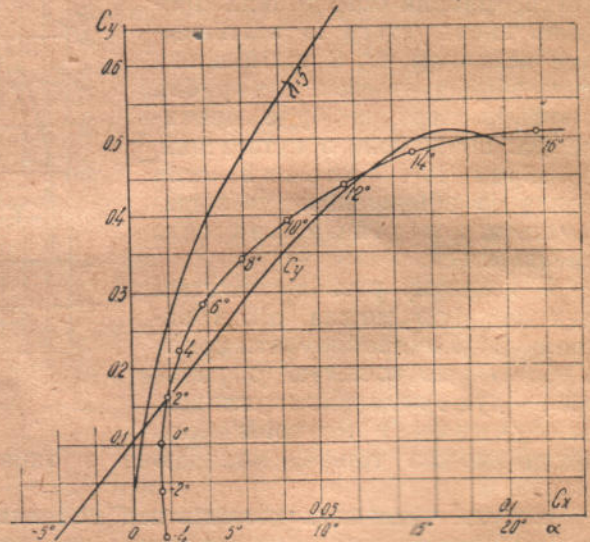


Рис. 81a.

ває аналогічно із збільшенням габаритів; в міру того як збільшується увігнутість, збільшується підймальна сила профілю й чоловий опір та зменшується кут атаки, при якому підймальна сила дорівнює нулеві, й момент міняється так, що центр тиску наближається до переднього крайка.

Цікаві досліди зроблено в Гетінгені над розрізними крилами Lachman'a і „Handley Page“ і опубліковано в „Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen“ (II Lieferung).

Рис. 84 показує, що вплив щільності позначається в чималому збільшенні підймальної сили,<sup>1</sup> бо щільна перешкоджає зривові і струмин при великих кутах атаки.

Збільшення підймальної сили має велику вагу для зменшення швидкості сідання. Проте, при вживаних для поземого льоту кутах атаки таке крило дає надто великі вартості чолового опору.

Щоб запобігти цьому, додаткове крильце на літаках „Handley Page“ зроблено рухоме. Рис. 85 дає наслідки його впробів.

При поземому льоті крильце — в положенні *b*, при сіданні ж його переводять у положення *c*. Наслідки цього бувають дуже гарні, проте таке розсувне крило потребує досить складного механізму, що пересуває дуже обтяжене силою опору повітря крильце.

Рис. 86 дає наслідки впробів Lachman'ового крила, поділеного на 4 частини. Lilienthal'ева діаграма для цього крила має той самий характер, що й крива на рис. 84, хоч і плавкіша. Цей профіль теж дає збільшення підймальної сили й великий чоловий опір.

Щоб порівняти, наводимо діаграму основного профілю.

Інші чинники, як форма пляну крила (прямокутна, еліптична, трапеzuватa, а також його скручування (змiна кута атаки за розмахом) багато менше впливають на аеродинамічні властивості крила й піддаються часті теоретичному дослідженню за допомогою вихрової теорії крила.

Великий інтерес мають досліди для перевірки теоретичних висновків. Лябораторія ЦАГІ зробила багато дослідів над теоретичними профілями М. Є. Жуковського, при чому виявлено, що наслідки експерименту досить добре збігаються з теоретичними висновками.

Іноді треба знати не тільки величину й напрям вислідної сили тиску, але й розподіл тиску по профілю. Щоб виміряти тиск у різних точках моделю, його звичайно роблять порожнистим з отворами дуже малого діаметру (порядку 0,5 мм). Тиск у кожного з отворів через унутрішню порожнину й вивідну трубу передається до манометра (решту отворів при цьому замащують або заклеюють). Наслідки таких досліджень подано, прим., в „Ergebnisse der Aerodyn. Versuchanstalt“ (II Lieferung, S. 43).

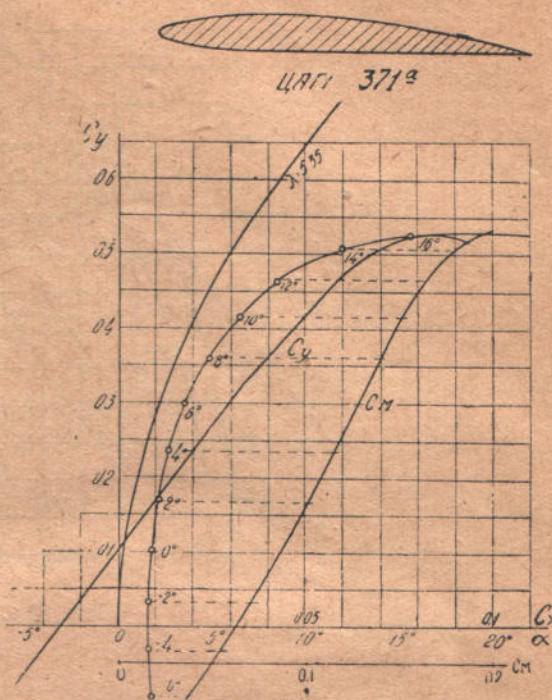


Рис. 81 в.

<sup>1</sup> Теорію цього явища ще недосить опрацьовано; див. напр. *Fuchs und Hopf*, „Aerodynamik“.

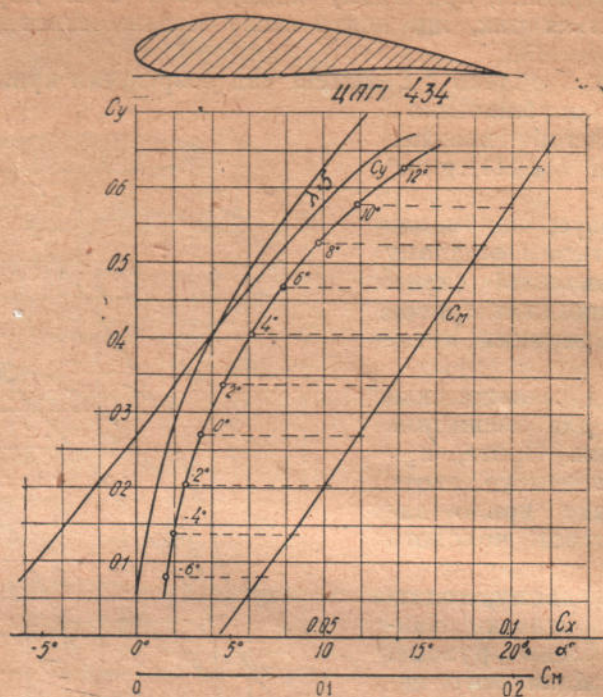


Рис. 82 а.

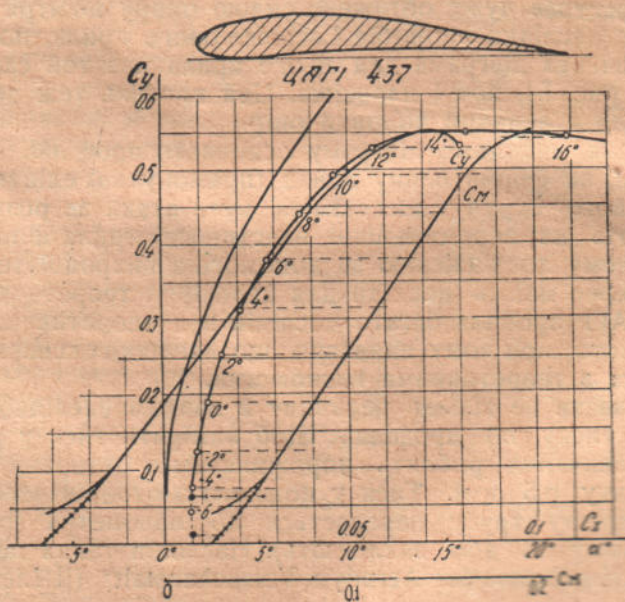


Рис. 82 б.



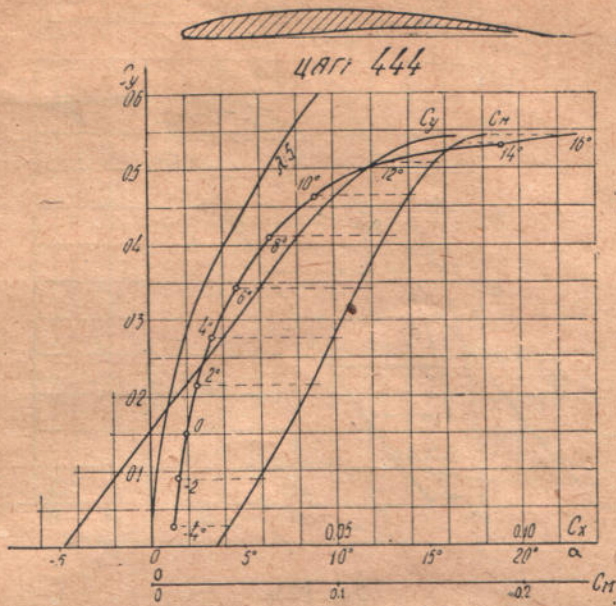


Рис. 82 с.

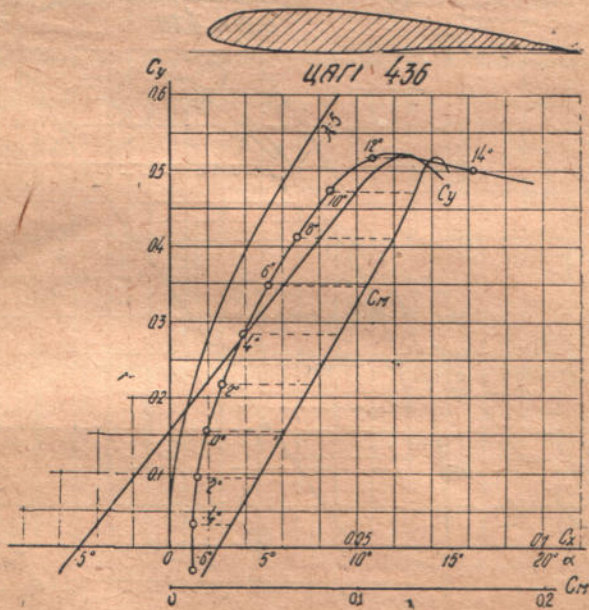


Рис. 83 а.

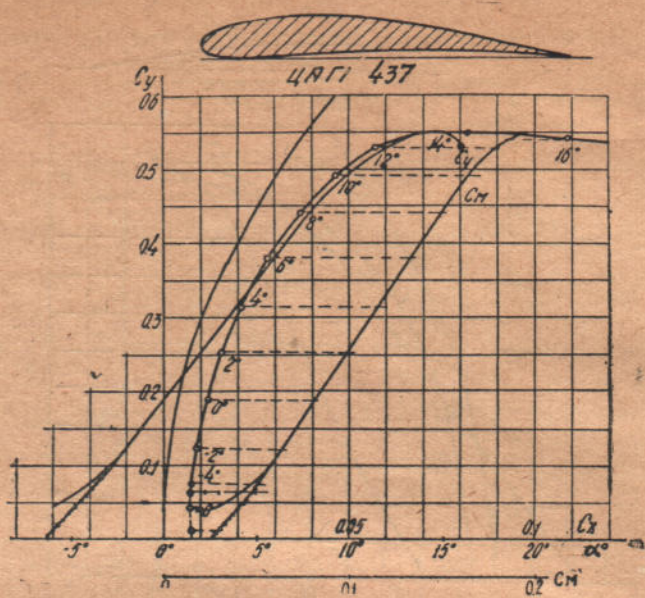


Рис. 83 б.

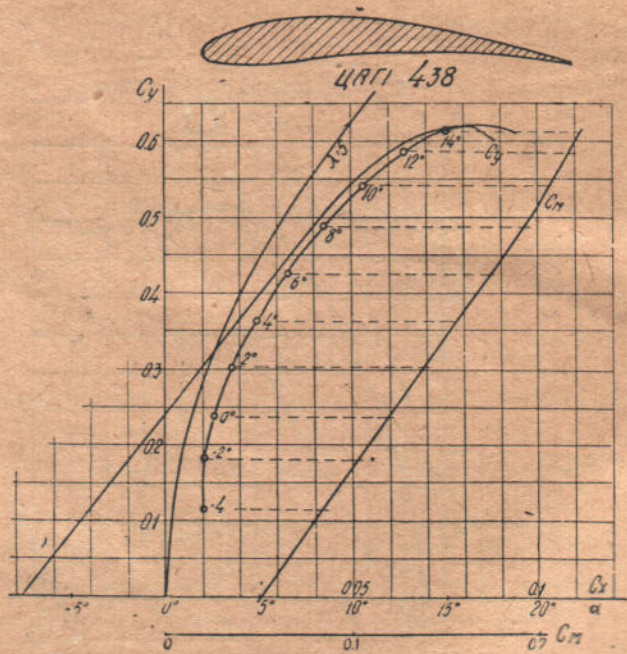


Рис. 83 с.

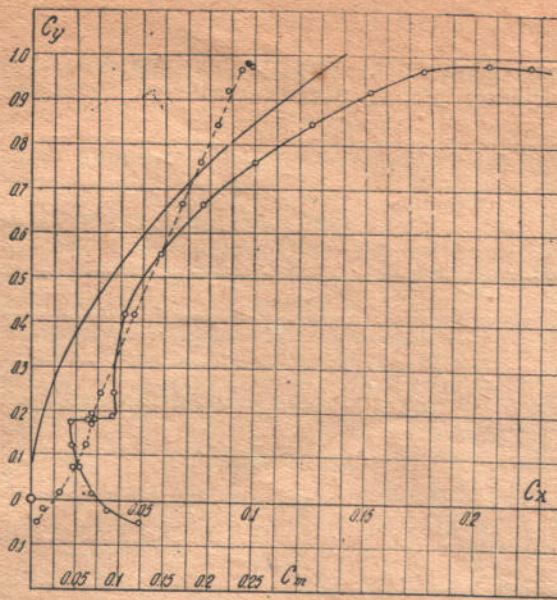


Рис. 84.

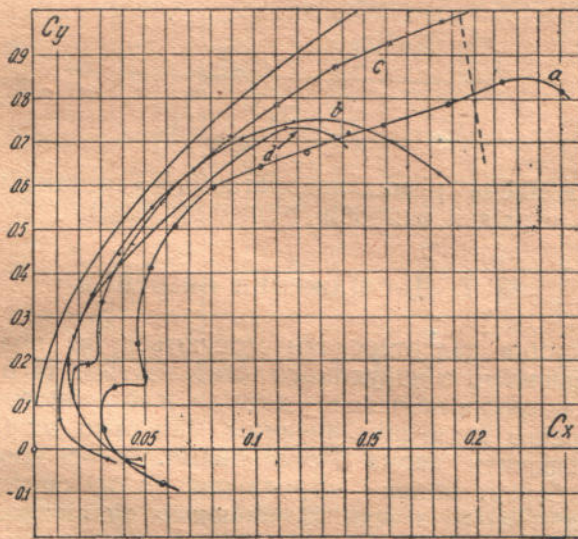


Рис. 85.

Не маючи змоги більше спинятися на надзвичайно різноманітних і численних дослідженнях крил, відсилаємо тих, хто цікавиться цим пи-

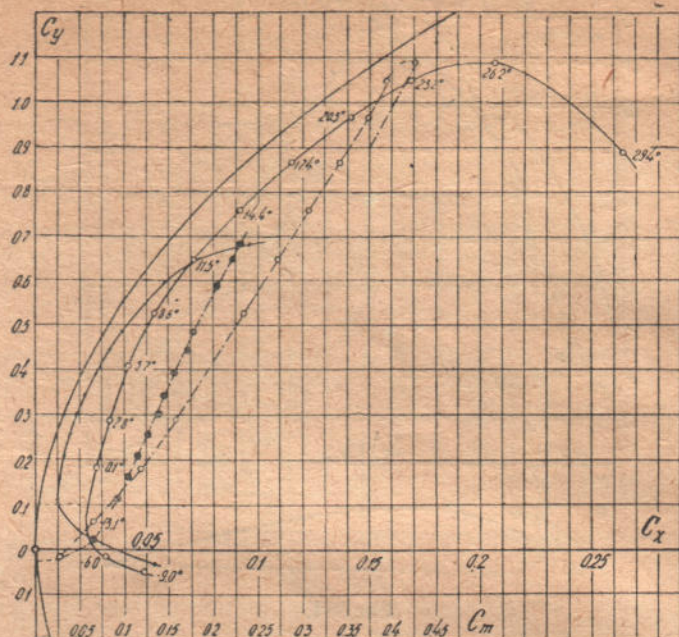


Рис. 86.

танням, до повідомлень різних лабораторій.<sup>1</sup> Там таки подано потрібні при проектуванні наслідки випробів різних профілів.

## § 7. Дослідження опірння

Більшість випробів над опірнням стосуються до поземого опірння, що складається звичайно з нерухомого стабілізатора та рухомого стерна висоти. Завдання випробів опірння — дослідити залежність аеродинамічних властивостей опірння від різних чинників. Так само, як і для крил, силу опору можна визначити двома  $\bar{C}$  складовими. За осі координат для поземого опірння беремо напрям, нормальний до осі симетрії профілю  $N$ , і напрям  $T$ , що збігається з нею. Порівнюючи сучинники  $C_n$  і  $C_t$  із звичайними  $C_y$  і  $C_x$ , матимемо (рис. 87)

$$C_n = C_y \cos \alpha + C_x \sin \alpha \quad (10)$$

$$C_t = C_x \cos \alpha - C_y \sin \alpha. \quad (11)$$

<sup>1</sup> Юр'єв і Леснікова, „Аэродинамические исследования“, „Труды ЦАГИ“; „Technical Report of the Aeronautical Research Committee“, London; „Annual Report of the National Advisory Committee for Aeronautics“, Washington; „Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen“; G. Eiffel, Nouvelles recherches sur la résistans de l'air et l'aviation faites au Laboratoire d'Auteuil; G. Eiffel, Resumé des principeaux travaux exécutés pendant la guerre. Laboratoire aerodynamique Eiffel.

При звичайних невеликих вартостях кута  $\alpha$  можна вважати, що

$$C_n = C_y \text{ і } C_t = C_x.$$

Крім того, для характеристики опірння дуже важливий так званий сугавний момент, що являє собою момент сили опору повітря, яка впливає на стерно щодо його осі обертання; тому, що цей момент пропорційний до зусилля, яке треба прикласти до ручки, щоб повернути стерно, то нам треба намагатися зменшити сугавний момент. Його характеризують сугинником  $C_m$ , якого маємо за формулою

$$C_m = \frac{M_m}{\rho S v^2 b},$$

де  $M_m$  — сугавний момент в кг м,  
 $\rho$  — густина повітря,  
 $s$  — площа стерна в м<sup>2</sup>,  
 $v$  — швидкість потоку в м/сек,  
 $b$  — максимальна ширина стерна в м.

Дуже впливає на величину сугинника  $C_n$  (і  $C_y$ ) подовження стерна, як це видно з рис. 88, що дає сугинник  $C_y$  для прямокутників з різними подовженнями. З нього видно, що вигідніше застосовувати опірння з якнайбільшим подовженням.

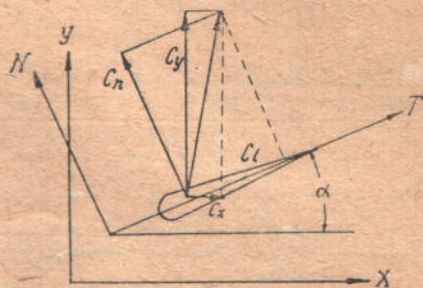


Рис. 87.

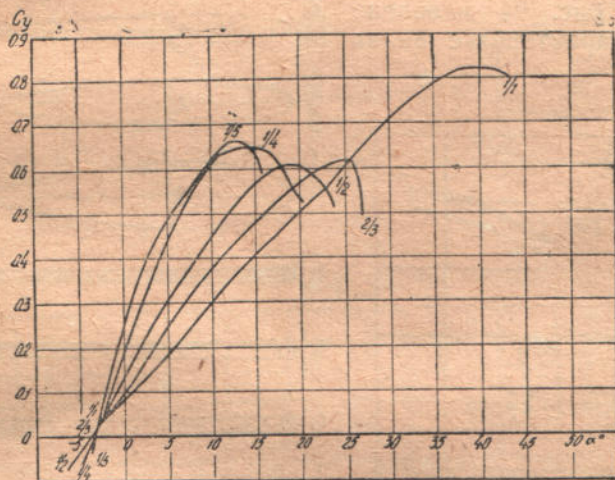


Рис. 88.

Навпаки, форма пляну стерна на його аеродинамічні властивості впливає не дуже, як це видно з рис. 89, що дають кілька вживаних форм опірння й наслідки їхніх продувань.

Тому що сили, які впливають на опірння, повинні набирати і додатні, і від'ємні вартості, профіль опірння звичайно беруть симетричний. Вплив профілю взагалі аналогічний із впливом для крил. На рис. 90 подано за даними Fuchs'a і Норп'а кілька профілів з мінімальними вартостями їхніх сугинників опору; сугинник опору  $C_x$  віднесено до площі стерна.

На рис. 91 подано залежність сугинника  $C_n$  від кута відхилу стерна для поданого там таки профілю.

Щоб зменшити сугавний момент, іноді роблять так звану компенсацію; полягає вона в тому, що вісь обертання стерна відокремлює якусь ча-

стину з площі стерна, називану компенсатором вісним (рис. 92) або бо-

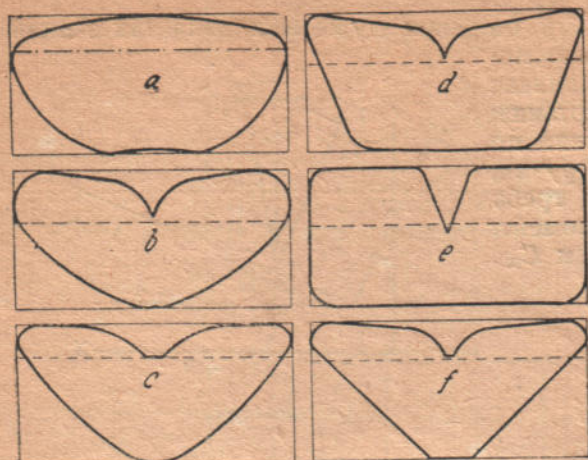


Рис. 89 а.

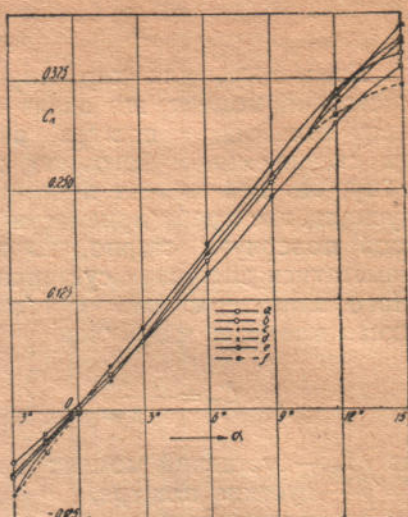


Рис. 89 б

ковим (рис. 93) залежно від розташування. Вплив компенсатора полягає в тому, що він частково зрівноважує сугавний момент протилежним моментом сили опору компенсатора. На рис. 94 наведено діаграму, що характеризує вплив компенсації.

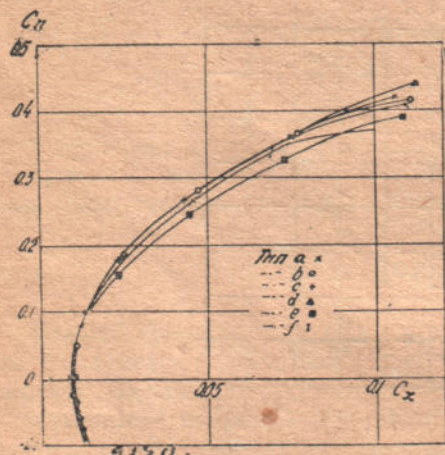


Рис. 89 с.

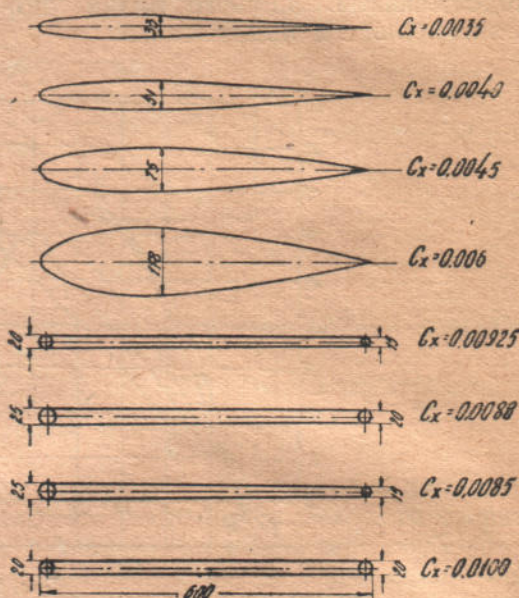


Рис. 90.

Багатий матеріал з випробів опірності, а також із дослідження впливу фюзеляжу, подано в книжці „Аэродинамические исследования по оперению самолета“ („Труды ЦАГИ“, вип. 49), куди й відсилаємо всіх, хто цим цікавиться.

Значення для опірності Reynolds'ового числа взагалі таке саме, як і для крил.

Для попередніх розрахунків, за Чесаловим,<sup>1</sup> можна прийняти такі

<sup>1</sup> „Материалы по аэродинамическому расчету самолетов“, стор. 45.

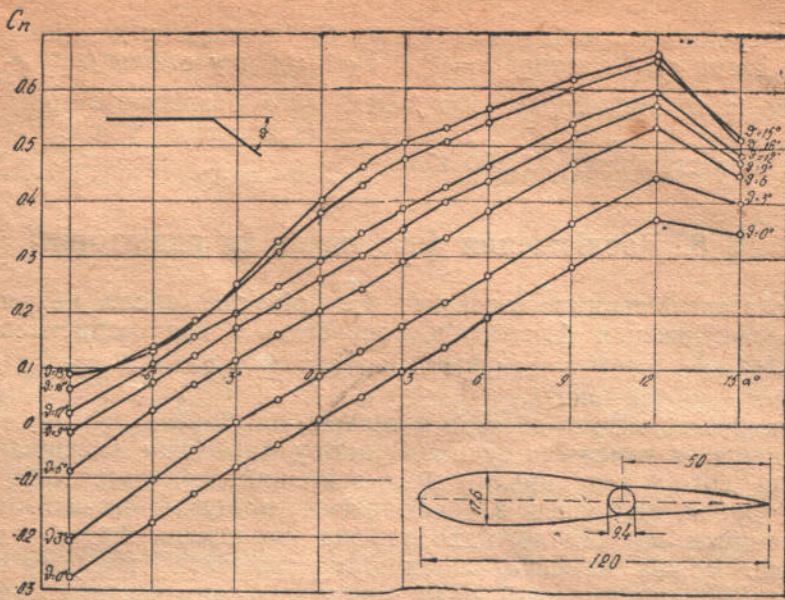


Рис. 91.

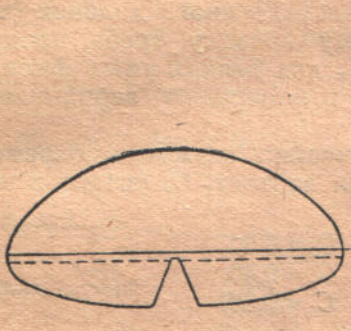


Рис. 92.

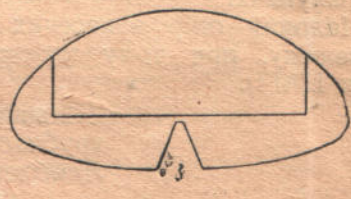


Рис. 93.

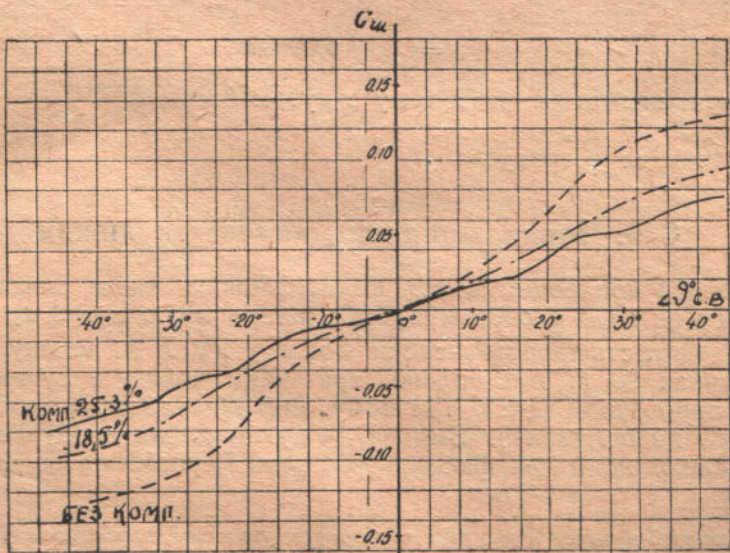


Рис. 94.

величини сучинників шкідливого опору  $C_x$  (віднесених до площі опірениня) при куті атаки стабілізатора  $\alpha=0^\circ$  й куті відхилу стерна  $\delta=0 \div 3^\circ$ .

Стерно із стабілізатором або кілем	(без розрізу в стерні)	$C_x=0,011$
"	"	"
"	"	"
"	"	"
"	(з розрізом у стерні)	$C_x=0,013$
"	"	"
"	без стабілізатора або кіля	$C_x=0,010$

## § 8. Дослідження фюзеляжів та радіаторів<sup>1</sup>

Згідно з англійськими дослідями Reynolds'ове число не впливає на наслідки дослідження фюзеляжів, починаючи з характеристики досліду  $V\sqrt{F}=5$  м<sup>2</sup>/сек, де  $V$ —швидкість потоку в м/сек і  $F$  площа габариту, нормального до осі гвинта.

Такі вартості легко досягти в теперішніх трубах; проте тут маємо інші труднощі, а саме — на сучинник опору фюзеляжу надзвичайно впливає форма його й взаємовплив його з іншими деталями. Крім того, випробування в трубах, переведені з ідеалізованими моделями фюзеляжів, можуть дати сучинники, що чимало відходять від справжніх. Згідно з дослідями в Гетінгені, можна вважати, що підймальна сила фюзеляжу становить пересічно 75% підймальної сили вирізуваної ним частини крила.<sup>2</sup> При попередніх розрахунках звичайно вважають, що вона дорівнює підймальній силі вирізаної частини крила. Тому, що сучинник чолового опору фюзеляжу  $C_x$  (віднесений до площі габариту) може коливатися між 0,06 і 0,35, залежно від форми фюзеляжу й деталей, до нього доданих (чолові радіатори, обтікачі тощо), його в кожному випадку треба продувати в трубі. Тут ми подаємо тільки вартості  $C_x$  для деяких типів фюзеляжів (рис. 95), що можуть бути орієнтовними в попередніх аеродинамічних розрахунках.

Чоловий опір винесених радіаторів звичайно зважують окремо від фюзеляжу, при чому можна прийняти такі вартості  $C_x$  (згідно з випробуваннями ЦАГІ):

стільникові радіатори	$C_x=0,50,$
трубчасті	" $C_x=0,40,$
Лямбленові	" $C_x=0,30,$

де  $C_x$  віднесено до чолової площі радіатора.

За Чесаловим  $C_x$  для фюзеляжу з кутом атаки  $\alpha$  можна знайти за формулою:

$$C_{x\alpha} = C_{x0} + 0,0003 \alpha^2,$$

де  $C_{x\alpha}$  — сучинник опору фюзеляжу з кутом атаки  $\alpha$ ,

$C_{x0}$  — " " " " " " " 0,

$\alpha$  — кут атаки в градусах.

## § 9. Човни, поплавці, колеса та лижви

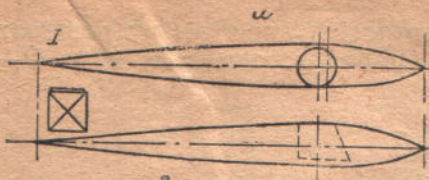
Для човнів і поплавців вплив Reynolds'ового числа можна прийняти такий самий, як і для фюзеляжів. Отже, випробовуючи їхні моделі в трубі треба мати вартість характеристики досліду  $V\sqrt{F}$  не меншу, як 5 м<sup>2</sup>/сек

На рисунках 96 а, б, с подано три типи човнів з сучинниками  $C_x$  продути в лабораторії ЦАГІ, при чому опір віднесено до площі габариту, нормального до осі гвинта. Зміна  $C_x$  з кутом атаки відбувається за тим самим законом, що й для фюзеляжів. Вплив Reynolds'ового числа на опір

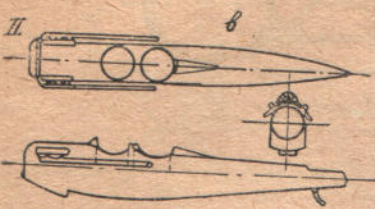
<sup>1</sup> Дані, наведені в цьому й дальших параграфах, узято найголовніше за Чесаловим. Див. Чесалов, „Коефіцієнти вредного сопротивления“ („Труды ЦАГИ“, вып. 42).

<sup>2</sup> Fuchs und Hopf, „Aerodynamik“, S. 219.

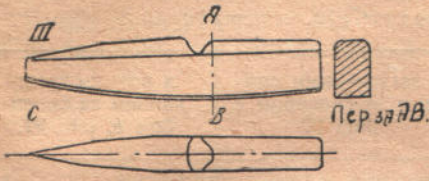




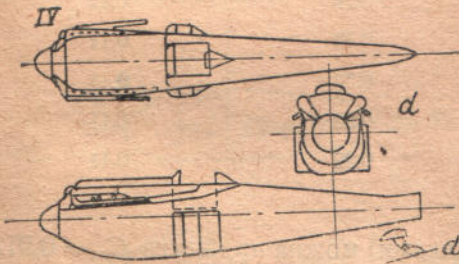
без пілота  $C_x = 0,07$ ; з пілотом  $C_x = 0,12$



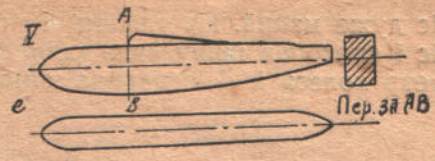
$C_x = 0,20$  (з чоловим радіатором)



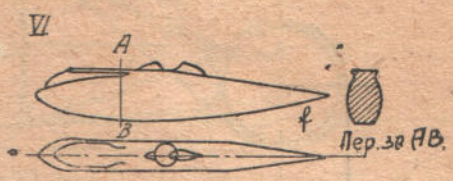
$C_x = 0,15$  (без радіатора)



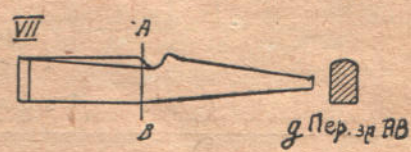
$C_x = 0,13$  (з радіатором)



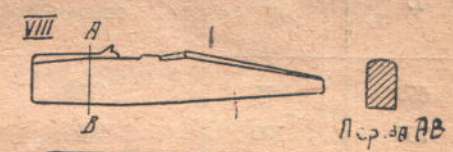
$C_x = 0,12$  (без радіатора)



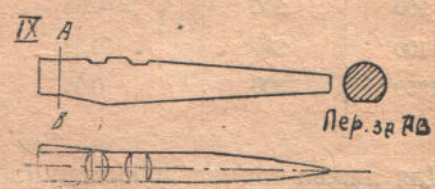
$C_x = 0,06$  (без радіатора)



$C_x = 0,90$  (з чоловим радіатором)

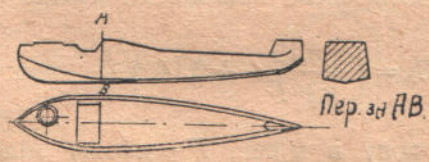


$C_x = 0,18$  (без радіатора)

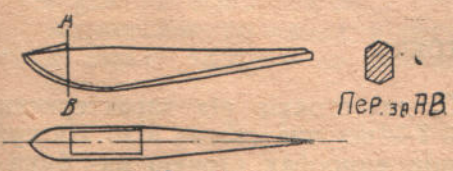


$C_x = 0,12$  (без радіатора)

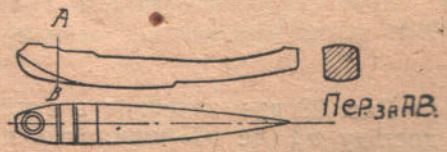
Рис. 95.



$C_x = 0,08$   
Рис. 96 а.



$C_x = 0,15$   
Рис. 96 б.



$C_x = 0,12$   
Рис. 96 с.

коліс дуже малий. На таблиці 4 подано вартості  $C_x$  при різних розмірах коліс і способах шинування (див. рис. 97). Опір віднесено до  $D \cdot d$ , де  $D$ —діаметр колеса й  $d$ —ширина шини в м.

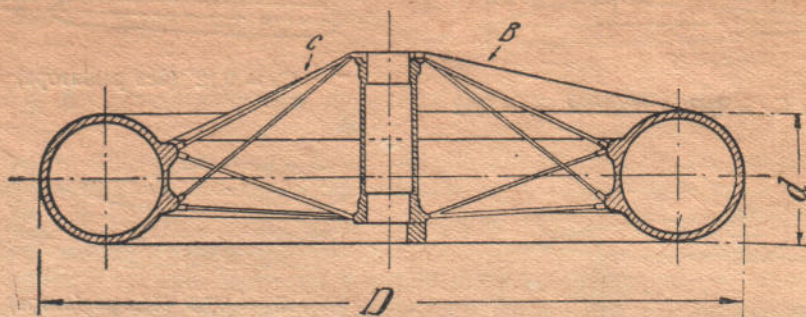


Рис. 97.

Таблиця 4.

Розмір шини в мм		Вартості $C_x$ для коліс		
$D$	$d$	з відкритими спицями	з затягненими спицями за способом $a$ , рис. 97	з повним затягненням за способом $b$ , рис. 97.
650	75	0,39	0,26	0,13
700	100	0,35	0,23	0,12
750	125	0,34	0,23	0,12
800	150	0,33	0,22	0,11
900	200	0,33	0,22	0,11
1100	250	0,33	0,22	0,11
1350	300	0,33	0,22	0,11

Для лижви нормального типу (з козелками) можна прийняти  $C_x = 0,013$ , де опір віднесено до площі опірної поверхні лижви (проекція поверхні лижви на позему площину).

Вплив Reynolds'ового числа наближено можна подати формулою

$$C_x = \left( \frac{0,15}{v \sqrt{F}} + 0,14 \right) \frac{F}{S},$$

де  $v$ —швидкість потоку в м/сек,  $F$ —площа міделя в  $m^2$  і  $S$ —опірня поверхня в  $m^2$ . Випробовувати треба при вартостях  $v \cdot \sqrt{F}$ , не менших від 5.

## § 10. Стояки

Рис. 98 дає залежність сучинника  $C_x$  для стояків від характеристики досліду  $v\beta$  (де  $v$ —швидкість потоку й  $\beta$ —ширина стояка в м). Ця крива показує, що характеристика досліду при випробах стояків має бути не менша від 1. На рис. 99 дано три добрі профілі стояків і зазначено їхні сучинники шкідливого опору  $C_x$ , віднесені до площі Міделя. Щоб зважити опір кінцевого кріплення, при розрахунку звичайно додають по 0,6 м

до довжини кожного стояка (або до проекції його довжини на площину, нормальну до напрямку льоту при похилому положенні стояка).

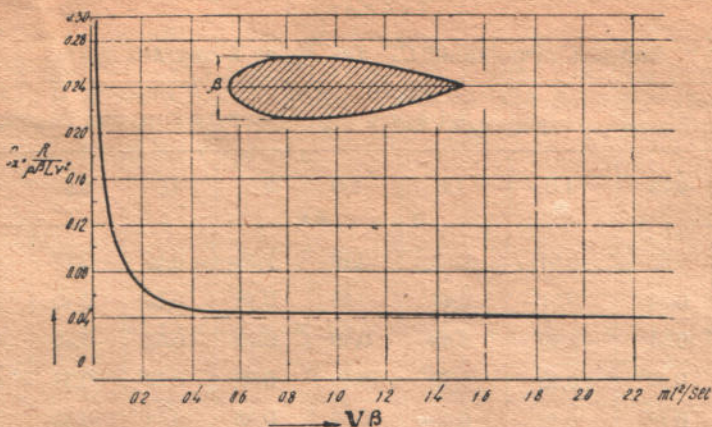


Рис. 98.

Якщо стояк працює під кутом атаки  $\alpha$ , то  $C_x$  для нього можна знайти за формулою, що запропонував Чесалов:

$$C_{x\alpha} = C_{x0} + 0,004 \frac{\alpha^2}{\lambda}$$

де  $C_{x\alpha}$  — сучинник опору стояка при куті атаки  $\alpha$ ,  
 $C_{x0}$  — " " " " "  $\alpha=0$ ,  
 $\alpha$  — кут атаки в градусах,  
 $\lambda$  — подовження стояка.

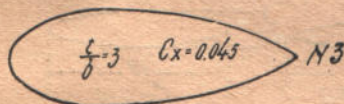
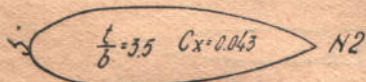
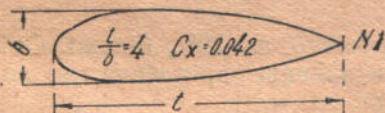


Рис. 99.

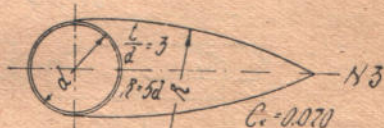
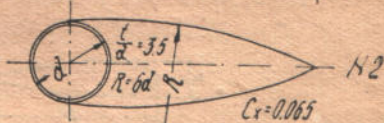
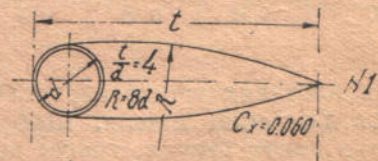


Рис. 100.

На рис. 100 дано три типи обтікачів труб з відповідними сучинниками  $C_x$ , віднесеними до площі міделя. Щоб зважити кінцеве кріплення, треба також додати по 0,6 м до довжини стояка.

## § 11. Круглий дріт, труби, троси

Опір цих деталей багато залежить від Reynolds'ового числа. При вартостях  $vD \div 0,3 - 3$  м<sup>2</sup>/сек можна вважати, що  $C_x$  для дроту й труб дорівнює 0,6. Проте, для тонкого дроту вартість  $v \cdot D$  в льоті може бути

менша від 0,3. Тому наводимо тут таблицю, що дає вартості  $C_x$  для круглого дроту й труб при різних швидкостях і діаметрі.

Таблиця 5.

Вартість сучинників  $C_x$  для дроту й круглих труб

Швидкість $v$ м/сек	Діаметр $D$ дроту в мм								
	0,75	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
10	0,58	0,54	0,51	0,49	0,48	0,48	0,48	0,49	0,50
15	0,54	0,51	0,49	0,48	0,48	0,49	0,50	0,52	0,53
20	0,51	0,49	0,48	0,49	0,50	0,52	0,53	0,54	0,55
25	0,49	0,48	0,49	0,50	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56
30	0,48	0,48	0,49	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57
35	0,48	0,49	0,50	0,53	0,54	0,55	0,56	0,56	0,57
40	0,48	0,49	0,52	0,51	0,55	0,56	0,57	0,57	0,58
45	0,48	0,50	0,53	0,54	0,56	0,56	0,57	0,58	0,59
50	0,49	0,50	0,54	0,55	0,56	0,57	0,58	0,58	0,59
60	0,49	0,52	0,54	0,56	0,57	0,58	0,58	0,59	0,60
70	0,50	0,53	0,55	0,57	0,58	0,58	0,59	0,59	0,60
80	0,52	0,54	0,56	0,57	0,58	0,59	0,59	0,60	0,60
90	0,52	0,54	0,57	0,58	0,58	0,59	0,60	0,60	0,60
100	0,53	0,55	0,57	0,58	0,59	0,59	0,60	0,60	0,60
110	0,54	0,56	0,57	0,58	0,59	0,60	0,60	0,60	0,60

Для плетених тросів вартості  $C_x$  пересічно на 20% більші. Опір стсується до площі міделя. Щоб зважити кінцеве кріплення, до довжини кожного дроту (труби, троса) додаємо по 0,6 м.

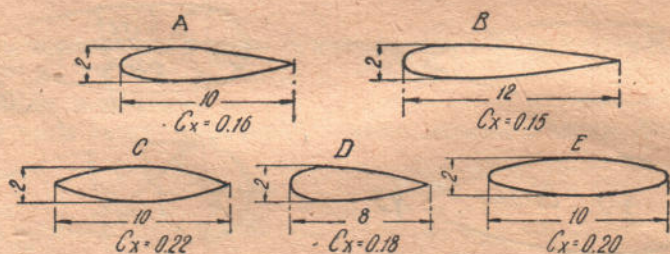


Рис. 101.

Для дротів, похило розташованих до потоку, при розрахунках звичайно беруть (на підставі дослідів) за довжину  $l \cdot \sin^3 \alpha$ , де  $\alpha$  — кут нахилу дроту (труби, троса) до потоку і  $l$  — довжина її, додаючи також по 0,6 м, щоб зважити кінцеве кріплення.

Часто вживають дріт спеціальних профілів, що мають менший сучинник опору.

На рис. 101 наведено кілька типів таких про ілів і зазначено середні вартості їхніх сучинників  $C_x$  (тут зважено також збільшення  $C_x$  через можливий відхил від симетричного розташування щодо потоку).

Опір віднесено до площі міделя. Щоб зважити кінцеве кріплення, додаємо по 0,8 м до довжини стьожки. При похилому розташуванні стьожок за довжину приймають проекцію довжини стьожки на площину, нормальну до потоку +0,8 м.

Якщо дві стьожки або дроти поставлені одне за одним, то їхній спільний опір менший, ніж сума опорів кожного з них, узятото окремо.

На таблиці 6 подано зміну опорю залежно від розміру дротів та віддалі між їхніми осями (на таблиці дано вартості відношення їхнього спільного опорю до суми окремих).

Таблиця 6

Відносний опір двох спарованих круглих дротів.

Кут між потоком повітря та площиною дротів	Віддаль між центрами дротів у діаметрах:						
	1	2	3	3,5	4	5	6
0°	0,20	0,29	0,44	0,60	0,67	0,70	0,72
5°	0,29	0,38	0,44	0,67	0,70	0,74	0,75
10°	0,40	0,42	0,50	0,74	0,77	0,81	0,83
15°	0,49	0,55	0,65	0,80	0,83	0,88	0,92
20°	0,58	0,65	0,77	0,85	0,88	0,94	0,99

Щоб зважити кінцеві опори, на кожну пару круглих дротів додаємо по 1 м, а на кожну пару стьожок по 1,2 м. В похилому розташуванні беремо проекцію довжини на площину, нормальну до потоку +1 м або 1,2 м. Опір відносимо до площі міделя.

## РОЗДІЛ VI.

### ВИХРОВА ТЕОРІЯ КРИЛА КОНЕЧНОГО РОЗМАХУ

#### § 1. Вступ

Вивчаючи безконечно довге крило в плоско-рівнобіжному потокові, ми бачили, що таке крило від потоку зазнає тільки підйимальної сили, що її величина пропорційна до циркуляції навколо крила.

Якщо взяти елемент безконечно довгого крила завширшки  $dx$ , то підйимальна сила, що припадає на нього, подається формулою:

$$dP = \rho V_0 \Gamma dx. \quad (1)$$

Визначаючи циркуляцію  $\Gamma$  з умови кінченості швидкості в кутовій точці профілю, маємо для неї величину:

$$\Gamma = \pi V_0 t \sin \alpha_1, \quad (2)$$

де  $\alpha_1$  — кут атаки щодо першої осі профілю (тобто на пряму, якому відповідає підйимальна сила, що дорівнює нулеві),  $t$  — якась довжина, що характеризує профіль (і звичайно мало відрізняється від глибини профілю).<sup>1</sup> Тому, що застосовувані на практиці кути  $\alpha_1$  дуже малі, то формулу (2) можна замінити такою, простішою

$$\Gamma = \pi V_0 t \alpha_1, \quad (3)$$

так що

$$dP = \pi \rho V_0^2 t \alpha_1 dx, \quad (4)$$

при чому кут  $\alpha_1$  треба подати в радіанах.

У дослідах, де плоско-рівнобіжне обтікання крила здійснено з великим наближенням, виявлено, що ці формули досить добре погоджуються з дійсністю.

Правда, у зв'язку з в'язкістю повітря, якою, виводячи формулу (2), ми нехтували, наведені наслідки потребують двох поправок, а саме: для підйимальної сили в дійсності буде трохи менша величина, ніж та, що відповідає формулі (4), а для чолового опору буде величина зовсім мала, але все таки не нуль. Джерело обох відхилів від теорії — це тертя повітря об поверхню крила.

Чоловий опір, що припадає на елемент  $dx$  безконечно-довгого крила (так званий профільний опір), можна подати в формі:

$$dQ_p = C_{p\rho} V_0^2 t dx, \quad (5)$$

де  $C_p$  — якийсь сучинник, що його визначають тепер майже тільки дослідним шляхом.

<sup>1</sup> Див. додаток 3, приклад 2.

Для добрих профілів:

$$C_p \cong 0,004.$$

Формула (5) вносить першу поправку на поверхневе тертя у знайдений у нас раніше закон опору для безконечно-довгого крила.

Щоб внести другу поправку на поверхневе тертя крила, покладімо

$$\Gamma = kV_0 t a_1 \quad (6)$$

$$dP = k\rho V_0^2 t a_1 dx, \quad (7)$$

де  $k$  — якесь стале число, близьке до  $\pi$ , але завжди менше від нього. Це число залежить від профілю крила.<sup>1</sup>

Переходячи від плоско-рівнобіжних течій до обтікання реального крила, ми повинні зразу відзначити два важливі чинники, що їх потверджують усі експерименти; поперше — чоловий опір реального крила чимало перевищує ту величину, яку можна було б за формулою (5) розглядати, як наслідок поверхневого тертя; подруге, при рухові крила кінцевого розміру за ним утворюються вихри, що тягнуться від заднього окрайка крила назад, приблизно в формі плоскої смуги.

Не спиваючись тут на пояснюванні процесу утворювання вихрів позаду крила, зауважмо, що на вихротворення повинна витратитися якась енергія, а це значить, що при рухові крила повинен поставати опір, зв'язаний із зазначеним вихротворенням. Отже, наведені експериментальні факти між собою зв'язані: вихри, що супроводять крило, спричиняються (або індукують) до якогось чолового опору, що в зв'язку з цим має назву індуктивного опору.

Тому що індуктивний опір є головна частина чолового опору і тому що він, відмінно від профільного опору, чимало залежить від розмаху крила, то стає зрозумілим важливе значення теорії індуктивного опору<sup>2</sup> (або вихрової теорії крила) при проектуванні несних поверхень літака.

## § 2. Основні поняття

Перше ніж почати викладати основні припущення, що на них збудовано вихрову теорію крила, спинімось трохи на процесі утворення вихрової заслони, що супроводить крило в його рухові.

Покажімо, що для крила кінцевих розмірів існування такої вихрової заслони кінче впливає з існування підіймальної сили. І справді, якщо на крило впливає якась підіймальна сила, то тиск коло нижнього боку крила більший,



Рис. 102 а.

ніж тиск коло верхнього боку. Ця різниця тиску призводить до якоїсь течії, де повітря під крилом рухається від середини до країв, а над крилом від країв до середини (рис. 102 а). Цей рух зберігається також і після того як частки течива, що брали в ньому участь, залишають через основну течію крило.

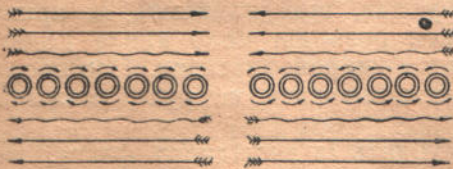


Рис. 102 б.

<sup>1</sup> Питання, як знайти число  $k$  для заданого профілю, розглянемо нижче (див. § 7 у цьому розділі).

<sup>2</sup> Ідеї, що лежать в основі цієї теорії, висловлювали Lanchester, М. Є. Жуковский і А. С. Чаплигін, але тільки Prandtl'еві та його школі пощастило розвинути струнку й послідовну вихрову теорію крила.

Отже, за рухомим крилом тягнеться якась поверхня, вздовж якої швидкість течива зазнає розриву (рис. 102b). Така поверхня розриву еквівалентна рядові рівнобіжних вихрів, що починаються на задньому краї крила й тягнуться назад у напрямі потоку (рис. 103).

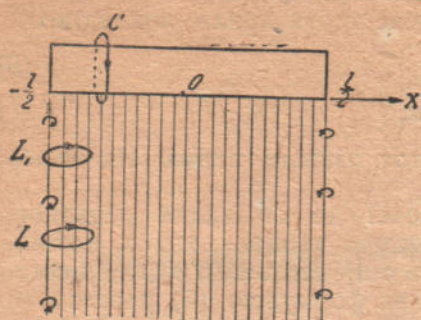


Рис. 103.

Контур  $L$  можна перемістити в положення  $L_1$ , а також у лінію  $C$ , що охоплює крило в перекрої  $x$ . При цьому переміщенні контура  $L$  в нові положення він не перетне крила, а також не перетне вихрів.

Тому на підставі Stokes'ової теореми циркуляція по цьому контурові повинна залишатися під час досліджуваного переміщення контура сталою.

Отже ми доходимо висновку, що в перекрої крила з абсцисою  $x$  буде та сама циркуляція  $\Gamma(x)$ , що й навколо вихрів, які впираються на ліву частину крила, обмежену абсцисою  $x$  справа.

Якщо ми візьмемо два перекрої крила  $M$  і  $M_1$  (рис. 104) з абсцисами  $x$  і  $x + dx$ , то циркуляції, що їм відповідають, будуть

$$\Gamma(x) \text{ і } \Gamma(x + dx) = \Gamma(x) + d\Gamma(x).$$

На підставі сказаного на елемент крила  $MM_1$  повинна спиратися вихрова смуга з циркуляцією  $d\Gamma(x)$ .

Отже, ми показали, що циркуляція навколо крила кінцевого розміру міняється, переходячи від одного перекрою до другого, і є, очевидно, якась функція від  $x$ . Разом з тим установлено зв'язок між циркуляцією навколо крила та інтенсивностями вихрів, що супроводять крило.

Щоб розв'язати завдання про величину сил, що впливають на крило кінцевого розміру, треба насамперед знати розподіл коло крила додаткових швидкостей, що зв'язані з існуванням вихрової заслони. При цьому точна математична теорія питання повинна зважити на рух і можливі зміни самої вихрової заслони.

Подавана нижче наближена теорія виходить із дослідного факту, що швидкість додаткової течії течива, утворювана вихровою заслоною, мала, порівнюючи з основною швидкістю потоку.

Тому вихрова теорія крила бере за основу такі положення:

- 1) можна знехтувати власний рух вихрової заслони;
- 2) вихрові лінії простолінійні й мають той самий напрям, що й швидкість потоку на безконечності перед крилом (якщо припустити, що крило в спокої, а потік набігає);

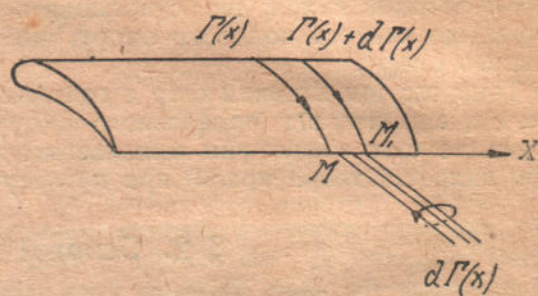


Рис. 104.



3) якщо позначити через  $v(x)$  числову вартість зв'язаної з існуванням вихрової заслони сторчової швидкості для якоїсь точки  $x$  розмаху крила, то відношення

$$\frac{v(x)}{V_0}$$

є мала величина, що її квадрат можна знехтувати.

Виберімо тепер для всього дальшого таку систему координат: вісь  $X$  розташуємо, як і вище, по задньому окрайкові крила й зліва направо, якщо дивитися ззаду; за початок координат візьмемо середину розмаху, за напрям осі  $Z$  візьмемо напрям потоку на безконечності перед крилом вісь  $Y$  спрямуємо вгору. Візьмімо тепер елемент крила, обмежений перекроями з абсцисами  $x$  і  $x+dx$ . Ширина цього елемента дорівнює, отже,  $dx$ . Нехай першу вісь цього елемента поставлено під кутом  $\alpha_1$  до напрямку руху крила.

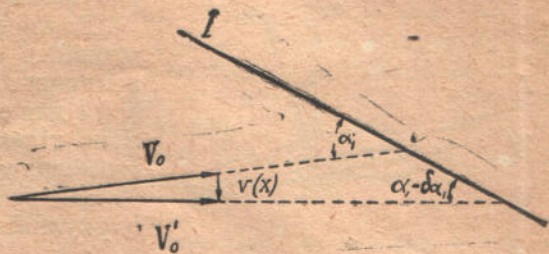


Рис. 105.

Кут  $\alpha_1$  назвімо геометричним кутом атаки.

У зв'язку з існуванням вихрової заслони під вибраним елементом крила буде якась швидкість  $v(x)$ , спрямована сторч униз. Цієї швидкості не було б, якби досліджуваний елемент крила належав до безконечно-довгого крила в плоскому потокові.

Складімо геометрично швидкість потоку на безконечності перед крилом із швидкістю  $v(x)$  (рис. 105). Нова швидкість утворюватиме з першою віссю профілю вже не кут  $\alpha_1$ , а менший кут

$$\alpha_1 - \Delta\alpha_1,$$

де

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha_1 = \frac{v(x)}{V_0}.$$

Вважаючи на малість відношення  $\frac{v(x)}{V_0}$ , можна прийняти  $\operatorname{tg} \Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_1$ ,

значить,

$$\Delta\alpha_1 = \frac{v(x)}{V_0} \quad (8)$$

через що новий кут атаки дорівнюватиме

$$\alpha_i = \alpha_1 - \frac{v(x)}{V_0} \quad (9)$$

Величина ж нової швидкості дорівнюватиме

$$V_0' = \sqrt{V_0^2 + [v(x)]^2} = V_0 \sqrt{1 + \left[ \frac{v(x)}{V_0} \right]^2},$$

але тому, що квадрат відношення  $\frac{v(x)}{V_0}$ , за вищесказаним, ми нехтуємо, то й різницю між величинами нової та старої швидкості можна знехтувати (залишається тільки різниця в напрямках).

Уявімо собі тепер, що наш елемент крила належить не до кінцевого крила, а до безконечно-довгого, але поставленого не під кутом  $\alpha_1$ , а під

кутом  $\alpha_i = \alpha_1 - \frac{v(x)}{V_0}$ , при чому швидкість на безконечності має попередню величину. Легко бачити, що ці елементи будуть в однаковому положенні щодо обтікання. Той ефект, що його дає для нашого елемента вихрова заслона, в уявленого елемента вже зважено через повертання на відповідний кут усього потоку.

Можна сказати, що в випадку кінцевого крила є деякий скіс потоку, зв'язаний з існуванням вихрової заслони; інакше кажучи, якщо елемент кінцевого крила поставлено під геометричним кутом атаки  $\alpha_1$ , то дійсний (або динамічний) кут атаки буде не  $\alpha_1$ , а  $\alpha_i$ , що визначається формулою (9).

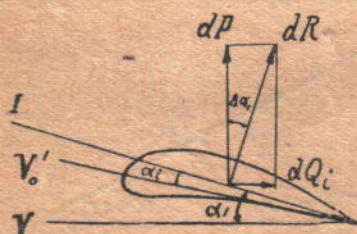


Рис. 106.

Дальше положення вихрової теорії є можливість застосувати до елемента крила кінцевого розмаху основні формули, подані в § 1 для елемента безконечно-довгого крила. Ясно тільки, що скрізь доведеться брати не геометричний, а дійсний кут атаки.

Застосовуючи формули § 1, знайдемо, що циркуляція навколо елемента дорівнює

$$\Gamma(x) = k V_0 t(x) \left[ \alpha_1 - \frac{v(x)}{V_0} \right].$$

При цьому замість  $t$  у формулі (3) ми пишемо тут  $t(x)$ , бо глибина крила кінцевого розмаху, загалом кажучи, різна в різних перерізах.

Сила опору буде спрямована нормально вже не до напрямку швидкості крила, а до напрямку швидкості  $V_0'$  допоміжної течії, з якою ми порівнюємо обтікання нашого елемента. Називаючи цю силу  $dR$ :

$$dR = \rho \Gamma(x) V_0 dx \quad (11)$$

і пам'ятаючи, що ця сила вже не нормальна до напрямку руху крила, знаходимо, що вона дає не тільки підймальну силу, а й чоловий опір (рис. 106). Позначаючи підймальну силу через  $dP$ , а чоловий опір через  $dQ$  (іноді його позначають через  $dQ_i$ , щоб підкреслити, що це є індуктивний опір, який різниться від повного опору, що дорівнює  $dQ = dQ_i + dQ_p$ ) матимемо:

$$dP = \rho \Gamma(x) V_0 dx \cos(\Delta\alpha_1),$$

$$dQ = \rho \Gamma(x) V_0 dx \sin(\Delta\alpha_1).$$

Через те, що  $\Delta\alpha_1$  мале, можемо прийняти, що

$$\cos(\Delta\alpha_1) = 1, \quad \sin(\Delta\alpha_1) = \Delta\alpha_1.$$

Тому остаточні формули мають вигляд:

$$dP = \rho \Gamma(x) V_0 dx, \quad (12)$$

$$dQ = \rho \Gamma(x) V_0 \Delta\alpha_1 dx = \rho \Gamma(x) v(x) dx. \quad (13)$$

Щоб визначити повну підймальну силу й повний індуктивний опір, треба просумувати ці вирази по всьому розмахові крила. Якщо позначити розмах через  $l$ , то це приводить до наслідку:

$$P = \rho V_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(x) dx, \quad (14)$$

$$Q = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(x) v(x) dx. \quad (15)$$

Ці формули є основні для всього дальшого викладу. Друга з них показує, що нам треба знайти насамперед вираз для  $v(x)$  через  $\Gamma(x)$ , бо, як ми вже зазначили, додаткову швидкість  $v(x)$  певно обумовлює розподіл циркуляції по розмахові. Це питання ми розглянемо в дальшому параграфі.

### § 3. Визначення додаткової сторчової швидкості при заданому розподілі циркуляції

Візьмімо два перекрої крила, яким відповідають абсциси  $\xi$  і  $\xi + d\xi$ . Нехай циркуляція навколо крила в цих перекроях має вартості  $\Gamma(\xi)$  і  $\Gamma(\xi) + d\Gamma(\xi)$ , так що на виділений елемент крила спирається вихрова смуга завширшки  $d\xi$  з циркуляцією  $d\Gamma(\xi)$ . А що  $d\xi$  досить мала величина, то можемо цю вихрову смугу розглядати, як простолінійний вихровий шнур.

Візьмімо якунебудь точку  $M$  розмаху крила з абсцисою  $x$  і знайдемо ту швидкість безпосередньо під цією точкою крила, яка існує через наявність виділеної вихрової смужки. При цьому будемо пам'ятати, що нас цікавить тільки величина сторчової проекції швидкості.

Пригадаймо наслідки § 15 розділу I.

Якщо вихрова смуга тяглася б на безконечність в обидва боки, то для швидкості, що нас цікавить, був би вираз:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\Gamma(\xi)}{x - \xi} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{x - \xi},$$

але в нас вихор тягнеться на безконечність тільки в один бік щодо нормалі з точки  $M$  на напрям вихру. Тому, визначаючи швидкість інтегруванням виразу (21) в § 15 розділу I, ми матимемо тільки половину допіру оце наведеного виразу.

Отже швидкість у точці  $M$ , що залежить від виділеної вихрової смуги, дорівнює

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{x - \xi}.$$

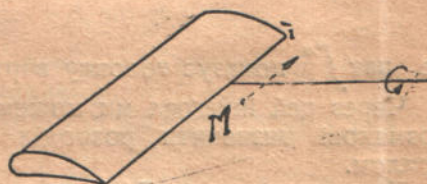


Рис. 107.

Зауважмо, що ця швидкість спрямована сторч униз і дає, значить, точно проекцію, що нас цікавить. Звернімо тепер увагу на той випадок, коли точка  $M$  лежить безпосередньо під виділеним елементом крила. Тоді, як виходить з § 15 розділу I, швидкість у точці  $M$  буде не сторчова, а позема (рис. 107) і, значить, її проекція на сторчовий напрям дорівнюватиме нулеві. Щоб мати повну сторчову швидкість у точці  $M$ , треба все крило розбити на елементи й зважити ролю всіх вихрових смужок. На підставі тільки но зробленого зауваження вихрова смужка, що лежить безпосередньо над точкою  $M$ , не дає сторчової проекції. Тому цю смужку, визначаючи повну швидкість, ми повинні викинути.

Для цього, взявши якесь досить мале додатне число  $\epsilon$ , виділімо смужку, якій відповідають абсциси  $x - \epsilon$  і  $x + \epsilon$ .

Частину розмаху, що залишається, поділімо на елементи, для кожного з них складімо вираз (16) і просумуймо по всіх цих елементах. Так ми прийдемо для сторчової швидкості в точці  $M$  до виразу:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{x-\epsilon} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{x - \xi} + \frac{1}{4\pi} \int_{x+\epsilon}^{\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{x - \xi}$$

В дійсності не впливає на швидкість у точці  $M$  тільки вихор, що лежить безпосередньо над нею; тому в цьому виразі ми повинні вважати  $\varepsilon$  за безконечно малу величину й перейти до границі  $\lim \varepsilon = 0$ .

Так, для сторчової швидкості  $v(x)$  у точці  $M$  матимемо остаточний вираз:

$$v(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{\frac{l}{2}}^{x-\varepsilon} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{x-\xi} + \int_{x+\varepsilon}^{\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{x-\xi} \right\} \quad (17)$$

Цей вираз дорівнював би інтегралові

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{x-\xi}, \quad (18)$$

якби цей інтеграл існував, але інтеграл (18) не існує, бо порядок безконечності підінтегральної функції в точці  $\xi = x$  дорівнює 1.

Вираз же (17) має цілком певну кінцеву вартість<sup>1</sup>; за Cauchy його звуть головною вартістю інтеграла (18). Так ми приходимо до формули

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \overset{*}{d\Gamma} \frac{d\xi}{x-\xi}, \quad (19)$$

де знак  $\overset{*}{\int}$  показує головну вартість інтеграла (18).

Через цей інтеграл ми можемо при певному розподілі циркуляції по розмахові визначити розподіл додаткових сторчових швидкостей під крилом.

Якщо циркуляція  $\Gamma(x)$  подається за допомогою елементарних функцій, то, підставляючи її у вираз (19) і знайшовши головну вартість інтеграла, ми зразу визначимо сторчову швидкість. Зауважмо, проте, що функції, які трапляються на практиці, рідко визначаються простими виразами, а багато частіше їх задають таблицями або графічно. В цих випадках

<sup>1</sup> Щоб показати існування границі

$$H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) \frac{dx}{x-c} \right\},$$

покладімо

$$f(x) = f(c) + (x-c)\varphi(x).$$

Тоді

$$\begin{aligned} H &= f(c) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} \varphi(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b \varphi(x) dx \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(c) \left\{ \ln(c-x) \Big|_a^{c-\varepsilon} + \ln(x-c) \Big|_{c+\varepsilon}^b \right\} + \int_a^b \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(c) \ln \frac{\varepsilon(b-c)}{(c-a) \cdot \varepsilon} + \int_a^b \varphi(x) dx = f(c) \ln \frac{b-c}{c-a} + \int_a^b \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

доводиться користатися з дуже поширеного в механіці та фізиці способу розкладати такі функції в тригонометричні ряди.

Не маючи змоги докладніше спинитися на цьому питанні<sup>1</sup>, ми скажемо тільки про звичайний спосіб, застосовуваний у таких випадках, щоб обчислити сучинники розкладу функції в тригонометричний ряд.

Пам'ятаймо, що на кінцях крила циркуляція завжди дорівнює нулеві, тобто

$$\Gamma\left(-\frac{l}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{l}{2}\right) = 0.$$

Це безпосередньо виходить із того, що було сказано в § 2 про зв'язок між циркуляцією навколо крила в перекрої  $x$  та інтенсивністю вихрів, що спираються на частину крила, обмежену з одного боку цим перекроєм. Далі з симетрії виходить, що в перекроях  $x$  та  $-x$  циркуляція однакова, тобто

$$\Gamma(x) = \Gamma(-x). \quad (20)$$

Насамперед зробимо перетворення змінних, покладаючи

$$x = \frac{l}{2} \cos \vartheta.$$

Через те, що  $x$  міняється від  $-\frac{l}{2}$  до  $\frac{l}{2}$ , то  $\vartheta$  мінятиметься від  $\pi$  до  $0$ .

Після цього перетворення  $\Gamma(x)$  буде вже якась функція від  $\vartheta$ ; її (як це виходить із теорії тригонометричних рядів), можна подати в формі:

$$\Gamma(x) = A_1 \sin \vartheta + A_2 \sin 2\vartheta + A_3 \sin 3\vartheta + \dots + A_n \sin n\vartheta + \dots, \quad (21)$$

де  $A_1, A_2, A_3, \dots$  якісь сучинники (далі ми покажемо, як знайти ці сучинники, якщо  $\Gamma(x)$  задано графічно або таблицею).

Вираз (21) є розклад циркуляції в тригонометричний ряд, або в ряд Fourier.

Обриваючи першу частину на якомусь члені, ми матимемо наближене представлення циркуляції за допомогою тригонометричних функцій. На практиці досить брати 7—9 членів цього розкладу.

Насамперед використаємо властивість (20). Вона показує, що в розкладі (21) повинні дорівнювати нулеві всі члени з паристими індексами. І справді, якщо

$$x = \frac{l}{2} \cos \vartheta,$$

то

$$-x = \frac{l}{2} \cos(\pi - \vartheta).$$

Тому функція  $\Gamma(x)$  не повинна мінятися при заміні  $\vartheta$  на  $\pi - \vartheta$ , тобто

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= A_1 \sin(\pi - \vartheta) + A_2 \sin 2(\pi - \vartheta) + A_3 \sin 3(\pi - \vartheta) + \dots = \\ &= A_1 \sin \vartheta - A_2 \sin 2\vartheta + A_3 \sin 3\vartheta - \dots \end{aligned}$$

Складаючи цей вираз із виразом (21), знайдемо, що

$$2\Gamma(x) = 2A_1 \sin \vartheta + 2A_3 \sin 3\vartheta + 2A_5 \sin 5\vartheta + \dots$$

звідки

$$\Gamma(x) = A_1 \sin \vartheta + A_3 \sin 3\vartheta + A_5 \sin 5\vartheta + \dots \quad (22)$$

<sup>1</sup> Див. Я. Безікович і А. Фрідман, „Приближенные вычисления“, вид. 2, 1930, стор. 152—165.

Спинімоєь тепер на іншому важливому питанні: нехай циркуляція задана розкладом (22), де сучинники  $A_1, A_3, \dots$  відомі; треба знайти функцію  $v(x)$ .

Покладаючи

$$\xi = \frac{l}{2} \cos \varphi$$

і зберігаючи позначення

$$x = \frac{l}{2} \cos \vartheta$$

знайдемо, що

$$\Gamma(\xi) = A_1 \sin \varphi + A_3 \sin 3\varphi + A_5 \sin 5\varphi + A_7 \sin 7\varphi + \dots,$$

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi = d\Gamma(\xi) = \{ A_1 \cos \varphi + 3 A_3 \cos 3\varphi + 5 A_5 \cos 5\varphi + 7 A_7 \cos 7\varphi + \dots \} d\varphi,$$

$$\frac{1}{x - \xi} = \frac{2}{l} \frac{1}{\cos \vartheta - \cos \varphi},$$

так що на підставі формули (19)

$$v(x) = \frac{-1}{2\pi l} \left\{ A_1 \int_0^\pi \frac{\cos \varphi \cdot d\varphi}{\cos \vartheta - \cos \varphi} + 3 A_3 \int_0^\pi \frac{\cos 3\varphi \cdot d\varphi}{\cos \vartheta - \cos \varphi} + 5 A_5 \int_0^\pi \frac{\cos 5\varphi \cdot d\varphi}{\cos \vartheta - \cos \varphi} + \dots \right\}.$$

Обчислімо тому вирази

$$I_k = \int_0^\pi \frac{\cos k\varphi \cdot d\varphi}{\cos \varphi - \cos \vartheta}.$$

Подаймо  $I_k$  у формі

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^\pi \frac{\cos k\vartheta \cdot d\varphi}{\cos \varphi - \cos \vartheta} + \int_0^\pi \frac{\cos k\varphi - \cos k\vartheta}{\cos \varphi - \cos \vartheta} d\varphi = \\ &= \cos k\vartheta \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\cos \varphi - \cos \vartheta} + \int_0^\pi \frac{\cos k\vartheta - \cos k\varphi}{\cos \vartheta - \cos \varphi} d\varphi, \end{aligned}$$

де другий інтеграл беруть уже в звичайному розумінні, а не тільки як головну вартість, бо в ньому підінтегральна функція на безконечність не обертається.

Знайдімо перший член написаної формули. Для цього скористаймося з легко перевірюваного співвідношення

$$\frac{d}{d\varphi} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \ln \frac{\sin \frac{\varphi - \vartheta}{2}}{\sin \frac{\varphi + \vartheta}{2}} \cdot C \right\} = \frac{1}{\cos \vartheta - \cos \varphi},$$

де  $C$  — довільна стала. Із нього випливає, що<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\cos \vartheta - \cos \varphi} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_0^{\vartheta - \varepsilon} \frac{d\varphi}{\cos \vartheta - \cos \varphi} + \int_{\vartheta + \varepsilon}^{\pi} \frac{d\varphi}{\cos \vartheta - \cos \varphi} \right] = \\ &= \frac{1}{\sin \vartheta} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \frac{\sin \frac{\vartheta - \varphi}{2}}{\sin \frac{\vartheta + \varphi}{2}} \Big|_0^{\vartheta - \varepsilon} + \ln \frac{\sin \frac{\varphi - \vartheta}{2}}{\sin \frac{\varphi + \vartheta}{2}} \Big|_{\vartheta + \varepsilon}^{\pi} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sin \vartheta} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\sin \left( \vartheta - \frac{\varepsilon}{2} \right)} + \ln \frac{\sin \left( \vartheta + \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sin \vartheta} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\sin \left( \vartheta + \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \left( \vartheta - \frac{\varepsilon}{2} \right)} = 0. \end{aligned}$$

Отже,

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos k\vartheta - \cos k\varphi}{\cos \vartheta - \cos \varphi} d\varphi, \quad (24)$$

щодо цього інтегралу, то він дорівнює

$$I_k = \pi \frac{\sin k\vartheta}{\sin \vartheta}. \quad (25)$$

Справді, коли  $k=1$

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\cos \vartheta - \cos \varphi}{\cos \vartheta - \cos \varphi} d\varphi = \int_0^{\pi} d\varphi = \pi = \pi \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta};$$

коли  $k=2$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\vartheta - \cos 2\varphi}{\cos \vartheta - \cos \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \vartheta - \cos^2 \varphi}{\cos \vartheta - \cos \varphi} d\varphi = \\ &= 2 \int_0^{\pi} (\cos \vartheta + \cos \varphi) d\varphi = 2\pi \cos \vartheta + 2 \sin \varphi \Big|_0^{\pi} = 2\pi \cos \vartheta = \pi \frac{\sin 2\vartheta}{\sin \vartheta}. \end{aligned}$$

Розкладаючи  $\cos k\vartheta$  і  $\cos k\varphi$  за степенями  $\cos \vartheta$  і  $\cos \varphi$  і ділячи різницю  $\cos k\vartheta - \cos k\varphi$  на різницю  $\cos \vartheta - \cos \varphi$ , можна перекоонатися в правдивості формули (25) при будь-якому цілому  $k$ .

Отже, ми прийшли до такого важливого наслідку: якщо циркуляція по розмахові крила розподілена за законом

$$\Gamma(x) = A_1 \sin \vartheta + A_3 \sin 3\vartheta + A_5 \sin 5\vartheta + A_7 \sin 7\vartheta + \dots \quad (22)$$

де

$$x = \frac{l}{2} \cos \vartheta,$$

<sup>1</sup> У першому з інтегралів правої частини за сталою  $C$  можна взяти  $-1$ , а в другому  $+1$ .

то величина сторчової швидкості  $v(x)$  подається у формі

$$v(x) = \frac{1}{2l \sin \vartheta} \left\{ A_1 \sin \vartheta + 3 A_3 \sin 3\vartheta + 5 A_5 \sin 5\vartheta + 7 A_7 \sin 7\vartheta + \dots \right\} \quad (26)$$

Такий наслідок дозволяє визначити сторчову додаткову швидкість, якщо циркуляцію задано розкладом у тригонометричний ряд.

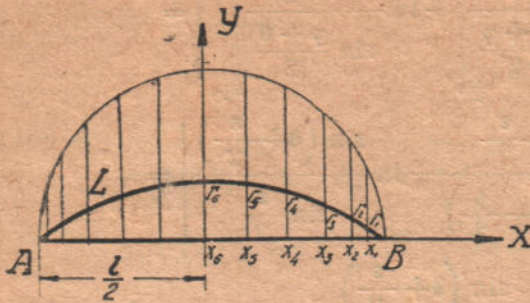


Рис. 108.

що крива  $L$ , симетрична на підставі (20) щодо осі  $Y$ , є закон розподілу циркуляції по розмахові. Із точки  $O$ , як із центру, опишемо обвід кола радіусом  $\frac{l}{2}$  і розділімо верхню його половину на 12 частин (можна було б ділити на більше число частин, щоб мати кращі наближення, але й ділення на 12 частин дає задовільні наслідки). Спускаючи з точок ділення нормалі на вісь  $X$ , матимемо ряд точок:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{l}{2} \cos 15^\circ, & x_2 &= \frac{l}{2} \cos 30^\circ, & x_3 &= \frac{l}{2} \cos 45^\circ, \\ x_4 &= \frac{l}{2} \cos 60^\circ, & x_5 &= \frac{l}{2} \cos 75^\circ, & x_6 &= \frac{l}{2} \cos 90^\circ. \end{aligned}$$

Знайдемо вартість циркуляції в цих точках безпосередньо з рисунку (або за допомогою таблиці) і позначмо їх відповідно через

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6.$$

Через ці величини сучинники  $A_1, A_2, \dots, A_{11}$  визначаються такими формулами:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} 3A_1 &= \Gamma_1 \sin 15^\circ + \Gamma_2 \sin 30^\circ + \Gamma_3 \sin 45^\circ + \Gamma_4 \sin 60^\circ + \Gamma_5 \sin 75^\circ + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Gamma_6 \sin 90^\circ; \\ 3A_3 &= \Gamma_1 \sin 45^\circ + \Gamma_2 \sin 90^\circ + \Gamma_3 \sin 45^\circ - \Gamma_5 \sin 45^\circ - \frac{1}{2} \Gamma_6 \sin 90^\circ, \\ 3A_5 &= \Gamma_1 \sin 75^\circ + \Gamma_2 \sin 30^\circ - \Gamma_3 \sin 45^\circ - \Gamma_4 \sin 60^\circ + \Gamma_5 \sin 15^\circ + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Gamma_6 \sin 90^\circ; \\ 3A_7 &= \Gamma_1 \sin 75^\circ - \Gamma_2 \sin 30^\circ - \Gamma_3 \sin 45^\circ + \Gamma_4 \sin 60^\circ + \Gamma_5 \sin 15^\circ - \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma_6 \sin 90^\circ; \end{aligned} \quad (27)$$

<sup>1</sup> Див. зазначену раніш книжку Я. Безіковича й А. Фрідмана.



$$3 A_9 = \Gamma_1 \sin 45^\circ - \Gamma_2 \sin 90^\circ + \Gamma_3 \sin 45^\circ - \Gamma_5 \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \Gamma_6 \sin 90^\circ,$$

$$3 A_{11} = \Gamma_1 \sin 15^\circ - \Gamma_2 \sin 30^\circ + \Gamma_3 \sin 45^\circ - \Gamma_4 \sin 60^\circ + \Gamma_5 \sin 75^\circ -$$

$$- \frac{1}{2} \Gamma_6 \sin 90^\circ.$$

Уважно дослідивши ці формули, бачимо, що обчислити зручно за такою схемою:

$\frac{1}{3} \sin 15^\circ = 0,0863$	$\Gamma_1$				$\Gamma_5$	
$\frac{1}{3} \sin 30^\circ = 0,1667$		$\Gamma_2$				$\Gamma_2$
$\frac{1}{3} \sin 45^\circ = 0,2357$	$\Gamma_3$		$\Gamma_1 + \Gamma_3 - \Gamma_5$		$-\Gamma_3$	
$\frac{1}{3} \sin 60^\circ = 0,2887$		$\Gamma_4$				$-\Gamma_4$
$\frac{1}{3} \sin 75^\circ = 0,3220$	$\Gamma_5$				$\Gamma_1$	
$\frac{1}{3} \sin 90^\circ = 0,3333$		$\frac{1}{2} \Gamma_6$		$\Gamma_2 - \frac{1}{2} \Gamma_6$		$\frac{1}{2} \Gamma_6$
	I	II	I	II	I	II
Суми I+II	$A_1$		$A_3$		$A_5$	
Різниця I-II	$A_{11}$		$A_9$		$A_7$	

Визначивши сучинники  $A_1, A_3, \dots$ , користуємось потім, як уже говорилося раніш, формулою (26), що дає величину сторчової швидкості.

#### § 4. Мунк'ова задача

Пригадаймо формули (14), (15) для підйимальної сили й індуктивного опору:

$$P = \rho V_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(x) dx \quad (14)$$

$$Q = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(x) v(x) dx, \quad (15)$$

що ми їх мали в § 2 цього розділу.

Нехай розподіл циркуляції  $\Gamma$  по розмахові крила дає розклад:

$$\Gamma(x) = A_1 \sin \vartheta + A_3 \sin 3 \vartheta + A_5 \sin 5 \vartheta + \dots \quad (22)$$

де

$$x = \frac{l}{2} \cos \vartheta.$$

Тоді для сторчової швидкості  $v(x)$  матимемо розклад:

$$v(x) = \frac{1}{2l \sin \vartheta} \{A_1 \sin \vartheta + 3A_3 \sin 3\vartheta + 5A_5 \sin 5\vartheta + \dots\}. \quad (26)$$

Щоб обчислити підймальну силу й індуктивний опір, залишається підставити наведені вирази для  $\Gamma(x)$  і  $v(x)$  у формули (14) і (15) і зробити інтегрування.

Щоб полегшити інтегрування, зазначмо, що

$$\int_0^{\pi} \sin k\vartheta \cdot \sin m\vartheta \cdot d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(m-k)\vartheta - \cos(m+k)\vartheta) d\vartheta.$$

Тому при  $k \neq m$

$$\int_0^{\pi} \sin k\vartheta \cdot \sin m\vartheta \cdot d\vartheta = 0 \quad (28)$$

і при  $k = m$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 k\vartheta \cdot d\vartheta = \frac{\pi}{2}. \quad (29)$$

Користуючись із формул (14) і (15), легко знайдемо, що

$$P = \rho V_0 \frac{l}{2} \int_0^{\pi} \{A_1 \sin \vartheta + A_3 \sin 3\vartheta + \dots\} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{\pi}{4} \rho V_0 l A_1 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} Q &= \rho \frac{l}{2} \frac{1}{2l_0} \int_0^{\pi} \{A_1 \sin \vartheta + A_3 \sin 3\vartheta + \dots\} \{A_1 \sin \vartheta + 3A_3 \sin 3\vartheta + \dots\} d\vartheta = \\ &= \frac{\pi \rho}{8} \{A_1^2 + 3A_3^2 + 5A_5^2 + \dots\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Справді, помножуючи вираз  $A_1 \sin \vartheta + 3A_3 \sin 3\vartheta + \dots$  на вираз  $A_1 \sin \vartheta + A_3 \sin 3\vartheta + \dots$ , матимемо члени виду  $3A_1 A_3 \sin \vartheta \cdot \sin 3\vartheta, \dots$  інтеграл від яких на підставі (28) дорівнює нулеві й член

$$A_1^2 \sin^2 \vartheta + 3A_3^2 \sin^2 3\vartheta + 5A_5^2 \sin^2 5\vartheta + \dots,$$

що після інтегрування дає

$$\frac{\pi}{2} \{A_1^2 + 3A_3^2 + 5A_5^2 + \dots\}.$$

З цього видно, що, знаючи розклад циркуляції в тригонометричний ряд, можна визначити підймальну силу за формулою (30) і індуктивний опір за формулою (31).

Визначаючи  $A_1$  через  $P$  формулою (30), можемо подати індуктивний опір  $Q$  у формі:

$$Q = \frac{2}{\pi} \frac{P^2}{\rho l^2 V_0^2} + \frac{\pi \rho}{8} (3A_3^2 + 5A_5^2 + \dots),$$

звідки

$$Q - \frac{2}{\pi} \frac{P^2}{\rho l^2 V_0^2} = \frac{\pi \rho}{8} (3A_3^2 + 5A_5^2 + \dots).$$

А що права частина цієї рівності додатна при будь-яких вартостях сучинників  $A_3, A_5, \dots$ , то

$$Q \geq \frac{2}{\pi} \frac{P^2}{\rho l^2 V_0^2}, \quad (32)$$

при чому знак рівності в цій формулі буває тільки тоді, коли всі сучинники  $A_3, A_5, A_7 \dots$  дорівнюють нулеві. Звідси маємо такий дуже важливий наслідок: при заданій підймальній силі  $P$  крило має найменший індуктивний опір тоді, коли закон розподілу циркуляції вздовж розмаху крила дається формулою

$$\Gamma = \Gamma(x) = A_1 \sin \vartheta, \quad (33)$$

де

$$x = \frac{l}{2} \cos \vartheta.$$

Виключаючи з цих співвідношень допоміжний кут  $\vartheta$ , матимемо:

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{\Gamma^2}{A_1^2} = 1. \quad (34)$$

Це співвідношення показує, що найменший індуктивний опір при даній підймальній силі буде тоді, коли циркуляція розподілена вздовж розмаху крила за законом еліпси (рис. 109).

Цей наслідок має назву Munk'ової теореми іменем американського вченого, що винайшов його.<sup>1</sup>

Наведемо ряд формул, що стосуються до еліптичного розподілу циркуляції: із (34) маємо, позначаючи  $A_1$  через  $\Gamma_0$ :

$$\Gamma(x) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}}, \quad (35)$$

підймальна сила дорівнює

$$P = \frac{\pi}{4} \rho V_0 l \Gamma_0, \quad (36)$$

індуктивний опір дорівнює<sup>2</sup>

$$Q_i = \frac{2}{\pi} \frac{P^2}{\rho l^2 V_0^2}, \quad (37)$$

додаткова сторчова швидкість під крилом дорівнює

$$v(x) = \frac{\Gamma_0}{2l} = \frac{2P}{\pi \rho V_0 l^2}. \quad (38)$$

Звернімо увагу на те, що при еліптичному розподілі циркуляції вздовж розмаху додаткова сторчова швидкість під крилом стала (те саме, очевидно, стосується й до скосу потоку).

## § 5. Розподіл циркуляції навколо заданого крила

У цьому параграфі ми будемо розв'язувати таку основну при проектуванні крила проблему: дано крило, знайти закон розподілу циркуляції вздовж його розмаху.

Щоб не ускладняти обчислень, ми розглянемо той випадок, коли профілі крила по всіх перекроях подібні й усі елементи крила мають однаковий геометричний кут атаки (тобто крило не перекручене).

Тому що крило задано, то форма його в пляні нам відома і тому

<sup>1</sup> Munk, Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges (Dissertation, Göttingen, 1919.

<sup>2</sup> Тут замість  $Q$  пишемо  $Q_i$ .

можна вважати за відому глибину крила в кожному перекрої, тобто глибину в функції від  $x$ :

$$t = t(x).$$

Так само можна вважати за відоме положення першої осі профілю, відносно якої ми відлічуємо геометричний кут атаки крила. Візьмімо якийсь елемент нашого крила. Якби цей елемент був частиною безконечно-довгого крила, як зазначалося в § 1, циркуляція навколо цього елемента мала б вираз

$$\Gamma = kt\alpha_1 V_0.$$

При цьому величина  $k$ , що характеризує профіль, в ідеальному течиві точно дорівнювала б  $\pi$ , але в реальних течивах вона завжди менша від  $\pi$  і залежить від профілю (але не залежить від кута атаки).

Тому, припускаючи, що крило задано, ми можемо вважати  $k$  за відоме число. Далі ми спинімося на питанні про фактичне визначення  $k$  для кожного профілю. Там таки ми побачимо, яку роль відіграє при визначенні  $k$  експеримент.

Отже, в цьому параграфі ми вважатимемо число  $k$  за задане.

Уже в § 2 було знайдено основне рівняння:

$$\Gamma(x) = kt(x)V_0 \left[ \alpha_1 - \frac{v(x)}{V_0} \right], \quad (39)$$

що за його допомогою знаходимо закон розподілу циркуляції навколо крила при кожному куті атаки  $\alpha_1$ . Наше завдання — розв'язати це рівняння. Точно розв'язати його не можна, але в цьому й нема жадної потреби. Ми дамо наближену методу розв'язувати це рівняння за Trefftz'ом.<sup>1</sup>

Для цього нагадаймо застосований уже в нас розклад циркуляції в тригонометричний ряд:

$$\Gamma(x) = A_1 \sin \vartheta + A_3 \sin 3\vartheta + A_5 \sin 5\vartheta + A_7 \sin 7\vartheta, \quad (22)$$

де

$$x = \frac{l}{2} \cos \vartheta.$$

Як ми бачили, з цієї формули випливає, що

$$v(x) = \frac{1}{2l \sin \vartheta} \left\{ A_1 \sin \vartheta + 3A_3 \sin 3\vartheta + 5A_5 \sin 5\vartheta + 7A_7 \sin 7\vartheta \right\}.$$

Тому рівняння (39) матиме форму:

$$\begin{aligned} & A_1 \sin 3\vartheta + A_3 \sin 3\vartheta + A_5 \sin 5\vartheta + A_7 \sin 7\vartheta = \\ & = kt(x)V_0\alpha_1 - \frac{kt(x)}{2l \sin \vartheta} \left[ A_1 \sin \vartheta + 3A_3 \sin 3\vartheta + 5A_5 \sin 5\vartheta + 7A_7 \sin 7\vartheta \right]. \quad (40) \end{aligned}$$

Взявши в розкладі функції  $\Gamma(x)$  тільки чотири члени, ми, розуміється, не розраховуємо на те, що рівняння (40) можна зробити тотожністю, вивабравши відповідно сучинники  $A_1, A_3, A_5, A_7$ .

Для цього треба було б, взагалі кажучи, в розкладі функції  $\Gamma(x)$  взяти безконечно багато членів. Ми можемо розпорядитися сучинниками  $A_1, A_3, A_5$  і  $A_7$  тільки так, щоб рівність (40) була точна тільки в кількох перекроях нашого крила.

При цьому чим більше членів візьмемо в розкладі функції  $\Gamma(x)$ , тим у більшому числі перекроїв розмаху можна зробити рівність (40) точною, і тим точніше буде наше наближення. Досвід показав, що досить брати,

<sup>1</sup> Trefftz, Prandtl'sche Tragflächen- und Propeller Theorie (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 1, H. 3, 1921, S. 206 — 218).

як ми й зробили, за Trefftz'ом тільки 4 члени. Як перекрої, де рівність (40) повинна бути точна, виберемо ті, для яких

$$\vartheta = 22^\circ 30'; 45^\circ; 67^\circ 30'; 90^\circ. \quad (41_1)$$

Тоді на підставі симетрії рівність (40) справджуватиметься також і в тих перекроях, для яких

$$\vartheta = 112^\circ 30'; 135^\circ; 157^\circ 30'.$$

Підставляючи ці вартості в рівняння (40), ми повинні й функцію  $t(x)$  обчислити в відповідних точках, тобто при

$$x = \frac{l}{2} \cos 22^\circ 30'; \frac{l}{2} \cos 45^\circ; \frac{l}{2} \cos 67^\circ 30'; \frac{l}{2} \cos 90^\circ. \quad (41)$$

Щоб полегшити обчислення, пригадаймо, що точки (41) можна мати, проектуючи вершки правильного багатокутника на діаметр, як показує рис. 110.

Умовно, як це зроблено на рисунку, позначати через  $t_1, t_2, t_3, t_4$  глибину крила в перекроях, яким відповідають абсиси (41). Щоб полегшити обчислення, введемо такі позначення:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2lk \alpha_1 V_0 B_1, \\ A_3 &= 2lk \alpha_1 V_0 B_3, \\ A_5 &= 2lk \alpha_1 V_0 B_5, \\ A_7 &= 2lk \alpha_1 V_0 B_7; \end{aligned} \quad (42)$$

$$\frac{t(x)}{l} = \mu(x); \quad (43)$$

$$\mu(x_1) = \mu_1; \mu(x_2) = \mu_2; \mu(x_3) = \mu_3; \mu(x_4) = \mu_4. \quad (44)$$

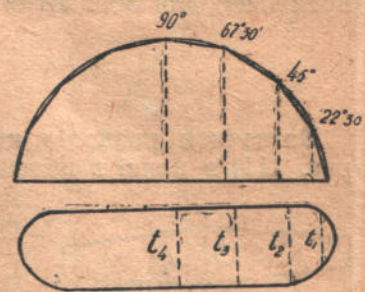


Рис. 110.

Тоді наше рівняння матиме форму:

$$\begin{aligned} & B_1 \sin \vartheta + B_3 \sin 3\vartheta + B_5 \sin 5\vartheta + B_7 \sin 7\vartheta = \\ & = \frac{1}{2} \mu(x) - \frac{k\mu(x)}{2 \sin \vartheta} \left[ B_1 \sin \vartheta + 3B_3 \sin 3\vartheta + 5B_5 \sin 5\vartheta + 7B_7 \sin 7\vartheta \right] \end{aligned} \quad (45)$$

або

$$\begin{aligned} & B_1 (1 - \cos 2\vartheta) + B_3 (\cos 2\vartheta - \cos 4\vartheta) + B_5 (\cos 4\vartheta - \cos 6\vartheta) + \\ & + B_7 (\cos 6\vartheta - \cos 8\vartheta) = \mu(x) \cdot \sin \vartheta - k\mu(x) [B_1 \sin \vartheta + 3B_3 \sin 3\vartheta + 5B_5 \sin 5\vartheta + 7B_7 \sin 7\vartheta]. \end{aligned}$$

Підставляючи замість  $\vartheta$  вартості (41), матимемо остаточно таку систему для визначення невідомих сучинників  $B_1, B_3, B_5, B_7$ :

$$\begin{aligned} & B_1 (0,293 + 0,383 k\mu_1) + B_3 (0,707 + 2,772 k\mu_1) + B_5 (0,707 + 4,619 k\mu_1) + \\ & + B_7 (0,293 + 2,679 k\mu_1) = 0,383 \mu_1; \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & B_1 (1 + 0,707 k\mu_2) + B_3 (1 + 2,121 k\mu_2) + B_5 (-1 - 3,536 k\mu_2) + \\ & + B_7 (-1 - 4,950 k\mu_2) = 0,707 \mu_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B_1 (1,707 + 0,924 k\mu_3) + B_3 (-0,707 - 1,149 k\mu_3) + B_5 (-0,707 - 1,913 k\mu_3) + \\ & + B_7 (1,707 + 6,467 k\mu_3) = 0,924 \mu_3; \end{aligned}$$

$$B_1 (2 + k\mu_4) + B_3 (-2 - 3 k\mu_4) + B_5 (2 + 5 k\mu_4) + B_7 (-2 - 7 k\mu_4) = \mu_4.$$

Звернімо увагу на таку властивість цієї системи:

1) В рівняння системи не входить кут атаки  $\alpha_1$  і швидкість  $V_0$ .

2) Розмах і глибина крила в різних перекроях входять у форми відношень:

$$\frac{t_1}{l} = \mu_1; \quad \frac{t_2}{l} = \mu_2; \quad \frac{t_3}{l} = \mu_3; \quad \frac{t_4}{l} = \mu_4.$$

Тому для двох геометрично подібних крил системи однакові.

Розв'язуючи наведену систему, ми знайдемо величини  $B_1, B_3, B_5, B_7$ , а, значить, якусь функцію

$$\Phi(x) = B_1 \sin \vartheta + B_3 \sin 3\vartheta + B_5 \sin 5\vartheta + B_7 \sin 7\vartheta,$$

що на підставі зазначених властивостей системи не залежить від абсолютних розмірів крила, а також від швидкості потоку та кута атаки.

Знайшовши  $\Phi(x)$ , визначимо потім циркуляцію  $\Gamma(x)$  у формі

$$\Gamma(x) = 2lka_1 V_0 \Phi(x),$$

тобто матимемо розв'язання досліджуваної задачі для будь-якої швидкості  $V_0$  і для будь-якого кута атаки  $\alpha_1$ , аби тільки він був досить малий (практично для всіх літних кутів атаки).

## § 6. Приклад<sup>1</sup>

Визначити розподіл циркуляції по розмахові крила трапезоїдального (рис. 111) в пляні з профілем № 389 Гетінгенської лабораторії. При цьому вартість сучинника  $k$  для досліджуваного профілю задано:

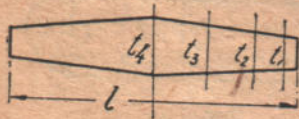


Рис. 111.

$$k = 2,76.$$

З рисунка знаходимо вартості величини  $\mu$ :

$$\mu_1 = 0,120, \quad \mu_2 = 0,139,$$

$$\mu_3 = 0,167, \quad \mu_4 = 0,200.$$

Підставляючи їх, а також величину  $k$  в систему (46), матимемо:

$$0,420 B_1 + 1,625 B_3 + 2,237 B_5 + 1,180 B_7 = 0,046,$$

$$1,271 B_1 + 1,814 B_3 - 2,356 B_5 - 2,900 B_7 = 0,098,$$

$$2,132 B_1 - 1,236 B_3 - 1,590 B_5 + 4,687 B_7 = 0,154,$$

$$2,552 B_1 - 3,657 B_3 + 4,760 B_5 - 5,862 B_7 = 0,200.$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо:

$$B_1 = 0,077, \quad B_3 = 0,0042,$$

$$B_5 = 0,0030, \quad B_7 = 0,00001,$$

так що для циркуляції матимемо вираз:

$\Gamma = 2lk\alpha_1 V_0 (0,077 \sin \vartheta + 0,0042 \sin 3\vartheta + 0,0030 \sin 5\vartheta + 0,00001 \sin 7\vartheta)$ ; на підставі формул (30) і (31) бачимо, що для нашого крила

$$P = \frac{\pi}{4} \rho V_0 l \cdot 2lka_1 V_0 \cdot 0,077 = 0,334 \rho l^2 V_0^2 \alpha_1,$$

$$Q_i = \frac{\pi \rho}{8} 4l^2 ka_1^2 V_0^2 (0,077^2 + 3 \cdot 0,0042^2 + 5 \cdot 0,0030^2) = 0,0721 \rho l^2 V_0^2 \alpha_1^2.$$

<sup>1</sup> Пор. А. В. Чесалов, „Построение полярны Лиллиенталя монопланного крила произвольной формы“, „Труды ЦАГИ“, вип. 42, стор. 64.

Звідси знайдемо, що для досліджуваного крила<sup>1</sup>

$$C_y = \frac{P}{\rho S V_0^2} = 0,0372 \alpha_1^3, \quad C_i = \frac{Q_i}{\rho S V_0^2} = 0,101 C_y^2.$$

Ці наслідки дозволяють збудувати криві для  $C_y$  і  $C_i$  для нашого крила (розуміється, правильні тільки в межах невеликих кутів атаки), що й зроблено на рис. 112.



Götl. 389

## § 7. Визначення сучинника $k$

Як уже зазначалося раніш, сучинник  $k$  у формулі

$$\Gamma = k V_0 t \alpha_1$$

для безконечно-довгого крила (де  $\alpha_1$  — кут атаки в радіанах, відлічуваний від напрямку першої осі), коли нема тертя, дорівнював би  $\pi$ , а в реальних течивах через тертя завжди менший від  $\pi$ .

Постає питання, як можна визначити цей сучинник для будь-якого профілю, маючи наслідки продування якогось крила кінцевих розмірів з цим профілем. Звичайно, в лабораторіях випробовують крила прямокутні в пляні, для яких

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = \frac{t}{l} = \frac{1}{\lambda},$$

де  $\lambda$  — відношення розмаху прямокутного крила до глибини.

На підставі зауваження, зробленого в § 5, циркуляція для крила кінцевого розмаху подається формулою:

$$\Gamma(x) = 2 l k \alpha_1 V_0 \{ B_1 \sin \vartheta + B_3 \sin 3\vartheta + B_5 \sin 5\vartheta + B_7 \sin 7\vartheta \}, \quad (47)$$

де  $B_1, B_3, B_5, B_7$  — сучинники, що залежать від форми крила в пляні й від сучинника  $k$ , але не залежать від кута атаки, від швидкості й від абсолютних розмірів крила.

Із (47) виходить, що підймальна сила  $P$  для крила кінцевого розмаху подається формулою:

$$P = \rho V_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(x) dx = \frac{\pi}{2} k B_1 \rho \alpha_1 l^2 V_0^2, \quad (48)$$

де  $B_1$  залежить тільки від  $k$  й від форми крила, що у випадку прямокутного пляну цілком характеризує відносний розмах  $\lambda$ .

<sup>1</sup> Тут кут атаки беруть уже в градусах, але відлічують, як і раніше, від напрямку першої осі; в досліджуваному випадку подовження  $\lambda = \frac{l^2}{S}$  дорівнює 6,37. Згідно з § 5 розділу V в наведених формулах замість величин  $P$  та  $Q_i$  введено абстрактні сучинники  $C_y$  та  $C_i$ .

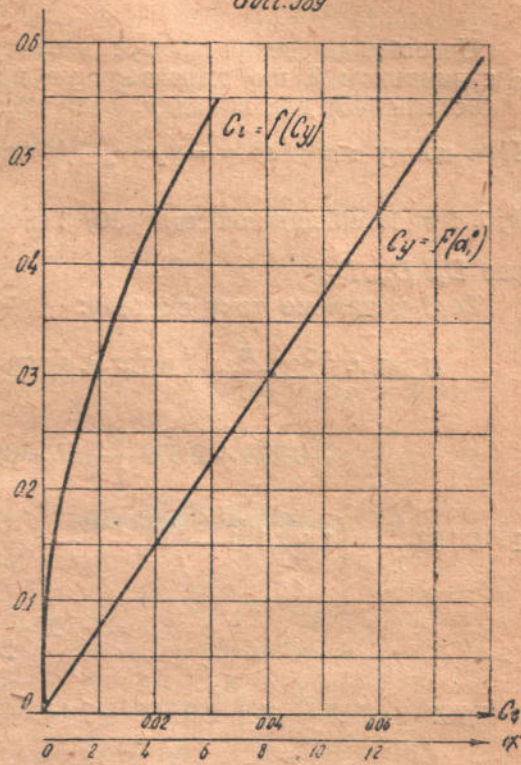


Рис. 112.

Крім того, в наслідок продувань прямокутного крила для підйимальної сили  $P$  маємо вираз<sup>1</sup>

$$P = m \rho \alpha_1 t l V_0^2, \quad (49)$$

де  $m$  — якийсь сучинник, визначений експериментально.

Порівнюючи (48) і (49), матимемо, що

$$\frac{\pi}{2} k B_1 \lambda = m. \quad (50)$$

Це співвідношення зв'язує визначувану експериментально величину  $m$  з сучинником  $k$ , що характеризує профіль крила. Skorистаймося тепер системи (45) для випадку, коли крило в пляні має прямокутню форму.

При цьому замінімо  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$  через  $\frac{1}{\lambda}$ ,  $B_1$  — його виразом через

$k$ ,  $\lambda$  і  $m$  із співвідношення (50) і позначмо відношення  $\frac{B_3}{B_1}$ ,  $\frac{B_5}{B_1}$ ,  $\frac{B_7}{B_1}$  через  $D_3$ ,  $D_5$ ,  $D_7$ .

Тоді матимемо таку систему:

$$0,293 + 0,383 \frac{k}{\lambda} + \left(0,707 + 2,772 \frac{k}{\lambda}\right) D_3 + \left(0,707 + 4,619 \frac{k}{\lambda}\right) D_5 + \\ + \left(0,293 + 2,679 \frac{k}{\lambda}\right) D_7 = 0,383 \frac{\pi}{2} \frac{k}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{m}; \quad (51)$$

$$1 + 0,707 \frac{k}{\lambda} + \left(1 + 2,121 \frac{k}{\lambda}\right) D_3 + \left(-1 - 3,536 \frac{k}{\lambda}\right) D_5 + \left(-1 - 4,950 \frac{k}{\lambda}\right) D_7 = \\ = 0,707 \frac{\pi}{2} \frac{k}{\lambda} \frac{\lambda}{m},$$

$$1,707 + 0,924 \frac{k}{\lambda} + \left(-0,707 - 1,149 \frac{k}{\lambda}\right) D_3 + \left(-0,707 - 1,913 \frac{k}{\lambda}\right) D_5 + \\ + \left(1,707 + 6,467 \frac{k}{\lambda}\right) D_7 = 0,924 \frac{\pi}{2} \frac{k}{\lambda} \frac{\lambda}{m},$$

$$2 + \frac{k}{\lambda} + \left(-2 - 3 \frac{k}{\lambda}\right) D_3 + \left(2 + 5 \frac{k}{\lambda}\right) D_5 + \left(-2 - 7 \frac{k}{\lambda}\right) D_7 = \frac{\pi}{2} \frac{k}{\lambda} \frac{\lambda}{m}.$$

Виключаючи з цієї системи сучинники  $D_3$ ,  $D_5$ ,  $D_7$ , ми знайдемо залежність між величинами  $\frac{k}{\lambda}$  і  $\frac{\lambda}{m}$ .

Отже, знаючи  $k$ , ми зможемо через цю залежність обчислити при будь-якому відносному розмахові  $\lambda$  величину  $m$ , що цілком визначає за формулою (49) вираз для підйимальної сили прямокутного крила з досліджуваним профілем та розмахом.

І, навпаки, знаючи  $m$  для прямокутного крила з якимось розмахом, ми можемо, користаючись із зазначеної залежності, визначити сучинник  $k$ , що характеризує профіль крила. Для практичних завдань найзручніше на підставі системи (50) побудувати графік, що подає залежність між величинами  $\frac{m}{\lambda}$  і  $\frac{k}{\lambda}$ .

<sup>1</sup> Справедливий для не дуже великих кутів атаки.



Цей графік дано на рис. 113.

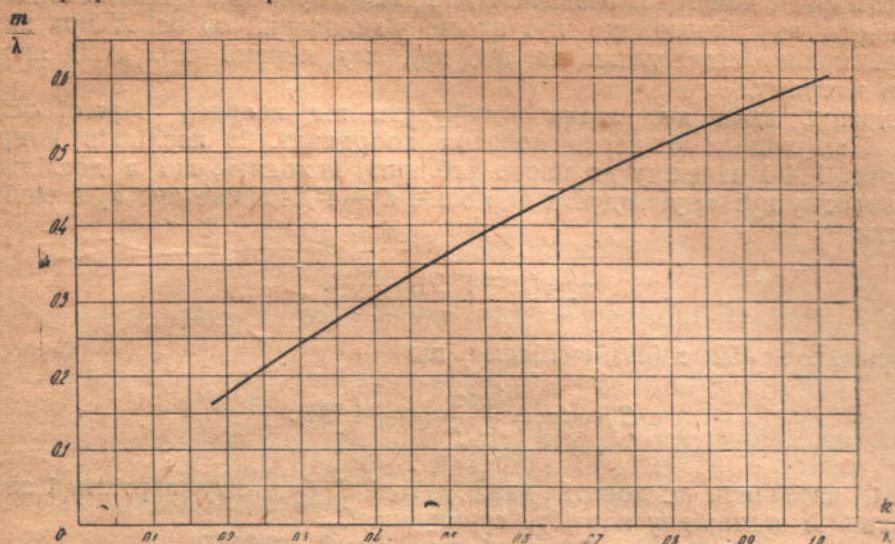


Рис. 113.

Щоб показати на прикладі, як користуватися з цього графіка, візьмімо профіль № 389 Гетінгенської лабораторії (рис. 114).

Таблиця 7.

Випроби профілю № 389

$\alpha^\circ$	$C_y$	$C_x$	$C_m$
-6	-0,039	0,01505	0,02545
-4,5	0,016	0,0084	0,042
-3,1	0,0685	0,0072	0,053
-1,6	0,1145	0,00775	0,064
-0,1	0,163	0,00905	0,0775
1,3	0,216	0,0110	0,090
2,8	0,2685	0,01445	0,1025
4,3	0,3175	0,0188	0,114
5,7	0,367	0,0236	0,1255
8,7	0,4695	0,03615	0,154
11,6	0,5455	0,050	0,1695
14,6	0,577	0,069	0,1805
17,6	0,566	0,0975	0,1895



Coll. 389

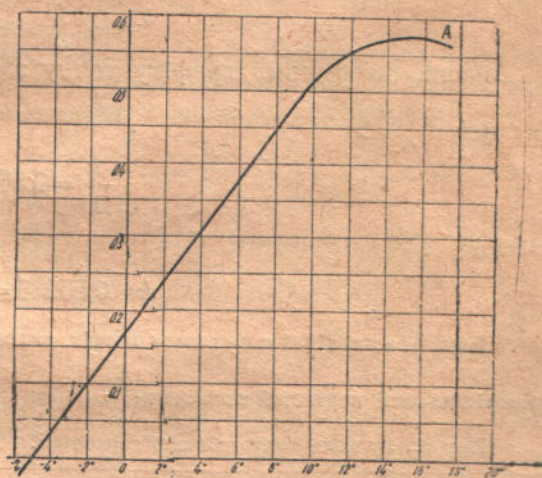


Рис. 114.

Крива А дає залежність величини  $C_y$  від кута атаки  $\alpha^\circ$ .  $C_y$  зв'язане з підйимальною силою формулою

$$P = C_y \rho S V_0^2, \quad (52)$$

при чому  $S = tl$  є площа крила.

Досліджувану криву одержано, випробовуючи крило з відносним розмахом 5. Отже,

$$\lambda = 5.$$

Насамперед, нам треба визначити для досліджуваного крила величину  $m$ . Для цього зауважимо, що кут атаки, відкладаний по осі  $X$  при випробуванні крила, відлічували не від напрямку першої осі, а від якогось іншого напрямку.

І справді, якби кут атаки відлічувати від напрямку першої осі, то крива  $A$  проходила б через початок координат. Із наслідків випробів (див. рис. 114 і належну до нього таблицю) виходить, що в досліджуваному випадку кут  $\alpha_1$  у градусах дорівнює  $\alpha^\circ + 4^\circ,94$ , отже кут  $\alpha_1$  в радіанах дорівнює

$$\alpha_1 = (\alpha^\circ + 4^\circ,94) \frac{\pi}{180^\circ}.$$

Порівнюючи (52) з (49), знайдемо, що

$$C_y = m \alpha_1 = \frac{m \pi}{180^\circ} (\alpha^\circ + 4^\circ,94).$$

Щоб визначити  $m$ , досить дати кутові  $\alpha^\circ$  будь-яку вартість і знайти по кривій  $A$  відповідну вартість сучинника  $C_y$ .

Узявши, приміром,  $\alpha^\circ = 4^\circ,3$ , знайдемо, що  $C_y = 0,3175$ .

Отже,

$$0,3175 = \frac{m \pi}{180} \cdot 9,24,$$

звідки

$$m = 1,97$$

і, значить,

$$\frac{m}{\lambda} = \frac{1,97}{5} = 0,394.$$

Узявши по нашому графіку точку з ординатою  $\frac{m}{\lambda} = 0,394$ , знайдемо для неї

$$\frac{k}{\lambda} = 0,552,$$

звідки

$$k = 0,552 \cdot 5 = 2,76.$$

Примітка. Щоб побудувати графік, систему (51) розв'язували щодо  $\frac{m}{\lambda}$  для ряду рівновіддалених вартостей величини  $\frac{k}{\lambda}$ .

При цьому мали таку таблицю вартостей.

$\frac{k}{\lambda}$	0,2	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	1
$\frac{m}{\lambda}$	0,175	0,276	0,306	0,338	0,366	0,392	0,416	0,441	0,465	0,488	0,594

Дальша проста формула дає наближено залежність між  $\frac{m}{\lambda}$  та  $\frac{k}{\lambda}$  для вартостей, що лежать в інтервалі від 0,2 до 1:

$$\frac{m}{\lambda} = 0,03 + 0,76 \frac{k}{\lambda} - 0,2 \frac{k^2}{\lambda^2}.$$

## § 8. Наближені формули для монопланного крила

Пригадаймо формули (30) і (31) для підйимальної сили й індуктивного опору кінцевого крила:

$$P = \frac{\pi}{4} \rho A_1 l V_0^2, \quad (30)$$

$$Q_i = \frac{\pi \rho}{8} \left( A_1^2 + 3 A_3^2 + 5 A_5^2 + \dots \right). \quad (31)$$

На підставі формули (30) формулу (31) можна подати так:

$$Q_i = \frac{2P^2}{\pi \rho l^2 V_0^2} \left( 1 + 3 \frac{A_3^2}{A_1^2} + 5 \frac{A_5^2}{A_1^2} + 7 \frac{A_7^2}{A_1^2} + \dots \right). \quad (53)$$

У розділі V [формули (7) та (8)] зазначалося, що підйимальну силу й чоловий опір подають звичайно у формі:

$$P = C_y \rho S V_0^2, \quad (54)$$

$$Q = C_x \rho S V_0^2, \quad (55)$$

де  $S$  — площа крила, з чого ми вже користувалися й в цьому розділі.

Чоловий опір складається з профільного опору  $Q_p$  та індуктивного опору  $Q_i$ , при чому профільний опір на підставі (5) дорівнює:

$$Q_p = C_p \rho S V_0^2. \quad (56)$$

Подамо через це індуктивний опір у формі

$$Q_i = C_i \rho S V_0^2 \quad (57)$$

і назвімо  $C_i$  сучинником індуктивного опору.

Будемо, як й раніш, називати подовженням крила відношення квадрату розмаху до площі. Для прямокутного крила подовження дорівнює відношенню розмаху. Позначаючи подовження через  $\lambda$ , матимемо:

$$\lambda = \frac{l^2}{S}. \quad (58)$$

Скориставшись із формул (53), (54), (57), (58), матимемо, що

$$C_i = \frac{2}{\pi \lambda} N C_y^2, \quad (59)$$

де

$$N = 1 + 3 \frac{A_3^2}{A_1^2} + 5 \frac{A_5^2}{A_1^2} + 7 \frac{A_7^2}{A_1^2} + \dots$$

Для кожного крила  $N$  є певне число, що дорівнює одиниці, якщо циркуляція розподіляється вздовж розмаху крила за еліптичним законом; в інших же випадках  $N$  більше від одиниці.

Ми бачимо, що залежність сучинника  $C_i$  від сучинника  $C_y$  подає параболу; її звичайно звать параболою індуктивного опору. Тепер параболу індуктивного опору наносять завжди рядом з Lilienthal'евою кривою на рисунку, що показує наслідки продувань крила.

Тому що

$$Q = Q_i + Q_p,$$

а, значить,

$$C_x = C_i + C_p,$$

то, маючи Lilienthal'єву криву й параболу індуктивного опору, можемо простим обчисленням (див. рис. 115) визначити величину профільного опору залежно від кута атаки. Виявляється, що  $C_p$  на літних кутах атаки майже не залежить від кута атаки; з цього ми потім скористаємось.

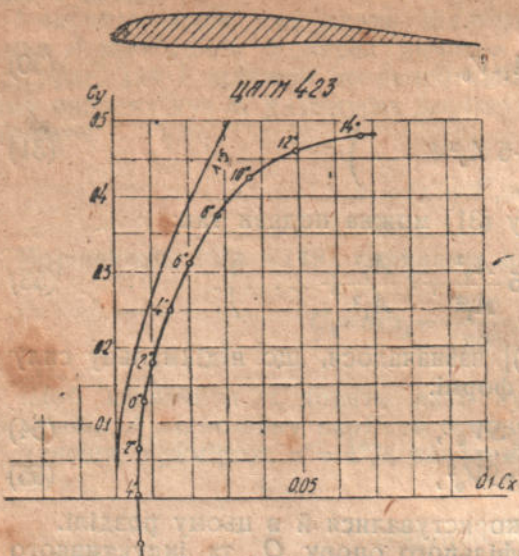


Рис. 115.

Звернімось тепер до формули (38) для крила з еліптичним законом розподілу циркуляції вздовж розмаху.

На підставі цієї формули скіс потоку коло такого крила сталий уздовж розмаху й дорівнює в радіах

$$\Delta\alpha_1 = \frac{v(x)}{V_0} = \frac{2P}{\pi\rho l^2 V_0^2}$$

На підставі (54) і (58) цей вираз можна подати в формі:

$$\Delta\alpha_1 = \frac{2C_y \rho S V_0^2}{\pi\rho l^2 V_0^2} = \frac{2}{\pi\lambda} C_y \quad (60)$$

Якщо кут атаки подають у градусах, то формула (60) заміниться такою:

$$\Delta\alpha_1^\circ = 57^\circ,3 \frac{2}{\pi\lambda} C_y \quad (61)$$

Переходячи від крила з еліптичним законом розподілу циркуляції вздовж розмаху крила до крила довільного, ми помічаємо, що тут справа ускладнюється. Коли крило довільне, то скіс потоку міняється від одного перекрою крила до другого; і якщо ми схочемо зв'язати його з сучинником  $C_y$  так, як це робиться за формулою (61), то нам доведеться ввести вже якусь середню вартість скосу потоку вздовж розмаху крила.

Так, ми можемо для кожного крила покласти, що

$$\Delta\alpha_1^\circ = 57^\circ,3 \frac{M}{\lambda} C_y \quad (62)$$

де  $M$ —якийсь сучинник, характеристичний для крила,  $\lambda$ —подовження, а  $\Delta\alpha_1^\circ$ —середній скіс потоку вздовж крила в градусах.

Формули (59) і (62) багато важать у побудові Lilienthal'євої поляри, про що ми будемо говорити в найближчому параграфі. Отже, для найуживаніших форм крила треба визначити вартості сучинників  $N$  і  $M$ . На підставі сказаного раніш ці сучинники залежать від розподілу циркуляції по розмахові крила, що її також цілком визначає форма профілю крила, форма пляву та зміна кута устави вздовж розмаху. Знаючи ці чинники, можна визначити розподіл циркуляції вздовж розмаху, а значить, і сучинники  $N$  і  $M$ , методом, поданою в § 5 і 7.

Таким чином для випадку, коли кут устави й форма профілю однакові в усіх перекроях, знайдемо такі наближені формули:<sup>1</sup>

1) прямокутне крило з подовженням  $\lambda$  в межах  $\lambda=5 \div 8$  (рис. 116):

$$\Delta\alpha_1^\circ = 57^\circ,3 \frac{0,750}{\lambda} C_y;$$

$$C_i = \frac{0,670}{\lambda} C_y^2;$$

Рис. 116.

<sup>1</sup> Пор. Чесалов, стор. 66—67.

2) трапезоїдальне крило для відношення

$$\frac{b}{b_0} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

й подовження в межах  $\lambda = 5 \div 8$  (рис. 117):

$$\Delta\alpha_1^\circ = 57^\circ,3 \frac{2}{\pi\lambda} C_y,$$

$$C_i = \frac{2}{\pi\lambda} C_y^2;$$



Рис. 117.

3) крило із скошеними кінцями для подовження в межах  $\lambda = 5 \div 8$  (рис. 118):

$$\Delta\alpha_1^\circ = 57^\circ,3 \frac{0,675}{\lambda} C_y,$$

$$C_i = \frac{2}{\pi\lambda} C_y^2;$$



Рис. 118.

4) крило з закругленими кінцями для подовження в межах  $\lambda = 5 \div 8$  (рис. 119)

$$\Delta\alpha_1^\circ = 57^\circ,3 \frac{0,730}{\lambda} C_y,$$

$$C_i = \frac{2}{\pi\lambda} C_y^2;$$



Рис. 119.

5) крило еліптичне (рис. 120):

$$\Delta\alpha_1^\circ = 57^\circ,3 \frac{2}{\pi\lambda} C_y,$$

$$C_i = \frac{2}{\pi\lambda} C_y^2.$$



Рис. 120.

## § 9. Перерахунок Lilienthal'євої діаграми з одного подовження на інше

Згідно із сказаним у § 7, з певного продування прямокутного й неперекрученого крила із сталим профілем можна знайти сучинник  $k$ , що характеризує профіль. А якщо для довільного крила властивості профілю відомі в усіх перекроях, то Lilienthal'єву діаграму для такого крила можна знайти без нових продувань, самим тільки обчисленням. Зважаючи на те, що тут доводиться розв'язувати багато рівнянь, бажано мати хоч і менш точні, але доцільніші способи для найпростіших випадків.

Такий спосіб ми покажемо в цьому параграфі для випадків, досліджених у § 8.

Нехай дано два крила: обидва неперекручені й обидва мають у всіх перекроях той самий (спільний для обох крил) профіль. Крила визначаються, отже, своєю формою в пляні й своїм подовженням. Назвімо через  $\lambda'$  і  $\lambda''$  подовження першого й другого крила.

Припускаючи, що форма крил у пляні відповідає випадкам, дослідженим у попередньому параграфі, випишімо для кожного з цих крил відповідну йому пару формул з попереднього параграфу й будемо позначати одним штрихом перше крило, а двома штрихами — крило друге.

Маємо формули:

$$\Delta\alpha' = 57,3 \frac{M'}{\lambda'} C_y \quad (\text{в градусах}), \quad (63_1)$$

$$C'_i = \frac{2}{\pi\lambda'} N' C_y^2; \quad (64_1)$$

$$\Delta\alpha'' = 57,3 \frac{M''}{\lambda''} C_y \quad (\text{в градусах}), \quad (63_2)$$

$$C''_i = \frac{2}{\pi\lambda''} N'' C_y^2. \quad (64_2)$$

Тому що крила неперекручені, то кут устави кожного крила в усіх його перекроях однаковий, але дійсний кут атаки в різних елементах крила буде різний.

Почнімо досліджувати пересічну вартість дійсного кута атаки вздовж розмаху. Щоб його знайти, треба відняти з геометричного кута атаки крила пересічну для крила величину скосу потоку; а цю величину визначають формули (63<sub>1</sub>) і (63<sub>2</sub>).

Припустімо тепер, що ми досліджуємо обидва крила при однакових пересічних дійсних кутах атаки і нехай геометричні кути, що відповідають цьому пересічному дійсному куту атаки, дорівнюють

$$\alpha' \text{ і } \alpha''.$$

Тому що в крилах однакові профілі, то при рівних пересічних дійсних кутах атаки будуть рівні сучинники підйимальної сили; а значить пересічний дійсний кут атаки для першого крила дорівнює

$$\alpha' = 57,3 \frac{M'}{\lambda'} C_y,$$

а для другого

$$\alpha'' = 57,3 \frac{M''}{\lambda''} C_y.$$

Із рівності пересічних дійсних кутів виходить, що

$$\alpha'' = 57,3 \frac{M''}{\lambda''} C_y = \alpha' = 57,3 \frac{M'}{\lambda'} C_y$$

або

$$\alpha'' - \alpha' = 57,3 \left( \frac{M''}{\lambda''} - \frac{M'}{\lambda'} \right) C_y. \quad (65)$$

Ця формула показує залежність між геометричними кутами атаки крил для кожної вартості сучинника підйимальної сили  $C_y$ .

Нехай для першого крила відома крива  $A'$  (рис. 121), що показує  $C_y$  залежно від геометричного кута атаки (цей кут може відлічуватись не від прямої першої осі профілю).

Візьмімо якусь точку  $a'$  на кривій  $A'$ ; їй відповідає певна вартість геометричного кута атаки  $\alpha'$  й певна вартість сучинника  $C_y$ . Та сама вартість сучинника для другого крила атаки буде при геометричному куті атаки, що дорівнює не  $\alpha'$ , а  $\alpha''$ . Тому, щоб мати відповідні точки  $a''$  кривої  $A''$  для другого крила, досить перенести точку  $a'$  рівнобіжно з поземою віссю на віддаль  $\alpha'' - \alpha'$ , що визначається формулою (65) (зауважмо, що ця віддаль може бути і додатна і від'ємна).

Повторюючи ту саму побудову для інших вартостей сучинника  $C_y$  легко побудуємо криву  $A''$ .

Щоб збудувати криву  $A''$  за кривою  $A'$ , найпростіше спочатку провести просту  $G$ , що відповідає рівнянню (65), а потім перенести кожен точку кривої  $A'$  по простій, рівнобіжній з віссю  $X$ , на величину відтинка між простою  $G$  та віссю  $Y$ .

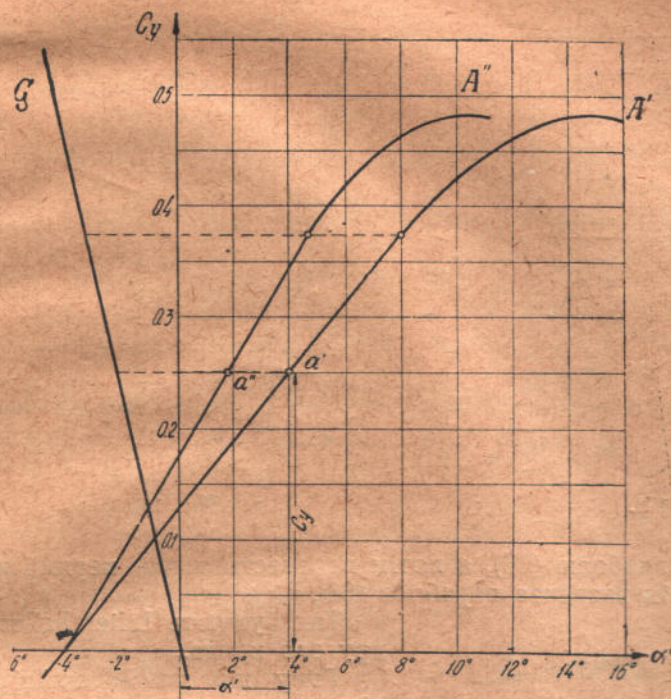


Рис. 121.

Почнімо тепер досліджувати опір крил.

Тому що профілі крил однакові, то й сучинники профільного опору будуть однакові; але сучинник профільного опору дорівнює сучинникові повного опору мінус сучинник індуктивного опору. Тому, припускаючи, що пересічний дійсний кут атаки обох крил однаковий, знайдемо для сучинника  $C_p$  профільного опору, з одного боку, вираз

$$C'_x - C'_i = C'_x - \frac{2}{\pi \lambda'} N' C_y^2,$$

а з другого,

$$C''_x - C''_i = C''_x - \frac{2}{\pi \lambda''} N'' C_y^2.$$

З їхньої рівності виходить, що

$$C''_x - C'_x = \frac{2}{\pi} \left( \frac{N''}{\lambda''} - \frac{N'}{\lambda'} \right) C_y^2. \quad (66)$$

Ця формула показує залежність між вартостями сучинників повного опору для обох крил при тій самій вартості сучинника підйімальної сили й дозволяє за Lilienthal'евою діаграмою одного крила побудувати Lilienthal'еву діаграму для другого крила.

Нехай  $L'$  — Lilienthal'ева крива для першого крила (рис. 122).

Візьмімо на ній точку  $b'$ , якій відповідає чоловий опір  $C'_x$  і підйімальна сила  $C_y$ . Ту саму вартість сучинника  $C_y$  матимемо для другого

крила при вартості сучинника чолового опору, що дорівнює  $C''_x$ ; значить, точку  $b'$  треба пересунути на величину  $C''_x - C_x$  в поземному напрямі.

Щоб збудувати точки кривої  $L''$ , зручно збудувати

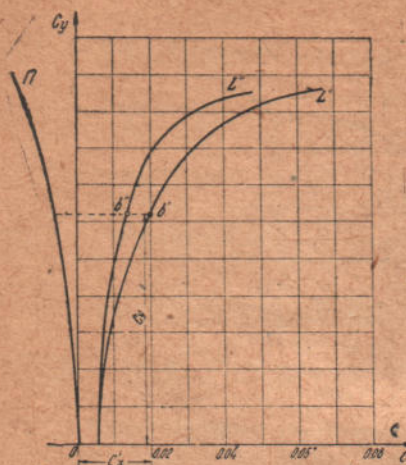


Рис. 122.

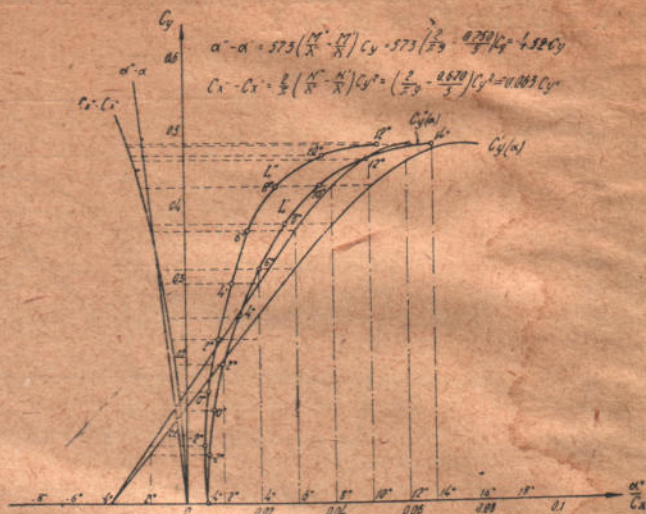


Рис. 123.

перед тим параболлю (66), а потім перенести точки першої кривої  $L'$  на відтинки, що їх визначає параболля (66).

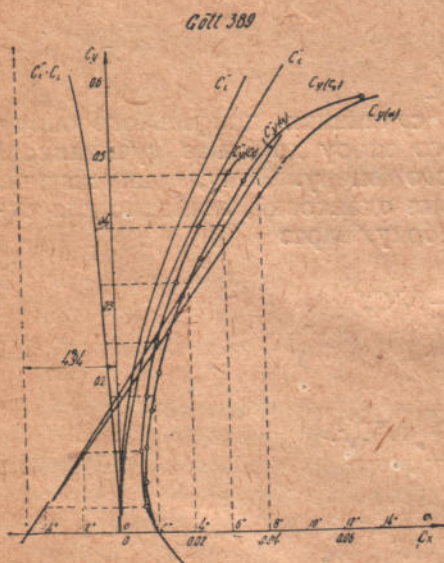


Рис. 124.

полярю. Щодо розмічання кутів атаки, то на рис. 124 це зроблено для крила, дослідженого в § 6.

Так будують Lilienthal'еву криву для другого крила.

Тому що на Lilienthal'евій кривій відзначають не дійсні, а геометричні кути атаки, то, коли перенесемо точку  $b'$  в положення  $b''$ , позначка зміниться.

Щоб запобігти позначкам з дробовим числом градусів, на побудованій кривій  $L''$  роблять позначки за допомогою кривої  $A''$ , побудованої раніш.

Подаваний далі приклад пояснює сказане й разом із тим дає зручну схему будови нових Lilienthal'євих кривих.

Приклад. За даними наслідками продування прямокутного крила (рис. 123) з профілем № 423 (ЦАГИ) при  $\lambda=5$  збудувати Lilienthal'єву полярю для трапезоїдального крила того самого профілю при  $\lambda=9$ .

Примітка. Легко бачити, які зміни стаються в способі перерахування Lilienthal'євої полярю, якщо для обчислюваного крила сучинники  $C_y$  і  $C_x$  в функції від кута атаки знайдено методом §§ 5 і 6. У цьому випадку в формулу (66) замість  $N''$  треба підставити відповідну вартість з виразу для  $C_x$ . Це дасть змогу збудувати це можна зробити за допомогою кривої для  $C_y$ .



## Деякі конформні зображення.

1. Зображення кола на півплощину (рис. 125):

$$z = R \frac{1 + it}{1 - it}$$

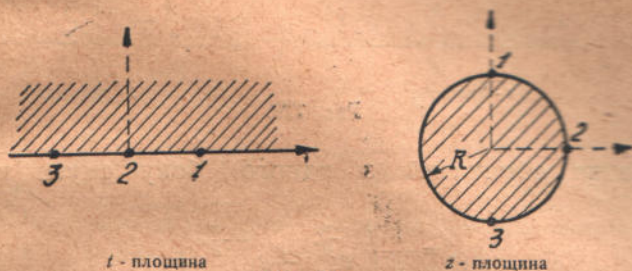
 $t$  - площина

Рис. 125.

 $z$  - площина

2. Зображення півкола на півплощину (рис. 126):

$$t = \left( \frac{\zeta + R}{\zeta - R} \right)^2$$

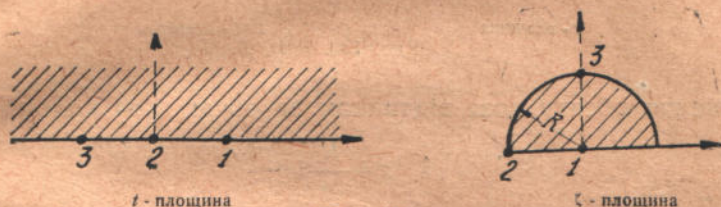
 $t$  - площина

Рис. 126.

 $\zeta$  - площина

3. Зображення кута на півплощину (рис. 127):

$$t = \zeta^n$$

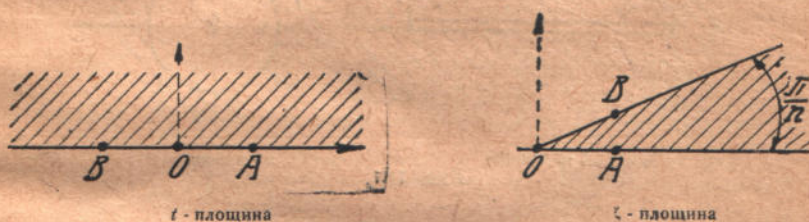
 $t$  - площина

Рис. 127.

 $\zeta$  - площина

4. Зображення колового сектора на півплощину (рис. 128):

$$t = \left( \frac{\zeta^n + R^n}{\zeta^n - R^n} \right)^2$$

 $t$  - площина

Рис. 128.

 $\zeta$  - площина

5. Зображення смуги на півплощину (рис. 129):

$$t = e^{\frac{\pi}{h}\zeta}$$

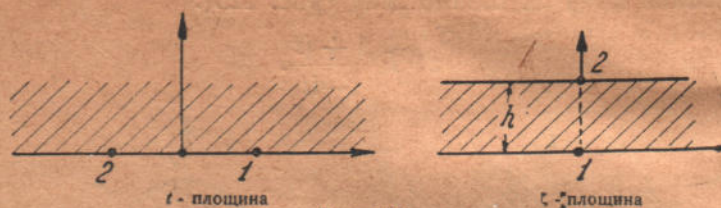


Рис. 129.

6. Зображення обмеженої з одного боку смуги на півплощину (рис. 130):

$$t = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{\pi}{h}\zeta} + e^{-\frac{\pi}{h}\zeta} \right)$$



Рис. 130.

7. Зображення обсягу поза відтинком на обсяг поза колом (рис. 131):

$$\zeta = z + \frac{R^2}{z}$$

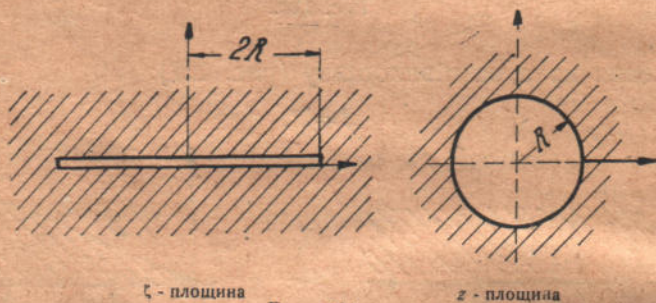


Рис. 131.

8. Зображення обсягу поза коловою дужкою на обсяг поза колом (рис. 132):

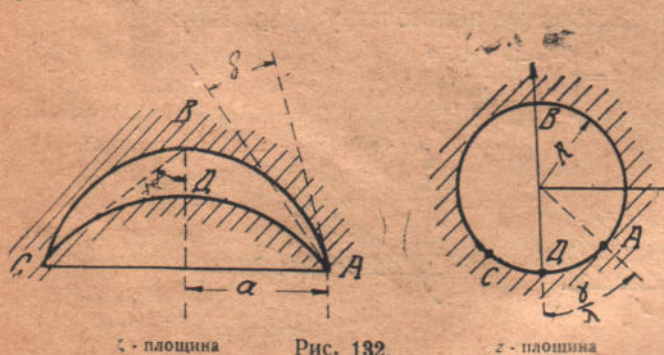


Рис. 132.

$$\frac{\zeta - a}{\zeta + a} = \left( \frac{z + iR e^{i\frac{\gamma}{\lambda}}}{z + iR e^{-i\frac{\gamma}{\lambda}}} \right)$$

де  $\lambda = 2 - \frac{\delta}{\pi}$  ( $\delta$  — кут дужки).

При цьому  $a, \gamma, \delta$  визначають дужку, а  $R$  — довільне.

Якщо  $R$  визначити з рівності

$$R = \frac{a}{\lambda \sin \frac{\gamma}{\lambda}},$$

то для великих модулем  $\zeta$  буде розклад:

$$z = \zeta - i \frac{a}{\lambda} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{\lambda} - \frac{\lambda^2 - 1}{3\lambda^2} \frac{a^2}{\zeta} + \dots$$

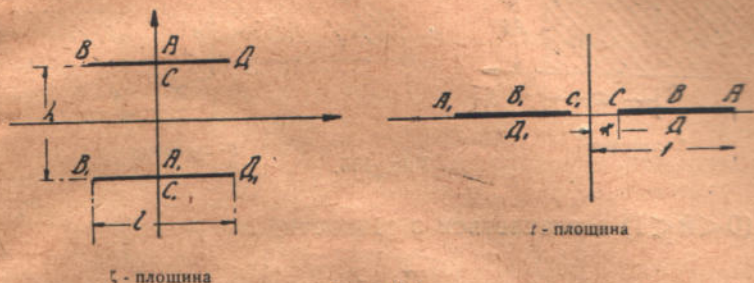


Рис. 133.

9. Зображення обсягу поза двома рівними відтинками, що лежать на одній простій, на обсяг поза двома рівними рівнобіжними відтинками (рис. 133):

$$\zeta = \frac{h}{\pi} \int_0^t \frac{(E' - K't^2) dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-x^2)}},$$

де

$$0 < x < 1, \quad x' = \sqrt{1-x^2},$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-x'^2x^2)}}; \quad E' = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x'^2x^2}{1-x^2}} dx;$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 - \frac{E'}{K'}}{1-x^2}};$$

$$\frac{l}{h} = \frac{2}{\pi} \left\{ K' \int_0^{\lambda} \sqrt{\frac{1-x'^2x^2}{1-x^2}} dx - E' \int_0^{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-x'^2x^2)}} \right\}$$

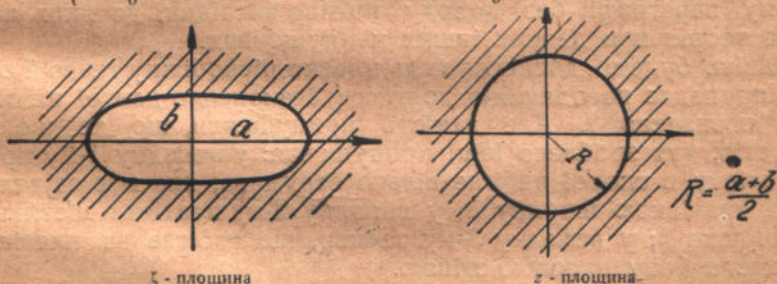


Рис. 134.

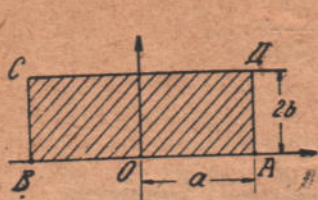
Щоб обчислити інтеграли, що тут зустрічаються (так звані еліптичні інтеграли), є спеціальні таблиці. Див. E. Jahnke und F. Emde, *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven* (Verlag von V. Teubner, 1928).

10. Зображення обсягу поза еліпсом на обсяг поза колом (рис. 134):

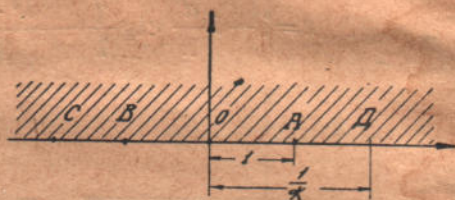
$$\zeta = z + \frac{a^2 - b^2}{4z}.$$

11. Зображення прямокутника на півплощину (рис. 135):

$$\zeta = \frac{a}{k} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$



$\zeta$  - площина



$t$  - площина

Рис. 135.

Модуль  $k$  ( $0 < k < 1$ ) визначається з рівності

$$\frac{K'}{K} = \frac{2b}{a},$$

де

$$k = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}},$$

$$K' = \sqrt{1-k^2}.$$

## ДОДАТОК 2.

### Удар струмини на платівку в обмеженому потокові<sup>1</sup>

У § 5 розділу IV ми застосували струминну теорію Helmholtz—Kirchhoff'a до обчислення тиску течива на платівку, що рухається в усьому просторі, занятому течивом, нормально до своєї площини.

У цьому параграфі без доводу подано наслідки, до яких приводить струминна теорія при деяких інших припущеннях.

Як і раніш, будемо досліджувати плоско-рівнобіжну течію й обчислювати силу, що припадає на одиницю довжини безконечно-довгої платівки, що її ширину позначено  $l$ . Але замість припущення, що течиво заповнює весь простір, тут зроблено інші припущення: у випадку 1-му припущено, що на платівку в спокої набігає вільна струмина, яка має на великій віддал перед платівкою ширину  $h$ ; у випадку 2-му платівка міститься в канал завширшки  $h$ ; у випадку 3-му течиво, що набігає на платівку, обмежене з одного боку плоскою стіною.

У всіх випадках досліджують прямий удар, тобто платівка лежить під прямим кутом до напрямку потоку на великій віддалі перед платівкою, діє в усьому дальшому швидкість позначено  $V_0$ , при цьому в перших двох випадках платівка лежить симетрично щодо потоку.

<sup>1</sup> Подані в цьому параграфі наслідки добули М. Є. Жуковський, U. Cisotti, H. Villat, див. В. Голубев, „Теорія крыла аероплана в плоско-паралельном потоке“ („Труды ЦАГИ“, вип. 29); H. Villat, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides* (Paris, 1920).\*

Умови положення платівки в досліджуваних тут випадках аналогічні з тими, що бувають при випробах крила в аеродинамічних трубах, а також при рухові крила коло поверхні землі. Тому, хоч безпосередньо наслідків цього параграфу до крила не можна застосувати, порівнявши їх з наведеною в § 5 розділу IV формулою

$$R = \frac{\pi}{4 + \pi} \rho l V_0^2, \quad (1)$$

можна зробити деякі висновки про значення труби, а також інших умов, що обмежують обсяг, зайнятий потоком.

1) Платівка вміщена у вільну струмину кінцевої ширини (рис. 136). Опір  $R$  подається формулою:

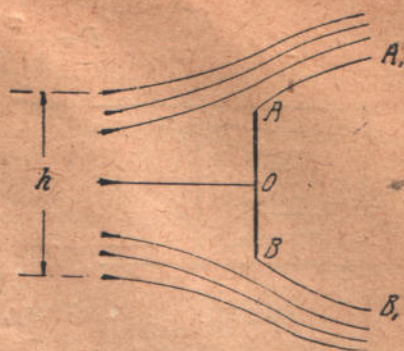


Рис. 136.

$$R = \frac{\pi}{\pi + 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \cdot \rho l V_0^2, \quad (2)$$

де параметр  $\alpha$  визначається із співвідношення

$$l = 2h \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (3)$$

Зауважмо, що параметр  $\alpha$  дорівнює куту, що в точці  $A$  дотична до струмини  $AA_1$ , утворює з віссю симетрії, тобто з поземним напрямом.

На підставі (3)  $\alpha$  є функція від відношення  $\frac{h}{l}$ . Тому можна покласти:

$$\frac{\pi}{\pi + 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = C \left( \frac{h}{l} \right), \quad (4)$$

так що

$$R = C \left( \frac{h}{l} \right) \rho l V_0^2. \quad (5)$$

На дальшій таблиці подано вартості сучинника  $C \left( \frac{h}{l} \right)$ .

$\alpha$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{h}{l}$	$\infty$	29	7.4	3.2	1.8	1.1	0.8	0.58	0.4	0
$C \left( \frac{h}{l} \right)$	0.44	0.44	0.43	0.43	0.43	0.42	0.40	0.38	0.36	0

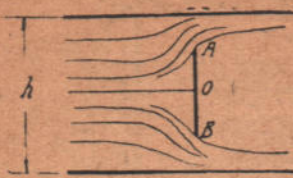
Зауважмо, що при  $h = \infty$  маємо випадок, досліджений у § 5 розділу IV, коли течиво заповнює весь простір і коли, отже, справджується формула (1). Із таблиці виходить, що поки  $h$  не менше за  $l$ , тобто поки  $\frac{h}{l} \geq 1$ ,

сучинник  $C \left( \frac{h}{l} \right)$  мало різниться від тої вартості, яка відповідає  $h = \infty$ ,

тобто від  $0.44 = \frac{\pi}{4 + \pi}$ .

2) Платівка, вміщена в канал між двома плоскими стінками (рис. 137) Опір подається формулою:

$$R = \frac{\pi \operatorname{tg}^2 \beta (\operatorname{tg} \beta - 1)}{2 \{ 2\beta (\operatorname{tg} \beta + 1) - \pi \}} \rho l V_0^2, \quad (6)$$



при чому  $\beta$  визначається із співвідношення

$$\frac{l}{h} = \frac{(\operatorname{tg} \beta - 1) \{ 2\beta (\operatorname{tg} \beta + 1) - \pi \}}{\pi \operatorname{tg}^2 \beta}; \quad (7)$$

воно показує, що  $\beta$  є функція від відношення  $\frac{h}{l}$ .

Рис. 137.

Тому, покладаючи

$$K \left( \frac{h}{l} \right) = \frac{\pi \operatorname{tg}^2 \beta (\operatorname{tg} \beta - 1)}{2 \{ 2\beta (\operatorname{tg} \beta + 1) - \pi \}}, \quad (8)$$

можемо написати (6) у формі

$$R = K \left( \frac{h}{l} \right) \rho l V_0^2.$$

Тому що  $h > l$ , то  $\beta$  повинне справджувати нерівність

$$\frac{\pi}{4} \leq \beta < \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

Зауважмо, що  $V_0 \operatorname{tg} \beta$  виявляє швидкість потоку на безконечності позаду платівки.

Наведена таблиця показує, що тут вплив обмеженості потоку багато більший, ніж у першому випадку.

$\frac{h}{l}$	$K \left( \frac{h}{l} \right)$	$\frac{h}{l}$	$K \left( \frac{h}{l} \right)$
1,21	60,5	4	2
1,44	18,0	9	1,1
1,69	9,4	16	0,9
1,96	6,1	25	0,8
2,25	4,5	36	0,72
2,56	3,6	49	0,68
2,89	2,94	64	0,64
3,24	2,4	81	0,63
3,61	2,2	100	0,61
		$\infty$	0,44

3) Потік, що набігає на платівку, обмежений з одного боку плоскою стіною, нормальною до напрямку платівки (рис. 138).

У цьому випадку для опору буде така сама формула (1), як і для випадку потоку, необмеженого з усіх боків.

Зауважмо, що для косоного удару,

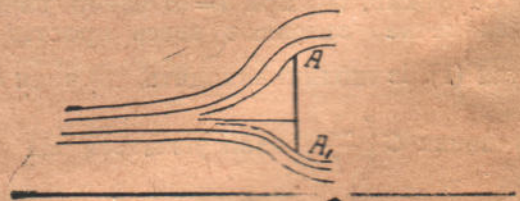


Рис. 138.

тобто для випадку, коли платівка  $AA_1$  нахилена до стіни під кутом, відмінним від  $90^\circ$ , для опору буде вираз, відмінний від того, який буває у випадку потоку, що заповнює весь простір.<sup>1</sup>

### ДОДАТОК 3

#### Плоско-рівнобіжне обтікання деяких складних крил

1) Вплив нерухокої границі (поверхні землі) на підймальну силу крила (рис. 139). Припустимо, що крило задано профілем  $L$ , що центр крила міститься на висоті  $h$  над поверхнею землі, яку на рисунку показано віссю  $x$ . Комплексну змінну позначмо через

$$z = x + iy.$$

Якщо циркуляція навколо крила дорівнює  $\Gamma$ , а швидкість крила позама й дорівнює  $V_0$ , то комплексний потенціал течії виражається формулою:

$$w = -V_0 z - \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln(z - hi) + \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln(z + hi) + \dots,$$

де пропущені члени мають форму

$$\frac{A+Bi}{z+hi} + \frac{A-Bi}{z-hi}, \quad \frac{C+Di}{(z+hi)^2} + \frac{C-Di}{(z-hi)^2}, \dots,$$

а сучинники  $A, B, C, D, \dots$  залежать від форми профілю. Обчислюючи за формулою Blasius'a-Чаплигіна підймальну силу, знайдемо, що вона дорівнює

$$P = \rho V_0 \Gamma \left( 1 - \frac{\Gamma}{4\pi V_0 h} \right) = \rho V_0 \Gamma - \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi h}.$$

Якби границі не було, то підймальна сила дорівнювала б  $\rho V_0 \Gamma$ ; границя ж, як бачимо, зменшує підймальну силу.

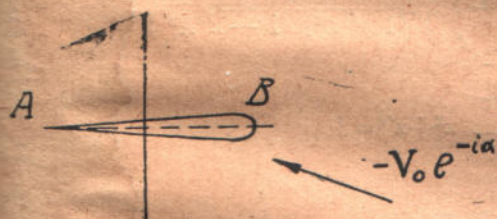


Рис. 140.

2) Обтікання крила, що в профілі мало різниться від злегка закругленого спереду відтинка простої (рис. 140). Точка  $A$  (їй відповідає число  $z = -a$ ) є задній кант; точка  $B$  ( $z = a$ ) лежить у середині закруглення.

Якщо швидкість крила має проекції  $V_0 \cos \alpha$ ,  $-V_0 \sin \alpha$ , то для відповідної оберненої течії комплексна

швидкість з великим наближенням подається у формі:

$$u - iv = -V_0 \left( \cos \alpha + i \sin \alpha \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} \right).$$

Підймальна сила дорівнює:

$$P = \pi \rho 2 a V_0^2 \sin \alpha.$$

<sup>1</sup> Див. зазначений раніш твір Н. Villat.

3) Обтікання розрізного крила, що складається з кількох крил дослідженого раніш типу (рис. 141).



Рис. 141.

Заднім кантам крил  $A_1, A_2, \dots, A_n$  відповідають числа  $z = a_1, a_2, \dots, a_n$ ; точкам  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , що лежать у середині закруглень, відповідають числа  $z = b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ ; комплексна швидкість з великим наближенням подається в формі:

$$u - iv = -V_0 \left\{ \cos \alpha + i \sin \alpha \sqrt{\frac{(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)}{(z - b_1)(z - b_2) \dots (z - b_n)}} \right\}.$$

Підіймальна сила дорівнює

$$P = \pi \rho V_0^2 L \sin \alpha,$$

де  $L = A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_n B_n$  є сума глибин усіх крил. Отже, підіймальна сила розрізного крила не залежить від того, зімкнені чи розсунуті крила, що його утворюють.

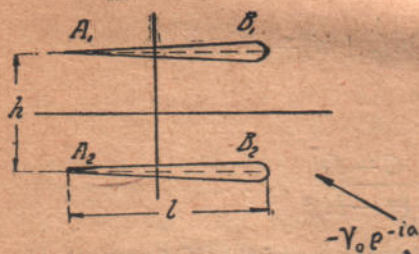


Рис. 142.

4) Обтікання біпланного крила, що складається з однакових і сторч одне над одним установлених крил дослідженого раніш типу (рис. 142).

Заднім кантам крил  $A_1$  і  $A_2$  відповідають числа  $z = -\frac{l}{2} + \frac{hi}{2}$ ,

$z = -\frac{l}{2} - \frac{hi}{2}$ ; точкам  $B_1$  і  $B_2$ , що лежать

у середині закруглень, відповідають числа  $z = \frac{l}{2} + \frac{hi}{2}$ ,  $z = \frac{l}{2} - \frac{hi}{2}$

Знайшовши з рівностей<sup>1</sup>

$$\frac{l}{h} = \frac{2}{\pi} \left\{ K' \int_0^{\lambda} \sqrt{\frac{1 - x'^2 x^2}{1 - x^2}} dx - E' \int_0^{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - x'^2 x^2)}} \right\},$$

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{E'}{K'}}, \quad x^2 + x'^2 = 1$$

модуль  $x$ , покладімо

$$z = \frac{h}{\pi} \int_0^t \frac{(E' - K' t^2) dt}{\sqrt{(1 - t^2)(t^2 - x^2)}} \quad (*)$$

Тоді комплексна швидкість з великим наближенням подається у формі:

$$u - iv = -V_0 \left\{ \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{K' t^2 - E'} \left[ K' \sqrt{(1 - t^2)(t^2 - x^2)} - \sqrt{\frac{K'}{E'}} \cdot \sqrt{(K' - E')(E' - x^2 K') t} \right] \right\},$$

де  $t$  зв'язане з  $z$  формулою (\*).

<sup>1</sup> Див. додаток I, приклад 9.



Користуючись із формули Чаплигіна-Blasius'a, матимемо для підіймальної сили вираз

$$P = 2\rho V_0^2 h \sin \alpha \sqrt{\frac{K'}{E'} \sqrt{(K' - E') (E' - x^2 K')}}.$$

Цей вираз можна подати у формі:

$$P = 2\pi\rho V_0^2 l \sin \alpha L,$$

де  $L$  — якийсь сучинник, що залежить від відношення  $\frac{h}{l}$ .

На рис. 143 вартості сучинника  $L$  подано графічно.

Завважаючи, що  $L$  завжди менший від 1, і пригадуючи, що для моноплана з глибиною  $2l$  підіймальна сила дорівнює

$$2\pi\rho V_0^2 l \sin \alpha,$$

знаходимо, що підіймальна сила монопланного крила з глибиною, яка дорівнює сумі глибин крил біплана, за інших рівних умов більша від підіймальної сили біплана.

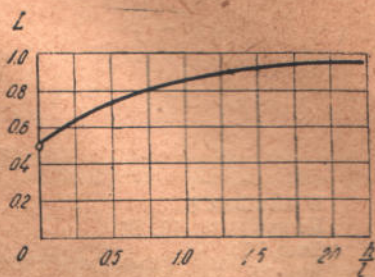


Рис. 143.

## ПОКАЗНИК ІМЕН

- |   |   |
|---|---|
| D'Alembert 8,                             | Navier 28                                       |
| Bernoulli 13, 73, 86                      | Newton 27, 35                                   |
| Betz 77                                   | Pitot 14, 86                                    |
| Biot 26                                   | Prandtl 3, 66, 67, 70, 81, 86, 87, 91, 109, 122 |
| Blasius 44, 70, 141, 143                  | Pohlhausen 70                                   |
| Boltz 70                                  | Rayleigh 76, 77                                 |
| Cauchy 36, 114                            | Reynolds 30, 80, 81, 89, 100, 102, 104, 105     |
| Christoffel 64                            | Riemann 36                                      |
| Cisotti 138                               | Rubach 72                                       |
| Eiffel 83, 98                             | Savart 26                                       |
| Euler 7, 9, 35                            | Schwarz 64                                      |
| Emde 137                                  | Stoke 15 28, 65                                 |
| Flettner 66                               | Thomson 19, 21                                  |
| Fuchs 91, 99, 102                         | Taylor 6  |
| Fourier 115                               | Treftz 64, 122                                  |
| Helmholtz 21, 22, 65, 72, 74, 138         | Villat 138, 141                                 |
| Hiemenz 70                                | Безікович 115, 118                              |
| Hopf 91, 99, 102                          | Голубев 138                                     |
| Jahnke 137                                | Громеко 13                                      |
| Karman 64, 67, 70, 72                     | Жуковський 4, 47, 52, 53, 56, 63, 64, 76, 77    |
| Kirchhoff 74, 138                         | 93, 109, 138                                    |
| Lamb 13                                   | Каган 17  |
| Lachman 93                                | Красноперов 80, 83, 86, 87                      |
| Lanchester 109                            | Леснікова 87, 90, 98                            |
| Lilienthal 89, 90, 93, 130, 131, 133, 134 | Філіпс 17                                       |
| Lössl 87                                  | Фрідман 115, 118                                |
| Mises 14, 59, 61, 78                      | Чаплигін 44, 61, 109, 141, 143                  |
| Magnus 65, 66                             | Чесалов 100, 102, 105, 124, 130                 |
| Müller 64                                 | Юр'єв 3, 87, 90, 98                             |
| Munk 119, 121                             |   |

УКРАЇНСЬКО-РОСІЙСЬКИЙ ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИЧОК

**Б**

Бік (к у т а) — сторона

**В**

Важіль — рычаг  
 Вартість — значение  
 Вежа — башня  
 Вершок — вершина  
 Віддаль — расстояние  
 Від'ємний — отрицательный  
 Віднімання (м а т.) — вычитание  
 Вільний — свободный  
 Відмінний — отличный  
 Відносний — относительный  
 Відповідний — соответственный  
 Відтинок — отрезок  
 Відхил — отклонение  
 Вісний — осевой  
 Вітрило — парус  
 Вимір (н а с л і д о к) — измерение  
 Вимірювання (п р о ц е с) — измерение  
 Вимірчий — измерительный  
 Випробування — испытание  
 Вислідна (с и л а) — равнодействующая  
 Вихор — вихрь  
 Вихротворення — вихреобразование  
 Властивість — свойство

**Г**

Гарматень (а р т.) — снаряд  
 Границя — предел  
 Густина (ф і з.) — плотность

**Д**

Двигун — двигатель  
 Дучка — луночка

**З**

Занурення — погружение  
 Заслона — пелена  
 Збурувати (п о т і к) — возмущать  
 Зображення — изображение

**К**

Ковзання — скольжение  
 Ковзти — скользить  
 Коловий (ш в и д к.) — окружной, круговой

**Л**

Лійкуватий — воронкообразный  
 Літ (льоту) — лет  
 Літак (-ка) — самолет  
 Літальний — летательный  
 Літний — летный  
 Лижви — лыжи

**М**

Межа — граница  
 Мірило — масштаб

**Н**

Наближення — приближение  
 Наближено — приближенно  
 Напряга — напряжение  
 Напряг — направление  
 Насичений — насыщенный  
 Незалежний — независимый  
 Нерівність — неравенство  
 Нерухомий — неподвижный  
 Несний — несущий  
 Нестисливість — несжимаемость

**О**

Обвід — окружность  
 Обертання — вращение  
 Обертати — обращать, вращать  
 Обертвий — вращающийся  
 Обіймати — охватывать  
 Обмежений — ограниченный  
 Обсяг — область  
 Обчислення — вычисление  
 Окрайок — кромка  
 Опірєння — оперение  
 Опірний — опорный  
 Опір — сопротивление  
 Отвір — отверстие

**П**

Пара — пар  
 Первісний — первоначальный  
 Передатний — передаточный  
 Перепона — преграда, препятствие  
 Перекрій — сечение  
 Перетворити — преобразовать  
 Перетин — пересечение  
 Перетинати — пересекать  
 Півколо — полуокружность  
 Півплощина — полуплоскость

Платівка—пластинка  
Плавкий—плавный  
Площа—площадь  
Площина—плоскость  
Площинка—площадка  
Побудова—построение  
Побудувати—построить  
Поверхневий—поверхностный  
Поверхня—поверхность  
Подовжній—продольный  
Подовження—удлинение  
Поземий—горизонтальный  
Поплавець—поплавок  
Поправковий—поправочный  
Порожина—полость  
Потік—поток  
Потужність—мощность  
Похилій—наклоненный  
Початковий—начальный  
Почіпка—подвес  
Похідний—производный  
Припливати—притекать  
Приріст—приращение  
Пришвидження—ускорение  
Проміжний—промежуточный  
Промінь—луч  
Проста (лінія)—прямая  
Простір—пространство  
Прямокутний—прямоугольный

**Р**

Рамено—плечо  
Рівень—уровень  
Рівність—равенство  
Рівняння—уравнение  
Рисунок—чертеж  
Розв'язання (м а т.)—решение  
Розв'язати—решить  
Розклад—разложение  
Розмір—размер  
Розмічання—разметка  
Розподіл—распределение  
Розрідження—разрежение  
Розсунений—раздвинутый  
Розташування—расположение  
Розтяг—растяжение  
Розчалка—расчалка  
Рух—движение  
Рухомий—подвижный

**С**

Середовище—среда  
Сідання—посадка  
Складовий—составной  
Смуга—полоса  
Спадний—убывающий  
Спіралюватий—спиралеобразный  
Спокій—покой  
Спокійний (в спок о ї)—покоящийся  
Спостереження—наблюдение  
Спостережний—наблюдательный  
Спостерігати—наблюдать  
Справджуватись—выполняться

Сталий—постоянный  
Стерно—руль  
Стійкість—устойчивость  
Стисливість—сжимаемость  
Стоп—столб  
Стояк—стойка  
Сторчовий—вертикальный  
Стрибок—прыжок, скачок  
Стрижень—стержень  
Струм (електр.)—ток  
Сувісний—соосный  
Супряжений—сопряженный  
Суставний—шарнирный  
Суцільний—сплошной

**Т**

Твірний—образующий  
Терези—весы  
Тертя—трение  
Течія—течение  
Течиво—жидкость  
Течкий—текущий  
Течний—жидкий  
Тимчасовий—временный  
Тиск—давление  
Тотожний—тождественный  
Трикутник—треугольник  
Тягар—груз  
Тягива—хорда

**У**

Устава—установка  
Утворення—образование  
Ущільнення—уплотнение  
Уявлюваний—воображаемый  
Уявний—мнимый

**Ц**

Цупкий—жесткий

**Ч**

Човен—лодка  
Чоловий—лобовой

**Ш**

Шар—слой  
Швидкісний—скоростный  
Швидкість—скорость  
Шерехатість—шероховатость  
Шина—шина  
Шинування—обтяжка  
Шкідливий—вредный

**Щ**

Щілина—щель

**Я**

Якість—качество

## З М І С Т

Передмова . . . . .	3
Вступ . . . . .	4

### Розділ I. Найпотрібніші відомості з гідродинаміки

1. Основні поняття . . . . .	5
2. Рівняння нестисливості (нерозривності) . . . . .	6
3. Про сили, що чинять на виділений у течії елемент об'єму . . . . .	8
4. Рівняння руху ідеального течива . . . . .	8
5. Граничні та початкові умови . . . . .	9
6. Розкладання руху частки на найпростіші елементи . . . . .	10
7. Вихри, вихрові лінії . . . . .	11
8. Лінії й трубки потоку . . . . .	12
9. Рівняння в Lamb'овій формі . . . . .	13
10. Теорема D. Bernoulli . . . . .	13
11. Поняття про циркуляцію. Stokes'ова теорема . . . . .	15
12. Thomson'ова теорема . . . . .	19
18. Helmholtz'ові теореми про вихри . . . . .	21
14. Приклад вихрового руху . . . . .	23
15. Визначення швидкостей часток течива при даному розподілі вихрів у ньому . . . . .	24
16. Поняття про в'язкість . . . . .	25
17. Умови подібності двох течій . . . . .	28

### Розділ II. Плоскі течії

1. Поняття про плоску течію . . . . .	31
2. Основні рівняння для плоских течій . . . . .	32
3. Функції комплексного змінного . . . . .	34
4. Обтікання колового циліндра . . . . .	38
5. Обчислення сил, що чинять на тіло в плоскому потокові . . . . .	42
6. Поняття про конформне відтворення . . . . .	47
7. Приклад конформного відтворення . . . . .	50

### Розділ III. Аеропланне крило в плоско-рівнобіжному потокові

1. Основні поняття . . . . .	52
2. Профіль М. Є. Жуковського . . . . .	53
3. Обчислення сил, що чинять на профіль М. Є. Жуковського . . . . .	56
4. Параболя стійкості . . . . .	59
5. Підіймальна сила, момент і параболя стійкості для будь-якого профілю . . . . .	61
6. Ідея методи М. Є. Жуковського та узагальнення її . . . . .	63

### Розділ IV. Вихрові явища в плоско-рівнобіжному потокові

1. Роль в'язкості в процесі утворення циркуляції . . . . .	65
2. Magnus'ів ефект. Flettner'ів роторний корабель . . . . .	66
3. Теорія поверхневого шару . . . . .	67
4. Kutta'ові вихрові вулиці . . . . .	70
5. Струмінна теорія . . . . .	72
6. Експериментальна перевірка теорій . . . . .	76

### Розділ V. Методи експериментальної аеродинаміки

1. Потреба експериментальних дослідів в аеродинаміці . . . . .	79
2. Перенесення наслідків експерименту на дійсність . . . . .	79
3. Аеродинамічні труби . . . . .	81
4. Вимірні інструменти . . . . .	86

§ 5. Кут атаки, підймальна сила, чоловий опір та інші величини, що характеризують крило	87
§ 6. Наслідки експериментальних досліджень крил	91
§ 7. Дослідження опірності	98
§ 8. Дослідження фюзеляжів та радіаторів	102
§ 9. Човни, поплави, колеса та лижви	102
§ 10. Стояки	104
§ 11. Круглий дрiт, труби, троси	105

### Розділ VI. Вихрова теорія крила кінцевого розмаху

§ 1. Вступ	105
§ 2. Основні поняття	109
§ 3. Визначення додаткової сторчової швидкості при заданому розподілі циркуляції	113
§ 4. Милл'ова задача	119
§ 5. Розподіл циркуляції навколо заданого крила	121
§ 6. Приклад	124
§ 7. Визначення сучинника к	125
§ 8. Наближені формули для монопланного крила	129
§ 9. Перерахунок Lilienthal'євої діаграми з одного подовження на інше	131
Додаток 1. Деякі конформні зображення	135
Додаток 2. Удар струмини на платівку в обмеженому потокові	138
Додаток 3. Плоско-рівнобіжне обтікання деяких складних крил	141
Показник імен	144
Укр.-російський термінологічний словничок	145





