ПРОФ. В. П. ФАРМАКОВСЬКИЙ

ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ НЕРОЗРІЗНИХ ТРЯМІВ

ВРНГ УСРР
ТЕХНІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО

КИЇВ

Проф. В. П. ФАРМАКОВСЬКИЙ

ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ НЕРОЗРІЗНИХ ТРЯМІВ

Переклад з другого російського видання
за редакцією С. БУЛДИ

ВРНГ УСРР
ТЕХНІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО
ХАРКІВ 1932 КИЇВ

ШОСТА
ДРУКАРНЯ
„КИЇВ"
ДВОУ
УПП

Київськ. Міськліт № 2358. Зам. № 2387. Тир. 10000. 8¼ арк. Ост А5

ВІД РЕДАКТОРА.

Запропонована до уваги читача книжка проф. В. П. Фармаковського є єдина книжка з розрахунку нерозрізних трямів, яка цілком вдовольняє вимоги підручника. Простота та докладність викладу, численні приклади в числах, доведені до кінця, роблять її цілком елементарною та приступною навіть для читача з невеликою підготовою з Будівельної механіки. Тому її без вагань рекомендуємо студентам та інженерам-практикам.

Друге російське видання було літографоване. Це спричинилося до значного числа помилок та нечітко відбитих місць у тексті. Були й неясності в самому тексті. В цьому виданні всі помічені помилки та неясності виправлено. Тим то текст, розполіг матеріялу та й самі формули іноді не відповідають відповідним місцям російського тексту, який зазнав деякого перероблення. Звернуто також увагу на зовнішнє оформлення тексту: чіткіше поставлено заголовки та підзаголовки, важливіші місця подано грубим шрифтом, менше важливі місця та розділи подано петитом. Сподіваємося, що всі зроблені виправлення підуть на користь друкованому українському виданню цієї цінної книжки.

С. Булда.

ПЕРЕДМОВА ДО ПЕРШОГО ВИДАННЯ.

Ця книга не претендує на вичерпний виклад теорії нерозрізних трямів. Мета її — ознайомити читача з основними засадами цієї теорії й навчити робити ті типові розрахунки нерозрізних трямів, що найчастіше зустрічаються в практиці.

Книгу цю складено відповідно до програми Військово-технічної академії РККА, причому, як обов'язковий мінімум, треба вважати засвоєння I, II, III та IV розділів; останні розділи можуть бути корисні під час дипломного проєктування, де доводиться розв'язувати складніші питання з розрахунку нерозрізних трямів.

ПЕРЕДМОВА ДО ДРУГОГО ВИДАННЯ.

У другому виданні наведено докази деяких теорем, яких бракувало в першому, розвинено виклад способу Мюллера-Бресляв і скорочено розділи, присвячені теоремі про два моменти. Крім того, перероблено багато місць тексту й додано кілька нових рисунків.

Перед тим, як випустити друге видання, текст книги розглянули викладачі Академії інженери П. І. Лєбєдєв та П. К. Леціус, які поробили багато цінних вказівок та поправок, за що автор висловлює зазначеним особам свою щиру подяку.

1929 р. *В. Фармаковський.*

ЧАСТИНА ПЕРША.

РОЗРАХУНОК НЕРОЗРІЗНИХ ТРЯМІВ ПРИ СТАТИЧНОМУ ОБТЯГОВІ.

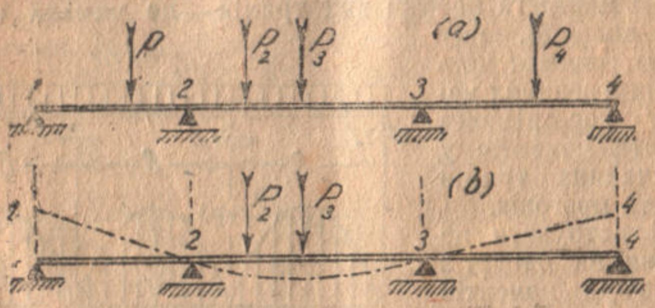
РОЗДІЛ ПЕРШИЙ.

ТЕОРЕМА ПРО ТРИ МОМЕНТИ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ.

§ 1. Загальні відомості про нерозрізні трями.

Нерозрізним трямом звуть такий трям, який спирається, не перериваючись, на кілька опор,— отже перекриває не менш як два прогони.

Опори нерозрізного тряма повинні мати таку конструкцію, щоб протичинити не тільки зниженню тряма, але й відриванню його від опор. Інакше кажучи, опори повинні виявляти прямовисні реакції як додатні, так і від'ємні. Коли не додержувати



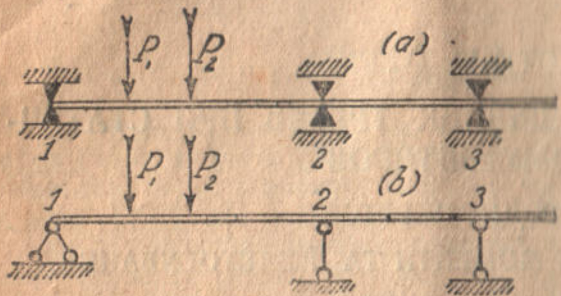
Фіг. 1.

цієї умови, то трям у деяких випадках обтяження може перетворитись на іншу систему. Наприклад, трипрогінний нерозрізний трям (фіг. 1 b), опори якого нездатні виявляти від'ємних реакцій, коли обтяжено один лише середній прогін, перетворюється на звичайний двоопорний трям з піднятими догори консолями На підставі цього можна дати ще таке означення нерозрізного тряма[1].

[1] Див. Д. Я. Акимов-Перетц.— Неразрезные балки.

Трям звемо нерозрізним, коли він перекриває не менше як два прогони, не перериваючись на опорах та зберігаючи з ними зв'язок при довільному обтягові.

Опори нерозрізних трямів краще було б позначити так, як це показано на фіг. 2, але для спрощення ми будемо користуватися звичайним способом позначати опори (фіг. 1). Треба лише пам'ятати, що опори не повинні допускати відривання нерозрізного тряма, що на них спирається.



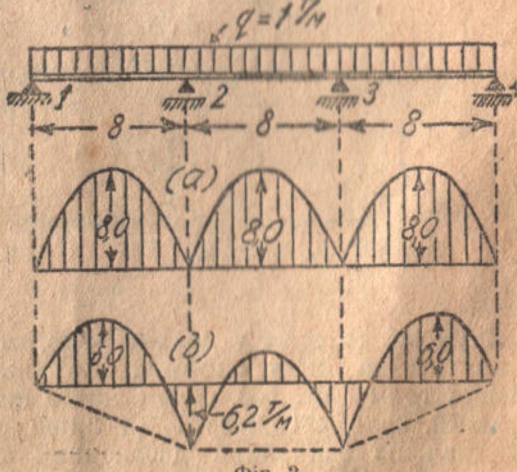
Фіг. 2.

Нерозрізні т р я м и дуже поширені. Не перебільшуючи, можна сказати, що ми частіше маємо справу з нерозрізними трямами, як із розрізними, але для простоти розрахунку нехтуємо безперервність нерозрізних трямів і розглядаємо їх, як ряд двоопорних. За приклад можуть стати подовжні мостові трями, дахові лати, дощані помости тощо. Особливо широко застосовують нерозрізні трями в галузі залізобетонного будівництва, де, через самі властивості вживаного матеріялу, будування їх простіше й дешевше проти будування розрізних трямів.

§ 2. Переваги та хиби нерозрізних трямів.

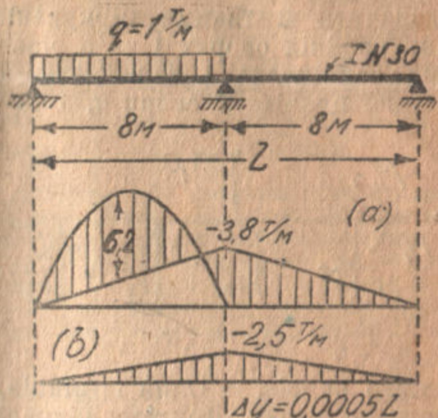
Основна перевага нерозрізних трямів — це чимала економія на вазі споруди, яку одержуємо завдяки меншій величині згинних моментів у нерозрізному трямі проти моментів у ряді звичайних трямів відповідних прогонів.

Щоб ілюструвати це твердження, на фігурі 3 подано епюри моментів у двох випадках перекривання трьох однакових прогонів. У першому випадку їх перекрито трьома окремими двоопорними трямами. У другому випадку їх перекрито одним суцільним нерозрізним трямом. Коли точно дібрати перекрій тряма, не важко досягти економії ваги в 10-15%.



Фіг. 3.

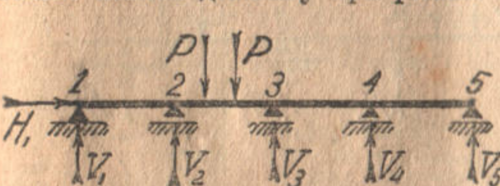
Основна хиба нерозрізних трямів — це їхня чутливість до осідання опор. Опорні точки треба розташовувати неодмінно на проектній вишині, бо найменше порушення цієї вимоги, чи через осідання опор чи через неточне укладання, призводить до появи великих додаткових моментів. Для ілюстрації на фіг. 4 подано епюру моментів, що постають у трямі з двотавра № 30, коли осідає середня опора на 1/2000 загального прогону $L = 2l = 16$ м. Додаткова напруга в трямі досягає в цьому окремому випадку 670 кг/см² при основній напрузі $n = 1000$ кв/см². Наведений приклад показує, що під час проектування нерозрізних трямів конче треба звертати увагу на забезпечення можливої цупкости опор та на точне встановлення опорних частин. Коли осідання опор усунути неможливо, то нерозрізних трямів краще не вживати.



Фіг. 4.

§ 3. Ступінь статичної невизначности нерозрізних трямів.

Уявіть собі нерозрізний трям (фіг. 5), що має чотири прогони й п'ять опор. Одну з опор, наприклад, крайню ліву, ми повинні закріпити нерухомо, щоб вона сприймала чинні поземі сили; інші опори повинні бути поземо-рухомі, щоб трям міг вільно міняти довжину при різних температурних змінах.

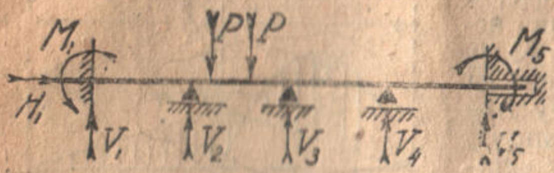


Фіг. 5.

Полічімо число невідомих опорних реакцій. Тому що ліва опора I віднімає від тряма два ступені волі руху, а саме — волю поземого та волю прямовисного переміщення, то ця опора має дві невідомі реакції: позему H_1 та прямовисну V_1. Інші опори, що віднімають від тряма кожна лише по одному ступеню волі руху (воля прямовисного переміщення), мають по одній невідомій реакції. Отже, число невідомих опорних реакцій буде $2 + 4 = 6$. Число рівнянь статики, що їх можна написати для одного твердого тіла, дорівнює трьом; а через те що нерозрізний трям, який проходить, не порушуючи цілости, через усі опори, являє собою одно тверде тіло, то статика дає нам для розрахунку всього троє рівнянь.

Отже, ми маємо 6 невідомих і 3 рівнянь. Тому система, яку ми розглядаємо, буде тричі статично невизначна.

Степінь статичної невизначности нерозрізного тряма можна визначити й такими міркуваннями. Трям, що лежить на самих крайніх опорах 1 та 5, має потрібне й достатнє число опорних закріплень і є водночас статично визначний. Додавання кожної проміжної опори 2, 3 та 4 утворює одну зайву статично невизначну реакцію. Отже, степінь статичної невизначности дорівнює числу проміжних опор.



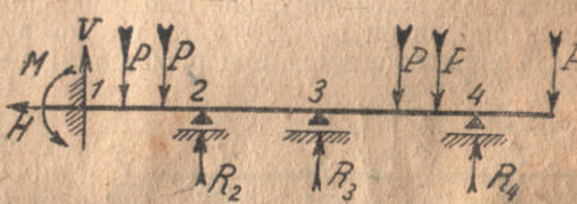
Фіг. 6.

Припустімо тепер, що кінці тряма затиснуто в стіни, як показано на фіг. 6. Один із кінців, наприклад лівий, треба закріпити нерухомо. Другому кінцеві, щоб уникнути температурних напруг, треба дати змогу поземо переміщатись. Конструкція цього останнього опорного закріплення може бути різна.

На рисунку її показано схематично, як напрямний канал, в якому ковзає кінець тряма. Полічімо число невідомих опорних реакцій. Цілком закріплена крайня ліва опора віднімає від тряма три ступені волі руху й має три невідомі реакції, а саме: прямовисну V_1, позему H_1 та опорний момент M_1. Крайня права опора віднімає від тряма лише два ступені волі руху, а саме — волю обертання й волю прямовисного переміщення, і має, звичайно, дві невідомі: прямовисну реакцію V_5 і момент закріплення M_5.

Останні опори мають, як і раніше, по одній невідомій реакції.

Таким чином, повне число опорних реакцій дорівнює $3+1+1+1+2=8$ і ступінь статичної невизначности системи є $8-3=5$. На підставі всього сказаного ми зробимо такий висновок.



Фіг. 7.

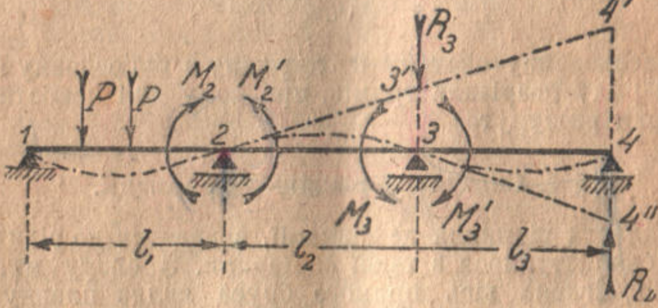
Коли кінці нерозрізного тряма можуть вільно повертатись, то ступінь статичної невизначности тряма дорівнює числу проміжних опор; затиснення якогось кінця збільшує ступінь статичної невизначности на одиницю.

Запам'ятаймо ще, що наявність консолі не збільшує ступеня статичної невизначности. Тому трям, що його подано для прикладу на фіг. 7, буде 3 рази статично невизначний.

§ 4. Вибір статично-невизначних величин.

Коли нерозрізний трям має небагато прогонів, за статично невизначні величини можна вважати реакції проміжних опор, але цей спосіб незручний тим, що навіть при 1 — 2 проміжних опорах потребує великої кількости обчислень. Коли ж проміжних опор багато, застосувати цей спосіб практично неможливо. Тому для розрахунку нерозрізних трямів за статично невизначні величини вважають так звані опорні моменти.

Для того, щоб з'ясувати суть і походження цих моментів, розгляньмо такий приклад. Нехай дано трипрогінний нерозрізний трям, який обтяжують сили $P - P$ у першому прогоні (див. фіг. 8). Уявімо спочатку, що всіх опор, крім перших двох, нема. Тоді частина тряма $2 - 4$, залишаючись простолінійна, підо впливом сил $P - P$ підніметься і змінить своє положення на $2 - 4'$. Додаймо опору 3 і пригнімо до неї трям прямовисною силою R_3. При цьому, вплив другого прогону на перший визначиться через момент M_2, що



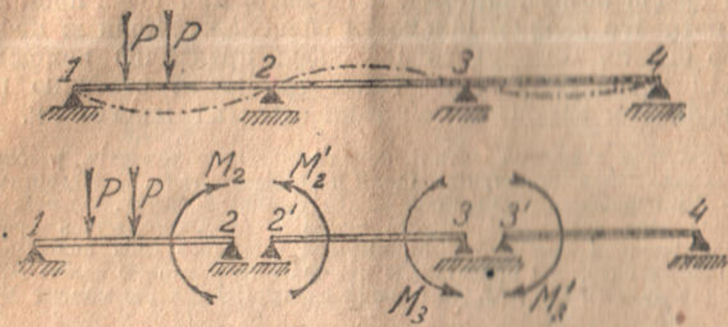
Фіг. 8.

спрямований за годинниковою стрілкою й дорівнює $R_3\, l_2$, де l_2 — довжина другого прогону. Навпаки, вплив першого прогону на другий буде визначено через момент M_2', який за законом чину й протичину повинен бути однаковий величиною й противний знаком з моментом M_2.

Коли ми пригнули трям на опору 3, то частина її $3' - 4'$ праворуч від цієї опори залишилася простолінійна і змінила своє положення на $3 - 4''$. Додаймо тепер опору 4 і піднесімо до неї трям, приклавши прямовисну силу R_4. Тоді вплив 3-го прогону на 2-й визначиться через момент $M_3 = R_4\, l_3$, який матиме напрям за годинниковою стрілкою. Навпаки, вплив 2-го прогону на третій визначиться через момент M'_3, що однаковий величиною з моментом M_3 і противний напрямом. Тому зрозуміло, що коли додаємо момент M_3, то він змінює знайдений раніше момент M_2.

Отже, взаємочинність двох суміжних прогонів нерозрізного тряма виявляється, як два рівні й протилежні моменти, які постають у перекроях тряма над проміжними опорами. Ці моменти, що звуться опорними, ми вважатимемо за статично-невизначні величини. Запам'ятаймо, що опорні моменти є водночас згинні моменти в перекроях нерозрізного тряма над опорами.

Основною статично-визначною системою, що відповідає вибраним зайвим невідомим, буде ряд звичайних двоопорних трямів, які перекривають окремі прогони. Щоб одержати цю основну систему, ми повинні розрізати даний трям над опорами й відновити порушений зв'язок між окремими частинами, додавши опорні моменти. На фіг. 9 подано дану

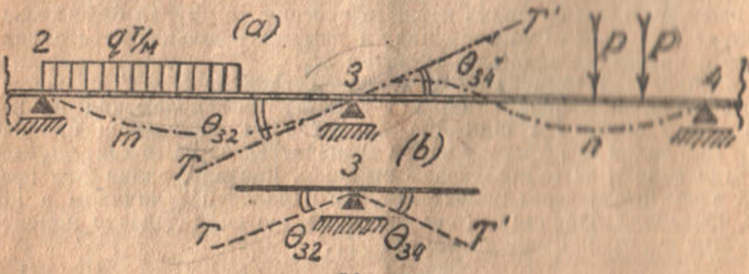


Фіг. 9.

статично-невизначну систему й одержану з неї основну систему в вигляді ряду розрізних трямів, при чому для ясности окремі трями трохи розсунуто.

§ 5. Складання рівнянь деформації.

Щоб скласти рівняння деформації, в додаток до рівнянь статики, ми скористуємося з такої обставини. З опору матеріялів відомо, що зігнена вісь прямого бруса являє плавну криву. А тому що нерозрізний трям є не що інше, як один прямий брус, що безперервно проходить через кілька прогонів, то ви-



Фіг. 10.

ходить, що й зігнена вісь повинна становити плавну криву. На цій підставі ми з певністю можемо сказати, що на опорах, де одна частина кривої переходить у другу, обидві суміжні частини повинні мати спільну дотичну.

Щоб ілюструвати це твердження, на фіг. 10 подано два суміжні прогони нерозрізного тряма й показано крапчаком лінію зігненої осі в цих прогонах.

На опорі 3 крива $2m3$ плавно переходить у криву $3n4$ і, звичайно, дотична TT' до кривої $2m3$ є водночас дотична й до кривої $3n4$.

З того, що дотична на цій опорі спільна для обох прогонів, виходить, що кути $23T$ та $43T'$ рівні. Позначмо кожний з цих кутів літерою Θ з двома підрядковими індексами. Ці індекси показують опори того тряма, до якого стосується кут, що ми його разглядаємо, при чому на першому місці ставимо індекс тієї опори, біля якої міститься кут Θ. Отже, кут $23T$, що є кут нахилу тряма $2-3$ на опорі 3, повинен мати індекси 2 та 3, з яких на першому місці поставимо індекс 3. З тих самих міркувань кут $43T'$ позначено індексом 34, бо він належить до тряма $3-4$ і міститься на опорі 3.

Умовмося кути Θ вважати за додатні, коли зігнена вісь тряма обернена опуклістю донизу. Це відповідає звичайній умові про додатний знак згинного моменту. Тоді для спільності дотичних на опорі треба, щоб кут нахилу дотичної ліворуч від цієї опори був однаковий величиною й різний знаком із кутом нахилу дотичної праворуч від опори. Коли б ми написали просто $\Theta_{32}=\Theta_{34}$, то дотичні розташувалися б так, як показано на фіг. $10b$, що заперечує твердження про плавність зігненої осі. Отже, ми можемо написати

$$\Theta_{32}=-\Theta_{34} \quad \text{звідки} \quad \boxed{\Theta_{32}+\Theta_{34}=0} \tag{1}$$

Коли ми визначимо кути Θ в залежності від опорних моментів та даного обтягу й підставимо величини їх у рівняння (1), то одержимо залежність між зайвими невідомими. Це й буде рівняння деформації, яке виведено з умови, що дотичні на опорі 3 є спільні. Рівнянь такого вигляду ми можемо написати стільки, скільки проміжних опор є в трямі, а тому що число зайвих невідомих дорівнює числу проміжних опор, то ми матимемо досить даних, щоб розв'язати статичну невизначність.

√§ 6. Обчислення кута нахилу дотичної до зігненої осі.

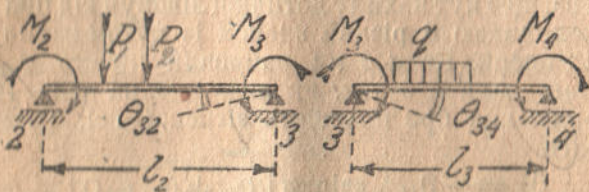
Нагадаймо важливе твердження з опору матеріялів: прогин в якомусь перекрої тряма дорівнює фіктивному згинному моментові M^{Φ}, поділеному на цупкість EJ, а кут нахилу дотичної до зігненої осі дорівнює фіктивній перерізній силі Q^{Φ}, теж поділеній на цупкість EJ.

Під M^{Φ} та Q^{Φ} розуміємо момент та перерізну силу, яку одержуємо в розглядуваному перекрої, коли ми вмістимо на трямі фіктивний обтяг, інтенсивність якого змінюється за законом епюри згинних моментів, або, коротко кажучи, коли ми обтяжимо трям „епюрою згинних моментів“.

Нас цікавлять кути нахилу дотичної на опорах. Для звичайного тряма без консоль перерізна сила на опорі дорівнює опорній реакції. Тому кут нахилу дотичної на опорі дорівнюватиме фіктивній опорній реакції, поділеній на цупкість тряма EJ.

§ 7. Обчислення фіктивних реакцій.

Вилучмо з нерозрізного тряма два суміжні прогони l_2 та l_3, які розчленуймо на два прості трями, що вільно лежать на опорах 2 — 3 та 3 — 4 (фіг. 11). До цих трямів прикладено, поперше, дані зовнішні сили P, q, а подруге — опорні моменти M_2, M_3, M_3 та M_4. З них момент M_2 замінює вплив лівих відкинутих прогонів на відокремлену частину; момент M_4 — вплив на ту саму частину правих відкинутих прогонів і, нарешті, два різні та протилежні моменти M_3 і M_3 являють взаємочин двох вилучених прогонів. Не знаючи нічого про знак цих мо-



Фіг. 11.

ментів, вважатимемо всі їх за додатні, що намагаються зігнути окремі двоопорні трями опуклістю донизу. Кут Θ_{32}, що входить у рівняння деформації (1), дорівнює фіктивній реакції двоопорного тряма 2 — 3 на опорі 3, поділеній на цупкість EJ. З тих самих міркувань кут Θ_{34} дорівнює фіктивній реакції двоопорного тряма 3 4 на опорі 3, поділеній на цупкість EJ. Позначивши[1] ці фіктивні реакції відповідно через $R^{ф}_{32}$ та $R^{ф}_{34}$, ми можемо написати:

$$\Theta_{32} = R^{ф}_{32} : EJ \ ; \ \Theta_{34} = R^{ф}_{34} : EJ$$

Зупинімося на визначенні величини $R^{ф}_{32}$, цебто фіктивної реакції на опорі 3 від тряма 2 — 3, коли цей трям обтяжують епюри моментів від даних сил P та від невідомих опорних моментів M_2 і M_3. Реакція $R^{ф}_{32}$ складається з трьох частин. Щоб визначити першу частину фіктивної реакції, обтяжуємо прогін l_2 епюрою моментів від зовнішніх сил P_1, P_2... (фіг. 12). Площу цієї епюри ω_2 візьмемо за фіктивну силу, що її прикладено в центрі ваги епюри моментів. Коли позначити віддаль її центра

---

[1] Позначення вибрано відповідно до сказаного в § 5. Кожна реакція має два індекси, що показують опори того тряма, до якого вона стосується; при чому на першому місці стоїть індекс тієї опори, на якій реакцію прикладено.

ваги від лівої опори через C_2, то фіктивну реакцію на опорі 3 знайдемо з рівняння моментів відносно опори 2; вона буде

$$R' = \frac{\omega_2 C_2}{l_2}$$

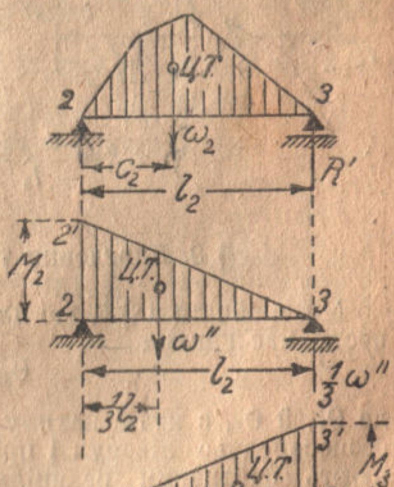
Щоб знайти другу частину реакції, обтяжуємо прогін l_2 епюрою від лівого опорного моменту M_2. Епюра ця, як відомо з опору матеріялів, є прямокутній трикутник з найбільшою ординатою над опорою 2, що дорівнює $22' = M_2$. Площу цієї епюри ω'', що дорівнює $^1/_2\ M_2 l_2$, вважаємо за фіктивну силу, прикладену в центрі ваги епюри, цебто на віддалі $\frac{1}{3} l_2$ від лівої опори та на віддалі $\frac{2}{3} l_2$ від правої опори. Сила ω'' розподіляється на опори обернено-пропорційно до рамен. Через те на ліву опору передається $\frac{2}{3}\omega''$, а на праву — $\frac{1}{3}\omega''$. Отже, друга частина фіктивної реакції на опорі 3 буде

$$R'' = \frac{1}{3}\ \omega'' = \frac{1}{6}\ M_2 l_2 \quad = \frac{1}{3}\frac{1}{2} M_2 l_2$$

Щоб знайти останню частину цієї самої реакції, обтяжуємо прогін l_2 епюрою від правого опорного моменту M_3. Епюра ця також є трикутник із найбільшою ординатою над правою опорою, при чому ордината ця $33' = M_3$. Площа епюри ω''' визначиться добутком $\omega'' = \frac{1}{2} M_3 l_2$. На праву опору припаде $\frac{2}{3}\omega'''$ і фіктивна реакція цієї опори буде

$$R''' = \frac{2}{3}\ \omega''' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} M_3 l_2 =$$

$$= \frac{1}{3}\ M_3 l_2$$

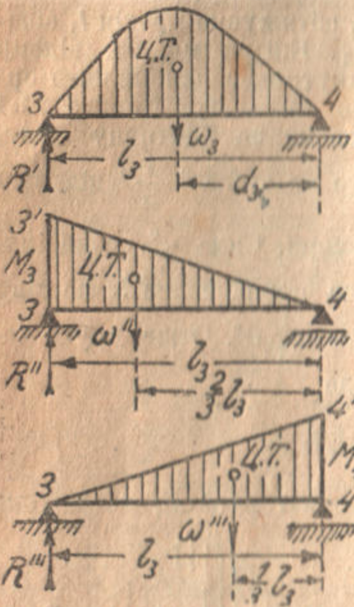


Фіг. 12.

Знаючи окремі реакції, знаходимо повну фіктивну реакцію трама 2 — 3 на опорі 3:

$$R^{\text{ф}}_{32} = \frac{\omega_2 C_2}{l_2} + \frac{M_2 l_2}{6} + \frac{M_3 l_2}{3} \qquad (A)$$

Перейдімо тепер до визначення повної фіктивної реакції $R^{\text{ф}}_{32}$. Вона також складається з трьох частин. Першу частину знайдемо, коли обтяжимо трям 3 — 4 епюрою моментів від даних зовнішніх сил (фіг. 13) і знайдемо реакцію на опорі 3. Позначивши площу цієї епюри через ω_3 та віддаль центра ваги її від опори 4 через d_3, знайдемо:



Фіг. 13.

$$R' = \frac{\omega_3 d_3}{l_3}$$

Другу частину одержимо, коли обтяжимо прогін l_3 епюрою від опорного моменту M_3. Епюра ця на вигляд є прямокутній трикутник із найбільшою ординатою над опорою 3 і дає над цією опорою реакцію

$$R''' = \frac{1}{3} M_3 l_3$$

Нарешті, третю частину фіктивної реакції одержимо, обтяжуючи прогін l_3 епюрою від опорного моменту M_4. Очевидно, що

$$R''' = \frac{1}{6} M_4 l_3$$

Тепер легко знайти й повну фіктивну реакцію на опорі 3 тряма 3 — 4

$$R_{34}^{\Phi} = \frac{\omega_3 d_3}{l_3} + \frac{1}{3} M_3 l_3 + \frac{1}{6} M_4 l_3 \qquad (B)$$

§ 8. Виведення теореми про три моменти.

Ми знайшли в § 5, що для проміжної опори 3 рівняння пружности має вигляд

$$\Theta_{32} + \Theta_{34} = 0 \qquad (1)$$

де Θ_{32} й Θ_{34} є кути нахилу дотичних до зігненої трямової осі безпосередньо ліворуч і праворуч від опори 3. Кути ці дорівнюють фіктивним реакціям R_{32}^{Φ} та R_{34}^{Φ}, поділеним на цупкість трями EJ. Підставивши замість 6 фіктивних реакцій знайдені для них вирази (A) та (B) і завівши їх у рівняння (1), одержимо

$$\frac{\omega_2 C_2}{l_2 EJ} + \frac{M_2 l_2}{6EJ} + \frac{M_3 l_2}{3EJ} + \frac{\omega_3 d_3}{l_3 FJ} + \frac{M_3 l_3}{3EJ} + \frac{M_4 l_3}{6EJ} = 0 \qquad (a)$$

Тут маємо на увазі трями сталого перекрою, тому всі члени поділено на однакову величину EJ.

Коли перенесемо відомі величини до правої частини й помножимо обидві частини рівняння на $6\,EJ$, знайдемо:

$$M_2 l_2 + 2\,M_3\,(l_2 + l_3) + M_4 l_3 = \frac{6\,\omega_2\,C_2}{l_2} - \frac{6\,\omega_3\,d_3}{l_3} \qquad (2)$$

Вирази, що входять із сучинником — 6 в праву частину рівности (2), є не що інше, як фіктивні реакції на опори 3, коли суміжні прогони обтяжено епюрами моментів від самих даних зовнішніх сил, а сума їх визначає величину повної фіктивної реакції на опорі 3. Позначмо цю реакцію через $R_3^{\phi^0}$. Тоді рівняння (2) можна переписати в такому вигляді:

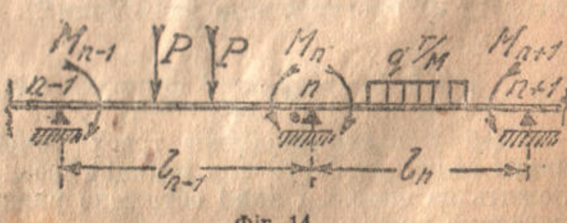
$$M_2 l_2 + 2\,M_3\,(l_2 + l_3) + M_4\,l_3 = -\,6\,R_3^{\phi^0} \qquad (b)$$

Умовмося величини M, Q та R, які одержуємо, обтяжуючи якийсь прогін нерозрізного тряма лише даними зовнішніми силами і вважаючи його за прогін двоопорного розрізного тряма, звати основними й позначати M^0, Q^0 та R^0 (з індексом „0“ угорі. Коли якусь фіктивну реакцію R_3^{ϕ} одержуємо від обтягу прогону епюрою моментів від даних сил, то зватимемо її також основною, лише фіктивною, і позначатимемо індексом „0“ угорі. Згідно з цією умовою й позначено праву частину рівняння (b).

Щоб написати рівняння загального вигляду, замінимо в формулі індекси 2 й 3 відповідно індексами $n-1$ та n. Тоді одержимо:

$$M_{n-1}\,l_{n-1} + 2\,M_n\,(l_{n-1} + l_n) + M_{n+1}\,l_n = -\,6\,R_n^{\phi^0} \qquad (3)$$

Це й є відома теорема про три моменти[1], що є основа більшости розрахунків нерозрізних трямів. Її пишуть завжди для якоїсь проміжної опори нерозрізного тряма та двох суміжних з тією опорою прогонів. Висловити її можна так (фіг. 14): для кожних двох суміжних прогонів нерозрізного тряма з моментами M_{n-1}, M_n та M_{n+1} на кінцях можна написати таку залежність: сума добутків з лівого опорного моменту M_{n-1} на лівий прогін l_{n-1}, з подвоєного середнього моменту M_n на суму суміжних прогонів $l_{n-1} + l_n$ та з правого моменту M_{n+1} на правий прогін l_n дорівнює взятій із сучинником — 6 повній основній фіктивній реакції $R_n^{\phi^0}$ на проміжній опорі n.

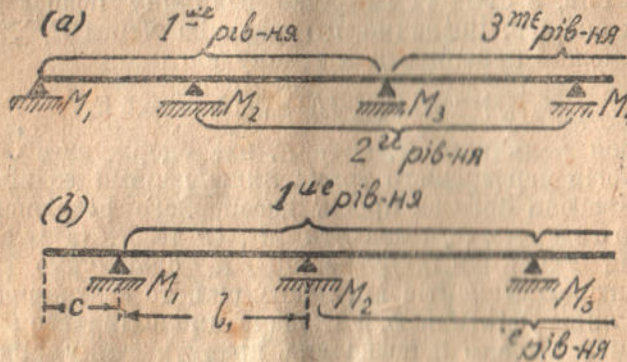


Фіг. 14.

[1] Довів її вперше француз Берто року 1855, а потім Кляпейрон. Пишуть її, звичайно, в формі рівняння (2), яке іноді звуть Кляпейроновим рівнянням трьох моментів.

Під основною фіктивною реакцією ми розуміємо реакцію, яку одержимо на опорі n, коли обтяжимо суміжні прогони епюрами моментів від самих даних сил, вважаючи кожний прогін за трям на двох опорах.

Коли нерозрізний трям має кілька проміжних опор, то рівняння трьох моментів треба писати поступово для кожної пари суміжних прогонів, як показано на фіг. 15a. Число таких рівнянь дорівнюватиме числу проміжних опор.



Фіг. 15.

Відзначмо ще той випадок, коли розрізний трям на одному кінці має консолю (фіг. 15b). Буде велика помилка писати в цьому випадку рівняння трьох моментів для консолі C та першого прогону l_1. Дійсно, опора 1 не є проміжна опора нерозрізного тряма, і консолю C, без опори на лівому кінці, не можна вважати за прогін нерозрізного тряма.

§ 9. Розрахункові формули фіктивних реакцій.

Щоб уживати рівняння трьох моментів, обов'язково треба знати величину фіктивних реакцій двоопорного тряма, що вільно лежить на опорах і який обтяжено різними способами. Дані ці наводимо нижче:

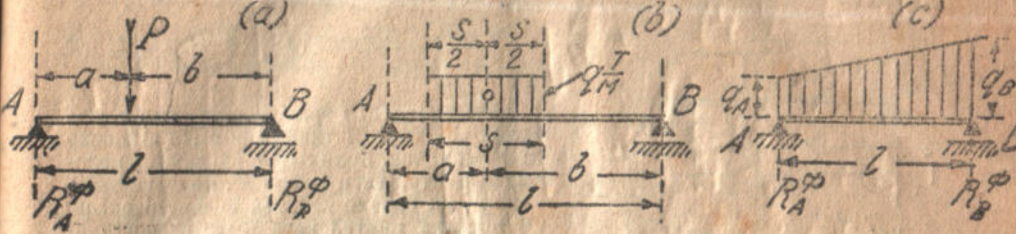
1-й випадок: трям прогоном l обтяжено одною зосередженою силою P на віддалі a та b від опор A і B.

Фіктивні реакції на цих опорах відповідно рівні (фіг. 16a)

$$\boxed{R_A^\phi = \frac{Pab}{6l}(l+b);\quad R_B^\phi = \frac{Pab}{6l}(l+a)} \qquad (4)$$

Щоб уникнути помилок, зауважмо, що для реакції на лівій опорі A за другий член у дужках править віддаль до правої опори B і навпаки. Щоб перевірити знайдені реакції, нам стане в пригоді рівність:

$$R^{\phi}_{A} + R^{\phi}_{B} = \frac{1}{2} Pab$$



Фіг. 16.

2-й випадок: кілька зосереджених тягарів P_1, P_2 ... на віддалі a_1, a_2 ... від опори A й на віддалі b_1, b_2 ... від опори B.

Повні фіктивні реакції складаються з суми реакцій від кожної з даних сил зокрема.

$$R^{\phi}_{A} = \Sigma \frac{P_i a_i b_i}{6l}(l + b_i); \; R^{\phi}_{B} = \Sigma \frac{P_i a_i b_i}{6l}(l + a_i) \qquad (5)$$

3-й випадок: рівномірний обтяг q т на под. м на всьому прогоні тряма.

Обидві фіктивні реакції, очевидно, рівні. Їх визначаємо за формулою:

$$\boxed{R^{\phi}_{A} = R^{\phi}_{B} = \frac{1}{24} q l^3} \qquad (6)$$

4-й випадок (фіг. 16b): рівномірний обтяг q т/м на дільниці завдовжки S, середина якої лежить на віддалі a та b від опор A й B.

Фіктивні реакції дорівнюють:

$$R^{\phi}_{A} = \frac{Qab}{6l}(l + b) - \frac{QS^2}{24\,l} b; \; R^{\phi}_{B} = \frac{Qab}{6l}(l + a) - \frac{QS^2}{24\,l} a \qquad (7)$$

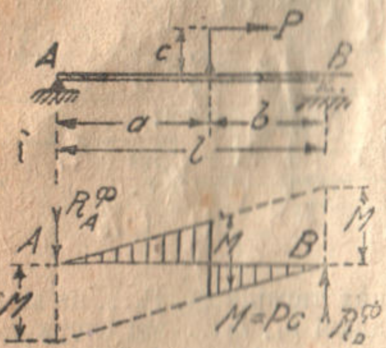
де $Q = qs$ повний обтяг на дільниці s.

5-й випадок (фіг. 16c). Обтяг на всьому прогоні розподілено за законом трапезу з інтенсивностями q_A та q_B на опорах A та B.

$$R^{\phi}_{A} = \frac{l^3}{360}(8\,q_A + 7\,q_B); \quad R^{\phi}_{B} = \frac{l^3}{360}(8\,q_B + 7\,q_A) \qquad (8)$$

6-й випадок (фіг. 17). Обтяг — пара $M = Pc$, прикладена в перекрої на віддалі a та b від опор A і B. Напрям пари вважаємо за годинниковою стрілкою.

$$R_A^{\text{ф}} = -\frac{Ml}{6}\left[1 - 3\left(\frac{a}{l}\right)^2\right]; \quad R_B^{\text{ф}} = +\frac{Ml}{6}\left[1 - 3\left(\frac{b}{l}\right)^2\right] \qquad (9)$$



Фіг. 17.

Епюра моментів має вигляд, як на фіг. 17.

Усі наведені формули одержано з рівняння моментів фіктивних обтягів відносно опорних точок. Коли легко визначити положення центра ваги епюри M, то складаючи момент, ми беремо добуток із площі епюри на віддаль центра ваги її до відповідної опори; в противному разі доводиться брати елементарні площивки, помножати їх на віддалі до опор і робити інтеґрування.

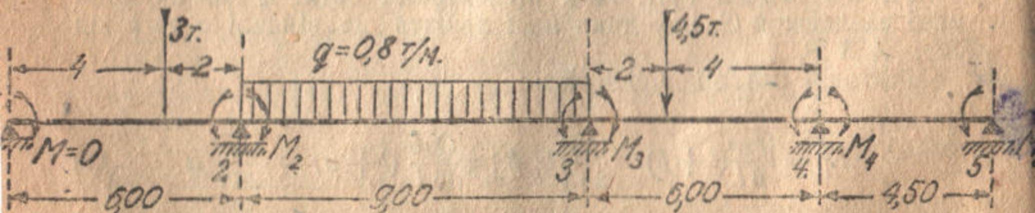
Запам'ятаймо, що фіктивні реакції завжди міряються тонно-метрами у квадраті (тм²).

При різних комбінаціях обтягу повні фіктивні реакції знаходять, як суми окремих фіктивних реакцій, що відповідають кожному обтягові зокрема.

§ 10. Приклад розрахунку нерозрізного тряма за способом трьох моментів.

Застосовання теореми про три моменти, яку ми щойно вивели, до розрахунку нерозрізних трямів найзручніше показати на окремому прикладі.

Дано нерозрізний трям на 5-ти опорах, розміри й спосіб обтягу якого показано на фіг. 18. Треба обчислити опорні моменти та побудувати епюри згинних моментів та перерізних сил.



Фіг. 18.

Розрахунок провадимо за таким порядком:

1. Обчислення фіктивних реакцій. Розрахунок починаємо з обчислення фіктивних реакцій на кінцях кожного обтяженого прогону. Для першого прогону завдовжки $l_1 = 6$ м, обтяженого силою $P=3$ т на віддалях $a=4$ м та $b=2$ м від опор A та B нам треба знати фіктивну реакцію лише на правій опорі, бо тільки вона є проміжна, рівняння ж трьох моментів треба писати, як ми це свого часу зауважили, для проміжних опор тряма. З формули (4) попереднього параграфа обчислюємо $R_{21}^{ф^0}$ — основну фіктивну реакцію на опорі 2 двоопорного тряма 21, який обтяжено зосередженим тягаром P:

$$R_{21}^{ф^0}=\frac{Pab}{6l}(l+a)=\frac{3\cdot4\cdot2}{6\cdot6}(6+4)=6{,}67 \text{ тм}^2$$

Фіктивна реакція на тій самій опорі від тряма 2 — 3, який обтяжено рівномірним обтягом q, буде

$$R_{23}^{ф^0}=\frac{1}{24}ql^3=\frac{1}{24}0{,}8\cdot9^3=24{,}30 \text{ тм}^2$$

Повна фіктивна реакція на опорі 2 дорівнює

$$R_2^{ф^0}=6{,}67+24{,}30=30{,}97 \text{ тм}^2$$

Далі поступово знаходимо фіктивні реакції третьої опори. Фіктивна реакція від тряма 2 — 3:

$$R_{32}^{ф^0}=\frac{1}{24}ql^3=24{,}30 \text{ тм}^2$$

Фіктивна реакція на тій самій опорі від тряма 3 — 4:

$$R_{34}^{ф^0}=\frac{Pab}{6l}(l+b)=\frac{4{,}5\,.\,2.4}{6\,.\,6}(6+4)=10 \text{ тм}^2$$

Повна фіктивна реакція на опорі 3:

$$R_3^{ф^0}=24{,}30+10{,}00=34{,}30 \text{ тм}^2$$

Фіктивна реакція на опорі 4 від тряма 3 — 4

$$R_{43}^{ф^0}=\frac{Pab}{6l}(l+a)=\frac{4{,}5\,.\,2.4}{6.6}(6+2)=8 \text{ тм}^2$$

Фіктивна реакція на тій самій опорі 4 від тряма 4 — 5 дорівнює нулеві, тому що в прогоні 4 5 немає зовнішніх сил і епюра моментів від цих сил перетворюється на нуль.

Повна фіктивна реакція на опорі 4:

$$R_4^{ф^0}=R_{43}^{ф^0}=8 \text{ тм}^2$$

2. Складання рівнянь трьох моментів. Нам доведеться написати рівняння трьох моментів тричі. Для двох перших прогонів ліва частина цього рівняння являтиме суму добутків: з лівого опорного моменту M_1 на лівий прогін $l_1=6$, середнього моменту M_2 на суму суміжних прогонів $l_1+l_2=6+9$ та правого моменту M_3 на правий прогін $l_2 = 9$. Права ж частина рівняння являтиме собою взяту з сучинником — 6 основну фіктивну реакцію на середній опорі 2. Ця реакція за нашими підрахунками дорівнює 30,97. Через те рівняння трьох моментів матиме вигляд:

$$M_1 . 6 + 2 M_2 (6 + 9) + M_3 . 9 = -6 . 30,97 \qquad \text{(a)}$$

Тому що момент M_1 на першій опорі дорівнює нулеві[1], то рівняння (a) можна переписати в такому вигляді

$$30 M_2 + 9 M_3 = -185,82 \qquad \text{(a')}$$

Для дальшої пари прогонів $l_2 - l_3$ рівняння напишемо так:

$$M_2 9 + 2 M_3 . (9 + 6) + M_4 . 6 = -6 . 34,30 \text{ тм}^2 \qquad \text{(b)}$$

Нарешті, для останньої пари прогонів $l_3 - l_4$ рівняння трьох моментів буде таке:

$$M_3 6 + 2 M_4 (6 + 4,5) = -6 . 8,00 \text{ тм}^2 \qquad \text{(c)}$$

У цьому рівнянні момент M_5 дорівнює нулеві, тому що крайня права опора дозволяє вільне повертання правого кінця тряма.

Зробивши можливі спрощення в одержаних рівняннях, одержимо таку систему:

$$30 M_2 + 9 M_3 = -185,82 \qquad \text{(a'')}$$

$$9 M_2 + 30 M_3 + 6 M_4 = -205,80 \qquad \text{(b')}$$

$$6 M_3 + 21 M_4 = -48,00 \qquad \text{(c')}$$

3. Розв'язання рівнянь трьох моментів. Щоб збільшити точність розв'язання, треба виключити ті невідомі моменти, які мають невелику величину. Через те що найбільші моменти одержуємо в найобтяженіших прогонах, то виключення невідомих треба вести з кінців тряма в напрямі до цих прогонів.

Для нашого прикладу знаходимо:

$$M_3 = -5,165 \text{ тм}; \; M_2 = -4,473 \text{ тм}; \; M_4 = -0,810 \text{ тм}$$

Усі опорні моменти, як бачимо, від'ємні. Це показує, що зроблене припущення про те, що опорні моменти гнуть трями вниз, не відповідає дійсності. Опорні моменти намагаються вигнути окремі прогони опуклістю догори.

4. Побудування епюр моментів та проведення лінії опорних моментів. Побудуємо спочатку епюру моментів для котрогось обтяженого прогону, наприклад, для прогону l_2. Епюру цю одержимо в наслідок накладання трьох окремих епюр, а саме — одної епюри від даних зовнішніх сил і двох епюр від обчислених опорних моментів.

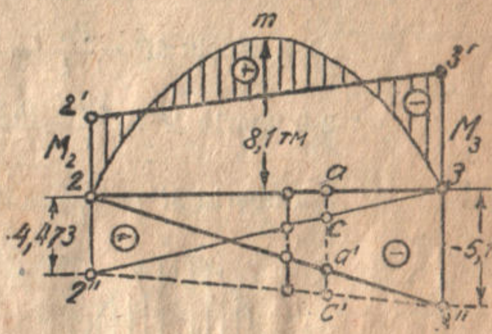
[1] Опора 1 припускає вільне повертання опертого на неї кінця тряма; отже, над нею не може бути опорного моменту.

Перша епюра при даному обтягові $q = 0{,}8$ т/п.м при $l_2 = 9$ м являє собою параболю 2т3 (фіг. 19) з найбільшою ординатою посередині, яка дорівнює

$$M^0 = \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{8} \cdot 0{,}8 \,.\, 9^2 = 8{,}1 \text{ тм}$$

Епюра ця додатня і ми побудуємо її вище нульової лінії 23. Друга епюра від лівого опорного моменту M_2 є трикутник з найбільшою ординатою на опорі 2, що дорівнює $22'' = -4{,}473$ тм. Третя епюра від моменту M_3 є також трикутник з найбільшою ординатою на опорі 3, що дорівнює $33'' = -5{,}165$ тм.

Дві останні епюри від'ємні, і через те побудовано їх унизу від нульової лінії. Склавши їх [1], одержуємо трапез $22''\,3''\,3$ з ординатами на опорах, що відповідно дорівнюють опорним моментам. Цей трапез являє собою також від'ємну площу моментів. Для того, щоб відняти її від додатньої площі, перевертаємо трапез у положення $22'\,3'\,3$ і накладаємо на параболю додатніх моментів 2m3. Частина параболі, що виходить за межі трапеза, являтиме собою додатні моменти; частина трапеза, що виходить за межі параболі, являтиме від'ємні моменти. В спільній частині обох фігур додатні моменти сумуються з рівними з ними від'ємними моментами. Нульовою лінією при відлічуванні моментів буде похила пряма $2'\,3'$.



Фіг. 19.

Проглянувши фіг. 19, можна вивести таке просте правило для побудови епюр моментів.

1) Будуємо в кожному обтяженому прогоні епюру моментів M^0 від даних зовнішніх сил, вважаючи окремі прогони за звичайні трями на двох опорах. Маштаб добираємо відповідно до величини моментів та розмірів рисунка. Додатні моменти M^0 відкладаємо вгору.

2) Відкладаємо на опорних прямовисах у тому самому мірилі величини опорних моментів; для автоматичного віднімання ординат від'ємні опорні моменти відкладаємо в той самий бік, що й додатні моменти від даних зовнішніх сил, цебто вгору.

3) Через вершки ординат, що являють собою опорні моменти, проводимо в кожному прогоні прямі лінії. Одержана ламана лінія відтинає частини збудованих раніш M^0 і є нульова

[1] Ординату *ас* першого трикутника прикладаємо до ординати *аа'* другого трикутника і одержуємо сумарну ординату *ас'*.

лінія для відлічування ординат решти площі моментів. Ординати, розташовані вище нульової лінії, будуть додатні, нижче — від'ємні.

Ламану лінію, що сполучає вершки опорних моментів, далі будемо звати: лінія опорних моментів.

Вершки її лежать на прямовисах опор, а ординати вершків дорівнюють відповідним опорним моментам.

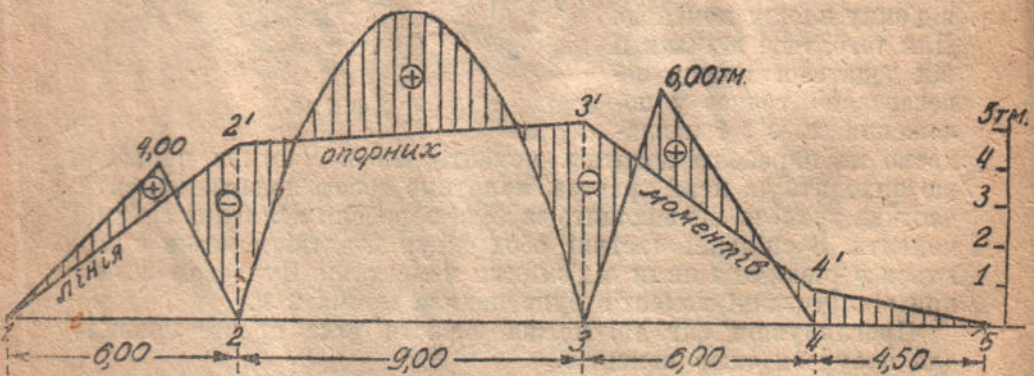
Отже, побудова епюри моментів входить до побудови основних епюр M^0, відкладання опорних моментів та проведення ліній опорних моментів.

Для нашого прикладу обчислюємо спочатку характерні ординати епюр M^0 від даних зовнішніх сил.

$$\text{1-й прогін } M^0 = \frac{Pab}{l} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2}{6} = 4 \text{ тм}$$

$$\text{2-й прогін } M^0 = \frac{ql^2}{8} = \frac{0,8 \cdot 9^2}{8} = 8,1 \text{ тм}$$

$$\text{3-й прогін } M^0 = \frac{Pab}{l} = \frac{4,5 \cdot 2 \cdot 4}{6} = 6 \text{ тм}$$



Фіг. 20.

Будуємо основні епюри M^0 (див. фіг. 20). У першому прогоні це буде трикутник, у другому — парабола і в третьому прогоні — знову трикутник. Потім відкладаємо $22' = M_2 = -4,473$ тм, $33' = M_3 = -5,165$ тм, $44' = M_4 = -0,810$ тм, і через вершки їхні проводимо лінію опорних моментів.

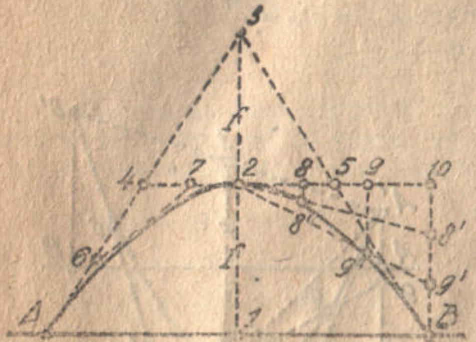
Тут буде до речі нагадати деякі способи побудови основної епюри M^0.

а) Нехай треба побудувати параболу на прогоні l із стрілкою піднятку $f = \frac{1}{8} ql^2$ (фіг. 21).

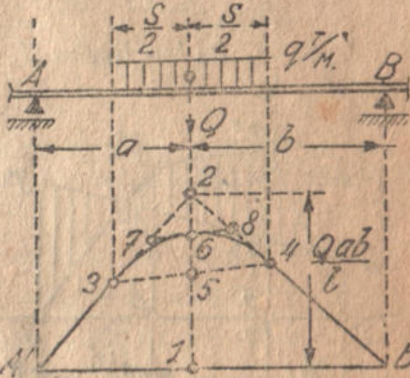
Для цього на прямовисі посередині прогону відкладаємо відтинки $12 = 23 = f$. Точку 3 сполучаємо прямими з опорами A та B. Прямі $A3$ та $B3$ є дотичні до параболі на опорах. Потім через точку 2 проводимо пряму $45 \parallel AB$. Ця пряма буде дотична до параболі у вершку. В одержаний многокутник дотичних $A45B$ вписуємо рукою параболю. Коли бажано збільшити точність побудови, то можна поділити навпіл відтинки $A4$ та 42 і сполучити одержані точки $6-7$ прямою. Пряма ця буде дотична до параболі.

Коли треба знайти кілька точок параболі, будуємо прямокутник $1-2-10-B$, бік якого $10B$ ділимо на 3 рівні частини. Точки поділу $8'$ та $9'$ сполучаємо з вершком параболі 2. Потім ділимо на таке саме число рівних частин бік прямокутника $2-10$ і точки поділу переносимо прямовисно на відповідні промені $2-8'$ та $2-9'$.

b) Нехай треба побудувати епюру моментів для випадку обтягу, поданого на фіг. 22.



Фіг. 21.



Фіг. 22.

Для цього обчислюємо зосереджений тягар $Q = qs$, що заміняє даний розподілений обтяг, прикладаємо його посередині обтяженої дільниці s і будуємо епюру для зосередженого тягара Q. Епюра ця, як відомо, має форму трикутника з вершком під тягарем і з найбільшою ординатою, що дорівнює

$$\overline{12} = \frac{Qab}{l} = \frac{qsab}{l}$$

де a та b є віддаль середини обтяженої дільниці s від опор A та B. Знайдену точку 2 сполучаємо прямими з опорами A та B; на ці прямі переносимо прямовисно межі обтяженої дільниці. Таким чином визначаємо точки 3 та 4, між якими вершок трикутника повинна зрізати параболя.

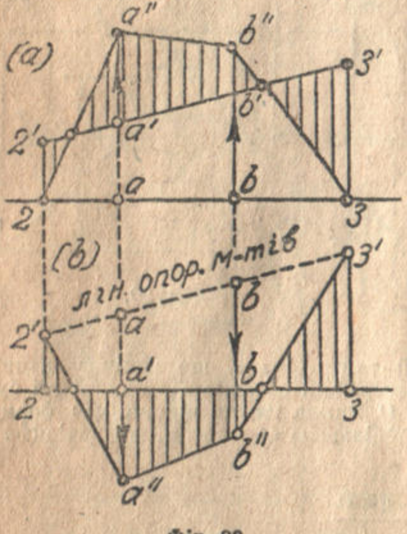
Потім сполучаємо прямою точки 3 та 4, ділимо навпіл одержаний відтинок 52 і через середину його 6 проводимо пряму 78, рівнобіжну з 34. Тепер лишається лише вписати параболю в многокутник дотичних 3784.

Коли бажано збільшити точність побудови, то можна знайти середні точки відтинків 37, 76, 68, 84 і сполучити їх прямими, які будуть дотичні до параболі. Можна також скористатися з побудови, яку подано на фіг. 24.

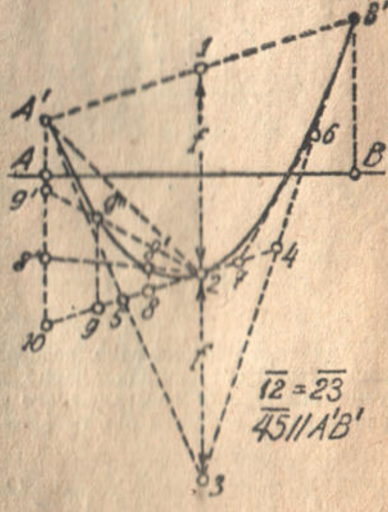
5. Обчислення опорних реакцій. Щоб визначити опорні реакції, ми скористаємося з відомої нам із статики теореми: пару сил з моментом M можна зрівноважити лише парою зворотного напряму з тим же самим моментом M.

Припустімо, що до лівого кінцевого перекрою тряма AB (фіг. 23) прикладено пару з моментом M, яка повертає трям проти годинникової стрілки. За таку пару можна вважати опорний момент на кінці якогось прогону нерозрізного тряма. Цю пару можна зрівноважити лише парою реакцій, що повертають трям у зворотному напрямі, цебто за годинниковою стрілкою. Для цього праву реакцію R_B треба спрямувати вниз, а ліву R_A — вгору. Момент пари реакцій повинен дорівнювати даному моментові M. Тому ми можемо написати:

$$R_A\, l = R_B\, l = M. \quad \text{Звідки } R_A = R_B = \frac{M}{l}$$



Фіг. 23.



Фіг. 24.

Отже, кожен опорний момент M, прикладений до кінця прогону l, спричиняє пару реакцій, рівних $M:l$, які обертають трям назустріч даному моментові. На фіг. 26b та c наведено ще два приклади визначання реакцій, що зрівноважують момент M.

Тепер ми можемо перейти до обчислення опорних реакцій. Для цього зробімо такі операції:

1) Нарисуймо нерозрізного тряма з даним обтягом (фіг. 24).

2) Нанесімо знайдені опорні моменти, при чому їхній напрям покажімо стрілками, біля яких випишімо лише абсолютні величини моментів. У нашому прикладі всі опорні моменти від'ємні, цебто такі, що вигинають окремі прогони опуклістю вгору; відповідно до цього поставлено і стрілки моментів на фіг. 24.

3) Знайдімо основні реакції [1] опор, цебто реакції, що постають, коли обтяжити прогони даними силами і вважати їх за прості труми. Для нашого прикладу маємо:

$$R^{\circ}_{12}=\frac{Pb}{l}=\frac{3\,.\,2}{6}=1\text{ т} \qquad R^{\circ}_{21}=\frac{Pa}{l}=\frac{3\,.\,4}{6}=2\text{ т}$$

$$R^{\circ}_{23}=\frac{ql}{2}=\frac{0{,}8\,.\,9}{2}=3{,}6\text{ т} \qquad R^{\circ}_{32}=\frac{ql}{2}=3{,}6\text{ т}$$

$$R^{\circ}_{34}=\frac{Pb}{l}=\frac{4{,}5\,.\,4}{6}=3\text{ т} \qquad R^{\circ}_{43}=\frac{Pa}{l}=\frac{4{,}5\,.\,2}{6}=1{,}5\text{ т}$$

$$R^{\circ}_{45}=0;\; R^{\circ}_{54}=0$$

4) Обчислімо пари реакцій, що зрівноважують кожний опорний момент. Взявши до уваги, що кожний опорний момент впливає на два прилеглі труми, знаходимо:

$$M_2:l_1=4{,}473:6=0{,}745\text{ т} \qquad M_3:l_3=5{,}165:6=0{,}861\text{ т}$$

$$M_2:l_2=4{,}473:9=0{,}497\text{ т} \qquad M_4:l_3=0{,}810:6=0{,}135\text{ т}$$

$$M_3:l_2=5{,}165:9=0{,}573\text{ т} \qquad M_4:l_4=0{,}810:4{,}5=0{,}180\text{ т}$$

5) Відмітьмо спочатку основні реакції невеликими стрілками, що мають догірний напрям. Біля кожної стрілки виписуємо величину відпобідної реакції. Відкладати величини реакцій не треба. Досить лише вказати її числом.

6) Нанесімо реакції від опорних моментів. Момент M_2 обертає трям 1 — 2 за годинниковою стрілкою і може зрівноважитись парою реакцій, що кожна з них дорівнює $M_2:l_1=0{,}745$ т, при чому на опорі 1 цю реакцію треба спрямувати вниз, а на опорі 2 — вгору. Ставимо відповідні стрілки й виписуємо біля них величини реакцій. Цей самий момент M_2 обертає трям 2 — 3 проти годинникової стрілки і зрівноважується парою реакцій, що кожна з них дорівнює $M_2:l_2=0{,}497$ т і спрямована на правій опорі 3 — униз, а на лівій опорі 2 — угору. Ставимо відповідні стрілки й виписуємо біля них величини реакцій.

Переходимо до моменту M_3. Він обертає трям 2 — 3 за годинниковою стрілкою і зрівноважується парою реакцій, що кожна з них дорівнює $M_3:l_2$ і має напрям на опорі 2 — вниз, а на опорі 3 — вгору. Той самий момент обертає трям 3 — 4 проти годинникової стрілки. Реакції, що їх він спричиняє, рівні $M_3:l_3$ і спрямовані на опорі 4 униз, а на опорі 3 — вгору. Так само визначаємо реакції, що їх спричиняє й решта опорних моментів. Потім альґебрично додаємо написані біля кожної опори числа і знаходимо величини повних реакцій.

---

[1] Коло реакцій є подвійні індекси, що показують прогін і опору, куди прикладено реакцію.

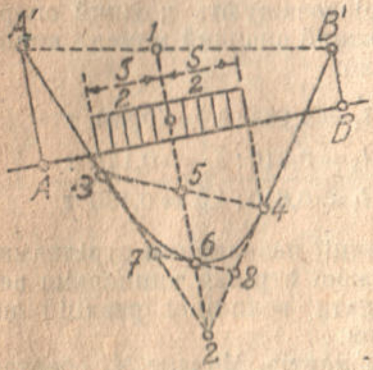
У нашому прикладі одержуємо:

$$R_1 = 0{,}255;\quad R_2 = 6{,}268;\quad R_3 = 7{,}403;$$

$$R_4 = 0{,}954;\quad R_5 = -0{,}180 \text{ т}$$

Щоб не помилитися в напрямі реакцій, що їх спричиняє опорний момент M_n, прикладений до одного кінця тряма, треба насамперед звернути увагу на протилежний кінець тряма і з'ясувати, чи притискає момент M_n цей кінець до опори, чи намагається підняти його вгору. В першому випадку реакція очевидно буде додатна, цебто спрямована вгору, а в другому — навпаки.

6. Побудова епюри перерізних сил. Знаючи повні реакції на всіх опорах, нетрудно побудувати епюру перерізних сил Q протягом усього нерозрізного тряма. Хід побудови такий (фіг. 25).



Фіг. 25.

На першій дільниці $1 - P$ перерізна сила Q дорівнює опорній реакції R_1, цебто $Q = R_1 = +0{,}255$ т. Знак плюс узято тому, що ліва від перекрою частина намагається зсунутись відносно правої вгору. На дільниці $P - 2$ перерізна сила дорівнюватиме:

$$Q_2 = Q_1 - P = 0{,}255 - 3 = -2{,}745 \text{ т}$$

Міркуючи так само й далі, знаходимо, що безпосередньо праворуч від опори 2 перерізна сила дорівнює

$$Q_3 = Q_2 + R_2 = 2{,}745 + 6{,}268 = + 3{,}523 \text{ т}$$

Протягом тряма 2 — 3 сила Q зміниться на величину повного обтягу на цьому прогоні і тому на правому кінці цього прогону дорівнюватиме:

$$Q_4 = Q_3 - ql = 3{,}523 - 0{,}89 = -3{,}677 \text{ т}$$

Зміна Q на дільниці 2 — 3 визначиться через похилу пряму. Далі знаходимо послідовно:

Дільниця $3 - P$:

$$Q_5 = Q_4 + R_3 = -3{,}677 + 7{,}403 = +3{,}726 \text{ т}$$

Дільниця $P - 4$:

$$Q_6 = Q_5 - P_2 = +3{,}726 - 4{,}500 = -0{,}774 \text{ т}$$

Дільниця $4 - 5$:

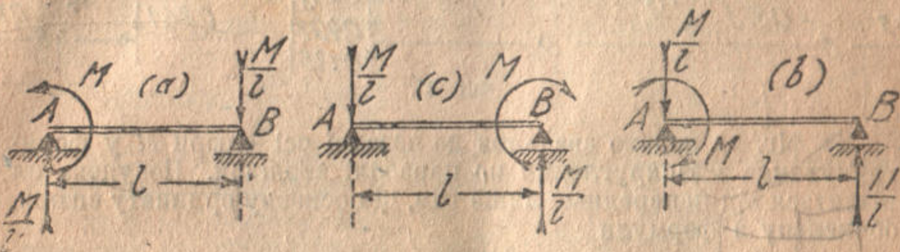
$$Q_7 = Q_6 + R_4 = -0{,}774 + 0{,}954 = +0{,}180 \text{ т}$$

Запам'ятаймо, що на останній дільниці перерізну силу Q_7 можна одержати, розглядаючи праву відтяту частину, до якої прикладено лише одну реакцію опори R_5. Величина цієї реакції повинна збігатися з величиною Q_7, що її знайдено під час розгляду лівої відтятої частини. Із одержаних даних будуємо епюру Q.

§ 11. Зведення епюр M до поземої осі.

Коли накладати епюри M так, як зазначено в § 10. то остаточну епюру одержимо з нульовою віссю у вигляді ламаної лінії. Хоч цей спосіб і зручний, але при бажанні не трудно епюри M звести до поземої осі, точніше кажучи — побудувати цю епюру відразу з поземою віссю.

а) Уявімо, що ми побудували епюру M, коли прогін обтяжено зосередженими тягарами P, P (фіг. 26a). Щоб звести цю епюру



Фіг. 26.

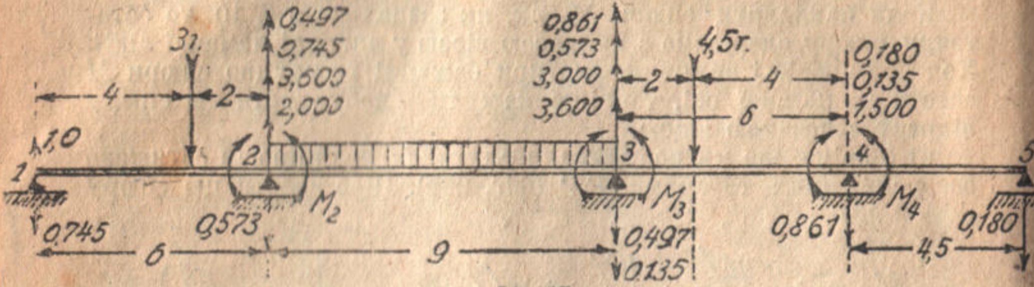
до поземої осі, ми повинні відкласти додатні ординати a', a'', b' b'' вниз від нульової осі 2 3 і сполучити прямими точки $2'$, a'', b'', $3'$. Але ті самі наслідки матимемо, коли від лінії опорних моментів $2'$ $3'$ (фіг. 26b) відкладемо вниз обчислені заздалегідь основні ординати aa'', bb'' епюри M^0, а потім одержані точки a'', b'' сполучимо прямими з вершками опорних моментів $2'$ та $3'$. Узагальнюючи цей висновок, ми доходимо до такого практичного правила побудови епюр M відразу з поземою віссю.

1) Проводимо лінію опорних моментів (фіг. 26b), відкладаючи від'ємні опорні моменти вгору від нульової лінії.

2) Від лінії опорних моментів відкладаємо вниз обраховані заздалегідь додатні ординати основної епюри M^0, цебто ординати aa'' та bb''. Через одержані точки $2'$, a'', b'' та $3'$ проводимо лінію моментів. Будувати початкову епюру моментів з похилою віссю — річ зайва.

Щоб звести до поземої осі параболю із стрілкою f (фіг. 27), вікладаємо від лінії опорних моментів $A'B'$ вниз на прямовисі з середини прогону відтинки $1\,2 = 2\,3 = f$ і сполучаємо одержану точку 3 з вершками опорних моментів A' та B'. Прямі $3A'$ та $3B'$ є дотичні до параболі в точках A' та B'. Коли проведемо через точку 2 пряму $4\,5'' A'B'$, то одержимо дотичну до параболі в точці 2; поділивши пополам відтинки $2\,4$ та $4\,B'$, знаходимо ще одну дотичну, а саме — пряму 67. Тепер лишається вписати параболю в многокутник дотичних $2\,7\,6\,B'$. Відповідні побудови робимо й для лівої частини параболі.

Коли забажаємо знайти кілька точок, вживаємо побудови із жмутом променів. Для цього ділимо на однакове число частин боки 2 — 10 та 10 — A' рівнобіжника 1 — 2 — 10 A', будуємо промені 28', 29' і переносимо на них точки поділу 8 та 9.

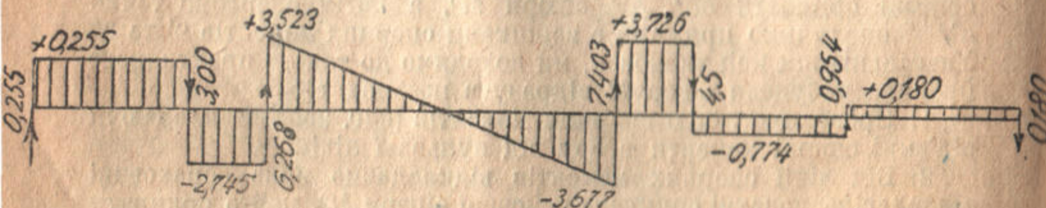


Фіг. 27.

На фіг. 28 подано зведення до поземої осі епюри M у формі трикутника з заокругленим по параболі верпіком. Побудова ця різниться від попередньої лише тим, що основну ординату епюри, обчислену з формули

$$\overline{12} = \frac{Qab}{l}, \text{ де } Q = qs$$

відкладаємо не від нульової осі AB, а від лінії опорних моментів $A'B'$ униз; від'ємні опорні моменти відкладаємо від нульової осі вгору.



Фіг. 28.

§ 12. Формула згинного моменту в перекрої нерозрізного трама.

У § 10 ми побудували епюру M для нерозрізного трама шляхом графічного накладання окремих епюр. Виведімо тепер аналітичний вираз згинного моменту в перекрої нерозрізного трама. Для прикладу розгляньмо 2-й прогін нерозрізного трама (фіг. 29). Опорні моменти M_2 та M_3 на кінцях цього прогону вважатимемо за додатні.

Епюра моментів складається із трьох частин: із основної епюри M^0 від даних зовнішніх сил для простого трама 2 — 3;

із трикутника $2\,2'\,3$, що являє собою епюру M від впливу опорного моменту M_2 та трикутника $3\,3'\,2$, що відповідає опорному моментові M_3. Повний згинний момент у даному перекрої mn визначиться сумою ординат цих трьох епюр, виміряних на прямовисі даного перекрою, цебто

$$M_x = mn + m'n' + m''n''$$

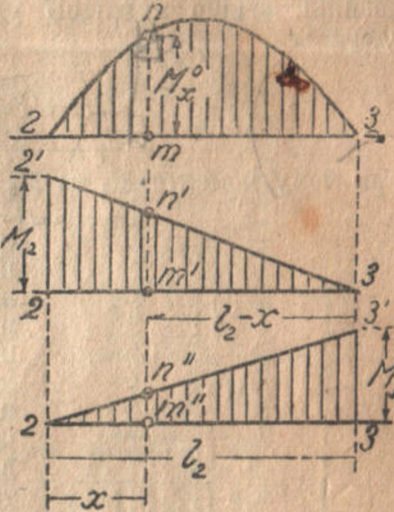
Із подібности трикутників $2\,2'\,3$ та $m'n'\,3$ легко знайти, що

$$m'n' = 22'\frac{l_2 - x}{l_2} = M_2\frac{l_2 - x}{l_2}$$

де x — віддалі перекрою від лівої опори прогону. Так само з подібности трикутників $23'\,3$ та $2\;m''n''$ маємо

$$m''n'' = 33'\frac{x}{l_2} = M_3\cdot\frac{x}{l_2}$$

Ординату mn основної епюри моментів визначаємо через M_x°. Тоді для повного моменту M_x у перекрої mn на віддалі x від лівої опори одержимо такий вираз:



Фіг. 29.

$$\boxed{M_x = M_x^\circ + M_2\frac{l_2 - x}{l_2} + M_3\frac{x}{l_2}} \qquad (10)$$

де M_x° є момент у тому самому перекрої простого тряма 2—3, обтяженого лише даними зовнішніми силами. Формулу (10) виведено з припущенням, що обидва опорні моменти додатні. Коли, під час розв'язання рівнянь трьох моментів, виявиться, що опорні моменти від'ємні, то їх вносять у формулу з їхніми знаками. За цією формулою можна обчислювати згинні моменти в тих випадках, коли графічне накладання епюр M буде визнано за неточне.

§ 13. Формула перерізної сили в перекрої нерозрізного тряма.

Щоб вивести цю формулу, ми використаємо відому Шведлерову теорему, яка говорить, що похідна від згинного моменту по абсцисі перекрою дорівнює перерізній силі. Візьмімо похідну по x із виразу згинного моменту M_x, що ми його вивели. Причому опорні моменти треба вважати за постійні, а момент M°_x, що залежить від положення перекрою, треба вважати, як функцію змінної x.

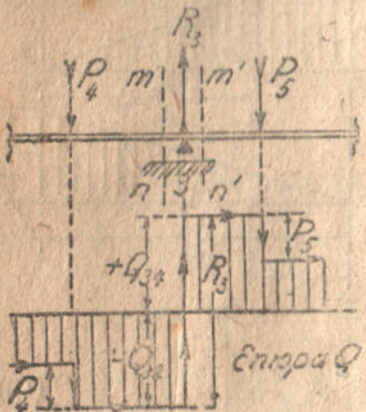
Роблячи диференціювання, знаходимо:

$$Q_x = \frac{\partial M^x}{\partial x} = \frac{\partial M^\circ_x}{\partial x} - \frac{M_2}{l_2} + \frac{M_3}{l_2}$$

Через M°_x ми позначили момент в перекрої mn двоопорного тряма 2—3, обтяженого лише даними зовнішніми силами. Похідна від цього моменту є перерізна сила від даних зовнішніх сил у перекрої mn двоопорного тряма 2—3. Цю перерізну силу ми повинні, згідно з нашою умовою, позначити через Q^0_x. Тоді одержимо

$$\boxed{Q_x = Q^{\circ}_x - \frac{M_2 - M_3}{l_2}} \qquad (11)$$

при чому моменти M_2 та M_3 вважаємо за додатні.



Фіг. 30.

Будуючи епюру Q_x за формулою (11), треба відкладати додатні перерізні сили вгору, для того, щоб перепади в епюрі відповідали напрямові чинних на трям сил. Тоді перепад в епюрі, що утворюється на кожній опорі в наслідок чину опорної реакції, дасть уяву про величину цієї реакції. Щоб переконатися в цьому, розгляньмо два перекрої mn та $m'n'$ (фіг. 30), безконечно близькі до якоїсь опори 3. Назвімо перерізні сили в цих перекроях відповідно Q_{32} та Q_{34}. Зміна перерізної сили Q_x на дільниці між вибраними перекроями могла статись лише тому, що на цій дільниці прикладено реакцію опори R_3. Додатній приріст Q дорівнює додатній реакції. Тому ми можемо написати:

$$Q_{34} + Q_{32} = R_3$$

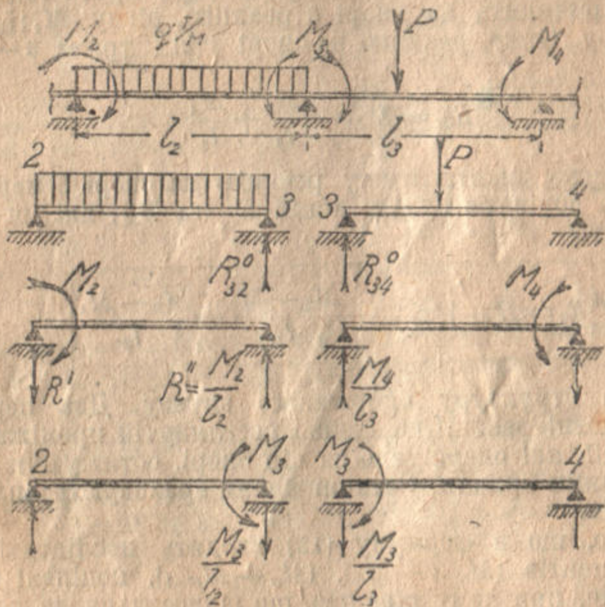
Отже, побудувавши епюру Q_x за формулою (11), ми рівнобіжно визначимо й величини опорних реакцій.

§ 14. Формула опорних реакцій.

Виведімо формулу реакцій опор нерозрізного тряма. Для цього розгляньмо два суміжні прогони l_2 та l_3, які замінено двоопорними трямами 2—3 та 3—4 (фіг. 31), обтяженими даними зовнішніми силами й опорними моментами M_2, M_3 та M_4. Всі ці моменти вважатимемо за додатні.

Реакція на проміжній опорі 3 складатиметься з двох частин: з реакції R_{32} від тряма 3—2 та з реакції R_{34} від тряма 3—4. Позначень ужито згідно з попередньою умовою. Своєю чергою, кожна з цих реакцій складається з 3-х частин, а саме: з реакції від даних зовнішніх сил, з реакції від правих опорних моментів та з реакції від лівих опорних моментів.

Перейдімо до визначення реакції R_{32} на опорі 3 двоопорного тряма 2—3 (фіг. 31). Основну реакцію R_{32} від даних сил знайдемо з рівняння моментів відносно опори 2, яка буде додатна, цебто має догірний напрям. Реакцію від чину опорного моменту M_2 можна знайти на підставі таких міркувань. Момент M_2 спричиняє дві рівні й протилежні реакції $R' = R''$, що утворюють пару з раменом l_2. Тому що момент M_2 обертає трям за годинниковою стрілкою, то пара реакцій повинна обертати його



Фіг. 31.

проти годинникової стрілки. Отже, права реакція R_2 повинна мати догірний напрям, а ліва — додільний. Момент цієї пари реакцій повинен дорівнювати даному опорному моментові M_2, цебто:

$$R'l_2 = R''l_2 = M_2, \text{ звідки } R' = R'' = \frac{M_2}{l_2}$$

На цій підставі ми можемо сказати, що момент M_3, який прикладений до правого кінця тряма 2—3 і обертає цей трям назустріч годинниковій стрілці, спричинить на опорах 2 і 3 реакції, рівні $M_3 : l_2$ й спрямовані: ліва — вгору, а права — вниз.

Отже, реакція на опорі 3 від тряма 2—3 буде

$$R_{32} = R^0_{32} + \frac{M_2}{l_2} - \frac{M_3}{l_2}$$

Перейдімо тепер до суміжного тряма 3 — 4. Дані зовнішні сили спричинять на опорі 3 реакцію R°_{34}, яку ми знайдемо з рівняння моментів відносно опори 4. Опорний момент M_3, що його прикладено до лівого кінця тряма і який обертає трям за годинниковою стрілкою, спричинить пару реакцій; кожна з них дорівнюватиме $M_3 : l_3$, а їхня пара обертатиме трям проти годинникової стрілки. Тому реакція на опорі 3 від моменту M_3 матиме додільний напрям. Нарешті, опорний момент M_4, який прикладено до правого кінця тряма і який обертає його проти годинникової стрілки, спричинить на опорі 3 реакцію, рівну $M_4 : l_3$ і спрямовану вгору. Отже, реакцію на опорі 3 від тряма 3 — 4 визначимо так:

$$R_{34} = R^{\circ}_{34} - \frac{M_3}{l_3} + \frac{M_4}{l_3}$$

Тепер легко знайти повну реакцію на опорі 3 нерозрізного тряма. Вона дорівнює сумі реакцій R_{32} та R_{34}, які ми знайшли раніше, цебто:

$$\boxed{R_3 = R^{\circ}_{32} + R^{\circ}_{34} + \frac{M_2 - M_3}{l_2} - \frac{M_3 - M_4}{l_3}} \qquad (12)$$

З'ясуймо структуру одержаного виразу. Два перші його члени є основні реакції на щойно розглянутій проміжній опорі, цебто реакції, які одержуємо на цій опорі, обтяжуючи прилеглі прогони даними силами. Останні члени враховують вплив опорних моментів.

Зауважмо, що в формулу (12) входять послідовні різниці опорних моментів $(M_{n-1} - M_n)$, $(M_n - M_{n+1})$, поділені на відповідні прогони, при чому різницю, що відноситься до лівого прогону, взято із знаком плюс, а до правого — із знаком мінус.

Реакцію на крайній лівій опорі в тих випадках, коли ця опора суставна, можна знайти з формули

$$R_1 = R^{\circ}_{12} + \frac{M_2}{l_1} \qquad (12a)$$

яку одержано з основної формули (12), коли відкинути члени, що зв'язані з лівим прогоном, і вважати $M_1 = 0$.

Реакцію на крайній правій опорі n, у випадку, коли ця опора суставна, знаходимо з формули:

$$R_n = R^{\circ}_{n,\,n-1} + \frac{M_{n-1}}{l_{n-1}} \qquad (12b)$$

Приклад. Застосуємо одержані формули до тряма, що його раніше розраховано іншим шляхом (фіг. 27 § 10).

Для цього тряма ми знайшли:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = -4{,}473; \quad M_3 = -5{,}165; \quad M_4 = -0{,}810; \quad M_5 = 0$$

Обчислення провадимо в такому порядку:

1) Знаходимо основні реакції, які дорівнюють:

$$R_{12}^{\circ}=1\ \text{т};\ R_{23}^{\circ}=3{,}6\text{т};\ R_{3c}^{\circ}=3\ \text{т};\ \ R_{45}^{\circ}=0$$

$$R_{21}^{\circ}=2\ \text{т};\ R_{32}^{\circ}=3{,}6\text{т};\ R_{46}^{\circ}=1{,}5\ \text{т};\ R_{54}^{\circ}=0$$

2) Обчислюємо послідовні різниці опорних моментів, поділені на відповідні прогони:

$$\Delta_1=(M_1-M_2):l_2=[0-(-4{,}473)]:6 \qquad =+0{,}745\ \text{т}$$
$$\Delta_2=(M_2-M_3):l_2=[-4{,}473-(-5{,}165)]:9=+0{.}077\ \text{т}$$
$$\Delta_3=(M_3-M_4):l_3=[-5{,}165-(-0{,}810)]:6=-0{,}726\ \text{т}$$
$$\Delta_4=(M_4-M_5):l_4=[-0{,}810-0]:4{,}5 \qquad =-0{,}180\ \text{т}$$

3) Додаємо знайдені основні реакції та обчислені різниці Δ, при чому різницю, що стосується до прогону, який лежить зліва від тряма, що його розглядаємо, беремо із знаком плюс, а дальшу різницю беремо із знаком мінус.

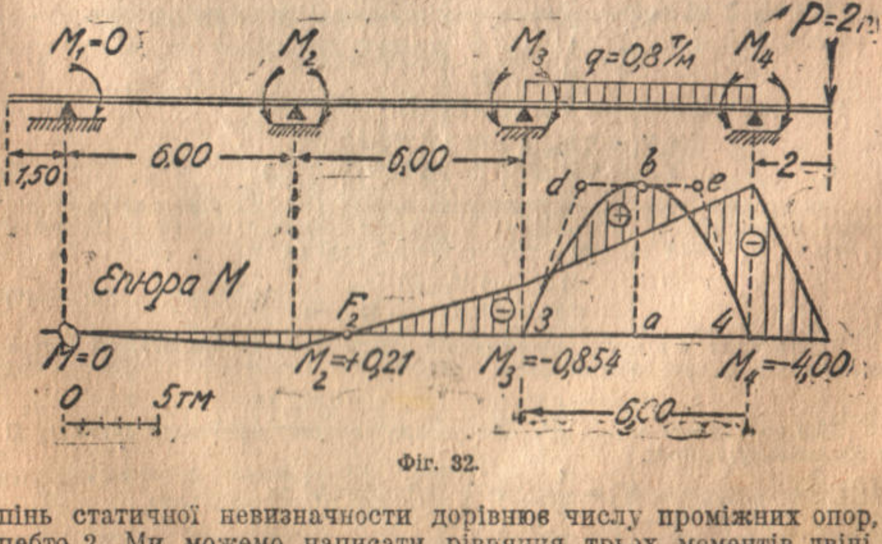
$$R_1=R_{12}^{\circ}+0-\Delta_1=1{,}000-0{,}745 \qquad =0{,}255\ \text{т}$$
$$R_2=R_{21}^{\circ}+R_{23}^{\circ}+\Delta_1-\Delta_2=2+3{,}6+0{,}745-0{,}077 \qquad =6{,}268\ \text{т}$$
$$R_3=R_{32}^{\circ}+R_{34}^{\circ}+\Delta_2-\Delta_3=3{,}6+3{,}00+0{,}077+0{,}726=7{,}403\ \text{т}$$
$$R_4=R_{43}^{\circ}+R_{45}^{\circ}+\Delta_3-\Delta_4=1{,}5-0{,}726+0{,}180 \qquad =0{,}954\ \text{т}$$
$$R_5=R_{54}^{\circ}+\Delta_4=0-0{,}180 \qquad =-0{,}180\ \text{т}$$

4) Рівнянням проекцій на прямовисну вісь звіряємо знайдені реакції.

$$\Sigma Y=+3+0{,}8\,.\,9+4{,}5-0{,}255-6{,}268-7{,}403-0{,}954+0{,}180=0$$

§ 15. Нерозрізний трям із консолями.

Нехай дано нерозрізний трям із консолями, обтяжений як на фіг. 32. Через те що крайні опори цього тряма суставні, сту-



Фіг. 32.

пінь статичної невизначности дорівнює числу проміжних опор, цебто 2. Ми можемо написати рівняння трьох моментів двічі, відповідно до числа проміжних опор. Для крайньої лівої опори 1 з прилежним до неї прогоном і консолею рівняння трьох моментів не вживаємо, тому що консоля не має опори на лівому кінці й не є прогін нерозрізного тряма. Ті самі міркування стосуються й до крайньої правої опори 4. Отже, ми матимемо двоє рівнянь, в які увійдуть 4 опорні моменти M_1, M_2, M_3, M_4. З них опорний момент M_1 на крайній лівій опорі дорівнює нулеві, бо опора ця суставна, а прилежна до неї консоля не несе ніякого обтягу. Момент M_4 на крайній правій опорі дорівнює добуткові із сили P, прикладеної до кінця консолі, на довжину цієї консолі $C = 2$. Це видно з того, що опорний момент M_4 нерозрізного тряма є водночас момент в опорному перекрої консолі. Момент цей від'ємний, бо сила P спричиняє розтяг у верхніх волокнах консолі.

Отже, з усіх опорних моментів лишаються невідомі лише моменти на двох проміжних опорах, які визначимо з двох уже складених рівнянь. Звідси практичний висновок:

У випадку нерозрізного тряма з консолею відповідний опорний момент обчислюємо, як момент в опорному перекрої консолі; входить він у рівняння трьох моментів, як відома величина.

Приклад. Для тряма, що його подано на фіг. 32, маємо $M_1 = 0$, бо ліву консолю нічим не обтяжено. Далі знаходимо:

$$M_4 = -2 \cdot 2 = -4$$

(як момент у закріпленому перекрої консолі).

Фіктивна реакція на опорі 2 дорівнює нулеві, тому що прилежні до цієї опори прогони l_1 та l_2 не обтяжено і епюр моментів від даних зовнішніх сил у цих прогонах теж немає, а фіктивні реакції обчислюють, як було пояснено, від обтяження прогонів епюрами $M°$ від даних зовнішніх сил. Фіктивна реакція на опорі 3 складається з одної окремої реакції $R_{34}^{ф°}$ від обтяження прогону l_3 епюрою моментів, що має форму параболі. Реакція ця дорівнює

$$R_{34}^{ф°} = \frac{1}{24} ql^3 = \frac{1}{24} \cdot 0{,}8 \cdot 6^3 = 7{,}2 \text{ тм}$$

Рівняння трьох моментів напишемо так:

$$\begin{aligned} 6\,M_1 + 2\,M_2\,(6+6) + 6\,M_3 &= 0 \\ 6\,M_2 + 2\,M_3\,(6+6) + 6\,M_4 &= -6 \cdot 7{,}2 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Для крайніх прогонів та прилежних до них консолів рівняння трьох моментів не пишеться. Підставивши в рівняння (a) знайдені вище величини $M_1 = 0$ та $M_4 = -4$ тм, після скорочення одержуємо:

$$\begin{aligned} 24\,M_2 + 6\,M_3 &= 0 \\ 6\,M_2 + 24\,M_3 &= -19{,}2 \text{ тм} \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

Виключення невідомих провадимо з лівого кінця до правого, де зосереджено обтяг. Опорні моменти становлять:

$$M_2 = +0{,}21 \text{ тм}; \qquad M_3 = -0{,}852 \text{ тм}$$

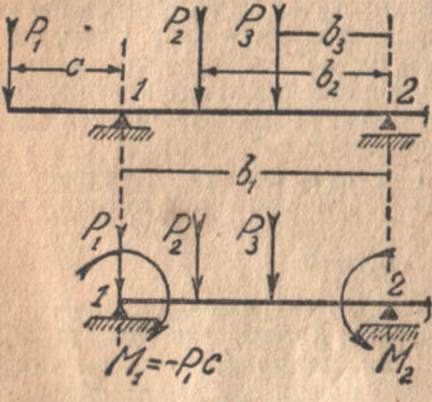
Щоб побудувати епюру $M°$, обчислюємо спочатку найбільшу ординату її в обтяженому прогоні

$$M° = \frac{1}{8} ql^2 = \frac{1}{8} \cdot 0{,}8 \cdot 6^2 = 3{,}6 \text{ тм}$$

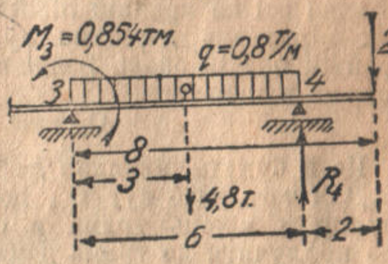
будуємо за нею основну епюру, відкладаємо обчислені опорні моменти і проводимо лінію опорних моментів.

Обчислення опорних реакцій. Реакції проміжних опор знаходимо з формули (12), вживаючи її без ніяких змін. Щодо реакцій крайніх опор, то їх можна знайти на підставі таких міркувань. Уявімо, що нерозрізний трям має консолю на лівому кінці (фіг. 33), обтяжену силою P на віддалі C від опори 1. Цю силу перенесено на опору 1, де вона спричиняє спрямовану вгору реакцію $R_1' = P$.

Перенісши силу P, одержимо ще й пару з моментом $-Pc$, яка виявляє вплив консолі на перший прогін. Тепер ми можемо облишити консолю й розглядати перший прогін тряма, який обтяжено даними силами P_1, P_2 та опорними моментами $M_1 = -Pc$ та M_2. Реакцію на опорі 1 знаходимо із загальної формули (12), коли в ній викреслити члени, що стосуються до лівого прогону, і зберегти члени, що стосуються до правого, яким для опори 1 буде прогін l_1. Додаючи цю реакцію до знайденої раніше $R_1' = P$, остаточно одержуємо:



Фіг. 33.



Фіг. 34.

$$R_1 = P_1 + R^0_{12} - \frac{M_1 - M_2}{l_1} \qquad (13)$$

при чому формулу цю виведено із припущенням, що $M_1 > 0$ та $M_2 > 0$. У нашому випадку $M_1 = -Pc$. Коли б консолю було обтяжено кількома тягарами P або рівномірним обтягом q, то перший член у формулі був би ΣP або qc, а момент M дорівнював би $-\Sigma Pc$ або $-\frac{1}{2}qc^2$.

Коли трям має консолю на правому кінці, то реакцію крайньої правої опори $n+1$ знаходимо з формули:

$$R_{n+1} = \Sigma P + R^0_{n+1,n} + \frac{M_n - M_{n+1}}{l_n} \qquad (14)$$

яку одержуємо аналогічним шляхом.

Ті самі реакції можна знайти й інакше, із рівняння моментів, коли вважати крайній прогін і прилежну до нього консолю за одно ціле, ніби цей прогін перекриває трям із звислими кінцями.

На фіг. 34 подано крайній правий прогін тряма, який ми розглянули раніш. Його обтяжено даними зовнішніми силами q, P та опорним моментом $M_3 = -0{,}854$ тм. Знак мінус на фіг. 34 відкинуто, а напрям моменту показано стрілкою. Вважаючи трям із консолею за одне ціле, складімо рівняння моментів відносно опори 3. Одержимо:

$$\Sigma_3 M = -0{,}854 + 0{,}8 \cdot 6 \cdot 3 - R_4 \cdot 6 + 2(6+2) = 0$$

$$\text{звідки } R_4 = -4{,}912 \text{ т}$$

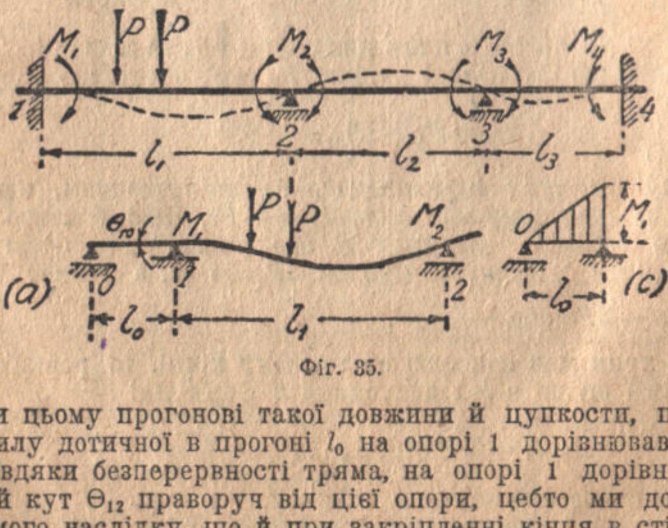
§ 16. Нерозрізний трям із закріпленими кінцями.

Нехай дано нерозрізний трям із закріпленими кінцями (фіг. 35). Трям цей, згідно з міркуваннями, які викладено в § 3, є чотири рази статично невизначний. Рівняння трьох моментів ми можемо написати двічі, відповідно до числа проміжних опор. Отже, щоб позбавитись статичної невизначности, не вистачає лише двох рівнянь, які можна скласти так. Закріплення лівого кінця тряма в стіні спричиняється до того, що кут нахилу дотичної до зігненої осі на крайній лівій опорі дорівнює нулеві. З тих самих міркувань дорівнює нулеві й кут нахилу дотичної на крайній правій опорі. Взявши до уваги наші позначення, ми можемо написати:

$$\Theta_{12} = \Theta \qquad \Theta_{43} = 0$$

Це й будуть рівняння деформацій, яких нам бракувало.

Для того, щоб кут Θ_{12} дорівнював нулеві, ми можемо або закріпити кінець тряма в стіні, як це показано на рисунку, або прилучити до тряма додатковий прогін l_0 ліворуч (фіг. $35a$)



Фіг. 35.

і надати цьому прогонові такої довжини й цупкости, щоб кут Θ_{10} нахилу дотичної в прогоні l_0 на опорі 1 дорівнював нулеві. Тоді, завдяки безперервності тряма, на опорі 1 дорівнюватиме нулеві й кут Θ_{12} праворуч від цієї опори, цебто ми досягнемо того самого наслідку, що й при закріпленні кінця в стіні.

Ліву опору O додаткового прогону вважатимемо за суставну, а сам додатковий прогін — за необтяжений. Епюру моментів для цього прогону подано на фіг. 35с. Кут нахилу дотичної на правій опорі 1 у прогоні l_0 знаходимо з формули:

$$\Theta_{10} = \frac{M_1 l_0}{3EJ_0}$$

де M_1 є опорний момент, що визначає взаємочин прогонів l_0 та l_1. Для того, щоб кут Θ_{10} дорівнював нулеві, ми можемо або надати додатковому прогонові безконечно великої цупкости $EJ_0 = \infty$, або зменшити до нуля його довжину l_0. Зупинімося на другому варіянті, цебто вважатимемо, що l_0 наближається до нуля. Рівняння трьох моментів для пари прогонів l_0 та l_1 матиме вигляд:

$$M_0 l_0 + 2M_1(l_0 + l_1) + M_2 l_1 = -6R_1^{\Phi 0}$$

Припускаючи, що $M_0 = 0$ та $l_0 = 0$, одержуємо:

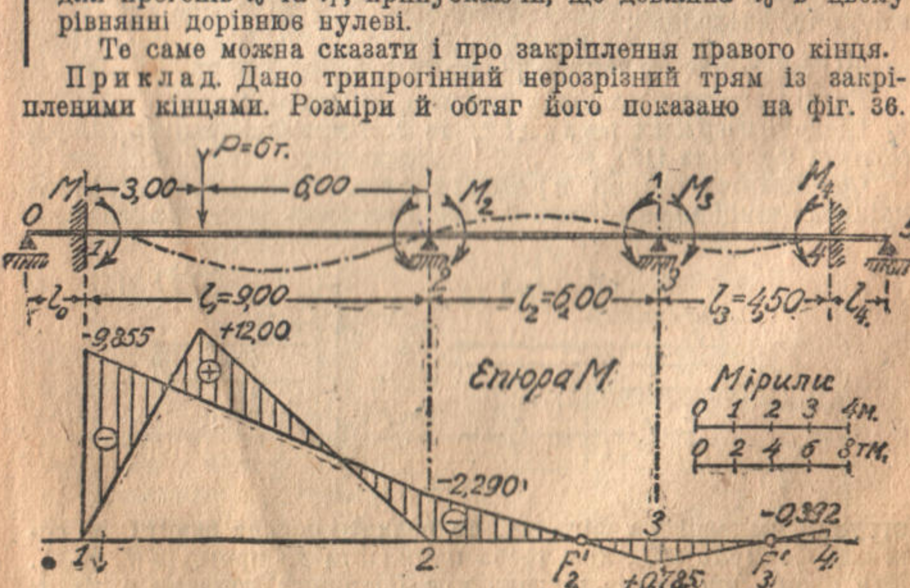
$$2M_1 l_1 + M_2 l_1 = -6R_1^{\Phi 0} \tag{15}$$

Це й буде одно з рівнянь деформації, якого нам бракувало. Фіктивна реакція $R_1^{\Phi 0}$, що входить у це рівняння, являє собою реакцію на опорі 1, коли прогін l_1 обтяжено епюрою моментів від даних зовнішніх сил, отже, є величина відома. Прогін l_0 лишається необтяжений. Аналогічне рівняння можна написати і для правого закріпленого кінця тряма. Отже, ми доходимо до такого практичного висновку.

Коли закріплено лівий кінець нерозрізного тряма в стіні, треба замінити це закріплення уявним, додатковим прогоном l_0 від стіни і написати рівняння трьох моментів, як звичайно, для прогонів l_0 та l_1, припускаючи, що довжина l_0 в цьому рівнянні дорівнює нулеві.

Те саме можна сказати і про закріплення правого кінця.

Приклад. Дано трипрогінний нерозрізний трям із закріпленими кінцями. Розміри й обтяг його показано на фіг. 36.



Фіг. 36.

Треба знайти опорні моменти й побудувати епюру згинних моментів.

Обчислення фіктивних реакцій. Через те, що епюра моментів від даних зовнішніх сил є лише в першому прогоні, то фіктивні реакції будуть лише на опорах 1 та 2. Вони дорівнюють:

$$\bar{R}^{\text{ф0}}_{12} = \frac{6.3.6}{6.9}(9+6) = 30\ \text{тм}^2; \quad \bar{R}^{\text{ф}}_{21} = \frac{6.3.6}{6.9}(9+3) = 24\ \text{тм}^2$$

Складання рівнянь трьох моментів. Добавляємо уявні прогони $l_0 = 0$ ліворуч, $l_4 = 0$ праворуч, і пишемо рівняння трьох моментів для одержаного п'ятипрогінного тряма 0 — 5.

$$\begin{aligned}
&2M_1\ (0+9) + M_2 . 9 = -6 . 30\\
&M_1 . 9 + 2M_2\ (9+6) + M_3\, 6 = -6 . 24\\
&M_2 . 6 + 2M_3\ (6+4{,}5) + M_4 . 4{,}5 = 0\\
&M_3 . 4{,}5 + 2M_4\ (4{,}5+0) + 0 = 0
\end{aligned}$$

Коли спростити ці рівняння, то вони наберуть такого вигляду:

$$\begin{aligned}
&18\ M_1 + 9\ M_2 = -180\\
&9\ M_1 + 30 M_2 + 6\ M_3 = -144\\
&6\ M_2 + 21 M_3 + 4{,}5\ M_4 = 0\\
&4{,}5\ M_3 + 9\ M_4 = 0
\end{aligned}$$

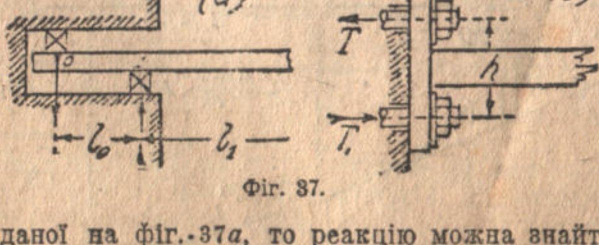
Розв'язання рівнянь трьох моментів. Виключення невідомих провадимо в напрямі від опори 4 до обтяженого прогону. Розв'язуючи, знаходимо:

$$M_1 = -9{,}855; \quad M_2 = -2{,}290; \quad M_3 = -0{,}785; \quad M = -0{,}392\ \text{тм}$$

Епюру згинних моментів будуємо, як звичайно.

Щодо о п о р н и х р е а к ц і й, то для проміжних опор дійсна основна формула (12).

Обчислюючи реакції к р а й н і х опор, треба знайти, як закріплено кінці нерозрізного тряма. Коли для цього вжито кон-



Фіг. 37.

струкції, поданої на фіг.-37*a*, то реакцію можна знайти із основної формули (12), яку треба прикласти до прогонів l_0 та l_1. При цьому, що менша віддаль між опорними точками 0 та 1, то більші будуть опорні реакції.

Коли ж кінці закріплено за схемою фіг. 37b, то прямовисну реакцію опори 1 можна знайти з формули:

$$R_1 = R_{12}^0 - \frac{M_1 - M_2}{l_1} \tag{16}$$

яку одержимо з основної формули (12), коли викреслимо членим, що стосуються до лівого прогону.

Для крайньої правої опори 4 маємо відповідно:

$$R_4 = R_{43}^0 + \frac{M_3 - M_4}{l_3} \tag{17}$$

Обидві формули виведено з припущенням, що всі моменти більші за нуль. Реакції R_{12}^0 та R_{43}^0 є основні реакції від даних зовнішніх сил. Зусилля T в прогоничах (фіг. 37b) знайдемо, поділивши опорний момент на віддаль h між прогоничами:

$$T_1 = -T_2 = M_1 : h$$

Такі умови маємо, наприклад, на кінцях залізобетонних трямів, риштунок яких заправлено в прилежні стіни чи колони.

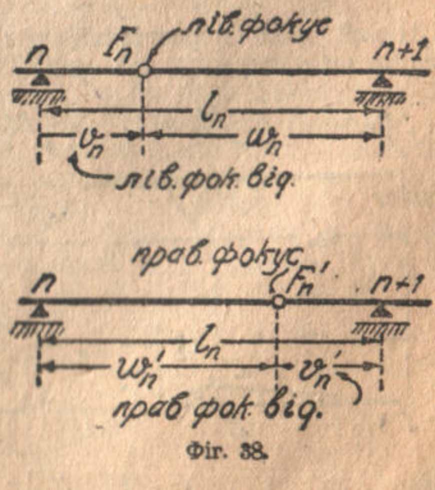
РОЗДІЛ ДРУГИЙ.

РОЗРАХУНОК НЕРОЗРІЗНИХ ТРЯМІВ ЗА МЕТОДОЮ ФОКУСІВ.

§ 17. Означення фокусових точок.

У всіх питаннях про нерозрізні трями велику ролю відограють так звані **ф о к у с о в і т о ч к и** чи **ф о к у с и**.

У кожному прогоні l_n є по дві фокусові точки: ліва F_n та права F_n' (фіг. 38).



Фіг. 38.

Ліві фокусові точки є ті точки, в яких утворюються нульові моменти, коли неперивний ряд послідовних прогонів, починаючи з крайнього лівого, лишається необтяженим.

Аналогічне визначення можна дати й для правих фокусових точок з тією лише різницею, що безперервний ряд необтяжених прогонів повинен починатися з крайнього правого.

Нульовому моментові, як відомо, відповідає радіюс кривини зігненої осі рівний безконечності; це є доказ наявности точки перегину. Отже, в фізичному розумінні фокусові точки є не що інше, як точки перегину зігненої осі нерозрізного тряма за умов обтяження, про які говорилося раніш.

Запровадьмо такі позначення: віддаль лівого фокуса F_n від найближчої зліва опори n зватимемо лівою фокусовою віддаллю у прогоні l_n, яку позначатимемо літерою v_n. Віддаль того самого фокуса F_n від найближчої правої опори позначатимемо літерою w_n. Очевидно, що

$$w_n = l_n - v_n$$

Відношення більшої віддалі w_n до меншої v_n позначимо літерою k_n і зватимемо лівим фокусовим відношенням у прогоні l_n.

Отже $$\boxed{k_n = \frac{w_n}{v_n}} \quad \text{при чому } k_n > 1 \qquad (18^a)$$

Для правого фокуса F_n^1 у тому самому прогоні l_n маємо відповідно: v_n^1 — права фокусова віддаль, цебто віддаль від правого фокуса до найближчої справа опори; w'_n — віддаль правого фокуса від лівої опори прогону, що дорівнює

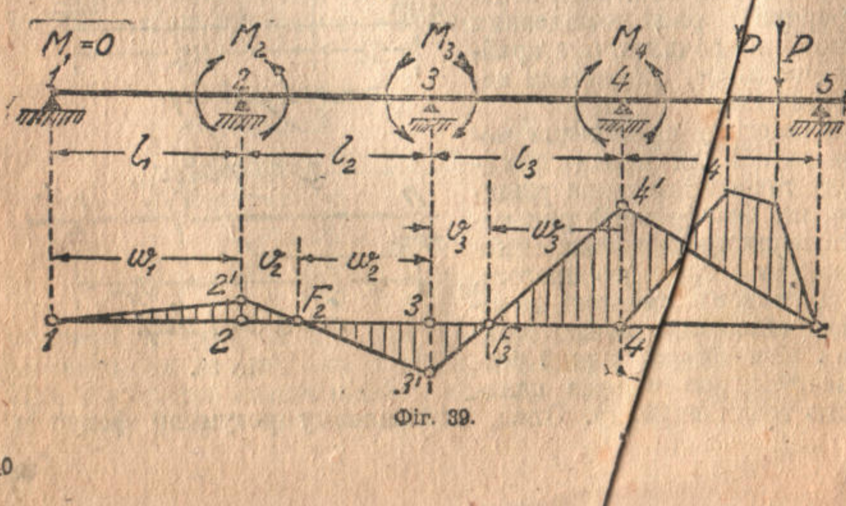
$$w'_n = l_n - v'_n$$

та праве фокусове відношення

$$\boxed{k'_n = \frac{w'_n}{v_n}} \quad \text{при чому } k'_n > 1 \qquad (18^b)$$

§ 18. Доказ існування фокусів. Обчислення фокусових відношень.

Нехай дано нерозрізний трям на п'яти опорах (фіг. 39). Уявімо спочатку, що два суміжні прогони l_1 та l_2 цього тряма,



Фіг. 39.

починаючи з крайнього лівого, лишаються необтяжені. Напишемо рівняння трьох моментів для цих прогонів. Тому що момент на 1-ій опорі дорівнює нулеві (опора ця вільно обертається) і що прогони l_1 та l_2 не обтяжено, то рівняння трьох моментів набере такого вигляду:

$$2M_2(l_1+l_2)+M_3 l_2=0 \tag{a}$$

Визначмо з цього рівняння відношення моменту M_3 до дальшого зліва опорного моменту M_2. Для цього послідовно знаходимо:

$$M_3 l_2=-2M_2 l_2-2M_2 l_1;\ \text{звідки}\ \frac{M_3}{M_2}=-\left(2+2\frac{l_1}{l_2}\right) \tag{b}$$

Одержана рівність (b) вірна доти, доки права частина рівняння трьох моментів дорівнює нулеві, цебто доки прогони l_1 та l_2 лишаються необтяжені. Із виразу (b) ми можемо зробити кілька важливих висновків, а саме:

1) Опорні моменти M_3 та M_2 на кінцях необтяженого прогону l_2 мають протилежні знаки.

2) Відношення цих моментів не залежить від величини й розташування обтягу в дальших управо прогонах і визначається лише співвідношенням довжин l_1 та l_2 перших двох прогонів.

3) Своєю абсолютною величиною M_3 завжди більше за $2\,M_2$.

Відкладімо від нульової осі на прямовисі опори 2 відтинок $22'=M_2$ угору і на прямовисі опори 3 — відтинок $33'=M_3$ вниз відповідно до знака опорних моментів M_2 та M_3. Одержані точки $2'$ та $3'$ сполучімо прямою. Ця пряма є лінія моментів у прогоні l_2. Вона перетинає нульову лінію в точці F_2.

Коли змінити обтяг у дальших праворуч прогонах, то величини опорних моментів M^2 та M^3 теж зміняться, а це спричинить зміну нахилу прямої $2'\,3'$. Але тому, що відношення моментів залишається при цьому стале, то положення точки F_2 лишиться попереднє. Отже, ми бачили, що коли прогони l_1 та l_2 не обтяжено, лінія моментів у прогоні l_2 має сталу нульову точку F_2. Ця точка і є лівий фокус прогону l_2.

Віддаль фокуса F_2 від правої та лівої опор ми за умовою позначимо через w_2 та v_2, а відношення цих віддалів через k_2. Із подібности трикутників $F_2\,22'$ та $F_2\,33'$ можна написати:

$$\frac{M_3}{M_2}=-\frac{w_2}{v_2}=-k_2 \tag{c}$$

Але раніше ми знайшли, що

$$\frac{M_3}{M_2}=-\left(2+2\frac{l_1}{l_2}\right) \tag{b}$$

Порівнявши вираз (c) із виразом (b), одержимо:

$$K_2 = 2 + 2\frac{l_1}{l_2} \tag{19'}$$

З цієї рівности виходить, що K_2 завжди більше за 2. Тому, що $K_2 = w_2 : v_2$, то виходить, w_2 завжди більше за $2 v_2$. Беручи до уваги, що $v_2 + w_2 = l_2$, доходимо до висновку, що $v_2 < \frac{1}{3} l_2$. Довжина v_2 являє собою віддаль лівого фокуса F_2 від лівої опори 2.

Звідси висновок: **лівий фокус міститься завжди в межах лівої третини прогону.**

Уявімо тепер, що три услідних прогони l_1, l_2 та l_3 не обтяжено. Напишімо рівняння трьох моментів для прогонів l_2 та l_3.

Тому що ці прогони не обтяжено, рівняння матиме такий вигляд:

$$M_2 l_2 + 2 M_3 (l_2 + l_3) + M_4 l_3 = 0 \tag{d}$$

Із цього рівняння, як і раніше, зробивши відповідні перетворення, знайдемо відношення моменту M_4 до попереднього зліва моменту M_3:

$$M_4 l_3 = -2 M_3 l_3 - 2 M_3 l_2 - M_2 l_2$$

Звідки

$$\frac{M_4}{M_3} = -2 - 2\frac{l_2}{l_3} - \frac{M_2 l_2}{M_3 l_3} = -\left[2 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 + \frac{M_2}{M_3}\right)\right] \tag{e}$$

Через те що два перші прогони l_1 та l_2 теж не обтяжено, то, згідно з рівнянням (c), ми можемо написати:

$$\frac{M_3}{M_2} = -k_2, \text{ звідки } \frac{M_2}{M_3} = -\frac{1}{k_2}$$

Підставляючи в рівняння (l), одержимо:

$$\frac{M_4}{M_3} = -\left[2 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 - \frac{1}{k_2}\right)\right] \tag{f}$$

Залежність (f) вірна доти, доки права частина рівняння трьох моментів (d) дорівнює нулеві, цебто, доки немає обтягу в прогонах l_2 та l_3, і, крім того, доки є залежність (c), вірна лише тоді, коли прогони l_2 та l_1 не обтяжено. Отже, залежність (f) буде вірна лише за умови, коли три услідних прогони, починаючи з крайнього лівого, не буде обтяжено.

Із цієї залежности ми можемо дійти до того висновку, що й раніше, а саме — що відношення моментів M_4 та M_3 не залежить від обтягу дальших прогонів, що моменти ці є протилежні знаком, і що (M_4) завжди більше за $(2 M_3)$.

Відкладімо (фіг. 39) на прямовисі опори 4 відтинок $44' = M_4$ і спрямуймо цей відтинок угору, тому що момент M_3, противний знаком з M_4, уже відкладено у нас унизу. Сполучімо одержану точку 4′ з точкою 3′ прямою. Ця пряма являтиме лінію моментів у прогоні l_3. Вона перетинає нульову вісь у точці F_3. Тому що відношення опорних моментів M_4 та M_3 не залежить від обтягу дальших прогонів, положення точки F_3 лишається незмінне.

Отже, коли три перші прогони не обтяжено, лінія моментів у прогоні l_3 матиме сталу точку F_3, яка й є лівий фокус у прогоні l_3.

Аналогічним міркуванням можна довести, що, коли прогони l_1, l_2, l_3 та l_4 не обтяжено, лінія моментів у прогоні l_4 проходить через сталу нульову точку F_4 і т. д. Тому ми можемо висловити таке загальне твердження: **коли безперервний ряд прогонів, починаючи з крайнього лівого, не обтяжено, то лінія моментів має в необтяжених прогонах сталі нульові точки, що лежать у лівих третинах прогонів. Ці точки й є ліві фокуси.**

§ 19. Зв'язок між фокусовими відношеннями k_{n-1} та k_n у двох суміжних прогонах.

Повернімося до прогону l_3, в якому ми знайшли лівий фокус F_3. Віддаль цього фокуса від правої та лівої опори прогону ми назвали відповідно через w_3 та v_3. Із подібности трикутників $F_3 33'$ та $F_3 44'$ (фіг. 39) виходить, що

$$\frac{M_4}{M_3} = -\frac{w_3}{v_3} = -k_3 \tag{h}$$

Але вище ми знайшли другий вираз для співвідношення моментів $M_4 : M_3$ (див. форм. f) Порівнявши вирази (h) та (f), одержимо:

$$k_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 - \frac{1}{k_2}\right) \tag{19''}$$

Заміняючи в одержаній формулі індекс 3 на $_n$, а індекс 2 на $_{n-1}$, знаходимо загальний вираз залежности між лівими фокусовими відношеннями k_{n-1} та k_n у двох суміжних прогонах:

$$\boxed{k_n = 2 + \frac{l_{n-1}}{l_n}\left(2 - \frac{1}{k_{n-1}}\right)} \tag{19}$$

Тепер легко знайти також і залежність між лівими фокусовими віддалями v_n та v_{n-1} двох суміжних прогонів. Для цього згадаємо, що

$$k_n = w_n : v_n; \quad k_{n-1} = w_{n-1} : v_{n-1}$$

і замінимо w_n на різницю $l_n - v_n$. Тоді одержимо:

$$k_n = \frac{w_n}{v_n} = \frac{l_n - v_n}{v_n} = 2 + \frac{l_{n-1}}{l_n}\left(2 - \frac{v_{n-1}}{w_{n-1}}\right)$$

Додаймо до обох частин цієї рівности по 1:

$$\left[\frac{l_n - v_n}{v_n} + 1 = \frac{l_n}{v_n}\right] = 3 + \frac{l_{n-1}}{l_n}\left(2 - \frac{v_{n-1}}{w_{n-1}}\right)$$

звідки знаходимо остаточний вираз для v_n:

$$\boxed{v_n = \frac{l_n}{3 + \frac{l_{n-1}}{l_n}\left(2 - \frac{v_{n-1}}{w_{n-1}}\right)}} \qquad (20)$$

З цієї формули можна обчислити ліву фокусову віддаль у дальшому праворуч прогоні.

Уявімо тепер, що безперервний ряд суміжних прогонів, починаючи з крайнього правого, не обтяжено.

Міркуючи аналогічно з попереднім, ми можемо довести, що лінія моментів у кожному необтяженому прогоні проходить через сталу нульову точку, яка лежить у правій третині прогону.

Це й будуть праві фокуси, які ми позначили через F'_n. Віддаль правого фокуса від лівої й правої опори ми назвали відповідно через w'_n та v'_n, а відношення цих віддалей — через k'_n.

Залежність між відношеннями k'_n та k'_{n+1} у двох суміжних прогонах можна знайти з формули (19), коли взяти до уваги, що, досліджуючи ліві фокуси, ми йшли зліва направо, а вивчаючи праві фокуси, очевидно, повинні йти справа наліво. Тому попередній прогін відносно якогось прогону l_n буде суміжний справа прогін l_{n+1}.

Заміняючи в формулі (15) індекс попереднього прогону $_{n-1}$ на індекс $_{n+1}$ одержимо:

$$\boxed{k_n' = 2 + \frac{l_{n+1}}{l_n}\left(2 - \frac{1}{k'_{n+1}}\right)} \qquad (21)$$

Фіг. 40.

Так само заміняючи індекс ${}_{n-1}$ на індекс ${}_{n+1}$, можна одержати з формули (20) вираз залежности між двома правими фокусовими віддалями v'_{n+1} та v'_n у двох суміжних прогонах.

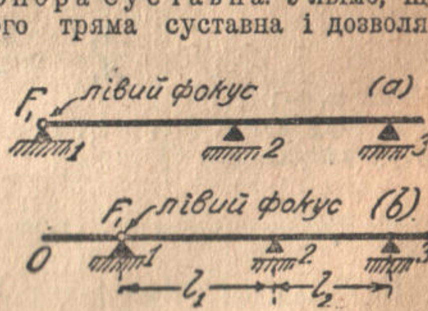
$$\boxed{v'_n = \frac{l_n}{3 + \frac{l_{n+1}}{l_n}\left(2 - \frac{v'_{n+1}}{w'_{n+1}}\right)}} \tag{22}$$

Для ілюстрації на фіг. 40 подано такий випадок обтягу нерозрізного тряма з консолею, коли лінія моментів у всіх прогонах проходить через праві фокуси.

§ 20. Аналітичний спосіб знаходити фокуси.

Щоб використати виведені формули фокусових віддалей треба знати, як розташовано обидва фокуси в якомусь одному прогоні нерозрізного тряма. Досить також знати, як розташовано лівий фокус в одному прогоні та як розташовано правий фокус у другому. Безпосередньо встановити, як розташовано фокуси, можна лише в крайніх прогонах. Тут може бути два випадки.

1-ий випадок: крайня опора суставна. Уявімо, що крайня ліва опора нерозрізного тряма суставна і дозволяє кінцеві тряма, що спирається на неї, вільно повертатись (фіг. 41*a*). Тоді момент на цій опорі завжди дорівнює нулеві, незалежно від того, як обтяжено трям. У цьому разі крайня ліва опора є стала нульова точка лінії моментів, цебто лівий фокус F_1 у першому прогоні.



Фіг. 41.

Аналогічні міркування доводять нас до висновку, що коли правий кінець тряма суставно-закріплений, то правий фокус у крайньому правому прогоні збігається з останньою опорою праворуч.

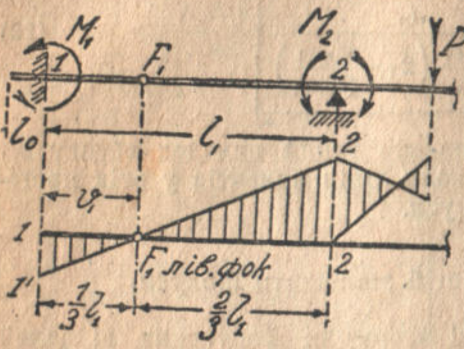
Коли лівий фокус першого прогону збігається з лівою опорою, то для цього прогону фокусова віддаль перетворюється на нуль: $v_1 = 0$. Далі $w_1 = l_1 - v_1 = l_1$, а значить $-k_1 = w_1 : v_1 = \infty$.

Запам'ятаймо ще, що наявність консолі 01 лівіше від правої опори 1 (фіг. 41*b*) не порушує останнього правила: лівий фокус першого прогону лишається на першій опорі 1. Дійсно, коли немає обтягу на консолі, момент на опорі 1 дорівнюватиме нулеві незалежно від вигляду й величини обтягу на дальших прогонах;

тому точка 1 буде стала нульова точка лінії моментів, цебто лівий фокус прогону F_1.

2-й випадок: кінець тряма заправлено в стіну. Уявімо тепер, що лівий кінець тряма заправлено в стіну (фіг. 42). Тоді, коли перший прогін не обтяжено, рівняння трьох моментів для цього прогону напишемо так:

$$2 M_1 l_1 + M_2 l_1 = 0 \qquad \text{(a)}$$



Фіг. 42.

Пишучи це рівняння, ми припускаємо, що місце заправи кінця в стіну замінено уявним прогоном $l_0 = 0$ ліворуч від опори 1. Із рівняння (а) знаходимо:

$$M_2 = -2 M_1$$

звідки $M_2 : M_1 = -2$

Отже, моменти M_1 та M_2 з противними знаками; відношення їх не залежить від обтягу дальших праворуч прогонів. Лінія моментів у першому прогоні перетинає нульову вісь в якійсь точці F_1, положення якої не змінюється. Коли назвати віддалі цієї точки від опор через w_1 та v_1, то ми можемо написати:

$$\frac{M_2}{M_1} = -\frac{w_1}{v_1} = -2$$

звідки $w_1 = 2 v_1$.

А тому що $w_1 + v_1 = l_1$, то ліва фокусова віддаль, коли ліву опору заправлено, буде:

$$\boxed{v_1 = \frac{1}{3} l_1} \qquad (23)$$

Цей наслідок ми могли б одержати із загальної формули (20), заміняючи вправлення тряма додаванням прогону l_0 і визначаючи v_1 в залежності від v_0. При цьому ми мали б:

$$l_0 = 0;\ v_0 = l_0 . 0 = 0;\ w_0 = l_0;\ \ v_0 : w_0 = 0 . l_0 : l_0 = 0$$

Коли підставити ці дані у формулу (20), то одержимо:

$$v_1 = \frac{l_1}{3 + \frac{l_0}{l_1}\left(2 + \frac{v_0}{w_0}\right)} = \frac{l_1}{3 + \frac{0}{l_1}(2 - 0)} = \frac{1}{3} l_1$$

Аналогічно міркуючи, можна впевнитись, що, коли заправити правий кінець нерозрізного тряма, правий фокус у крайньому правому прогоні розташується на віддалі одної третини прогону від затиснутого перекрою.

Узагальнюючи всі попередні міркування, доходимо такого висновку:

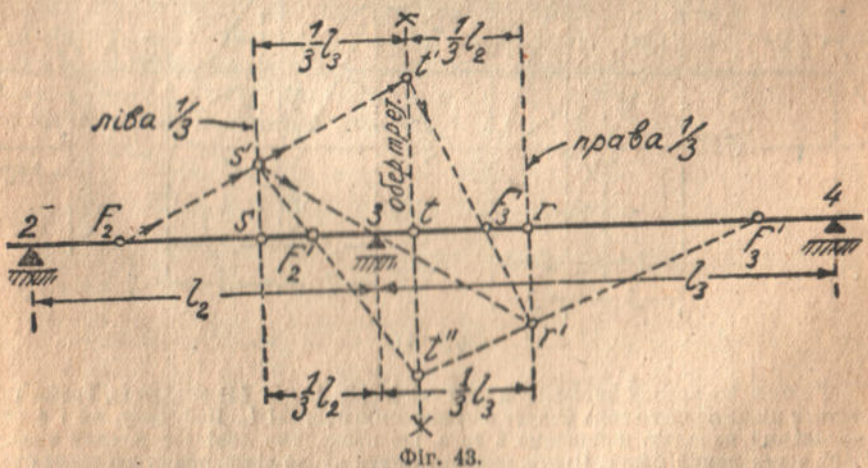
Коли крайня опора нерозрізного тряма суставна й дозволяє кінцеві, що спирається на неї, вільно повертатись, то найближчий до цієї опори фокус збігається з цією опорою. Коли ж опора не дозволяє кінцеві тряма вільно повертатись, то найближчий до цієї опори фокус розташується на віддалі одної третини прогону від закріпленого опорного перекрою.

Знаючи розташування фокусів у крайніх прогонах, не трудно знайти фокуси і в решті всіх прогонів. Наприклад, коли крайня ліва опора суставна, то ми знаємо ліву фокусову віддаль $v_1 = 0$ в 1-му прогоні.

Застосовуючи формулу (20) до 1-го та 2-го прогонів, знаходимо v_2; застосовуючи цю саму формулу до 2-го та 3-го прогонів, знаходимо v_3; так само й далі. Отже, як саме розташовано фокуси в усіх прогонах, нам буде відомо. Знаходити праві фокуси треба починати з крайнього правого прогону і йти в зворотному напрямі.

§ 21. Графічний спосіб знаходити фокуси.

Хоч аналітично визначити розташування фокусів і не трудно, але все ж таки на це треба багато часу. Тому фокуси найзручніше знаходити графічно, використовуючи побудови, які ми наводимо тут без теоретичних обґрунтовань



Фіг. 43.

Нехай дано два суміжні прогони нерозрізного тряма l_2 та l_3 (фіг. 43) та місце лівого фокуса F_2 в лівому прогоні. Треба знайти місце лівого ж таки фокуса F_3 в дальшому прогоні. Послідовність, з якою треба робити окремі операції, така:

1) Ділимо кожний суміжний прогін l_2 та l_3 на 3 рівні частини.

2) Через точки поділу s та r, що суміжні з середньою опорою 3, проводимо прямовисні прямі ss' та rr', які надалі взатимемо „прямовисами третин, суміжних з опорою n“.

3) Будуємо так званий „прямовис оберненої третини“, для чого відкладаємо від прямовиса лівої третини ss' відтинок $st = \frac{1}{3} l_3$, цебто одну третину дальшого прогону, і проводимо прямовис $t - t'$. Віддаль його від прямовиса правої третини, очевидно, дорівнює $tr = \frac{1}{3} l_2$. Отже, відтинки $\frac{1}{3} l_2$ та $\frac{1}{3} l_3$ між прямовисами ss' та rr' відкладено в зворотному порядку; це пояснює й саму назву прямовиса tt'. Запам'ятаймо, що прямовис оберненої третини відхиляється від проміжної опори завжди в бік довшого прогону, і відхил його абсолютною величиною дорівнює $\left[\frac{1}{3}\left(l_{n+1} - l_n\right)\right]$.

4) Через даний лівий фокус F_2 в першому прогоні проводимо довільну похилу пряму $F_2 s' t'$, що перетинає прямовис лівої третини в точці s' і прямовис оберненої третини — в точці t'.

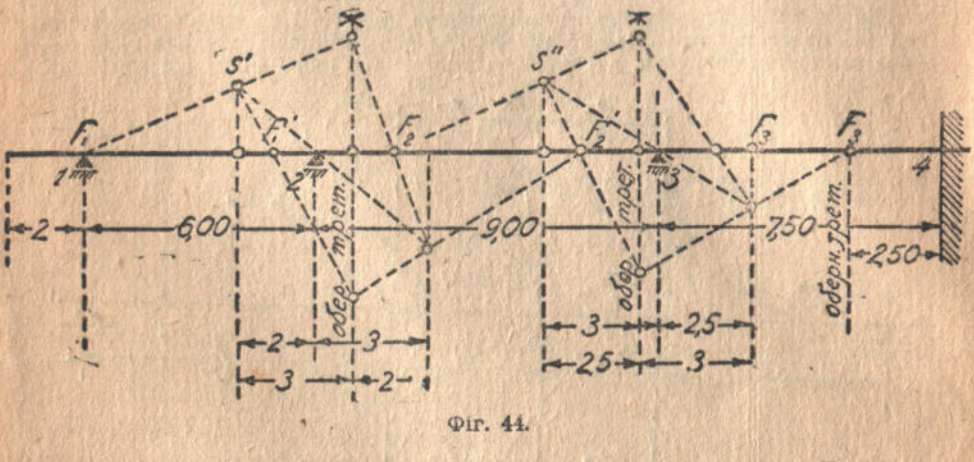
5) Через точку s' і проміжну опору 3 проводимо пряму $s' 3 r'$ до перетину з прямовисом правої третини в точці r'.

6) Одержану точку r' сполучаємо прямою з точкою t', знайденою раніше. Перетин останньої прямої $t' r'$ з віссю тряма визначає лівий фокус F_3 в прогоні l_3.

Доказ цього способу, що базується на подібності цілого ряду трикутників, вміщено в розділі V. Правильність розв'язання читач може перевірити обчисливши фокусову віддаль v_n із формули (20), знаючи v_{n-1}, l_{n-1} та l_n.

Знаючи, як розташовано F_3, ми можемо знайти лівий фокус F_4 в дальшому прогоні.

Так само можна знайти й праві фокуси, при чому, щоб не затемнювати рисунка, варто використати лінії попередніх побудов.



Фіг. 44.

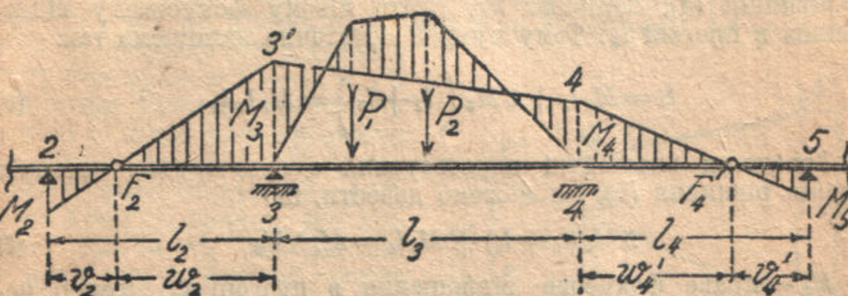
Уявімо, що правий фокус F_3' в прогоні l_3 (фіг. 43 або 44) знайдено. Треба визначити місце правого таки фокуса в суміжному прогоні l_2. Побудову, як і в попередньому випадку, починаємо з того, що проводимо довільну похилу пряму $F_3' t''$ через даний фокус. Проте, щоб зменшити число ліній, пряму цю треба проводити не довільно, через точку r', одержану попередньою побудовою. Тоді не треба проводити пряму через точку r' та опору 3, бо ця пряма вже є.

Точку перетину t'' похилої прямої $F'_3 r'$ й прямовиса оберненої третини сполучаємо з точкою s' і знаходимо правий фокус F_2'. На фіг. 44 показано, як послідовно знаходити фокуси в усіх прогонах нерозрізного тряма. Фокус F_1 взято на першій опорі, бо він може вільно повертатись, а фокус F_3 на віддалі $v'_3 = \frac{1}{3} l_3$ від правого заправленого кінця тряма. Нахил прямих $F_1 s'$ та $F_2 s''$ вибираємо довільно; тому він може бути різний.

Як висновок із цього розділу, зауважмо, що розташування фокусів нерозрізного тряма визначається виключно співвідношенням його прогонів. Наявність обтягу може призвести до того, що лінія моментів не проходитиме через фокуси, але не може змінити їхнього розташування. Тому фокуси завжди можна знайти й використати під час розрахунку нерозрізного тряма.

§ 22. Рівняння опорних моментів на кінцях обтяженого прогону.

Нехай дано нерозрізний трям, у якого обтяжено один і лише один прогін, наприклад, прогін l_3. Треба зробити повний графічний розрахунок цього тряма.



Фіг. 45.

Для цього вилучмо три суміжні прогони (фіг. 45) з обтяженим посередині прогоном,—цебто в нашому випадку прогони l_2, l_3, l_4,—і напишімо рівняння трьох моментів спочатку для прогонів $l_2 - l_3$, а потім для прогонів $l_3 - l_4$.

Рівняння ці матимуть вигляд:

$$M_2 l_2 + 2 M_3 \ (l_2 + l_3) + M_4 l_3 = - 6 R_3^{\Phi} \quad \text{(a)}$$

$$M_3 l_3 + 2 M_4 \ (l_3 + l_4) + M_5 l_4 = - 6 R_4^{\Phi} \quad \text{(b)}$$

Перетворімо суму двох перших членів рівняння (a), яку ми скорочено позначимо літерою S:

$$S = M_2 l_2 + 2 M_3 \ (l_2 + l_3) = 2 M_3 l_3 + 2 M_3 l_2 + M_2 l_2 =$$

$$= M_3 l_3 \left[2 + 2 \frac{l^2}{l_3} + \frac{M_2 l_2}{M_3 l_2}\right] = M_3 l_3 \left[2 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 + \frac{M_2}{M_3}\right)\right] \quad \text{(c)}$$

Через те що, коли обтяжено один прогін l_3, безперервний ряд прогонів ліворуч лишається необтяжений, то лінія моментів у прогоні l_2 повинна проходити через лівий фокус F_2 цього прогону (див. фіг. 45), і відношення опорних моментів M_2 та M_3 на кінцях прогону l_2 — матиме вигляд:

$$M_3 : M_2 = -(w_2 : v_2) = - K_2$$

де K_2 — ліве фокусове відношення в прогоні l_2.

Із цієї рівности знаходимо:

$$\frac{M_2}{M_3} = -\frac{1}{K_2}$$

Заміняючи відношення моментів $M_2 : M_3$ у рівнянні (c) величиною, знайденою раніш, одержимо:

$$S = M_3 l_3 \left[2 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 - \frac{1}{k_2}\right)\right] \tag{d}$$

Уже було доведено (див. форм. 19'''), що вираз, взятий у дужки в рівнянні (d), дорівнює k_3, цебто лівому фокусовому відношенню в прогоні l_3. Тому суму S остаточно напишемо так:

$$S = M_2 l_2 + 2 M_3 \left(l_2 + l_3\right) = M_3 l_3 k_3 \tag{e}$$

Зробивши аналогічні перетворення з сумою двох останніх членів рівняння (b), ми можемо довести, що

$$2 M_4 (l_3 + l_4) + M_5 l_4 = M_4 l_3 k'_3 \tag{f}$$

де k'_3 — праве фокусове відношення в прогоні l_3. Тепер початкову систему рівнянь (a) та (b) можна подати в простішому вигляді, а саме:

$$M_3 l_3 k_3 + M_4 l_3 = -6 R_3^{\Phi 0} \tag{24^a}$$

$$M_2 l_3 + M_4 l_3 k_3' = -6 R_4^{\Phi 6} \tag{24^b}$$

Примітка 1. Коли обтяжено лише перший прогін нерозрізного тряма і крайня ліва опора цього тряма суставна, то можна написати лише друге рівняння (24), в яке треба підставити $M_1 = 0$; це дасть

$$M_2 l_1 k_1' = -6 R_2 \Phi^0 \tag{25}$$

Дійсно, кожне з рівнянь (24) є перетворене рівняння трьох моментів, якого вживаємо, як відомо, тільки для проміжних опор. Коли обтяжити один перший прогін, то такою опорою буде опора 2, для якої ми й можемо написати рівності (24 — b).

Примітка 2. Коли лівий кінець тряма заправлено в стіну, то під час розрахунку ми додаємо уявний прогін $l_0 = 0$. Тоді перша опора тряма стане проміжна, і ми можемо написати двоє рівнянь для опорних моментів на його кінцях. Те саме можна сказати й про заправлений правий кінець тряма.

§ 23. Графічне розв'язання рівнянь моментів.

Систему рівнянь (24) можна розв'язати аналітично. Для цього насамперед треба знайти праве й ліве фокусові відношення k_3 та k_3' в обтяжному прогоні, обчислити фіктивні реакції на кінцях цього прогону і розв'язати двоє рівнянь із двома невідомими. Але ми підемо іншим шляхом, а саме, розв'яжемо рівняння (24) графічно.

Перетворімо спочатку перше з цих рівнянь, замінивши в ньому фокусове відношення k_3 його виразом $w_3 : v_3$, що дає:

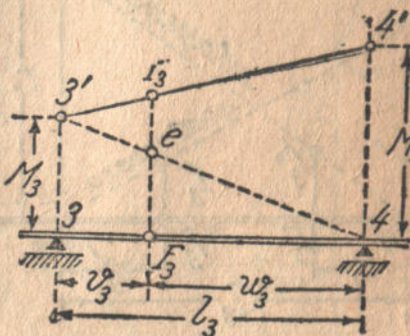
$$M_3 l_3 \frac{w_3}{v_3} + M_4 l_3 = -6 R_3^{\Phi^\circ} \tag{a}$$

Поділімо обидві частини останнього рівняння на l_3^2 та помножмо на v_3. Тодіодержимо:

$$M_3 \frac{w_3}{l_3} + M_4 \frac{v_3}{l_3} = -\frac{6 R_3^{\Phi^\circ} v_3}{l_3^2} \tag{b}$$

Щоб з'ясувати значення лівої частини рівняння (b), відкладімо (фіг. 46) на прямовисах опор 3 та 4 відтинки $33' = M_3$ та $44' = M_4$. Вершки цих відтинків сполучімо прямою $3'—4'$, що й буде лінія опорних моментів у прогоні l_3. Крім того, проведімо допомічну пряму $3'—4'$. Із подібности трикутників $33'4 \infty 4eF_3$ та $3'4'4 \infty 3'ef_3$ бачимо, що відтинки F_3e та ef_3, які відтяли ці прямі на прямовисі лівого фокуса, дорівнюють:

$$F_3e = M_3 \frac{w_3}{l_3};\ ef_3 = M_4 \frac{v_3}{l_3} \tag{c}$$



Фіг. 46.

Ордината ж F_3f_3, як сума цих відтинків, дорівнюватиме

$$F_3f_3 = M_3 \frac{w_3}{l_3} + M_4 \frac{v_3}{l_3} \tag{d}$$

Порівнюючи одержаний вираз із рівняння (b), ми бачимо, що ліва частина цього рівняння є не що інше, як ордината лінії опорних моментів, виміряна на прямовисі лівого фокуса. Для скорочення запровадьмо такий термін:

Ординату лінії опорних моментів, виміряну на прямовисі лівого фокуса F_n, зватимемо фокусовим моментом і позначатимемо M_{F_n}.

Тоді ми можемо коротко сказати, що ліва частина рівняння (a) є лівий фокусовий момент M_{F_3} в прогоні l_3, а рівняння напишемо в такому вигляді:

$$M_{F_3} = -\frac{6 R_3^{\Phi^\circ} v_3}{l_3^2} \tag{26^a}$$

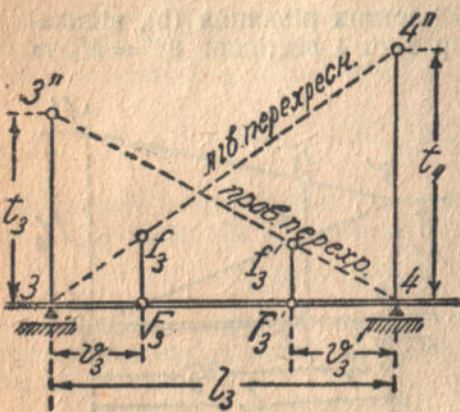
Повернімося тепер до рівняння (24^b). Замінивши в ньому k_3' відношенням відтинків $w_3' : v_3'$ та помноживши обидві частини його на $v_3' : l_3^2$, одержимо:

$$M_3 \frac{v_3'}{l_3} + M_4 \frac{w_3'}{l_3} = \frac{6 R_4^{\Phi^\circ} v_3'}{l_3^2}$$

Нетрудно довести, що ліва частина цього рівняння є ордината лінії опорних моментів, виміряна на прямовисі правого фокуса; її ми можемо назвати правим фокусовим моментом в обтяженому прогоні і позначити символом M_{F_3}. Рівняння (24^b) набирає такого вигляду:

$$M_{F_3}' = -\frac{6\,R_4^{\Phi^0}\,v_3'}{l_3^2} \qquad (26^b)$$

Щодо правих частин рівнянь (26^a) та (26^b), то вони є невідомі величини, бо в них входять фіктивні реакції від обтяження прогону l_3 основними епюрами моментів. Отже, розглянуті рівняння дають змогу знайти величини правого й лівого фокусових моментів в обтяженому прогоні та знайти опорні моменти на його кінцях. Дійсно, фокусові моменти є ординати лінії опорних моментів; коли ж відомі дві ординати прямої, то можна побудувати цю пряму. Тепер лишається тільки знайти графічно праві частини рівнянь (26), чого можна досягти за допомогою такої простої побудови (фіг. 47).



Фіг. 47.

На прямовисі правої опори обтяженого прогону відкладімо відтинок $44'' = t_4$, який можна визначити з формули

$$t_4 = -\frac{6\,R_3^{\Phi^0}}{l_3} \qquad (27^a)$$

вершок його 4″ сполучімо прямою з лівою опорою 3. Ця пряма відтинає на прямовисі лівого фокуса відтинок $F_3 f_3$, який являє собою вільний член рівняння (26а), а разом з тим і лівий фокусовий момент в обтяженому прогоні. Дійсно, з подібности трикутників 3 4 4″ та $3 F_3 f_3$ виходить, що

$$F_3 f_3 = t_4 \frac{v_3}{l_3} = -\frac{6 R_3^{\Phi^0} \cdot v_3}{l_3 \,.\, l_3} = -\frac{6 R_3^{\Phi^0} v_3}{l_3^2} = M_{F_2}$$

Відповідно до цього, щоб знайти праву частину рівняння (26^b), відкладім на прямовисі лівої опори обтяженого прогону відтинок $3\,3'' = t_3$, який можна визначити з формули:

$$t_3 = -\frac{6 R_4^{\Phi^0}}{l_3} \qquad (27^b)$$

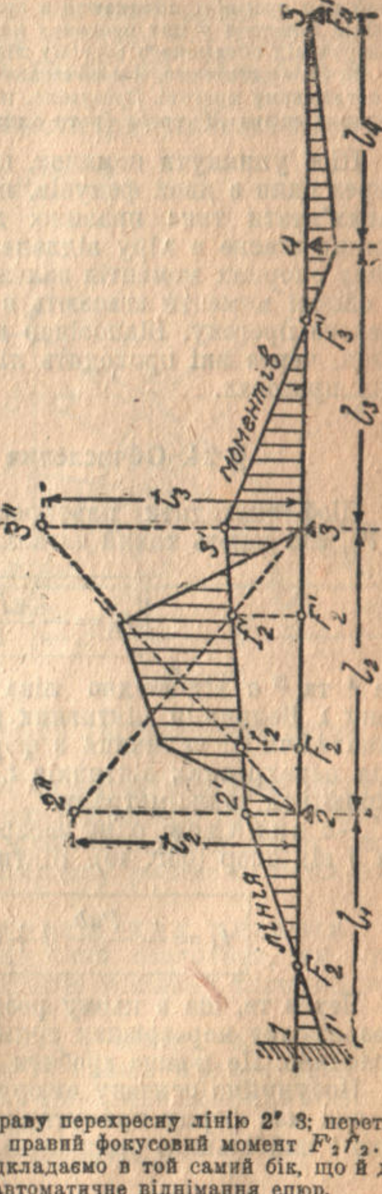
і вершок його сполучімо прямою з правою опорою.

Перетин цієї прямої з прямовисом правого фокуса визначає відтинок $F'_3 f'_3$, що є водночас права частина рівняння (26) і правий фокусовий момент в обтяженому прогоні.

Відтинки t_3 та t_4 відносно обтяженого прогону звемо **лівим та правим перехресними відтинками**. Пряму 3 — 4″, що проходить через ліву опору обтяженого прогону та через вершок 4″ протилежного перехресного відтинка, звемо **лівою перехресною лінією**.

Відповідно до цього пряма 4 — 3″, що проходить через праву опору 4 та вершок протилежного відтинка t_3, звемо **правою перехресною лінією**. Як бачимо, **ліва перехресна лінія відтинає на прямовисі лівого фокуса обтяженого прогону величину лівого фокусового моменту.**

Відповідне твердження вірне і для правої перехресної лінії.



Фіг. 48.

Самий процес графічного розрахунку нерозрізного тряма, коли обтяжено один і лише один прогін (прогін l_2 на фіг. 48), розпадається на такі окремі операції:

1) Знаходимо графічно праві й ліві фокуси всіх прогонів, використовуючи спосіб, що про нього йшла мова в § 21.

2) Визначаємо графічно відтинки t, використовуючи побудови дальшого параграфа.

3) Правий перехресний відтинок t_3 відкладаємо напрямовисі правої опори 3 обтяженого прогону. Через вершок цього відтинка 3″ та протилежну опору 2 проводимо ліву перехресну лінію. Перетин її з прямовисом лівого фокуса визначає відтинок $F_2 f_2$, що є лівий фокусовий момент в обтяженому прогоні.

Відповідно до цього лівий перехресний відтинок t_2 відкладаємо на прямовисі лівої опори 2 і через вершок його та протилежну опору 3 проводимо праву перехресну лінію 2″ 3; перетин її з прямовисом правого фокуса визначає правий фокусовий момент $F'_2 f'_2$.

Примітка. Від'ємні відтинки t відкладаємо в той самий бік, що й додатні основні епюри M^0; через те маємо автоматичне віднімання епюр.

4) Через вершки f_2 та f'_2 відтинків, що є фокусові моменти в обтяженому прогоні, проводимо пряму 2′ 3′. Це буде лінія опорних моментів. Перетин її

в прямовисом опор визначає опорні моменти $22' = M_2$ та $33' = M_3$ на кінцях обтяженого прогону.

5) Продовжуємо лінію опорних моментів праворуч через праві фокуси необтяжених прогонів.

Це робимо на тій підставі, що коли обтяжено один прогін l_2, безперервний ряд прогонів, почннаючи з крайнього правого, лишається необтяжений, і лінія моментів у цих прогонах повинна проходити через відповідні фокуси. Ліворуч від обтяженого прогону лінію моментів проводимо через ліві фокуси.

6) За ординатами, які обчислено заздалегідь, будуємо основну епюру M^0 в обтяженому прогоні. Зрозуміло, що мірило для відтинків t та обчислених ординат епюри M^0 треба брати однакове.

Щоб уникнути помилок, проводячи лінію опорних моментів через один з двох фокусів, що є в кожному прогоні, корисно запам'ятати таке правило: деформація нерозрізного тряма є явище згасне в міру віддалення від обтяженого прогону. Величина опорних моментів залежить від деформації тряма; отже, й опорні моменти згасають в міру віддаляння опори від обтяженого прогону. Відповідно до цього ми повинні вибирати фокуси, через які проходить лінія опорних моментів у необтяжених прогонах.

§ 24. Обчислення перехресних відтинків.

Щоб знаходити перехресні відтинки, є формули (27^a) та (27^b), які мають такий загальний вигляд:

$$\boxed{t_A = -\frac{6R_B^{\phi^0}}{l}\,;\, t_B = -\frac{6R_A^{\phi^0}}{l}} \tag{27}$$

де ^{A} та ^{B} є відповідно ліва й права опора обтяженого прогону l. Величини фіктивних реакцій було подано в § 9. Підставляючи ці величини в формули (27), легко знайдемо вираз для перехресних відтинків t. Запам'ятаймо ще, що ці відтинки міряються тонно-метрами.

1-й випадок: один зосереджений тягар P віддалено на a та b від опор (фіг. 49). Відтинки t можна облічити з формул:

$$\boxed{t_A = -\frac{Pab}{l^2}(l+a)\,;\, t_B = -\frac{Pab}{l^2}(l+b)} \tag{28}$$

Через те, що в цьому розділі ми зупинились на графічному розрахунку нерозрізних трямів, то й відтинки t бажано знайти графічно. Це можна зробити так.

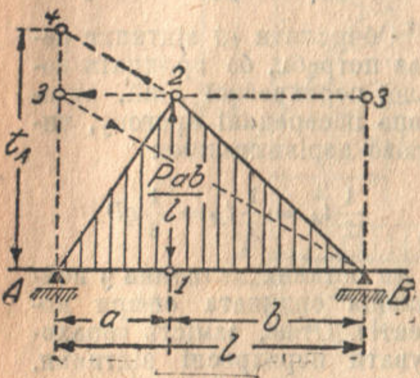
Побудуймо основну епюру M, яка за даного способу обтяження має форму трикутника $A2B$ (фіг. 49) з вершком під силою і найбільшою ординатою, що дорівнює:

$$\overline{12} = \frac{Pab}{l}$$

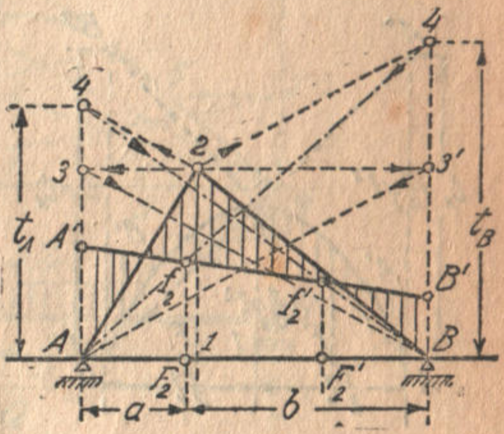
Через вершок трикутника 2 проведімо позему пряму 3 2 3′ до перетину з прямовисами опор у точках 3 та 3′. Ліву точку перетину 3 сполучімо прямою $3B$ з правою опорою B і через вершок трикутника 2 проведімо пряму 2 4, рівнобіжну з прямою $3B$. Пряма ця перетинає прямовис лівої опори в точці 4, ордината якої є лівий перехресний відтинок t_A. Щоб упевнитись у цьому, досить узяти до уваги, що $A4 = A3 + 34$, де

$A3 = 12 = P\frac{ab}{l}$ і, крім, того, з подібности трикутників 2 3 4 та $AB3$

$$34 = A3\frac{a}{l} = P\frac{ab}{l}\cdot\frac{a}{l}$$



Фіг. 49.



Фіг. 50.

Склавши величину відтинків $A3$ та 3 4, знаходимо вираз для відтинка t_A.

Щоб краще зрозуміти цей спосіб, на фіг. 50 показано, як будувати обидві перехресні лінії та як проводити лінію опорних моментів. На цій фігурі виділено, щоб заощадити місце, лише обтяжений прогін, практичну ж побудову робимо на загальному рисунку тряма.

2-й випадок. Кілька зосереджених тягарів.

У цьому випадку перехресні відтинки знаходимо, як суми перехресних відтинків, що відповідають кожному тягарові, взятому зокрема.

Графічно знаходити ці суми хоч і можна, але не дуже зручно і, крім того, забарно. Через те краще відшукувати відтинки t аналітично, з формули (28). Наводимо дані про відтинки t для деяких типових випадків обтягу.

Один тягар P посередині прогону:

$$t_A = t_B = -\frac{3}{8}Pl$$

Два рівні тягарі P **на віддалі** a **від опори** A **та** B:

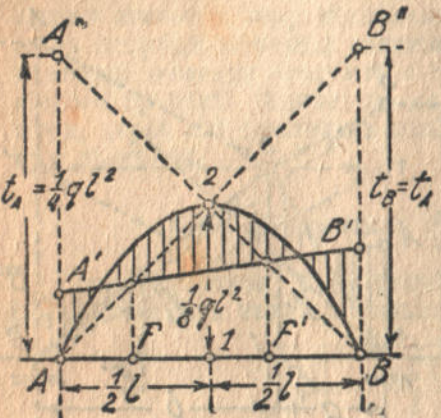
$$t_A = t_B = -\frac{3Pa}{l}(l-a)$$

Три рівні тягарі P **на взаємних віддалях** $^1/_4\, l$

$$t_A = t_B = -\frac{15}{16}Pl$$

3-й випадок: Рівномірний обтяг q **т/п.м на всьому прогоні** (фіг. 51).

Через симетрію обтягу обидва перехресні відтинки дорівнюють:



Фіг. 51.

$$t_A = t_B = -\frac{6ql^3}{24l} = -\frac{ql^2}{4}$$

Обчисляти ці відтинки немає потреби, бо ордината кожної перехресної лінії, виміряна посередині прогону, числово дорівнюватиме:

$$\frac{1}{2}t_A = \frac{1}{2}t_B = \frac{1}{8}ql^2$$

а ця остання величина є найбільша ордината епюри моментів. Отже, замість обраховувати перехресні відтинки, ми можемо в цьому окремому випадку сполучити прямими вершок параболі моментів 2 з опорами A та B. Ці прямі визначать потрібні нам частини перехресних ліній. Залишається лише відмітити точки їхнього перетину з прямовисами фокусів і через ці точки провести лінію опорних моментів.

4-й випадок: Рівномірний обтяг q **протягом дільниці** S, **середину якої віддалено на** a **та** b **від** A **та** B (фіг. 52).

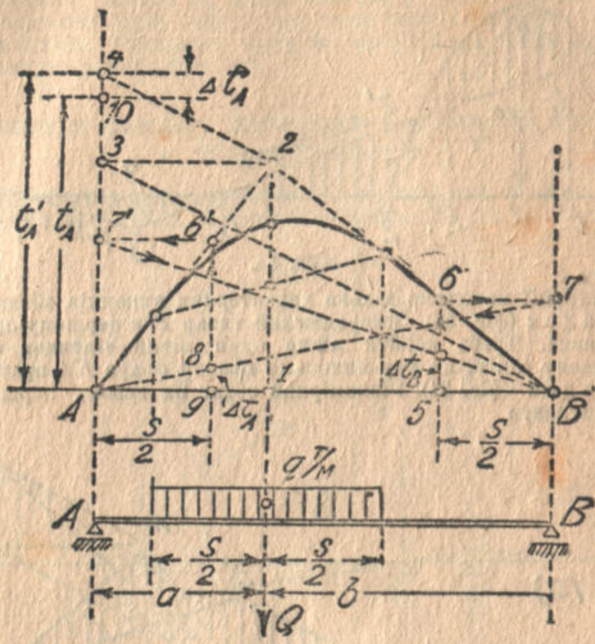
Перехресні відтинки можна обчислити з формул:

$$\left.\begin{aligned} t_A &= -\frac{Qab}{l^2}(l+a) + \frac{QS^2}{4l^2}a \\ t_B &= -\frac{Qab}{l_1}(l+b) + \frac{QS^2}{4l^2}b \end{aligned}\right\} \text{ де } Q = qs \qquad (29)$$

Графічно побудувати цей відтинок можна так.

Даний рівномірний обтяг замінимо зосередженим тягаром $Q = qs$, прикладеним посередині обтяженої дільниці. Для цього зосередженого тягара знаходимо лівий перехресний відтинок $t'_A = A4$, користуючись із поданої вже попереду графічної побудови. Потім шукаємо поправку $\triangle t_A$ до знайденої величини t'_A, яка враховує ту обставину, що тягар Q розподілено в дійсності на дільниці s. Для цього від правої опори B відкладімо довжину $B5 = {}^1/_2\, s$.

Через точку 5 проведімо прямовис до перетину в точці 6 з боком основного трикутника моментів (але не з параболею, що зрізує вершок у тих випадках, коли точка 5 лежить у межах обтяженої дільниці). Через одержану точку 6 проведімо поземину до перетину в точці 7 із прямовисом правої опори. Сполучімо точку 7 із лівою опорою A й перетнімо щойно утворений кут $7AB$



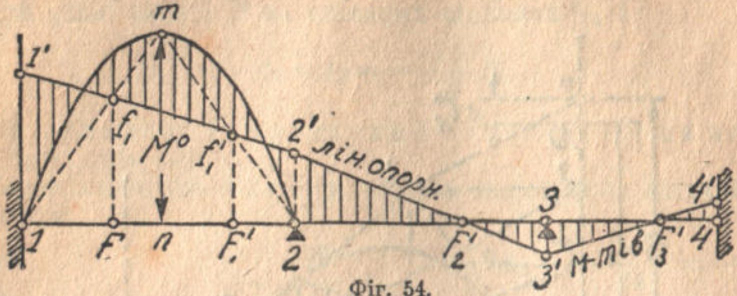
Фіг. 52.

прямовисною прямою 89, віддаленою від лівої опори на $A9 = \frac{1}{2}\,S$. Відтинок 89 цієї прямої і є шукана поправка $\triangle t_A$. Відкладім його від знайденої раніше точки 4 вниз. Одержимо точку 10 — вершок лівого перехресного відтинка t_A, через яку треба провести праву перехресну лінію. Щоб упевнитися в цьому, досить розглянути подібні трикутники: $\triangle B12 \backsim \triangle B56$; $\triangle AB7 \backsim \triangle A89$ та взяти до уваги, що відтинки

$$\overline{12} = \frac{Qab}{l} \text{ і } \overline{B7} = \overline{56}$$

Фіг. 53.

Розрахунок нерозрізного тряма за методою перехресних відтинків починається з графічної побудови фокусів; для цього треба вирисувати даний трям у великому по змозі мірилі. Знайдені фокуси перенесімо на новий рисунок тряма, на якому побудуймо відтинки t і проведімо лінію опорних моментів.

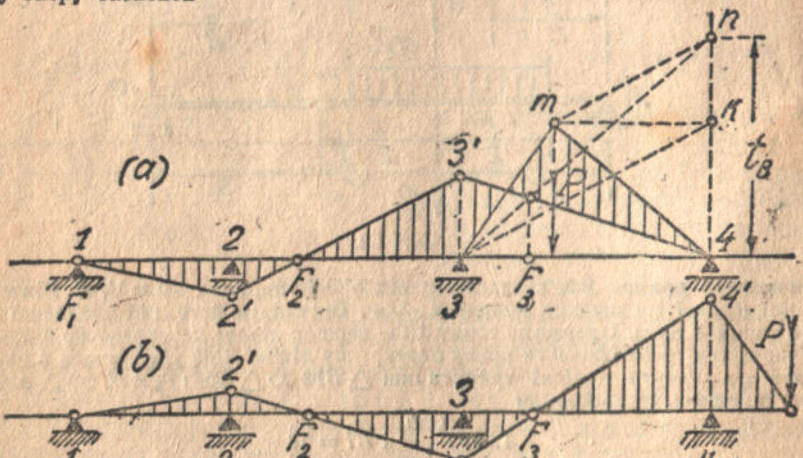


Фіг. 54.

Для ілюстрації наводимо кілька характерних випадків обтягу.

1-й **випадок** (фіг. 53). Зосереджений тягар P в першому прогоні; перша опора — суставна. Треба знайти лише один лівий відтинок t_1 і провести праву перехресну лінію, на яку виносимо правий фокус F'_1 правого прогону.

2-й **випадок** (фіг. 54). Рівномірний обтяг на всьому першому прогоні, ліву опору затиснен



Фіг. 55.

Побудуймо основну епюру моментів, що має вигляд параболі 1 m 2 з найбільшою ординатою $M^0 = \frac{1}{8}\, ql_1^2$.

Вершок її m сполучімо з опорами 1 та 2 і на ці прямі знесімо відповідними прямовисами фокуси F_1 та F_2.

Лінія опорних моментів у 1-му прогоні проходить через одержані точки f_1 та f_2; а в другому та третьому прогонах — через праві фокуси F_2' та F_3'.

3-й **випадок**. Трям (фіг. 55^a) має консолі на обох кінцях; обтяжено зосередженою силою крайній правий прогін.

Тому що консолі не несуть обтягу, моменти на крайніх опорах дорівнюють нулеві.

Для обтяженого прогону знаходимо правий перехресний відтинок t_B, проводимо ліву перехресну лінію 3 і виносимо на неї лівий фокус F_3. Лінія опорних моментів в обтяженому прогоні буде $4\,3'$. В інших прогонах вона проходить через ліві фокуси.

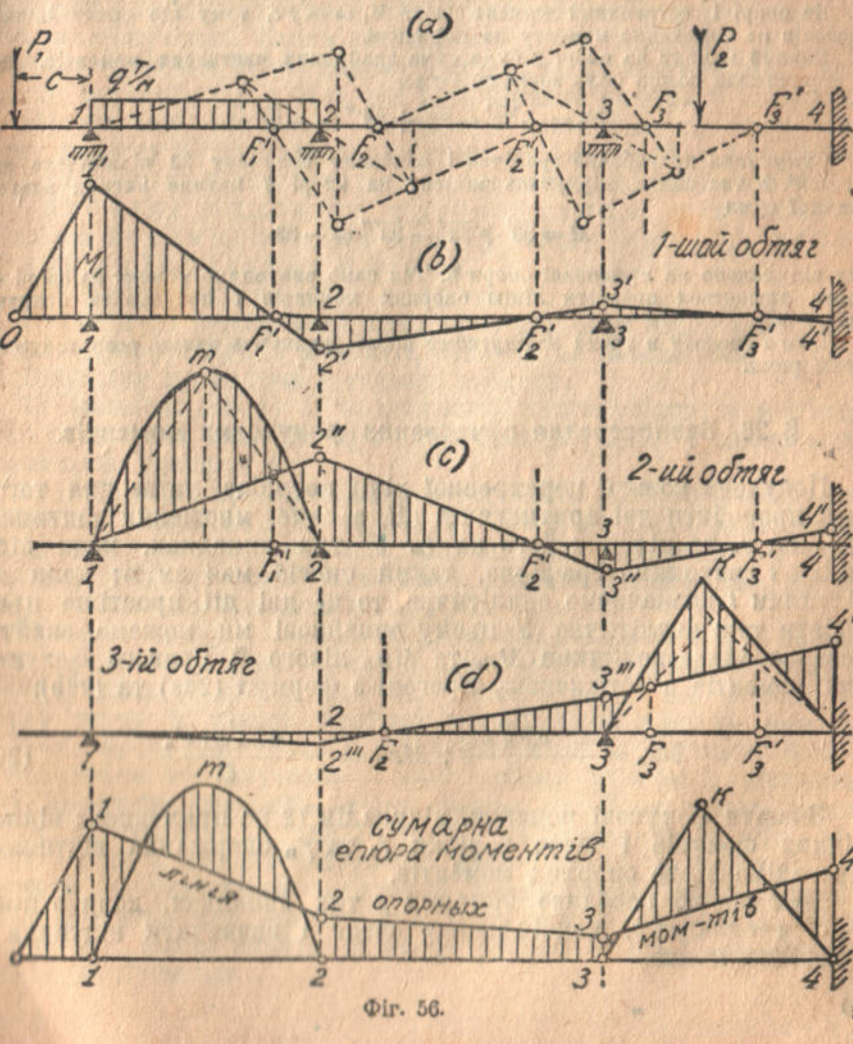
4-й випадок. Обтяжено консолю на правому кінці нерозрізного тряма (фіг. 55*b*). Опорний момент M_4 дорівнюватиме Pc, де c — довжина консолі.

У всіх прогонах лінія опорних моментів проходить через ліві фокуси.

5-й випадок. Обтяжено один із середніх прогонів (фіг. 55). Цей випадок розглянуто раніше (фіг. 48).

§ 25. Уживання способу перехресних відтинків, коли обтяжено кілька прогонів.

Хоч спосіб перехресних відтинків має на меті той окремий випадок, коли обтяжено лише один прогін нерозрізного тряма, але це не виключає можли-



Фіг. 56.

вости застосовувати його й тоді, коли обтяжено кілька прогонів. У цьому випадку нам доведеться лише розбивати задачу, тобто вивчати вплив обтягу кожного прогону зокрема, і скласти потім одержані наслідки.

Для прикладу розгляньмо нерозрізний трам, обтяжений згідно з фіг. 56*a*. Розрахунок провадимо в такому порядку.

1) Знаходимо графічно праві й ліві фокуси у всіх прогонах.

2) Знаходимо опорні моменти, що їх спричиняє сила P, прикладена на кінці консолі. Вважаємо, що інших сил нема. Момент на крайній лівій опорі становить $M_1 = Pc$. Лінія опорних моментів проходить у всіх прогонах через праві фокуси (фіг. 56*b*). Її помічено цифрами з однією рискою.

3) Знаходимо опорні моменти, коли обтяжено лише перший прогін (фіг. 56*c*). Вважаємо, що інших сил нема. Лінія опорних моментів, позначена цифрою з двома рисками, проходить через праві фокуси другого та третього прогонів.

4) Так само вивчаємо вплив обтягу одного третього прогону і знаходимо лінію опорних моментів, позначену цифрами з трьома рисками (фіг. 56*c*).

5) Знаходимо опорні моменти при одночасному чині всіх розглянутих сил. На опорі 1 остаточний момент $11' = M_1 = -Pc$, тому що обтяг інших прогонів не спричиняє моменту на цій опорі.

Повний момент на опорі 2 буде сума знайдених часткових моментів, що їх спричинила кожна сила зокрема. Отже:

$$M_2 = +\overline{22}' - \overline{22}'' + \overline{22}''' = -\overline{22}$$

Сумування пророблено графічно і знайдену величину 22 відкладено на фіг. 56*d*. З тих самих міркувань момент на опорі 3 матиме вигляд альґебричної суми

$$M = \overline{33}' + \overline{33}'' - \overline{33}''' = -33$$

яку відкладено на прямовисі опори 3. Так само знаходимо момент на опорі 4. Тепер лишається провести лінію опорних моментів і побудувати основні епюри M^0.

Цього способу в трохи поширеному обсязі вживають також, розраховуючи цупкі рами.

§ 26. Безпосереднє обчислення фокусових моментів.

Побудова кожної перехресної лінії потрібна лише для того, щоб пробити дві аритметичні дії, а саме: множення відтинка t_{n+1} на v_n та ділення його на l_n. У тих випадках, коли відтинки t знаходимо графічно, такий спосіб має зміст; коли ж відтинки t визначаємо аналітично, то ці дві дії простіше пробити теж аналітично. У цьому випадкові ми можемо знайти безпосередньо величини M_{Fn} та $M_{F'n}$ лівого й правого фокусових моментів в обтяженому прогоні з формул (26a) та (26b):

$$M_{Fn} = -\frac{6R_n^{\phi^0} v_n}{l_n^2}; \quad M_{F'n} = -\frac{6R_{n+1}^{\phi^0} v'_n}{l_n^2} \tag{26}$$

Знаючи фокусові моменти, відкладім їх на прямовисах відповідних фокусів і через вершки f_n та f'_n одержаних відтинків проведімо лінію опорних моментів.

Цей спосіб особливо зручний у тих випадках, коли в прогоні є складний, комбінований обтяг і визначити відтинки t графічно тяжко.

§ 27. Спосіб графічно визначати перерізні сили й опорні реакції.

Цей спосіб базується на відомій із графостатики теоремі, що площу між шнуровою кривою та її замичною ми можемо розглядати, як епюру згинних моментів, при чому ординати цієї епюри треба міряти від замичної.

Побудувавши епюру згинних моментів нерозрізного тряма, ми можемо вважати цю епюру за шнуровий многокутник або шнурову криву.

Тоді нам лишається розв'язати таке завдання: за даним шнуровим многокутником знайти полюс і побудувати многокутник сил. Завдання це буде обернене до того, яке звичайно доводиться розв'язувати (дано сили та полюс; побудувати шнуровий многокутник). Запам'ятаймо, що ролю замичної, від якої міряємо ординати, буде в даному випадку відігравати нульова вісь епюри моментів, що є база, від якої міряємо ординати епюри M.

Перше ніж описувати побудову, нагадаймо ще одну важливу теорему з графостатики, а саме: коли два боки шнурового многокутника перетинаються на якійсь силі P, то промені силового многокутника, рівнобіжні з цими боками, охоплюють ту саму силу P, цебто йдуть до її початку й кінця.

Хід розрахунку з'ясуємо на прикладі.

Нехай дано нерозрізний трям (фіг. 57). Для нього вже побудовано епюру згинних моментів, зведену до поземої осі.

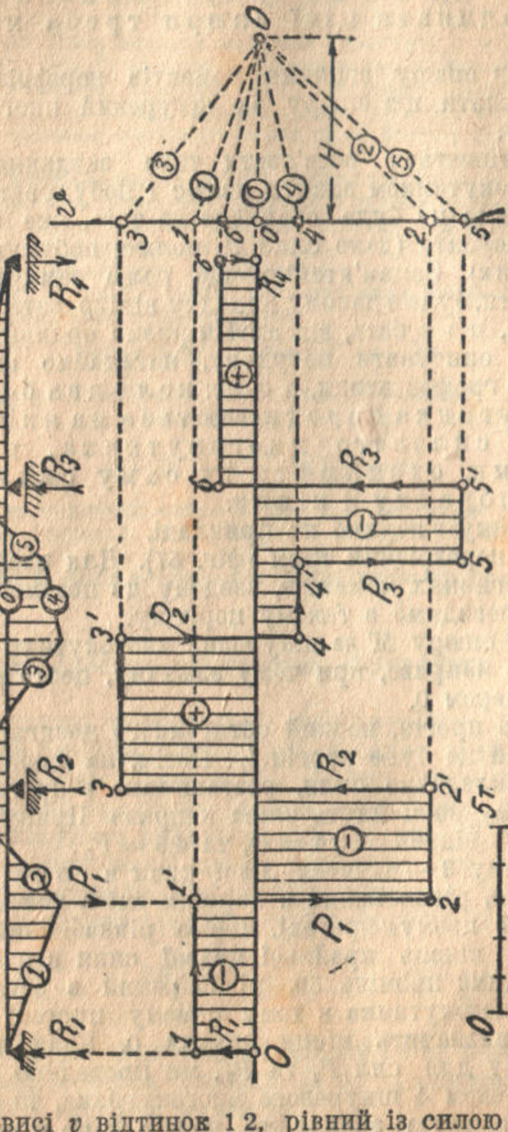
Побудову провадимо в такому порядку.

1) Вважаємо епюру M за шнуровий многокутник і нумеруємо його боки зліва направо, при чому замичну, цебто нульову вісь, позначаємо нумером 0.

2) Вибираємо прогін, повний обтяг якого досягає найбільшої величини. Нехай це буде прогін l_2. Потім, на довільно взятому прямовисі v відкладаємо сили, розташовані в прогоні l_2 в тому порядку, в якому вони йдуть зліва направо. Припустімо, що ці сили визначають відтинки $34 = P_2$ та $45 = P_3$.

3) Через точку 3 — початок лівої сили в прогоні l_2 — проводимо промінь 30, рівнобіжний з першим зліва боком шнурового многокутника в цьому прогоні, цебто рівнобіжний з боком 3. Через точку 5, кінець крайньої правої сили в цьому самому прогоні, проводимо промінь 50, рівнобіжний з останнім боком 5 шнурового многокутника в тому самому прогоні l_2. Перетин цих променів визначить місце полюса 0. Коли тепер через точку 4, межову для сил P_2 та P_3, ми проведемо промінь 40, рівнобіжний з боком 4 шнурового многокутника, то цей промінь повинен пройти через знайдений полюс 0; це є разом і перевірка правильности обчислення ординат основної епюри M^0. Щоб перевірити, можна знайти полюсну віддаль H ще й аналітично (див. далі примітку 1).

4) З'ясувавши, як розташовано полюс, проводимо через нього промені, рівнобіжні з іншими боками шнурового многокутника та, крім того, позему пряму 00, рівнобіжну з нульовою віссю або замичною. Запам'ятаймо, що промені 1 та 2 повинні відти-



Фіг. 57.

нати на прямовисі v відтинок 1 2, рівний із силою P_1, на який перетинаються боки шнурового многокутника, рівнобіжні з цими променями. Тепер ми можемо перейти до визначення величин опорних реакцій. Починаємо з крайньої лівої опори.

5) На реакції R_1 перетинаються замична й бік 1 шнурового многокутника. Отже, в силовому многокутнику ця реакція повинна лежати між променями 0 та 1, що рівнобіжні із згаданими боками.

Отже, реакцію R_1 визначає відтинок 0 1.

З тих самих міркувань реакцію R_2 визначає відтинок 2 3, що лежить між променями 2 та 3, які рівнобіжні з тими боками шнурового многокутника, що перетинаються на реакції R_2.

Щоб визначити напрям та знак реакції, треба мати на увазі, що, при обраному порядку нумерації боків шнурового многокутника, кожну силу й реакцію спрямовано від променя $n-1$ до променя n. Тому, коли промінь n розташується вище за промінь $n-1$, то реакція буде додатна, і навпаки.

6) Переходимо до побудови епюри перерізних сил. На першій дільниці (від опори 1 до сили P) маємо:

$$Q_1 = +R_1$$

Знак плюс узято тому, що сила R_1 намагається зсунути ліву відтяту частину тряма догори. Щоб побудувати епюру Q, проводимо через полюс позему пряму CO, яку приймаємо за нульову лінію епюри. Потім через кінець першого променя проводимо позему пряму 11.

Частина цієї прямої між прямовисами опори 1 та сили P_1 і є епюра Q; її треба нарисувати суцільною лінією, решту рисуємо крапчаком.

На другій дільниці між силою P та реакцією опори 2 перерізна сила дорівнює

$$Q_2 = Q_1 - P_1$$

Через те, що Q графічно визначає відтинок 0 1, який спрямовано вгору, а сила P_1 — відтинок 1 2, що його спрямовано вниз, то Q_2 визначить відтинок 0 2, який спрямовано в нашому прикладі внизу. Це показує, що Q_2 від'ємна. Щоб побудувати відповідну частину епюри Q, проводимо позему пряму через кінець променя 2 й відмічаємо відтинок цієї поземої 2 2′ між прямовисами сили P_1 та опори 2

Так само переконуємося, що перерізна сила Q_3 на дільниці між R_2 та P_2 дорівнює

$$Q_3 = Q_2 + R_2$$

і визначає її графічно відтинок 0 3, спрямований угору.

Отже, практично побудова епюри Q сходить до того, що проводять ряд поземих прямих ліній через кінці всіх променів, при чому кожна з цих прямих є частина епюри Q між прямовисами тих сил чи реакцій, між якими лежить даний промінь.

Примітка 1. Полюсну віддаль H можна знайти й аналітично таким способом.

Виміряймо в см по рисунку ординату шнурової кривої y в якомусь перекрої. Коли трям нарисовано в мірилі 1 см $= K$ м, то ордината ця являтиме довжину yK м, а момент у даному перекрої, за відомою теоремою з графостатики, буде:

$$M = HyK \text{ тм}$$

Пригадаймо тепер, що ми за шнурову криву взяли епюру моментів, побудовану в певному мірилі 1 см = п. тм. Тому виміряна в сантиметрах ордината y визначає момент

$$M = yn \text{ тм}$$

Порівнюючи обидва одержані вирази для M, знаходимо:

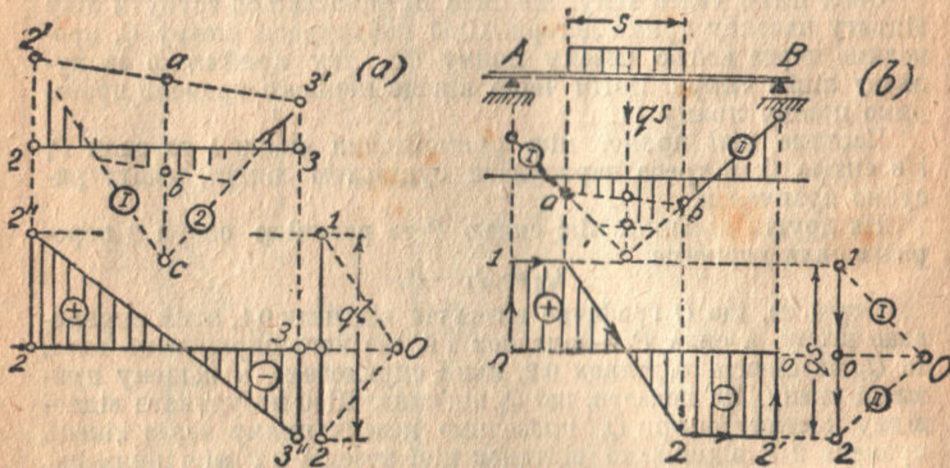
$$HyK = yn, \text{ звідки } H = \frac{n}{K} \text{ т} \qquad (30)$$

У цій формулі n є вартість 1 см в мірилі моментів, а K — вартість 1 см у мірилі довжин.

Примітка 2. Коли прогін обтяжено на всю довжину рівномірно (фіг. 58 a), то промені, що визначають розташування полюса, треба проводити рівнобіжно з першим та останнім елементом параболі, цебто рівнобіжно з дотичними до параболі на опорах. Напрям цих дотичних ми можемо визначити з великою точністю, коли на середньому прямовисі прогону відкладемо від вершка параболі b відтинок bc, рівний із стрілкою параболі

$$ab = bc = \frac{1}{8} ql^2$$

і сполучимо одержану точку C з опорами.



Фіг. 58.

Епюру Q та спосіб побудови її подано на тій самій фігурі 58a і особливих пояснень вона не потребує.

Примітка 3. Коли рівномірний обтяг q розташовано на дільниці s, то перший і останній промінь проводимо рівнобіжно з боками трикутньої епюри M, яку побудовано для зосередженого тягара $Q = qs$, що заміняє даний рівномірний обтяг. Епюру Q та спосіб побудови її подано на фіг. 58b.

Примітка 4. Наприкінці зауважмо, що епюру Q треба будувати за остаточною епюрою M, а не за окремими епюрами M, побудованими від обтягу окремих прогонів. Таким чином зменшимо кількість праці та уникнемо помилок.

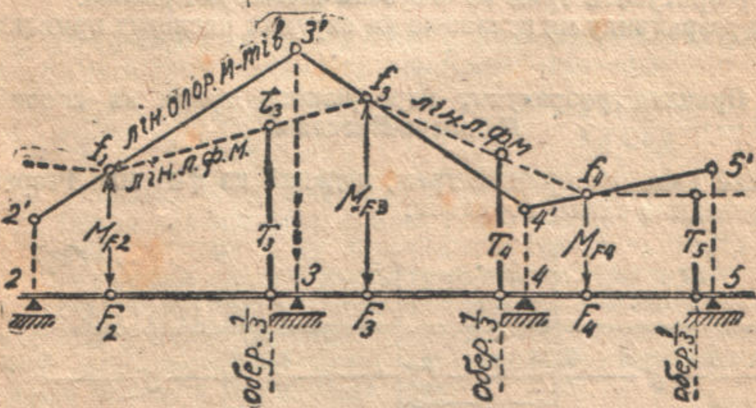
Поданий у цьому розділі спосіб перехресних відтинків є простіший і наочніший з усіх графічних способів. Можливість помилитися тут зведено до мінімуму. Хиба його полягає в тому, що, коли обтяжено кілька прогонів, остаточні величини M одержуємо, як суми кількох відтинків, що звичайно відбивається на точності обчислень.

РОЗДІЛ ТРЕТІЙ.

ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК ЗА СПОСОБОМ МЮЛЛЕРА-БРЕСЛЯВ.

§ 28. Теорема про відтинки T.

Перше ніж розпочати виклад цієї теореми, запровадьмо для скорочення одне нове позначення. Нехай дано нерозрізний трям, кілька прогонів якого подано на фіг. 59. Для цих прогонів побудовано лінію опорних моментів $2'$, $3'$, $4'$ $5'$ і знайдено ліві фокуси F_2, F_3, F_4... Проведімо прямовиси через ці фокуси й відзначмо точки f_2, f_3, f_4... їхнього перетину з лінією опорних моментів. Сполучивши ці точки прямими, одержимо ламану лінію f_2, f_3, f_4...,



Фіг. 59.

яку ми зватимемо **лінія лівих фокусових моментів** і позначатимемо коротко словами „лінія ЛФМ". Отже, **лінія ЛФМ є ламана лінія, що сполучає вершки фокусових моментів.**

Вершки її лежать на прямовисах лівих фокусів, а ординати вершків дорівнюють відповідним фокусовим моментам. Таке саме визначення можна дати й лінії правих фокусових моментів. Не треба плутати лінію фокусових моментів з лінією опорних моментів.

Вершки першої лежать на прямовисах фокусів, а вершки другої — на прямовисах опор.

Графічний або, вірніше, графоаналітичний розрахунок нерозрізного тряма за способом Мюллера-Бресляв ґрунтується на такій теоремі (фіг. 59): **Лінія лівих фокусових моментів відтинає на прямовисі оберненої третини, що суміжна з опорою** n, **відтинок** T_n, **рівний**

$$T_n = \frac{C_n}{3(l_{n-1} + l_n)} \tag{31}$$

де C_n — вільний член (права частина) рівняння трьох моментів, написаного для опори n та суміжних з нею прогонів. Тому що $C_n = -6\,R_n^{\text{ф}^0}$, то відтинкові T_n можна надати ще й такого вигляду:

$$\boxed{T_n = \frac{2\,R_n^{\text{ф}^0}}{l_{n-1} + l_n}} \qquad (32)$$

де $R_n^{\text{ф}^0}$ — основна фіктивна реакція на опорі n; l_{n-1} та l_n — довжини суміжних з цією опорою прогонів.

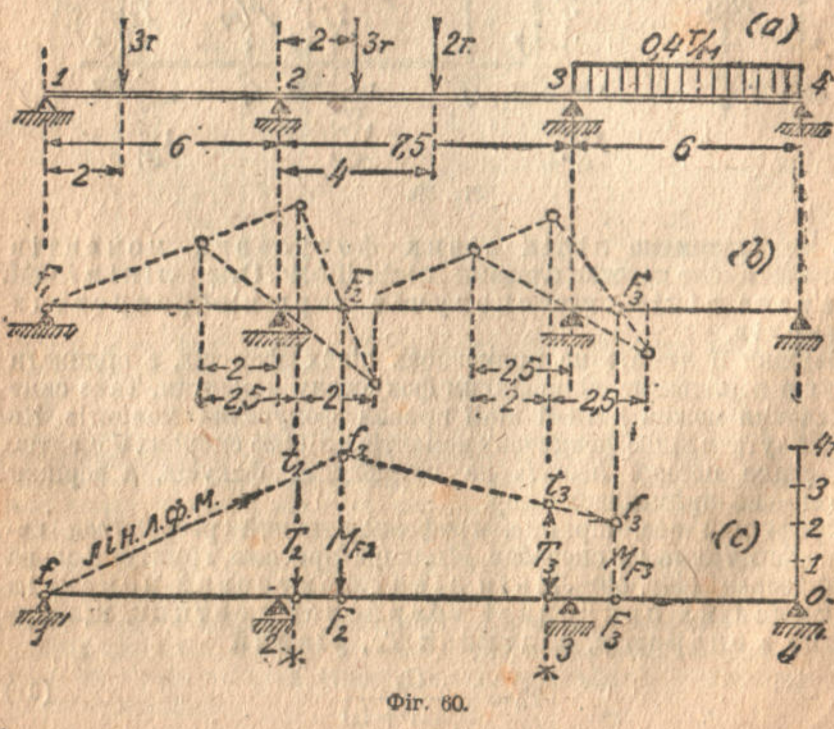
Довід цієї теореми, що ґрунтується на подібності цілого ряду трикутників, подано далі в розділі V.

Він до певної міри штучний і знати його не обов'язково, щоб уміти розрахувати трям за способом Мюллера-Бресляв.

Хід розрахунку ми покажемо на окремих числових прикладах.

§ 29. Приклад розрахунку нерозрізного тряма за способом Мюллера-Бресляв.

Нехай дано нерозрізний трям, поданий на фіг. 60a. Розрахунок провадимо таким порядком:



Фіг. 60.

1) Знаходимо ліві фокуси прогонів (фіг. 60) графічним способом, який подано раніше, при чому лівий фокус першого прогону лежить на опорі 1, бо ця опора суставна.

2) Обчислюємо основні фіктивні реакції проміжних опор із формул § 9. Реакції ці дорівнюватимуть:

$$R_2^{фо} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{6 \cdot 6}(6+2) + \frac{3 \cdot 2 \cdot 5,5}{6 \cdot 7,5}(7,5+5,5) +$$

$$+ \frac{2 \cdot 4 \cdot 3,5}{6 \cdot 7,5}(7,5+3,5) = 21,70 \text{ тм}^2$$

$$R_3^{фо} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 5,5}{6 \cdot 7,5}(7,5+2) + \frac{2 \cdot 4 \cdot 3,5}{6 \cdot 7,5}(7,5+4,0) +$$

$$+ \frac{0,4 \cdot 6^3}{24} = 17,41 \text{ тм}^3$$

3) Обчислюємо відтинки T, подвоюючи кожну фіктивну реакцію та ділячи її на суму прилежних прогонів:

$$T_2 = \frac{2R_2^{фо}}{l_1+l_2} = \frac{-2 \cdot 21,70}{6+7,5} = -3,21 \text{ тм}; \quad T_3 = -\frac{2 \cdot 17,41}{7,5+6,0} = -2,58 \text{ тм}$$

Для крайніх опор відтинків T немає, бо ці опори не є проміжні. Обчислені відтинки T відкладаємо на прямовисах обернених третин, суміжних із відповідними опорами, цебто відтинок T_2 — на прямовисі оберненої третини, що лежить біля опорі 2, і так далі. При цьому від'ємні відтинки T відкладаємо в той самий бік, у який відкладатимемо додатні моменти M^0, цебто вгору. Цим досягнемо потім автоматичного віднімання епюр опорних моментів із основних епюр M^0.

4) Будуємо лінію лівих фокусових моментів. Ця лінія, як ми вже зауважили раніше, є ламана лінія, що сполучає вершки відтинків, які зображають ліві фокусові моменти. Будувати її починаємо з крайнього лівого прогону l_1, в якому нам відомий опорний момент $M_1 = 0$, що є водночас і лівий фокусовий момент першого прогону. Отже:

$$M_{F1} = M_1 = 0$$

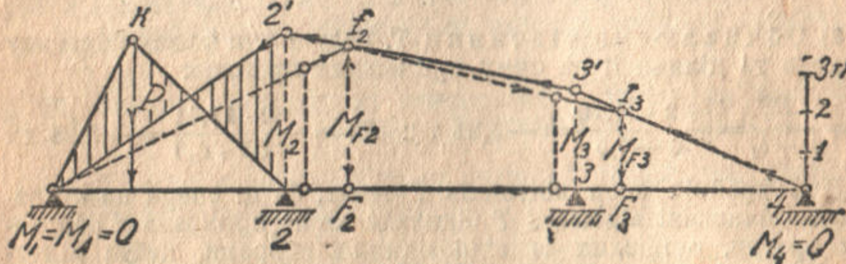
і тому лінія лівих фокусових моментів повинна проходити через точку 1 (фіг. 60*a*). Крім того, за доведеною раніше теоремою, вона повинна проходити через вершок відтинка T_2. Проводимо на цій підставі пряму $1\, t_2 f_2$ і продовжуємо її до перетину з прямовисом лівого фокуса другого прогону. Одержана точка f_2 являтиме собою один із вершків лінії ЛФМ, при чому ордината її $f_2 F_2$ дорівнює лівому фокусовому моментові MF_2.

Переходимо до другого прогону, в якому нам відомий тепер лівий фокусовий момент, що вимірюється відтинком $f_2 F_2$, та відтинок T_3. Через вершки цих відтинків повинна проходити лінія ЛФМ. На цій підставі проводимо пряму $f_2\ t_3$ і продовжуємо її до перетину з прямовисом лівого фокуса в третьому прогоні. Знайдена точка f_3 є дальший вершок лінії ЛФМ; до того ордината її $F_3 f_3$ дорівнює фокусовому моментові MF_3. На цьому побудову лінії ЛФМ закінчуємо.

5) Будуємо лінію опорних моментів. Нагадаємо, насамперед, що фокусовий момент є ордината лінії опорних моментів, виміряна на прямовисі фокуса. З цього виходить, що лінія опорних моментів повина проходити через вершки відтинків, що являють собою фокусові моменти.

Зазначмо ще, що лінія опорних моментів зламується на прямовисах опор, відмінно від лінії фокусових моментів, злами якої лежать на прямовисах лівих фокусів.

Щоб ясніше показати послідовність окремих операцій, на фіг. 61 вдруге подано знайдену раніше лінію ЛФМ — $1\ f_2 f_3$. Цю



Фіг. 61.

лінію побудовано в напрямі з лівого боку на правий. Побудова лінії опорних моментів відбувається у зворотному порядку, цебто справа наліво. У крайньому правому прогоні відомий нам опорний момент M_4. Момент цей дорівнює нулеві, бо опора 4 суставна і трям без консолі на правому кінці. Отже, лінія опорних моментів повинна проходити через точку 4 на нульовій осі. Крім того, нам відомий лівий фокусовий момент у тому самому прогоні $M_{F3} = F_3 f_3$, через вершок якого повинна проходити лінія опорних моментів. Цих даних досить, щоб провести лінію опорних моментів $4 f_3$ в прогоні l_3 і продовжити її до опори 3, де визначається відтинок $3\,3'$, що являє собою опорний момент M_3.

Переходимо до другого прогону, в якому нам відомий тепер опорний момент $M_3 = 3\,3'$ та фокусовий момент $M_{F2} = F_2 f_2$.

Через вершки відтинків, що зображають ці моменти, проводимо пряму до перетину з прямовисом опори 2, де визначиться момент $M_2 = 2\,2'$.

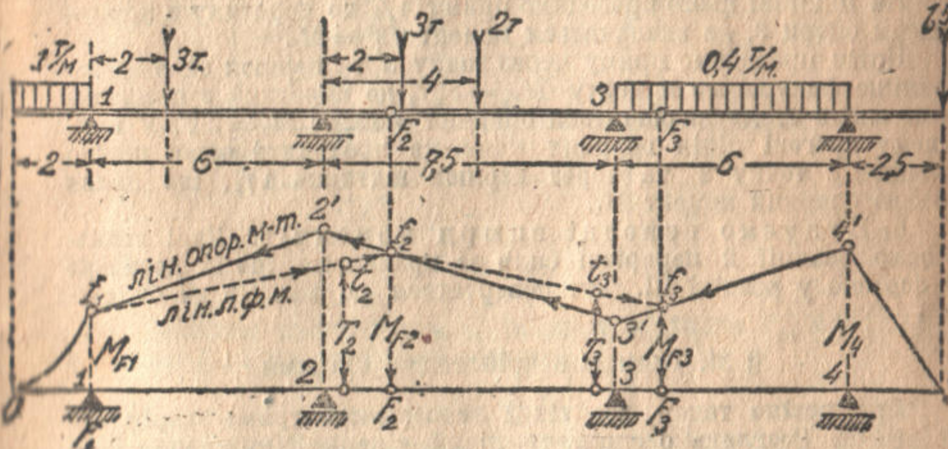
У першому прогоні лінія опорних моментів пройде через щойно знайдену точку $2'$ та через опору 1, тому що нам відомий опорний момент $M_1 = 0$. Тепер усі опорні моменти ми знаємо. Далі йдемо звичайним шляхом, а саме:

б) Будуємо основні епюри моментів, обчислюючи характерні ординати й відкладаючи їх від бази вгору. Щоб не затемнювати рисунка, цю операцію на фіг. 61 зроблено лише для першого прогону.

§ 30. Нерозрізний трям із консолями.

Візьмімо той самий трям, але з консолями з обох боків і розрахуємо за способом Мюллера-Бресляв (фіг. 62).

1) Знаходимо графічно ліві фокуси, беручи до уваги, що лівий фокус першого прогону збігається з опорою 1. Побудову цю не подано на фіг. 62, як уже відому.



Фіг. 62.

2) Знаходимо фіктивні реакції на проміжних опорах 2 та 3. Ці реакції з попереднього дорівнюють:

$$R_2^{\phi o} = 21{,}70 \text{ тм} \qquad R_3^{\phi o} = 17{,}41 \text{ тм}$$

Для крайніх опор фіктивні реакції не обчислюємо.

3) Обчислюємо відтинки T_2 та T_3 (див. вище) і відкладаємо їх на прямовисах обернених третин, суміжних з опорами 2 та 3. Від'ємні відтинки T спрямовуємо вгору.

4) Будуємо лінію ЛФМ, що проходить, як ми сказали, через вершки лівих фокусових моментів. Побудову цієї лінії починаємо з крайнього лівого прогону, в якому нам відомий опорний момент M_1, що є водночас і лівий фокусовий момент M_F у першому прогоні:

$$M_1 = M_{F_1} = -\frac{1}{2} qc^2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = -2 \text{ тм}$$

і відкладаємо на прямовисі першої опори відтинок

$$1 f_1 = M_{F_1} = -2 \text{ тм}$$

Проводимо пряму через точку f_1 та через вершок відтинка T_2. Перетин його з прямовисом лівого фокуса другого прогону визначає фокусовий момент $M_{F_2} = F_2 f_2$. Далі ЛФМ будуємо звичайним шляхом.

5) Будуємо лінію опорних моментів, при чому побудову цю провадимо в зворотному напрямі, цебто справа наліво. В крайньому правому прогоні нам відомий опорний момент M_4, що дорівнює

$$M_4 = -Pc_1 = -1{,}5 \times 2{,}5 = -3{,}75 \text{ тм}$$

Відкладаємо відтинок $44' = M_4$ на прямовисі крайньої правої опори. Через вершок цього відтинка повинна проходити лінія опорних моментів. Крім того, вона повинна проходити через вершок фокусового моменту M_{F_3}.

На підставі цього проводимо пряму $4 f_3$ до перетину з прямовисом опори 3, де визначиться момент $3\,3' = M_3$.

Потім проводимо пряму через точку $3'$ та вершок знайденого раніше фокусового моменту $M_{F_2} = F_2 f_2$ до перетину з прямовисом опори 2, де визначиться опорний момент $M_2 = 2\,2'$. У першому прогоні лінія опорних моментів проходить через щойно знайдену точку $2'$ та через вершок відтинка $1 f_1$, що являє собою опорний момент M_1.

6) Будуємо основні епюри моментів. Далі визначаємо реакції й перерізні сили за правилами, що їх детально з'ясовано у розділі III. Тут повертатися до них ми не будемо.

§ 31. Трям із закріпленими кінцями

Припустімо тепер, що кінці нерозрізного тряма закріплено в стінах. Розгляньмо спочатку лівий кінець. Закріплення його заміняємо додатковим прогоном l_0 з боку стіни (фіг. 63); через те опора 1 стає проміжною опорою нерозрізного тряма. Для цієї опори обчислюємо відтинок T_1 з формули

$$T_1 = -\frac{2 R_1^{10}}{l_0 + l_1} \tag{a}$$

і відкладаємо його на прямовисі оберненої третини, яку відхилено від опори в бік більшого прогону l_1, на віддаль $\frac{1}{3}(l_1 - l_0)$.

Через опору *0* та вершок відтинка T_1 проводимо пряму до перетину з прямовисом лівого фокуса першого прогону, де визначаємо лівий фокусовий момент

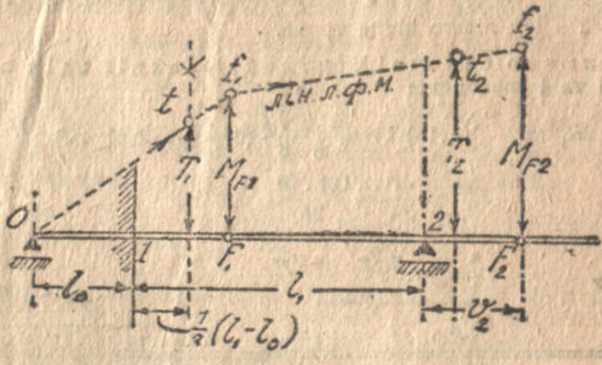
$$M_{F_1} = F_1 f_1$$

Будемо тепер зменшувати до нуля доданий прогін l_0. При цьому фокус F_1 пересуватиметься праворуч, доки віддаль його від опори 1 не дорівнюватиме $\frac{1}{3} l_1$, відповідно до цупкого закріплення кінця.

Так само пересуватиметься праворуч і прямовис оберненої третини, при чому відхил його від опори 1 дорівнюватиме:

$$\frac{1}{3}(l_1 + l_0) = \frac{1}{3} l_1$$

Отже, виявляється, що прямовис оберненої третини проходитиме через лівий фокус першого прогону.



Фіг. 63.

У наслідок цього точка t_1 (вершок відтинка T_1) збігається з точкою f_1, і ми одержимо рівність:

$$M_{F_1} = T_1$$

Запам'ятаймо, що коли l_0 досягне нуля, відтинок T_1 треба обчислювати з формули

$$T_1 = -\frac{2R_1^{\text{фо}}}{l_1} \qquad (33')$$

яку одержимо з формули (а), підставивши в неї $l_0 = 0$. Отже, ми доходимо до такого практичного висновку:

Коли лівий кінець тряма вправлено в стіну, обчислюємо відтинок T з формули (33) і відкладаємо його на прямовисі лівого фокуса першого прогону, цебто на віддалі $\frac{1}{3} l_1$ від вправленого перекрою.

Через те, що $M_{F_1} = T_1$, то від вершка відтинка T_1 ми й починаємо побудову лінії лівих фокусових моментів.

Коли закріплено правий кінець тряма, робимо так само. Знаходимо фіктивну реакцію на крайній правій опорі n; потім обчислюємо відтинок T_n з формули:

$$T_n = -\frac{2R_n^{\text{фо}}}{l_{n-1}} \qquad (33)$$

і відкладаємо його на віддалі $\frac{1}{3} l_{n-1}$ від закріпленого кінця труму. Цей відтинок являтиме собою правий фокусовий момент в останньому праворуч прогоні. Як застосовувати ці висновки, покажемо на числовому прикладі.

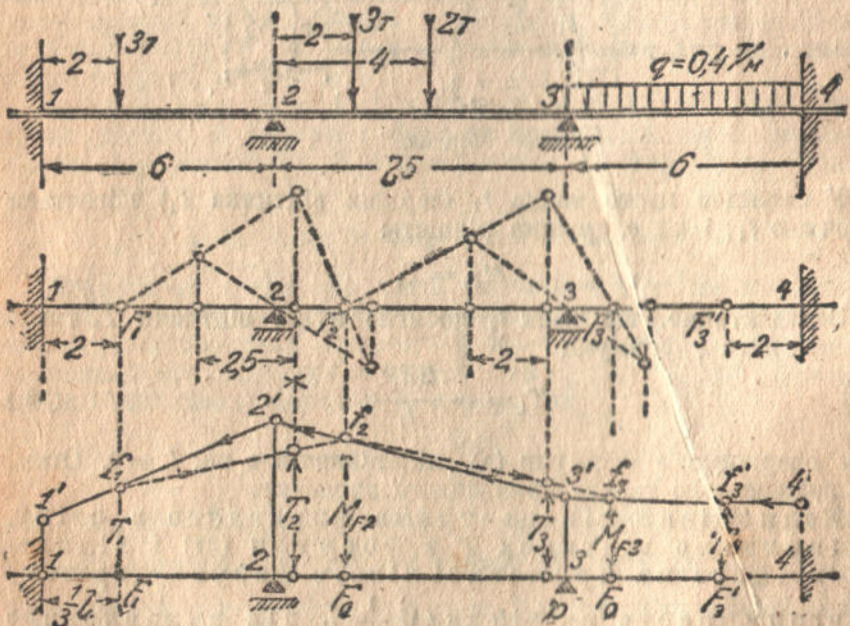
Приклад. Розрахувати трям із закріпленими кінцями, що його подано на фіг. 64*a*. Для цього:

1) Знаходимо ліві фокуси (фіг. 64*b*), вважаючи, що F_1 лежить на віддалі $\frac{1}{3} l_1 = 2$ м від лівого кінця труму.

2) Обчислюємо основні фіктивні реакції всіх опор. Для крайніх опор 1 та 4 знаходимо:

$$R_1^{\phi 0} = \frac{Pab}{6l}(l+b) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{6 \cdot 6}(6+4) = 6{,}67 \text{ тм}^2$$

$$R_4^{\phi 0} = \frac{ql^3}{24} = \frac{0{,}4 \cdot 6^3}{24} = 3{,}6 \text{ тм}^2$$



Фіг. 64.

Фіктивні реакції на проміжних опорах було вже обчислено й виявлено, що вони рівні (див. § 28).

$$R_2^{\phi 0} = 21{,}70 \qquad R_3^{\phi 0} = 17{,}41 \text{ тм}^2$$

3) Обчислюємо відтинки T. Для крайніх опор маємо:

$$T_1 = -\frac{2R_1^{\phi 0}}{l_1} = -\frac{2 \cdot 6{,}67}{6} = -2{,}22 \text{ тм}; \quad T_4 = -\frac{2 \cdot 3{,}6}{6} = -1{,}2 \text{ тм}$$

Для середніх опор уже було знайдено відтинки:

$$T_2 = -3{,}21 \text{ тм} \qquad T_3 = -2{,}58 \text{ тм (див. § 28).}$$

Відтинок T_1 відкладаємо на прямовисі оберненої третини, що суміжна з опорою 1. Але цей прямовис, як ми бачимо, проходить через лівий фокус F_1 першого прогону й міститься на віддалі $\frac{1}{3} l_1$ від закріпленого кінця. З тих самих міркувань відтинок T_4 відкладаємо на прямовисі, що лежить на віддалі $\frac{1}{3} l_4$ від правого закріпленого кінця трима. Решту відтинків T відкладаємо, як завжди, на прямовисах обернених третин, суміжних з опорами 2 та 3.

4) Будуємо лінію лівих фокусових моментів. Для цього через вершки відтинків T_1 та T_2 проводимо пряму $f_1\, f_2$ до перетину з прямовисом F_2; в наслідок цього одержуємо відтинок $F_2\, f_2$, який визначає момент $M_{F_2} = F_2\, f_2$. Потім проводимо пряму через точку f_2 та вершок відтинка T_3. Вона відтинає на прямовисі фокуса F_3 відтинок $F_3\, f_3 = M_{F_3}$.

5) Будуємо лінію опорних моментів. Для цього через вершок відкладеного відтинка T_4 та вершок знайденого фокусового моменту M_{F_3} проводимо пряму $f_3'\, f_3$, перетин якої з прямовисами опор 3 та 4 визначає опорні моменти $4\,4' = M_4$ та $3\,3' = M_3$. Знаючи момент M_3, будуємо лінію опорних моментів у другому прогоні і знаходимо момент $M_2 = 22'$. У першому прогоні лінія опорних моментів повинна проходити через вершок раніше відкладеного відтинка T_1, цебто через точку f_1.

Фіг. 65.

На фіг. 65 подано ще той окремий випадок, коли два суміжні прогони l_2 та l_3 не обтяжено. Відтинок T_3 для проміжної опори 3 обертається в нуль, і лінія ЛФМ проходить через точку перетину прямовиса оберненої третини з віссю трима. Далі розрахунок проводимо, як звичайно.

Наприкінці цього розділу відзначмо, що спосіб Мюллера-Бресляв дає дуже зручні засоби перевіряти розв'язання рівнянь трьох моментів. Ми беремо з цих рівнянь величини вільних членів, знаходимо за їхньою допомогою відтинки T і визначаємо за ними опорні моменти. Ця графічна перевірка потребує дуже мало часу й дозволяє виявити помилку в розв'язанні рівнянь трьох моментів.

РОЗДІЛ ЧЕТВЕРТИЙ.

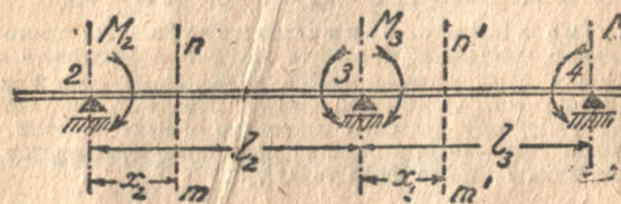
ТЕОРЕМА ПРО ДВА МОМЕНТИ.

§ 32. Вивід теореми про два моменти.

Нехай дано нерозрізний трям. Відокремимо з нього два суміжні прогони, наприклад, прогони l_2 та l_3 (фіг. 66). Напишемо для цих прогонів рівняння трьох моментів, яке матиме такий вигляд:

$$M_2 l_2 + 2 M_3 (l_2 + l_3) + M_4 l_3 = -6 R_3^{\varphi 0} \quad \text{(a)}$$

Не знаючи дійсної величини опорних моментів, вважатимемо, що всі моменти M_2, M_3 та M_4 додатні, цебто намагаються зігнути розрізні трями в окремих прогонах опуклістю вниз.



Фіг. 66.

У лівому прогоні l_2 візьмімо перекрій mn на віддалі x_2 від лівої опори й напишімо вираз для повного моменту в цьому перекрої.

Згідно з формулою (10) § 12 маємо:

$$M_{x_2} = M^0{}_{x_2} + M_2 \frac{l_2 + x_2}{l_2} + M_3 \frac{x_2}{l_2} \quad \text{(b)}$$

де M_{x2} — момент у перекрої mn тряма 2—3, який розглядаємо, як частину нерозрізного тряма; $M^0{}_{x2}$ — момент у тому самому перекрої, який одержуємо, розглядаючи трям 2—3, як звичайний двоопорний, обтяжений лише даними силами. Із рівняння (b) знайдемо вираз для опорного моменту M_2 на лівому кінці відокремленої групи прогонів:

$$M_2 = \frac{l_2}{l_2 - x_2} \left[M_{x_2} - M^0{}_{x_2} - M_3 \frac{x_2}{l_2} \right] \quad \text{(c)}$$

Тепер у дальшому прогоні l_3 візьмімо перекрій $m_1 n_1$ на віддалі x_3 від лівої опори 3. Напишімо й для цього перекрою вираз повного згинного моменту:

$$M_{x_3} = M^0{}_{x_3} + M_3 \frac{l_3 - x_3}{l_3} + M_4 \frac{x_3}{l_3} \quad \text{(d)}$$

де M_{x_3}, як і раніше, являє момент у перекрої $m'n'$ нерозрізного тряма, а $M^0{}_{x_3}$ — основний момент у тому самому перекрої. Із рівняння (d) знаходимо вираз для моменту M_4 на правому кінці відокремлених прогонів:

$$M_4 = \frac{l_3}{x_3}\left[M_{x_3} - M^0{}_{x_3} - M_3\frac{l_3 - x_3}{l_3}\right] \tag{e}$$

Підставивши знайдені вирази для M_2 та M_4 в основне рівняння трьох моментів (a) та зробивши зведення подібних членів, одержимо:

$$\frac{l^2}{l_2 - x_2}\left[M_{x_2} - M^0{}_{x_2} - M_3\frac{x_2}{l_2}\right] + 2M_3(l_2 + l_3) +$$

$$+ \frac{l_3^2}{x_3}\left[M_{x_3} - M^0{}_{x_3} - M_3\frac{l_3 - x_3}{l_3}\right] = \frac{l_2^2}{l_2 - x_2}\left[M_{x_2} - M^0{}_{x_2}\right] +$$

$$+ \frac{l_3^2}{x_2}\left[M_{x_3} - M^0{}_{x_3}\right] + M_3\left[2(l_2 + l_3) - \frac{l_2x_2}{l_2 - x_2} - \frac{(l_3 - x_3)\,l_3}{x_3}\right] = -6R_3^{\text{ф}0} \tag{f}$$

Перекрої mn та $m'n'$ ми взяли довільно. Тому абсциси x_2 та x_3 були незалежні змінні.

Зв'яжімо тепер ці змінні такою залежністю, щоб сучинник біля моменту M_3 в останньому рівнянні перетворився на нуль, цебто

$$\boxed{2(l_2 - l_3) - \frac{l_2x_2}{l_2 - x_2} - \frac{l_3(l_3 - x_3)}{x_3} = 0} \tag{34}$$

Два перекрої в суміжних прогонах, віддалі яких x_2 та x_3 від лівих опор поставлено в залежність (34), ми будемо звати супряженими перекроями.

Для супряжених перекроїв рівняння (f) набирає такого простого вигляду:

$$\frac{l_2^2}{l_2 - x_2}\left[M_{x_2} - M^0{}_{x_2}\right] + \frac{l_3^2}{x_3}\left[M_{x_3} - M^0{}_{x_3}\right] = -6R_3^{\text{ф}0} \tag{g}$$

Це й є теорема про два моменти, яку вперше довів французький учений Моріс Леві.

З'ясуймо тепер значення різниць, що їх узято в дужки. Для цього скористаємося з виразу:

$$M_{x_2} = M^0{}_{x_2} + M_2\frac{l_2 - x_2}{l_2} + M_3\frac{x_2}{l_2}$$

з якого знаходимо

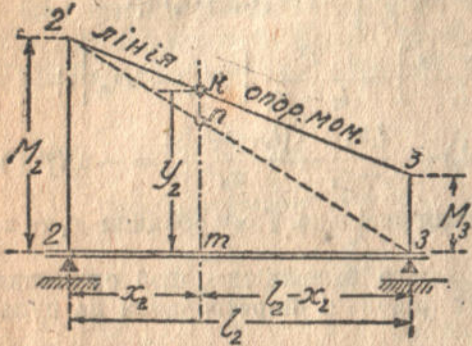
$$M_{x_2} - M^0{}_{x_2} = M_2\frac{l_2 - x_2}{l_2} + M_3\frac{x_2}{l_2} \tag{h}$$

Відкладімо (фіг. 67) на прямовисі лівої опори відтинок $2\,2' = M_2$, на прямовисі правої опори — відтинок $3\,3' = M_3$ і проведімо лінію опорних моментів $2'3'$. Крім того, проведімо допомічну пряму $2'3$. Із подібности трикутників виходить, що відтинки прямовиса, проведеного через перекрій mn, дорівнюють:

$$mn = M_2 \frac{l_2 - x_2}{l_2}\ ;\ nk = M_3 \frac{x_2}{l_2}$$

звідки

$$mk = M_2 \frac{l_2 - x_2}{l_2} + M_3 \frac{x_2}{l_2} \tag{k}$$



Фіг. 67.

Порівнюючи рівняння (k) з рівнянням (h), ми можемо сказати, що різниця (M_{x_2} — — $M^0_{x_2}$) являє собою ординату лінії опорних моментів, виміряну на прямовисі супряженого перекрою mn.

Цей висновок є вірний і для другого супряженого перекрою $m'n'$.

Позначивши ординати лінії опорних моментів, які виміряно на прямовисах супряжених перекроїв, відповідно через y_2 та y_3, можна переписати рівняння (g) в такому вигляд:

$$y_2 \frac{l_2^2}{l_2 - x_2} + y_3 \frac{l_3^2}{x_3} = -6 R_2^{\Phi 0} \tag{35}$$

§ 33. Зв'язок між супряженими перекроями і фокусовими точками.

Абсциси двох супряжених перекроїв зв'язані між собою залежністю (34), яку ми виписуємо ще раз:

$$\boxed{2(l_2 + l_3) - \frac{l_2 x_2}{l_2 - x_2} - \frac{l_3 (l_3 - x_3)}{x_3} = 0} \tag{34}$$

Визначмо абсцису x_3 через абсцису x_2 супряженого перекрою, для чого розв'яжімо рівняння (34) відносно x_3:

$$x_3 = \frac{l_3}{3 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 - \frac{x_2}{l_2 - x_2}\right)} \tag{a}$$

Припустімо, що положення першого перекрою mn нам відоме, цебто відома його абсциса x_2; тоді ми зможемо з формули (a) знайти положення супряженого з ним перекрою $m'n'$ у другому прогоні, цебто його абсцису x_3. Своєю чергою, знаючи положення другого перекрою $m'n'$, ми можемо знайти положення супряженого з ним перекрою $m''n''$ у третьому прогоні і т. д. Отже ми бачимо, що кожному довільно вибраному перекроєві відповідає певний ряд супряжених перекроїв у всіх інших прогонах. Припустімо тепер, що перший супряжений перекрій mn збігся з лівим фокусом F_2 в прогоні l_2. Тоді абсциса його буде рівна лівій фокусовій віддалі в цьому прогоні: $x_2 = v_2$. Із цієї рівности виходить:

$$l_2 - x_2 = l_2 - v_2 = w_2$$

Підставляючи ці нові вартості в формулу (а), одержимо:

$$x_3 = \frac{l_3}{3 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 - \frac{v_2}{w_2}\right)} \tag{c}$$

Але раніше ми знайшли такий самий вираз для лівої фокусової віддалі (див. форм. 20 § 19).

Порівнюючи його з формулою (е), знаходимо, що $x_3 = v_3$. Виходить, що супряжений перекрій $m'n'$ у прогоні l_3 збігся з лівим фокусом F_3 цього прогону. Отже, зробивши $x_2 = v_2$, ми одержали $x_3 = v_3$, що своєю чергою спричиняє рівність $x_4 = v_4$, цебто збіг наступного супряженого перекрою з лівим фокусом наступного прогону.

Звідси висновок: збіг одного із супряжених перекроїв з лівим фокусом прогону веде до збігу решти супряжних перекроїв з лівими фокусами відповідних прогонів.

Нетрудно впевнитись, що це твердження буде вірне й щодо правих фокусів. Для цього досить розглянути прогони тряма в зворотному порядку.

§ 34. Зв'язок між однойменними фокусовими моментами в двох суміжних прогонах.

Розгляньмо тепер, як зміниться рівняння двох моментів (35), коли збіжаться супряжені перекрої з фокусовими точками. В це рівняння входить ордината y_2 лінії опорних моментів, виміряна на прямовисі супряженого перекрою mn. Коли збіжиться перекрій із фокусом F_2, ордината y_2 являтиме ординату лінії опорних моментів, виміряну на прямовисі лівого фокуса; цю ординату ми умовилися звати лівим фокусовим моментом у прогоні l_2 і позначати символом M_{F_2}. Отже, $y_2 = M_{F_2}$.

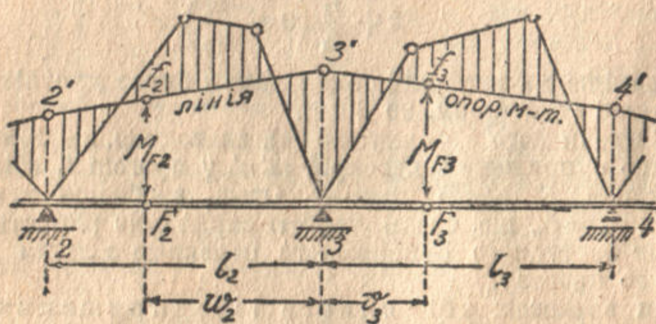
Тому що супряжений з перекроєм $m'n'$ є той перекрій наступного прогону, що збігається з лівим фокусом, то відповідна до цього перекрою ордината y_3 являтиме лівий фокусовий момент M_{F_3} в прогоні l_3. Підставляючи в рівняння (35) замість ординат y_2 та y_3 їхні нові значення та взявши до уваги, що в разі, коли збігаються перекрої з фокусами (фіг. 68), ми повинні припустити:

$$x_2 = v_2 \quad l_2 - x_2 = w_2 \quad x_3 = v_3$$

Надаємо рівнянню двох моментів такого вигляду:

$$\boxed{\frac{M_{F_2} l_2^2}{w_2} + \frac{M_{F_3} l_3^2}{v_3} = 6 R_3^{\Phi 0}} \tag{36}$$

Це останнє рівняння визначає залежність між лівими фокусовими моментами в двох суміжних прогонах і обтягом цих прогонів. Дійсно, основну фіктивну реакцію, що входить у праву частину рівняння (36), одержуємо від обтягу розглядуваних прогонів епюрами моментів від даних зовнішніх сил; отже,



Фіг. 68.

основна фіктивна реакція залежить лише від обтягу цих прогонів. Узагальнюючи одержаний висновок, ми можемо формулувати його так (фіг. 68):

Для двох суміжних прогонів l_{n-1} та l_n нерозрізного тряма сума лівих фокусових моментів, помножених кожний на квадрат відповідного прогону й поділених на віддаль відповідного фокуса від проміжної опори n, дорівнює вільному членові рівняння трьох моментів. Зрозуміло, що це твердження має силу й для правих фокусових моментів у двох суміжних прогонах з тією різницею, що, замість віддалей w_2 та v_3, ввійдуть віддалі v_2 та w_3'.

§ 35. Застосовання теореми про два моменти.

Щоб зручніше було вживати на практиці виведене щойно рівняння, треба переписати його в загальному вигляді, замінивши індекси $_2$ та $_3$ на індекси $_{n-1,\, n}$, що дасть:

$$\frac{M_{Fn-1} l^2_{n-1}}{w_{n-1}} + \frac{M_{Fn} l^2_n}{v_n} = -6 R_n^{\Phi}$$

Розв'язуючи це рівняння відносно невідомого фокусового моменту M_{Fn}, одержимо:

$$\boxed{M_{Fn} = -\frac{v_n}{l^2_n}\left[\frac{M_{Fn-1}l^2_{n-1}}{w_{n-1}} + 6R_n^{\Phi^\circ}\right]} \quad (37)$$

Крім того, ми будемо використовувати формулу (20), що встановлює залежність між лівими фокусовими віддалями в двох суміжних прогонах

$$v_n = \frac{l_n}{3 + \frac{l_{n-1}}{l_n}\left(2 - \frac{v_{n-1}}{w_{n-1}}\right)} \quad (20)$$

Фіг. 69

Хід розрахунку тряма покажемо на окремому прикладі.

Приклад. Нехай дано нерозрізний трям, розміри й обтяг якого показано на фіг. 69. Треба обчислити опорні моменти й побудувати епюру M.

1) Обчислюємо ліві фокусові віддалі, при чому за вихідну дану беремо $v_1 = 0$, бо, коли крайня ліва опора суставна, то лівий фокус F_1 першого прогону збігається з цією опорою. Тому маємо:

$$v_1 = 0; \; w_1 = l_1 - v_1 = 6{,}0 \text{ м}$$

Потім, користуючись формулою (20), знаходимо послідовно:

$$v_2 = 1{,}630 \text{ м} \quad w_2 = 5{,}870 \text{ м} \quad v_3 = 1{,}165 \text{ м}$$
$$w_3 = 5{,}870 \text{ м} \quad v_4 = 0{,}834 \text{ м} \quad w_4 = 3{,}666 \text{ м}$$

2) Обчислюємо фіктивні реакції проміжних опор від основних епюр моментів даних зовнішніх сил з формул § 9.

Для нашого прикладу маємо:

$$R_2^{\Phi^\circ} = 18{,}525 \text{ тм}^2 \quad R_3^{\Phi^\circ} = 16{,}221 \text{ тм}^2$$
$$R_4^{\Phi^\circ} = 7{,}031 \text{ тм}^2$$

3) Обчислюємо ліві фокусові моменти, при чому обчислення це починаємо з першого ліворуч прогону і далі провадимо в напрямі праворуч. У першому прогоні лівий фокус збігається з крайньою опорою 1 і, виходить, лівий фокусовий момент M_{F1} буде водночас опорним моментом M_1.

При даній довжині й обтязі консолі знаходимо:

$$M_{F1} = M_1 = -1 \cdot 2 = -2 \text{ тм}$$

Коли б трям був без консолі, то $M_1 = 0$.

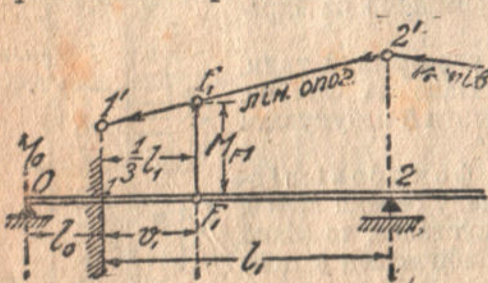
Потім переходимо до другого прогону. Підставивши в формулу (37), що зв'язує ліві фокусові моменти в двох суміжних прогонах, відомі нам величини, знаходимо:

$$M_{F_2} = \frac{v_2}{l_2^2}\left[\frac{M_{F_1} l_1^2}{w_1} + 6 R_2^{\Phi^\circ}\right] = -\frac{1,630}{7,5^2}\left[\frac{0,6^2}{6} + 6 \cdot 18,527\right] = -2,875 \text{ тм}$$

Знаючи M_{F_2}, знаходимо з тієї самої формули величину M_{F_3} — лівий фокусовий момент у третьому прогоні, а по ньому й M_{F_4}. Для нашого прикладу ми одержимо:

$$M_{F_3} = -2,230 \text{ тм} \qquad M_{F_4} = -1,120 \text{ тм}$$

Зауважмо, що фокусові моменти визначаємо послідовно в напрямі зліва направо так само, як і при графічному розрахунку тряма за способом Мюллера-Бреслав.



Фіг. 70.

Примітка 1. Коли лівий кінець нерозрізного тряма закріплено в стіні (фіг. 70), то найближчий до цього кінця фокус буде на віддалі $^1/_3$ прогону від закріпленого перекрою. Щоб знайти фокусовий момент M_{F_1}, заміняємо закріплення допоміжним прогоном $l_0 = 0$ з боку стіни.

Ліву опору цього прогону робимо суставну, а сам прогін вважаємо за необтяжений Тоді для прогону l_0 ми можемо написати:

$$v_0 = 0 \quad w_0 = l_0 \quad \text{та} \quad M_0 = M_{F^0} = 0$$

Застосовуючи формулу (37) до прогонів l_0 та l_1 і підставляючи в неї, крім наведених вище величин, ще $v_1 = \frac{1}{3} l_1$, знаходимо

$$M_{F_1} = -\frac{v_1}{l_1^2}\left[\frac{M_{F^0} l_0^2}{w_0} + 6 R_1^{\Phi^\circ}\right] = -\frac{l_1}{3 l_1^2}\left[\frac{0 \cdot 0^2}{0} + 6 R_1^{\Phi^\circ}\right] = -\frac{2 R_1^{\Phi^\circ}}{l_1} \qquad (38)$$

Отже, лівий фокусовий момент у першому прогоні буде нам відомий, і ми далі зможемо знайти ліві фокусові моменти в дальших прогонах.

Зауважмо, що формулу (38) ми вже знайшли раніше, коли обчисляли відтинок T, закріплюючи кінець тряма в стіні.

4) Обчислюємо опорні моменти. Обчислення це провадимо навпаки, цебто справа наліво, користуючись формулою:

$$\boxed{M_n = M_{F_n} + \left(M_{F_n} - M_{n+1}\right)\frac{v_n}{w_n}} \qquad (39)$$

яку легко одержимо, розглядаючи подібні трикутники, зарисковані на фіг. 71. Цю формулу застосовуємо послідовно до кожного прогону. Крім того, вона дозволяє за відомими правим опорним моментом M_{n+1} та лівим фокусовим моментом M_F, знайти лівий опорний момент M_n.

Для нашого прикладу маємо опорний момент на крайній правій опорі $M_5 = 0$, через те що ця опора суставна. Знаючи, крім того, $M_{F_4} = -1{,}120$ тм, $v_4 = 0{,}834$ м та $w_4 = 3{,}666$ м, знаходимо:

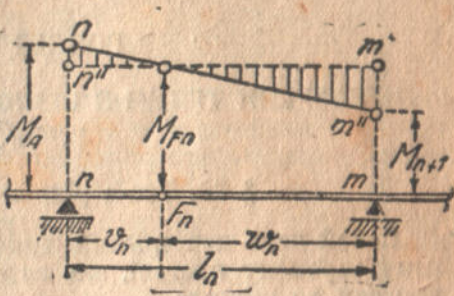
$$M_4 = -1{,}120 + (-1{,}120 - 0)\frac{0{,}834}{3{,}666} = -1{,}375 \text{ тм}$$

Застосовуючи цю саму формулу до прогону l_3, де відомі $M_{F_3} = -2{,}230$ тм; $v_3 =$ [illegible]5 м та $w_3 = 5{,}870$ м, знаходимо:

$$M_3 = -2{,}542 \text{ тм}$$

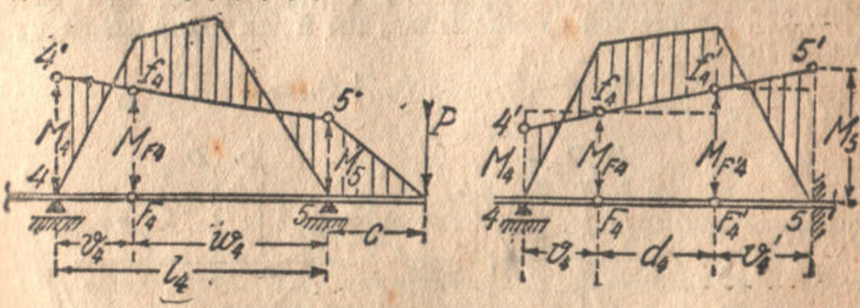
Так само обчислюємо $M_2 = -3{,}226$ тм.

Момент $M_1 = -2$ тм було визначено раніше. Коли всі опорні моменти відомі, побудувати епюру M легко.



Фіг. 71.

Примітка 1. Якби трям мав консолю на правому кінці (фіг. 72*a*), то ми мусіли б обчислити момент в опорному перекрої цієї консолі $M_5 = Pc$ і додати його в формулу (39).



Фіг. 72.

Примітка 2. Якби правий кінець тряма було закріплено в стіні (фіг. 72*b*), то ми мусіли б замінити закріплення уявним прогоном $l_5 = 0$ і знайти правий фокусовий момент M'_{F_4} з формули

$$M'_{F_4} = -\frac{2R_5\varphi^0}{l_4}$$

що аналогічна з формулою (38). Після цього можна обчислити опорні моменти M_4 та M_5 на кінцях четвертого прогону, користуючись формулами:

$$\left.\begin{aligned} M_5 &= M_{F_4} + (M'_{F_4} - M_{F_4})\frac{v'_4}{d_4} \\ M_4 &= M_{F_4} + (M_{F_4} - M'_{F_4})\frac{v_4}{d_4} \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

де яких M_{F_4} та M'_{F_4} є лівий та правий фокусові моменти в четвертому прогоні; d_4 — віддаль між фокусовими точками в тому самому прогоні, цебто:

$$d_4 = l_4 - v_4 - v'_4$$

Формулу (40) можна вивести, розглядаючи подібні трикутники, подані на фіг. 72^b.

Нетрудно помітити, що розрахунок нерозрізного тряма за теорією двох моментів суттю цілком аналогічний із способом Мюллера-Бресляв з тією різницею, що всі операції провадяться не графічно, а аналітично.

РОЗДІЛ П'ЯТИЙ.

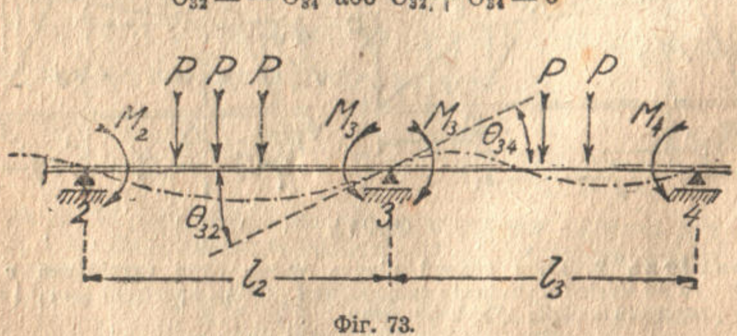
НЕРОЗРІЗНІ ТРЯМИ З РІЗНОЮ ЦУПКІСТЮ В ОКРЕМИХ ПРОГОНАХ.

§ 36. Вивід рівняння трьох моментів.

Нехай дано нерозрізний трям, цупкість якого стала в кожному окремому прогоні, але змінюється при переході від одного прогону до другого.

Відокремимо два суміжні прогони l_2 та l_3 цього тряма й назвемо моменти інерції в цих прогонах відповідно через J_2 та J_3. Рівняння деформації для опори 3, що одержуємо, зрівнюючи кути нахилу дотичних праворуч і ліворуч від цієї опори (фіг. 73), матиме той самий вигляд, що й для тряма сталої цупкости, цебто:

$$\Theta_{32} = -\Theta_{34} \text{ або } \Theta_{32} + \Theta_{34} = 0 \tag{a}$$



Фіг. 73.

Позначаючи кути нахилу дотичних через повні фіктивні реакції на опорі 3, поділені на відповідні цупкості EJ_2 та EJ_3, знаходимо:

$$\frac{M_2 l_2}{6 EJ_2} + \frac{M_3 l_3}{3 EJ_2} + \frac{R_{32}^{\Phi 0}}{EJ_2} + \frac{M_3 l_3}{3 EJ_3} + \frac{M_4 l_3}{6 EJ_3} + \frac{R_{34}^{\Phi 0}}{EJ_3} = 0 \tag{b}$$

Перенісши відомі члени праворуч і помноживши обидві частини рівняння на $6FJ_0$, де J_0 — довільно вибраний сталий момент інерції, одержимо:

$$M_2 l_2 \frac{J_0}{J_2} + 2M_3\left[l_2\frac{J_0}{J_2} + l_3\frac{J_0}{J_3}\right] + M_4 l_3 \frac{J_0}{J_3} = -6R_{32}{}^{\phi 0}\frac{J_0}{J_2} - 6R_{34}{}^{\phi 0}\frac{J_0}{J_3} \quad \text{(c)}$$

Довжину якогось прогону l_k, помножену на відношення $J_0 : J_k$, звуть зведеною довжиною прогону й позначають індексом „риска" вгорі. Отже:

$$l'_k = l_k \frac{J_0}{J_k}$$

Відношення $J_0 : J_k$ звуть сучинником зведення для одного даного прогону; позначмо його літерою α_k з індексом відповідного прогону. Тепер ми можемо написати, що зведена довжина якогось прогону l_k дорівнює:

$$\boxed{l'_k = l_k\,\alpha_k} \quad \text{де } \alpha_k = \frac{J_0}{J_k} \qquad (41)$$

Відповідно до цього фіктивну реакцію, помножену на сучинник зведення прогону, ми зватимемо зведеною фіктивною реакцією.

Підставляючи ці визначення в рівняння (c), одержимо рівняння трьох моментів для тряма з різними цупкостями в окремих прогонах.

$$\boxed{M_2 l'_2 + 2M_3 (l'_2 + l'_3) + M_4 l'_3 = -6R_{32}^{\phi 0}\alpha_2 - 6R_{34}^{\phi 0}\alpha_3} \qquad (42)$$

Воно різниться від основного рівняння (3) лише тим, що в ліву частину його, замість дійсних, увіходять зведені довжини прогонів, а в праву — зведені фіктивні реакції на проміжній опорі.

Запам'ятаймо, однак, що обчислюючи фіктивні реакції з формул § 9, в ці формули треба заводити дійсні, а не зведені довжини прогонів.

§ 37. Аналітичний розрахунок.

Тому що моменти інерції тряма в окремих прогонах нам наперед невідомі, то ми оцінюємо їх для першого розрахунку з конструктивних міркувань чи за прикладом збудованих споруд і позначаємо залежно від довільно вибраного сталого моменту інерції J_0 в такій формі:

$$\boxed{J_1 = \beta_1 J_0 \quad J_2 = \beta_2 J_0} \qquad (43)$$

Сучинник β, що визначає момент інерції, а разом з тим і цупкість тряма в окремих прогонах, ми зватимемо сучинником цупкости.

Із формули (43) виходить, що для якогось прогону l_i сучинник цупкости дорівнює $\beta_i = J_i : J_0$.

З другого боку, сучинник зведення довжини α_i для прогону l_i дорівнює: $\alpha_i = J_0 : J_i$. Отже, виявляється, що сучинник цупкости β_i являє величину обернено пропорційну до сучинника зведення довжини α_i.

Коли цупкість тряма в окремих прогонах задано в формі рівнянь (43), то розрахунок нерозрізного тряма починаємо з обчислення зведених довжин та сучинників зведення з формул:

$$l'_i = l_i : \beta_i \quad \alpha_i = 1 : \beta_i$$

Потім знаходимо основні зведені фіктивні реакції проміжних опор з формул § 9, в які підставляємо дійсні довжини прогонів. Після цього ми матимемо всі потрібні дані, щоб складати рівняння трьох моментів і визначити опорні моменти. Далі розрахунок провадимо звичайним порядком.

Примітка 1. Коли трям з консолями, то ми знаходимо момент в опорному перекрої цієї консолі й заводимо цей момент до розрахунку, як відому величину.

Примітка 2. Коли лівий кінець тряма закріплено в стіну, то ми заміняємо це закріплення уявним прогоном l_0 і уявляємо, що його довжина дорівнює нулеві. Цупкість цього додаткового прогону ми повинні вважати за рівну з цупкістю першого прогону нерозрізного тряма.

Тоді для пари прогонів l_0 та l_1 ми можемо використовувати всі формули, виведені для тряма із сталою цупкістю EJ. Зокрема потрібне нам рівняння трьох моментів для прогонів l_0 та l_1 матиме вигляд:

$$2M_1 l_1 + M_2 l_1 = -6R_{12}^{\phi 0}$$

Аналогічне рівняння буде й у разі закріплення правого кінця тряма. Побудову епюр моментів, обчислення опорних реакцій та побудову епюр перерізних сил роблять за правилами, що їх детально з'ясовано в розділі І цієї книги, при чому в усіх цих обчисленнях заводять до розрахунку дійсну, а не зведену довжину прогонів.

§ 38. Формули для фокусових віддалей.

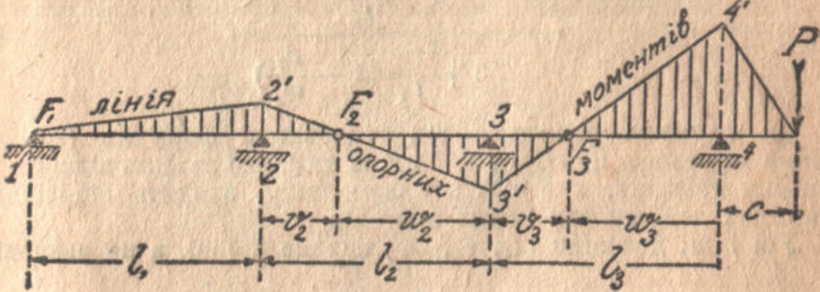
Нехай дано нерозрізний трям із різними цупкостями EJ в окремих прогонах (фіг. 74). Припустимо, що ряд суміжних прогонів, починаючи з крайнього лівого, необтяжено. Рівняння трьох моментів для перших двох прогонів матиме вигляд:

$$2M_2(l'_1 + l'_2) + M_3 l'_2 = 0 \tag{a}$$

Із цього рівняння ми знаходимо, що

$$\frac{M_3}{M_2} = -\frac{2(l'_1 + l'_2)}{l'_2} = -k_2 \qquad \text{(b)}$$

Рівність (b) показує, що відношення моментів M_3 та M_2 на кінцях необтяженого прогону l_2 не залежить від обтягу дальших прогонів праворуч і виходить, що лінія моментів має в прогоні l_2 сталу нульову точку F_2, яка є лівий фокус цього прогону.



Фіг. 74.

Напишімо тепер рівняння трьох моментів для прогонів l_2 та l_3 і знайдімо з цього рівняння відношення моменту M_4 до попереднього ліворуч моменту M_3. Одержимо

$$M_2 l'_2 + 2M_3(l'_2 + l'_3) + M_4 l'_3 = 0$$

Звідки

$$M_4 l'_3 = -2M_3 l'_3 - 2M_3 l'_2 - M_2 l'_2$$

Далі

$$\frac{M_4}{M_3} = -\left[2 + \frac{l'_2}{l'_3}\left(2 + \frac{M_2}{M_3}\right)\right] = -k_3 \qquad \text{(d)}$$

Але коли прогони l_1 та l_2 не обтяжені, маємо:

$$\frac{M_3}{M_2} = -k_2 \text{ і значить } \frac{M_2}{M_3} = -\frac{1}{k_2}$$

Підставляючи в рівняння (d), одержуємо:

$$\boxed{k_3 = 2 + \frac{l'_2}{l'_3}\left(2 - \frac{1}{k_2}\right)} \qquad \textbf{(44)}$$

Із рівняння (43) виходить, що відношення $M_4 : M_3$ не залежить від обтягу дальших праворуч прогонів і що лінія моментів має в необтяженому прогоні l_3 сталу точку F_3, що є лівий фокус цього прогону.

Крім того, виявляється, що зв'язок між лівими фокусовими відношеннями K_2 та K_3 в двох суміжних прогонах при різній цупкості EJ визначається попередньою формулою з тією різницею, що, замість дійсних довжин прогонів, у неї входять зведені довжини. Щождо залежности між лівими фокусовими віддалями в двох суміжних прогонах, то, щоб знайти її, досить підставити в формулу (38) величини:

$$k_3 = \frac{w_3}{v_3} = \frac{l_3 - v_3}{v_3} \quad k_2 = \frac{w_2}{v_2}$$

і розв'язати одержане рівняння щодо v_3. Отже, знайдемо:

$$v_3 = \frac{l_3}{3 + \frac{l'_2}{l'_3}\left(2 - \frac{v_2}{w_2}\right)} \tag{45}$$

Ця формула різниться від відповідної формули (20) для тряма із сталою цупкістю EJ лише тим, що замість відношення довжин прогонів, яке стоїть у знаменику, входить відношення зведених довжин тих самих прогонів.

Усі інші довжини (l_3, v_2, w_3) беремо дійсні, а не зведені.

§ 39. Спосіб знаходити фокуси.

Фокуси в крайніх прогонах розташовано так само, як і в трямі із сталою цупкістю EJ, а саме: коли крайня опора суставна, найближчий фокус збігається з цим суставом; коли ж кінець тряма закріплено в стіні, фокус лежить на віддалі третини прогону від закріпленого перекрою. Щоб переконатися, що останнє твердження правильне, досить замінити закріплення трямового кінця додатковим уявним прогоном $l_0 = 0$ і надати цьому прогонові такої цупкости, яку має перший прогін. Тоді до прогонів l_0 та l_1, що мають однакову цупкість, ми можемо застосувати всі виводи, одержані для трямів із сталою цупкістю EJ. А в таких трямах, як було доведено раніше, фокус лежить на віддалі $^1/_3 \cdot l_1$ від закріпленого перекрою.

Знаючи, як розташовано фокуси в крайніх прогонах, ми можемо з формули (45) знайти фокуси і в інших прогонах.

Відповідно до невеликої зміни, яку одержуємо в формулах фокусових віддалів, змінюється трохи й графічне знаходження фокусів, а саме: замість прямовиса оберненої третини входить якась нова прямовисна пряма. Саму побудову з'ясуймо на прикладі.

Уявім, що нам відомо, як розташовано лівий фокус F_2 в прогоні l_2 із цупкістю EJ_2 (фіг. 75)

Треба знайти, як розташовано лівий таки фокус у суміжному прогоні l_3 із цупкістю EJ_3. Для цього:

1) Ділимо кожний із даних прогонів на три рівні частини і через точки поділу s та r, суміжні з проміжною опорою 3, проводимо прямовиси третин ss' та rr'.

2) На прямовисі лівої третини ss' відкладаємо в довільному місці відтинок $s's''$, пропорційний до зведеної довжини l'_3 правого прогону.

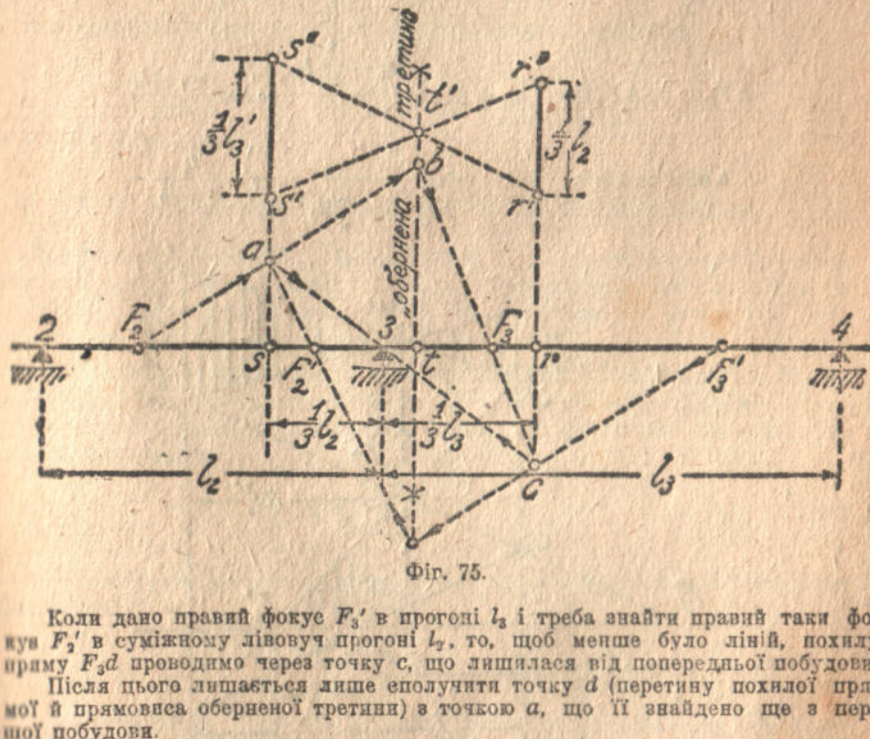
Зручно взяти, наприклад, $s's'' = {}^1/_3\ l'_3$. Так само на прямовисі правої третини rr' відкладаємо в довільному місці відтинок $r'r''$, пропорційний до веденої довжини лівого прогону. Коли взяти попередній сучинник пропорційности, то це буде відтинок $r'r'' = {}^1/_3\, l'_2$.

Сполучаємо навхрест одержані точки s', r'', s'' та r'. Перетин прямих $s'r''$ та $s''r'$ визначає місце прямовиса $t't$, який відограватиме ту саму ролю, що й прямовис оберненої третини в трямі із сталою цупкістю EJ. Щоб уникнути нових термінів, ми зватимемо цю нову пряму, як і раніше, прямовисом оберненої третини.

Очевидячки, що розташування її можна визначити виключно співвідношенням зведених довжин суміжних прогонів і воно не залежить від того, як буде розташовано відтинки $s's''$ та $r'r''$ на прямовисах третин.

Далі побудову провадимо звичайним шляхом, при чому скрізь, замість прямовиса оберненої третини, входить пряма tt', що ми її щойно відшукали.

Ми не будемо описувати цієї побудови, бо її ясно видно з фіг. 75.



Фіг. 75.

Коли дано правий фокус F_3' в прогоні l_3 і треба знайти правий таки фокус F_2' в суміжному ліворуч прогоні l_2, то, щоб менше було ліній, похилу пряму F_3d проводимо через точку c, що лишилася від попередньої побудови.

Після цього лишається лише сполучити точку d (перетину похилої прямої й прямовиса оберненої третини) з точкою a, що її знайдено ще з першої побудови.

Пряма da, перетинаючись з нульовою віссю, визначає розташування правого фокуса F'_2 у суміжному прогоні.

Запам'ятаймо, що коли цупкість у всіх прогонах однакова, знайдений таким чином прямовис tt' збігається з дійсним прямовисом оберненої третини, що його побудовано шляхом відкладання довжин ${}^1/_3\, l_2$ та ${}^1/_3\, l_3$ в зворотному порядку.

Доведімо, що знайдена таким чином віддаль x визначається формулою (45) для фокусових віддалей.

На фіг. 76 ще раз повторено побудову, при чому прямі F_2ab та bc продовжено до перетину з прямовисами третин у точках r та s'.

Із подібности трикутників F_2ke та F_2rc маємо:

$$\frac{ke}{rc} = \frac{x}{{}^1/_3\, l_2 - x}, \text{ звідки } \frac{ke}{rc + ke} = \frac{x}{{}^1/_3\, l_2 - x + x} = \frac{3x}{l_2}$$

отже,
$$x = \frac{l_3 ke}{3(ke+rc)} = \frac{l_3}{3+3\frac{rc}{ke}} \quad \text{(a)}$$

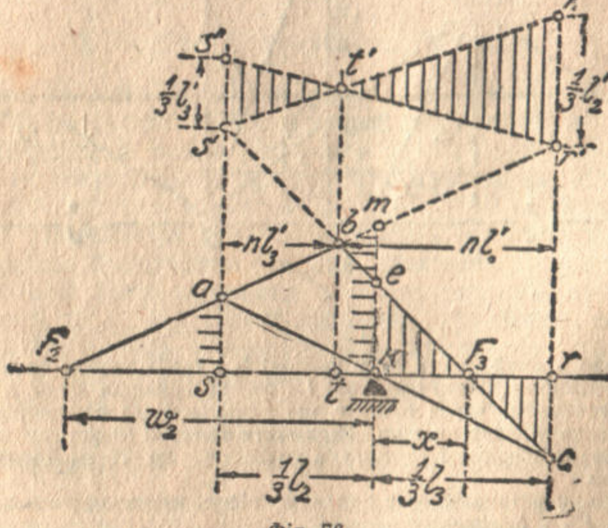
Далі, з подібности трикутників знаходимо:

$$\Delta\, cke \backsim \Delta\, cas'; \quad ke = as' \frac{\frac{1}{3} l_3}{\frac{1}{3} l_2 + \frac{1}{3} l_2} = as' \frac{l_3}{l_2 + l_3} \quad \text{(b)}$$

$$\Delta\, krc \backsim \Delta\, kca; \quad rc = sa \frac{\frac{1}{3} l_3}{\frac{1}{3} l_2} = sa \frac{l_3}{l_2}$$

$$\Delta\, F_2 as \backsim \Delta\, F_2 km; \quad sa = km \frac{w_2 - \frac{1}{3} l_2}{w_2} = km \frac{w_2 - l_2}{3w_2}$$

$$\Delta\, akm \backsim \Delta\, ar'c; \quad km = cr' \frac{\frac{1}{3} l_2}{\frac{1}{3} l_2 + \frac{1}{3} l_3} = cr' \frac{l_2}{l_2 + l_3}$$



Фіг. 76.

Роблячи послідовно підставлення, одержимо:

$$rc = \frac{l_3}{l_2} \cdot \frac{3w_2 - l_2}{3w_2} \cdot \frac{l_2}{l_2 + l_3} cr' = cr' \frac{l_3 (3w_2 - l_2)}{3w_2 (l_2 + l_3)} \quad \text{(c)}$$

Тепер ми можемо другий член у знаменнику (a) подати в такому вигляді:

$$3\frac{rc}{ke} = 3cr' \frac{l_3 (3w_2 - l_2)}{3w_2 (l_2 + l_3)} : as' \frac{l_3}{l_2 + l_3} = \frac{cr'}{as'} \frac{(3w_2 - l_2)}{w_2} =$$
$$= \frac{cr'}{as'} \cdot \frac{[2w_2 - (l_1 - w_2)]}{w_2} = \frac{cr'}{as'}\left[2 - \frac{v_2}{w_2}\right] \quad \text{(d)}$$

Пригадаймо тепер, що прямовис tt' знайдено відкладанням відтинків $r'r''$ та $s's''$, пропорційних до зведених довжин прогонів l'_2 та l'_3. Із подібности трикутників $t'r'r''$ та $t's's''$ виходить, що вершки їх будуть також пропорційні до зведених довжин прогонів.

Переходячи до подібних трикутників bcr' та bas', вишини яких дорівнюють вишинам трикутників $t'r'r''$ та $t's's''$, що ми їх щойно розглянули, можемо написати

$$cr' : as' = n\,l'_2 : n\,l'_3 = l'_2 : l'_3$$

де n — сучинник пропорційности.

Тепер вираз (d) можна подати в такому вигляді:

$$3\frac{cr'}{as'} = \frac{l'_2}{l'_3}\left[2 - \frac{v_2}{w_2}\right]$$

Підставляючи в основну формулу (a), одержимо остаточно:

$$x = \frac{l_3}{3 + \frac{l'_2}{l'_3}\left(2 - \frac{v_2}{w_2}\right)}$$

що й треба було довести.

§ 40. Графоаналітичний спосіб Мюллера-Бресляв.

Спосіб цей, звичайно, придатний і в тому випадку, коли цупкість тряма в окремих прогонах неоднакова. Зміни, що їх спричиняє ця обставина, входять до того, що в формули, які визначають величини відтинків T, входять, замість дійсних, зведені довжини прогонів, і самі відтинки T відкладаємо не на прямовисах обернених третин, а на прямовисних прямих $t'-t$ (фіг. 75), які визначено шляхом перетину ліній $s'r''$ та $r's''$. Таким чином маємо:

$$\boxed{T_n = \frac{C_n}{3\,(l'_{n-1} + l'_n)}} \tag{46}$$

де C_n є вільний член рівняння трьох моментів, який обчислюємо з формули:

$$\boxed{C_n = -6R^{\phi^0}_{n,\,n-1}\alpha_{n-1} - 6R^{\phi^0}_{n,\,n+1}\alpha_n}$$

У цю формулу входять зведені фіктивні реакції на проміжній опорі n, цебто фіктивні реакції від даних зовнішніх сил, помножені на сучинники зведення відповідних прогонів:

$$\alpha_{n-1} = J_0 : J_{n-1} \qquad \alpha_n = J_0 : J_n$$

Щоб довести теорему Мюллера-Бресляв, розгляньмо спочатку двоє допомічних тверджень.

Лема 1. На фіг. 77 подано два суміжні прогони l_2 та l_3 нерозрізного тряма й побудовано прямовис оберненої третини tt', віддалі якого від прямовисів третин ss' та rr' відповідно дорівнюють nl'_3 та nl'_2, де n — сучинник пропорційности.

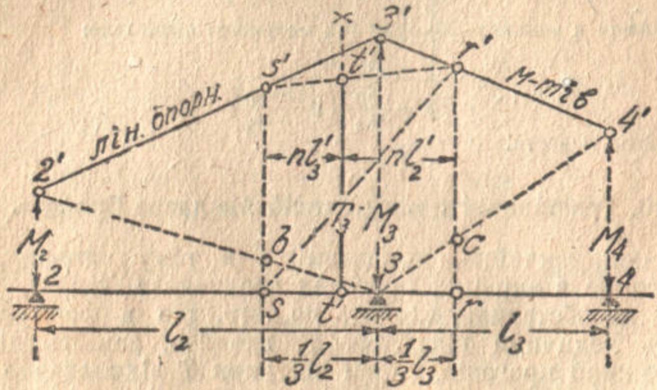
Припустімо, що лінія опорних моментів у цих прогонах має вигляд ламаної 2′, 3′, 4′. Відзначмо точки s' та r' перетину її прямовисами третини і проведімо через ці точки пряму $s'r'$; тоді знайдемо величину відтинка tt', що його вона відтинає на прямовисі оберненої третини.

Розгляньмо спочатку похилу пряму $2'\,3'$, ординати якої $2\,2' = M_2$ та $3\,3' = M_3$. Проводимо допомічну пряму $2'\,3$ і знаходимо відтинки, одержані на прямовисі ss'. Тому що цей прямовис лежить від опори 2 на віддалі $^2/_3\, l_2$, а від опори 3 — на віддалі $^1/_3\, l_2$, то маємо:

$$sb = \frac{1}{3}\, M_2 \qquad bs' = \frac{2}{3}\, M_3$$

Переходячи до похилої прямої $3'\,4'$ та прямовиса rr', ми можемо з тих самих міркувань написати:

$$cr' = \frac{2}{3}\, M_3 \qquad rc = \frac{1}{3}\, M_4$$



Фіг. 77.

Перейдімо тепер до похилої прямої $s'\,r'$. Крайні ординати її відповідно дорівнюють:

$$ss' = sb + bs' = \frac{1}{3}\, M_2 + \frac{2}{3}\, M_3$$

$$rr' = cr' + rc = \frac{2}{3}\, M_3 + \frac{1}{3}\, M_4$$

Проміжну ординату tt', що віддалена на nl'_3 та nl'_2 від кінців, знаходимо з подібности трикутників. Вона дорівнює:

$$tt' = \frac{1}{nl'_2 + nl'_3}\,(ss' \cdot nl'_2 + rr' \cdot nl'_2) = \frac{1}{l'_2 + l'_3}\,(ss' l'_2 + rr' l'_3)$$

Підставивши, замість ss' та rr', їхні величини, одержимо:

$$tt' = \frac{1}{l'_2 + l'_3}\left[\frac{1}{3}\, M_2 l'_2 + \frac{2}{3}\, M_3 l'_2 + \frac{2}{3}\, M_3 l'_3 + \frac{1}{3}\, M_4 l'_3\right] =$$

$$= \frac{1}{3(l'_2 + l'_3)}\,[M_2 l'_2 + 2M_3 l'_2 + 2M_3 l'_3 + M_4 l'_3]$$

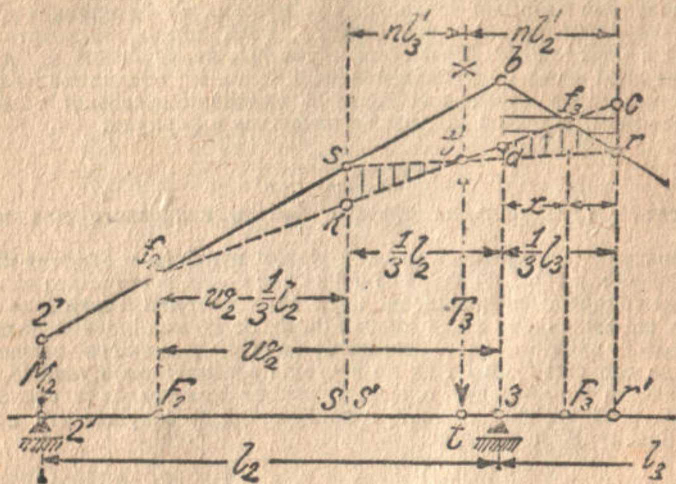
У дужках ми одержали ліву частину рівняння трьох моментів; замінивши її правою частиною того ж таки рівняння, цебто вільним членом C_3, знаходимо формулу (46).

Отже, коли ми продовжимо прямовис третин, суміжних з опорою n, до перетину з лінією опорних моментів і сполучимо прямою одержані точки, то ця пряма відтинає на прямовисі оберненої третини відтинок T_n, що визначається формулою (46).

Лема 2. На фіг. 78 подано знову лінію опорних моментів, проведено прямовиси третин ss', rr' і побудовано прямовис оберненої третини tt'.

Через точки s та r перетину прямовисів третин з лінією опорних моментів проводимо пряму sr, яка, як доведено раніше, відтинає на прямовисі tt' відтинок T_3.

Потім виносимо лівий фокус F_2 другого прогону на лінію опорних моментів і проводимо пряму через знайдену точку f_2 і вершок відтинка T_3 до перетину з лінією опорних моментів у точці f_3.



Фіг. 78.

Доведімо, що точка f_3 лежить на прямовисі лівого фокуса F_3. Із подібности трикутників f_3ab та f_3rc маємо:

$$\frac{ab}{rs}=\frac{x}{\frac{1}{3}l_3-x}\text{, звідки }\frac{ab}{ab+rc}=\frac{x}{\frac{1}{3}l_3-x+x}=\frac{3x}{l_3}$$

Розв'язуючи, одержимо:

$$x=\frac{l_3\,ab}{3\,(ab+rc)}=\frac{l_3}{3+3\,\frac{rc}{ab}} \tag{a}$$

Потім послідовно знаходимо

$$\Delta\, t'cr \infty \Delta\, t'sk;\quad rs=sk\frac{nl'_2}{nl'_3}=sk\frac{l'_2}{l'_3}$$

$$\Delta\, f_2ab \infty \Delta\, f_2sk\quad ab=sk\frac{w_2}{w_2-{}^1/_3 l_2}=sk\frac{3\,w_2}{3\,w_2-l_2}$$

Тепер другий член знаменика у виразі (a) можна подати в такому вигляді:

$$3\frac{rc}{ab}=3\,sk\frac{l'_2}{l'_3}:sk\;\frac{3\,w_2}{3\,w_2-l_2}=\frac{l'_2}{l'_3}\cdot\frac{3\,w_2-l_2}{w_2}=\frac{l_2}{l'_3}\left[2-\frac{v_2}{w_2}\right]$$

Останнє перетворення взято із § 39. Підставляючи в (a), знаходимо остаточно:

$$x=\frac{l_3}{3+\frac{l'_2}{l'_3}\left[2-\frac{v_2}{w_2}\right]}$$

Але це є вираз для лівої фокусової віддалі v_3 у третьому прогоні. Отже точка f_3 дійсно лежить на прямовисі лівого фокуса F_3.

Тому, коли ми проведемо пряму через вершок фокусового моменту MF_2 й відтинка T_3, то ця пряма перетинає лінію опорних моментів у дальшому прогоні на прямовисі лівого фокуса MF_3.

Теорема Мюллера-Бресляв. Останній вивід дозволяє нам зробити й обернений висновок, а саме: коли ми проведемо прямовиси через ліві фокуси F_2 та F_3 суміжних прогонів, продовжимо їх до перетину з лінією опорних моментів і сполучимо одержані точки f_2 та f_3 прямою, то ця пряма відітне на прямовисі оберненої третини відтинок T_3, який можна визначити згідно з лемою 1 з формули (46). Проведена пряма $f_2 f_3$ являє собою не що інше, як дільницю лінії лівих фокусових моментів. Отже, ми приходимо до теореми: лінія лівих фокусових моментів відтинає на прямовисі оберненої третини суміжний з опорою n відтинок T_n, що визначається з формули:

$$T_n = \frac{C_n}{3(l'_{n-1} + l'_n)}$$

де C_n — вільний член рівняння трьох моментів, написаного для прогонів l_{n-1} та l_n.

Хід розрахунку нерозрізного тряма з різною цупкістю в окремих прогонах не відрізняється від того, що вміщено в § 2ч для тряма із сталою цупкістю EJ.

На деякі трудноші натрапляємо, коли кінець тряма закріплено в стіні. Припустімо, що закріплено лівий кінець. Замінімо це закріплення додатковим прогоном: $l_0 = 0$, цупкість якого вважаємо за рівну з цупкістю першого прогону. Тоді до прогонів l_0 та l_1, як до прогонів з однаковою цупкістю, ми можемо застосувати усі висновки, одержані раніше для трямів із сталою цупкістю EJ. Зокрема, ми можемо знайти найближчий до закріпленого перекрою фокусовий момент M_{F_1} з формули:

$$\boxed{M_{F_1} = T_1 = -\frac{2R_1\Phi^0}{l_1}} \qquad (33)$$

Після цього нетрудно побудувати лінію ЛФМ.

Так само треба робити й тоді, коли закріплено правий кінець тряма.

§ 41. Теорема про два моменти.

Ми не будемо зупинятися на доказах цієї теореми для тряма з різною цупкістю в окремих прогонах, бо це буде повторення того, що сказано вже в § 32. Наведімо лише формулу, яка зв'язує ліві фокусові моменти в двох суміжних прогонах l_{n-1} та l_n

$$\boxed{M_{F_n} = -\frac{v_n}{l_n l'_n}\left[\frac{M_{F(n-1)}\, l_{n-1}\, l'_{n-1}}{w_{n-1}} - C_n\right]} \qquad (47)$$

де w_{n-1} та v_n — віддалі лівих фокусів у прогонах l_{n-1} та l_n від проміжної опори n; C_n — вільний член рівняння трьох моментів, повний вираз якого було подано в попередньому параграфі.

Формула (47) дає нам змогу розрахувати нерозрізний трям, не розв'язуючи рівняння трьох моментів. Порядок розрахунку не відрізняється від поданого в § 35.

Коли кінець тряма закріплено в стіні, робимо так, як описано в кінці § 40.

§ 42. Спосіб перехресних відтинків.

У цьому способі різниця цупкостей окремих прогонів нерозрізного тряма спричиняє зовсім незначні зміни.

Вона відбивається лише на розташуванні фокусів; увесь же останній розрахунок зберігає попередню форму. Щоб переконатися в цьому, простежмо, як виведено рівняння, що визначають моменти на кінцях обтяженого прогону.

Нехай дано нерозрізний трям, у якому обтяжено один і лише один прогін l_3. Напишімо рівняння трьох моментів спочатку для прогонів $l_2 - l_3$, а потім для прогонів $l_3 - l_4$.

$$M_2 l'_2 + 2 M_3 (l'_2 + l'_3) + M_4 l'_3 = -6 R^{\Phi^0}_{34} \alpha_3 \qquad \text{(a)}$$

$$M_3 l'_3 + 2 M_4 (l'_3 + l'_4) + M_5 l'_4 = -6 R^{\Phi^0}_{43} \alpha_3 \qquad \text{(b)}$$

Перетворімо суму двох перших членів рівняння (a):

$$s = M_2 l'_2 + 2 M_3 (l'_2 + l'_3) = 2 M_3 l'_3 + 2 M_3 l'_2 + M_2 l'_2 =$$

$$= M_3 l'_3 \left[2 + 2 \frac{l'_2}{l'_3} + \frac{M_2 l'_2}{M_3 l'_3}\right] = M_3 l'_3 \left[2 + \frac{l'_2}{l'_3}\left(2 + \frac{M_2}{M_3}\right)\right] \qquad \text{(c)}$$

Але коли немає обтягу в усіх прогонах ліворуч від l_3, ми маємо:

$$\frac{M_3}{M_2} = -k_2 \text{ або } \frac{M_2}{M_3} = -\frac{1}{k_2} \qquad \text{(d)}$$

Підставляючи це рівняння в (c) і взявши до уваги залежність (38) між лівими фокусовими відношеннями в двох суміжних прогонах, можемо написати:

$$s = M_3 l'_3 \left[2 + \frac{l'_2}{l'_3}\left(2 - \frac{1}{k_2}\right)\right] = M_3 l'_3 k_3 \qquad \text{(l)}$$

Отже, рівняння (a) набирає такого вигляду:

$$M_3 l'_3 k_3 + M_4 l'_3 = -6 R^{\Phi^0}_{34} \alpha_3 \qquad \text{(f)}$$

Згадаймо тепер, що зведена довжина прогону дорівнює $l' = l_3 \alpha_3$. Підставляючи це в рівняння (f) і скорочуючи обидві частини його на α_3, знаходимо остаточно:

$$M_3 l_3 k_3 + M_4 l_3 = -6 R^{\Phi^0}_{34} \qquad \text{(h)}$$

Так само можна перетворити й рівняння (b).

Звідси ми бачимо, що різниця цупкостей окремих прогонів не відбивається на загальному вигляді рівняння моментів на кінцях обтяженого прогону, і впливає лише на величини фокусових відношень K_3 та K'_3. Ці відношення треба визначати або з формули (38), що має зведені довжини прогонів і враховує таким чином їхню неоднакову цупкість, абож знайти шляхом побудови, яку подано в § 39.

Щодо перехресних відтинків t_A та t_B, то їх будуємо графічно так само, як для тряма із сталою цупкістю EJ (див. § 25), чи можна знайти аналітично з формул, які подано в § 26, при чому в ці формули треба підставляти дійсні, а не зведені довжини прогонів.

ЧАСТИНА ДРУГА.

РОЗРАХУНОК НЕРОЗРІЗНИХ ТРЯМІВ ПРИ РУХОМОМУ ОБТЯГОВІ.

РОЗДІЛ ШОСТИЙ.

АНАЛІТИЧНА ПОБУДОВА ЛІНІЙ ВПЛИВУ.

§ 43. Означення ліній впливу.

Лінією впливу для якогось чинника, наприклад, для опорного моменту M_2, звемо криву чи ламану лінію, ордината якої $y_{м2}$, виміряна під рухомим прямовисним тягаром, при множенні її на цей тягар, дає величину M_2 при даному розташуванні тягара.

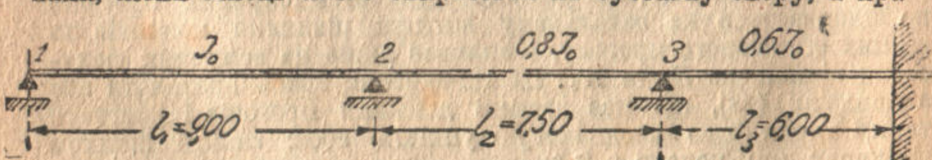
Можна сказати також, що лінія впливу для M_2 є графік зміни сучинника пропорційности $y_{м2}$ у виразі

$$M_2 = P \cdot y_{м2}$$

коли пересувати тягар P по трямі. Лінію впливу для M_2 ми позначатимемо скороченим символом ЛВ(M_2), а до ординати її $y_{м2}$ додаватимемо знизу індекс, що показуватиме, до якого чинника ця ЛВ (лінія впливу) стосується. Наприклад, y_{k2} позначатиме ординату ЛВ для опорної реакції R_2.

Як аналітично знаходити лінії впливу для нерозрізного тряма, ми продемонструємо на такому числовому прикладі.

П р и к л а д. Нехай дано нерозрізний трям із трьома прогонами, лівий кінець якого спирається на суставну опору, а пра-



Фіг. 79.

вий вправлено в стіну (фіг. 79). Довжини прогонів подано в таблиці № 1. Для початкового розрахунку взято цупкості окремих прогонів, які наведено у другій колонці тієї ж таки таблиці. Їх позначено через сучинники цупкости β_i залежно від довільно вибраного моменту інерції J_0. Треба побудувати основні лінії впливу для цього тряма.

§ 44. Попередні обчислення.

А. Обчислення зведених довжин прогонів.

Через те, що сучинники цупкости β_i є величини обернені до сучинників зведення α_i, то зведені довжини окремих прогонів обчислюємо за формулою

$$l'_i = l_i : \beta_i$$

Наслідки подано в третій колонці табл. 1.

Таблиця 1. Розрахункові дані та зведені довжини.

Довжини прогонів l	Моменти інерції $J=\beta J_0$	Зведені довжини $l'=l:\beta$ м
9,00	1,0	9,000
7,50	0,8	9,272
6,00	0,6	10,000

Б. Обчислення фокусових відношень k_n та k'_n.

Обчислення це проробляємо за формулами:

$$k_n = 2 + \frac{l'_{n-1}}{l'_n}\left(2 - \frac{1}{k_{n-1}}\right); \quad k'_n = 2 + \frac{l'_{n+1}}{l'_n}\left(2 - \frac{1}{k'_{n+1}}\right) \qquad \text{(b)}$$

З першої формули знаходимо ліві фокусові відношення k_n; з другої — знаходимо праві відношення k'_n.

Як застосовувати формули, було вже з'ясовано.

Наслідки обчислень подано в табл. 2.

Таблиця 2 фокусових відношень k.

Прогони	Фокусові відношення	
	Ліві k_n	Праві k'_n
Перший	$k_1 = \infty$	$k'_1 = 3{,}793$
Другий	$k_2 = 3{,}920$	$k'_2 = 3{,}601$
Третій	$k_3 = 3{,}635$	$k'_3 = 2{,}000$

Примітка. Коли нерозрізний трям має однакову цупкість EJ у всіх прогонах, то фокусові відношення визначаємо з формул (20 та 22), що їх подано в § 19. Різниця цупкостей окремих прогонів виявляє себе лише коли обчислювати величини k_n та k'_n. Далі розрахунок іде за способом, що його викладено нижче, незалежно від того, яка цупкість окремих трямових прогонів.

В. Перетворення формул фіктивних реакцій.

Щоб уникнути обчислення фіктивних реакцій при кожній новій довжині прогону і в кожному новому положенні тягара в прогоні, перетворімо формули для фіктивних реакцій. Через те що $b = l - a$, то

$$R_A^{\text{ф}} = \frac{Pab}{6l}(l+b) = \frac{Pa(l-a)(l+l-a)}{6l} = \frac{Pa(l-a)(2l-a)}{6l} \qquad \text{(c)}$$

Умовмося вважати за незалежну змінну відношення $x = \frac{a}{l}$ і перепишімо формулу (c) так:

$$R_A^{\text{ф}} = \frac{1}{6} Pl_2 \frac{a}{l}\left(1 - \frac{a}{l}\right)\left(2 - \frac{a}{l}\right) = \frac{1}{6} Pl^2 x(1-x)(2-x) \qquad \text{(d)}$$

Для скорочення запровадьмо таке позначення

$$x(1-x)(2-x) = \varphi(x); \qquad \text{тоді} \quad \boxed{R_A^{\text{ф}} = \frac{1}{6} Pl^2 \varphi(x)} \qquad (48)$$

Значення функції $\varphi(x)$ для рівновіддалених точок прогону подано в таблиці № 3. Перетворюючи на аналогічний вираз для фіктивної реакції $R_a^{\text{ф}}$, одержимо:

$$R_B^{\text{ф}} = \frac{Pab}{6l}(l+a) = \frac{Pa(l-a)(l+a)}{6l} = \frac{1}{6l} Pa(l^2 - a^2) \qquad \text{(e)}$$

За незалежну змінну беремо відношення $x = \frac{a}{l}$. Тоді формулу (e) можна переписати так:

$$R_B^{\text{ф}} = \frac{1}{6} Pl^2 \frac{a}{l}\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) = \frac{1}{6} Pl^2 x(1 - x^2) \qquad \text{(f)}$$

Для скорочення запровадьмо ще таке позначення:

$$x(1 - x^2) = \psi(x)$$

тоді

$$\boxed{R_B^{\text{ф}} = \frac{1}{6} Pl^2 \psi(x)} \qquad (49)$$

Значення функції $\psi(x)$ подано в третій колонці тієї таки таблиці № 3.

Таблиця 3 значень функцій.
$\varphi(x) = x(1-x)(2-x)$; $\psi(x) = (1-x^2)$

№№ перекроїв	$x = a : l$	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
0	0,0	0,000	0,000
1	0,1	0,171	0,099
2	0,2	0,288	0,192
3	0,3	0,357	0,273
4	0,4	0,384	0,336
5	0,5	0,375	0,375
6	0,6	0,336	0,384
7	0,7	0,273	0,357
8	0,8	0,192	0,288
9	0,9	0,099	0,171
10	1,00	0,000	0,000

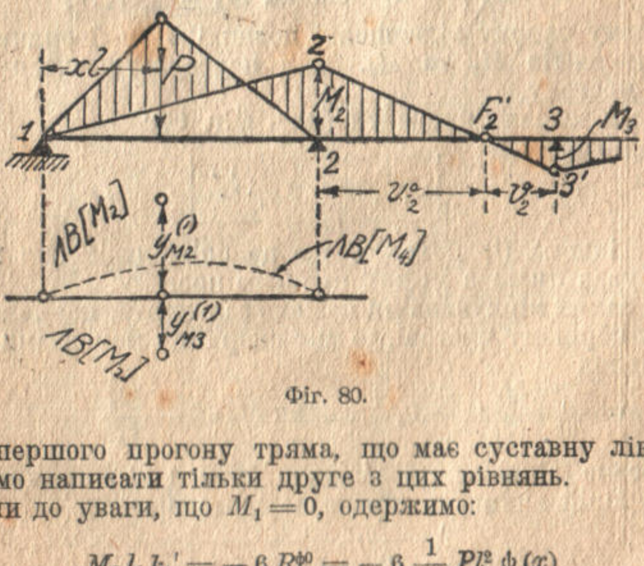
§ 45. Лінії впливу опорних моментів M.

А. Обтяг у першому прогоні.

Припустімо, що рухомий тягар P міститься в першому прогоні на віддалі $a = xl_1$ від лівої опори 1 (фіг. 80). Рівняння опорних моментів на кінцях обтяженого прогону в загальному вигляді можна написати так (див. § 42 формулу (h):

$$M_n l_n k_n + M_{n+1} l_n = -6 R_n^{\phi 0} \tag{a}$$

$$M_n l_n + M_{n+1} l_n k'_n = -6 R_{n+1}^{\phi 0} \tag{b}$$



Фіг. 80.

Для першого прогону тряма, що має суставну ліву опору, ми можемо написати тільки друге з цих рівнянь.

Беручи до уваги, що $M_1 = 0$, одержимо:

$$M_2 l_1 k_1' = -6 R_2^{\phi 0} = -6 . \frac{1}{6} P l_1^2 \psi(x) \tag{c}$$

звідки знаходимо

$$M_2 = -P\frac{l_1}{k'_1}\,\psi(x) \tag{d}$$

Сучинник, на який треба помножити рухомий тягар P, щоб одержати момент M_2, і являтиме ординату y_{M_2} лінії впливу M_2. Отже

$$y^{(1)}_{M_2} = -\frac{l_1}{k'_1}\,\psi(x) \tag{50}$$

Індекс (1) угорі показує, що знайдений вираз для y_{M_2} вірний лише в межах першого прогону. Запам'ятаймо, що y_{M_2} являє собою деяку довжину, бо помножаючи тягар P, який визначено в тоннах, на ординату лінії впливу y_{M_2}, ми повинні одержати момент M_2, який визначено в тонно-метрах.

Для нашого прикладу маємо:

$$l' = 9{,}00 \text{ м}; \; k'_1 = 3{,}793; \;\; l_1 : k'_1 = 2{,}374 \text{ м}$$

Значення функції $\psi(x)$ при різних розташуваннях тягара беремо з таблиці № 3. Обчислення $y^{(1)}_{M_2}$ за цими даними зроблено в другій та третій колонці таблиці № 4.

Перейдімо до інших опорних моментів. Коли обтяжити один перший прогін, лінія моментів у другому прогоні проходить через правий фокус F'_2 (фіг. 80).

Отже, між опорними моментами M_2 та M_3 є співвідношення

$$M_2 : M_3 = -k_2' \quad \text{звідки } M_3 = -M_2 : k_2'$$

У такому самому відношенні повинні бути й ординати ліній впливу моментів M_2 та M_3, коли пересувати тягар у межах першого прогону.

Тому ми можемо написати (див. фіг. 80):

$$\boxed{y^{(1)}_{M_3} = -y^{(1)}_{M_2} : k_2'} \tag{51}$$

при чому індекс (¹) показує, що це співвідношення між ординатами буває лише в межах першого прогону.

З тих самих міркувань ми можемо запевняти, що коли тягар P лежить у першому прогоні, то між опорними моментами M_4 та M_3 є відношення

$$\frac{M_3}{M_4} = -k_3' \quad \text{звідки } M_4 = -\frac{M_3}{k_3'}$$

Таке саме відношення повинно бути й між ординатами відповідних ліній впливу в межах першого прогону

$$\boxed{y^{(1)}_{M_4} = -y^{(1)}_{M_3} : k_3'} \tag{51'}$$

Для нашого прикладу маємо:

$$k_2' = 3{,}601 \qquad k'_3 = 2{,}000$$

Обчислення y_{M_3} та y_{M_4} подано в тій таки табл. 4 у четвертій та п'ятій колонці.

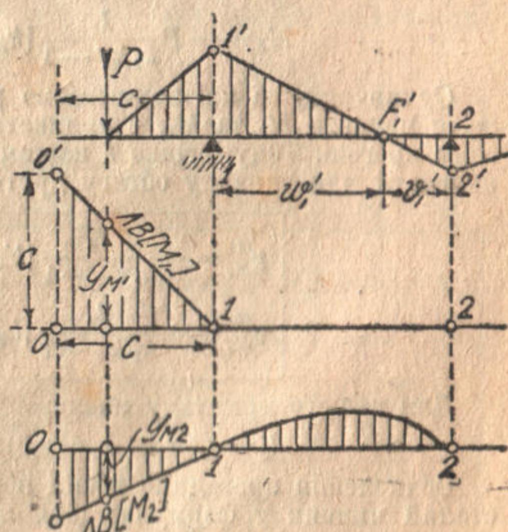
Таблиця 4. Ординати ліній впливу M_2, M_3 та M_4 в межах першого прогону.

Прогін	№№ точок	$\psi(x)$	$y^{(1)}_{M_2} = 2{,}374\,\psi(x)$	$y^{(1)}_{M_3} = -y^{(1)}_{M_2} : k'_2$	$y^{(1)}_{M_4} = y^{(1)}_{M_3} : k'_3$
І-й прогін	0	0,000	−0,000	+0,000	−0,000
	1	0,099	−0,235	+0,065	−0,032
	2	0,192	−0,456	+0,127	−0,063
	3	0,273	−0,648	+0,180	−0,090
	4	0,336	−0,797	+0,221	−0,111
	5	0,375	−0,890	+0,247	−0,124
	6	0,384	−0,911	+0,253	−0,126
	7	0,357	−0,847	+0,235	−0,118
	8	0,288	−0,684	+0,190	−0,095
	9	0,171	−0,406	+0,113	0,056
	10	0,000	−0,000	+0,000	0,000

Для побіжного контролю роботи треба, закінчивши обчислювати y_{M_2}, негайно побудувати на картатці відповідну криву. Тоді навіть невеличкі помилки виступають дуже рельєфно.

Примітка 1. Коли б лівий кінець тряма було вправлено в стіну, то будувати лінію впливу для першого прогону довелося б за схемою, що її подано в дальшому параграфі.

Примітка 2. Коли трям має консолю на лівому кінці, то ми повинні спершу побудувати лінію впливу опорного моменту M_1. Ця лінія має форму прямокутного трикутника з нульовою ординатою в опорному перекрої консолі і з найбільшою ординатою під кінець консолі, при чому ця ордината дорівнює довжині консолі C (фіг. 81).



Фіг. 81.

Маючи лінію впливу M_1, можна побудувати й ЛВ (M_2). Ми знаємо, що хочби як розташовано було тягар P на консолі, лінія моментів у першому прогоні проходить через правий фокус F_1'; отже, між опорними моментами M_1 та M_2 є співвідношення:

$$M_1 : M_2 = -k'_1, \text{ звідки } M_2 = -M_1 : k_1'$$

У такому самому відношенні повинні бути й ординати y_{M_1} та y_{M_2} в межах консолі. Тому ЛВ (M_2) протягом консолі являтиме собою також трикутник із нульовою ординатою на опорі 1, і з найбільшою ординатою $+c:k'_1$ під кінцем консолі.

Лінію впливу моменту M_3 одержимо із знайденої ЛВ (M_2), поділивши її ординати на $-k'_2$; так само ЛВ (M_4) одержимо із знайденої ЛВ (M_3), поділивши її ординати на $-k'_3$, і т. д.

B. Обтяг середнього прогону.

Припустімо тепер, що рухомий тягар P міститься в одному із середніх прогонів нерозрізного тряма. Для нашого прикладу таким прогоном є прогін l_2. Рівняння опорних моментів на кінцях обтяженого прогону:

$$M_2 l_2 k_2 + M_3 l_2 = -6R_{23}^{\phi 0} \text{ де } R_{23}^{\phi 0} = \frac{1}{6} P l_2^2 \varphi(x) \tag{a}$$

$$M_2 l_2 + M_3 l_2 k'_2 = -6R_{32}^{\phi 0} \text{ де } R_{32}^{\phi 0} = \frac{1}{6} P l_2^2 \psi(x) \tag{b}$$

Підставивши в це рівняння вираз фіктивних реакцій та скоротивши на l_2, одержимо:

$$M_2 k_2 + M_3 = -P l_2 \varphi(x) \tag{c}$$

$$M_2 + M_3 k'_2 = -P l_2 \psi(x) \tag{d}$$

Коли розв'язати ці рівняння відносно M_2 та M_3, то матимемо такі формули:

$$M_2 = -P \frac{l_2}{k_2 k'_2 - 1} [k'_2 \varphi(x) - \psi(x)] \tag{e}$$

$$M_3 = -P \frac{l_2}{k_2 k_2' - 1} [k_2 \psi(x) - \varphi(x)] \tag{f}$$

Сучинники, на які помножаємо рухомий тягар P, щоб одержати моменти M_2 та M_3, є ординати ЛВ (M_2) та ЛВ (M_3) у другому прогоні. Тому, згідно з нашими позначеннями, ми можемо написати для випадку обтягу другого прогону:

$$\boxed{\begin{aligned} y_{M_2}^{(2)} &= -\frac{l_2}{k_2 k'_2 - 1} [k'_2 \varphi(x) - \psi(x)] \\ y_{M_3}^{(2)} &= -\frac{l_2}{k_2 k'_2 - 1} [k_2 \psi(x) - \varphi(x)] \end{aligned}} \tag{52}$$

Для нашого прикладу маємо:

$$l_2 = 7{,}50 \text{ м} \quad k_2 = 3{,}919 \quad k'_2 = 3{,}601$$

Обчислення провадимо таким порядком: спочатку знаходимо сталий чинник у формулах (52), який для скорочення позначаємо літерою C_2:

$$C_2 = \frac{l_2}{k_2 k'_2 - 1} = \frac{7{,}50}{3{,}919 \times 3{,}601 - 1} = 0{,}5725 \text{ м}$$

Потім складаємо таблицю № 5, щоб обчислювати змінні частини формул (52). Частини ці для скорочення позначаємо так:

$$\boxed{S_2 = k_2\,\varphi(x) - \psi(x)} \qquad \boxed{S'_2 = k_2\,\psi(x) - \varphi(x)} \tag{53}$$

Величини $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ беремо з табл. 3.

Таблиця 5. Допомічні обчислення на випадок обтягу другого прогону.

Прогін	№№ точок	x	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	$k_2\varphi(x)$	$k_2\psi(x)$	S_2	S'_2
2-й прогін	0	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	1	0,1	0,171	0,099	0,615	0,388	0,513	0,217
	2	0,2	0,288	0,192	1,037	0,752	0,845	0,464
	3	0,3	0,357	0,273	1,285	1,070	1,012	0,713
	4	0,4	0,384	0,336	1,388	1,316	1,052	0,932
	5	0,5	0,375	0,375	1,350	1,470	0,975	1,095
	6	0,6	0,336	0,384	1,210	1,505	0,826	1,169
	7	0,7	0,273	0,357	0,980	1,399	0,626	1,126
	8	0,8	0,192	0,288	0,691	1,130	0,403	0,938
	9	0,9	0,099	0,171	0,356	0,670	0,185	0,571
	10	0,10	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Після цього переходимо до обчислення ординат ліній впливу опорних моментів у другому прогоні. При наших позначеннях маємо:

$$\boxed{y^{(2)}_{M_2} = -\,c_2\,S_2 \qquad y^{(2)}_{M_3} = -\,c_2\,S'_2} \tag{54}$$

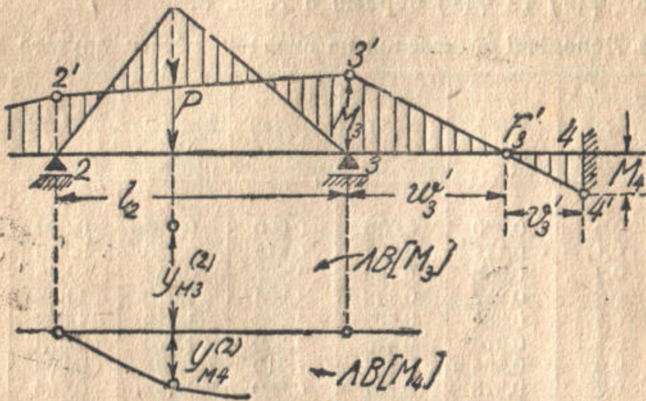
Обчислення зроблено в таблиці № 6.

Таблиця 6. Ординати ліній впливу опорних моментів M_2, M_3 та M_4.

Прогін	№№ точок	S_2	$y^{(2)}_{M_2} = -c_2 S_2$	S'_2	$y^{(2)}_{M_3} = -c_2 S'_2$	$y^{(2)}_{M_4} = -y^{(2)}_{M_3} : k'_3$
2-й прогін	0	0,000	$-0{,}000$	0,000	$-0{,}000$	$+0{,}000$
	1	0,513	$-0{,}295$	0,217	$-0{,}124$	$+0{,}062$
	2	0,845	$-0{,}484$	0,464	$-0{,}265$	$+0{,}132$
	3	1,012	$-0{,}579$	0,713	$-0{,}408$	$+0{,}204$
	4	1,052	$-0{,}602$	0,932	$-0{,}534$	$+0{,}267$
	5	0,975	$-0{,}558$	1,095	$-0{,}626$	$+0{,}313$
	6	0,826	$-0{,}473$	1,169	$-0{,}669$	$+0{,}334$
	7	0,626	$-0{,}358$	1,126	$-0{,}644$	$+0{,}322$
	8	0,403	$-0{,}231$	0,938	$-0{,}537$	$+0{,}268$
	9	0,185	$-0{,}106$	0,571	$-0{,}327$	$+0{,}163$
	10	0,000	$-0{,}000$	0,000	$-0{,}000$	$+0{,}000$

Щоб знайти $y^{(2)}_{M_4}$, цебто ординати лінії впливу для M_4, скористуємося з того, що коли обтяжено один прогін l_2, лінія моментів у необтяженому прогоні l_3 проходить через правий фокус F'_3 і моменти на кінцях цього прогону є в відношенні (див. фіг. 82):

$$M_3 : M_4 = -k'_3 \quad \text{звідки} \quad M_4 = -M_3 : k'_3$$



Фіг. 82.

Такою самою залежністю буде зв'язано й ординати ліній впливу для M_4 та M_3 в межах другого прогону, що згідно з нашими позначеннями можна подати так:

$$y^{(2)}_{M_4} = - y^{(2)}_{M_3} : k'_2 \quad \text{де} \quad k'_3 = 2{,}00$$

Обчислення подано в останній колонці табл. № 6.

С. Обтяг крайнього прогону з закріпленим кінцем.

Припустімо тепер, що рухомий тягар P міститься в третьому прогоні. Правий кінець цього прогону закріплено в стіні, а ми вже зазначали раніше, що закріплення кінця можна замінити додаванням допомічного, уявного прогону $l_4 = 0$ з боку стіни. Тому прогін із закріпленою крайньою опорою ми повинні розглядати, як один із середніх прогонів нерозрізного тряма, і побудову ліній впливу для такого прогону провадити згідно з правилами, даними для середніх прогонів.

Для правого прогону розраховуваного тряма маємо:

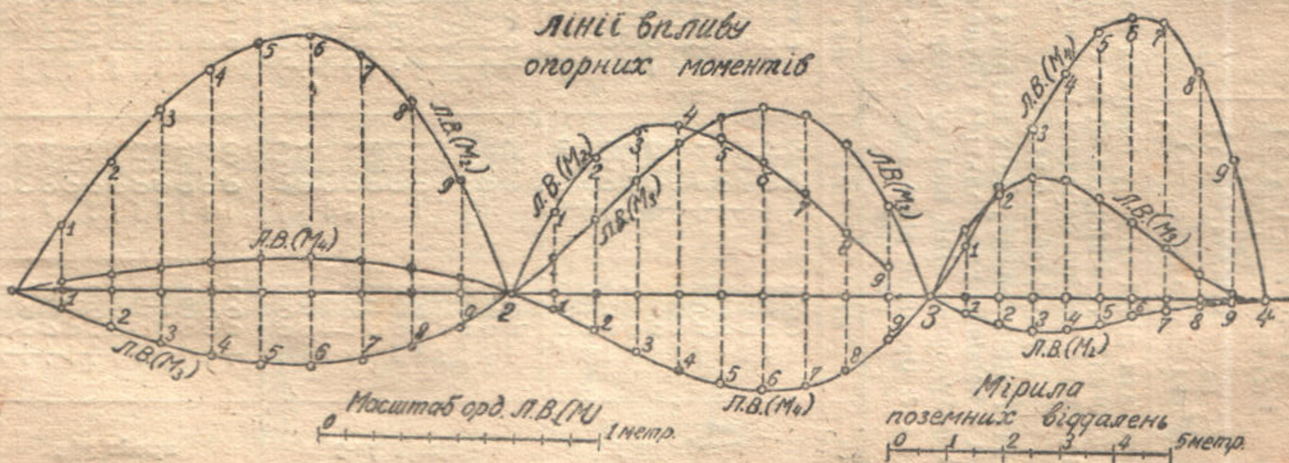
$$l_3 = 6{,}00 \text{ м} \qquad k_3 = 3{,}635 \qquad k'_3 = 2{,}000$$

Із цих даних знаходимо:

$$c = \frac{l_3}{k_3 k'_3 - 1} = \frac{6{,}00}{3{,}635 \,.\, 2{,}00 - 1} = 0{,}957 \text{ м}$$

$$S_3 = 2{,}00\, \varphi(x) - \psi(x) \qquad S'_3 = 3{,}635\, \psi(x) - \varphi(x)$$

і далі обчисляємо за формою табл. 6.


Лінії впливу
опорних моментів
Л.В.(M₂)
Л.В.(M₃)
Л.В.(M₄)
Масштаб орд. Л.В.(M)
0
1 метр.
Мірила
поземних віддалень
0 1 2 3 4 5 метр.

Фіг. 83.

Щоб хутко перевіряти обчислення, зручно вживати формул:

$$\boxed{\begin{aligned} y_{M_n}^{(n)} &= \frac{0{,}375\, l_n\,(k'_{n-1})}{k_n k'_{n-1}} \\ y_{M_{n+1}}^{(n)} &= \frac{0{,}375\, l_n\,(k_{n-1})}{k_n \cdot k'_{n-1} - 1} \end{aligned}} \qquad (55)$$

які визначають ординати ліній впливу опорних моментів M_n та M_{n+1} по середині прогону l_n. Формули ці не трудно вивести із (52), коли взяти до уваги, що по середині прогону:

$$\varphi(x) = \psi(x) = 0{,}375$$

Знайдені ординати ліній впливу всіх опорних моментів подано в табл. 7, яка є основна для дальших обчислень. За цими даними на фіг. 83 побудовано лінії впливу опорних моментів.

Таблиця 7. **Ординати ліній впливу опорних моментів.**

Точки		y_{M_2}	y_{M_3}	y_{M_4}
0	1-ий прогін	— 0,000	+ 0,000	0,000
1		— 0,235	+ 0,065	— 0,032
2		— 0,456	+ 0,127	— 0,063
3		— 0,648	+ 0,180	— 0,090
4		— 0,797	+ 0,221	— 0,111
5		— 0,890	+ 0,247	— 0,124
6		— 0,911	+ 0,253	— 0,126
7		— 0,847	+ 0,235	— 0,118
8		— 0,684	+ 0,190	— 0,095
9		— 0,406	+ 0,113	— 0,056
10		— 0,000	+ 0,000	— 0,000
0	2-ий прогін	— 0,000	0,000	+ 0,000
1		— 0,295	— 0,124	+ 0,062
2		— 0,484	— 0,265	+ 0,132
3		— 0,579	— 0,408	+ 0,204
4		— 0,602	— 0,534	+ 0,267
5		— 0,558	— 0,626	+ 0,313
6		— 0,473	— 0,669	+ 0,334
7		— 0,358	— 0,644	+ 0,322
8		— 0,231	— 0,537	+ 0,268
9		— 0,106	— 0,327	+ 0,163
10		— 0,000	— 0,000	+ 0,000
0	3-ій прогін	+ 0,000	— 0,000	— 0,000
1		+ 0,059	— 0,233	— 0,181
2		+ 0,094	— 0,367	— 0,392
3		+ 0,108	— 0,422	— 0,608
4		+ 0,105	— 0,413	— 0,802
5		+ 0,092	— 0,359	— 0,945
6		+ 0,070	— 0,276	— 1,015
7		+ 0,046	— 0,181	— 0,980
8		+ 0,023	— 0,096	— 0,808
9		+ 0,007	— 0,026	— 0,501
10		+ 0,000	— 0,000	— 0,000

§ 46. Лінії впливу згинних моментів.

Візьмімо перекрій mn у середньому прогоні тряма l_2 завдальшки на a та b від лівої та правої опори цього прогону (фіг. 84).

Згинний момент M у вибраному перекрої можна обчислити з формули (10), яка, коли замінити x на a та $l-x$ на b, набирає такого вигляду:

$$M = M^0 + M_2 \frac{b}{l_2} + M_3 \frac{a}{l_2} \tag{a}$$

де M^0 — момент у тому самому перекрої двоопорного тряма 23. Коли ми позначимо через $y_м$, $y^0{}_м$, $y_{м2}$ та $y_{м3}$ ординати лінії впливу M, M^0 M_2 та M_3, то можемо написати:

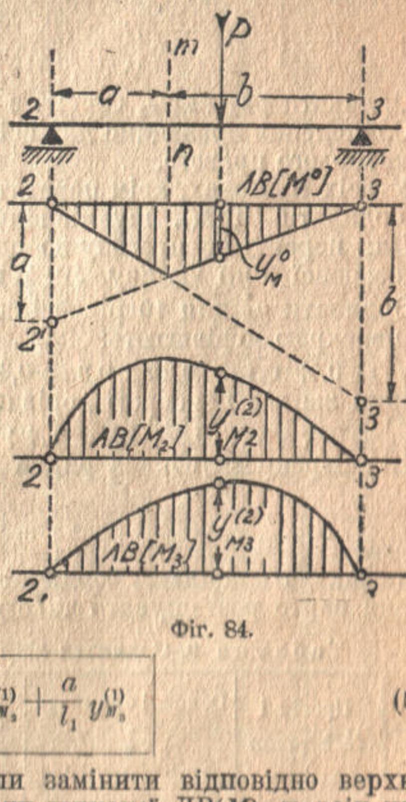
$$M = Py_м \quad M^0 = Py^0_м$$
$$M_2 = Py_{м2} \quad M_3 = Py_{м3}$$

Підставивши в рівняння (a) і скоротивши його на P, одержимо:

$$y_м = y^0_м + \frac{b}{l_2} y_{м2} + \frac{a}{l_2} y_{м5} \tag{b}$$

Основна лінія впливу, ординату якої являє собою $y^0_м$, досягає лише до меж перетятого прогону l_2. В інших прогонах цієї лінії немає; отже, перший член формули (b) перетворюється на нуль. Коли іменувати верхнім індексом прогін, в межах якого повинен пересуватися тягар P, щоб даний вираз $y_м$ був вірний, то ми повинні написати:

$$\boxed{y^{(2)}_м = y^0_м + \frac{b}{l_2} y^{(2)}_{м2} + \frac{a}{l_2} y^{(2)}_{м_3}}$$



Фіг. 84.

Коли тягар пересувається в межах першого прогону, то ординати ЛВ (M), які ми відшукуємо, визначаться формулою:

$$\boxed{y^{(1)}_м = \frac{b}{l_1} y^{(1)}_{м_2} + \frac{a}{l_1} y^{(1)}_{м_3}} \tag{57}$$

З тієї ж таки формули, коли замінити відповідно верхній індекс, можна обчислити ординати шуканої ЛВ(M) у всіх прогонах ліворуч від перетятого, коли такі прогони є.

Коли пересувати тягар P у прогонах праворуч від перетятого (в нашому прикладі третій прогін), ординати шуканої ЛВ (M) можна знайти з формули:

$$\boxed{y_M^{(3)} = \frac{b}{l_2} y_{M_2}^{(3)} + \frac{a}{l_3} y_{M_3}^{(3)}} \qquad (58)$$

Коли трям мав би ще прогони праворуч від l_3, то ординати шуканої ЛВ(M) можна обчислити з тієї таки формули (58), замінивши відповідно верхній індекс.

Обчислення можна провадити за формою табл. 8, для якої ми даємо лише заголовки колонок.

Таблиця 8. **Ординати лінії впливу згинного моменту.**

Прогін та №№ точок	y_{M2}	y_{M3}	$\frac{b}{l_2} y_{M2}$	$\frac{a}{l_2} y_{M3}$	y_M

Ординати y_{M2} та y_{M3} беремо з основної табл. 7.

Обчислення провадимо для всіх прогонів від крайнього лівого до крайнього правого.

У всіх прогонах, крім перетятого l_2, цифри останньої колонки і є ординати ЛВ(M), яку ми відшукаємо.

Для перетятого прогону до цих цифр треба додати ординату y_M^0 основної лінії впливу. Як її побудувати, показано на фіг. 84.

Ординати $\overset{\circ}{y}_M$ для 10 рівновіддалених точок прогону праворуч від перекрою дорівнюють:

$\overset{\circ}{y}_M = 0{,}0;\ 0{,}1a;\ 0{,}2a;\ 0{,}3a;\ 0{,}4a;\ 0{,}5a\ \ldots\ldots$

ліворуч же від перекрою дорівнюють:

$\overset{\circ}{y}_M = 0{,}0;\ 0{,}1b;\ 0{,}2b;\ 0{,}3b;\ 0{,}4b;\ 0{,}5b\ \ldots\ldots$

Під перекроєм обидва рядки дають однакову величину

$$\overset{\circ}{y}_M = \frac{ab}{l}\ \text{м}$$

що визначає найбільшу ординату основної лінії впливу. Обчислення варто розташувати такою таблицею:

Таблиця 9. **Ординати лінії впливу згинного моменту.**

Прогін і №№ точок	Основні ординати $\overset{\circ}{y}_M$	Поправка $\frac{b}{l_2} y_{M2} + \frac{a}{l_2} y_{M3}$	Ординати $y_M^{(2)}$

Наведений вище спосіб можна трохи спростити, коли рухомий тягар P лежить поза перетятим прогоном.

Припустімо, що тягар P лежить у першому прогоні. Коли так розташовано тягар, лінія моментів у другому прогоні проходить через правий фокус прогону, і між опорними моментами на кінцях цього прогону є співвідношення:

$$M_3 : M_2 = k'_2$$

де k'_2 — праве фокусове відношення в прогоні l_2. У такому самому співвідношенні будуть і ординати y_{M3} та y_{M2} відповідних ліній впливу, цебто:

$$y^{(1)}_{M_3} : y^{(1)}_{M_2} = -k'_2 \quad \text{звідки} \quad y^{(1)}_{M_3} = -\frac{1}{k'_2} y^{(1)}_{M_2}$$

де верхній індекс $^{(1)}$ говорить за те, що співвідношення є лише за тієї умови, що тягар пересувається в межах першого прогону.

Підставляючи знайдену величину в основну формулу (57), знаходимо:

$$y^{(1)}_{M} = \frac{b}{l_2} y^{(1)}_{M_2} + \frac{a}{l_2} y^{(1)}_{M_3} = \frac{b}{l_2} y^{(1)} - \frac{a}{l_2 k'_2} y^{(1)}_{M_2}$$

Остаточно

$$\boxed{y^{(1)}_{M} = y^{(1)}_{M2}\left(\frac{b}{l_2} = \frac{a}{l_2 k'_2}\right)} \tag{59}$$

Коли трям мав би ще прогони лівіше від першого, то для цих прогонів не втрачає сили формула (59), коли відповідно замінити верхній індекс.

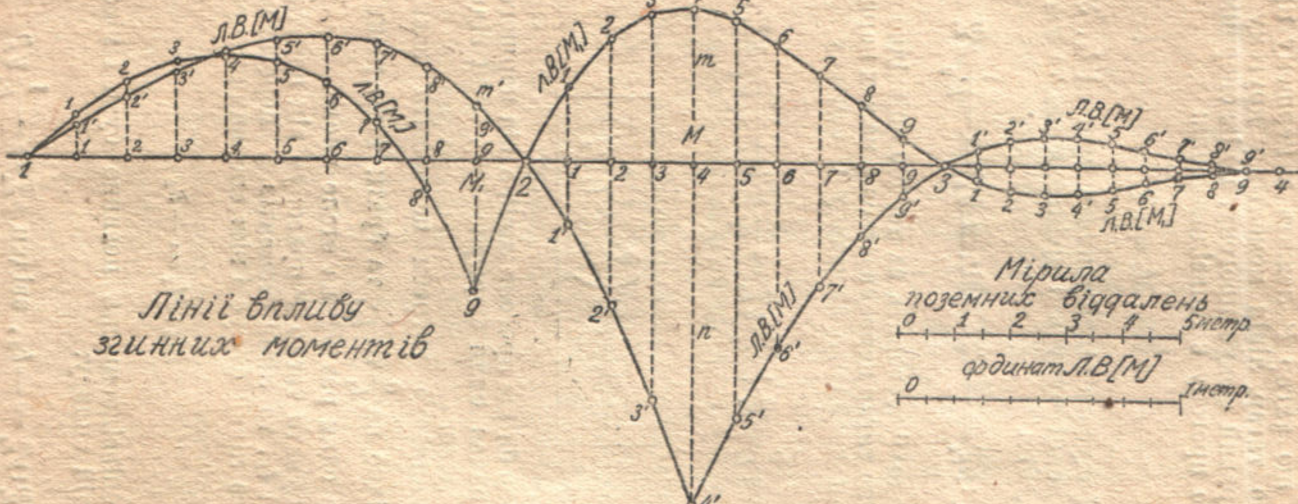
Отже, ми уникаємо потреби помножати кожну з ординат y_{M2}, y_{M3} відповідно на $\frac{b}{l_2}$ та $\frac{a}{l_2}$ та брати їхню різницю, множачи натомість лише один раз $y^{(1)}_{M_2}$ на стале число.

Коли розташувати тягар P праворуч від перетятого прогону, цебто в прогоні l_3, то лінія моментів у перетятому прогоні l_2 проходить через лівий фокус і між опорними моментами є співвідношення:

$$M_3 : M_2 = -k_2$$

Таке саме співвідношення повинне бути і між ординатами відповідних ліній впливу:

$$y^{(3)}_{M_2} : y^{(3)}_{M_3} = -k_2, \quad \text{звідки} \quad y^{(3)}_{M_2} = -\frac{1}{k_2} y^{(3)}_{M}$$


Лінії впливу
згинних моментів
Л.В.[M]
Л.В.[M₁]
Мірила
поземних віддалень
0 1 2 3 4 5 метр.
ординат Л.В.[M]
0
1 метр.

Фіг. 85

Підставляючи це значення в рівняння (58), знаходимо таку формулу для ординат ЛВ(M)

$$y_M^{(3)} = y_{M_3}^{(3)} \left[\frac{a}{l_2} - \frac{b}{l_2 k_2} \right] \tag{60}$$

Ця формула, коли замінити відповідно верхній індекс, вірна для всіх прогонів правіше від перетятого.

Повернімося до нашого прикладу. Візьмімо перекрій mn у другому прогоні завдальшки від опор на:

$$a = 0{,}4\, l_2 = 0{,}4 \times 7{,}50 = 3{,}00 \text{ м}$$
$$b = 0{,}6\, l_2 = 0{,}6 \times 7{,}50 = 4{,}50 \text{ м}$$

Коли розташувати тягар P в першому прогоні, цебто ліворуч від перетятого, маємо з форм. 59:

$$y_M^{(1)} = y_M^{(1)} \left(0{,}6 - \frac{0{,}4}{3{,}601} \right) = 0{,}489\, y_{M_2}^{(1)} \quad \text{де } 3{,}601 = k'_2$$

Обчислення зроблено в табл. 10A. Ординати $y_{M_2}^{(1)}$ взято з табл. 7. Знайдені ординати y_M виписано в останній колонці.

Коли тягар P лежить у третьому прогоні, цебто праворуч від перетятого, з формули 60 знаходимо:

$$y_M^{(3)} = y_{M_3}^{(3)} \left(0{,}4 - \frac{0{,}6}{3{,}92} \right) = 0{,}247\, y_{M_3}^{(3)}$$

Числа виписано в другій та третій колонках табл. 10B.

Щоб побудувати шукану лінію впливу в межах перетятого прогону, підставляємо у формулу (56) дані нам віддалі $a = 0{,}4\, l_2$ та $b = 0{,}6\, l_2$, і одержуємо:

$$y_M^{(2)} = \overset{\circ}{y}_M = 0{,}6\, y_{M_2}^{(2)} + 0{,}4\, y_{M_3}^{(2)}$$

Спочатку обчислюємо ординати $\overset{\circ}{y}_M$ основної лінії впливу згинного моменту в перекрої mn звичайного тряма 23. Для точок праворуч від перекрою маємо, коли $a = 3{,}00$ м; $0{,}1a = 0{,}30$ м:

$\overset{\circ}{y}_M = 0$; 0,30; 0,60; 0,90; 1,20; 1,50; 1,80 м;
ліворуч від перекрою, коли $b = 4{,}5$ та $1b = 0{,}45$:

$\overset{\circ}{y}_M = 0$; 0,45; 0,90; 1,35; 1,80 м.

Ці величини подано в колонці 2 табл. 10C.

В дальших колонках виписано величини ординат $y_{M_2}^{(2)}$ та $y_{M_3}^{(2)}$, що їх взято з табл. 7, потім знайдено добутки 0,6 $y_{M_2}^{(2)}$ та 0,4 $y_{M_3}^{(2)}$ і, нарешті, підраховано шукані ординати y_M. За цими даними на фіг. 85 нарисовано лінію впливу згинного моменту в перекрої mn нерозрізного тряма. Там таки побудовано ще ЛВ(M_x) у перекрої 6 в першому прогоні.

Таблиця 10. Лінія впливу згинного моменту в перекрої середнього прогону.

Ординати лінії впливу в прогонах:

А. Ліворуч від перетятого

№№ точок		$y^{(1)}_{M_2}$	$y^{(1)}_{M_x} = 0{,}489\, y^{(1)}_{M_2}$
0	1-ий прогін	$-0{,}000$	$0{,}000$
1		$-0{,}235$	$-0{,}115$
2		$-0{,}456$	$-0{,}223$
3		$-0{,}648$	$-0{,}317$
4		$-0{,}797$	$-0{,}390$
5		$-0{,}890$	$-0{,}435$
6		$-0{,}911$	$-0{,}446$
7		$-0{,}847$	$-0{,}414$
8		$-0{,}684$	$-0{,}345$
9		$-0{,}406$	$-0{,}198$
10		$-0{,}000$	$0{,}000$

В. Праворуч від перетятого

№№ точок		$y^{(3)}_{M_3}$	$y^{(3)}_{M_x} = 0{,}247\, y^{(3)}_{M_3}$
0	3-ій прогін	$-0{,}000$	$-0{,}000$
1		$-0{,}233$	$-0{,}058$
2		$-0{,}367$	$-0{,}091$
3		$-0{,}422$	$-0{,}104$
4		$-0{,}413$	$-0{,}102$
5		$-0{,}359$	$-0{,}089$
6		$-0{,}276$	$-0{,}045$
7		$-0{,}181$	$-0{,}045$
8		$-0{,}096$	$-0{,}024$
9		$-0{,}026$	$-0{,}006$
10		$-0{,}000$	$-0{,}000$

С. У перетятому прогоні

	№№ точок	y_M	$y^{(2)}_{M_2}$	$y^{(2)}_{M_3}$	$0{,}6\, y^{(2)}_{M_2}$	$0{,}4\, y^{(2)}_{M_3}$	$y^{(2)}_{M_x}$
2-й прогін	0	$+0{,}000$	$-0{,}000$	$-0{,}000$	$-0{,}000$	$-0{,}000$	$+0{,}000$
	1	$+0{,}450$	$-0{,}295$	$-0{,}124$	$-0{,}177$	$-0{,}050$	$+0{,}223$
	2	$+0{,}900$	$-0{,}484$	$-0{,}265$	$-0{,}291$	$-0{,}106$	$+0{,}503$
	3	$+1{,}350$	$-0{,}579$	$-0{,}408$	$-0{,}338$	$-0{,}163$	$+0{,}849$
	4	$+1{,}800$	$-0{,}602$	$-0{,}534$	$-0{,}361$	$-0{,}214$	$+1{,}225$
	5	$+1{,}500$	$-0{,}558$	$-0{,}626$	$-0{,}335$	$-0{,}250$	$+0{,}915$
	6	$+1{,}200$	$-0{,}473$	$-0{,}669$	$-0{,}284$	$-0{,}267$	$+0{,}649$
	7	$+0{,}900$	$-0{,}358$	$-0{,}644$	$-0{,}215$	$-0{,}258$	$+0{,}427$
	8	$+0{,}600$	$-0{,}231$	$-0{,}537$	$-0{,}139$	$-0{,}215$	$+0{,}246$
	9	$+0{,}300$	$-0{,}106$	$-0{,}327$	$-0{,}064$	$-0{,}131$	$+0{,}105$
	10	$+0{,}000$	$-0{,}000$	$-0{,}000$	$-0{,}000$	$-0{,}000$	$+0{,}000$

§ 47. Лінія впливу перерізної сили.

Візьмім перекрій у середньому прогоні l_2 нерозрізного тряма. Перерізну силу Q в цьому перекрої можна визначити з формули:

$$Q = Q_0 - \frac{M_2}{l_2} + \frac{M_3}{l_2}$$

Із цієї формули виходить, що ординати шуканої ЛВ(Q) можна подати, як суму

$$\boxed{y^{(2)}_Q = \overset{0}{y}_Q - \frac{1}{l_2}\left[y^{(2)}_{M_2} - y^{(2)}_{M_3}\right]} \qquad (61)$$

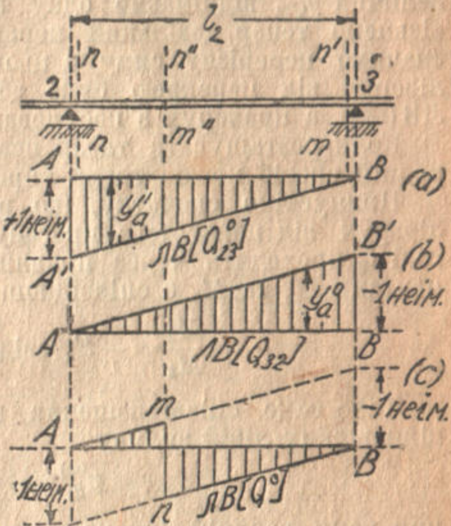
де $\overset{0}{y}_Q$ — ордината ЛВ(Q), цебто лінія впливу перерізної сили в тому таки перекрої звичайного тряма l_2.

Ця лінія (фіг. 86c) досягає лише меж перетятого прогону l_2; в інших прогонах ординати y_Q^0 перетворюються на нуль. Тому наведений вираз для y_Q вірний лише за тієї умови, коли тягар розташовано в межах перетятого прогону l_2, що й відзначено верхнім індексом (²).

Запам'ятаймо, що ординати ЛВ (Q) повинні бути числа неіменовані, бо коли помножати тягар P в тоннах на ординату y_Q, ми повинні одержати перерізну силу Q також у тоннах.

Величина основних ординат y_Q, залежить від того, як розташовано перекрій у даному прогоні. Візьмім перекрій у другому прогоні безконечно близько до лівої опори 2; позначмо перерізну силу в цьому перекрої через Q_{23}.

Лінія вливу Q_{23}^0 має вигляд прямокутнього трикутника BAA' (фіг. 86a) і ординати її для 10 рівновіддалених точок відповідно дорівнюють:



Фіг. 86.

$$y_{Q_{23}}^0 = 1;\ 0{,}9;\ 0{,}8;\ 0{,}7;\ \ldots\ldots\ 0{,}1;\ 0. \qquad \text{(a)}$$

Візьмім тепер перекрій $m'n'$ безконечно близько до правої опори того таки прогону l_2. Перерізну силу в цьому перекрої позначмо через Q_{32}. Лінія впливу для Q_{32}^0 має форму трикутника ABB' (фіг. 86b); ординати її одержимо відніманням із заздалегідь знайдених ординат $y_{Q_{23}}^0$ одної неіменованої одиниці.

Побудуймо спочатку ЛВ (Q_{23}). Обчислення провадимо на зразок дальшої таблиці.

Таблиця 11. Ординати лінії впливу Q_{23}.

Прогони та №№ точок	Ординати		Різниця ординат $\Delta y_2 = y_{M_2} - y_{M_3}$	Ординати $y_{Q_{23}} = -\frac{\Delta y_2}{l_2}$
	y_{M_2}	y_{M_3}		

Зразок цієї таблиці придатний для всіх прогонів. Ординати y_{M2} та y_{M3} беремо із основної табл. 7.

У всіх прогонах, крім перетятого l_2, числа останньої колонки і є ординати ЛВ (Q_{23}).

У перетятому прогоні до цих чисел треба додати основні ординати $\overset{0}{y}_{Q32}$, що їх наведено вище (ряд. a).

Щоб обчислити ординати ліній впливу Q_{32}, із знайдених величин y_{Q23} віднімаємо одну неіменовану одиницю. Коли ми візьмемо тепер довільний перекрій у тому таки прогоні й позначимо перерізну силу в цьому перекрої через Q, то ЛВ (Q) ліворуч від перекрою буде збігатися з побудованою раніше ЛВ (Q_{23}), а праворуч з побудованою раніше ЛВ (Q_{32}).

Коли розташувати тягар поза перетятим прогоном, то попередній спосіб можна трохи спростити.

Припустімо спочатку, що рухомий тягар P міститься десь ліворуч від перетятого прогону l_2. Тоді лінія моментів у прогоні l_2 проходить через правий фокус F'_2 і між опорними моментами M_2 та M_3 є співвідношення

$$\frac{M_2}{M_3} = -k'_2 \text{ звідки } M_3 = -\frac{M_2}{k'_2}$$

Таке саме співвідношення повинне бути й між ординатами відповідних ліній впливу

$$y_{M_3}^{(m)} = -y_{M_2}^{(m)} : k'_2$$

при чому верхній індекс m повинен бути менший за індекс перетятого прогону 2, бо співвідношення це вірне лише для прогонів, що лежать лівіше за l_2. Крім того, коли розташувати тягар поза межами перетятого прогону, ординати основної ЛВ (Q^0) перетворюються на нуль. Зробивши підставлення в основну формулу (62), їй можна надати такого вигляду:

$$\boxed{y_Q^{(m)} = -\frac{1}{l_2}\left[1 + \frac{1}{k'_2}\right] y_{M_2}^{(m)}} \qquad (62)$$

при чому верхньому індексові ^{m} доведеться надавати послідовно значення $i = 1$, $i = 2 \ldots\ldots$ відповідно до розташування тягара в окремих прогонах лівіше перетятого прогону l_i.

З тих самих причин, коли тягар P розташовано десь правіше перетятого прогону, ординати шуканої ЛВ (Q) можна обчислити з формули:

$$\boxed{y_Q^{(n)} = +\frac{1}{l_2}\left[1 + \frac{1}{k_2}\right] y_{M_3}^{(n)}} \qquad (63)$$

в якій верхньому індексові ^{n} ми повинні надавати послідовно значення 3, 4 … Застосуймо ці висновки до нашого числового прикладу.

А. Візьмім перекрій у другому прогоні безконечно близько до лівої опори 2 і побудуймо лінію впливу перерізної сили Q_{23} в цьому перекрої.

У прогонах ліворуч від перетятого ординати ЛВ (Q_{23}) обчислюємо з формули (62), яка, коли підставити в неї величини $k'_2 = 3{,}601$, набирає вигляду:

$$y^{(1)}_{Q_{23}} = -\frac{1}{l_2}\left[1+\frac{1}{k'_2}\right] y^{(1)}_{M_2} =$$

$$= -\frac{1}{7{,}50}\left[1+\frac{1}{3{,}601}\right] y^{(1)}_{M_2} = -0{,}1705\, y^{(1)}_{M_2}$$

Обчислення для цього прогону зроблено в табл. 12*A*.

Для прогонів, що праворуч від перетятого, ординати ЛВ (Q_{23}) обчислюємо з формули (63), яка, коли підставити в неї величини $k_2 = 3{,}920$, набирає вигляду:

$$y^{(3)}_{Q_{23}} = +\frac{1}{l_2}\left[1+\frac{1}{k_2}\right] y^{(3)}_{M_2} =$$

$$= \frac{1}{7{,}50}\left[1+\frac{1}{3{,}920}\right] y^{(3)}_{M_2} = +0{,}1673\, y^{(3)}_{M}$$

Таблиця 12*A*. Ординати ЛВ (Q) поза перетятим прогоном.

Прогін	та №№ точок	$y^{(1)}_{M_2}$	$y_{Q_{23}} = -0{,}1705\, y^{(1)}_{M_2}$
1-й прогін	0	$-0{,}000$	$+0{,}000$
	1	$-0{,}235$	$+0{,}040$
	2	$-0{,}456$	$+0{,}078$
	3	$-0{,}648$	$+0{,}110$
	4	$-0{,}797$	$+0{,}136$
	5	$-0{,}890$	$+0{,}152$
	6	$-0{,}911$	$+0{,}155$
	7	$-0{,}847$	$+0{,}144$
	8	$-0{,}684$	$+0{,}117$
	9	$-0{,}406$	$+0{,}069$
	10	$-0{,}000$	$+0{,}000$

Прогін	та №№ точок	$y^{(3)}_{M_2}$	$y_{Q_{23}} = +0{,}1673\, y^{(3)}_{M_2}$
3- прогін	0	$-0{,}000$	$-0{,}000$
	1	$-0{,}233$	$-0{,}039$
	2	$-0{,}367$	$-0{,}061$
	3	$-0{,}422$	$-0{,}071$
	4	$-0{,}413$	$-0{,}069$
	5	$-0{,}359$	$-0{,}060$
	6	$-0{,}276$	$-0{,}046$
	7	$-0{,}181$	$-0{,}030$
	8	$-0{,}096$	$-0{,}016$
	9	$-0{,}026$	$-0{,}004$
	10	$-0{,}000$	$-0{,}000$

Для перетятого прогону обчислюємо ординати $y^{(2)}_Q$ з формули (61), яка, коли підставити числа, набирає вигляду:

$$y^{(2)} = y^{0}_{Q} + \frac{1}{7{,}50}\left(y^{(2)}_{M_3} - y^{(2)}_{M_2}\right)$$

Обчислення зроблено в табл. 12*B*. Саму ЛВ (Q_{23}) побудовано на фіг. 87.

Таблиця 12 *B*. Ординати ЛВ (Q) в перетятому прогоні.

Прогін №№ точок		$y_{M_2}^{(2)}$	$y_{M_3}^{(2)}$	Δy_2	$\Delta y_2 : l_2$	y_Q^0	$y_{Q_{23}}^{(2)}$	$y_{Q_{32}}^{(2)}$
0	1-й прогін	—0,000	—0.000	—0,000	—0,000	+1,000	+1,000	—0,000
1		—0.295	—0,124	—0,171	—0,023	+0,900	+0,923	—0,073
2		—0,484	—0,265	—0,219	—0,029	+0,800	+0,829	—0,171
3		—0,579	—0,408	—0,171	—0,023	+0,700	+0,723	—0,277
4		—0,602	—0.534	—0,068	—0,009	+0,600	+0,609	—0,391
5		—0,558	—0.626	+0,068	—0.006	+0,500	+0,494	—0,506
6		—0,478	—0,669	+0,191	+0,025	+0,400	+0,375	—0,625
7		—0,358	—0,644	+0,286	+0,038	+0,300	+0,262	—0,738
8		—0,231	—0,537	+0,306	+0,041	+0,200	+0,159	—0,841
9		—0,106	—0,327	+0,221	+0,029	+0,100	+0,071	—0,929
10		—0,000	—0,000	+0,000	+0,000	+0,000	+0,000	—1,000

Візьмемо перекрій в тому ж таки другому прогоні, але безконечно близько до правої опори 3. Перерізна сила в цьому перекрої буде Q_{32}. Лінію впливу для Q_{32} одержуємо із побудованої раніше ЛВ (Q_{32}), зменшуючи на одиницю її ординати в межах перетятого прогону. Праворуч і ліворуч від цього прогону обидві лінії ЛВ (Q_{23}) та ЛВ (Q_{32}) збігаються.

Б. **Візьмемо перекрій у першому прогоні** безконечно близько до лівої опори 1. Перерізна сила в цьому перекрої буде Q_{12}. Взявши до уваги, що опорний момент M_1, отже, й ординати y_{M_1}, завжди дорівнюють нулеві (опора 1 є суставна), можемо основну формулу (61) для $y_{Q_{12}}$ переписати так:

$$\boxed{y_{Q_{12}}^{(1)} = y_Q^0 + \frac{1}{l_1} y_{M_2}^{(1)}} \quad \text{де } l_1 = 9{,}00 \text{ м} \qquad (61')$$

Спочатку обчислюємо ординати y_Q^0 основної лінії впливу із поданого вже рядка (a). Ці числа подано в колонці 2 табл. 13. Потім виписуємо величини $y_{M_2}^{(1)}$ із основної табл. 7, ділимо їх на l_1 і додаємо до y_Q^0. Це будуть ординати ліній впливу ЛВ (Q_{12}).

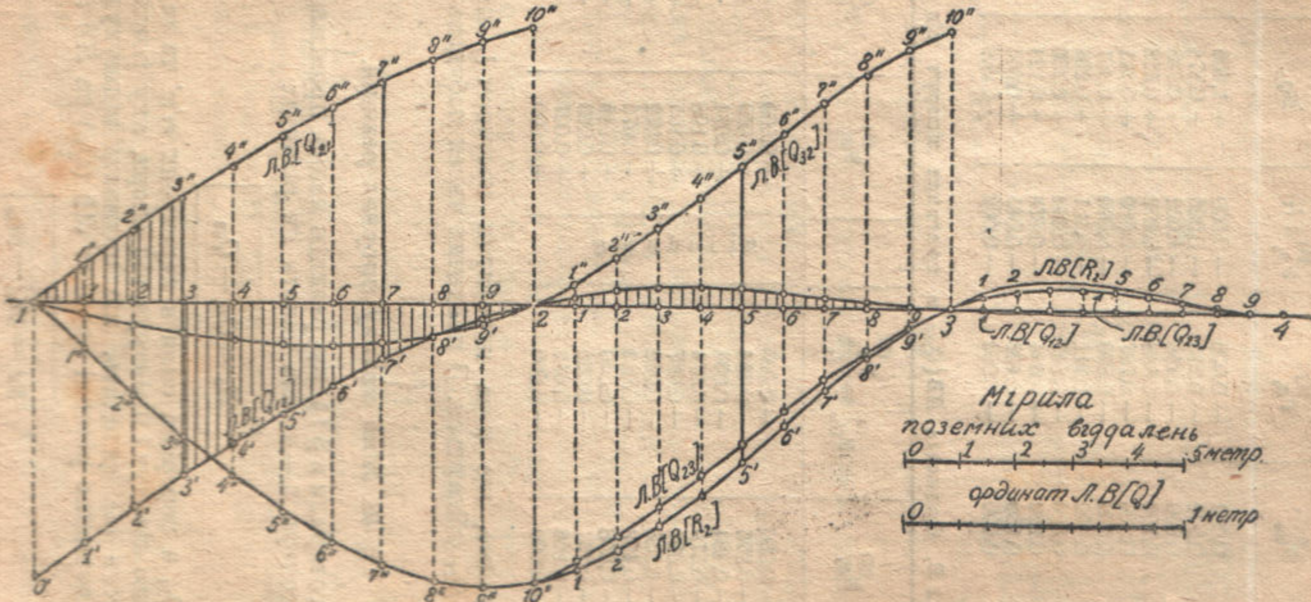
Віднімаючи з них 1, знаходимо ординати ЛВ (Q_{21}).

Обчислення вміщено в табл. 13*A* та *B*. (див. ст. 115).

Коли тягар P лежить у другому та третьому прогонах, ординати ЛВ (Q_{12}), обчислюємо з формули:

$$y_{Q_{12}}^{(n)} = \frac{1}{l_1} y_{M_2}^{(n)}$$

яку одержуємо з попередньої, закресливши в ній перший член Ординати y_{M_2} у другому та третьому прогоні беремо із основної табл. 7. Обчислення зроблено в табл. 13*B*.


Л.В[Q_{21}]
Л.В[Q_{32}]
Л.В[Q_{12}]
Л.В[Q_{23}]
Л.В[R_2]
ЛВ[R_1]
Л.В[Q_{12}]
Л.В[Q_{23}]
Мірила
поземних віддалень
0 1 2 3 4 5 метр.
ординат Л.В[Q]
0 1 метр

Фіг. 87.

Таблиця 13 *A*. **Ординати лінії впливу Q_{12} та Q_{21} в першому прогоні.**

Прогін та №№ точок		$y^{0}_{Q_{12}}$	$y^{(1)}_{M_2}$	$y^{(1)}_{M_2} : l_1$	$y_{Q_{12}}$	$y_{Q_{21}}$
1-й прогін	0	0,000	−0,000	−0,000	+1,000	−0,000
	1	0,900	−0,235	−0,026	+0,874	−0,126
	2	0,800	−0,456	−0,052	+0,748	−0,252
	3	0,700	−0,648	−0,072	+0,628	−0,372
	4	0,600	−0,797	−0,089	+0,511	−0,489
	5	0,500	−0,890	−0,099	+0,401	−0,598
	6	0,400	−0,911	−0,101	+0,299	−0,701
	7	0,300	−0,847	−0,094	+0,206	−0,794
	8	0,200	−0,684	−0,076	+0,124	−0,876
	9	0,100	−0,406	−0,045	+0,055	−0,945
	10	0,000	−0,000	−0,000	+0,000	−0,000

Таблиця 13 *B*. **Ордината ЛВ (Q_{12}) в прогонах ліворуч від перетятого.**

Прогін та №№ точок		$y^{(2)}_{M_2}$	$y^{(2)}_{Q_{12}} = \frac{y^{(2)}_{M_2}}{l_1}$		$y^{(3)}_{M_2}$	$y^{(3)}_{Q_{12}} = \frac{y_{M_2}}{l_1}$
2-й прогін	0	−0,000	−0,000	3-й прогін	+0,000	−0,000
	1	−0,295	−0,033		+0,059	−0,006
	2	−0,484	−0,054		+0,094	−0,010
	3	−0,579	−0,064		+0,108	−0,012
	4	−0,602	−0,067		+0,105	−0,012
	5	−0,558	−0,062		+0,092	−0,010
	6	−0,473	−0,053		+0,070	−0,008
	7	−0,358	−0,050		+0,046	−0,005
	8	−0,231	−0,026		+0,023	−0,003
	9	−0,106	−0,012		+0,007	−0,001
	10	−0,000	−0,000		+0,000	−0,000

Запам'ятаймо, що поза перетятим прогоном l_1 лінії впливу для Q_{12} та Q_{21} збігаються. З найдених чисел побудовано ЛВ (Q_{12}) та ЛВ (Q_{21}).

§ 48. Лінії впливу опорних реакцій.

Ми вже говорили в § 14, що реакцію якоїсь проміжної опори,— наприклад, опори 3,—можна подати як різницю:

$$\boxed{R_3 = Q_{34} - Q_{32}} \tag{a}$$

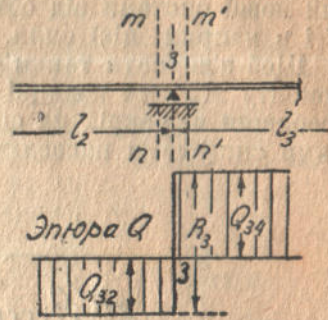
де Q_{32} та Q_{34} є перерізні сили в перекроях $m'n'$ та mn (фіг. 88) безпосередньо ліворуч і праворуч від опори, яку розглядаємо.

Із рівности (a) виходить, що ордината відшукуваної лінії впливу R_3 дорівнює різниці ординат ЛВ (Q_{34}) та ЛВ (Q_{32}):

$$\boxed{y_{R_3} = y_{Q_{34}} - y_{Q_{32}}} \tag{64}$$

Біля крайньої лівої опори 1 нема перекроїв безпосередньо ліворуч, а тому другий член у формулі (64) зникає й ординати ЛВ (R_1) визначається так:

$$\boxed{y_{R_1} = y_{Q_{12}}} \tag{65}$$



Фіг. 88.

Ця формула вірна однаково при суставній і при закріпленій першій опорі.

Для крайньої правої опори зникає перший член у формулі (64) і ординати ЛВ (R_n) треба обчислювати з формули:

$$\boxed{y_{Rn} = - y_{Qn,\, n-1}} \tag{66}$$

На фіг. 88 побудовано лінії впливу реакцій опор R_1 та R_2.

§ 49. Дані про загальний вигляд ліній впливу.

Коли аналітично будувати лінію впливу, легко помилитися не тільки щодо величини, але й щодо знаку одержаних чисел. Перший спосіб виявити таку помилку є побудова кривих із одержаних ординат і перевірка плавности їх. Другий спосіб дає наведене нижче правило, що базується на теоремі про взаємність переміщень; його можна застосовувати до будь-яких статично-невизначних систем. Правило це можна зформулювати так:

Коли дано n раз статично-невизначну систему, наприклад, нерозрізний трям, показаний на фіг. 89a, то лінія впливу якоїсь зайвої невідомої x являє собою взяту в певному мірилі лінію прогину попередньої $n-1$ раз статично-невизначної системи від обтягу $x = 1$ т. Попередню $n-1$ раз статичноневизначну систему одержимо з даної, відкинувши ті пов'язі, що спричиняють зайву невідому x.

Наприклад, лінія впливу для реакції опори x є відповідно змінена лінія прогину тряма, показаного на фіг. 89b, який обтяжує сила $x = 1$ т. Трям цей можна одержати, відкинувши опору 2 і приклавши, замість неї, силу $x = 1$ т.

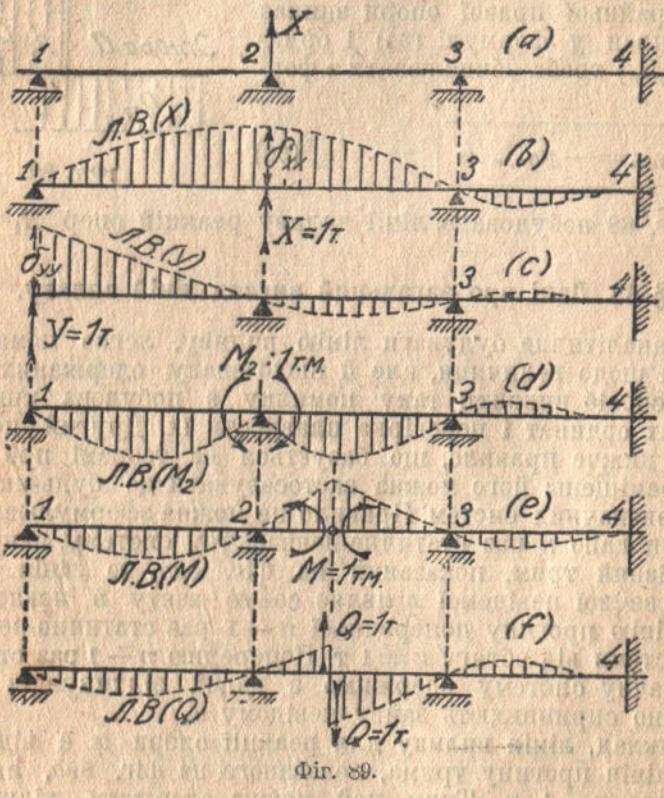
Ступінь статичної невизначности її на одиницю менша проти даної системи (2 замість 3). Мірило зміни ординат лінії прогину визначаємо числом:

$$m = 1 : \delta_{xx}$$

де δ_{xx} — прогін нового тряма під силою X і в напрямі сили X.

З тих самих міркувань лінія впливу опорної реакції $У$ є змінена лінія прогину від обтягу $У = 1$ т, прикладеного до тряма, зображеного на фіг. 89c. Трям цей одержимо із даного, відкидаючи опору 1. Ступінь статичної невизначности її дорівнює 2, цебто на 1 менша проти ступеня статичної невизначности даної системи. Мірило зміни ординат $1 : \delta_{yy}$, де δ_{yy} є прогин нової системи від обтягу $У = 1_т$ в точці прикладення сили $У$ і в напрямі цієї сили.

Щоб з'ясувати таким чином вигляд лінії впливу опорного моменту M_2, ми повинні поділити дану систему на дві (фіг. 89*d*), зробивши перекрій на опорі 2. Взаємочин між одержаними окремими системами поновлюємо, прикладаючи два рівні й проти-



Фіг. 89.

лежні моменти $M_2 = 1$ тм, що постають у зробленому перекрої. Лінія прогину цих нових трямів і буде лінія впливу M_2.

Мірило зміни ординат визначимо числом:

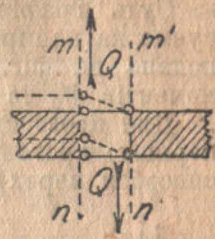
$$m = 1 : \varphi_{мм}$$

де $\varphi_{мм}$ є кут взаємного поверту перекроїв на опорі 2 чи, інакше кажучи, кутове розходження цих перекроїв від обтягу $M_2 = 1$ тм.

Запам'ятаймо, що з одержаних трямів лівий 1 — 2 є статичновизначний, але правий трям 2 — 3 — 4 двічі статично-невизначний.

Щоб з'ясувати вигляд лінії впливу згинного моменту в перекрої середнього прогону (фіг. 89*e*), поділимо дану систему на дві, заводячи сустав у показаний перекрій. Зв'язок між частинами поновлюємо, прикладаючи два рівні і протилежні моменти $M=1$ тм. Лінія прогину одержаних консольних трямів, зв'язаних суставом, і буде шукана ЛВ (M).

Коли ми хочемо з'ясувати характер ЛВ(Q) в перекрої середнього прогону (фіг. 90), то проводимо перекрій у цьому місці і злучаємо кінцеві попереччя одержаних частин за допомогою двох рівнобіжних стрижнів (фіг. 90).



Фіг. 90.

Таке злучення можливе лише при рівнобіжному зсуві однієї частини відносно другої, але воно на дає змоги їм взаємно обертатися. Взаємочин між частинами поновляємо, прикладаючи дві рівні і протилежні сили $Q=1$ т. Лінія прогину одержаної системи від чину цих сил і буде шукана $ЛВ(Q)$.

РОЗДІЛ СЬОМИЙ.

ГРАФІЧНА ПОБУДОВА ЛІНІЙ ВПЛИВУ НЕРОЗРІЗНИХ ТРЯМІВ.

§ 50. Суть графічного способу.

Графічна побудова ліній впливу сходить до багаторазового розрахунку нерозрізного тряма за способом перехресних відтинків та до певного перегрупування одержаних даних. Але перше ніж розпочати з'ясовувати цей спосіб, дамо нове визначення лінії впливу. Ми сказали, що лінія впливу якогось чинника, наприклад, моменту M, є графік зміни сучинника пропорційности $У_м$ у виразі

$$M = Py_м \tag{a}$$

коли пересувати по трямові тягар P. Поділивши обидві частини цієї рівности на P, знаходимо:

$$y_м = M : P \tag{b}$$

Із рівности (b) виходить, що $y_м$, цебто ордината лінії впливу M, є не що інше, як момент, що припадає на 1 тонну рухомого тягара. Коли тягар P дорівнюватиме одиниці (1 тонна), то ордината $y_м$ дорівнюватиме M і графік зміни $y_м$ буде водночас графіком M, коли пересувати по трямові тягар $P=1$. Узагальнюючи цей висновок, ми можемо сказати, що:

Лінія впливу для якогось чинника є графік зміни цього чинника, коли пересувати по трямові тягар P, що дорівнює одиниці.

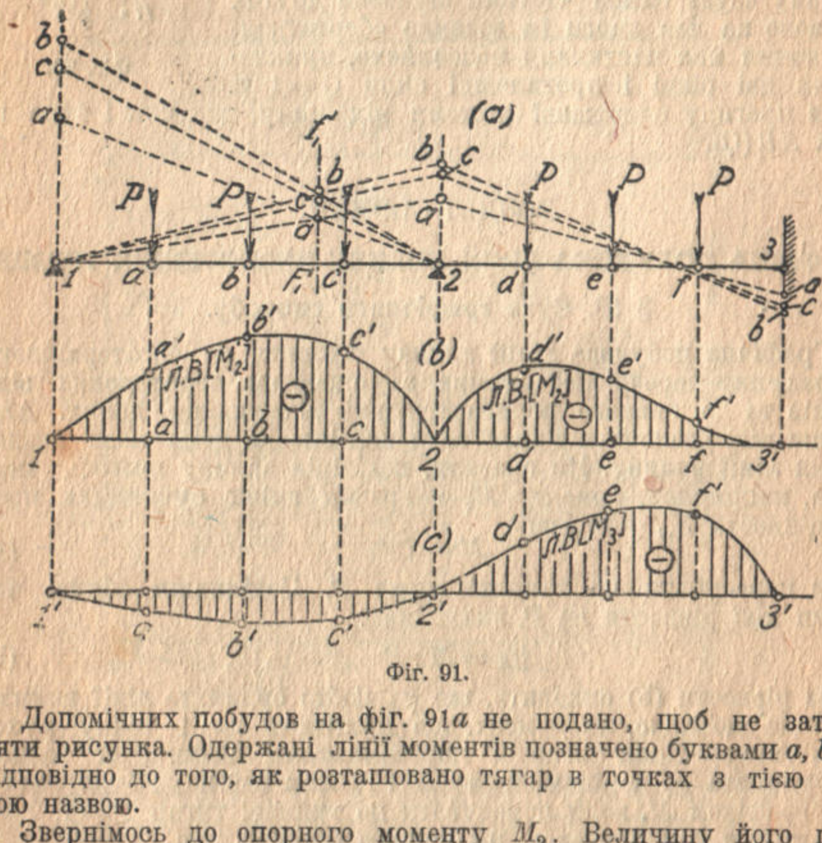
Ордината ЛВ(M), що визначає момент, який припадає на 1 тонну рухомого тягара, повинна мати розмірність:

$$y_м = \frac{TM}{T} = M$$

Нове визначення буде вірне й для ЛВ (Q) та ЛВ (R), з тією різницею, що ординати y_Q та y_R цих ліній впливу є неіменовані числа.

Суть графічного способу побудови ліній впливу ми з'ясуємо на найпростішому прикладі. Нехай дано трям, що його подано на фіг. 91*a*. Треба побудувати лінії впливу опорних моментів M_2 та M_3.

Для цього ставимо тягар $P=1$ послідовно в точках *a*, *b*, *c* першого прогону і для кожного положення тягара будуємо за способом перехресних відтинків лінії впливу.



Фіг. 91.

Допоміжних побудов на фіг. 91*a* не подано, щоб не затемняти рисунка. Одержані лінії моментів позначено буквами *a*, *b*, *c*, відповідно до того, як розташовано тягар в точках з тією самою назвою.

Звернімось до опорного моменту M_2. Величину його при обраному положенні тягара $P=1$ зображаємо відтинками $2a$, $2b$, $2c$, які відтинають лінії моментів на прямовисі опори 2. Отже, ми маємо потрібні дані про зміну моменту M_2, коли пересувати тягар $P=1$ т в межах першого прогону. Лишається лише подати цю зміну в вигляді графіка.

При першому положенні тягара P (в точці *a*) момент M_2 зобразимо відтинком $2a$. Беремо цей відтинок циркулем і переносимо його з прямовиса опори 2 на прямовис точки *a*, де й відкладаємо від якоїсь нульової осі 13 (фіг. 91b). Таким чином знаходимо точку a'. Відповідно до цього відтинок $2b$, що являє собою величину моменту M_2, коли тягар міститься в точці b, переносимо з прямовиса опори 2 на прямовис точки b, де відкладаємо від тієї самої нульової осі і знаходимо точку b'. Аналогічно робимо й з відтинком $2c$. Сполучивши плавною кривою одержані точки a', b', c', ми знайдемо графік зміни M_2 в наслідок пересування тягара $P=1$ т в межах першого прогону. Цей графік, згідно з нашим новим визначенням, і буде частиною шуканої ЛВ(M_2) в першому прогоні.

Дослідімо тепер обтяг другого прогону. Рухомий тягар $P=1$ т ставимо послідовно в точках d, e, f цього прогону. Для кожного розташування тягара будуємо за способом перехресних відтинків лінії моментів[1].

При цьому на прямовисі опори 2 визначаємо відтинки $2d$, $2e$, $2f$, що зображають величину моменту M_2, коли ставити тягар відповідно в точках d, e, f. Відтинок $2d$ відкладаємо від тієї ж таки нульової осі $1-3$ (фіг. 91b) на прямовисі точки d; відтинок $2e$ — на прямовисі точки l і т. д.

Сполучивши одержані таким чином точки d', e', f' плавною кривою, ми знайдемо графік зміни моменту M_2, коли пересувати тягар $P=1$ в межах другого прогону. Цей графік і становитиме ЛВ(M_2) у другому прогоні.

Тепер легко зрозуміти, як можна побудувати лінію впливу опорного моменту M_3. Усі потрібні дані для цієї побудови ми маємо; лишається тільки перегрупувати їх.

Коли поставити тягар у точках a, b, c, величини моменту M_3 визначаться відповідно відтинкам $3a$, $3b$, $3c$, які відтяли лінії моментів на прямовисі опори 3. Кожний із цих відтинків відкладаємо від довільно вибраної поземої осі $1-3$ на прямовисах відповідних точок a, b, c (фіг. 91c). Сполучивши одержані точки a', b', c' плавною кривою, знайдемо лінію впливу M_3 в межах першого прогону. Так само робимо з відтинками $3d$, $3e$, $3f$, які одержуємо на прямовисі опори 3, коли ставити тягар у точках d, e, f другого прогону. Якби трям мав ще третій прогін, то нам довелося б досліджувати так само обтяг і цього прогону.

Щоб уникнути помилок, ординати ліній впливу треба відкладати від нульової осі в тих самих напрямах, в яких одержуємо відтинки на прямовисах опор, коли будуємо лінію моментів для різних положень тягара. Отже, ми бачимо, що графічна побудова ліній впливу сходить до повторного розрахунку перозрізного тряма при певних положеннях тягара $P=1$ та до певного перегрупування одержаних даних. Деталі цих розрахунків ми продемонструємо на окремому числовому прикладі.

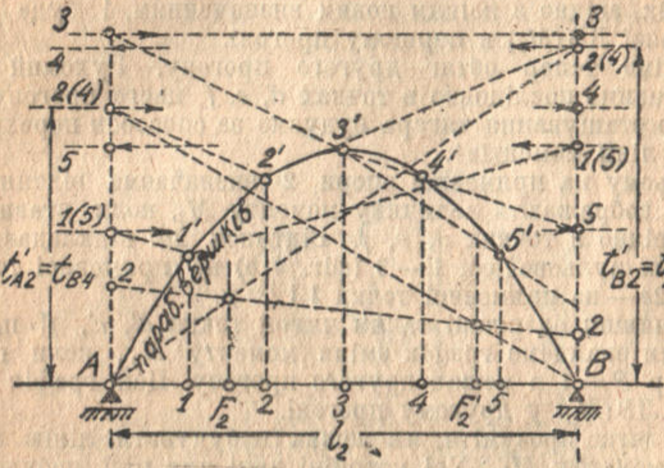
[1] Щоб не затемнювати рисунка, ліній моментів, коли обтяжено другий прогін, не показано на фіг. 91.

§ 51. Приклад графічної побудови ліній впливу.

Нехай дано нерозрізний трям, що його подано на фіг. 92. Треба побудувати всі характерні лінії впливу. Розрахунок провадимо за таким порядком.

Підготовча робота. 1) Обчислюємо зведені довжини прогонів за правилами, що їх подано в § 36. При однаковій цупкості EJ у всіх прогонах цей пункт відпадає.

2) Знаходимо праві й ліві фокуси за допомогою побудов, що їх подано в §§ 21 — 39, відповідно для сталої та змінної цупкости EJ прогонів.



Фіг. 92.

Дослідження обтягу першого прогону.

Установлення сили $P = 1$ т.

Ставимо рухомий тягар $P = 1$ послідовно в точках 1, 2, 3 . . . першого прогону. Число цих точок треба брати рівне 5, 7 чи 9, чому відповідає розбивка прогону на 6, 8 чи 10 рівних частин. Коли точок менше, характер лінії впливу визначається не зовсім точно; при більшому числі надто затемнюється рисунок лініями й точками.

Для кожного положення сили P будуємо за способом перехресних відтинків епюру згинних моментів, зведену до поземої осі. Запам'ятаймо, однак, що в цій побудові треба зробити деякі поправки. Дійсно, раніше ми шукали, так би мовити „абсолютні“ [1] величини моментів, які визначено в тонно-метрах, і для цього обчислювали відтинки t_A та t_B з формул, поданих у § 24. Тепер нас цікавлять „відносні“ величини моментів, цебто моменти, що припадають на 1 тонну рухомої сили. Їх одержуємо із абсолютних, ділячи на тягар P, визначаємо метрами і вони є не що інше, як ординати відшукуваних ЛВ (M), згідно з рівністю:

$$y_M = M : P$$

Побудова перехресних відтинків t_A та t_B.

Щоб знайти згадані вище „відносні“ моменти, нам доведеться поділити на P й відтинки t_A та t_B. Нові величини, що входять до розрахунку замість

---

[1] Слово „абсолютний“ не показує тут аритметичної величини моментів, а взято лише як протилежність слову „відносний“.

перехресних відтинків, ми позначимо літерами t'_A та t'_B. Тому що відтинки t_A та t_B визначено в тонно-метрах, то величини t'_A та t'_B, очевидно, визначаються метрами і їх можна знайти з формул:

$$t'_A = \frac{t_A}{P} = -\frac{ab}{l^2}(l+a); \quad t'_B = \frac{t_B}{P} = -\frac{ab}{l^2}(l+b) \tag{64}$$

Відтинки t_A та t_B ми знаходимо графічно з побудови, поданої в § 23, при чому нам треба знати найбільшу ординату y_{max} основної епюри моментів, яку визначаємо з формули

$$y_{max} = P\frac{ab}{l}$$

Очевидно, щоб знайти відтинки t'_A та t'_B ми можемо використати цю саму побудову, але за вихідну дану ми повинні тепер узяти не ординату y_{max}, а новий відтинок y'_{max}, що дорівнює

$$y'_{max} = \frac{y_{max}}{P} = \frac{ab}{l} = \frac{a(l-a)}{l}$$

Легко побачити, що цей відтинок визначається в метрах і змінюється для окремих точок прогону за законом параболі. Цю параболю зватимемо параболею вершків. Для середнього перекрою прогону відтинок y'_{max} досягає величини:

$$f = y'_{max} = \frac{l.l}{2.2.l} = \frac{1}{4}l$$

Як графічно знаходити y_{max} для п'яти точок прогону l_1, показано на фіг. 92. Побудова сходить до рисування параболі на тятиві $AB = l_2$ з найбільшою ординатою посередині, що дорівнює $f = \frac{1}{4}l_2$. Мірило ординат цієї параболі, отже й стрілки f, бажано взяти вдвоє чи втроє більше, ніж мірило довжин l, інакше ЛВ (M) будуть не досить опуклі.

Коли будувати відтинки t'_A та t'_B, треба використати симетрію окремих точок поділу прогону. На фіг. 92 подано побудову відтинків t'_A та t'_B для точки 2. Через те, що точка 2 симетрична з точкою 4, то правий відтинок t'_{B_2} для точки 2 дорівнюватиме лівому відтинкові t'_{A_4} для точки 4. Тому переносимо точку 2 (вершок відтинка t'_{B_2}) поземо з прямовиса опори B на прямовис A і ставимо біля неї цифру 4. Це буде вершок відтинка t'_{A_4}. Відповідно до цього точка 2 (вершок відтинка t'_{A_2}), яку перенесли з прямовиса A на прямовис B, визначає вершок 4 відтинка t'_{B_4}.

Отже, коли поділено обтяжений прогін на рівні дільниці, будуємо відтинки t'_A та t'_B лише для одної половини прогону.

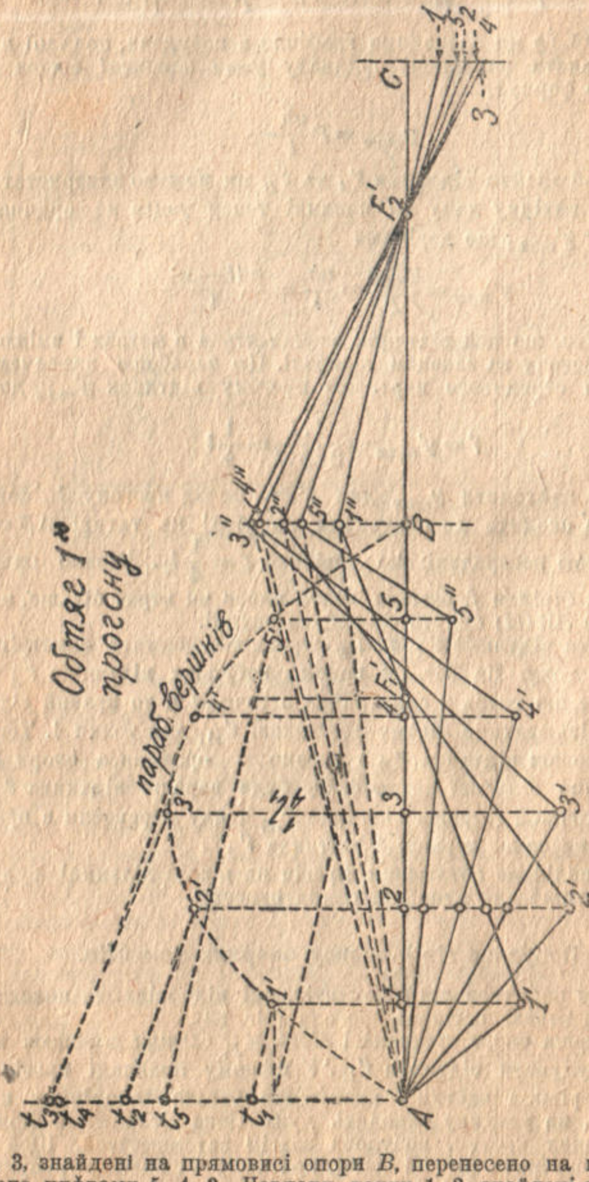
Побудова ліній впливу опорних моментів.

Перейдімо до побудови лінії моментів, які відповідають положенню сили $P = 1$ в окремих точках першого прогону (фіг. 93).

Тому, що перша опора суставна і $M_1 = M_{F_1}$ завжди дорівнює нулеві, нам немає потреби будувати відтинки t'_B. У нашому прикладі прогін поділено лише на шість рівних частин і пропущено багато допоміжних побудов; не зважаючи на це, на рисунку виходить дуже тісна сітка ліній. Коли розбити прогін на 10 рівних частин, побудова зовсім затемнюється. Щоб уникнути цього, бажано повторити фіг. 93 двічі, при чому на одному рисунку зробити установлення сили в точках 1, 3, 5 . . . а в другому — в точках 2, 4, 6 . . . Знайдені ординати відкладаємо, як звичайно, від нульової осі, що дає змогу, не затемнюючи рисунка, одержати значне число точок у кожному прогоні.

Обтяг другого прогону.

Обтяг другого прогону досліджуємо так само. Тому, що праву опору цього прогону вправлено в стіну, ми повинні відшукувати як праві, так і ліві відтинки t'_A та t'_B. Потрібні побудови подано на фіг. 94 лише для точок 1, 2, 3.

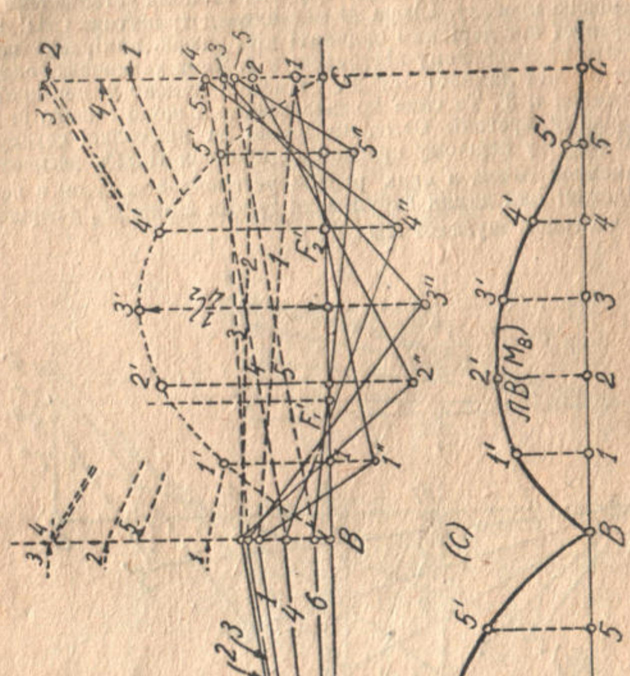


Фіг. 93.

Точки 1, 2, 3, знайдені на прямовисі опори *B*, перенесено на прямовис опори *C* і позначено цифрами 5, 4, 3. Навпаки, точки 1, 2, знайдені на прямовисі *C*, перенесено на прямовис *B* і позначено цифрами 5, 4. Дальші операції є повторення розрахунку, який описано вище для першого прогону.

Побудова ліній впливу опорних моментів.

Хід побудови цих ліній ми розглянули вже на початку розділу. Суть її полягає в тому, що ординати будь-якої лінії впливу, наприклад, ЛВ (M_B),

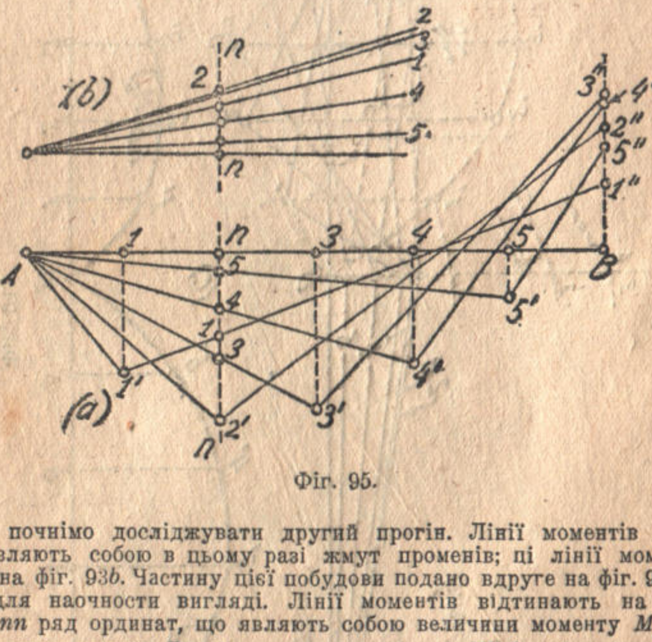


Фіг. 94.

які одержуємо під час побудови на одному прямовисі (прямовис опори B), розносять на прямовиси тих точок, в яких робили установлення сили $P = 1$. Лінію впливу опорного моменту M_B побудовано на фіг. 94.

Лінія впливу згинних моментів.

Візьмімо перекрій mn, що збігається з точкою 2 першого прогону, і побудуймо лінію впливу згинного моменту M_x у цьому перекрої. Щоб було ясніше, на фіг. 95 подано вдруге частину фіг. 92. Коли установлено силу $P = 1$ в точці 1 першого прогону, епюра M має вигляд трикутника $A1'\ 1''$. Згинний момент у перекрої mn дорівнює ординаті цієї епюри, виміреній на прямовисі перекрою, цебто прямовисному відтинкові $n\ 1$. Коли установити сили в точці 2, епюра M має вигляд ламаної $A2'\ 2''$, і згинний момент у перекрої mn зображається відтинком $n\ 2'$. Те саме можна сказати й щодо іншого розташування сили P в першому прогоні. Отже, ми маємо на прямовисі перекрою mn усі ординати ЛВ (M_x) у першому прогоні. Лишається тільки рознести ці ординати на прямовиси точок, в яких робили установлення сили в першому прогоні, і на підставі цих даних побудувати графік зміни M_x у першому прогоні, який і буде частиною шуканої ЛВ (M_x).



Фіг. 95.

Тепер почнімо досліджувати другий прогін. Лінії моментів у першому прогоні являють собою в цьому разі жмут променів; ці лінії моментів було знайдено на фіг. 93b. Частину цієї побудови подано вдруге на фіг. 95b у збільшеному для наочности вигляді. Лінії моментів відтинають на прямовисі перекрою nn ряд ординат, що являють собою величини моменту M_x при різних положеннях тягара $P = 1$ у другому прогоні. Щоб побудувати ЛВ (M_x), нам лишається тільки рознести ці ординати по прямовисах відповідних точок другого прогону і сполучити їхні вершки плавною кривою. Аналогічно будуємо лінії впливу згинних моментів і для інших перекроїв.

Лінії впливу перерізних сил.

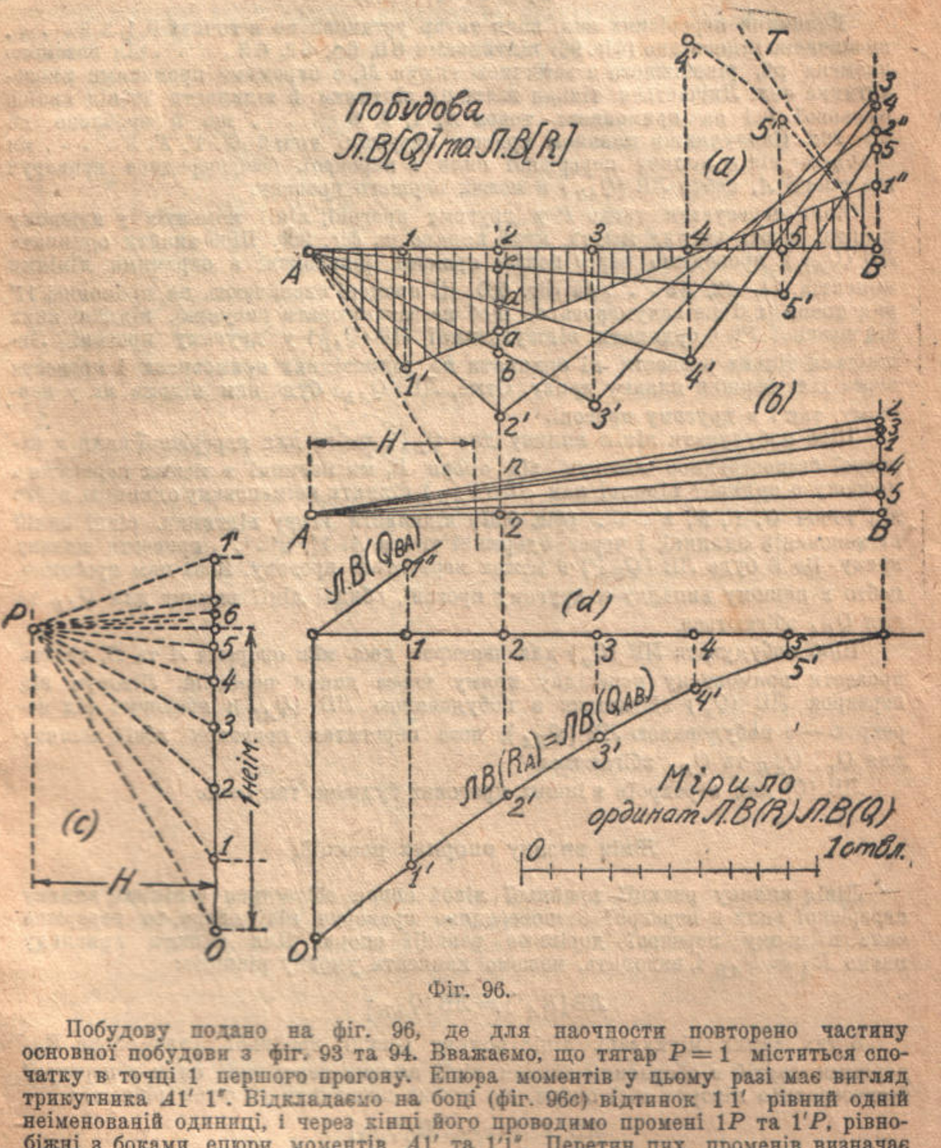
Ми вже розглядали в § 27 графічний спосіб знаходити перерізні сили, коли відома епюра згинних моментів. Суть цього способу полягає в тому, що епюру моментів ми вважаємо за шнуровий многокутник і будуємо для нього відповідний многокутник сил, промені й полюс. Але до цього способу треба запровадити невеличку зміну.

Дійсно, раніше ми шукали просто перерізну силу Q; тепер же ми повинні знайти, так би мовити, відносну перерізну силу, яка припадає на одну тонну рухомого тягара. Очевидно, вона дорівнює силі Q, поділеній на P.

Щоб знайти цю відносну величину Q, ми можемо скористатися з попередньої побудови, але замість сили $P = 1$ відкласти, як базу побудови, величину

$$\frac{P}{P} = 1 \text{ неіменов. одиниці.}$$

Тому що сила P є єдиний обтяг, то ніяких інших відтинків відкладати не доводиться.



Фіг. 96.

Побудову подано на фіг. 96, де для наочности повторено частину основної побудови з фіг. 93 та 94. Вважаємо, що тягар $P = 1$ міститься спочатку в точці 1 першого прогону. Епюра моментів у цьому разі має вигляд трикутника $A1'\,1''$. Відкладаємо на боці (фіг. 96c) відтинок $1\,1'$ рівний одній неіменованій одиниці, і через кінці його проводимо промені $1P$ та $1'P$, рівнобіжні з боками епюри моментів $A1'$ та $1'1''$. Перетин цих променів визначає полюс P. Через полюс проводимо поземину Pb та промені, рівнобіжні з боками $A2'$, $A3'$, $A4'$ . . . епюр моментів; крім того, проводимо промінь PO, рівнобіжний з дотичною BT до параболі вершків y'_{max}, що її позначено літерами $B5'4'$. Цей промінь повинен відтяти на прямовисі $11'$ відтинок $6\,0$, рівний неіменованій одиниці; це є перевірка правильности визначення полюса. Напрям дотичної BT до параболі відомий нам з великою точністю, бо дотична ця відтинає на середньому прямовисі прогону ординату, рівну подвоєній стрілці параболі, цебто, в нашому прикладі, рівну

$$2f = 2 \cdot {}^1\!/_4\, l = {}^1\!/_2\, l$$

Величини перерізних сил, коли тягар установлено в точках 0, 1, 2, 3 . . . , визначаємо відповідно (фіг. 96) відтинками $6\,0$, $6\,1$, $6\,2$, $6\,3$ . . . . від поземого променя $p6$, рінобіжного з замичною епюри M, з окремими променями многокутника сил. Лишається тільки взяти ці відтинки й відкласти їх від якоїсь нульової осі на прямовисах точок A, 1, 2, 3 . . . . , що й зроблено на фіг. 96d. Сполучивши плавною кривою одержані точки $0'$, $1'$, $2'$, $3'$ . . . , ми знайдемо лінію впливу перерізної сили в перекрої, безпосередньо праворуч від опори A, цебто ЛВ (Q_{AB}) в межах першого прогону.

Коли пересувати тягар P у другому прогоні, лінії моментів у першому прогоні мають вигляд жмута, який подано на фіг. 96b. Щоб знайти ординати ЛВ (Q_{AB}), проводимо через полюс промені, рівнобіжні з окремими лініями моментів $A1$, $A2$, $A3$ . . . на фіг. 96b. Ці промені визначають на промовисі $11'$ ряд точок (які не занумеровано, щоб не затемнювати рисунка), віддалі яких від поземої $P6$ є ординати відшукуваної ЛВ (Q_{AB}) у другому прогоні. Лишається тільки рознести ці ординати по відповідних прямовисах і провести через їхні вершки плавну криву. Отже, ЛВ (Q_{AB}) буде нам відома як у першому, так і в другому прогоні.

Щоб побудувати лінію впливу для Q_{BA}, цебто для перерізної сили в перекрої безпосередньо ліворуч від опори B, ми повинні в межах перетятого прогону з ординат відомої нам ЛВ (Q_{AB}) відняти неіменовану одиницю, цебто від точоч $0'$, $1'$, $2'$, $3'$ . . . (фіг. 96d) відкласти вгору відтинки, рівні одній неіменованій одиниці, і через одержані точки A, $1''$, $2''$ . . . провести плавну криву. Це й буде ЛВ (Q_{BA}) в межах перетятого прогону. Поза цим прогоном, цебто в нашому випадку в другому прогоні, обидві лінії впливу для Q_{AB} та для Q_{BA} збігаються.

Щоб побудувати ЛВ (Q_x) для перекрою десь між опорами A та B, досить провести прямовисну перехідну пряму через даний перекрій. Ліворуч від перекрою ЛВ (Q_x) збігається з побудованою ЛВ (Q_{AB}); праворуч від перекрою — з побудованою ЛВ (Q_{BA}); поза перетятим прогоном лінії впливу для Q_x, Q_{AB} та Q_{BA} збігаються.

ЛВ (Q) для перекроїв в інших прогонах будуємо так само.

Лінія впливу опорних реакцій.

Лінія впливу реакції крайньої лівої опори збігається з лінією впливу перерізної сили в перекрої безпосередньо праворуч цієї опори, бо перерізна сила в цьому перекрої дорівнює реакції опори. Для нашого прикладу маємо $R_A = Q_{AB}$ і, виходить, можемо написати умовну рівність:

$$\text{ЛВ}\,[R_A] = \text{ЛВ}\,[Q_{AB}]$$

З тих самих міркувань лінія впливу реакції крайньої правої опори R_C дорівнює взятій з оберненим знаком лінії впливу перерізної сили в перекрої безпосередньо ліворуч цієї опори, що можна визначити умовною рівністю:

$$\text{ЛВ}\,[R_C] = -\,\text{ЛВ}\,[Q_{CB}]$$

Трохи складніша побудова ліній впливу реакцій проміжних опор, у нашому прикладі реакції опори B. Її можна зробити двома способами.

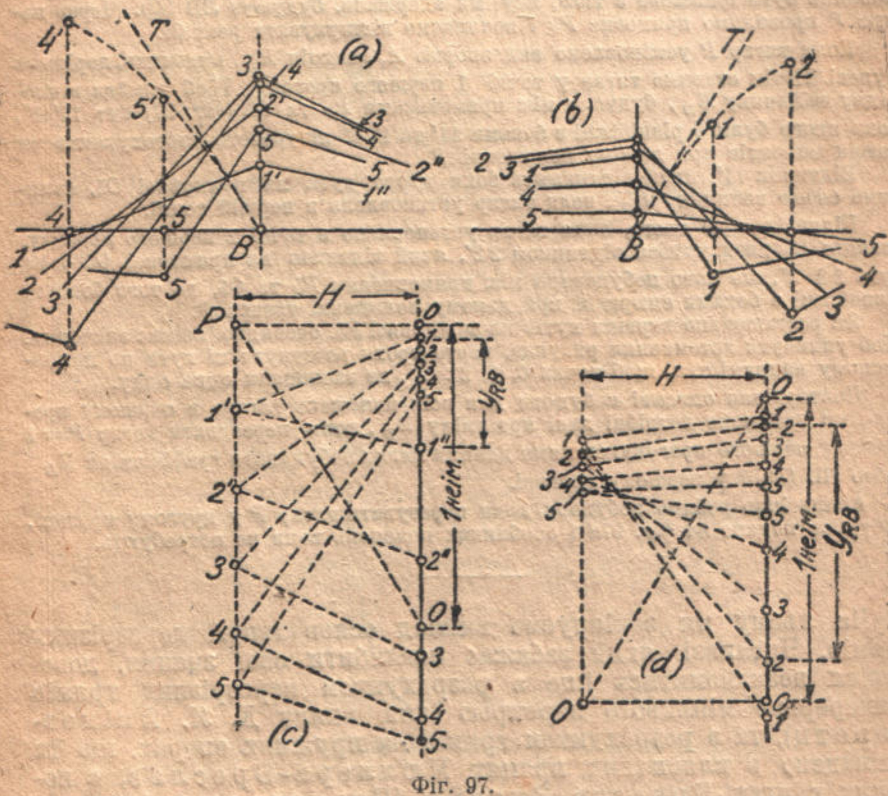
1-й спосіб побудови ЛВ(R_B) базується на тому, що реакція проміжної опори R_B дорівнює різниці перерізних сил Q_{BC} та Q_{BA} в перекроях безпосередньо праворуч і ліворуч від цієї опори, цебто:

$$R_B = Q_{BC} - Q_{BA} \tag{a}$$

На підставі залежности (a), ми можемо написати умовну рівність

$$ЛВ\,[R_B] = ЛВ\,[Q_{BC}] - ЛВ\,[Q_{BA}] \tag{b}$$

і одержимо шукану лінію впливу, віднімаючи ординати відомих нам ліній впливу Q_{BC} та Q_{BA}.



Фіг. 97.

2-ий спосіб побудови лінії впливу реакції проміжної опори базується на безпосередньому знахожденні реакції опори (в нашому прикладі — реакції R_B) при різних положенях тягара $P=1$ на трямі. Як графічно визначати реакції опор за відомою епюрою M, було детально описано в № 27. Цей спосіб треба трохи змінити, бо ми шукаємо тепер не „абсолютну", а „відносну" величину реакції, цебто реакцію, що припадає на 1 тонну рухомого тягара.

Відповідно до цього, замість тягара **1 т**, що є єдиний обтяг тряма, треба запровадити до побудови величину:

$$\frac{P}{P} = \text{неіменов. одиниці.}$$

Крім того, щоб уникнути надмірної тісноти ліній на рисунку, буде зручно розчленувати побудову і кожну опорну реакцію при різних положеннях тягара будувати на окремому прямовисі, тоді як раніше всі реакції при даному положенні тягарів одержували ми на одному прямовисі. Деталі розрахунку з'ясуємо на прикладі побудови лінії впливу опорної реакції R_B.

На фіг. 97*a* та *b* повторено для ясности частину фіг. 93, а саме: нарисовано злами ліній моментів на прямовисі опори *B*, коли обтяжено перший та другий прогін. Щоб знайти реакції R_B, відкладаємо на довільно вибраному прямовисі (фіг. 97*c*) відтинок *OO*, що дорівнює одній неіменованій одиниці, і через кінці його проводимо позему *OP* та похилу пряму *OP*, рівнобіжну з дотичною *BT* до параболі вершків y_{max}. Перетин цих прямих визначає положення полюса та величину полюсної віддалі *H*. Зрозуміло, що величина *H* повинна бути однакова з тією, яку ми одержали, будуючи ЛВ (*Q*). Через полюс *P* проводимо прямовис *P*5 і починаємо відшукувати реакції.

Коли тягар *P* установлено над опорою *A*, реакція R_B, очевидно, дорівнює нулеві. Потім ставимо тягар у точці 1 першого прогону. Щоб знайти відповідну величину R_B, будуємо між прямовисами *P*5 та *O*5 (фіг. 97) кут 11′ 1″, боки якого були б рівнобіжні з боками 11′ та 1′ 1″ шнурового многокутника чи епюри моментів при даному положенні *P*.

Відтинок 11″, який відтинають боки цього кута на прямовисі *O*5, являтиме собою величину R_B, коли тягар установлено в першій точці.

Відповідно до цього, коли тягар установлено в точці 2 першого прогону, реакція R_B визначиться відтинком 22″, який відтинає на прямовисі *O*5 боки кута 22′ 2″, що його побудовано між прямовисами *P*5 та *O*5, до того боки ці рівнобіжні з боками епюри *M* при даному положенні тягара *P*.

Як розташовано вершки кутів на прямовисі *P*5, очевидно, не має значення. Щоб уникнути затемнення рисунка, варто трохи розсунути ці кути по прямовисному напрямі так, щоб точки 0, 1, 2 . . . не заслоняли одна одну.

Повторивши описані побудови для всіх положень тягара в першому прогоні, ми матимемо потрібні дані про зміну R_B, коли пересувати тягар $P = 1$ в межах першого прогону; за цими даними легко побудувати графік зміни R_B цебто ЛВ (R_B) у першому прогоні.

Аналогічно робимо побудову, коли пересувати тягар *P* у другому прогоні. Побудови подано на фіг. 97*d* і особливих пояснень вони не потребують.

На цьому ми закінчуємо виклад основ теорії нерозрізних трямів. Читачеві, який забажає поглибити свої знання, доведеться познайомитись іще з розрахунком нерозрізних трямів безперервно мінливого перекрою (див. книгу Д. Я. Акімов-Перетц), та з розрахунком трямів на пружних опорах, що їх викладено в клясичних працях Мюллера-Бресляв, в новіших книгах Ернеста Зутера, Штраснера та інших.

ЗМІСТ

Розділ третій.

Графоаналітичний розрахунок за способом Мюллера-Бресляв.

Розділ четвертий.

Теорема про два моменти.

Розділ п'ятий.

Нерозрізні трями з різною цупкістю в окремих прогонах.

ЧАСТИНА ДРУГА.

Розрахунок нерозрізних трямів при рухомому обтягові.

Розділ шостий.

Аналітична побудова ліній впливу

Розділ сьомий.

Графічна побудова ліній впливу нерозрізних трямів.