Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут агроекології та землеустрою
Кафедра геодезії та картографії

05-04-119М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних та самостійних робіт
з навчальної дисципліни «Вища геодезія»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за
освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій»
спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»
денної форми навчання

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ СФЕРОЇДНОЇ ГЕОДЕЗІЇ

Рекомендовано науково-методичною
радою з якості ННІАЗ
Протокол № 1 від 30.08.2022р.

Рівне – 2022

Методичні вказівки до виконання практичних та самостійних робіт з навчальної дисципліни «Вища геодезія» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій» спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» денної форми навчання. Розв'язування задач сфероїдної геодезії [Електронне видання] / Тадєєв О. А. – Рівне : НУВГП, 2022. – 40 с.

Укладач: Тадєєв О. А., доцент кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Відповідальний за випуск: Янчук Р. М., завідувач кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Керівник групи забезпечення спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»: доктор сільськогосподарських наук, професор Мошинський В. С.

© О. А. Тадєєв, 2022
© НУВГП, 2022

Зміст

Вступ.....3
1 Обчислення довжин дуг меридіана і паралелі.....7
2. Обчислення розмірів та площі знімальної трапеції.....12
3. Наближене розв'язування трикутників за теоремою Лежандра…….…...19
4. Наближене розв'язування трикутників способом аддитаментів…..……..23
5. Розв'язування прямої геодезичної задачі
способом допоміжної точки (спосіб Шрейбера).....26
6. Розв'язування прямої геодезичної задачі
за формулами Гаусса із середніми аргументами.....32
7. Розв'язування оберненої геодезичної задачі
за формулами Гаусса із середніми аргументами.....36
Література…….....40

Вступ

Сфероїдна геодезія – розділ вищої геодезії, який вивчає геометрію поверхні земного еліпсоїда обертання і методи розв'язування геодезичних задач на цій поверхні з метою визначення координат пунктів опорних геодезичних мереж.

У практиці виконання геодезичних робіт використовують два різновиди моделі Землі у формі земного еліпсоїда обертання – загальний земний еліпсоїд та референц-еліпсоїд. Загальний земний еліпсоїд – це геометрична форма із встановленими параметрами та розмірами, яка математично найкраще описує фігуру Землі в цілому і має центр та вісь обертання, які збігаються з центром мас та віссю обертання Землі. Референц-еліпсоїд – це геометрична форма із встановленими параметрами та розмірами, яка математично найкраще описує фігуру Землі у межах певної території. Геометричний центр референц-еліпсоїда наближено збігається з центром мас, а вісь обертання зорієнтована певним чином відносно осі обертання Землі.

До таблиці 1 зведено геометричні параметри найбільш поширених моделей загального земного еліпсоїда *GRS80* та *WGS84*, а також референц-еліпсоїда Красовського. Серед них: велика (або екваторіальна) піввісь $a = OE$ (див. рис. 1), мала (або полярна) піввісь $b = OP_o$, полярне стиснення α, перший ексцентриситет еліпсоїда e; другий ексцентриситет еліпсоїда e'. Перелічені параметри повністю описують розміри та форму тієї чи іншої моделі земного еліпсоїда. Зв'язки між параметрами виражають наступні формули:

$$\alpha = \frac{a-b}{a}; \qquad e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}; \qquad e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}.$$

Беручи до уваги зазначені зв'язки, при розв'язуванні задач достатньо задатись лише двома параметрами. Їх називають основними. Як правило, це параметри a і b або a і α.

Таблиця 1 - Геометричні параметри еліпсоїдальних систем *GRS80* , *WGS84* та референц-еліпсоїда Красовського

Назва та позначення параметру	*GRS80*	*WGS84*	Референц-еліпсоїд Красовського
велика піввісь a	6 378 137 *м*	6 378 137 *м*	6 378 245 *м*
мала піввісь b	6 356 752,3141 *м*	6 356 752,3142 *м*	6 356 863,01877*м*
полярне стиснення α	1/298,257222101	1/298,257223563	1/298, 3
перший ексцентриситет e^2	0,00669438002290	0,00669437999014	0,006693421623
другий ексцентриситет e'^2	0,00673949677548	0,00673949674228	0,006738525415

У розв'язуванні геодезичних задач, які пов'язані з моделями земного еліпсоїда, основною є просторова геоцентрична полярна еліпсоїдальна система координат *BLH*. Вона відноситься до категорії модельних систем з основною відліковою координатною площиною – екватором.

На рис. 1 показано координати довільної точки простору (т.*A*) в системі *BLH* у відношенні до координатних осей прямокутної просторової геоцентричної системи *XYZ*. На рис. 1 позначено:

т. *O* – геометричний центр еліпсоїда обертання;

G_e – точка перетину початкового меридіана і екватора;

G_A – точка перетину геодезичного меридіана т.*A* і екватора;

$A'n$ – нормаль до поверхні еліпсоїда;

A' – проекція т.*A* на поверхню еліпсоїда у напрямі нормалі $A'n$;

A'' – проекція т.*A* на площину екватора EG_AE у напрямі нормалі $A'n$;

OG_A – лінія перетину площини $P_0A'G_AO$ меридіана т.*A* і площини екватора EG_AE .

Положення точки *A* в системі *BLH* визначають наступні координати:

- геодезична еліпсоїдальна широта $B = \angle G_AA''A'$ – гострий кут, утворений нормаллю $A'n$ до поверхні в точці A' та площиною екватора EG_AE' ;
- геодезична еліпсоїдальна довгота $L = \angle G_eOG_A$ – двогранний кут, утворений площиною P_0G_eO початкового меридіана та площиною $P_0A'G_AO$ меридіана точки A ;
- геодезична висота $H = AA'$ – довжина проекції т.*A* на поверхню земного еліпсоїда у напрямі нормалі $A'n$.

Просторова геоцентрична полярна еліпсоїдальна система координат *BLH* має двовимірний різновид. У цьому випадку положення точки визначають дві координати *BL* і задають його виключно на поверхні земного еліпсоїда

обертання. Такий різновид системи координат використовується, зокрема, при розв'язуванні прикладних задач сфероїдної геодезії.

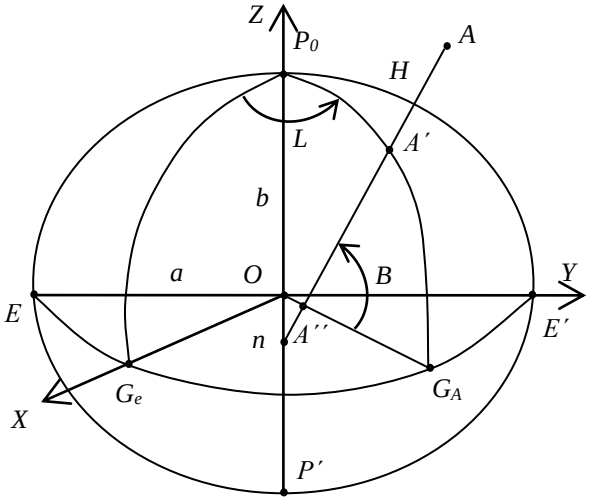

Рис. 1. Координати т. *A* в просторовій геоцентричній полярній еліпсоїдальній системі координат *BLH*

Площини, проведені через нормаль *An* до поверхні еліпсоїда в точці *A*, називають нормальними площинами. Криві на поверхні еліпсоїда, які утворені її перетином з нормальними площинами, називають нормальними перерізами. Головні нормальні перерізи – це два взаємно перпендикулярних нормальних перерізи в точці, які мають найбільшу і найменшу кривину (див. рис. 2).

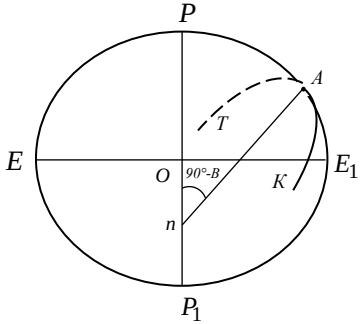

Рис. 2 Головні нормальні перерізи поверхні еліпсоїда

Головні нормальні перерізи – це меридіанний переріз PAP_1 з кривиною радіусу $M = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$ та переріз першого вертикала TAK з кривиною $N = \frac{a}{W}$.

Величину $W = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B}$ називають першою функцією широти. Середнім радіусом кривини $R = \sqrt{MN}$ в точці поверхні еліпсоїда називають граничне значення середнього арифметичного з радіусів кривини нормальних перерізів у точці, якщо їх число прямує до нескінченності.

Якщо у двох довільних точках A і B на поверхні еліпсоїда провести нормальні площини так, щоб вони проходили з точки A на точку B і навпаки, то дві таких площини внаслідок перетину з поверхнею еліпсоїда утворять на ній дві різні криві. Такі криві називають взаємними нормальними перерізами (див. рис. 3). Візирна площина приладу, встановленого в т.A і наведеного на т.B, співпадає з кривою прямого нормального перерізу AaB. Візирна площина приладу, встановленого в точці B і наведеного на точку A, співпадає з кривою прямого нормального перерізу BbA – він є зворотним відносно перерізу AaB. Розбіжності в положенні взаємних нормальних перерізів приводять до того, що виміряні у вершинах кути не утворюють на поверхні еліпсоїда замкненого трикутника. Такий ефект називають двозначністю взаємних нормальних перерізів. Цю невизначеність ліквідовують з використанням геодезичної лінії.

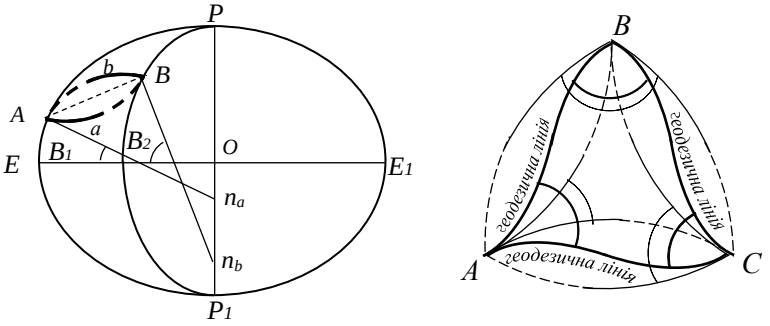

Рис. 3. Взаємні нормальні перерізи і геодезична лінія

Геодезична лінія між точками A і B – це крива на поверхні еліпсоїда, в кожній точці якої побудована нормаль співпадає з головною нормаллю, яка побудована у початковій точці перерізу. Геодезична лінія проходить між взаємними нормальними перерізами ближче до прямого нормального перерізу з даної точки і визначає найкоротшу відстань s між точками A і B на

поверхні еліпсоїда. Основне рівняння геодезичної лінії $r\sin A = const$: в кожній точці геодезичної лінії добуток радіуса $r = N\cos B$ паралелі на синус азимута A є сталою величиною. Це рівняння є одним з наслідків системи вихідних диференціальних рівнянь поверхні еліпсоїда

$$\left.\begin{aligned} \frac{dB}{ds} &= \frac{\cos A}{M} = \frac{V^3}{c}\cos A \\ \frac{dl}{ds} &= \frac{\sin A}{N\cos B} = \frac{V}{c}\sec B\sin A \\ \frac{dA}{ds} &= \frac{\sin A}{N}tgB = \frac{V}{c}tgB\sin A \end{aligned}\right\}.$$

Тут l – різниця довгот точок A і B; $c = a\sqrt{1+e'^2}$ – радіус кривини меридіанного перерізу в полюсі при $B = 90^\circ$; $V = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B}$ – друга функція широти. Кути між взаємними нормальними перерізами та між геодезичною лінією і кривою прямого нормального перерізу враховуються як поправки при обробці кутових та лінійних вимірів у розв'язуванні задач сфероїдної геодезії.

1. Обчислення довжин дуг меридіана і паралелі

A_1 - точка на меридіанному еліпсі з широтою B_1. A_2 - точка на меридіанному еліпсі з широтою B_2 (рис. 4).

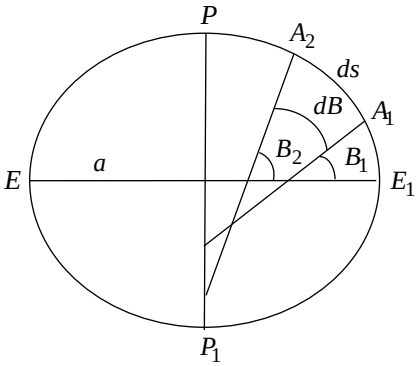

Рис. 4. Дуга меридіанного перерізу між точками A_1 та A_2

Якщо різниця широт точок виражається величиною $B_2 - B_1 = dB$, то при $dB \to 0$ елементарна дуга меридіанного перерізу $ds = MdB$, а довжина дуги s виражається інтегралом

$$s = \int_{B_1}^{B_2} MdB = a(1-e^2)\int_{B_1}^{B_2} \frac{dB}{W^3}. \quad (1)$$

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3}, \quad (2)$$

M – радіус кривини меридіанного перерізу ;

$$W = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B}, \quad (3)$$

W – перша функція широти. Еліптичний інтеграл (1) не виражається елементарними функціями. Тому з метою здобуття розв'язку підінтегральну функцію розкладують в ряд. Число членів ряду встановлюється в залежності від точності визначення довжини s і протяжності дуги A_1A_2. Для практичних потреб користуються різними формулами розрахунку довжини дуги меридіана:

1) загальна формула для дуги меридіана довільної довжини

$$s = a(1-e^2)(A\frac{B_2-B_1}{\rho} - B\sin(B_2-B_1)\cos 2B_m +$$
$$+\frac{C}{2}\sin 2(B_2-B_1)\cos 4B_m - \frac{D}{3}\sin 3(B_2-B_1)\cos 6B_m). \quad (4)$$

Тут позначено: $A = 1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\ldots$, $B = \frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\ldots$, $C = \frac{15}{64}e^4+\ldots$, $D = \frac{35}{512}e^6+\ldots$ – сталі коефіцієнти моделі еліпсоїда (значення коефіцієнтів зведено до таблиці 2); ρ – число кутових одиниць (градусів, секунд) в одному радіані; $B_m = \frac{B_1+B_2}{2}$ – середня широта дуги A_1A_2.

2) формула для дуги меридіана від екватора до точки A_1 з широтою B_1

$$s = a(1-e^2)\left(A\frac{B_1}{\rho} - \frac{B}{2}\sin 2B_1 + \frac{C}{4}\sin 4B_1 - \frac{D}{6}\sin 6B_1\right). \quad (5)$$

3) формула для довжини дуги меридіана при обчисленнях в тріангуляції на віддалі порядку сотень кілометрів

$$s = M_m\frac{B_2-B_1}{\rho}\left(1+\frac{e^2}{8}\frac{(B_2-B_1)^2}{\rho^2}\cos 2B_m\right). \quad (6)$$

Радіус кривини M_m обчислюється за середньою широтою B_m.

4) формула для довжини дуги меридіана при обчисленнях в тріангуляції на віддалі ≤ 45 кілометрів

$$s = M_m\frac{B_2-B_1}{\rho}. \quad (7)$$

Таблиця 2 – Значення коефіцієнтів A, B, C, D для моделей еліпсоїда *WGS84* та референц-еліпсоїда Красовського

Коефіцієнти	*WGS84*	Референц-еліпсоїд Красовського
A	1,00505250	1,00505177
B	0,00506311	0,00506238
C	0,00001063	0,00001062
D	0,00000002	0,00000002

При обчисленні довжини дуги меридіана для вибору робочої формули можна попередньо розрахувати приблизне значення довжини, враховуючи, що приросту широти $dB = 1^\circ$ вздовж меридіанного перерізу відповідає довжина дуги перерізу ≈ 110 км.

За умови точності широти точки $m_B = \pm 0.0001''$ всі зазначені формули забезпечують середню квадратичну похибку довжини дуги $m_S = \pm 0.001$ м.

A_1 та A_2 – точки з довготами L_1 та L_2 на паралелі з широтою B (рис. 5).

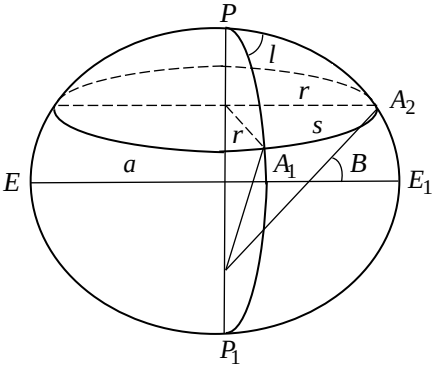

Рис. 5. Дуга паралелі між точками A_1 та A_2

Паралель на еліпсоїді утворює коло. Радіус r паралелі з широтою B виражається формулою

$$r = N \cos B. \tag{8}$$

$$N = \frac{a}{W}. \tag{9}$$

N – радіус кривини перерізу першого вертикала. Дуга паралелі між точками A_1 та A_2 є дугою кола з центральним кутом, який дорівнює різниці довгот

кінцевих точок дуги $l = L_2 - L_1$. Довжина s дуги паралелі з широтою B, яка відповідає різниці $l = L_2 - L_1$, виражається формулою $s = r\frac{l}{\rho}$ або

$$s = \frac{l}{\rho}\frac{a}{W}\cos B. \qquad (10)$$

За умови точності широти і довгот $m_B = m_L = \pm 0.0001''$ формула (10) забезпечує середню квадратичну похибку довжини дуги $m_S = \pm 0.001$ м.

Завдання 1. Обчислити довжину дуги меридіана між точками з широтами $B_1 = 48^\circ 30' 48.1111'' - N'$, $B_2 = 49^\circ 30' 49.2222'' + N'$ і довжину дуги паралелі між точками з широтою B_1 та довготами $L_1 = 25^\circ 30' 25.1111'' - N'$, $L_2 = 27^\circ 30' 27.2222'' + N'$; N – номер варіанта.

Приклад.

Вихідні дані (варіант $N = 0$).

B_1	$48^\circ 30' 48.1111'' - N'$	48° 30′ 48.1111″	48°,51336419
B_2	$49^\circ 30' 49.2222'' + N'$	49° 30′ 49.2222″	49°,51367283
L_1	$25^\circ 30' 25.1111'' - N'$	25° 30′ 25.1111″	25°,50697531
L_2	$27^\circ 30' 27.2222'' + N'$	27° 30′ 27.2222″	27°,50756172

Розв'язання завдання у відношенні до моделі еліпсоїда *WGS84*.

Сталі величини.

a	6378137 *м*	e^2	0, 00669438		ρ°	57°,29577951	
A	1,00505250	B	0,00506311	C	0,00001063	D	0,00000002

Обчислення довжини дуги меридіана за формулою (4)

Позначення дій	Результати
B_m	49°,01351851
$a(1-e^2)$	6335439,327
$A\frac{B_2 - B_1}{\rho}$	0,01754689
$B\sin(B_2 - B_1)\cos 2B_m$	-0,00001234
$\frac{C}{2}\sin 2(B_2 - B_1)\cos 4B_m$	-0,00000018
$\frac{D}{3}\sin 3(B_2 - B_1)\cos 6B_m$	0,00000000
S (*м*)	111244,320

Обчислення довжини дуги меридіана за формулою (6)

Позначення дій	Результати
$W_m = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B_m}$	0,99809088
$M_m = \frac{a(1-e^2)}{W_m^3}$	6371863,634
$M_m \frac{B_2 - B_1}{\rho}$	111244,3236
$\frac{e^2}{8} \frac{(B_2 - B_1)^2}{\rho^2} \cos 2B_m$	-0,00000004
s (*м*)	111244,320

Обчислення довжини дуги паралелі

Позначення дій	Результати
$l = L_2 - L_1$	2,00058642
$W = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B}$	0,99811990
$N = \frac{a}{W}$	6390151,105
s (*м*)	147 807,291

Розв'язання завдання
у відношенні до моделі референц-еліпсоїда Красовського.

Сталі величини.

a	6378245 *м*		e^2	0,00669342		$\rho°$	57°,29577951
A	1,00505177	B	0,00506238	C	0,00001062	D	0,00000002

Обчислення довжини дуги меридіана за формулою (4)

Позначення дій	Результати
B_m	49°,01351851
$a(1-e^2)$	6335552,717
$A \frac{B_2 - B_1}{\rho}$	0,01754688
$B \sin(B_2 - B_1) \cos 2B_m$	-0,00001234
$\frac{C}{2} \sin 2(B_2 - B_1) \cos 4B_m$	-0,00000018
$\frac{D}{3} \sin 3(B_2 - B_1) \cos 6B_m$	0,00000000
s (*м*)	111 246,219

Обчислення довжини дуги меридіана за формулою (6)

Позначення дій	Результати
$W_m = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B_m}$	0,99809115
$M_m = \frac{a(1-e^2)}{W_m^3}$	6371972,436
$M_m \frac{B_2 - B_1}{\rho}$	111246,2232
$\frac{e^2}{8} \frac{(B_2 - B_1)^2}{\rho^2} \cos 2B_m$	-0,00000004
S (*м*)	111 246,219

Обчислення довжини дуги паралелі

Позначення дій	Результати
$l = L_2 - L_1$	2,00058642
$W = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B}$	0,99812017
$N = \frac{a}{W}$	6390257,584
S (*м*)	147 809,754

2. Обчислення розмірів та площі знімальної трапеції

Сторони знімальної трапеції чи листа карти заданого масштабу є лініями меридіанів та паралелей на поверхні земного еліпсоїда. Тому обчислення натуральних розмірів та площі знімальної трапеції – це визначення частини поверхні еліпсоїда в межах ліній меридіанів та паралелей, які її окреслюють.

Розміри знімальної трапеції описують такі параметри (див. рис. 6):

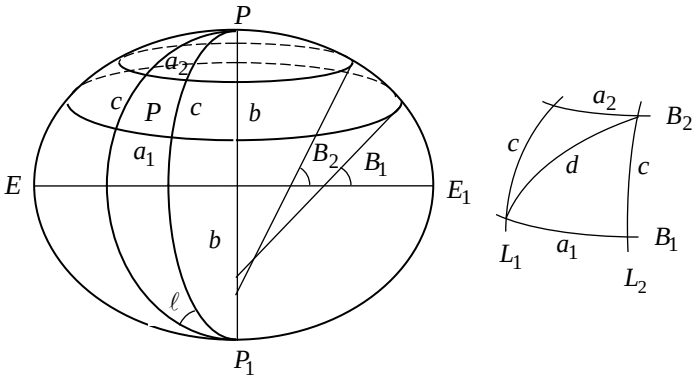

Рис. 6. Знімальна трапеція на поверхні еліпсоїда

- південна a_1 та північна a_2 сторони – це дуги паралелей з широтами B_1 та B_2. Дуги a_1 та a_2 окреслюються меридіанами з довготами L_1 та L_2. Для північних широт завжди $a_1 > a_2$;
- західна та східна сторони c – це дуги меридіанів, окреслених паралелями з широтами B_1 та B_2. Західна та східна сторони завжди рівні між собою;
- діагональ d трапеції:

$$d = \sqrt{a_1 a_2 + c^2} \ . \qquad (11)$$

Якщо знімальну трапецію вважати безкінечно малою фігурою, то при $B_2 - B_1 = dB \to 0$ і $L_2 - L_1 = dl \to 0$ її сторони і площу P виражають інтеграли

$$a_1 = N_1 \cos B_1 \int_{L_1}^{L_2} dl \ ; \ a_2 = N_2 \cos B_2 \int_{L_1}^{L_2} dl \ ; \ c = \int_{B_1}^{B_2} M dB \ ; \ P = \int_{B_1}^{B_2} \int_{L_1}^{L_2} MN \cos B dB dl \ .$$

N_1 і N_2 – радіуси кривини перерізу першого вертикала на широтах B_1 і B_2.

З інтегрування виразів для південної та північної сторін маємо формули

$$a_1 = \frac{L_2 - L_1}{\rho} N_1 \cos B_1 \ ; \quad (12) \qquad a_2 = \frac{L_2 - L_1}{\rho} N_2 \cos B_2 \ . \quad (13)$$

Для вираження довжини дуги меридіана c підінтегральну функцію у відповідному виразі розкладують у біноміальний ряд і після інтегрування в робочих формулах остаточно приймають таке число членів ряду, яке відповідає точності розв'язування задачі та протяжності дуги меридіана (дивись формули (4)–(7)). Для карт масштабів 1:100 000 і крупніше натуральні розміри трапеції дають підстави наближено вважати її сферичною. В таких випадках достатньо користуватись формулою (7):

$$c = M_m \frac{B_2 - B_1}{\rho} \ . \qquad (14)$$

При обчисленні довжин сторін в масштабі листа карти їх значення множать на коефіцієнт $\frac{100}{n}$ (n – знаменник масштабу) і тоді параметрами виражають розміри листа карти в сантиметрах.

Для вираження площі трапеції P підінтегральну функцію розкладують у біноміальний ряд і після інтегрування маємо робочу формулу вигляду

$$P = 2b^2 \frac{L_2 - L_1}{\rho} \left(A' \sin \frac{B_2 - B_1}{2} \cos B_m - \right.$$

$$\left. - B' \sin 3 \frac{B_2 - B_1}{2} \cos 3B_m + C' \sin 5 \frac{B_2 - B_1}{2} \cos 5B_m \right) . \qquad (15)$$

$A' = 1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6 + \ldots$, $B' = \frac{1}{6} e^2 + \frac{3}{16} e^4 + \frac{3}{16} e^6 + \ldots$, $C' = \frac{3}{80} e^4 + \frac{1}{16} e^6 + \ldots$ – сталі коефіцієнти моделі еліпсоїда (значення коефіцієнтів зведено до

таблиці 3). Формула забезпечує розрахунок площі із середньою квадратичною похибкою не більше $m_P = \pm 0.0005$ км^2.

Таблиця 3 – Значення коефіцієнтів A', B', C' для моделей еліпсоїда *WGS84* та референц-еліпсоїда Красовського

Коефіцієнти	*WGS84*	Референц-еліпсоїд Красовського
A'	1,00336361	1,00336409
B'	0,00112403	0,00112419
C'	0,00000170	0,00000170

Еліпсоїдальні координати вершин знімальної трапеції можна визначити за номенклатурою листа карти заданого масштабу на основі „Бланкової карти території Європи масштабу 1:6 000 000". Територія України розташована в межах дев'яти знімальних трапецій масштабу 1:1 000 000 з номенклатурою *L-34, M-34, L-35, M-35, L-36, M-36, N-36, L-37, M-37* (див. рис. 7).

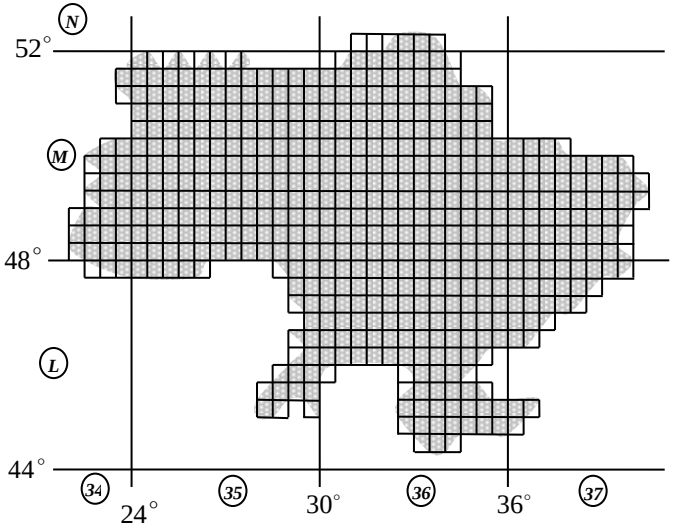

Рис. 7. Фрагмент „Бланкової карти території Європи" у межах України

Різниця широт північної та південної сторін кожної трапеції масштабу 1:1000000 складає $B_2 - B_1 = 4^\circ$, а різниця довгот східної та західної сторін –

$L_2 - L_1 = 6^\circ$. Трапеція масштабу 1:1000000 поділяється на 144 трапеції масштабу 1:100000 і кожній з них присвоюється номенклатура відповідно до порядкового номера від 1 до 144 (наприклад, *М–34–141*, як це показано на схемі рис. 8). Для сторін трапеції масштабу 1:100000 різниця широт складає $B_2 - B_1 = 0^\circ 20'$, різниця довгот $L_2 - L_1 = 0^\circ 30'$. Трапеція масштабу 1:100000 поділяється на 4 трапеції масштабу 1:50000 і кожній з них присвоюється номенклатура за літерами *А, Б, В, Г* (наприклад, *М–34–141–В* на рис. 9). Для сторін трапеції масштабу 1:50000 різниця широт $B_2 - B_1 = 0^\circ 10'$, різниця довгот $L_2 - L_1 = 0^\circ 15'$. Ділення трапеції масштабу 1:50000 на трапеції крупніших масштабів проводиться у відповідності з діючими правилами розграфлювання листів карт потрібних масштабів.

M - 34

1:1 000 000

52°

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	30	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

$B_2 - B_1 = 4^\circ$

48°

18° $L_2 - L_1 = 6^\circ$ 24°

Рис. 8 Схема поділу листа карти масштабу 1:1 000 000

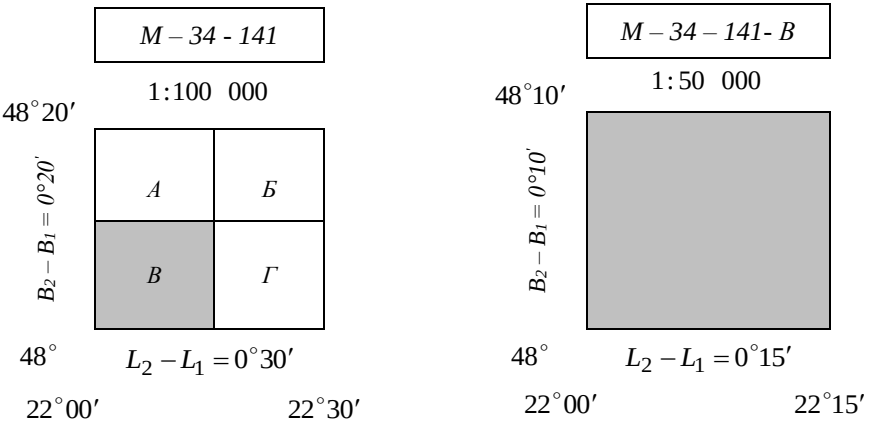

Рис. 9 Схема поділу листа карти масштабу 1:100 000

За еліпсоїдальними координатами точки, розташованої на поверхні земного еліпсоїда, можна визначити її приналежність листу карти чи знімальній трапеції будь-якого потрібного масштабу і відповідні координати вершин цієї трапеції.

Завдання 2. Задано координати точки A: $B_A = 48^\circ 01' 01.1111'' + 7' \times N$, $L_A = 22^\circ 11' 11.1111'' + 30' \times N$; N – номер варіанта. Визначити:

- приналежність точки знімальній трапеції масштабу 1:50 000, номенклатуру та координати вершин трапеції;
- розміри та площу цієї трапеції.

Приклад.

Вихідні дані (варіант $N = 0$).

B_A	$48^\circ 01' 01.1111'' + 7' \times N$	48° 01′ 01,1111″
L_A	$22^\circ 11' 11.1111'' + 30' \times N$	22° 11′ 11,1111″

Номенклатура листа карти масштабу 1:50 000: *М–34–141–В* (див. рис.8,9).

Координати вершин трапеції.

B_1	48° 00′	48°,0
B_2	48° 10′	48°,16666667
L_1	22° 00′	22°,0
L_2	22° 15′	22°,25

Розв'язання завдання у відношенні до моделі еліпсоїда *WGS84*.

Сталі величини.

a	6378137*м*	b	6356,752314*км*	e^2	0,00669438	$\rho°$	57°,29577951
A'	1,00336409	B'	0,00112419	C'	0,00000170		

Обчислення довжин сторін трапеції за формулами (11), (12), (13), (14).

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$W_1 = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B_1}$	0,99814975	$W_2 = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B_2}$	0,99814006
$N_1 = \frac{a}{W_1}$	6389959,992	$N_2 = \frac{a}{W_2}$	6390022,078
a_1 (*м*)	18 656,338	a_2 (*м*)	18 596,168
a_1 (*см карти*)	37,31	a_2 (*см карти*)	37,19
$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$	48,08333333		
$W_m = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B_m}$	0,99814491		
$M_m = \frac{a(1-e^2)}{W_m^3}$	6370829,072		
c (*м*)	18 531,991	d (*м*)	26 274,914
c (*см карти*)	37.06	d (*см карти*)	52.55

Обчислення площі трапеції за формулою (15).

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$2b^2 \frac{L_2 - L_1}{\rho}$	352628,9399	$A' \sin \frac{B_2 - B_1}{2} \cos B_m$	0,00097491
$B' \sin 3\frac{B_2 - B_1}{2} \cos 3B_m$	-0,00000398	$C' \sin 5\frac{B_2 - B_1}{2} \cos 5B_m$	-0,00000001
P (*км*^{2})	345,1818	P (*га*)	34 518,18

Розв'язання завдання
у відношенні до моделі референц-еліпсоїда Красовського.

Сталі величини.

a	6378245*м*	b	6356,863019*км*	e^2	0,00669342	$\rho°$	57°,29577951
A'	1,00336361	B'	0,00112403	C'	0,00000170		

Обчислення довжин сторін трапеції за формулами (11), (12), (13), (14).

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$W_1 = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B_1}$	0,99815002	$W_2 = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B_2}$	0,99814032
$N_1 = \frac{a}{W_1}$	6390066,494	$N_2 = \frac{a}{W_2}$	6390128,573
a_1 (*м*)	18 656,649	a_2 (*м*)	18 596,478
a_1 (*см карти*)	37,31	a_2 (*см карти*)	37,19
$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$	48,08333333		
$W_m = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B_m}$	0,99814517		
$M_m = \frac{a(1-e^2)}{W_m^3}$	6370938,005		
c (*м*)	18 532,307	d (*м*)	26 275,357
c (*см карти*)	37.06	d (*см карти*)	52.55

Обчислення площі трапеції за формулою (15).

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$2b^2 \frac{L_2 - L_1}{\rho}$	352641,2223	$A' \sin \frac{B_2 - B_1}{2} \cos B_m$	0,00097491
$B' \sin 3\frac{B_2 - B_1}{2} \cos 3B_m$	-0,00000398	$C' \sin 5\frac{B_2 - B_1}{2} \cos 5B_m$	-0,00000001
P (*км*^{2})	345,1935	P (*га*)	34 519,35

3. Наближене розв'язування трикутників за теоремою Лежандра

Після визначення кінцевих значень виміряних кутів або напрямів у тріангуляції на поверхні еліпсоїда розпочинають розв'язування трикутників. Розв'язування трикутників – це завдання послідовного обчислення невідомих довжин їх сторін за одним виміряним базисом і виміряними внутрішніми кутами. При довжинах сторін до 90 км розбіжностями між поверхнею еліпсоїда і сферою можна нехтувати, а трикутники вважати малими сферичними. Тому трикутники можна розв'язувати за правилами сферичної тригонометрії. Розв'язок досягається з використанням теореми Лежандра.

Теорема Лежандра: Малий сферичний трикутник *ABC* (див. рис. 10) можна розв'язувати як плоский, якщо кожний з його кутів *A, B, C* зменшити на третину сферичного надлишку:

$$A' = A - \frac{\varepsilon}{3}; \qquad B' = B - \frac{\varepsilon}{3}; \qquad C' = C - \frac{\varepsilon}{3}.$$

A', B', C' – плоскі приведені кути; $\varepsilon = \dfrac{P}{R_m^2}$ – сферичний надлишок трикутника. Оскільки $A' + B' + C' = 180^\circ$, то $A + B + C = 180^\circ + \varepsilon$. Отже, величина ε є різницею сум кутів сферичного і плоского трикутників. R_m – радіус сфери, який дорівнює середньому радіусу кривини поверхні еліпсоїда, на якій побудовано трикутник: $R_m = \dfrac{a\sqrt{1-e^2}}{W_m^2} = \dfrac{b}{W_m^2}$; $W_m = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_m}$ – перша функція середньої широти трикутника. *P* – площа трикутника.

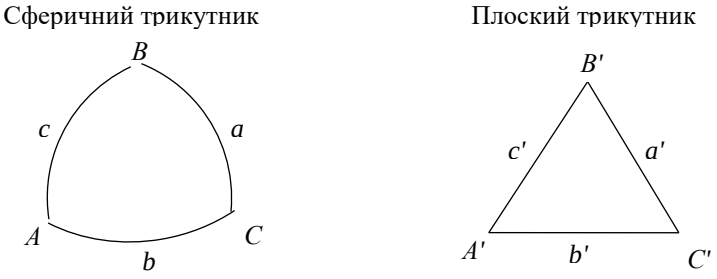

Рис. 10. Сферичний та плоский трикутники

Порядок величини *P* малий порівняно з порядком величини R_m^2, тому площу можна приблизно розрахувати за його відомими елементами:

$$P = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

або

$$P = \frac{1}{2}c^2\frac{\sin A\sin B}{\sin C} = \frac{1}{2}b^2\frac{\sin A\sin C}{\sin B} = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A}.$$

Для забезпечення точності обчислення довжин $m_S = \pm 0.001м$ у тріангуляції 1 класу похибка ε не повинна перевищувати $m_\varepsilon = \pm 0.0005''$.

При довжинах сторін трикутника не більше 90 км його сферичний надлишок не перевищує величини $\varepsilon'' \approx 17''$.

Якщо розв'язування сферичного трикутника розпочинати за виміряними кутами, то попередньо потрібно видалити його кутову нев'язку. Кожен з виправлених кутів розраховують як суму виміряного кута і поправки $-\frac{w}{3}$, де $w = A + B + C - 180^\circ - \varepsilon$ – нев'язка трикутника. Далі за обчисленими плоскими приведеними кутами та довжиною вихідної сторони трикутник розв'язують за теоремою синусів плоскої тригонометрії:

$$\frac{a'}{\sin A'} = \frac{b'}{\sin B'} = \frac{c'}{\sin C'}.$$

Завдання 3. Розв'язати два малих сферичних трикутники, зображених на схемі рис. 11. Довжина вихідної сторони $c_1 = (60000 - 500 \times N)$ *метрів*, середня широта мережі трикутників $B_m = 48^\circ 01' 01.1111'' + 7' \times N$; N – номер варіанта. Виміряні сферичні кути трикутників приведено в таблиці 4.

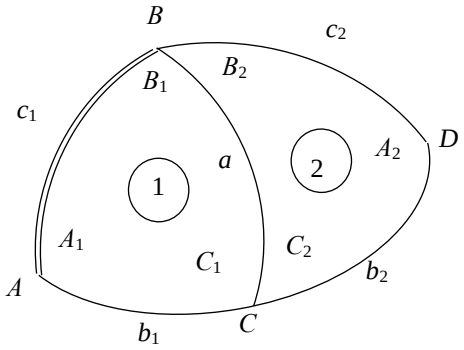

Рис. 11. Ланцюжок трикутників мережі мікротріангуляції

Таблиця 4 – Виміряні кути трикутників мережі мікротріангуляції

№ трикутника	Кут	Виміряні сферичні кути
1	A_1	78° 27′ 09,18″
	B_1	51° 33′ 02,51″
	C_1	49° 59′ 51,20″
2	A_2	59° 25′ 19,10″
	B_2	51° 46′ 48,52″
	C_2	68° 47′ 54,33″

Робочі формули:

Радіус сфери: $R_m = \dfrac{b}{1 - e^2 \sin^2 B_m}$.

Трикутник № 1: $\varepsilon_1 = \rho \dfrac{c_1^2}{2R_m^2} \dfrac{\sin A_1 \sin B_1}{\sin C_1}$; $w_1 = A_1 + B_1 + C_1 - 180^\circ - \varepsilon_1$;

$b_1 = c_1 \dfrac{\sin B_1'}{\sin C_1'}$; $a = c_1 \dfrac{\sin A_1'}{\sin C_1'}$.

Трикутник № 2: $\varepsilon_2 = \rho \dfrac{a^2}{2R_m^2} \dfrac{\sin C_2 \sin B_2}{\sin A_2}$; $w_2 = A_2 + B_2 + C_2 - 180^\circ - \varepsilon_2$;

$b_2 = a \dfrac{\sin B_2'}{\sin A_2'}$; $c_2 = a \dfrac{\sin C_2'}{\sin A_2'}$.

Приклад.

Вихідні дані (варіант $N = 0$).

Довжина вихідної сторони	$c_1 = (60000 - 500 \times N)$	60 000 *метрів*
Середня широта	$48^\circ 01' 01.1111'' + 7' \times N$	48° 01′ 01,1111″

Сталі величини для розв’язування завдання у відношенні до моделі еліпсоїда *WGS84*.

b	6356752,3142 *м*	e^2	0,00669438	ρ°	57°,29577951

Сталі величини для розв’язування завдання у відношенні до моделі референц-еліпсоїда Красовського.

b	6356863,019 *м*	e^2	0,00669342	ρ°	57°,29577951

Результати наближеного розв’язування трикутників у відношенні до моделей еліпсоїда *WGS84* та референц-еліпсоїда Красовського не відрізняються.

Відомість наближеного розв’язування трикутників.

№ тр	Верш.	Виміряні сферичні кути	$-w / 3$	Виправлені сферичні кути	$-\varepsilon / 3$	Виправлені плоскі кути	Синуси кутів	Довжини сторін
1	C	49° 59′ 51,20″	2.082	49° 59′ 53,282″	-3,045	49° 59′ 50,237″	0,76601402	60 000,000
	B	51° 33′ 02,51″	2.082	51° 33′ 04,592″	-3,045	51° 33′ 01,547″	0,78315577	61 342,671
	A	78° 27′ 09,18″	2.082	78° 27′ 11,262″	-3,045	78° 27′ 08,217″	0,97975833	76 742,068
	Σ_1	180° 00′ 02,89″	6.245″	180° 00′ 09,135″	-9,135″	180°00′ 00,000″		
	ε_1	9,135″						
	w_1	-6,245″						
2	D	59° 25′ 19,10″	3.581	59° 25′ 22,681″	-4,231	59° 25′ 18,450″	0,86093557	76 742,068
	B	51° 46′ 48,52″	3.581	51° 46′ 52,101″	-4,231	51° 46′ 47,870″	0,78564059	70 030,424
	C	68° 47′ 54,33″	3.581	68° 47′ 57,911″	-4,231	68° 47′ 53,680″	0,93231272	83 104,483
	Σ_2	180° 00′ 01,95″	10.743″	180° 00′ 12,693″	-12,693″	180°00′ 00,000″		
	ε_2	12,693″						
	w_2	-10,743″						

4. Наближене розв'язування трикутників способом аддитаментів

Сторони сферичного трикутника *ABC* (див. рис. 10) можна виразити в частинах радіусу *R* кривини поверхні сфери за виміряними кутами *A, B, C* і вихідною стороною *a*, використовуючи теорему синусів. Для обчислення невідомих сторін отримаємо співвідношення такого вигляду:

для сторони *b* $\sin\frac{b}{R} = \sin\frac{a}{R}\frac{\sin B}{\sin A}$;

для сторони *c* $\sin\frac{c}{R} = \sin\frac{a}{R}\frac{\sin C}{\sin A}$.

Якщо синуси сторін розкласти в тригонометричний ряд, то після спрощення виразів з точністю малих величин до четвертого порядку отримаємо:

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}(1-\frac{a^2}{6R^2})(1-\frac{b^2}{6R^2})^{-1};$$

$$c = a\frac{\sin C}{\sin A}(1-\frac{a^2}{6R^2})(1-\frac{c^2}{6R^2})^{-1}.$$

Члени формул $(1-\frac{b^2}{6R^2})^{-1}$ та $(1-\frac{c^2}{6R^2})^{-1}$ розкладуємо в біноміальний ряд $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\ldots$ і з такою ж точністю остаточно отримаємо:

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}(1-\frac{a^2}{6R^2}+\frac{b^2}{6R^2});$$

$$c = a\frac{\sin C}{\sin A}(1-\frac{a^2}{6R^2}+\frac{c^2}{6R^2}).$$

Величини $\frac{a^2}{6R^2} = A_a$, $\frac{b^2}{6R^2} = A_b$, $\frac{c^2}{6R^2} = A_c$ називають аддитаментами. Аддитаменти – це поправки до сторін сферичного трикутника, з врахуванням яких його можна розв'язувати за сферичними кутами, використовуючи теорему синусів плоскої тригонометрії. Отже,

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}(1-A_a+A_b);$$

$$c = a\frac{\sin C}{\sin A}(1-A_a+A_c).$$

Числові значення аддитаментів невідомих сторін можна розраховувати за приблизними значеннями їх довжин:

$$b' = a\frac{\sin B}{\sin A}; \qquad c' = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

Отримані формули дійсні при розв'язуванні сферичних трикутників з довжинами сторін до 200км.

Для забезпечення точності довжин $m_S = \pm 0.001м$ у тріангуляції 1 класу при обчисленні аддитаментів середній радіус R сфери достатньо вважати постійним для поясу між паралелями протяжністю ±5° відносно середньої широти B_m. Оскільки пояс в 10° по широті відповідає ≈1000км, то середньою широтою B_m можна вважати широту деякої середньої точки мережі тріангуляції, якщо віддаль від неї до крайніх точок досягає 500км у напрямі з півдня на північ. Територія України розташована в широтах приблизно від 44° до 52°, тому при обчисленні аддитаментів достатньо прийняти середню широту $B_m \approx 48^\circ$ і середній радіус сфери R = 6 380 461м.

Якщо розв'язування сферичного трикутника розпочинати за виміряними кутами, то попередньо потрібно видалити його кутову нев'язку і визначити виправлені сферичні кути. Кожен з виправлених кутів розраховують як суму виміряного кута і поправки $-\frac{w}{3}$, де $w = A + B + C - 180^\circ - \varepsilon$ – нев'язка трикутника, ε – сферичний надлишок трикутника.

Завдання 4. Розв'язати два малих сферичних трикутники за вихідними даними, наведеними у завданні 3.

Робочі формули.

Загальна формула обчислення аддитаментів: $A_s = \frac{s^2}{6R^2}$.

Трикутник № 1: $b_1' = c_1 \frac{\sin B_1}{\sin C_1}$; $b_1 = b_1'(1 - A_{c_1} + A_{b_1})$;

$a' = c_1 \frac{\sin A_1}{\sin C_1}$; $a = a'(1 - A_{c_1} + A_a)$.

Трикутник № 2: $b_2' = a \frac{\sin B_2}{\sin A_2}$; $b_2 = b_2'(1 - A_a + A_{b_2})$;

$c_2' = a \frac{\sin C_2}{\sin A_2}$; $c_2 = c_2'(1 - A_a + A_{c_2})$

Приклад.

Вихідні дані (варіант $N = 0$).

Результати наближеного розв'язування трикутників у відношенні до моделей еліпсоїда *WGS84* та референц-еліпсоїда Красовського не відрізняються.

Відомість наближеного розв’язування трикутників

№ тр.	Верш.	Виміряні сферичні кути	-w / 3	Виправлені сферичні кути	Синуси кутів	Приблизні довжини	Аддитаменти	Довжини сторін
1	C	49° 59′ 51,20″	2.082	49° 59′ 53,282″	0,76602351	-	0,00001474	60 000,000
	B	51° 33′ 02,51″	2.082	51° 33′ 04,592″	0,78316495	61 342,630	0,00001541	61 342,671
	A	78° 27′ 09,18″	2.082	78° 27′ 11,262″	0,97976128	76 741,348	0,00002411	76 742,068
	Σ_1	180° 00′ 02,89″	6.245″	180° 00′ 09,135″				
	ε_1	9,135″						
	w_1	-6,245″						
2	D	59° 25′ 19,10″	3.581	59° 25′ 22,681″	0,86094601	-	0,00002411	76 742,068
	B	51° 46′ 48,52″	3.581	51° 46′ 52,101″	0,78565328	70 030,707	0,00002008	70 030,424
	C	68° 47′ 54,33″	3.581	68° 47′ 57,911″	0,93232014	83 104,137	0,00002827	83 104,483
	Σ_2	180° 00′ 01,95″	10.743″	180° 00′ 12,693″				
	ε_2	12,693″						
	w_2	-10,743″						

Результати розв’язування трикутників за теоремою Лежандра і способом аддитаментів повинні співпадати.

5. Розв'язування прямої геодезичної задачі способом допоміжної точки (спосіб Шрейбера)

Результати геодезичних вимірів визначають відносне взаємне положення геодезичних пунктів за відстанями між ними і кутами фігур, які вони утворюють. Абсолютне положення пунктів на земному еліпсоїді найбільш оптимально визначається їх координатами в геодезичній еліпсоїдальній системі. Геодезичні широта і довгота виражають положення пунктів, а азимут задає орієнтування напрямів між ними відносно ліній меридіанів та паралелей. Визначення геодезичних координат пунктів, відстаней і азимутів між ними – мета основних геодезичних робіт. Кінцевий результат досягається з розв'язування головних геодезичних задач.

На рис. 12: A і B – пункти на поверхні еліпсоїда з координатами B_1, L_1 і B_2, L_2; AP – меридіан т.A; BP – меридіан т.B; A_{12} і A_{21} – прямий і зворотній азимути напряму AB; s – довжина геодезичної лінії. C – допоміжна точка поверхні еліпсоїда, розташована на меридіані т.A так, що геодезична лінія CB має азимут $A_{CB} = 90^\circ$. Точка C має координати B_0, L_1.

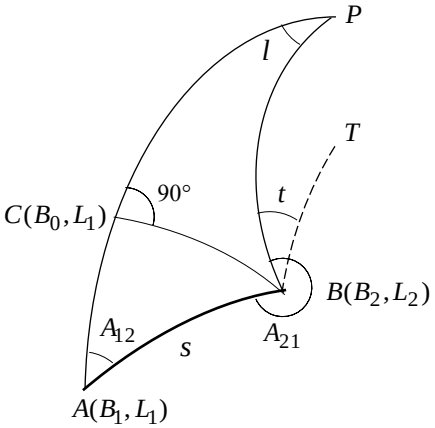

Рис. 12. Пункти A і B на поверхні еліпсоїда

Задача, в якій за величинами B_1, L_1, A_{12} та s розраховують величини B_2, L_2 та A_{21}, називається прямою геодезичною задачею.

Задача, в якій за величинами B_1, L_1 та B_2, L_2 розраховують величини A_{12}, A_{21} та s, називається оберненою геодезичною задачею.

Пряму і обернену задачі називають головними геодезичними задачами.

При розв'язуванні головних геодезичних задач з метою забезпечення потрібної точності результатів обчислень необхідно дотримуватись повної відповідності між точністю вихідних даних та точністю робочих формул. Така вимога викликана тим, що формули, які використовуються у вибраному способі розв'язування, є результатом розкладання в ряди тих чи інших диференціальних чи тригонометричних співвідношень на поверхні еліпсоїда. В цьому розумінні всі використовувані формули є нестрогими і неточними. Використовуючи певне число членів ряду, можна отримати результат розрахунку з різною точністю. Практично, виходячи з точності вихідних даних та заданої точності кінцевого результату обчислень за формулою, встановлюється число членів ряду, які потрібно враховувати у вигляді поправочних коефіцієнтів. Інші члени ряду, як малі величини порівняно з точністю результату розрахунку, відкидаються. Критерієм точності формули є степінь малої величини, якою нехтують у остаточному вигляді формули. Найчастіше такою малою величиною є відношення s/R. Формулу вважають практично точною, якщо вона містить достатнє число поправочних коефіцієнтів і забезпечує десятикратний запас (порядок) точності.

Розв'язування прямої задачі способом допоміжної точки виконується посереднім шляхом – обраховують насамперед різниці координат пунктів, а за ними – абсолютні значення координат. За умови використання робочих формул приведеного нижче вигляду, спосіб забезпечує розрахунок координат пунктів у тріангуляції 1 класу з точністю десятитисячних часток секунди, азимутів – з точністю тисячних часток секунди, а довжина геодезичної лінії розраховується з міліметровим рівнем точності.

Черговість дій при розв'язуванні прямої геодезичної задачі способом допоміжної точки:

1. Обчислення широти точки C

$$B_0 = B_1 + b. \qquad (16)$$

b – різниця широт пункту A і точки C:

$$b = \rho \frac{u}{M_1}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{e^2}{a(1-e^2)} u W_1 \sin 2B_1 + \frac{v^2 W_1^4}{3a^2(1-e^2)} - \frac{e^2}{2a^2} u^2 \cos 2B_1\right), \qquad (17)$$

де $W_1 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}$ – перша функція широти пункту A; $M_1 = \dfrac{a(1-e^2)}{W_1^3}$ – радіус кривини меридіанного перерізу в пункті A; $u = s\cos A_{12}$; $v = s \sin A_{12}$; u, v – проміжні умовні позначення.

При s < 30км поправочним коефіцієнтом $\dfrac{e^2}{2a^2} u^2 \cos 2B_1$ формули (17) можна нехтувати.

2. Обчислення широти пункту B

$$B_2 = B_0 - d = B_1 + b - d\,. \tag{18}$$

d – різниця широт пункту B і точки C:

$$d = \frac{c\tau\ W_0^2}{2\rho(1-e^2)}\ \left(1 - \frac{\tau^2}{6\rho^2} - \frac{\lambda^2}{12\rho^2} + \frac{e'^2\lambda^2\cos^2 B_0}{12\rho^2}(10\sin^2 B_0 - 1)\right). \tag{19}$$

$W_0 = \sqrt{1-e^2\sin^2 B_0}$ – перша функція широти точки C; c – різниця довгот пункту B і точки C:

$$c = \rho\ \frac{v\ W_0}{a}\ \left(1 - \frac{u^2 W_1^4}{6a^2(1-e^2)}\right); \tag{20}$$

$\lambda = \dfrac{c}{\cos B_0}$; $\quad \tau = c\ \ tgB_0$. $\quad \lambda$ і τ – проміжні величини.

При s < 30км поправочним коефіцієнтом $\dfrac{e'^2\lambda^2\cos^2 B_0}{12\rho^2}(10\sin^2 B_0 - 1)$ формули (19) можна нехтувати.

3. Обчислення довготи пункту B

$$L_2 = L_1 + l\,. \tag{21}$$

l – різниця довгот пунктів A і B (приблизне значення різниці l виражає величина λ):

$$l = \lambda\ \left(1 - \frac{\tau^2}{3\rho^2} + \frac{\lambda^4}{90\rho^4}(6 + 7\sin^2 B_0)\sin^2 B_0\right). \tag{22}$$

При s < 30км поправочним коефіцієнтом $\dfrac{\lambda^4}{90\rho^4}(6 + 7\sin^2 B_0)\sin^2 B_0$ формули (22) можна нехтувати.

4. Обчислення зворотного азимуту A_{21}

$$A_{21} = A_{12} \pm 180^\circ + t - \varepsilon\,. \tag{23}$$

t – кут, утворений на поверхні еліпсоїда кривою BP меридіанного перерізу в пункті B та кривою BT, яка паралельна меридіанному перерізові у пункті A. Кут t називають геодезичним зближенням меридіанів у пункті B. Приблизне значення геодезичного зближення меридіанів t виражає величина τ.

$$t = \tau\ \left(1 - \frac{\lambda^2}{6\rho^2} - \frac{\tau^2}{6\rho^2} - \frac{\lambda^2}{6\rho^2}e'^2\cos^4 B_0\right). \tag{24}$$

ε – сферичний надлишок трикутника ABC

$$\varepsilon = \rho\frac{u\ v\ W_1^4}{2a^2(1-e^2)}\,. \tag{25}$$

При s < 30км поправочним коефіцієнтом $\frac{\lambda^2}{6\rho^2} e'^2 \cos^4 B_0$ формули (24) можна нехтувати.

Завдання 5. Розв'язати пряму геодезичну задачу способом Шрейбера, якщо еліпсоїдальні координати пункту A $B_1 = 48^\circ 01' 01.1111'' + 7' \times N$, $L_1 = 22^\circ 11' 11.1111'' + 30' \times N$, азимут напряму AB $A_{12} = 1^\circ 01' 01.111'' + 3^\circ \times N$, довжина геодезичної лінії $s = (60000 - 500 \times N)$ *метрів*. N – номер варіанта.

Приклад.

Вихідні дані (варіант $N = 0$).

$B_1 = 48^\circ 01' 01.1111'' + 7' \times N$	48° 01′ 01,1111″	48°,01697531
$L_1 = 22^\circ 11' 11.1111'' + 30' \times N$	22° 11′ 11,1111″	22°,18641975
$A_{12} = 1^\circ 01' 01.111'' + 3^\circ \times N$	1° 01′ 01,111″	1°,01697528
$s = (60000 - 500 \times N)$	60 000 *метрів*	

Розв'язання завдання у відношенні до моделі еліпсоїда *WGS84*.

Сталі величини.

a	6378137 *м*	e^2	0,00669438	e'^2	0.00673950	ρ°	57°,29577951

1. Обчислення широти точки C.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$W_1 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}$	0,99814877	$\rho \frac{u}{M_1}$	0,53952870
$M_1 = \frac{a(1-e^2)}{W_1^3}$	6370755,126	$\frac{3}{4} \frac{e^2}{a(1-e^2)} u W_1 \sin 2B_1$	0,00004719
$u = s \cos A_{12}$	59990,549	$\frac{v^2 W_1^4}{3a^2(1-e^2)}$	0,00000001
$v = s \sin A_{12}$	1064,918	$\frac{e^2}{2a^2} u^2 \cos 2B_1$	-0,00000003
b	0°,53950327	B_0	48°,55647857
	0° 32′ 22,2118″		48° 33′ 23,3229″

2. Обчислення широти пункту *B*.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$W_0 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0}$	0,99811740	$\frac{c\tau \ W_0^2}{2\rho(1-e^2)}$	0,00000090
$\rho \frac{v \ W_0}{a}$	0,00954831	$\frac{\tau^2}{6\rho^2}$	0,00000001
$\frac{u^2 W_1^4}{6a^2(1-e^2)}$	0,00001473	$\frac{\lambda^2}{12\rho^2}$	0,00000001
c	0°,00954817	$\frac{e'^2 \lambda^2 \cos^2 B_0}{12\rho^2}(10\sin^2 B_0 - 1)$	0,00000000
$\lambda = \frac{c}{\cos B_0}$	0°,01442580	d	0°,00000090
$\tau = c \ tgB_0$	0°,01081371	B_2	48°,55647767
			48°33′23,3196″

3. Обчислення довготи пункту *B*.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$\frac{\tau^2}{3\rho^2}$	0,00000001	l	0°,01442580
$\frac{\lambda^4}{90\rho^4}(6 + 7\sin^2 B_0)\sin^2 B_0$	0,00000000	L_2	22°,20084555
			22°12′ 03,0440″

4. Обчислення зворотного азимуту.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$\varepsilon = \rho \frac{u \ v \ W_1^4}{2a^2(1-e^2)}$	0.00004496	t	0°.01081371
$\frac{\lambda^2}{6\rho^2}$	0.00000001	A_{21}	181°.02774403
$\frac{\lambda^2}{6\rho^2} e'^2 \cos^4 B_0$	0,00000000		181°01′ 39.878″

Розв’язання завдання
у відношенні до моделі референц-еліпсоїда Красовського.

Сталі величини.

a	6378245 *м*	e^2	0,00669342	e'^2	0.00673853	$\rho°$	57°,29577951

1. Обчислення широти точки *C*.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$W_1 = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B_1}$	0,99814903	$\rho \frac{u}{M_1}$	0,53951948
$M_1 = \frac{a(1-e^2)}{W_1^3}$	6370864,071	$\frac{3}{4} \frac{e^2}{a(1-e^2)} u W_1 \sin 2B_1$	0,00004718
$u = s \cos A_{12}$	59990,545	$\frac{v^2 W_1^4}{3a^2(1-e^2)}$	0,00000001
$v = s \sin A_{12}$	1064,918	$\frac{e^2}{2a^2} u^2 \cos 2B_1$	-0,00000003
b	0°,53949404	B_0	48°,55646935
	0° 32′ 22,1786″		48° 33′ 23,2897″

2. Обчислення широти пункту *B*.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$W_0 = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B_0}$	0,99811767	$\frac{c\tau \ W_0^2}{2\rho(1-e^2)}$	0,00000090
$\rho \frac{v \ W_0}{a}$	0,00954815	$\frac{\tau^2}{6\rho^2}$	0,00000001
$\frac{u^2 W_1^4}{6a^2(1-e^2)}$	0,00001473	$\frac{\lambda^2}{12\rho^2}$	0,00000001
c	0°,00954801	$\frac{e'^2 \lambda^2 \cos^2 B_0}{12\rho^2}(10 \sin^2 B_0 - 1)$	0,00000000
$\lambda = \frac{c}{\cos B_0}$	0°,01442556	d	0°,00000090
$\tau = c \ tg B_0$	0°,01081352	B_2	48°,55646845
			48°33′23,2864″

3. Обчислення довготи пункту *B*.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$\frac{\tau^2}{3\rho^2}$	0,00000001	l	0°,01442556
$\frac{\lambda^4}{90\rho^4}(6+7\sin^2 B_0)\sin^2 B_0$	0,00000000	L_2	22°,20084531
			22°12′03,0431″

4. Обчислення зворотного азимуту.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$\varepsilon = \rho \dfrac{u\ v\ W_1^4}{2a^2(1-e^2)}$	0.00004496	t	0°.01081352
$\dfrac{\lambda^2}{6\rho^2}$	0.00000001	A_{21}	181°.02774384
$\dfrac{\lambda^2}{6\rho^2} e'^2 \cos^4 B_0$	0,00000000		181°01′39.878″

6. Розв'язування прямої геодезичної задачі за формулами Гаусса із середніми аргументами

Якщо відомі координати B_1, L_1 початкового пункту A, азимут A_{12} та довжина елемента геодезичної лінії ds, то координати B_2, L_2 кінцевого пункту B лінії та її азимут A_{21} є функціями довжини s загального вигляду

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= f_1(s) \\ L_2 &= f_2(s) \\ A_{21} &= f_3(s) \end{aligned}\right\}, \qquad \text{причому} \qquad \left.\begin{aligned} B_1 &= f_1(0) \\ L_1 &= f_2(0) \\ A_{12} &= f_3(0) \end{aligned}\right\}.$$

Якщо функції f_i розкласти в ряд Маклорена вигляду $f_i(s) = f_i(0) + + \dfrac{f_i'(0)}{1!}s + \dfrac{f_i''(0)}{2!}s^2 + \dfrac{f_i'''(0)}{3!}s^3 + \ldots$, то для різниць $B_2 - B_1 = b$, $L_2 - L_1 = l$ та $A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ = t$ отримаємо систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} b &= \left(\frac{dB}{ds}\right)_1 s + \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_1 \frac{s^3}{6} + \ldots \\ l &= \left(\frac{dL}{ds}\right)_1 s + \left(\frac{d^2L}{ds^2}\right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3L}{ds^3}\right)_1 \frac{s^3}{6} + \ldots \\ t &= \left(\frac{dA}{ds}\right)_1 s + \left(\frac{d^2A}{ds^2}\right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3A}{ds^3}\right)_1 \frac{s^3}{6} + \ldots \end{aligned}\right\}. \qquad (26)$$

Індекс „1" вказує, що значення похідних обчислюються за аргументами B_1, L_1, A_{12}. Всі потрібні похідні можна визначити із системи вихідних диференціальних рівнянь поверхні еліпсоїда (див. Вступ). Якщо значення похідних виразити аргументами середньої широти $B_m = \dfrac{B_1 + B_2}{2}$ та середнього азимуту $A_m = \dfrac{A_{12} \pm 180^\circ + A_{21}}{2}$, то в рядах (26) будуть відсутні парні похідні і ряди будуть краще сходитись. При розв'язуванні геодезичних

задач це дає можливість обмежуватись меншим числом членів розкладу в ряди, зберігаючи при цьому потрібну точність результатів розрахунків. Для забезпечення точності розрахунку координат і азимутів у тріангуляції 1 класу у формулах розрахунку різниць широт, довгот і азимутів достатньо зберігати члени рядів з малими величинами у третій степені. З такою точністю формули мають наступний остаточний вигляд:

$$b = \rho \frac{V_m^3}{c} s \cos A_m (1 + \frac{l^2}{12\rho^2} + \frac{l^2}{24\rho^2} \sin^2 B_m); \qquad (27)$$

$$l = \rho \frac{V_m}{c} s \frac{\sin A_m}{\cos B_m} (1 - \frac{b^2}{24\rho^2} + \frac{l^2}{24\rho^2} \sin^2 B_m); \qquad (28)$$

$$t = \rho \frac{V_m}{c} s \sin A_m tg B_m (1 + \frac{l^2}{12\rho^2} - \frac{l^2}{24\rho^2} \sin^2 B_m + \frac{b^2}{12\rho^2}). \qquad (29)$$

$V_m = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_m}$ – друга функція середньої широти B_m; $c = a\sqrt{1 + e'^2}$ – радіус кривини меридіанного перерізу в полюсі.

У формулах (27) – (29) різниці координат і азимутів виражаються функціями середніх широти B_m та азимуту A_m, а також величин b та l, які невідомі. Тому розв'язок досягається методом послідовних наближень.

У першому наближенні

$$b^{(1)} = \rho \frac{V_1^3}{c} s \cos A_{12}; \qquad l^{(1)} = \rho \frac{V_1}{c} s \frac{\sin A_{12}}{\cos B_1}; \qquad t^{(1)} = \rho \frac{V_1}{c} s \sin A_{12} \; tg B_1;$$

$$B_m^{(1)} = B_1 + \frac{b^{(1)}}{2}; \qquad A_m^{(1)} = A_{12} + \frac{t^{(1)}}{2}.$$

$V_1 = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_1}$ – друга функція широти B_1.

У другому наближенні за значеннями $B_m^{(1)}$, $A_m^{(1)}$, $b^{(1)}$, $l^{(1)}$, користуючись формулами (27)–(29), розраховують $B_m^{(2)}$, $A_m^{(2)}$, $b^{(2)}$, $l^{(2)}$. Далі наближення за тими ж формулами повторюють, доки результати розрахунків у двох суміжних наближеннях не будуть рівні між собою.

З урахуванням остаточних значень величин b, l, t у підсумку одержимо:

$$B_2 = B_1 + b, \qquad L_2 = L_1 + l, \qquad A_{21} = A_{12} \pm 180^\circ + t.$$

Завдання 6. Розв'язати пряму геодезичну задачу за формулами Гаусса із середніми аргументами з вихідними даними, які наведено у завданні 5.

Приклад.

Вихідні дані (завдання 5, варіант $N = 0$).

Розв'язання завдання у відношенні до моделі еліпсоїда *WGS84*.

Сталі величини.

a	6378137 *м*	e'^2	0.00673950	$\rho°$	57°,29577951

Наближення (1)			
Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$c = a\sqrt{1+e'^2}$	6399593,626	$V_1 = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B_1}$	1,00150663
$b^{(1)} = \rho\frac{V_1^3}{c}s\cos A_{12}$	0,53952870	$t^{(1)} = \rho\frac{V_1}{c}s\sin A_{12}\ \ tgB_1$	0,01061113
$l^{(1)} = \rho\frac{V_1}{c}s\frac{\sin A_{12}}{\cos B_1}$	0,01427488		
$B_m^{(1)} = B_1 + \frac{b^{(1)}}{2}$	48,28673966	$A_m^{(1)} = A_{12} + \frac{t^{(1)}}{2}$	1,02228084

Позначення дій	Результати в наближеннях			
	(2)	(3)	(4)	(5)
$V_m = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B_m}$	1.00149088	1.00149088	1.00149088	1.00149088
$\frac{l^2}{12\rho^2}$	0.00000005	0.00000005	0.00000005	0.00000005
$\frac{l^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m$	0.00000001	0.00000001	0.00000001	0.00000001
$\frac{b^2}{24\rho^2}$	0.00000369	0.00000369	0.00000369	0.00000369
$\rho\frac{V_m^3}{c}s\cos A_m$	0.53950237	0.53950236	0.53950236	0.53950236
$\rho\frac{V_m}{c}s\frac{\sin A_m}{\cos B_m}$	0.01442475	0.01442585	0.01442585	0.01442585
$\rho\frac{V_m}{c}s\sin A_m tgB_m$	0.01076785	0.01076867	0.01076867	0.01076867
b	0.53950237	0.53950236	0.53950236	0.53950236
l	0.01442469	0.01442580	0.01442580	0.01442580
t	0.01076793	0.01076875	0.01076875	0.01076875
$B_m = B_1 + \frac{b}{2}$	48.28672649	48.28672649	48.28672649	-
$A_m = A_{12} + \frac{t}{2}$	1.02235924	1.02235965	1.02235965	-

Кінцеві результати.

$B_2 = B_1 + b$	48°,55647766	48° 33′ 23,3196″
$L_2 = L_1 + l$	22°,20084555	22° 12′ 03,0440″
$A_{21} = A_{12} \pm 180° + t$	181°,02774403	181° 01′ 39,878″

Розв'язання завдання
у відношенні до моделі референц-еліпсоїда Красовського.

Сталі величини.

a	6378245 *м*	e'^2	0.00673853	$\rho°$	57°,29577951

Наближення (1)			
Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$c = a\sqrt{1+e'^2}$	6399698,916	$V_1 = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B_1}$	1,00150641
$b^{(1)} = \rho\frac{V_1^3}{c}s\cos A_{12}$	0,53951948	$t^{(1)} = \rho\frac{V_1}{c}s\sin A_{12}\ tgB_1$	0,01061095
$l^{(1)} = \rho\frac{V_1}{c}s\frac{\sin A_{12}}{\cos B_1}$	0,01427464		
$B_m^{(1)} = B_1 + \frac{b^{(1)}}{2}$	48,28673504	$A_m^{(1)} = A_{12} + \frac{t^{(1)}}{2}$	1,02228075

Позначення дій	Результати в наближеннях			
	(2)	(3)	(4)	(5)
$V_m = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B_m}$	1.00149067	1.00149067	1.00149067	1.00149067
$\frac{l^2}{12\rho^2}$	0.00000005	0.00000005	0.00000005	0.00000005
$\frac{l^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m$	0.00000001	0.00000001	0.00000001	0.00000001
$\frac{b^2}{24\rho^2}$	0.00000369	0.00000369	0.00000369	0.00000369
$\rho\frac{V_m^3}{c}s\cos A_m$	0.53949315	0.53949313	0.53949313	0.53949313
$\rho\frac{V_m}{c}s\frac{\sin A_m}{\cos B_m}$	0.01442450	0.01442561	0.01442561	0.01442561
$\rho\frac{V_m}{c}s\sin A_m tgB_m$	0.01076766	0.01076848	0.01076849	0.01076849
b	0.53949315	0.53949314	0.53949314	0.53949314
l	0.01442445	0.01442555	0.01442556	0.01442556
t	0.01076774	0.01076856	0.01076857	0.01076857
$B_m = B_1 + \frac{b}{2}$	48.28672188	48.28672187	48.28672187	-
$A_m = A_{12} + \frac{t}{2}$	1.02235915	1.02235956	1.02235956	-

Кінцеві результати.

$B_2 = B_1 + b$	48°,55646844	48° 33′ 23,2864″
$L_2 = L_1 + l$	22°,20084531	22° 12′ 03,0431″
$A_{21} = A_{12} \pm 180^\circ + t$	181°,02774385	181° 01′ 39,878″

7. Розв'язування оберненої геодезичної задачі за формулами Гаусса із середніми аргументами

Для розв'язування оберненої геодезичної задачі, в якій за координатами B_1, L_1 та B_2, L_2 пунктів *A* та *B* розраховують азимути A_{12}, A_{21} та довжину *s* геодезичної лінії *AB*, використаємо обернений алгоритм розв'язування за формулами Гаусса із середніми аргументами.

Черговість дій при розв'язуванні задачі за формулами Гаусса (27)–(29).

1. Обчислення різниць координат $B_2 - B_1 = b$, $L_2 - L_1 = l$ та середньої широти $B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$.

2. Обчислення сум поправочних коефіцієнтів у формулах (27) та (28):

$$\Delta_b = 1 + \frac{l^2}{12\rho^2} + \frac{l^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m; \qquad \Delta_l = 1 - \frac{b^2}{24\rho^2} + \frac{l^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m.$$

3. Обчислення середнього азимута A_m.

З урахуванням позначень Δ_b та Δ_l формули (27) та (28) набувають вигляду $b = \rho\frac{V_m^3}{c}s\cos A_m\Delta_b$ та $l = \rho\frac{V_m}{c}s\frac{\sin A_m}{\cos B_m}\Delta_l$. З них виражаємо допоміжні величини *P* та *Q*:

$$s\cos A_m = \frac{bc}{\rho\ V_m^3\ \Delta_b} = \pm Q; \qquad s\sin A_m = \frac{l\ c\cos B_m}{\rho\ V_m\ \Delta_l} = \pm P.$$

З останніх двох рівнянь маємо: $\frac{P}{Q} = tgA_m$ і $A_m = arctg\frac{P}{Q}$. Беручи до уваги період тангенса, обчислене таким чином значення A_m ще не виражає величину середнього азимута. Остаточне значення A_m визначають за знаками величин *P* та *Q* залежно від розташування напряму лінії *AB* у четвертях, як це показано у табл. 5.

Таблиця 5 – Визначення остаточного значення азимута A_m

№ четверті	Знаки величин *P* та *Q*		Остаточне значення азимута A_m
	P	*Q*	
1	+	+	$A_m = A_{m(обчисл)}$
2	+	-	$A_m = 180^\circ - A_{m(обчисл)}$
3	-	-	$A_m = 180^\circ + A_{m(обчисл)}$
4	-	+	$A_m = 360^\circ - A_{m(обчисл)}$

4. Обчислення довжини геодезичної лінії $s = \frac{P}{\sin A_m}$ або $s = \frac{Q}{\cos A_m}$.

5. Обчислення зближення меридіанів t за формулою (29):

$$t = \rho \frac{V_m}{c} s \sin A_m \quad tgB_m (1 + \frac{l^2}{12\rho^2} - \frac{l^2}{24\rho^2} \sin^2 B_m + \frac{b^2}{12\rho^2}).$$

6. Обчислення азимутів $A_{12} = A_m - \frac{t}{2}$ та $A_{21} = A_m \pm 180^\circ + \frac{t}{2}$.

У порівнянні з іншими способами розв'язування оберненої геодезичної задачі спосіб Гаусса вирізняється простотою робочих формул, тому розглядається як найбільш оптимальний. Оскільки за умовою задачі один із середніх аргументів B_m можна розрахувати завчасно, то незручність, яка має місце у прямій задачі (застосування методу послідовних наближень), у оберненій задачі відсутня.

Завдання 7. Розв'язати обернену геодезичну задачу між пунктами *A* та *B*, якщо координати пункту *A* $B_1 = 48^\circ 01' 01.1111'' + 7' \times N$, $L_1 = 22^\circ 11' 11.1111'' + 30' \times N$. N – номер варіанта. Координати пункту *B* є результатом розв'язування прямої геодезичної задачі (завдання 5,6).

Приклад.
Розв'язання завдання у відношенні до моделі еліпсоїда *WGS84*.

Вихідні дані (варіант $N = 0$).

$B_1 = 48^\circ 01' 01.1111'' + 7' \times N$	48° 01′ 01,1111″	48°,01697531
$L_1 = 22^\circ 11' 11.1111'' + 30' \times N$	22° 11′ 11,1111″	22°,18641975
B_2	48° 33′ 23,3196″	48°,55647766
L_2	22° 12′ 03,0440″	22°,20084555

Сталі величини.

a	6378137 *м*	e'^2	0.00673950	ρ°	57°,29577951

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
1. Обчислення різниць координат і середньої широти			
$B_2 - B_1 = b$	0°,53950236	$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$	48°,28672649
$L_2 - L_1 = l$	0°,01442580		

2. Обчислення сум поправочних коефіцієнтів у формулах (27) та (28)			
$\frac{l^2}{12\rho^2}$	0,00000001	Δ_b	1,00000001
$\frac{b^2}{24\rho^2}$	0,00000369	Δ_l	0,99999631
$\frac{l^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m$	0,00000000		
3. Обчислення середнього азимута A_m			
$c = a\sqrt{1+e'^2}$	6399593,626	$P = \frac{lc\cos B_m}{\rho V_m \Delta_l}$	1070,556
$V_m = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B_m}$	1,00149088	$A_m = arctg\frac{P}{Q}$	1°,02235965
$Q = \frac{bc}{\rho V_m^3 \Delta_b}$	59990,448	A_m	1°01′20,495″
4. Обчислення довжини геодезичної лінії s			
$s = \frac{P}{\sin A_m}$	60 000,000 *м*	$s = \frac{Q}{\cos A_m}$	60 000,000 *м*
5. Обчислення зближення меридіанів t			
$\rho\frac{V_m}{c}s\sin A_m tgB_m$	0,01076867	$1+\frac{l^2}{12\rho^2}-\frac{l^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m+\frac{b^2}{12\rho^2}$	1,00000739
$t = \rho\frac{V_m}{c}s\sin A_m tgB_m(1+\frac{l^2}{12\rho^2}-\frac{l^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m+\frac{b^2}{12\rho^2})$			0°,01076875
6. Обчислення азимутів			
$A_{12} = A_m - \frac{t}{2}$	1°,01697528 1°01′01,111″	$A_{21} = A_m \pm 180^\circ + \frac{t}{2}$	181°,02774402 181°01′39,878″

Розв’язання завдання
у відношенні до моделі референц-еліпсоїда Красовського.

Вихідні дані (варіант $N = 0$).

$B_1 = 48^\circ 01' 01.1111'' + 7' \times N$	48° 01′ 01,1111″	48°,01697531
$L_1 = 22^\circ 11' 11.1111'' + 30' \times N$	22° 11′ 11,1111″	22°,18641975
B_2	48° 33′ 23,2864″	48°,55646844
L_2	22° 12′ 03,0431″	22°,20084531

Сталі величини.

a	6378245 *м*	e'^2	0.00673853	$\rho°$	57°,29577951

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
1. Обчислення різниць координат і середньої широти			
$B_2 - B_1 = b$	0°,53949314	$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$	48°,28672187
$L_2 - L_1 = l$	0°,01442556		
2. Обчислення сум поправочних коефіцієнтів у формулах (27) та (28)			
$\frac{l^2}{12\rho^2}$	0,00000001	Δ_b	1,00000001
$\frac{b^2}{24\rho^2}$	0,00000369		
$\frac{l^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m$	0,00000000	Δ_l	0,99999631
3. Обчислення середнього азимута A_m			
$c = a\sqrt{1+e'^2}$	6399698,916	$P = \frac{lc\cos B_m}{\rho V_m \Delta_l}$	1070,556
$V_m = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B_m}$	1,00149067	$A_m = arctg\,\frac{P}{Q}$	1°,02235956
$Q = \frac{bc}{\rho V_m^3 \Delta_b}$	59990,448	A_m	1°01′20,494″
4. Обчислення довжини геодезичної лінії s			
$s = \frac{P}{\sin A_m}$	60 000,000 *м*	$s = \frac{Q}{\cos A_m}$	60 000,000 *м*
5. Обчислення зближення меридіанів t			
$\rho\frac{V_m}{c}s\sin A_m tgB_m$	0,01076849	$1+\frac{l^2}{12\rho^2}-\frac{l^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m+\frac{b^2}{12\rho^2}$	1,00000739
$t = \rho\frac{V_m}{c}s\sin A_m tgB_m\left(1+\frac{l^2}{12\rho^2}-\frac{l^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m+\frac{b^2}{12\rho^2}\right)$			0°,01076857
6. Обчислення азимутів			
$A_{12} = A_m - \frac{t}{2}$	1°,01697528	$A_{21} = A_m \pm 180^\circ + \frac{t}{2}$	181°,02774385
	1°01′01,111″		181°01′39,878″

Література

1. Закатов П. С. Курс высшей геодезии : підручник. Москва: Недра, 1964. 504 с.
2. Марченко О. М., Третяк К. Р., Ярема Н. П. Референцні системи в геодезії : навч. посібник. Львів : Львівська політехніка, 2013. 216 с.
3. Машимов М. М. Теоретическая геодезия : справочное пособие. Москва : Недра, 1991. 268 с. URL: http://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-mashimov-mm-geodeziya-teoreticheskaya-geodeziya-1991.pdf
4. Морозов Н. П. Курс сфероидической геодезии : навч. посібник. Москва : Недра, 1969. 304 с.
5. Рабинович Б. Н. Практикум по высшей геодезии (Вычислительные работы) : навч. посібник. Москва : Геодезиздат, 1961. 339 с.
6. Савчук С. Г. Вища геодезія : навч. посібник. Житомир : ЖДТУ, 2005. 315 с.
7. Савчук С. Г. Вища геодезія: підручник, видання друге, доповнене. Львів : Львівська політехніка, 2005. 315 с. URL: https://studfiles.net/preview/5198885/