

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та
природокористування
Навчально-науковий інститут агроекології та землеустрою
Кафедра геодезії та картографії

05-04-120М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних та самостійних робіт
з навчальної дисципліни «Вища геодезія»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за
освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій»
спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»
денної форми навчання

ПРОЕКЦІЯ ГАУССА-КРЮГЕРА

Рекомендовано науково-методичною
радою з якості ННІАЗ
Протокол № 1 від 30.08.2022р.

Рівне – 2022

Методичні вказівки до виконання практичних та самостійних робіт з навчальної дисципліни «Вища геодезія» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій» спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» денної форми навчання. Проекція Гаусса-Крюгера [Електронне видання] / Тадеєв О. А. – Рівне: НУВГП, 2022. – 31 с.

Укладач: Тадеєв О. А., доцент кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Відповідальний за випуск: Янчук Р. М., завідувач кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Керівник групи забезпечення спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»: доктор сільськогосподарських наук, професор Мошинський В.С.

© О. А. Тадеєв, 2022
© НУВГП, 2022

Зміст

Вступ.....	3
1. Редукція геодезичної мережі з еліпсоїда на площину.....	9
2. Перетворення координат з прямокутної в еліпсоїдальну систему.....	27
Література.....	31

Вступ

Земний еліпсоїд обертання – одна з різновидів моделей Землі, яка має найбільше практичне застосування при виконанні геодезичних робіт. У вітчизняній геодезичній практиці використовують дві модифікації моделі Землі у формі земного еліпсоїда обертання – загальний земний еліпсоїд та референц-еліпсоїд. Загальний земний еліпсоїд – це геометрична форма із встановленими параметрами та розмірами, яка математично найкраще описує фігуру Землі в цілому і має центр та вісь обертання, які збігаються з центром мас та віссю обертання Землі. Референц-еліпсоїд – це геометрична форма із встановленими параметрами та розмірами, яка математично найкраще описує фігуру Землі у межах певної території. Геометричний центр референц-еліпсоїда наближено збігається з центром мас, а вісь обертання зорієнтована певним чином відносно осі обертання Землі.

До таблиці 1 зведено геометричні параметри найбільш поширених моделей загального земного еліпсоїда *GRS80*, *WGS84* та референц-еліпсоїда Красовського. Перелічені параметри повністю описують розміри та форму тієї чи іншої моделі земного еліпсоїда. Серед них: велика (або екваторіальна) піввісь $a = OE$ (див. рис. 1), мала (або полярна) піввісь $b = OP_o$, полярне стиснення α , перший ексцентриситет еліпсоїда e ; другий ексцентриситет еліпсоїда e' .

Таблиця 1 – Геометричні параметри еліпсоїдальних систем *GRS80*, *WGS84* та референц-еліпсоїда Красовського

Назва та позначення параметру	<i>GRS80</i>	<i>WGS84</i>	Референц-еліпсоїд Красовського
велика піввісь a	6 378 137 м	6 378 137 м	6 378 245 м
мала піввісь b	6 356 752,3141 м	6 356 752,3142 м	6 356 863,01877 м
полярне стиснення α	1/298,257222101	1/298,257223563	1/298,3
перший ексцентриситет e^2	0,00669438002290	0,00669437999014	0,006693421623
другий ексцентриситет e'^2	0,00673949677548	0,00673949674228	0,006738525415

Зв'язки між параметрами виражають наступні формули:

$$\alpha = \frac{a-b}{a}; \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}.$$

Беручи до уваги зазначені зв'язки, при розв'язанні задач достатньо задатись лише двома параметрами. Їх називають основними. Як правило, це параметри a і b або a і α .

До тієї чи іншої моделі еліпсоїда завжди прив'язані роботи зі створення та обслуговування державних опорних геодезичних мереж. Положення пунктів опорних мереж визначається в просторовій геоцентричній полярній еліпсоїдальній системі координат BLH . Така система відноситься до категорії модельних систем з основною відліковою координатною площиною – екватором.

На рис. 1 показано координати довільної точки простору (т. A) в системі BLH у відношенні до координатних осей прямокутної просторової геоцентричної системи XYZ . На рис. 1 позначено:

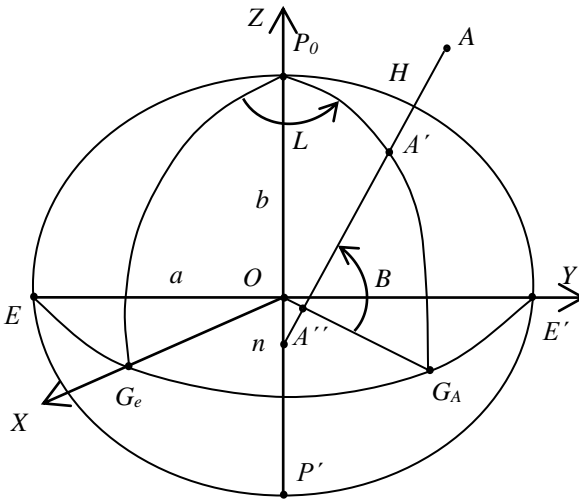


Рис. 1. Координати т. A в просторовій геоцентричній полярній еліпсоїдальній системі координат BLH

- т. O – геометричний центр еліпсоїда обертання;
- G_e – точка перетину початкового меридіана і екватора;
- G_A – точка перетину геодезичного меридіана т. A і екватора;
- $A'n$ – нормаль до поверхні еліпсоїда;
- A' – проекція т. A на поверхню еліпсоїда у напрямі нормалі $A'n$;

A'' – проекція т. A на площину екватора EG_AE у напрямі нормалі $A'n$;
 OG_A – лінія перетину площини $P_0A'G_AO$ меридіана т. A і площини екватора EG_AE .

Положення точки A в системі BLH визначають наступні координати:

- геодезична еліпсоїдальна широта $B = \sphericalangle G_A A'' A'$ – гострий кут, утворений нормаллю $A'n$ до поверхні в точці A' та площиною екватора EG_AE' ;
- геодезична еліпсоїдальна довгота $L = \sphericalangle G_e OG_A$ – двограний кут, утворений площиною P_0G_eO початкового меридіана та площиною $P_0A'G_AO$ меридіана точки A ;
- геодезична висота $H = AA'$ – довжина проекції т. A на поверхню земного еліпсоїда у напрямі нормалі $A'n$.

Просторова геоцентрична полярна еліпсоїдальна система координат BLH має двовимірний різновид. У цьому випадку положення точки визначають дві координати BL і задають його виключно на поверхні земного еліпсоїда обертання. Такий різновид системи координат використовується, зокрема, при розв'язанні прикладних задач сфероїдної геодезії.

Площини, проведені через нормаль Mn до поверхні еліпсоїда в точці M (див. рис. 2), називають нормальними площинами. Криві на поверхні еліпсоїда, які утворені її перетином з нормальними площинами, називають нормальними перерізами. Головні нормальні перерізи – це два взаємно перпендикулярних нормальних перерізи в точці, які мають найбільшу і найменшу кривину. Головні нормальні перерізи – це меридіанний переріз

PMP_1 з кривиною радіусу $M = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$ та переріз першого вертикала TMK з

кривиною $N = \frac{a}{W}$. Величину $W = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B}$ називають першою функцією

широти. Середнім радіусом кривини $R = \sqrt{MN}$ в точці поверхні еліпсоїда називають граничне значення середнього арифметичного з радіусів кривини нормальних перерізів у точці, якщо їх число прямує до нескінченності.

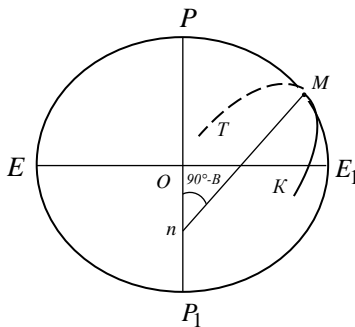


Рис. 2 Головні нормальні перерізи поверхні еліпсоїда

Якщо у двох довільних точках A і B на поверхні еліпсоїда провести нормальні площини так, щоб вони проходили з точки A на точку B і навпаки, то дві таких площини внаслідок перетину з поверхнею еліпсоїда утворять на ній дві різні криві. Такі криві називають взаємними нормальними перерізами (див. рис. 3). Візирна площина приладу, встановленого в т. A і наведеного на т. B , співпадає з кривою прямого нормального перерізу AaB . Візирна площина приладу, встановленого в точці B і наведеного на точку A , співпадає з кривою прямого нормального перерізу BbA – він є зворотним відносно перерізу AaB . Розбіжності в положенні взаємних нормальних перерізів приводять до того, що виміряні у вершинах куту не утворюють на поверхні еліпсоїда замкненого трикутника. Такий ефект називають двозначністю взаємних нормальних перерізів. Цю невизначеність ліквідують з використанням геодезичної лінії. Геодезична лінія між точками A і B – це крива на поверхні еліпсоїда, в кожній точці якої побудована нормаль співпадає з головною нормаллю, яка побудована у початковій точці перерізу. Геодезична лінія проходить між взаємними нормальними перерізами ближче до прямого нормального перерізу з даної точки і визначає найкоротшу відстань s між точками A і B .

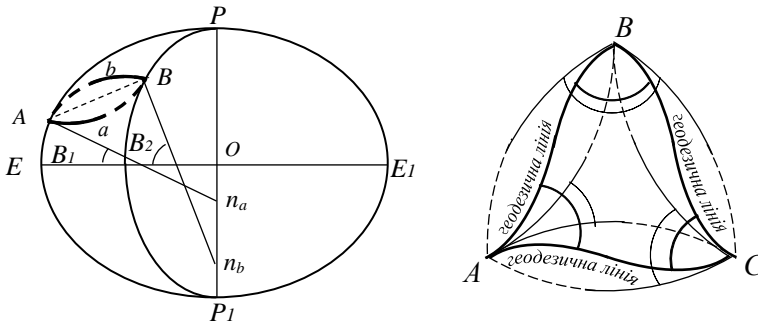


Рис. 3. Взаємні нормальні перерізи і геодезична лінія

Основне рівняння геодезичної лінії $r \sin A = const$: в кожній точці геодезичної лінії добуток радіуса $r = N \cos B$ паралелі на синус азимута A є сталою величиною. Це рівняння є одним з наслідків системи вихідних диференціальних рівнянь поверхні еліпсоїда

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{ds} &= \frac{\cos A}{M} = \frac{V^3}{c} \cos A \\ \frac{dA}{ds} &= \frac{\sin A}{N \cos B} = \frac{V}{c} \sec B \sin A \\ \frac{dA}{ds} &= \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B = \frac{V}{c} \operatorname{tg} B \sin A \end{aligned} \right\}.$$

Тут l – різниця довгот точок A і B ; $c = a\sqrt{1+e'^2}$ – радіус кривини меридіанного перерізу в полюсі при $B = 90^\circ$; $V = \sqrt{1+e'^2} \cos^2 B$ – друга функція широти. Кути між взаємними нормальними перерізами та між геодезичною лінією і кривою прямого нормального перерізу враховуються як поправки при обробці кутових та лінійних вимірів у геодезичних мережах.

Співвідношення між кутовими та лінійними елементами на поверхні еліпсоїда виражаються виключно у формі диференціальних рівнянь. Це спричинює незручності їх використання для вирішення прикладних задач. Тому диференціальні рівняння підлягають інтегруванню. Але підінтегральні вирази здебільшого не виражаються елементарними функціями, внаслідок чого їх розкладають у ряди, а інтегрування реалізують по частинах ряду. У підсумку це забезпечує нестрогі (незамкнені) робочі формули. Окреслена обставина унеможливило вирішення задач врівноважування вимірів у геодезичних мережах, які прив'язані до еліпсоїда і відповідної йому системи координат BLH . Крім того, система еліпсоїдальних координат непридатна для практичного користування при розв'язанні різних прикладних інженерних задач, наприклад, при картографуванні місцевості, проектуванні та перенесенні в природу споруд тощо. Для розв'язання такого роду задач найбільш зручно користуватись системою плоских прямокутних координат x, y , яка утворюється як результат проєкції еліпсоїда на площину.

Поверхню еліпсоїда неможливо розгорнути на площину без спотворень. Поверхня еліпсоїда відображується на площині за законом, який математично виражають рівняння загального вигляду

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(B, L) \\ y &= f_2(B, L) \end{aligned} \right\}$$

Закон відображення обирають з такого розрахунку, щоб забезпечити єдину державну систему прямокутних координат. Рівняння повинні забезпечити перехід від елементів на поверхні еліпсоїда до відповідних їм елементів на площині. Перехід має задовольняти таким вимогам: 1) найменші спотворення зображених на площині елементів поверхні еліпсоїда; 2) можливість врахування та вираження спотворень; 3) простота проєкції поверхні еліпсоїда на площину. Проєкція еліпсоїда на площину не повинна мати однієї початкової точки відліку, оскільки це зумовило б суттєво великі спотворення по мірі віддаленні від неї. Зазначеним вимогам задовольняє конформна проєкція – зображення, при якому безмежно малий контур на поверхні еліпсоїда відображується подібним йому контуром на площині. В конформній проєкції кутові спотворення відсутні, а масштаб лінійних зображень постійний вздовж заданих головних напрямів.

У вітчизняній практиці виконання геодезичних робіт використовується конформна проєкція Гаусса–Крюгера. В ній еліпсоїд розділений меридіанами на зони з постійною різницею довгот. Кожна зона є сфероїдним двокутником

з вершинами у полюсах (див. рис. 4). Протяжність зони по довготі складає 6° (або 3° в районах проведення крупномасштабних знімаль). Східний та західний меридіани шестиградусної зони співпадають з правою та лівою рамками листа карти масштабу 1:1000000. Середній меридіан зони називають осьовим меридіаном з довготою L_0 . Довгота осьового меридіана кожної зони

$$L_0 = 6n - 3,$$

де n – порядковий номер зони, розпочинаючи від нульового меридіана.

Номер зони обчислюється за довготою L як ціла частина відношення $\frac{L^\circ}{6^\circ}$, збільшена на 1:

$$n = 1 + \text{ціла частина} \frac{L^\circ}{6^\circ}.$$

Територія України розташована в межах зон №№ 4,5,6,7.

Якщо положення точки на поверхні еліпсоїда описується геодезичними широтою B та довготою L , то в зоні – широтою B та довготою $l = L - L_0$.

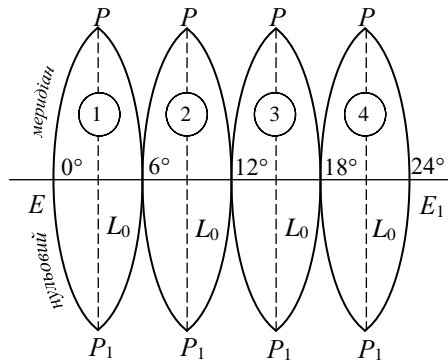


Рис. 4. Зони проекції Гаусса-Крюгера

Осьовий меридіан кожної зони і екватор в проекції Гаусса-Крюгера на площині зображуються прямими лініями. Зображення осьового меридіана зони на площині прийнято за вісь абсцис x , а зображення екватора – за вісь ординат y . Вздовж осьового меридіана еліпсоїд зображується на площині без спотворень. Перетин осей абсцис і ординат є початком координат x_0, y_0 кожної зони. Зображення a точки A в проекції зони на площину описується прямокутними координатами x, y , як це показано на рис. 5. В межах України абсциси x додатні; ординати y додатні східніше та від’ємні західніше відносно осьового меридіана зони. Щоб уникнути від’ємних ординат, точкам

перетину осей абсцис та ординат у кожній зоні умовно присвоюють значення ординати $y_0 = 500\,000$ м. Щоб констатувати розташування точки a у тій чи іншій зоні, в значенні її ординати у спереду записують номер зони.

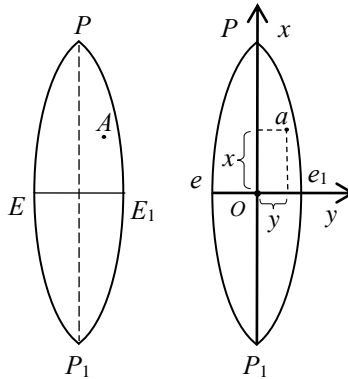


Рис. 5. Прямокутні координати x, y у зоні проєкції Гаусса-Крюгера

1. Редукція геодезичної мережі з еліпсоїда на площину

Розглянемо деякі особливості проєкції геодезичних ліній з еліпсоїда на площину. Це має принципово важливе значення при реалізації переходу з еліпсоїда на площину з точки зору редукції елементів геодезичних мереж.

Позначення на еліпсоїді на рис. 6: OP – осьовий меридіан; AP – меридіан т.А; AT – дотична до еліпсоїда, яка паралельна площині осьового меридіана OP ; γ' – геодезичне зближення меридіанів у т.А; A_{AC} – азимут геодезичної лінії AC ; α'_{AC} – приблизний дирекційний кут геодезичної лінії AC .

Позначення на площині на рис. 6: an – зображення меридіана AP т.А на площині; at – зображення дотичної AT ; at_1 – лінія, паралельна зображенню осьового меридіана на площині (осі абсцис Ox); γ – зближення меридіанів на площині у т. a ; α_{AC} – дирекційний кут хорди ac на площині; δ – кут відхилення хорди ac від кривої проєкції геодезичної лінії AC на площину.

Внаслідок конформності проєкції, кути $\gamma', \alpha'_{AC}, A_{AC}$ переносяться з еліпсоїда на площину без змін. Внутрішні кути трикутників також не змінюються, але на площині вони утворюються сторонами, які є кривими проєкцій геодезичних ліній (наприклад, пунктирна крива ac). Якщо вершини трикутників з'єднати хордами, то кути між хордами будуть рівні кутам між кривими.

З метою розв'язування трикутників на площині потрібно перейти від кутів між кривими до кутів між хордами. Для цього в кожную сторону чи напрям

обчислюється поправка δ за кривину зображення геодезичної лінії на площині (поправка за редукцію напрямку). З врахуванням цієї поправки дирекційний кут α_{AC} хорди ac на площині, який відповідає азимуту A_{AC} геодезичної лінії AC , виражається формулою

$$\alpha_{AC} = A_{AC} - \gamma - \delta .$$

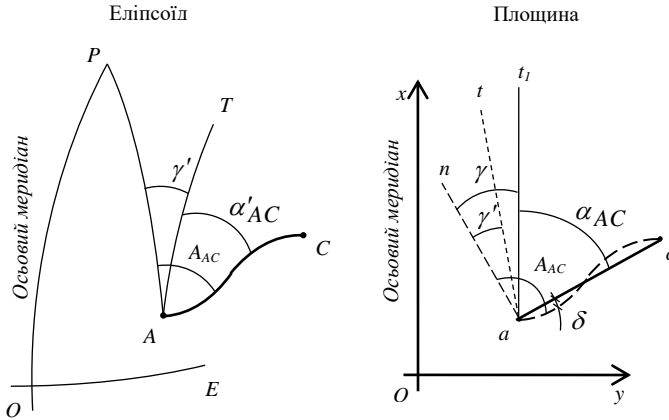


Рис. 6. Перенесення геодезичних ліній з еліпсоїда на площину

При переході на площину внаслідок спотворень проєкції довжина геодезичної лінії $s = AC$ не дорівнює довжині хорди $S = ac$. Завжди $S \geq s$. Тому в довжину $s = AC$ вводиться поправка за редукцію віддалі.

Врахування поправок за редукцію напрямів геодезичних ліній та за редукцію віддалей є обов'язковим при редукції геодезичних мереж з еліпсоїда на площину.

Хід дій при переході з еліпсоїда на площину розкриємо на прикладі редукції мережі мікротриангуляції, зображеної на схемі рис. 7.

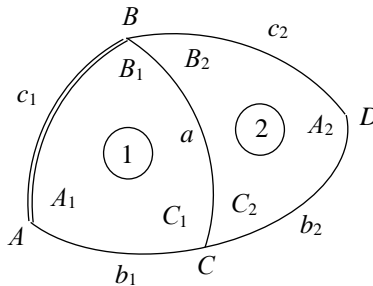


Рис. 7. Ланцюжок трикутників мережі мікротриангуляції

Вихідними даними є координати B_A, L_A початкового пункту A мережі, довжина геодезичної лінії $s = c_1$ та азимут A_{AB} початкової сторони AB , а також виміряні внутрішні кути трикутників.

1. Розрахунок номера зони n , довготи її осьового меридіана L_0 та координат B_A, l у зоні для початкового пункту A :

$$n = 1 + \text{ціла частина} \frac{L_A^\circ}{6^\circ}; \quad L_0 = 6n - 3; \quad l = L_A - L_0.$$

2. Розрахунок прямокутних координат x, y початкового пункту A за його координатами в зоні B_A, l (див. рис. 8):

$$x_A = X + \frac{l^2}{2\rho^2} N \sin B_A \cos B_A \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 B_A}{12\rho^2} (5 - \operatorname{tg}^2 B_A + 9e'^2 \cos^2 B_A + 4e'^4 \cos^4 B_A) + \frac{l^4 \cos^4 B_A}{360\rho^4} (61 - 58\operatorname{tg}^2 B_A + \operatorname{tg}^4 B_A) \right);$$

$$y_A = \frac{l}{\rho} N \cos B_A \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 B_A}{6\rho^2} (1 - \operatorname{tg}^2 B_A + e'^2 \cos^2 B_A) + \frac{l^4 \cos^4 B_A}{120\rho^4} (5 - 18\operatorname{tg}^2 B_A + \operatorname{tg}^4 B_A + 14e'^2 \cos^2 B_A - 58\operatorname{tg}^2 B_A \cdot e'^2 \cos^2 B_A) \right).$$

Поправочні коефіцієнти $\frac{l^4 \cos^4 B_A}{360\rho^4} (61 - 58\operatorname{tg}^2 B_A + \operatorname{tg}^4 B_A)$ та

$$\frac{l^4 \cos^4 B_A}{120\rho^4} (5 - 18\operatorname{tg}^2 B_A + \operatorname{tg}^4 B_A + 14e'^2 \cos^2 B_A - 58\operatorname{tg}^2 B_A \cdot e'^2 \cos^2 B_A)$$

використовуються у випадках, якщо пункт розташований поблизу граничного меридіана зони. У формулах позначено: $N = \frac{c}{V_A}$ – радіус

кривини перерізу першого вертикала на широті B_A ; $V_A = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_A}$ – друга функція широти B_A ; $c = a\sqrt{1 + e'^2}$ – радіус кривини меридіанного перерізу в полюсі. X – довжина дуги осьового меридіана від екватора до паралелі з широтою B_A :

$$X = a(1 - e^2) \left(A \frac{B_A}{\rho} - \frac{B}{2} \sin 2B_A + \frac{C}{4} \sin 4B_A - \frac{D}{6} \sin 6B_A \right).$$

$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \dots$, $B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \dots$, $C = \frac{15}{64}e^4 + \dots$, $D = \frac{35}{512}e^6 + \dots$ – сталі коефіцієнти моделі еліпсоїда (значення коефіцієнтів зведено до табл. 2.

Таблиця 2 – Значення коефіцієнтів A, B, C, D для моделей еліпсоїда WGS84 та референц-еліпсоїда Красовського

Коефіцієнти	WGS84	Референц-еліпсоїд Красовського
A	1,00505250	1,00505177
B	0,00506311	0,00506238
C	0,00001063	0,00001062
D	0,00000002	0,00000002

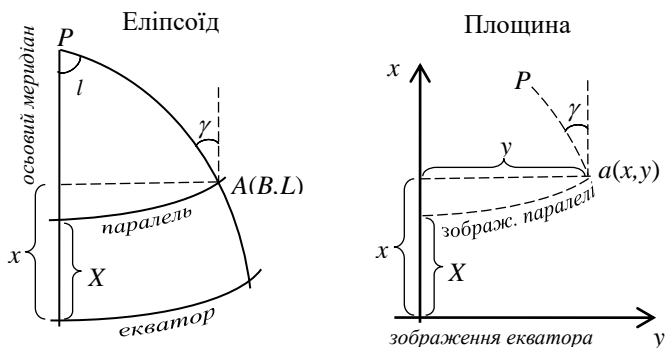


Рис. 8. Схема до розрахунків величин у п.2 та п.3

3. Розрахунок зближення меридіанів γ на площині у пункті A (рис. 8):

$$\gamma = l \sin B_A + \frac{l^3}{3\rho^2} \sin B_A \cos^2 B_A (1 + 3e'^2 \cos^2 B_A + 2e'^4 \cos^4 B_A).$$

За тим можна розрахувати приблизне значення дирекційного кута α'_{AB} :

$$\alpha'_{AB} = A_{AB} - \gamma.$$

4. Розрахунок масштабу зображення m в пункті A на площині.

Масштаб зображення (або спотворення проєкції) $m = dS / ds$ – це відношення довжини елементарного відрізка dS на площині до відповідної елементарної довжини геодезичної лінії ds на поверхні еліпсоїда. Робоча формула для розрахунку масштабу зображення m має вигляд

$$m = 1 + \frac{l^2 \cos^2 B_A}{2\rho^2} (1 + e'^2 \cos^2 B_A).$$

5. Розрахунок наближених довжин сторін мережі на площині.

Результат досягається розв'язуванням трикутників за теоремою Лежандра чи способом аддитивентів з використанням вимірних сферичних кутів мережі та довжини геодезичної лінії s початкової сторони AB .

6. Розрахунок наближених значень x', y' прямокутних координат пунктів мережі.

Результат досягається використанням координат початкового пункту x_A, y_A , наближеного значення дирекційного кута α'_{AB} , виправлених кутів A'_i, B'_i, C'_i та наближених довжин сторін S'_i трикутників на площині. У мережі мікротріангуляції на схемі рис. 7 для дирекційних кутів сторін і прямокутних координат вершин трикутників маємо наступні співвідношення:

$$\begin{aligned}\alpha'_{AC} &= \alpha'_{AB} + A'_1, \\ \alpha'_{CD} &= \alpha'_{AC} \pm 180^\circ + (C'_1 + C'_2), \\ \alpha'_{DB} &= \alpha'_{CD} + A'_2, \\ \alpha'_{BA} &= \alpha'_{DB} \pm 180^\circ + (B'_1 + B'_2); \end{aligned}$$

$$x'_{i+1} = x'_i + S'_{i,i+1} \cos \alpha'_{i,i+1}, \quad y'_{i+1} = y'_i + S'_{i,i+1} \sin \alpha'_{i,i+1}.$$

7. Редукція довжини геодезичної лінії s початкової сторони AB на площину.

Якщо на еліпсоїді віддаль між пунктами $AB = s$, то внаслідок спотворень проєкції на площині відповідна віддаль $ab = S$. При обчисленні довжини S початкової сторони на площині в довжину геодезичної лінії s вводять поправку за редукцію віддалей. Робоча формула має вигляд

$$S = s \left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{(\Delta y)^2}{24R_m^2} - \frac{y_m^4}{12R_m^4} \right).$$

Тут позначено: $y_m = \frac{y_A + y_B}{2}$; $\Delta y = y_B - y_A$; $R_m = \frac{c}{1 + e'^2 \cos^2 B_m}$. В

межах точності лінійних елементів триангуляції 1 класу R_m достатньо обчислювати за широтою $B_m = B_A$ початкового пункту. Тоді $R_m = \frac{c}{V_A^2}$.

8. Редукція напрямів з еліпсоїда на площину.

Позначення на рис. 9: AB, AC – геодезичні лінії; криві ab, ac – зображення геодезичних ліній AB, AC на площині. Кут δ_{ab} між хордою ab і дотичною до кривої ab у точці a називають поправкою до напрямку AB за кривину зображення геодезичної лінії AB на площині (або поправкою за редукцію напрямку AB на площину). Поправки δ до прямого та зворотного напрямів геодезичної лінії різняться між собою за абсолютним значенням і протилежні за знаком. Поправку δ завжди віднімають від вимірюного напрямку. Наприклад, значення дирекційного кута α_{AB} сторони AB на площині

$$\alpha_{AB} = \alpha'_{AB} - \delta_{ab} = A_{AB} - \gamma - \delta_{ab}.$$

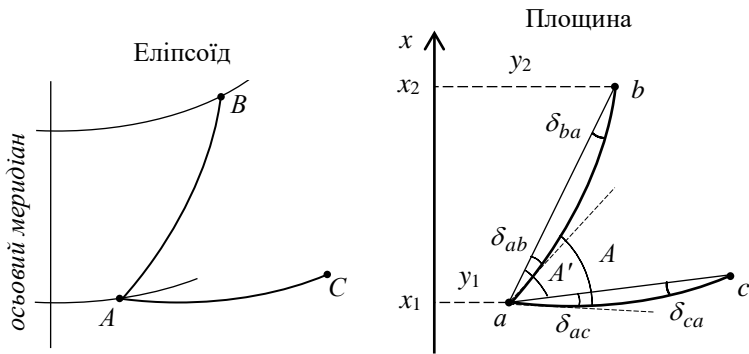


Рис. 9. Поправки за редукцію напрямів з еліпсоїда на площину

Робочі формули для розрахунку поправок за редукцію прямого та зворотного напрямів геодезичної лінії мають вигляд

$$\delta_{12} = \rho \frac{x'_2 - x'_1}{2R_m^2} (y'_m - \frac{y'_2 - y'_1}{6}) - \rho \frac{x'_2 - x'_1}{6R_m^4} y_m'^3 + \rho \frac{y'_2 - y'_1}{R_m^3} y_m'^2 e'^2 \cos^2 B_m \operatorname{tg} B_m;$$

$$\delta_{21} = -\rho \frac{x'_2 - x'_1}{2R_m^2} (y'_m + \frac{y'_2 - y'_1}{6}) + \rho \frac{x'_2 - x'_1}{6R_m^4} y_m'^3 - \rho \frac{y'_2 - y'_1}{R_m^3} y_m'^2 e'^2 \cos^2 B_m \operatorname{tg} B_m.$$

Тут позначено: x'_1, y'_1 та x'_2, y'_2 – наближені прямокутні координати початкової та кінцевої точок напрямку; $y'_m = \frac{y'_1 + y'_2}{2}$; середній радіус кривини

R_m обчислюють за середньою широтою B_m пунктів мережі або широтою початкового пункту.

За обчисленими поправками δ і вимірними сферичними кутами у вершинах трикутників можна розрахувати кути, редуковані на площину. Наприклад, для пункту A поправка δ_A до виміряного сферичного кута

$$\delta_A = \delta_{ac} - \delta_{ab}.$$

Відповідний редукований кут на площині

$$A' = A - \delta_A.$$

Перевіркою правильності розрахунку поправок за редукцію напрямів на площину в межах, наприклад, першого трикутника ABC , є рівність

$$\delta_A + \delta_B + \delta_C = \varepsilon,$$

де ε – сферичний надлишок трикутника ABC .

9. Зрівноважування мережі на площині.

Підсумком цієї стадії роботи є розрахунок остаточних значень x, y прямокутних координат усіх пунктів мережі.

Завдання 1. Виконати редукцію з еліпсоїда на площину мережі мікротріангуляції, зображеної на схемі рис. 7. Координати початкового пункту $B_A = 48^\circ 01' 01.1111'' + 7' \times N$, $L_A = 22^\circ 11' 11.1111'' + 30' \times N$, азимут початкової сторони $A_{AB} = 1^\circ 01' 01.1111'' + 3^\circ \times N$, довжина геодезичної лінії $AB = c_1 = (60000 - 500 \times N)$ метрів; N – номер варіанта. Виміряні сферичні кути трикутників зведено до таблиці 3.

Таблиця 3 – Виміряні кути трикутників мережі мікротріангуляції

№ трикутника	Кут	Виміряні сферичні кути
1	A_1	$78^\circ 27' 09,18''$
	B_1	$51^\circ 33' 02,51''$
	C_1	$49^\circ 59' 51,20''$
2	A_2	$59^\circ 25' 19,10''$
	B_2	$51^\circ 46' 48,52''$
	C_2	$68^\circ 47' 54,33''$

Приклад.

Вихідні дані (варіант $N = 0$).

$B_A = 48^\circ 01' 01.1111'' + 7' \times N$	$48^\circ 01' 01,1111''$	$48^\circ,01697531$
$L_A = 22^\circ 11' 11.1111'' + 30' \times N$	$22^\circ 11' 11,1111''$	$22^\circ,18641975$
$A_{AB} = 1^\circ 01' 01.1111'' + 3^\circ \times N$	$1^\circ 01' 01,1111''$	$1^\circ,01697528$
$c_1 = (60000 - 500 \times N)$	$60\ 000$ метрів	

Розв'язання завдання у відношенні до моделі еліпсоїда WGS84.

Сталі величини.

a	6378137 м	b	$6356752,314$ м	e^2	$0,00669438$	e'^2	$0,00673950$
A	$1,00505250$	B	$0,00506311$	C	$0,00001063$	D	$0,00000002$
ρ°	$57^\circ,29577951$					ρ''	$206264,8062$

1. Обчислення номера зони,

довгот осового меридіана та початкового пункту A в зоні.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$n = 1 + \text{ціла частина } \frac{L_A^\circ}{6^\circ}$	4	$l = L_A - L_0$	$1^\circ 11' 11,1111''$
$L_0 = 6n - 3$	21°		$1^\circ,18641975$

2. Обчислення масштабу зображень, прямокутних координат та зближення меридіанів у початковому пункті і наближеного дирекційного кута початкової сторони мережі

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$a(1-e^2)$	6335439,327	$\frac{l}{\rho} N \cos B_A$	88507,94424
$A \frac{B_A}{\rho}$	0,84228859	$\frac{l^2}{2\rho^2} N \sin B_A \cos B_A$	681,1727601
$\frac{B}{2} \sin 2B_A$	0,00251753	$\frac{l^2 \cos^2 B_A}{\rho^2}$	0,00019185
$\frac{C}{4} \sin 4B_A$	-0,00000056	$l \sin B_A$	0,88191686
$\frac{D}{6} \sin 6B_A$	0,00000000	$\frac{l^3}{3\rho^2} \sin B_A \cos^2 B_A$	0,00005640
X	5320315,088(м)	m	1,00009622
$c = a\sqrt{1+e'^2}$	6399593,626	x_A	5320996,302(м)
$V_A = \sqrt{1+e'^2 \cos^2 B_A}$	1,00150663	y_A	4588507,288(м)
$N = \frac{c}{V_A}$	6389966,317	γ	0°,88197377
$tg^2 B_A$	1,23493091		0° 52' 55,106"
$e'^2 \cos^2 B_A$	0,00301553	$\alpha'_{AB} = A_{AB} - \gamma$	0°,13500150
$e'^4 \cos^4 B_A$	0,00000909		0° 08' 06,005"

3. Обчислення наближених довжин сторін трикутників на площині за теоремою Лежандра (або методом аддитантів)

Відомість наближеного розв'язування трикутників за теоремою Лежандра

№ тр	Верш.	Виміряні сферичні кути	-w / 3	Виправлені сферичні кути	-ε / 3	Виправлені плоскі кути	Синуси кутів	Довжини сторін
1	C	49° 59' 51,20"	2.082	49° 59' 53,282"	-3,045	49° 59' 50,237"	0,76601402	60 000,000
	B	51° 33' 02,51"	2.082	51° 33' 04,592"	-3,045	51° 33' 01,547"	0,78315577	61 342,671
	A	78° 27' 09,18"	2.082	78° 27' 11,262"	-3,046	78° 27' 08,216"	0,97975832	76 742,068
	Σ_1	180° 00' 02,89"	6.246"	180° 00' 09,136"	-9,136"	180° 00' 00,000"		
	ε_1	9,136"						
	w ₁	-6,246"						
2	D	59° 25' 19,10"	3.581	59° 25' 22,681"	-4,231	59° 25' 18,450"	0,86093557	76 742,068
	B	51° 46' 48,52"	3.581	51° 46' 52,101"	-4,231	51° 46' 47,870"	0,78564059	70 030,424
	C	68° 47' 54,33"	3.582	68° 47' 57,912"	-4,232	68° 47' 53,680"	0,93231272	83 104,483
	Σ_2	180° 00' 01,95"	10.744"	180° 00' 12,694"	-12,694"	180° 00' 00,000"		
	ε_2	12,694"						
	w ₂	-10,744"						

4. Відомість обчислення наближених прямокутних координат вершин трикутників.

Вершини	Виправлені плоскі кути	α'_i	S'_i	x'_i	y'_i
<i>B</i>		180°08'06,005"			
<i>A</i>	78°27'08,217"				
<i>C</i>	118°47'43,917"	78°35'14,222"	61342,671	5333134,477	4648637,048
		17°22'58,139"	70030,424		
<i>D</i>	59°25'18,450"	256°48'16,589"	83104,483	5399966,609	4669558,959
<i>B</i>	103°19'49,417"	180°08'06,005"	60000,000	5380996,135	4588648,661
<i>A</i>					
				5320996,302	4588507,288

5. Редукція довжини початкової сторони з еліпсоїда на площину.

Дії	Результати	Дії	Результати	Дії	Результати
$R_m = \frac{c}{V_A^2}$	6380353,491	$y_m = \frac{y_A + y'_B}{2}$	88577,974	$\frac{(\Delta y)^2}{24R_m^2}$	0,00000000
$\Delta y = y'_B - y_A$	141,373	$\frac{y_m^2}{2R_m^2}$	0,00009637	$\frac{y_m^4}{12R_m^4}$	0,00000000
Довжина початкової сторони на площині S (м)					60005,782

6. Редукція напрямів з еліпсоїда на площину.

Відомість обчислення поправок за кривину зображення геодезичних ліній.

Напрями Дії	1: A 2: B	1: A 2: C	1: C 2: B	1: C 2: D	1: B 2: D
R_m	6380353,492	6380353,492	6380353,492	6380353,492	6380353,492
x'_1	5320996,287	5320996,287	5333134,461	5333134,461	5380996,120
x'_2	5380996,120	5333134,461	5380996,120	5399966,594	5399966,594
y'_1	88507,288	88507,288	148637,048	148637,048	88648,661
y'_2	88648,661	148637,048	88648,661	169558,959	169558,959
y'_m	88577,975	118572,168	118642,855	159098,003	129103,810
$y_m - \frac{y'_2 - y'_1}{6}$	88554,412	108550,541	128640,919	155611,018	115618,760
$y_m + \frac{y'_2 - y'_1}{6}$	88601,537	128593,795	108644,790	162584,989	142588,860
$\rho \frac{x'_2 - x'_1}{2R_m^2}$	0,00015200	0,00003075	0,00012125	0,00016931	0,00004806
$\rho \frac{x'_2 - x'_1}{6R_m^4} y_m'^3$	0,001	0,000	0,002	0,006	0,001
$\rho \frac{y'_2 - y'_1}{R_m^3} y_m'^2 e'^2 \cos^2 B_m t g B_m$	0,000	0,002	-0,002	0,001	0,004
δ''_{12}	13,460''	3,340''	15,594''	26,343''	5,559''
δ''_{21}	-13,467''	-3,956''	-13,170''	-27,524''	-6,856''

Дирекційний кут початкової сторони $\alpha_{AB} = \alpha'_{AB} - \delta_{ab} = 0^\circ 07' 52,546''$.

Відомість обчислення поправок до вимірних сферичних кутів за кривину зображення геодезичних ліній їх сторін на площині.

№ тр.	Вершини	Поправки до напрямів сторін у вершинах кутів		Поправки до кутів	№ тр.	Вершини	Поправки до напрямів сторін у вершинах кутів		Поправки до кутів
		$\delta_{\text{прав}}$	$\delta_{\text{лів}}$				$\delta_{\text{прав}}$	$\delta_{\text{лів}}$	
1	A	3,340"	13,460"	-10,120"	2	C	26,343"	15,594"	10,749"
	B	-13,467"	-13,170"	-0,297"		D	-6,856"	-27,524"	20,668"
	C	15,594"	-3,956"	19,550"		B	-13,170"	5,559"	-18,729"
	Контроль: $\varepsilon_1 = 9,136''$			9,133"		Контроль: $\varepsilon_2 = 12,694''$			12,688"

7. Відомість зрівноважування трикутників та обчислення довжин сторін.

№ тр.	Верш.	Вимірні сферичні кути	$-\delta$	Вимірні плоскі кути	$-w/3$	Зрівноважені плоскі кути	Синуси кутів	Довжини сторін
1	C	49°59'51,20"	-19,550	49°59'31,650"	2,081	49°59'33,731"	0,76596257	60005,782
	B	51°33'02,51"	0,297	51°33'02,807"	2,081	51°33'04,888"	0,78316584	61353,492
	A	78°27'09,18"	10,120	78°27'19,300"	2,081	78°27'21,381"	0,97977110	76755,618
	Σ_1	180°00'02,89"	-9,133"	179°59'53,757"	6,243"	180°00'00,000"		
	ε_1	9,136"						
	w_1					-6,243"		
2	D	59°25'19,10"	-20,668	59°24'58,432"	3,579	59°25'02,011"	0,86089503	76755,618
	B	51°46'48,52"	18,729	51°47'07,249"	3,579	51°47'10,828"	0,78570945	70052,228
	C	68°47'54,33"	-10,749	68°47'43,581"	3,580	68°47'47,161"	0,93230129	83122,053
	Σ_2	180°00'01,95"	-12,688"	179°59'49,262"	10,738"	180°00'00,000"		
	ε_2	12,694"						
	w_2					-10,738"		

8. Відомість обчислення остаточної прямокутних координат вершин.

Вершини	Зрівноважені плоскі кути	α_i	S_i	x_i	y_i
<i>B</i>		180°07'52,546"			
<i>A</i>	78°27'21,381"	78°35'13,927"	61353,492	5320996,302	4588507,288
<i>C</i>	118°47'20,891"	17°22'34,818"	70052,228	5333136,704	4648647,637
<i>D</i>	59°25'02,011"	256°47'36,829"	83122,053	5399992,010	4669568,503
<i>B</i>	103°20'15,717"	180°07'52,546"	60005,782	5381001,926	4588644,759
<i>A</i>				5320996,302	4588507,288

Розв'язання завдання у відношенні до моделі референц-еліпсоїда Красовського.

Сталі величини.

<i>a</i>	6378245 м	<i>b</i>	6356863,019 м	e^2	0,00669342	e'^2	0,00673853
<i>A</i>	1,00505177	<i>B</i>	0,00506238	<i>C</i>	0,00001062	<i>D</i>	0,00000002
ρ°	57°,29577951					ρ''	206264,8062

1. Обчислення номера зони, довгот осового меридіана та початкового пункту *A* в зоні.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$n = 1 + \text{ціла частина } \frac{L_A^\circ}{6^\circ}$	4	$l = L_A - L_0$	1° 11' 11,1111"
$L_0 = 6n - 3$	21°		1°,18641975

2. Обчислення масштабу зображень, прямокутних координат та зближення меридіанів у початковому пункті і наближеного дирекційного кута початкової сторони мережі

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$a(1-e^2)$	6335552,717	$\frac{l}{\rho} N \cos B_A$	88509,41952
$A \frac{B_A}{\rho}$	0,84228798	$\frac{l^2}{2\rho^2} N \sin B_A \cos B_A$	681,1841142
$\frac{B}{2} \sin 2B_A$	0,00251717	$\frac{l^2 \cos^2 B_A}{\rho^2}$	0,00019185
$\frac{C}{4} \sin 4B_A$	-0,00000056	$l \sin B_A$	0,88191686
$\frac{D}{6} \sin 6B_A$	0,000000	$\frac{l^3}{3\rho^2} \sin B_A \cos^2 B_A$	0,00005640
X	5320408,749(м)	m	1,00009622
$c = a\sqrt{1+e'^2}$	6399698,916	x_A	5321089,974(м)
$V_A = \sqrt{1+e'^2 \cos^2 B_A}$	1,00150641	y_A	4588508,763(м)
$N = \frac{c}{V_A}$	6390072,827	γ	0°,88197377
$tg^2 B_A$	1,23493091		0° 52' 55,106"
$e'^2 \cos^2 B_A$	0,00301510	$\alpha'_{AB} = A_{AB} - \gamma$	0°,13500150
$e'^4 \cos^4 B_A$	0,00000909		0° 08' 06,005"

3. Обчислення наближених довжин сторін трикутників на площині за теоремою Лежандра (або методом аддитаментів)

Відомість наближеного розв'язування трикутників за теоремою Лежандра

№ тр	Верш.	Виміряні сферичні кути	-w / 3	Виправлені сферичні кути	-ε / 3	Виправлені плоскі кути	Синуси кутів	Довжини сторін
1	C	49° 59' 51,20"	2,082	49° 59' 53,282"	-3,045	49° 59' 50,237"	0,76601402	60 000,000
	B	51° 33' 02,51"	2,082	51° 33' 04,592"	-3,045	51° 33' 01,547"	0,78315577	61 342,671
	A	78° 27' 09,18"	2,082	78° 27' 11,262"	-3,045	78° 27' 08,217"	0,97975833	76 742,068
	Σ ₁	180° 00' 02,89"	6,245"	180° 00' 09,135"	-9,135"	180° 00' 00,000"		
	ε ₁	9,135"						
	w ₁	-6,245"						
2	D	59° 25' 19,10"	3,581	59° 25' 22,681"	-4,231	59° 25' 18,450"	0,86093557	76 742,068
	B	51° 46' 48,52"	3,581	51° 46' 52,101"	-4,231	51° 46' 47,870"	0,78564059	70 030,424
	C	68° 47' 54,33"	3,581	68° 47' 57,911"	-4,231	68° 47' 53,680"	0,93231272	83 104,483
	Σ ₂	180° 00' 01,95"	10,743"	180° 00' 12,693"	-12,693"	180° 00' 00,000"		
	ε ₂	12,693"						
	w ₂	-10,743"						

4. Відомість обчислення наближених прямокутних координат вершин.

Вершини	Виправлені плоскі кути	α'_i	S'_i	x'_i	y'_i
<i>B</i>		180°08'06,005"			
<i>A</i>	78°27'08,217"	78°35'14,222"	61342,671	5321089,974	4588508,763
<i>C</i>	118°47'43,917"	17°22'58,139"	70030,424	5333228,149	4648638,523
<i>D</i>	59°25'18,450"	256°48'16,589"	83104,483	5400060,282	4669560,434
<i>B</i>	103°19'49,417"			5381089,808	4588650,136
<i>A</i>		180°08'06,005"	60000,000	5321089,974	4588508,763

5. Редукція довжини початкової сторони з еліпсоїда на площину.

Дії	Результати	Дії	Результати	Дії	Результати
$R_m = \frac{c}{V_A^2}$	6380461,217	$y_m = \frac{y_A + y'_B}{2}$	88579,450	$\frac{(\Delta y)^2}{24R_m^2}$	0,00000000
$\Delta y = y'_B - y_A$	141,373	$\frac{y_m^2}{2R_m^2}$	0,00009637	$\frac{y_m^4}{12R_m^4}$	0,00000000
Довжина початкової сторони на площині S (м)					60005,782

6. Редукція напрямів з еліпсоїда на площину.

Відомість обчислення поправок за кривину зображення геодезичних ліній.

Дії \ Напрями	1: A	1: A	1: C	1: C	1: B
	2: B	2: C	2: B	2: D	2: D
R_m	6380461,217	6380461,217	6380461,217	6380461,217	6380461,217
x'_1	5321089,974	5321089,974	5333228,149	5333228,149	5381089,808
x'_2	5381089,808	5333228,149	5381089,808	5400060,282	5400060,282
y'_1	88508,763	88508,763	148638,523	148638,523	88650,136
y'_2	88650,136	148638,523	88650,136	169560,434	169560,434
y'_m	88579,450	118573,643	118644,330	159099,479	129105,285
$y_m - \frac{y'_2 - y'_1}{6}$	88555,888	108552,017	128642,394	155612,494	115620,236
$y_m + \frac{y'_2 - y'_1}{6}$	88603,012	128595,270	108646,265	162586,464	142590,335
$\rho \frac{x'_2 - x'_1}{2R_m^2}$	0,00015200	0,00003075	0,00012125	0,00016931	0,00004806
$\rho \frac{x'_2 - x'_1}{6R_m^4} y_m^3$	0,001	0,000	0,002	0,006	0,001
$\rho \frac{y'_2 - y'_1}{R_m^3} y_m^2 e^2 \cos^2 B_m \operatorname{tg} B_m$	0,000	0,002	-0,002	0,001	0,004
δ''_{12}	13,460"	3,340"	15,594"	26,342"	5,559"
δ''_{21}	-13,467"	-3,956"	-13,169"	-27,523"	-6,855"

Дирекційний кут початкової сторони $\alpha_{AB} = \alpha'_{AB} - \delta_{ab} = 0^\circ 07' 52,546''$.

Відомість обчислення поправок до вимірних сферичних кутів за кривину зображення геодезичних ліній їх сторін на площині.

№ тр.	Вершини	Поправки до напрямів сторін у вершинах кутів		Поправки до кутів	№ тр.	Вершини	Поправки до напрямів сторін у вершинах кутів		Поправки до кутів
		$\delta_{прав}$	$\delta_{лів}$				$\delta_{прав}$	$\delta_{лів}$	
1	A	3,340"	13,460"	-10,120"	2	C	26.342"	15,594"	10,748"
	B	-13,467"	-13,169"	-0,297"		D	-6.855"	-27,523"	20,668"
	C	15,594"	-3,956"	19,550"		B	-13.169"	5,559"	-18,729"
	Контроль: $\varepsilon_1 = 9,135''$		9,133"	Контроль: $\varepsilon_2 = 12,693''$		12,687"			

7. Відомість зрівноважування трикутників та обчислення довжин сторін.

№ тр.	Верш.	Вимірні сферичні кути	$-\delta$	Вимірні плоскі кути	$-w/3$	Зрівноважені плоскі кути	Синуси кутів	Довжини сторін
1	C	49°59'51,20"	-19,550	49°59'31,650"	2,081	49°59'33,731"	0,76596257	60005,782
	B	51°33'02,51"	0,297	51°33'02,807"	2,081	51°33'04,888"	0,78316584	61353,492
	A	78°27'09,18"	10,120	78°27'19,300"	2,081	78°27'21,381"	0,97977110	76755,618
	Σ_1	180°00'02,89"	-9,133"	179°59'53,757"	6,243"	180°00'00,000"		
	ε_1	9,135"						
	w_1					-6,243"		
2	D	59°25'19,10"	-20,668	59°24'58,432"	3,579	59°25'02,012"	0,86089503	76755,618
	B	51°46'48,52"	18,729	51°47'07,249"	3,579	51°47'10,828"	0,78570945	70052,227
	C	68°47'54,33"	-10,748	68°47'43,582"	3,579	68°47'47,161"	0,93230129	83122,053
	Σ_2	180°00'01,95"	-12,687"	179°59'49,263"	10,737"	180°00'00,000"		
	ε_2	12,693"						
	w_2					-10,737"		

8. Відомість обчислення остаточних прямокутних координат вершин.

Вершини	Зрівноважені плоскі кути	α_i	S_i	x_i	y_i
B		180°07'52,546"			
A	78°27'21,381"	78°35'13,927"	61353,492	5321089,974	4588508,763
C	118°47'20,892"	17°22'34,818"	70052,227	5333230,376	4648649,113
D	59°25'02,012"	256°47'36,830"	83122,053	5400085,682	4669569,979
B	103°20'15,716"	180°07'52,546"	60005,782	5381095,599	4588646,234
A				5321089,974	4588508,763

2. Перетворення координат з прямокутної в еліпсоїдальну систему

Абсциса x_a точки a на площині виражається відрізком, який відповідає довжині дуги осевого меридіана зони від екватора до точки a_1 з широтою B_1 , як це показано на рис. 10. B_1 – це широта основи ординати y_a точки a при $y=0$. Якщо $y \rightarrow 0$ та $l \rightarrow 0$, то точка $a \rightarrow a_1$. Тоді відповідна точка на поверхні еліпсоїда $A \rightarrow A_1$ гранично матиме широту $B_A = B_1$.

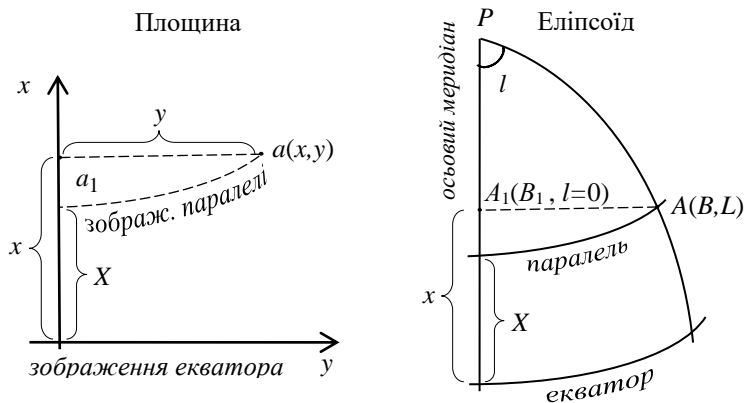


Рис. 10. Схема до перетворення координат з прямокутної в еліпсоїдальну систему

З урахуванням констатованої обставини перетворення координат з прямокутної в еліпсоїдальну систему передбачає виконання наступних дій.

1. Розрахунок широти B_1 основи ординати y_a точки a .

Широта B_1 обчислюється за довжиною дуги меридіана, що відповідає x_a :

$$B_1 = \frac{\rho}{A} \left(\frac{x_a}{a(1-e^2)} + \frac{B}{2} \sin 2B_1 - \frac{C}{4} \sin 4B_1 + \frac{D}{6} \sin 6B_1 \right).$$

Враховуючи значення сталих параметрів a, e^2, A, B, C, D (див. табл. 2) та $\rho'' = 206264.8062$, наприклад, у відношенні до моделі WGS84 одержимо

$$B_1'' = 0.0323936323x_a + 519.5453292 \sin 2B_1 - 0.5452135731 \sin 4B_1 + 0.0007014784 \sin 6B_1.$$

За тих же умов у відношенні до моделі референц-еліпсоїда Красовського

$$B_1'' = 0.0323930760x_a + 519.4709177 \sin 2B_1 - 0.5451113292 \sin 4B_1 + 0.0007114572 \sin 6B_1.$$

У формулах розрахунку широти B_1 аргументами є абсциса x_a та невідома широта B_1 . Тому розв'язок досягається методом послідовних наближень. У першому наближенні

$$B_1 = \frac{\rho}{Aa(1-e^2)} x_a.$$

Для моделі WGS84 у першому наближенні

$$B_1'' = 0.0323936323x_a,$$

для моделі референц-еліпсоїда Красовського у першому наближенні

$$B_1'' = 0.0323930760x_a.$$

Ітерації повторюються, доки результати двох суміжних обчислень B_1 не будуть рівними між собою.

2. Розрахунок широти B_A точки A .

По мірі віддалення від осевого меридіана на величину ординати y_a для широти B_A точки A має місце нерівність $B_A < B_1$. Широті B_A відповідає довжина дуги X осевого меридіана від екватора до паралелі точки A . Отже, широта B_A точки A залежить від B_1 та її ординати y_a в зоні:

$$B_A = B_1 - \rho'' \frac{y_a^2}{2M_1N_1} \operatorname{tg} B_1 \left(1 - \frac{y_a^2}{12N_1^2} (5 + 3\operatorname{tg}^2 B_1 + e'^2 \cos^2 B_1 - 9e'^2 \cos^2 B_1 \operatorname{tg}^2 B_1) \right).$$

$$M_1 = \frac{c}{V_1^3} - \text{радіус кривини меридіанного перерізу на широті } B_1; \quad N_1 = \frac{c}{V_1} -$$

радіус кривини перерізу першого вертикала на широті B_1 ; $c = a\sqrt{1+e'^2}$ -

радіус кривини меридіанного перерізу в полюсі; $V_1 = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_1}$ – друга функція широти B_1 .

3. Розрахунок довготи l точки A в зоні:

$$l = \rho \frac{y_a}{N_1 \cos B_1} \left(1 - \frac{y_a^2}{6N_1^2} (1 + 2tg^2 B_1 + e'^2 \cos^2 B_1) \right).$$

4. Розрахунок довготи L_A точки A на поверхні еліпсоїда:

$$L_A = L_0 + l,$$

де L_0 - довгота осьового меридіана зони.

Завдання 2. Обчислити еліпсоїдальні координати B_B, L_B пункту B мережі мікротріангуляції, зображеної на схемі рис. 7, за прямокутними координатами x_B, y_B , які розраховано у відомості 8 обчислення остаточних прямокутних координат у завданні 1.

Приклад.

Розв'язання завдання у відношенні до моделі еліпсоїда WGS84.

Вихідні дані (варіант $N=0$ завдання 1).

x_B	5381001,926
y_B	4588644,759

Сталі величини.

a	6378137 м	e'^2	0.00673950	ρ''	206264,8062''
-----	-----------	--------	------------	----------	---------------

Відомість обчислення широти B_1 .

Позначення дій	Результати обчислень в наближеннях				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$0.0007014784 \sin 6B_1$		-0,0007	-0,0007	-0,0007	-0,0007
$0.5452135731 \sin 4B_1$		-0,1289	-0,1342	-0,1342	-0,1342
$519.5453292 \sin 2B_1$		515,8486	515,5326	515,5328	515,5328
$0.0323936323 x$	174310,1979	174310,1979	174310,1979	174310,1979	174310,1979
B_1''	174310,1979	174826,1748	174825,8641	174825,8643	174825,8643
Широта $B_1 = 48^\circ 33' 45,8643''$					

Відомість обчислення еліпсоїдальних координат пункту B .

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$c = a\sqrt{1+e'^2}$	6399593,626	$9e'^2 \cos^2 B_1 \text{tg}^2 B_1$	0,03408967
$V_1 = \sqrt{1+e'^2 \cos^2 B_1}$	1,00147479	$\rho \frac{y^2}{2M_1 N_1} \text{tg} B_1$	22,54792192
$N_1 = \frac{c}{V_1}$	6390169,466	B	174803,3196"
$M_1 = \frac{c}{V_1^3}$	6371362,761		48° 33' 23,3196"
$\rho \frac{y}{N_1 \cos B_1}$	4323,538865	l	4323,0439"
$\frac{y^2}{N_1^2}$	0,00019243		1° 12' 03,0439"
$\text{tg}^2 B_1$	1,28321649	$L = L_0 + l$	79923,0439"
$e'^2 \cos^2 B_1$	0,00295176		22° 12' 03,0439"

Розв'язання завдання
у відношенні до моделі референц-еліпсоїда Красовського.
 Вихідні дані (варіант $N=0$ завдання 1).

x_B	5381095,599
y_B	4588646,234

Сталі величини.

a	6378245 м	e'^2	0.00673853	ρ "	206264,8062"
-----	-----------	--------	------------	----------	--------------

Відомість обчислення широти B_1 .

Позначення дій	Результати обчислень в наближеннях				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$0.0007114572 \sin 6B_1$		-0,0007	-0,0007	-0,0007	-0,0007
$0.5451113292 \sin 4B_1$		-0,1289	-0,1342	-0,1342	-0,1342
$519.4709177 \sin 2B_1$		515,7747	515,4588	515,4590	515,4590
$0.0323930760 x$	174310,2387	174310,2387	174310,2387	174310,2387	174310,2387
B_1''	174310,2387	174826,1416	174825,8310	174825,8312	174825,8312
Широта $B_1 = 48^\circ 33' 45,8312''$					

Відомість обчислення еліпсоїдальних координат пункту *B*.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$c = a\sqrt{1+e'^2}$	6399698,916	$9e'^2 \cos^2 B_1 tg^2 B_1$	0,03408477
$V_1 = \sqrt{1+e'^2 \cos^2 B_1}$	1,00147458	$\rho \frac{y^2}{2M_1 N_1} tg B_1$	22,54790423
$N_1 = \frac{c}{V_1}$	6390275,947	<i>B</i>	174803,2865"
$M_1 = \frac{c}{V_1^3}$	6371471,612		48° 33' 23,2865"
$\rho \frac{y}{N_1 \cos B_1}$	4323,537993	<i>l</i>	4323,0430"
$\frac{y^2}{N_1^2}$	0,00019243		1° 12' 03,0430"
$tg^2 B_1$	1,28321566	$L = L_0 + l$	79923,0430"
$e'^2 \cos^2 B_1$	0,00295133		22° 12' 03,0430"

Література

1. Закатов П. С. Курс высшей геодезии : підручник. Москва: Недра, 1964. 504 с.
2. Марченко О. М., Третьяк К. Р., Ярема Н. П. Референцні системи в геодезії : навч. посібник. Львів : Львівська політехніка, 2013. 216 с.
3. Машимов М. М. Теоретическая геодезия : справочное пособие. Москва : Недра, 1991. 268 с. URL: <http://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-mashimov-mm-geodeziya-teoreticheskaya-geodeziya-1991.pdf>
4. Морозов Н. П. Курс сфероидической геодезии : навч. посібник. Москва : Недра, 1969. 304 с.
5. Рабинович Б. Н. Практикум по высшей геодезии (Вычислительные работы) : навч. посібник. Москва : Геодезиздат, 1961. 339 с.
6. Савчук С. Г. Вища геодезія : навч. посібник. Житомир : ЖДТУ, 2005. 315 с.
7. Савчук С. Г. Вища геодезія: підручник, видання друге, доповнене. Львів : Львівська політехніка, 2005. 315 с. URL: <https://studfiles.net/preview/5198885/>