МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ

ISSN 2522-1957

ВІСНИК

НАВЧАЛЬНО-НАУКОВОГО ІНСТИТУТУ АВТОМАТИКИ, КІБЕРНЕТИКИ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ НУВГП

Збірник наукових праць

Випуск 9

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Рівне-2021

У збірнику опубліковано наукові статті студентів і викладачів Навчально-наукового інституту автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки НУВГП. Цей випуск присвячений року математики.

Матеріали збірника розглянуті і рекомендовані до видання на Вченій раді Національного університету водного господарства та природокористування 28 травня 2021 р., протокол № 6

Адреса редколегії: 33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11, НУВГП.

ЗМІСТ

Слюсарчук В. Ю.	Диференціальні ознаки збіжності операторних рядів	5
Іващук Я. Г.	Диференціальні властивості оператора найкращого одностороннього наближення функцій елементами нелінійних інтерполяційних класів	15
Кушнір О. О., Кушнір В. П.	Друга визначна границя для матриць	22
Самолюк І. В.	Проекційно-ітеративний метод розв'язування крайової задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного типу	28
Тадеєв П. О.	Досконалі імплікативні нормальні форми та їх властивості	31
Дубчак І. В., Яремчук Д. Т.	Жан Лерон Д'Аламбер. Життя та наукова діяльність	42
Цецик С. П., Помнітц С.З.	Роль дисципліни «Вища математика» у системі професійної підготовки майбутніх екологів	47
Дейнека О. Ю.	Підсилення контуру кругового отвору в нескінченній ізотропній пластинці замкненим пружним ребром	53

CONTENT

Sliusarchuk V. Yu.	**Differential sings of convergence of operator series**	**5**
Ivashchuk Ya. H.	**Differential properties of the operator of the best one-sides approximation of functions by elements of nonlinear interpolation classes**	**15**
Кushnir O. O., Кushnir V. P.	**Second remarkable limit for matrices**	**22**
Samoliuk I. V.	**Projection-iterative method for solving a boundary value problem for differential equations with partial derivatives of elliptic type**	**28**
Tadeiev P. O.	**Perfect implicative normal forms and their properties**	**31**
Dubchak I. V., Yaremchuk D. T.	**Jean Le Round D`Alembert. Life and studies**	**42**
Tsetsyk S.P., Pomnitz S.Z.	**The role of the discipline «higher mathematics» in the system of professional training of future ecologists**	**47**
Deineka O. Yu.	**Reinforcement of the circle of the circular hole in the endless isotropic plate by a closed elastic rib**	**53**

УДК 517.52

Слюсарчук[1] В. Ю., чл.-кор. НАНУ, д.фіз.-мат.н., професор (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне,
[1] v.yu.slyusarchuk@nuwm.edu.ua)

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ОПЕРАТОРНИХ РЯДІВ

Отримано диференціальні ознаки збіжності операторних рядів.
***Ключові слова*: диференціальні ознаки збіжності рядів.**

1. Вступ. Будемо використовувати множини $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ і $\mathbb{N}$ всіх дійсних, комплексних і натуральних чисел відповідно та функції

$$l_0(t)=t,\quad l_1(t)=\ln t,\quad l_2(t)=\ln\ln t,\ldots,\quad l_m(t)=\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{m\text{ разів}}t,\ldots,$$

$$l_{-1}(t)=\exp(t),\quad l_{-2}(t)=\exp(\exp(t)),\ldots,\quad l_{-m}(t)=\underbrace{\exp(\exp(\ldots\exp(t)\ldots))}_{m\text{ разів}},\ldots$$ і

$$\Pi_m(t)=\prod_{k=0}^{m} l_k(t). \tag{1}$$

Легко перевірити, що

$$l_m(l_{-m}(t))=t,\quad l_{-m}(l_m(t))=t,$$

$$\frac{dl_m(t)}{dt}=\frac{1}{\Pi_{m-1}(t)}, \tag{2}$$

і

$$\frac{d\Pi_m(t)}{dt}\frac{1}{\Pi_m(t)}=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\Pi_k(t)} \tag{3}$$

для всіх точок $t\in\mathbb{R}$, в яких визначені відповідні функції, і $m\in\mathbb{N}$.

Розглянемо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \tag{4}$$

де $a_n>0$, $n\geq 1$, неперервно диференційовну функцію $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ і

$$\begin{aligned}
s_1(t)&=-t\,\frac{d\ln f(t)}{dt},\\
s_2(t)&=l_1(t)\quad(s_1(t)-1),\\
s_3(t)&=l_2(t)\quad(s_2(t)-1),\\
&\ldots\\
s_{n+1}(t)&=l_n(t)\quad(s_n(t)-1).
\end{aligned} \tag{5}$$

В [1; 2] автором встановлено таке твердження про умови збіжності числового ряду (4) з використанням функцій (5).

Теорема 1. *Нехай функція* $f(t)$ *є монотонно спадною на* $[1,+\infty)$, $f(n)=a_n$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *і для деякого* $p \in \mathbb{N}$ *існує границя*

$$\lim_{t\to+\infty} s_p(t)=s_p .$$

Тоді:

1) якщо $s_p>1$, *то ряд* (4) *збігається;*

2) якщо $s_p<1$, *то ряд* (4) *розбігається.*

Зазначимо, що для дослідження збіжності широких класів числових рядів теорема 1 є зручнішою для користування, ніж відомі ознаки збіжності рядів (див. [2; 3]).

Важливим для математичного аналізу є встановлення аналогу наведеного твердження для операторних рядів.

2. Основні об'єкти досліджень і твердження. Нехай E — комплексний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$, $L(E,E)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів $A:E\to E$ з нормою

$$\|A\|_{L(E,E)} = \sup_{\|x\|_E=1}\|Ax\|_E$$

та одиничним оператором I і $\sigma(A)$ – спектр оператора A.

Розглянемо неперервно диференційовну функцію $F:[1,+\infty)\to L(E,E)$, для якої для кожного зафіксованого $t\in[1,+\infty)$ оператор $F(t):[1,+\infty)\to L(E,E)$ має неперервний обернений оператор $(F(t))^{-1}$, ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n , \tag{6}$$

де $A_n\in L(E,E)$, $n \in \mathbb{N}$, і функції

$$\begin{aligned} &S_1(t)=-t\,\frac{dF(t)}{dt}\,(F(t))^{-1},\\ &S_2(t)=l_1(t)\,(S_1(t)-I),\\ &S_3(t)=l_2(t)\,(S_2(t)-I),\\ &\dots\\ &S_{n+1}(t)=l_n(t)\,(S_n(t)-I), \end{aligned} \tag{7}$$

що аналогічні функціям (5).

Основним об'єктом досліджень у статті є встановлення для ряду (6) твердження, аналогічного теоремі 1.

Правильною є така теорема.

Теорема 2. *Нехай збігається невласний інтеграл*

$$\int_1^{+\infty} \left(F(t) - F([t])\right) dt, \tag{8}$$

де $[t]$ *– ціла частина числа* t *,* $F(n) = A_n$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *і для деякого* $p \in \mathbb{N}$ *існує границя*

$$\lim_{t \to +\infty} S_p(t) = S_p .$$

Тоді:

1) якщо виконується співвідношення

$$\sigma(S_p) \subset \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}, \tag{9}$$

то ряд (6) *збігається*;

2) якщо виконується співвідношення

$$\sigma(S_p) \subset \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}, \tag{10}$$

то ряд (6) *розбігається*.

Обґрунтування цієї теореми наведемо в п. 4.

3. Допоміжні твердження. При доведенні теореми 2 будемо використовувати інтегральну ознаку збіжності операторних рядів (теореми 3 і 4), а також оцінки норм операторної експоненти та розв'язків лінійних операторних диференціальних рівнянь із коефіцієнтами, близькими до сталих.

3.1. Загальна інтегральна ознака збіжності рядів. Важливими для подальшого є такі дві теореми автора.

Теорема 3. *Нехай:*

1) $A_n \in L(E,E), \quad n \ge 1;$

2) $F : [1,+\infty) \to L(E,E)$ *– неперервне відображення і* $F(n) = A_n$*,* $n \ge 1;$

3) збігається невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} \left(F(t) - F([t])\right) dt.$

Тоді операторний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ *і невласний інтеграл* $\int_1^{+\infty} F(t)\, dt$ *одночасно збігаються або розбігаються.*

Теорема 4. *Для кожного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ *, де* $A_n \in L(E,E)$*, існує неперервне відображення* $F : [1,+\infty) \to L(E,E)$*, для якого* $F(n) = A_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, і невласний інтеграл* $\int_1^{+\infty} \left(F(t) - F([t])\right) dt$ *збігається.*

Ці твердження встановлено в [4; 5] для довільних векторних рядів.

Зазначимо, що на підставі теореми 4 інтегральна ознака (теорема 3) застосовна до довільних операторних рядів.

3.2. Оцінка норми операторної експоненти.

Теорема 5 [6, с. 43]. *Нехай* $A \in L(E,E)$. *Для кожного числа* $\alpha \in \mathbb{R}$, *для якого*

$$\sigma(A) \subset \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < \alpha \},$$

існує таке число $M \geq 1$, *що справджується співвідношення*

$$\left\| e^{tA} \right\|_{L(E,E)} \leq M e^{\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

3.3. Оцінки норм розв'язків лінійних операторних диференціальних рівнянь із коефіцієнтами, близькими до сталих. Розглянемо операторне диференціальне рівняння

$$\frac{dU(t)}{dt} = -(S + H(t))U(t), \quad t \geq 0, \tag{11}$$

де $S \in L(E,E)$, $H(t)$ – неперервна на $[0,+\infty)$ функція зі значеннями в $L(E,E)$ і

$$U(0) = I\ . \tag{12}$$

Важливими для подальшого є наступні два твердження.

Теорема 6. *Нехай*

$$\sigma(S) \subset \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \alpha \},$$

$\alpha > 1$, M *– таке додатне число, що*

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\left\| e^{-tS} \right\|_{L(E,E)} \leq M e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \tag{13}$$

ε *– довільне додатне число, для якого*

$$\alpha + M\varepsilon > 1, \tag{14}$$

і

$$\sup_{t \geq 0} \left\| H(t) \right\|_{L(E,E)} < \varepsilon. \tag{15}$$

Тоді для розв'язку $U(t)$ *рівняння* (11), *що задовольняє* (12), *виконується співвідношення*

$$\left\| U(t) \right\|_{L(E,E)} \leq M e^{-(\alpha - M\varepsilon)t}, \quad t \geq 0. \tag{16}$$

У теоремі 6 число M , для якого виконується співвідношення (13), існує за теоремою 5.

Доведення теореми 6. Згідно з [6, с. 147] розв'язок $U(t)$ рівняння (11), що задовольняє (12), є розв'язком інтегрального рівняння

$$U(t) = e^{-tS} - \int_0^t e^{-(t-\tau)S}{}_p\, H(\tau)U(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0.$$

Тому з урахуванням (13) і (15) (число ε вибрано таким, щоб справджувалась нерівність (14)) для всіх $t \geq 0$

$$\|U(t)\|_{L(E,E)} \leq \left\|e^{-tS}\right\|_{L(E,E)} + \int_0^t \left\|e^{-(t-\tau)S}\right\|_{L(E,E)} \|H(\tau)\|_{L(E,E)} \|U(\tau)\|_{L(E,E)}\, d\tau \leq$$

$$\leq Me^{-\alpha t} + \int_0^t Me^{-\alpha(t-\tau)}\varepsilon \|U(\tau)\|_{L(E,E)}\, d\tau,$$

тобто

$$\|U(t)\|_{L(E,E)} \leq Me^{-\alpha t} + Me^{-\alpha t}\varepsilon \int_0^t e^{\alpha\tau}\|U(\tau)\|_{L(E,E)}\, d\tau, \quad t \geq 0,$$

і

$$e^{\alpha t}\|U(t)\|_{L(E,E)} \leq M + M\varepsilon \int_0^t e^{\alpha\tau}\|U(\tau)\|_{L(E,E)}\, d\tau, \quad t \geq 0.$$

Звідси на підставі нерівності Гронуолла [7, с. 11] отримуємо співвідношення

$$e^{\alpha t}\|U(t)\|_{L(E,E)} \leq Me^{M\varepsilon\, t}, \quad t \geq 0,$$

рівносильне (16).

Теорему 6 доведено.

Теорема 7. *Нехай*

$$\sigma(S) \subset \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < \beta\},$$

$\beta \in (0,1)$, M *– таке додатне число, що*

$$\left\|e^{tS}\right\|_{L(E,E)} \leq Me^{\beta t}, \quad t \geq 0, \tag{17}$$

δ *– довільне додатне число, для якого*

$$\beta + M\delta < 1, \tag{18}$$

і

$$\sup_{t\geq 0}\|H(t)\|_{L(E,E)} < \delta. \tag{19}$$

Тоді для розв'язку $U(t)$ *рівняння (11), що задовольняє (12), виконується співвідношення*

$$\|U(t)\|_{L(E,E)} \geq \frac{1}{M} e^{-(\beta + M\,\delta)\,t}, \quad t \geq 0. \tag{20}$$

Доведення теореми 7. Використаємо союзне рівняння для рівняння (11) [6, с. 146]:

$$\frac{dV(t)}{dt} = V(t)(S + H(t)), \quad t \geq 0, \tag{21}$$

Вважатимемо, що

$$V(0) = I. \tag{22}$$

У [6, с. 146] показано, що для розв'язків задач (11), (12) і (21), (22) справджується тотожність

$$U(t) \equiv (V(t))^{-1}.$$

Тому для всіх $t \geq 0$

$$\|U(t)\|_{L(E,E)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|U(t)x\|_E \geq \inf_{\|x\|_E=1} \|U(t)x\|_E =$$

$$= \inf_{\|x\|_E=1} \left\|(V(t))^{-1}x\right\|_E = \frac{1}{\sup\limits_{\|x\|_E=1} \|V(t)x\|_E} = \frac{1}{\|V(t)\|_{L(E,E)}}. \quad (23)$$

Оцінимо зверху $\|V(t)\|_{L(E,E)}$.

Оскільки розв'язок задачі (21), (22) є розв'язком інтегрального рівняння

$$V(t) = e^{tS} + \int_0^t V(\tau)H(\tau)e^{(t-\tau)S}\,d\tau, \quad t \geq 0,$$

(див. [6, с. 151]), то на підставі (7) і (19) (число δ вибрано таким, щоб справджувалась нерівність (18)) для всіх $t \geq 0$

$$\|V(t)\|_{L(E,E)} \leq \left\|e^{tS}\right\|_{L(E,E)} + \int_0^t \|V(\tau)\|_{L(E,E)} \|H(\tau)\|_{L(E,E)} \left\|e^{(t-\tau)S}\right\|_{L(E,E)} d\tau \leq$$

$$\leq Me^{\beta t} + M\delta\int_0^t e^{\beta(t-\tau)}\|V(\tau)\|_{L(E,E)}\,d\tau, \quad t \geq 0,$$

тобто

$$\|V(t)\|_{L(E,E)} \leq Me^{\beta t} + Me^{\beta t}\delta\int_0^t e^{-\beta\tau}\|V(\tau)\|_{L(E,E)}\,d\tau, \quad t \geq 0,$$

і

$$e^{-\beta t}\|V(t)\|_{L(E,E)} \leq M + M\delta\int_0^t e^{-\beta\tau}\|V(\tau)\|_{L(E,E)}\,d\tau, \quad t \geq 0.$$

Звідси на підставі нерівності Гронуолла отримуємо співвідношення

$$e^{-\beta t}\|V(t)\|_{L(E,E)} \leq Me^{M\delta t}, \quad t \geq 0,$$

з якого випливає, що

$$\|V(t)\|_{L(E,E)} \leq Me^{(\beta+M\delta)t}, \quad t \geq 0.$$

Із цього співвідношення та (23) отримуємо (20).

Теорему 7 доведено.

4. Обґрунтування теореми 2. Оскільки операторна функція $S_p(t)$ при $t \to +\infty$ має границю $S_p \in L(E,E)$, то для деякої неперервної на $[l_{-p}(1), +\infty)$ операторної функції $H_p(t)$ зі значеннями в $L(E,E)$

$$S_p(t) = S_p + H_p(t), \quad t \geq l_{-p}(1),$$

і

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| H_p(t) \right\|_{L(E,E)} = 0. \tag{24}$$

Тому завдяки (2), (3) та (7) для операторної функції $F(t)$ при $t \geq l_{-p}(1)$ виконується співвідношення

$$F'(t) = \begin{cases} \dfrac{dl_1(t)}{dt} \left(S_1 + H_1(t)\right) F(t), & \text{якщо } p = 1, \\[2ex] -\left(\dfrac{d\Pi_{p-2}(t)}{dt} \dfrac{1}{\Pi_{p-2}(t)} I + \dfrac{dl_p(t)}{dt} \left(S_p + H_p(t)\right) \right) F(t), & \text{якщо } p \geq 2. \end{cases} \tag{25}$$

При $p \geq 2$ функцію $F(t)$ подамо у вигляді

$$F(t) = \frac{1}{\Pi_{p-2}(t)} V_p(t), \tag{26}$$

де $V_p(t)$ – неперервно диференційовна операторна функція, для якої виконується співвідношення

$$\frac{dV_p(t)}{dt} = -\frac{dl_p(t)}{dt} \left(S_p + H_p(t)\right) V_p(t), \quad t \geq l_{-p}(1). \tag{27}$$

Отже, для функції $V_p(t)$ при $p \geq 2$ виконується співвідношення, ана-логічне співвідношенню для функції $F(t)$ при $p = 1$.

Використаємо співвідношення (25)–(27) для оцінки норми функції $F(t)$.

Будемо вважати, що виконується співвідношення (9).

Подамо (27) у зручному для подальшого вигляді, використовуючи нові змінну

$$s = l_p(t) \tag{28}$$

та функцію

$$W_p(s) = V_p(t). \tag{29}$$

Оскільки

$$\frac{dV_p(t)}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{dW_p(s)}{ds} = \frac{dl_p(t)}{dt} \frac{dW_p(s)}{ds},$$

то на підставі (27)

$$\frac{dW_p(s)}{ds} \quad = \quad -\left(S_p + H\left(l_{-p}(s)\right)\right)W_p(s), \quad s \geq 1. \tag{30}$$

Далі покажемо правильність першої частини твердження теореми 2, використавши теорему 6. Нехай виконується співвідношення (9). Розглянемо довільні числа $\alpha > 1$ і $M \geq 1$, для яких

$$\sigma(S_p) \subset \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \alpha \}$$

і

$$\left\| e^{-sS_p} \right\|_{L(E,E)} \quad \leq \quad Me^{-\alpha s}, \quad s \geq 0. \tag{31}$$

Співвідношення (31) аналогічне (13). Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$, для якого виконується нерівність (14). Візьмемо таке число $s_* > 1$, щоб

$$\left\| H\left(l_{-p}(s)\right) \right\|_{L(E,E)} \quad < \quad \varepsilon, \quad s \geq s_*.$$

Таке число існує завдяки (24). Тоді на підставі теореми 7 для функції $W_p(s)$, що задовольняє (30), буде виконуватися співвідношення

$$\left\| W_p(s) \right\|_{L(E,E)} \quad \leq \quad Me^{-(\alpha - M\varepsilon)(s - s_*)} \left\| W_p(s_*) \right\|_{L(E,E)}, \quad s \geq s_*,$$

аналогічне (16).

Звідси та (28) і (29) випливає, що

$$\left\| V_p(t) \right\|_{L(E,E)} \quad \leq \quad M \left(\frac{l_{p-1}(t_*)}{l_{p-1}(t)} \right)^{\alpha - M\varepsilon} \left\| V_p(t_*) \right\|_{L(E,E)}, \quad t \geq t_*, \tag{32}$$

де t_* – число, для якого $l_p(t_*) = s_*$.

Отже, на підставі (26) і (32) для функції $F(t)$ при $p \geq 2$ виконується співвідношення

$$\left\| F(t) \right\|_{L(E,E)} \leq M\left(l_{p-1}(t_*)\right)^{\alpha - M\varepsilon} \frac{1}{\Pi_{p-2}(t)\left(l_{p-1}(t)\right)^{\alpha - M\varepsilon}} \left\| V_p(t_*) \right\|_{L(E,E)}, t \geq t_*. \tag{33}$$

Оскільки невласний інтеграл

$$\int\limits_{t_*}^{+\infty} \frac{1}{\Pi_{p-2}(t)\left(l_{p-1}(t)\right)^{\alpha - M\varepsilon}} \, dt,$$

в якому $\alpha - M\varepsilon > 1$, збігається, що перевіряється безпосередньо, то на підставі (33) збігається операторний невласний інтеграл

$$\int\limits_{t_*}^{+\infty} F(t)\, dt$$

у випадку $p \geq 2$.

Збіжність цього інтеграла у випадку p=1 встановлюється аналогічним чином.

Оскільки також збігається невласний інтеграл (8), то за теоремою 3 збігається операторний ряд (6).

Далі покажемо правильність другої частини твердження теореми 2. Будемо вважати, що виконується співвідношення (10).

Використаємо (27) і теорему 8.

Розглянемо довільне число $\beta \in (0,1)$, для якого

$$\sigma(S_p) \subset \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < \beta \}.$$

Нехай M – таке додатне число, що

$$\left\| e^{sS_p} \right\|_{L(E,E)} \le Me^{\beta s}, \quad s \ge 0.$$

Це співвідношення аналогічне (13). Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$, для якого виконуються нерівності (14) і

$$\left\| H\left(l_{-p}(s)\right) \right\|_{L(E,E)} < \varepsilon, \quad s \ge s_{**},$$

де s_{**} – достатньо велике додатне число. Таке число існує завдяки (24). Тоді на підставі теореми 7 для функції $W_p(s)$, що задовольняє (30), буде виконуватися співвідношення

$$\left\| W_p(s) \right\|_{L(E,E)} \ge \frac{1}{M} e^{-(\beta + M\delta)(s - s_{**})} \left\| W_p(s_{**}) \right\|_{L(E,E)}, \quad s \ge s_{**}, \tag{34}$$

аналогічне (20).

Зазначимо, що

$$\left\| W_p(s_{**}) \right\|_{L(E,E)} \ne 0, \tag{35}$$

оскільки для кожного зафіксованого $t \ge 1$ оператор $F(t)$ має обернений неперервний оператор $(F(t))^{-1}$.

Із (34), (28) і (29) випливає, що

$$\left\| V_p(t) \right\|_{L(E,E)} \ge \frac{1}{M} \left(\frac{l_{p-1}(t_{**})}{l_{p-1}(t)} \right)^{\beta + M\delta} \left\| V_p(t_{**}) \right\|_{L(E,E)}, \quad t \ge t_{**},$$

де t_{**} – число, для якого $l_p(t_{**}) = s_{**}$.

Отже, на підставі (26) і (32) для функції $F(t)$ при $p \ge 2$ виконується співвідношення

$$\left\| F(t) \right\|_{L(E,E)} \ge \frac{M\left(l_{p-1}(t_{**})\right)^{\beta + M\delta}}{\Pi_{p-2}(t)\left(l_{p-1}(t)\right)^{\beta + M\delta}} \left\| V_p(t_{**}) \right\|_{L(E,E)}, \quad t \ge t_{**}, \tag{36}$$

причому на підставі (35)

$$\left\| V_p(t_{**}) \right\|_{L(E,E)} \ne 0. \tag{37}$$

Оскільки невласний інтеграл

$$\int_{t_{**}}^{+\infty} \frac{1}{\Pi_{p-2}(t)\left(l_{p-1}(t)\right)^{\beta+M\delta}}\, dt,$$

в якому $\beta + M\delta < 1$, розбігається, що перевіряється безпосередньо, то на підставі (36) і (37) розбігається операторний невласний інтеграл

$$\int_{t_{**}}^{+\infty} F(t)\, dt$$

у випадку $p \geq 2$.

Розбіжність цього інтеграла у випадку $p = 1$ встановлюється аналогічним чином.

Оскільки невласний інтеграл (8) збігається, то за теоремою 3 операторний ряд (6) розбігається.

Теорему 2 доведено.

5. Додаткові зауваження та літературні посилання. Наведені в статті результати про збіжність операторних рядів є новими.

Твердження теореми 2 залишається правильним, якщо в (7) операторну функцію

$$S_1(t) = -t\, \frac{dF(t)}{dt} \left(F(t)\right)^{-1}$$

замінити функцією

$$S_1(t) = -t\left(F(t)\right)^{-1} \frac{dF(t)}{dt}.$$

Інтегральна ознака Маклорена-Коші [3] є окремим випадком теореми 3.

Твердження статті є правильними й у випадку дійсного простору E. Щоб у цьому переконатися, потрібно використати комплексифікацію цього простору та комплексне розширення відповідних операторів (див., наприклад, [8, с. 477], [9, с. 19–22]).

Збіжність операторних рядів досліджувалась автором також в [10–13].

1. Слюсарчук В. Ю. Некоторые признаки сходимости числовых рядов. *Математика сегодня '90*. Київ : Вища школа, 1990. Вып. 6. С. 94–105. **2.** . Слюсарчук В. Ю. Загальні теореми про збіжність числових рядів : монографія. Рівне : РДТУ, 2001. 240 с. **3.** Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : у 3 т. Москва : Наука, 1966. Т. 2. 800 с. **4.** Слюсарчук В. Ю. Нова інтегральна ознака збіжності рядів. *Мат. студії.* 2014. Т. 41, № 2. С. 198–200. **5**. Слюсарчук В. Ю. Інтегральні ознаки збіжності рядів. *Буковинський мат. журн.* 2014. Т. 2, № 2–3. С. 208–213. **6**. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Москва : Наука, 1970. 535 с. **7**. Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А. Устойчивость движения: метод сравнения. Київ : Наук. думка, 1991. 248 с. **8**. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Москва : Наука, 1977. 744 с. **9**. Слюсарчук В. Ю. Диференціальні рівняння в банаховому просторі : монографія. Рівне : НУВГП, 2006. 314 с. **10**. Слюсарчук В. Е. Операторный аналог признака д'Аламбера. *Математика сьогодні '09.* Київ : Вища школа, 2009. Вип. 15. С. 101–115. **11**. Слюсарчук В. Ю. Операторний аналог ознаки Коші. *Мат. студії.* 2010. Т. 33, № 1. С. 97–100. **12**. Слюсарчук В. Ю. Операторний аналог ознаки Бертрана. *Мат. студії.* 2011. Т. 35, № 2, С. 181–195. **13**. Слюсарчук В. Ю. Узагальнення ознак Абеля та Діріхле. *Укр. мат. журн.* 2020. Т. 72, № 4, С. 527–539.

Sliusarchuk V. Yu., Associate Academic, Corresponding Member of NAS of Ukraine, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

DIFFERENTIAL SIGNS OF CONVERGENCE OF OPERATOR SERIES

Differential signs of convergence of operator series are obtained.
Keywords: **differential signs of convergence of operator series.**

УДК 517.5

Іващук[1] Я. Г., к.фіз.-мат.н. (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, [1]ya.h.ivashchuk@nuwm.edu.ua)

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРА НАЙКРАЩОГО ОДНОСТОРОННЬОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЕЛЕМЕНТАМИ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ КЛАСІВ

У статті доведено однобічну диференційованість за напрямом оператора найкращого однобічного наближення неперервних функцій елементами гладкого інтерполяційного класу. Знайдено необхідні та достатні умови диференційованості за напрямом даного оператора.
***Ключові слова*: оператор найкращого однобічного наближення, диференційовність за напрямом.**

В багатьох задачах теорії наближень при оцінці похибки наближень застосовується принцип максимуму і принцип монотонності. Принцип монотонності, що приводить до однобічного чебишевського наближення, часто дає кращі межі для похибки і є справедливим для широкого класу лінійних і нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь і для рівнянь з частинними похідними [1, с. 20–21].

Основні позначення та об'єкт досліджень. Нехай $C[a,b]$ – простір неперервних на $[a,b]$ функцій f, а $\mathbf{F}$ – інтерполяційний клас порядку $n-1$, тобто множина неперервних по x і диференційовних по параметрах $c_1, c_2, ..., c_n$ функцій $y = F(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, для яких однозначно розв'язується інтерполяційна задача в

n довільних точках відрізка $[a,b]$. Оператор

$$\mathrm{P}: C[a,b] \to \mathbf{F},$$

який ставить у відповідність кожній неперервній функції $f \in C[a,b]$ елемент її найкращого рівномірного наближення $\mathrm{P}(f,x) \in \mathbf{F}$, такий, що

$$\mathrm{P}(f,x) \geq f(x)$$

для всіх $x \in [a,b]$ і для якого відхилення $\left\| \mathrm{P}(f) - f \right\|_{C[a,b]}$ досягає найменшого значення називаємо оператором найкращого рівномірного однобічного наближення зверху [2, с. 79]. Величину найкращого рівномірного наближення функції f визначимо рівністю

$$E(f) = \left\| \mathrm{P}(f) - f \right\|_{C[a,b]}.$$

Таким чином,

$$\left\| \mathrm{P}(f) - f \right\|_{C[a,b]} =$$

$$\min\left\{ \left\| F(x,c) - f \right\|, F(x,c) \in \mathbf{F}, F(x,c) \geq f(x), \forall x \in [a,b] \right\}$$

Допоміжні результати. Критерієм елемента з інтерполяційного класу $\mathbf{F}$ найкращого рівномірного однобічного наближення зверху є теорема аналогічна до теореми Чебишева.

Теорема 1. *Елемент* $\mathrm{P}(f,x) \in \mathbf{F}$ *є найкращим рівномірним однобічним наближенням зверху функції* $f \in C[a,b]$ *тоді і тільки тоді, коли знайдеться* $n+1$ *точка* $a \leq \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n < \xi_{n+1} \leq b$ *в яких для різниці* $v(x) = P(x) - f(x)$ *виконуються рівності*

$$v(\xi_1) = v(\xi_3) = v(\xi_5) = \ldots = \|v\|,$$
$$v(\xi_2) = v(\xi_4) = v(\xi_6) = \ldots = 0,$$

або

$$v(\xi_1) = v(\xi_3) = v(\xi_5) = \ldots = 0,$$
$$v(\xi_2) = v(\xi_4) = v(\xi_6) = \ldots = \|v\|.$$

Точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}$ називаються точками чебишовського альтернансу. При цьому точки ξ, в яких $v(\xi) = \|v\|$, будемо називати (+)-точками, а точки ξ, в яких $v(\xi) = 0$ — (-)-точками. (+) і (-) точки називають екстремальними точками.

З теореми 1 випливає однозначність оператора $\mathrm{P}: C[a,b] \to \mathbf{F}$.

Теорема 2. *Для будь-якої функції* $f_0 \in C[a,b] \setminus \mathbf{F}$ *знайдеться окіл* $U = U(f_0) \subset C[a,b] \setminus \mathbf{F}$ *і стала* $K = K(U) > 0$ *така, що для всіх* $f \in U$ *і* $g \in C[a,b]$ *виконується нерівність*

$$\left\| P(f) - P(g) \right\| \le K \left\| f - g \right\|.$$

Наслідок 2.1. *Величина найкращого рівномірного однобічного наближення зверху* $E(f)$ *локально рівномірно задовольняє умову Ліпшиця, тобто для кожної функції* $f \in C[a,b] \setminus \mathbf{F}$ *знайдеться окіл* $U(f) \subset C[a,b] \setminus \mathbf{F}$ *і стала* $K_1 = K_1(U) > 0$ *така, що для всіх* $f \in U$ *і* $g \in C[a,b]$ *має місце нерівність*

$$\left| E(f) - E(g) \right| \le K_1 \left\| f - g \right\|.$$

Результати досліджень. Припустимо тепер, що інтерполяційний клас $\mathbf{F}$ є гладким многовидом, тобто, що існують і є неперервними частинні похідні $\dfrac{\partial F(x,c)}{\partial c_i}$ по параметрах c_i, $i = 1,\ldots,n$, для всіх функцій $F(x,c) \in \mathbf{F}$.

В просторі $C[a,b] \setminus \mathbf{F}$ розглянемо однопараметричну множину функцій $f(t,x),\ t \in [0,1]$, $x \in [a,b]$, неперервно диференційовних за параметром t. Через $\mathrm{P}(t,x)$ позначимо найкраще рівномірне наближення функції $f(t,x)$ з класу $\mathbf{F}$. $E(t) = \left\| \mathrm{P}(t,x) - f(t,x) \right\|_{C[a,b]}$ – величина найкращого наближення функції $f(t,x)$ на відрізку $[a,b]$. Позначимо:

$$\Phi(t,x) = \frac{\mathrm{P}(t,x) - f(t,x)}{E(t)}, \tag{1}$$

причому $\left\| \Phi(t,x) \right\| = 1$.

Теорема 3. *Функція* $\Phi(t,x)$, *визначена згідно (1), має односторонню праву похідну по* t *в кожній точці* $t_0 \in [0,1)$. *При цьому похідна має вигляд*

$$R(t_0,x) = \frac{\partial \Phi(t_0+0,x)}{\partial t} = \frac{1}{E(t_0)} \left(\sum_{i=0}^{n} d_i \frac{\partial F(x,c)}{\partial c_i} - \frac{\partial f(t_0,x)}{\partial t} \right) - \frac{\alpha}{E(t_0)} \Phi(t_0,x) =$$

$$= \frac{1}{E(t_0)} \left(D(t_0,x) - \frac{\partial f(t_0,x)}{\partial t} \right) - \frac{\alpha}{E(t_0)} \Phi(t_0,x),$$

а невідомі α, d_i, $i=\overline{1,n}$, однозначно визначаються з системи рівнянь:

$$R\left(t_0,\xi_j\right)=\frac{\partial\Phi\left(t_0+0,\xi_j\right)}{\partial t}=0\,,\quad j=1,\dots,n+1\,,$$

де точки ξ_j утворюють альтернанс функції $\Phi\left(t_0,x\right)$, такий, що для деякої послідовності $\left\{t_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, збіжної до t_0+0, кожна точка ξ_j є граничною точкою відповідних точок ξ_{kj} альтернансу функції $\Phi\left(t_k,x\right)$, при $t_k\to t_0+0$.

Доведення. Згідно з теоремою 2 і того факту, що величина найкращого наближення також задовольняє умову Ліпшиця в просторі $C[a,b]$, тобто

$$\left|E(f)-E(g)\right|\le K\left\|f-g\right\|,$$

стверджуємо, що принаймні для одної числової послідовності $\left\{t_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ такої, що $t_k\to t_0+0$ при $k\to\infty$, існує границя

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Phi\left(t_k,x\right)-\Phi\left(t_0,x\right)}{t_k-t_0}=R\left(t_0,x\right). \tag{2}$$

Нехай точки $\xi_{k1},\dots,\xi_{k(n+1)}$ утворюють чебишовський альтернанс функції $\Phi\left(t_k,x\right)$. Можна вважати послідовність такою, що границі $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_{kj}=\xi_j$ існують. Точки $\xi_1,\dots,\xi_{n+1}$ утворюють альтернанс функції $\Phi\left(t_0,x\right)$.

Із (2) маємо:

$$\Phi\left(t_k,x\right)=\Phi\left(t_0,x\right)+\left(t_k-t_0\right)R\left(t_0,x\right)+o\left(t_k-t_0\right),\quad k\to\infty,$$

а оскільки функція $\varphi_j(t)=\Phi\left(t,\xi_j\right)$ при $t=t_0$ має екстремум, то звідси випливають рівняння:

$$R\left(t,\xi_j\right)=0\,,\quad j=1,\dots,n+1. \tag{3}$$

Покажемо, що з рівнянь (3) однозначно визначається функція $R\left(t_0,x\right)$. Легко видно, що

$$R\left(t_0,x\right)=\frac{1}{E\left(t_0\right)}\left(D\left(t_0,x\right)-\frac{\partial f\left(t_0,x\right)}{\partial t}\right)-\frac{\alpha}{E\left(t_0\right)}\Phi\left(t_0,x\right), \qquad (4)$$

де $\alpha=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{E\left(t_k\right)-E\left(t_0\right)}{t_k-t_0}$, $\quad D\left(t_0,x\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{P\left(t_k,x\right)-P\left(t_0,x\right)}{t_k-t_0}$.

Рівняння (2) утворюють систему з $n+1$ лінійних рівнянь відносно $n+1$ невідомих: α, і n коефіцієнтів d_i узагальненого полінома $D\left(t_0,x\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}d_i\dfrac{\partial F\left(x,c\left(t_0\right)\right)}{\partial c_i}$ за чебишовською системою $\left\{\dfrac{\partial F\left(x,c\left(t_0\right)\right)}{\partial c_i}\right\}_{i=1}^{n}$.

З нескладних міркувань [3, с. 247] випливає, що α і $d_1,\ldots,d_n$ визначаються з (2) однозначно, а отже й однозначно визначається функція $R\left(t_0,x\right)$.

Покажемо, що коли $\left\{\tau_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – якась інша послідовність збіжна до t_0 справа, для якої існує границя

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Phi\left(\tau_k,x\right)-\Phi\left(\tau_0,x\right)}{\tau_k-\tau_0}=\tilde{R}\left(t_0,x\right)=\frac{1}{E\left(t_0\right)}\left(\tilde{D}\left(t_0,x\right)-\frac{\partial f\left(t_0,x\right)}{\partial t}\right)-\frac{\tilde{\alpha}}{E\left(t_0\right)}\Phi\left(t_0,x\right), \qquad (5)$$

то $R\left(t_0,x\right)=\tilde{R}\left(t_0,x\right)$.

Функція $\tilde{R}\left(t_0,x\right)$ задовольняє нерівності:

$$\tilde{R}\left(t_0,\xi_j\right)\le 0 \ \text{ для } \ (+)\ e\text{-точок } \xi_j,$$

$$\tilde{R}\left(t_0,\xi_j\right)\ge 0 \ \text{ для } \ (-)\ e\text{-точок } \xi_j. \qquad (6)$$

Згідно з (4) і (5), різниця $\tilde{R}\left(t_0,x\right)-R\left(t_0,x\right)$ може бути визначена так:

$$\tilde{R}\left(t_0,x\right)-R\left(t_0,x\right)=\beta\,\Phi\left(t_0,x\right)+Q\left(x\right),$$

де $\beta\in\mathbf{R}$, а $Q\left(x\right)$ – деякий узагальнений поліном за чебишовською системою

$$\left\{\frac{\partial F\left(x,c\left(t_0\right)\right)}{\partial c_i}\right\}_{i=1}^{n}.$$

Із двох нерівностей (6) отримуємо такі:

$$Q\left(\xi_j\right) \le -\beta\,\Phi\left(t_0, \xi_j\right) \quad \text{для} \quad (+)\ e\text{-точок } \xi_j,$$

$$Q\left(\xi_j\right) \ge 0 \quad \text{для} \quad (-)\ e\text{-точок } \xi_j.$$

Звідси випливає, що $Q(x) \equiv 0$, бо ненульовий поліном за чебишовською системою із n функцій не може мати, враховуючи парність, більше як $n-1$ коренів [4, с. 23].

Покажемо, що $\beta = 0$. Припустимо супротивне. Тоді маємо рівності

$$\tilde{R}\left(t_0, \xi_j\right) - R\left(t_0, \xi_j\right) = \beta\,\Phi\left(t_0, \xi_j\right), \quad \beta \ne 0, \quad j = 1, \ldots, n+1.$$

Із (3) отримуємо, що в точках альтернансу функції $\Phi\left(t_0, x\right)$

$$\tilde{R}\left(t_0, \xi_j\right) = \beta\,\Phi\left(t_0, \xi_j\right), \quad j = 1, \ldots, n+1.$$

З рівностей (3) та властивостей функції $\Phi\left(t_0, x\right)$ випливає, що поліном $D\left(t_0, x\right)$ є найкращим рівномірним наближенням функції $\dfrac{\partial f\left(t_0, x\right)}{\partial t}$ на множині $\left\{\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}\right\}$ з похибкою $|\alpha|$. Якби число β було б відмінним від нуля, то таким же найкращим наближенням, але з іншим значенням похибки був би поліном $\tilde{D}\left(t_0, x\right)$, що неможливо. Тому $\beta = 0$, і $R\left(t_0, x\right) = \tilde{R}\left(t_0, x\right)$.

Теорему 3 доведено.

З даної теореми випливають такі властивості.

Наслідок 3.1. *Для існування похідної* $\dfrac{\partial \Phi\left(t_0, x\right)}{\partial t}$ *необхідно і достатньо, щоб існувала функція* $R\left(t_0, x\right)$ *виду (4), яка дорівнює нулеві у всіх* e *-точках функції* $\Phi\left(t_0, x\right)$.

Якщо замість однопараметричної множини функцій $f\left(t, x\right)$ розглядати множину $f(x) + t\,g(x)$, то справедливим буде

Наслідок 3.2. *Однобічна похідна оператора* P *в точці* f *по кожному напрямку* $g \in C[a,b]$ *є узагальненим поліномом за чебишовською системою функцій* $\left\{\dfrac{\partial F\left(x, c(f)\right)}{\partial c_i}\right\}_{i=1}^{n}$

$$D(f,g)=\left.\frac{d\mathrm{P}(f+tg)}{dt}\right|_{t=+0}=\sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\partial F(x,c(f))}{\partial c_i},$$

який найкращим чином наближає функцію $g(x)$ *на множині з* $(n+1)$*-ї* e*-точки відповідного чебишовського альтернансу різниці* $\mathrm{P}(f)-f$ *. Коефіцієнти* d_i *такого полінома та величина* α *знаходяться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь :*

$$D(f,g,\xi_j)+\alpha(-1)^{\theta}=g(\xi_j), \quad j=1,\ldots,n+1,$$

де $\theta=j$, або $\theta=j+1$.

Висновки. У 1989 р. групою математиків Kroo, Angelos, Henry, Kaufman, Lenker [5] доведено, що оператор **P** найкращого рівномірно наближення елементами інтерполяційного класу односторонньо диференційовний в кожній точці $f \notin \mathbf{F}$ по кожному напрямку $g \in C[a,b]$, тобто, що існує похідна

$$D(f,g)=\left.\frac{d\mathrm{P}(f+tg)}{dt}\right|_{t=+0},$$

але цей результат, в більшій мірі, є теоретичним.

Доведена теорема 3 дає можливість практично втілити ідею диференційовності оператора найкращого одностороннього наближення за напрямом у зручній формі до побудови алгоритмів найкращого рівномірного наближення функцій елементами гладкого інтерполяційного класу та доведення їх збіжності.

1. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. Москва : Наука, 1978. 272 с. **2.** Ковтунец В. В. О диференцировании оператора наилучшего одностороннего приближения. *Приближение функций специальными классами операторов* : межвуз. сб. науч. трудов. Вологда, 1987. С. 79–87. **3.** Іващук Я. Г. k-вужі в інтерполяційних класах функцій скінченного порядку. *Укр. мат. журн.* 1993. Т. 45, № 2. С. 243–250. **4.** Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. Москва : Наука, 1977. 508 с. **5.** Angelos J. R., Henry M. S., Kaufman E. H. et al. Local Lipschitz and Strong Unicity Constants for Certain Nonlinear Famlies. *Journal of aproximation theory*. 1989. Vol. 58. P. 164–183.

Ivashchuk Ya. H. Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Ph.D.) (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

DIFFERENTIAL PROPERTIES OF THE OPERATOR OF THE BEST ONE-SIDED APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY ELEMENTS OF NONLINEAR INTERPOLATION CLASSES

The paper proves the one-sided differentiation in the direction of the operator of the best one-sided approximation of continuous functions by elements of a smooth

interpolation class. Necessary and sufficient conditions of differentiation in the direction of this operator are found.

Keywords: **operator of the best one-sided approximation, differentiation by direction.**

УДК 517.2

Кушнір О. О.[1], к.фіз.-мат.н., доцент, Кушнір В. П.[2], к.фіз.-мат.н. (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне,
[1]o.o.kushnir@nuwm.edu.ua
[2]v.p.kushnir@nuwm.edu.ua)

ДРУГА ВИЗНАЧНА ГРАНИЦЯ ДЛЯ МАТРИЦЬ

У статті узагальнено другу визначну границю на випадок нескінченновимірних субстохастичних матриць. Розглядається поелементна збіжність.

Ключові слова: **друга визначна границя, стохастична матриця, ергодична теорема, рівномірна збіжність, норма матриці.**

Стохастичні матриці широко використовуються при вивченні ланцюгів Маркова, зокрема в теорії масового обслуговування. Оскільки на практиці перехідні ймовірності можна знайти тільки наближено, важливо оцінювати вплив збурення на граничний розподіл.

В даній статті наводяться достатні умови існування поелементної границі послідовності нескінченновимірних матриць $(P+B/n)^n$, де P — стохастична матриця.

В цій статті розглядаються тільки нескінченновимірні матриці вигляду $A = \{a_{ij} \mid i, j \in \mathbb{Z}_0^+\}$.

Означення 1. Матриця P називається стохастичною, якщо всі її елементи — невід'ємні і сума елементів у кожному рядку дорівнює 1: $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$.

Елементи n-го степеня P^n матриці P позначатимемо $p_{ij}^{(n)}$.

Означення 2. Стохастична матриця P задовольняє ергодичній теоремі Дебліна для аперіодичних ланцюгів Маркова [1, с. 301], якщо існує послідовність додатних чисел π_j, $j \geq 0$ така, що

1) для всіх $i \geq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left| p_{ij}^{(n)} - \pi_j \right| = 0$;

2) для матриці Π з однаковими рядками вигляду $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$, виконується рівність $\Pi P = \Pi$, тобто для всіх $j \geq 0$:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i p_{ij} = \pi_j \ ;$$

3) матриця П — стохастична, отже, $\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1$.

Означення 3. Матриця *B* в даній роботі називається обмеженою, якщо є скінченною така її норма:

$$\|B\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{i\ge 0}\sum_{j=0}^{\infty}|b_{ij}| < \infty .$$

Зауваження 1. З означення випливає, що стохастична матриця є обмеженою і її норма дорівнює 1.

Зауваження 2. Норма суми та різниці матриць не перевищує суми їхніх норм.

Означення 4. Матриця *B* називається рівномірно збіжною, якщо $\lim_{n\to\infty}\sup_{i\ge 0}\sum_{j=n+1}^{\infty}|b_{ij}| = 0$, тобто для кожного $\delta > 0$ існує таке $n_0 \ge 0$, що для всіх $i \ge 0$ виконується нерівність

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty}|b_{ij}| < \delta . \qquad (1)$$

Теорема. *Нехай стохастична матриця P задовольняє ергодичну теорему Дебліна для аперіодичних ланцюгів Маркова, а нескінченновимірна матриця B — обмежена та рівномірно збіжна. Тоді існує поелементна границя послідовності матриць* $\left(P + \frac{1}{n}B\right)^n$ *, і ця границя*

$$\lim_{n\to\infty}\left(P + \frac{1}{n}B\right)^n = e^{\alpha}\,\Pi \text{, де } \alpha = \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} .$$

Зауваження 3. Умова рівномірної збіжності матриці *B* не є необхідною. Наприклад, твердження теореми залишиться в силі й тоді, коли матриця *B* — скалярна, а також коли вона пропорційна матриці *P*, яка не мусить бути рівномірно збіжною. Зокрема перехідна матриця рекурентного додатного ланцюга народження і загибелі задовольняє ергодичну теорему Дебліна для аперіодичних ланцюгів Маркова [1, с.299-301], але, очевидно, не є рівномірно збіжною.

Зауваження 4. $\alpha \le \|B\|$.

Для доведення теореми використаємо допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай матриця A — обмежена, а B — рівномірно збіжна, причому для кожного* $\delta > 0$ *існує таке* n_0 *, що для всіх* $i \ge 0$ *виконується (1). Тоді матриця*

C=AB — рівномірно збіжна, і для всіх $i \geq 0$ виконується нерівність

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} \left| \tilde{n}_{ij} \right| < \|A\| \delta .$$

Зауваження 5. З леми 1 випливає, що норма добутку матриць не перевищує добутку їхніх норм.

Лема 2. *При виконанні умов теореми для всіх s* $\in \mathbb{Z}_0^+$ *:* $\Pi(B\Pi)^s = \alpha^s \Pi.$

Доведення леми 1.

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} \left| \tilde{n}_{ij} \right| = \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| a_{ik} \right| \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \left| b_{kj} \right| < \delta \sum_{k=0}^{\infty} \left| a_{ik} \right| \leq \|A\| \delta .$$

Доведення леми 2. Знайдемо c_{ij} — елементи матриці $\Pi B \Pi$.

$c_{ij} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \pi_l b_{lr} \pi_j = \pi_j \sum_{l=0}^{\infty} \pi_l \sum_{r=0}^{\infty} b_{lr} = \pi_j \alpha$. Отже, $\Pi B \Pi = \alpha \Pi$.

Тоді, за властивістю асоціативності множення матриць, при $s \geq 2$: $\Pi(B\Pi)^s = \alpha \Pi(B\Pi)^{s-1} = \alpha^2 \Pi(B\Pi)^{s-2} = \cdots = \alpha^s \Pi.$ При $s = 0$ рівність також виконується.

Доведення теореми. Позначимо $b = \max\{\|B\|, 1\}$. Для довільного $N \geq 1$ позначимо $\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b^k}{k!} = \delta$.

Оскільки матриця *B* — рівномірно збіжна, то існує таке $n_0 \geq 1$, що для всіх $i \geq 0$ виконується нерівність

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} \left| b_{ij} \right| < \delta . \tag{2}$$

Оскільки матриця *P* задовольняє ергодичну теорему Дебліна для аперіодичних ланцюгів Маркова, то існує таке $k_0 \geq \max\{N, n_0\}$, що для всіх $i \leq n_0$ та всіх $k \geq k_0$ виконується нерівність

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left| p_{ij}^{(k)} - \pi_j \right| < \delta . \tag{3}$$

Лема 3. *Якщо для елементів матриці F для всіх $i \leq n_0$ виконується нерівність $\sum_{j=0}^{\infty} \left| f_{ij} \right| < \delta$, то для елементів матриці C=FG для всіх $i \leq n_0$ виконується нерівність $\sum_{j=0}^{\infty} \left| c_{ij} \right| < \delta \|G\|$.*

Доведення леми 3

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|c_{ij}\right|=\sum_{j=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{\infty}f_{ik}g_{kj}\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}\left|f_{ik}\right|\sum_{j=0}^{\infty}\left|g_{kj}\right|\le\|G\|\sum_{k=0}^{\infty}\left|f_{ik}\right|<\delta\|G\|.$$

Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^k(n-k)!}=1$, тому існує таке $n_1\ge k_0$, що для всіх $n\ge n_1$ виконується нерівність

$$\left|\sum_{k=0}^{N}C_n^k\left(\frac{b}{n}\right)^k-\sum_{k=0}^{N}\frac{b^k}{k!}\right|<\delta. \tag{4}$$

Оскільки $\dfrac{n!}{n^k(n-k)!}\le 1$, то з означення числа δ випливає, що для всіх $n>N$ виконується нерівність

$$\sum_{k=N+1}^{n}C_n^k\left(\frac{b}{n}\right)^k<\sum_{k=N+1}^{n}\frac{b^k}{k!}<\delta. \tag{5}$$

Піднісши до степеня $\left(P+\dfrac{1}{n}B\right)^n$ при $n\ge n_1$, отримаємо

$$\left(P+\frac{1}{n}B\right)^n=P^n+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P^{i-1}BP^{n-i}+\frac{1}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}P^{i-1}BP^{j-i-1}BP^{n-j}+\dots+$$
$$+\frac{1}{n^N}\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_N\le n}P^{i_1-1}BP^{i_2-i_1-1}B\cdots BP^{n-i_N}+\Delta. \tag{6}$$

Оскільки $\|P\|=1$, то з (5) випливає, що

$$\|\Delta\|\le\delta. \tag{7}$$

Розглянемо матрицю $D_s=\sum\limits_{1\le i_1<i_2<\dots<i_S\le n}D_s(i_1,i_2,\dots i_s)$,

де $D_s(i_1,i_2,\dots i_s)=P^{i_1-1}BP^{i_2-i_1-1}B\cdots BP^{n-i_s}-\Pi(B\Pi)^s$, при $1\le s\le N$. Розіб'ємо суму D_s на 2 частини $D^{(1)}(s)$ та $D^{(2)}(s)$. У $D^{(1)}(s)$ включимо ті $D_s(i_1,i_2,\dots i_s)$, в яких $i_1>k_0$, $i_2>i_1+k_0$, $i_3>i_2+k_0$, …, $n\ge i_s+k_0$, а в $D^{(2)}(s)$ — решту доданків.

Кількість доданків у $D^{(1)}(s)$ не перевищує загальної кількості доданків у D_s, яка дорівнює C_n^s. Доданки з $D^{(1)}(s)$ подамо у вигляді

$$D_s(i_1,i_2,\dots i_s)=\left(P^{i_1-1}-\Pi\right)BP^{i_2-i_1-1}B\cdots BP^{n-i_s}+$$
$$+\Pi B\left(P^{i_2-i_1-1}-\Pi\right)B\cdots BP^{n-i_s}+\dots+$$
$$+\Pi B\Pi B\cdots B\left(P^{n-i_s}-\Pi\right). \tag{8}$$

В першому доданку правої частини (8) справа від дужок є *s* матриць *B*, а решта — стохастичні. Тому норма їх добутку не перевищує $\|B\|^s\le b^s$. Тоді з (3), за лемою 3, для елементів цього доданку для всіх $i\le n_0$ виконується нерівність

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|c_{ij}^{(1)}\right|<\delta b^s. \tag{9}$$

Останній доданок (8) позначимо *H*. Остання матриця *B* в ньому множиться зліва на стохастичні матриці та на s-1 матриць *B*, тобто в цілому на матрицю, норма якої не перевищує b^{s-1}. Тому з (2), за лемою 1, для елементів добутку зліва від дужок в *H* для всіх $i\ge 0$ отримуємо

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty}\left|\tilde{n}_{ij}^{(3)}\right|<b^{s-1}\delta, \tag{10}$$

а норма цього добутку не перевищує b^s

З (3) та (10) для всіх $i\le n_0$ дістанемо

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|h_{ij}\right|=\sum_{j=0}^{\infty}\left|\sum_{l=0}^{\infty}c_{il}^{(3)}\left(p_{lj}^{(k)}-\pi_j\right)\right|\le\sum_{l=0}^{n_0}\left|c_{il}^{(3)}\right|\sum_{j=0}^{\infty}\left|p_{lj}^{(k)}-\pi_j\right|+$$
$$+\sum_{l=n_0+1}^{\infty}\left|c_{il}^{(3)}\right|\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left|p_{lj}^{(k)}\right|+\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j\right)<\delta b^s+2b^{s-1}\delta\le 3\delta b^s. \tag{11}$$

Так само оцінюються й елементи інших доданків у $D^{(1)}(s)$. Загальна кількість матриць *B* зліва та справа від дужок становить *s*, тому отримаємо оцінки такі, як у правій частині (11).

Використавши також нерівність (9) для 1-го доданку, остаточно для елементів суми $D^{(1)}(s)$ для всіх $i\le n_0$ маємо

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|d_{ij}^{(1)}(s)\right|\le C_n^s\cdot(1+3s)\delta b^s.$$

Тоді для всіх $i\le n_0$, $n\ge n_1$ отримуємо

$$\sum_{s=1}^{N}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left|d_{ij}^{(1)}(s)\right|}{n^s}\le\delta\sum_{s=1}^{N}C_n^s\cdot(1+3s)\frac{b^s}{n^s}\le\delta\sum_{s=1}^{N}(1+3s)\frac{b^s}{s!}=$$

$$=\delta\sum_{s=1}^{N}\frac{b^s}{s!}+3\delta\sum_{s=1}^{N}\frac{b^s}{(s-1)!}\le\delta\sum_{s=0}^{\infty}\frac{b^s}{s!}+3\delta\sum_{s=1}^{\infty}\frac{b^s}{(s-1)!}=\delta(1+3b)e^b. \tag{12}$$

Норма кожного доданку в $D^{(2)}(s)$ не перевищує $2b^s$. Оцінимо їх кількість. Нам потрібно розмістити s матриць *B* на *n* місцях у добутку так, щоб порушилася хоча б одна з умов $i_1>k_0,\quad i_2>i_1+k_0,\quad i_3>i_2+k_0,\quad \ldots,\quad n\ge i_s+k_0$. Це означає, що одна з матриць *B* знаходиться або на одному з перших k_0 місць, або на одному з останніх k_0 місць, або справа від іншої матриці *B* на одному з перших k_0 місць. Отже, вибрати це місце можна не більше, ніж $(s+1)k_0$ способами після того, як місця для решти *s*-1 матриць уже вибрані. Таким чином, кількість доданків у $D^{(2)}(s)$ не перевищує $(s+1)k_0C_n^{s-1}$. Тоді

$$\left\|D^{(2)}(s)\right\|\le 2b^s(1+s)k_0C_n^{s-1}. \tag{13}$$

Виберемо $n_2\ge n_1$ так, щоб при $n\ge n_2$ виконувалась нерівність

$$\frac{2b(b+2)k_0e^b}{n}<\delta. \tag{14}$$

Тоді з (13), (14) при таких $n\ge n_2$ дістанемо

$$\sum_{s=1}^{N}\frac{\left\|D^{(2)}(s)\right\|}{n^s}\le 2k_0\sum_{s=1}^{N}\frac{(1+s)b^s}{n(s-1)!}\le 2k_0\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(1+s)b^s}{n(s-1)!}=2k_0\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2b^s}{n(s-1)!}+$$

$$+2k_0\sum_{s=2}^{\infty}\frac{b^s}{n(s-2)!}=\frac{4bk_0e^b}{n}+\frac{2b^2k_0e^b}{n}=\frac{2b(b+2)k_0e^b}{n}<\delta. \tag{15}$$

Використавши (6), перетворимо матрицю

$$Q(n)=\left(P+\frac{1}{n}B\right)^n-e^{\alpha}\,\Pi=\left(P+\frac{1}{n}B\right)^n-\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Pi(B\Pi)^s}{s!}=$$

$$=P^n-\Pi+\sum_{s=1}^{N}\frac{D_s}{n^s}+\sum_{s=1}^{N}\left(C_n^s\frac{\Pi(B\Pi)^s}{n^s}-\frac{\Pi(B\Pi)^s}{s!}\right)+\Delta-\sum_{s=N+1}^{\infty}\frac{\Pi(B\Pi)^s}{s!}.$$

Із леми 2, (3), (12), (15), (4), (7), (5), врахувавши зауваження 4, для всіх $n\ge n_2$ та $i\le n_0$ для елементів матриці *Q*(*n*) виконуються нерівності

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|q_{ij}(n)\right|\le\delta+\delta(1+3b)e^b+\delta\delta+\delta+\delta+\delta\left(5+e^b+3be^b\right)\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{b^k}{k!}.$$

Тоді для всіх $i \le n_0$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{j=0}^{\infty} \left|q_{ij}(n)\right| \le \left(5+e^b+3be^b\right) \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b^k}{k!} . \qquad (16)$$

Оскільки ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!}$ — збіжний, то з (16) випливає, що для всіх $i \le n_0$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left|q_{ij}(n)\right| = 0 .$$

Тоді $\lim_{n\to\infty}\left(P+\frac{1}{n}B\right)^n = e^{\alpha}\,\Pi$ поелементно.

Теорема доведена.

1. Карташов М. В. Імовірність. Процеси. Статистика : посібник. Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. 494 с.

Kushnir O. O., Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Ph.D.), Associate Professor; Kushnir V. P., Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Ph.D.) (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

SECOND REMARKABLE LIMIT FOR MATRICES

In this article the second remarkable limit for the case of infinite-dimtnsional substochastic matrices is generalized. Element-by-element convergence is considered.

***Keywords:* second remarkable limit, stochastic matrix, ergodic theorem, uniform convergence, matrix norm.**

УДК 518.517.948

Самолюк[1] І. В., асистент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, [1] i.v.samolyuk@nuvm.edu.ua)

ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

У статті розглянуто прекційно-ітеративний метод розв'язування крайової задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного типу.

***Ключові слова:* проекційно-ітеративний наближений метод, кубатурні формули, крайова задача, нев'язка, координатні системи функцій, інтегральне рівняння, *к*-те наближення, точність розв'язку, область збіжності.**

Серед використовування наближених методів розв’язування багатьох задач поширеними є проекційно-ітеративні методи, які об’єднують позитивні властивості ітеративних і проекційних методів. Як ітеративні методи вони забезпечують потрібну поточність розв’язку шляхом послідовних уточнень, як проекційні – розширюють область збіжності і прискорюють швидкість ітеративних процесів.

Проекційно-ітеративним методом можна розв’язувати крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного типу. Алгоритм методу формально мало відрізняється від випадку задач для звичайних диференціальних рівнянь. Однак у цьому випадку виникає ряд труднощів пов’язаних із переходом до рівносильного інтегрального рівняння, та труднощі обчислювального характеру.

Розглянемо ідею методу для наступної задачі.

Нехай потрібно знайти функцію $u(x,y)$, яка задовольняє в області Ω диференціальному рівнянню

$$\Delta u = f(x,y) + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u \qquad (1)$$

і приймає на границі *Г* задане значення, тобто

$$u\big|_{Г} = \varphi(x,y). \qquad (2)$$

Будемо вважати, що коефіцієнти $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ неперервні в Ω, $f(x,y) \in L^2(\Omega)$ і $\varphi(x,y)$ – неперервна функція на *Г*.

Суть методу до задачі (1)–(2) полягає в наступному. Задаємо координатні системи функції $\{\varphi_i(x,y)\}$, $\{\psi(x,y)\}$, які належать $L^2(\Omega)$ і початкове наближення $u_0(x,y)$, зокрема, його можна визначити з крайової задачі

$$\Delta u_0 = f(x,y) + \upsilon_0(x,y),\ u\big|_{Г} = \varphi(x,y), \qquad (3)$$

де $\upsilon_0(x,y) \in L^2(\Omega)$ – деяка задана функція.

Нехай наближення $u_{k-1}(x,y)$ уже побудоване, тоді *к*-те наближення знаходимо з крайової задачі

$$\Delta u_k = f(x,y) + \upsilon_k(x,y),\ u_k\big|_{Г} = \varphi(x,y), \qquad (4)$$

де

$$\upsilon_k(x,y) = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\left[y_{k-1}(x,y) + z_k(x,y)\right] +$$

$$b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\left[\upsilon_{k-1}(x,y) + z_k(x,y)\right] + c(x,y)\left[\upsilon_{k-1}(x,y) + z_k(x,y)\right], \qquad (5)$$

$$z_k(x,y) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \xi_j(x,y). \qquad (6)$$

У виразі (6) невідомі параметри a_j^k визначаються з умови

$$\iint_{\Omega} \{\upsilon_k(x,y) - \upsilon_{k-1}(x,y) - \omega_k(x,y)\} \psi_i(x,y)dxdy = 0, \qquad (7)$$

де $i = \overline{1,n}$ і

$$\omega_k(x,y) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \varphi_j(x,y), \qquad (8)$$

а функція $\xi_i(x,y)$ зв’язана з функцією $\psi_i(x,y)$ співвідношенням

$$\Delta\xi_i = \varphi_i(x,y),\ \xi_i\big|_{\Gamma} = \varphi(x,y),\ i = \overline{1,n}. \qquad (9)$$

Алгоритм по формі не відрізняється від випадку звичайних диференціальних рівнянь, однак при розв’язуванні крайової задачі (4) у випадку складної області Ω, цю задачу доведеться розв’язувати наближено.

Для реалізації методу потрібно задати систему функцій $\xi_i(x,y)$, двічі диференційованих і на границі *Г* рівних нулю, або визначити їх по заданій системі $\{\varphi_i(x,y)\}$ за допомогою рівняння (9). Після цього потрібно знайти функції

$$g_i(x,y) = a(x,y)\frac{\partial\xi_i}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial\xi_i}{\partial y} + c(x,y)\xi_i,\ i = \overline{1,n}. \qquad (10)$$

і величини

$$B_{ij} = \iint_{\Omega} \{\varphi_j(x,y) - g_j(x,y)\} \psi_i(x,y)dxdy,\ i,j = \overline{1,n}. \qquad (11)$$

Задавши функцію $\upsilon_0(x,y)$ і з рівняння (3) визначаємо початкове наближення $u_0(x,y)$. Після цього знаходимо:

$$h_k(x,y) = a(x,y)\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + c(x,y)u_{k-1}, \qquad (12)$$

нев’язку

$$\varepsilon_k(x,y) = h_k(x,y) - \upsilon_{k-1}(x,y) \qquad (13)$$

і величини

$$b_i^k = \iint_{\Omega} \varepsilon_k(x,y)\psi_i(x,y)dxdy,\ i = \overline{1,n}. \qquad (14)$$

Складаємо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ij}a_j^k = b_i^k,\ i = \overline{1,n}, \qquad (15)$$

Розв’язавши систему (15), утворюємо функції

$$\omega_k(x,y) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k g_j(x,y), \qquad (16)$$

$$\upsilon_k(x,y) = h_k(x,y) + \omega_k(x,y) \qquad (17)$$

і знаходимо к-те наближення розв’язку задачі (4).

На підставі аналізу обчислювальної схеми маємо, що найбільш громіздкими місцями методу є знаходження інтегралів (7), (11), (14) і розв’язання допоміжної крайової задачі (4). В цьому випадку можна, наприклад, при знаходженні інтегралів використати кубатурні формули, а для розв'язання крайової задачі – ії дискретний аналог. В результаті ми одержимо аналітичний наближений розв'язок крайової задачі (1)–(2).

1. Горбунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. Москва, 1977. 439 с. **2.** Лучка А. Ю. Проекционно-итеративный метод решения линейных уравнений. *Вопросы оптимизации и организации вычислений.* Киев : О-во Знание УССР, 1976. С. 26–28. **3.** Лучка А. Ю., Ярмуш Я. И. О решении систем линейных конечно-разностных уравнений проекционно-итеративным методом. *Изв. вузов. Математика.* 1975. № 5. С. 54–64.

Samoliuk I. V., Assistant (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

PROJECTION-ITERATIVE METHOD FOR SOLVING A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PARTIAL DERIVATIVES OF ELLIPTIC TYPE

The projection-iterative method of solving the boundary value problem for differential equations with partial derivatives of elliptic type is considered in the article.
Keywords: **projection-iterative approximate method, cubature formulas, boundary value problem, residual, coordinate systems of functions, integral equation, k-th approximation, solution accuracy, convergence region.**

УДК 519.7

Тадеєв[1] П. О. к.фіз.-мат.н., д.п.н., професор (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, [1]p.o.tadeyev@nuwm.edu.ua)

ДОСКОНАЛІ ІМПЛІКАТИВНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Метою статті є виокремлення досконалих імплікативних нормальних форм (ДІНФ-1, ДІНФ-1.1, ДІНФ-2 та ДІНФ-2.1) для булевої функції. Це дало можливість побудувати їх двійкові еквіваленти, що дозволить спрощувати, збільшити продуктивність мінімізації функцій імплікативного базису, розробивши алгебру імплікативного базису у частині спрощення логічних виразів.
Ключові слова: **булеві функції, алгебра імплікативного базису, досконалі імплікативні нормальні форми, таблиця істинності, логічні базиси.**

Імплікативні функції та логічні базиси. Технологія проектування булевих функцій, які увійшли до логічних базисів, може використовувати реалізацію, що ґрунтується на тих чи інших фізичних явищах. Наприклад, властивостям напівпровідників відповідають функції Пірса (Вебба) та Шеффера, а за допомогою магнітних явищ можна реалізувати імплікативний базис [1].

Імплікація (від лат. implico – тісно пов'язаний) – це логічна операція, що відповідає зв'язці «якщо …, то …» (IF-THEN), коли з двох висловлювань A і B утворюється умовне висловлювання «якщо A, то B». Імплікацією часто називають і саме умовне висловлювання, а також його формалізовані аналоги, як от формули логічних обчислень, які містять знак імплікації (наприклад, «$\supset$» або «$\rightarrow$») і мають вигляд A$\supset$B (A$\rightarrow$B), де A і B – формули для логічного обчислення. Операція імплікації використовується при опису лінгвістичних закономірностей за допомогою алгебри предикатів, а також для запису правил формальної граматики [2].

Логічна функція $f = x_1 \rightarrow x_2$ (імплікація пряма x_1 в x_2) є диз'юнкцією

$$f = x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} + x_2, \tag{1}$$

тому значення функції «хибно» одержується тільки тоді, коли аргумент x_1 набуває значення «істинно», а аргумент x_2 набуває значення «хибно» (табл. 1).

Таблиця 1

Таблиця істинності функції $f = x_1 \rightarrow x_2$

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$f = x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} + x_2$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Функція імплікації (1) може мати алгебричну форму:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1 \le x_2, \\ 0, & \text{якщо } x_1 > x_2. \end{cases} \tag{2}$$

На наборах змінних при яких функція (2) повертає «1», значення бітів у стовпчику «x_1» або дорівнюють значенням бітів у стовпчику «x_2», або є меншими за них (табл. 2).

Таблиця 2

Таблиця істинності на наборах змінних, де функція $f = x_1 \rightarrow x_2$ повертає «1»

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$f = x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} + x_2$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	1	0	1

Таке відношення між бітами стовпців «x_1» та «x_2» означає, що стовпець «x_1» є складовою частиною стовпця «x_2» Таким чином термін «імплікує» означає « є складовою частиною» (x_1 є складовою частиною x_2) [3].

З огляду табл. 1 і 2 випливає, що характеристична функція імплікації 2-значної логіки має вигляд:

$$x_1 \to x_2 = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } x_1 \le x_2, \\ 0, & \textit{якщо } x_1 > x_2. \end{cases}$$

Характеристична функція імплікації *k*-значної логіки має такий вигляд:

$$x_1 \to x_2 = \begin{cases} k-1, & \textit{якщо } x_1 \le x_2, \\ (k-1)-(x_2-x_1), & \textit{якщо } x_1 > x_2. \end{cases}$$

Логічна функція $f = x_2 \to x_1$ (імплікація зворотна x_2 в x_1) є диз’юнкцією

$$f = x_2 \to x_1 = x_1 + \overline{x_2}, \tag{3}$$

тому значення функції «хибно» одержується тільки тоді, коли аргумент x_1 набуває значення «хибно», а аргумент x_2 набуває значення «істинно» (табл. 3).

Таблиця 3

Таблиця істинності функції $f = x_2 \to x_1$

x_1	x_2	$\overline{x_2}$	$f = x_2 \to x_1 = x_1 + \overline{x_2}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

Функції імплікації (3) також має алгебричну форму, подібну (2), яка у цьому випадку вказує на те, що x_2 є складовою частиною x_1.

Логічна функція $f = \overline{x_1 \to x_2}$ (заперечення імплікації прямої) є запереченням диз’юнкції

$$f = \overline{x_1 \to x_2} = \overline{\overline{x_1} + x_2}, \tag{4}$$

тому значення функції «істинно» одержується тільки тоді, коли аргумент x_1 набуває значення «істинно», а аргумент x_2 набуває значення «хибно» (табл. 4).

Таблиця 4

Таблиця істинності функції $f = \overline{x_1 \to x_2}$

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$f = x_1 \to x_2 = \overline{x_1} + x_2$	$f = \overline{x_1 \to x_2} = \overline{\overline{x_1} + x_2}$
0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0

Логічна функція $f = \overline{x_2 \to x_1}$ (заперечення зворотної імплікації) є запереченням диз’юнкції

$$f = \overline{x_2 \to x_1} = \overline{x_1 + \overline{x_2}}, \tag{5}$$

тому значення функції «істинно» одержується тільки тоді, коли аргумент x_1 набуває значення «хибно», а аргумент x_2 набуває значення «істинно» (табл. 5).

Таблиця 5

Таблиця істинності функції $f = \overline{x_2 \to x_1}$

x_1	x_2	$\overline{x_2}$	$f = x_2 \to x_1 = x_1 + \overline{x_2}$	$f = \overline{x_2 \to x_1} = \overline{x_1 + \overline{x_2}}$
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0

Отже,

$$f = \overline{x_1} x_2 = \overline{x_1 + \overline{x_2}} = \overline{\overline{x_2} + x_1} = \overline{x_2 \to x_1}.$$

Мінімальні логічні базиси за участю імплікації: {→, NOT}, {→, 0}, {→, ⊕}, {→, ←}. Базисами також є {←, NOT}, {←, 1}.

Функції канонічного базису {NOT, OR, AND} подаються через імплікацію наступним чином:

$$\overline{x} = x \to 0; \tag{6}$$

$$x_1 + x_2 = \overline{x_1} \to x_2; \tag{7}$$

або

$$x_1 + x_2 = \overline{x_1} \to x_2 = (x_1 \to 0) \to x_2;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}} = \overline{x_1 \to \overline{x_2}}; \tag{8}$$

або

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}} = \overline{x_1 \to \overline{x_2}} = \overline{x_1 \to (x_2 \to 0)} = (x_1 \to (x_2 \to 0)) \to 0.$$

Функціональна повнота система перемикальних функцій забезпечує *можливість подання* довільної функціональної залежності від заданої кількості аргументів за допомогою *мінімальної кількості базових функцій* (операцій). Ці функції (операції) сукупно мають властивість функціональної повноти, а, отже, й *можливість синтезу* комбінаційної схеми, що відтворює функціональну залежність, за допомогою *мінімальної кількості типів* логічних елементів. Однак, при цьому не вирішується питання оптимальності комбінаційної схеми. Як показує практика проектування логічних схем *об’єднання елементних базисів*, які належать кільком функціонально повним системам (наприклад, системам {АБО-НЕ}, {І-НЕ}, {І, АБО, НЕ}), дозволяє будувати *оптимальні комбінаційні схеми* (за показниками апаратної складності та швидкодії). Використання елементного базису лише однієї функціонально повної системи перемикальних функцій у загальному випадку не забезпечує отримання оптимальної комбінаційної схеми [3].

Досконалі імплікативні нормальні форми булевих функцій. Всі визначення для функцій алгебри логіки у базисі {І, АБО, НЕ} мають свої аналоги і для імплікативного базису {$\to$, NOT} (табл. 6). Заміна базису {І, АБО, НЕ} на базис {$\to$, NOT} можлива на підставі формул (6)–(8).

Таблиця 6

Теза́уруси логічних базисів

№ з/п	Теза́урус базису {AND, OR, NOT}	Теза́урус базису {$\to$, NOT}
1	Досконала диз’юктивна нормальна форма (ДДНФ)	Досконала імплікативна нормальна форма –2 (ДІНФ-2)
		Досконала імплікативна нормальна форма –2.1 (ДІНФ-2.1)
2	Досконала кон’юктивнв нормальна форма (ДКНФ)	Досконала імплікативна нормальна форма –1 (ДІНФ-1)
		Досконала імплікативна нормальна форма –1.1 (ДІНФ-1.1)
3	Мінімальна диз’юктивна нормальна форма (МДНФ)	Мінімальна імплікативна нормальна форма –2 (МІНФ-2)
		Мінімальна імплікативна нормальна форма –2.1 (МІНФ-2.1)
4	Мінімальна кон’юктивна нормальна форма (МКНФ)	Мінімальна імплікативна нормальна форма –1 (МІНФ-1)
		Мінімальна імплікативна нормальна форма –1.1 (МІНФ-1.1)

Отримання ДІНФ-1 та ДІНФ-2 демонструють приклади 1.1 та 1.2.

ДІНФ-1. Досконала диз’юктивна нормальна форма (ДДНФ) та досконала кон’юктивна нормальна форма (ДКНФ) булевих функцій можуть бути виражені через функції, відмінні від кон’юнкції і заперечення або диз’юнкції і заперечення. Представити ДДНФ або ДКНФ булевих функцій можна, наприклад, за допомогою заперечення та імплікації.

Теорема 1 [4]. *Будь-яка функція алгебри логіки, крім тотожної одиниці, може бути подана у наступному вигляді:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \underset{0}{\&}(\overline{\overline{x_1^{\delta_1} \to x_2^{\overline{\delta_2}}} \to \ldots \to x_{n-1}^{\overline{\delta_{n-1}}}} \to x_n^{\overline{\delta_n}}). \qquad (9)$$

Доведення теореми 1 можна знайти у [4].

Імплікативна форма (9) є аналогом ДКНФ. Присвоїмо запису (9) класифікацію *досконалої імплікативної нормальної форми*–1 (ДІНФ-1) булевої функції.

Для подання булевої функції у ДІНФ-1 необхідно входження всіх аргументів

x_i, крім x_1, у терми ДІНФ-1 функції з запереченнями, якщо $x_i^{\delta_i} = 1$, і без заперечень у протилежному випадку. Для x_1 умови входження у терми ДІНФ-1 функції протилежні.

Будь-якому бінарному набору відповідає терм ДІНФ-1 функції $\overline{\overline{\overline{x_1^{\delta_1}} \to x_2^{\overline{\delta_2}} \to \cdots \to x_{n-1}^{\overline{\delta_{n-1}}}}} \to x_n^{\overline{\delta_n}}$ і, навпаки, терму ДІНФ-1 функції $\overline{\overline{\overline{x_1^{\delta_1}} \to x_2^{\overline{\delta_2}} \to \cdots \to x_{n-1}^{\overline{\delta_{n-1}}}}} \to x_n^{\overline{\delta_n}}$ відповідає бінарний набір (кортеж). Наприклад, набору <1100> відповідає терм ДІНФ-1 $\overline{\overline{x_1 \to \overline{x_2}} \to x_3} \to x_4$, а терму ДІНФ-1 $\overline{\overline{\overline{\overline{x_1} \to \overline{x_2}} \to x_3} \to x_4} \to \overline{x_5}$ відповідає набір <01001>.

Приклад 1 [4]. Функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (табл. 7) подати у ДІНФ-1.

Таблиця 7

Таблиця істинності логічної функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Складемо терми φ_i імплікативної функції для наборів табл. 7, на яких = 0:

$$\varphi_1 = \overline{\overline{\overline{x_1} \to x_2} \to x_3} \to \overline{x_4}; \quad \varphi_2 = \overline{\overline{\overline{x_1} \to \overline{x_2}} \to x_3} \to \overline{x_4};$$

$$\varphi_3 = \overline{\overline{x_1 \to x_2} \to \overline{x_3}} \to \overline{x_4}; \quad \varphi_4 = \overline{\overline{x_1 \to \overline{x_2}} \to \overline{x_3}} \to \overline{x_4}.$$

Тоді запис

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{\overline{\overline{x_1} \to x_2} \to x_3} \to \overline{x_4}) \,\&\, (\overline{\overline{\overline{x_1} \to \overline{x_2}} \to x_3} \to \overline{x_4}) \,\&$$
$$\&(\overline{\overline{x_1 \to x_2} \to \overline{x_3}} \to \overline{x_4}) \,\&\, (\overline{\overline{x_1 \to \overline{x_2}} \to \overline{x_3}} \to \overline{x_4}). \qquad (10)$$

буде подавати функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ у ДІНФ-1.

Двійковий еквівалент ДІНФ-1. Для методу образних перетворень доцільно використовувати бінарний аналог заданої булевої функції, у тому числі й функції імплікативного базису.

Оскільки ДІНФ-1 є аналогом ДКНФ функції булевого базису, спрощення ДІНФ-1 здійснюється за методом Нельсона [5]. Двійковий еквівалент змінних ДІНФ-1 функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ можна подати двома варіантами:

$$F_{\text{Ä²ÍÔ}} = \left(\overline{\overline{\overline{x_1} \to x_2} \to x_3} \to x_4\right)\left(\overline{\overline{\overline{x_1} \to \overline{x_2}} \to x_3} \to x_4\right)\left(\overline{\overline{\overline{x_1} \to \overline{x_2}} \to x_3} \to \overline{x_4}\right)$$
$$\left(\overline{\overline{\overline{x_1} \to \overline{x_2}} \to \overline{x_3}} \to x_4\right)\left(\overline{\overline{\overline{x_1} \to \overline{x_2}} \to \overline{x_3}} \to \overline{x_4}\right)\left(\overline{\overline{x_1 \to x_2} \to x_3} \to x_4\right)$$
$$\left(\overline{\overline{x_1 \to \overline{x_2}} \to x_3} \to x_4\right)\left(\overline{\overline{x_1 \to \overline{x_2}} \to x_3} \to \overline{x_4}\right)\left(\overline{\overline{x_1 \to \overline{x_2}} \to \overline{x_3}} \to x_4\right)$$
$$\left(\overline{\overline{x_1 \to \overline{x_2}} \to \overline{x_3}} \to \overline{x_4}\right). \tag{11}$$

Варіант 1. Двійковий еквівалент функції (11) подати її таблицею істинності (табл. 8) з наступним інвертуванням бінарних значень змінних.

Таблиця 8

Таблиця істинності функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$

№	x_1	x_2	x_3	x_4	f	№	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0	8	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	9	1	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1	10	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1	11	1	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0	12	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0	13	1	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0	14	1	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0	15	1	1	1	1	0

Двійковий еквівалент функції (11), згідно з першим варіантом подання буде мати вигляд:

$$F_{ДІНФ-1} = \left|\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 14 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|. \tag{12}$$

Варіант 2. Змінні двійкового еквіваленту приймають одиничне значення, якщо змінна x_i, крім x_1, у термах функції (11) подана у прямому коді. І, навпаки, змінна двійкового еквіваленту набуває нульове значення, якщо змінна x_i, крім x_1, у термах функції (11) подана в інверсному коді. Для x_1 у термах функції (11) умови входження до двійкового еквіваленту протилежні. Двійковий еквівалент змінної x_1, приймає одиничне, якщо змінна x_1, представлена в інверсному коді. І, навпаки, змінна двійкового еквіваленту приймає нульове значення, якщо змінна x_1 у термах функції (11) подана у прямому коді (табл. 9).

Таблиця 9

Відповідність змінних x_i та x_1 ДІНФ-1 булевої функції другому варіантові двійкового еквіваленту

Змінні ДІНФ-1 функції x_i	Змінні двійкового еквіваленту
x_i	1
$\overline{x_i}$	0
$\overline{x_1}$	1
x_1	0

Двійковий еквівалент функції (11), згідно з другим варіантом подання, буде мати вигляд:

$$F_{ДІНФ-1} = \left| \begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 13 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|. \qquad (13)$$

Двійкові еквіваленти (12) і (13) ДІНФ-1 булевої функції (11) однакові.

ДІНФ-1.1. У (9) кон'юнкцію можна замінити імплікацією з запереченням на підставі формули (8):

$$x_1 x_2 = \overline{x_1 \to \overline{x_2}}.$$

Після застосування формули (8) функція $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (10) з прикладу 1 буде мати вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{\varphi_1 \to [\varphi_2 \to (\varphi_3 \to \overline{\varphi_4})]},$$

або

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{(\overline{\overline{\overline{x_1}\to x_2}\to x_3}\to\overline{x_4})\to[(\overline{\overline{\overline{x_1}\to\overline{x_2}}\to x_3}\to\overline{x_4})\to}$$

$$\overline{\to((\overline{\overline{x_1\to x_2}\to\overline{x_3}}\to\overline{x_4})\to(\overline{\overline{\overline{x_1\to\overline{x_2}}\to\overline{x_3}}\to\overline{x_4}}))]}.$$

Твердження 1. *Будь-яка функція алгебри логіки, крім тотожної одиниці, може бути подана у наступному вигляді:*

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\overline{\varphi_1\to[\varphi_2\to...\to(\varphi_{n-1}\to\overline{\varphi_n})]},\tag{14}$$

де $\varphi_i=(\overline{x_1^{\delta_1}\to x_2^{\delta_2}}\to...\to x_{n-1}^{\overline{\delta_{n-1}}}\to x_n^{\overline{\delta_n}})$.

Присвоїмо записові (14) класифікацію *досконалої імплікативної нормальної форми*-1.1 (ДІНФ-1.1) булевої функції.

Для подання булевої функції у ДІНФ-1.1 необхідно входження всіх аргументів x_i, крім x_1, у терми ДІНФ-1.1 функції з запереченнями, якщо $x_i^{\delta_i}=1$, і без заперечень у протилежному випадку. Для x_1 умови входження у терми ДІНФ-1.1 функції протилежні.

ДІНФ-2. Аналогом ДДНФ є друга форма імплікативного запису булевої функції (ДІНФ-2).

Теорема 2[4]. *Будь-яка функція алгебри логіки, крім тотожного нуля, може бути подана у наступному вигляді:*

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\underset{1}{\vee}(\overline{\overline{\overline{x_1^{\delta_1}\to x_2^{\overline{\delta_2}}}\to...\to x_{n-1}^{\overline{\delta_{n-1}}}}\to x_n^{\overline{\delta_n}}}).\tag{15}$$

Доведення теореми 2 можна знайти у [4].

Тут зазначимо, що функції $\phi_i=\overline{\overline{x_1^{\delta_1}\to\underset{1}{x_2^{\overline{\delta_2}}}}\to\dots x_n^{\overline{\delta_n}}}$ налаштовуються так, що кожна така функція повертає «1» на наборі, що відповідає набору <$\delta_1\,\overline{\delta_2}\dots\overline{\delta_n}$>, і повертає «0» на решту наборах.

Присвоїмо записові (15) класифікацію *досконалої імплікативної нормальної форми*-2 (ДІНФ-2) булевої функції.

Входження аргументів x_i та x_1 у терми ДІНФ-2 функції є аналогічними входженням аргументів у терми ДІНФ-1.

Будь-якому бінарному наборові відповідає терм ДІНФ-2 функції $\overline{\overline{\overline{x_1^{\delta_1}\to x_2^{\overline{\delta_2}}}\to...\to x_{n-1}^{\overline{\delta_{n-1}}}}\to x_n^{\overline{\delta_n}}}$ і, навпаки, терму ДІНФ-2 функції $\overline{\overline{\overline{x_1^{\delta_1}\to x_2^{\overline{\delta_2}}}\to...\to x_{n-1}^{\overline{\delta_{n-1}}}}\to x_n^{\overline{\delta_n}}}$ відповідає бінарний набір (кортеж). Наприклад, наборові <1100> відповідає терм ДІНФ-2 $\overline{\overline{\overline{x_1\to\overline{x_2}}\to x_3}\to x_4}$, а терму ДІНФ-2

$\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x_1} \to \overline{x_2}} \to x_3} \to x_4} \to \overline{x_5}}$ відповідає набір <01001>.

Приклад 2 [4]. Функцію $f(x_1, x_2, x_3)$ (табл. 10) подати у ДІНФ-2.

Таблиця 10

Таблиця істинності логічної функції $f(x_1, x_2, x_3)$

№	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	№	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	4	1	0	0	1
1	0	0	1	0	5	1	0	1	1
2	0	1	0	0	6	1	1	0	0
3	0	1	1	0	7	1	1	1	0

Складемо терми φ_i імплікативної функції для наборів табл. 10, на яких $f(x_1, x_2, x_3) = 1$:

$$\varphi_1 = \overline{\overline{x_1 \to x_2} \to x_3}; \qquad \varphi_2 = \overline{\overline{x_1 \to x_2} \to \overline{x_3}}.$$

Тоді запис

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{\overline{x_1 \to x_2} \to x_3}) + (\overline{\overline{x_1 \to x_2} \to \overline{x_3}}) \tag{16}$$

буде подавати функцію $f(x_1, x_2, x_3)$ у ДІНФ-2.

Двійковий еквівалент ДІНФ-2. Оскільки ДІНФ-2 є аналогом ДДНФ функцій булевого базису, спрощення ДІНФ-2 здійснюється за правилами спрощення ДДНФ [5, 6].

Змінні двійкового еквіваленту приймають одиничне значення, якщо змінна x_i, крім x_1, у термах функції (17) подана в інверсному коді, і, навпаки,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{\overline{x_1 \to x_2} \to x_3}) + (\overline{\overline{x_1 \to x_2} \to \overline{x_3}}) \tag{17}$$

змінна двійкового еквіваленту приймає нульове значення, якщо змінна x_i, крім x_1, подана у прямому коді. Для x_1 у термах функції (17) умови входження до двійкового еквіваленту протилежні. Двійковий еквівалент змінної x_1 набуває одиничне, якщо змінна x_1, подана у прямому коді. І, навпаки, двійковий еквівалент змінної x_1 набувмає нульове значення, якщо змінна x_1 у термах функції (17) подана в інверсному коді (табл. 11).

Таблиця 11

Відповідність змінних x_i та x_1 ДІНФ-2 булевої функції двійковому еквіваленту

Змінні ДІНФ-2 функції x_i	Змінні двійкового еквіваленту
x_i	0
$\overline{x_i}$	1
$\overline{x_1}$	0
x_1	1

Двійковий еквівалент функції (17) буде мати вигляд:

$$F_{ДІНФ-2} = \left| \begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right|. \tag{18}$$

Таким чином, логічна функція (17) подається бінарною матрицею (18).

ДІНФ-2.1. У (15) диз'юнкцію можна замінити імплікацією з запереченням на підставі формули (7):

$$x_1 + x_2 = \overline{x_1} \to x_2 .$$

Після застосування формули (7) функція f (x_1, x_2, x_3) (16) з прикладу 2 буде мати вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1 \to x_2} \to x_3) \to (\overline{\overline{x_1 \to x_2} \to \overline{x_3}}).$$

Твердження 2. Будь-яка функція алгебри логіки, крім тотожного нуля, може бути подана у наступному вигляді:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \phi_1 \to [\phi_2 \to ... \to (\phi_{n-1} \to \overline{\phi_n})],$$

$$\text{де } \phi_i = (\overline{\overline{x_1^{\delta_1} \to x_2^{\overline{\delta_2}}} \to ... \to x_{n-1}^{\overline{\delta_{n-1}}}} \to x_n^{\overline{\delta_n}}). \tag{19}$$

Присвоїмо запису (19) класифікацію *досконалої імплікативної нормальної форми* – 2.1 (ДІНФ-2.1) булевої функції.

Для подання булевої функції у ДІНФ-2.1 входження всіх аргументів x_i та x_1 у терми ДІНФ-2.1 функції є аналогічним входженню аргументів у терми ДІНФ-1.

Приклад.3. Подати булевий вираз $x_1(x_2 + x_3) + \overline{x_2}\, x_3$ в імплікативному базисі {→, NOT}.

Розв'язання:

$$x_1(x_2 + x_3) + \overline{x_2} x_3 = \overline{x_1(x_2 + x_3)} \to \overline{x_2} x_3 =$$

$$= \overline{\overline{\overline{x_1} + \overline{(x_2 + x_3)}}} \to \overline{\overline{\overline{x_2}} + \overline{x_3}} = \overline{x_1} + \overline{(x_2 + x_3)} \to \overline{x_2 + \overline{x_3}} =$$

$$= (x_1 \to \overline{(x_2 + x_3)}) \to (\overline{\overline{x_2} \to \overline{x_3}}) = (x_1 \to (\overline{\overline{x_2} \to x_3})) \to (\overline{\overline{x_2} \to \overline{x_3}}).$$

Вираз $x_1(x_2 + x_3) + \overline{x_2}\, x_3$ поданий у базисі {→, NOT}.

Висновок. Встановлено, що спрощення булевих функцій імплікативного базису ґрунтується на блок-схемі з повторенням, якою є власне таблиця істинності заданої функції. Це дозволяє зосередити принцип спрощення у межах таблиці істинності функції і, таким чином, обійтись без допоміжних об'єктів.

1. Різник В. В., Соломко М. Т., Тадеєв П. О., Назарук В. Д., Зубик Л. В., Волошин В. С. Алгоритм мінімізації булевих функцій методом оптимального комбінування послідовності образних перетворень. *Східно-Європейський журнал передових технологій*. 2020. № ¾ (105). С. 43–60. URL: http://journals.uran.ua/eejet/article/view/206308 (дата звернення: 30.11.2020). **2.** Булкин В. И. Моделирование отношения импликации с использованием направленных реляционных сетей. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2014. № 6/4 (72). С. 30-37. doi:

10.15587/1729-4061.2014.30567. **3.** Дичка І. А., Тарасенко В. П., Онай М. В. Основи прикладної теорії цифрових автоматів. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 505 с. URL: https://core.ac.uk/download/pdf/323531874.pdf (дата звернення: 30.11.2020). **4.** Поспелов Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. Изд. 3, перераб. и доп. Москва : Энергия, 1974. 368 с. URL: http://urss.ru/cgi-bin/db.pl?lang=Ru&blang=ru&page=Book&id=25326 (дата звернення: 30. 11. 2020). **5.** Різник В. В., Соломко М. Т. Мінімізація кон'юктивних нормальних форм булевих функцій комбінаторним методом. *Технологічний аудит та резерви виробництва*. 2018. № 5/2 (43). С. 42–55. URL: http://journals.uran.ua/tarp/article/view/146312 (дата звернення: 30. 11. 2020). **6.** Різник В. В., Соломко М. Т. Застосування алгебричної операції супер-склеювання змінних для мінімізації булевих функцій комбінаторним методом. *Технологічний аудит та резерви виробництва*. 2017. Вип. 6/2 (38). С. 60–76. URL: http://journals.uran.ua/tarp/article/viewFile/118336/112951 (дата звернення: 30.11.2020).

Tadeiev P. O., Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Ph.D.), Doctor of Pedagogical Sciences (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

PERFECT IMPLICATIVE NORMAL FORMS AND THEIR PROPERTIES

The aim of the article is to single out perfect implicative normal forms (DINF-1, DINF-1.1, DINF-2 and DINF-2.1) for the Boolean function. This made it possible to construct their binary equivalents, which will simplify, increase the productivity of minimizing the functions of the implicative basis, developing an algebra of the implicative basis in terms of simplification of logical expressions.
Keywords: **Boolean functions, algebra of implicative basis, perfect implicative normal forms, truth table, logical bases.**

УДК 37.091.33:517.3

Дубчак[1] І. В., асистент; Яремчук Д. Т., студентка 2 курсу (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне,
[1]i.v.dubchak@nuwm.edu.ua)

ЖАН ЛЕРОН Д'АЛАМБЕР. ЖИТТЯ ТА НАУКОВА ДІЯЛЬНІСТЬ

У статті описані життєвий шлях та наукова праця видатної людини з блискучими здібностями, відомого вченого і енциклопедиста Жана Лерона Д'Аламбера.
Ключові слова: **Геніальна людина, французький вчений-енциклопедист, надзвичайні здібності, принцип Д'Аламбера, хвильове рівняння, рух небесних тіл, наукові відкриття.**

«Працюйте, працюйте –
а розуміння прийде пізніше»
Д’Аламбер

Надзвичайна сила розуму, наукові відкриття достойні того, щоб людство знало про життя та наукову діяльність цього генія.

Жан Лерон Д’Аламбер (1717–1783) – видатний математик, механік, фізик, філософ-просвітник – народився в Парижі. Позашлюбна дитина маркізи Клодін Герен де Тансен і офіцера-артилериста Луі-Камю Детуша. Для маркізи дитина була небажаною, а тому його в коробці підкинули на паперть церкви Сен-Жан-Лерон. На честь цього святого дитина при хрещенні одержала своє ім’я. Прізвище Даламбер, за деякими джерелами, він взяв від імені прийомного батька Аламбера. В науковій літературі це прізвище пишуть як Д’Аламбер, а також Даламбер.

Дитина була дуже слабенькою. В цей час батько Детуш служив закордоном. Повернувшись в Париж, він розшукав свого сина і помістив його в сім’ю ремесельника – Росс. Годувальниця –мадам Росс – доклала всіх зусиль, щоб зберегти життя цього малюка. Маркіза Тансен хотіла утаємнити народження дитини, але він залишився живим, став видатною людиною і пізніше весь світ дізнався, що вона була його матір’ю і відвідала сина тільки один раз за все життя. Її розумові здібності були вищі звичайних. Вона була талановитою письменницею, її романи, особливо історичні, були на той час відомими, та і в наш час не позбавлені інтересу. Маркіза Тансен була цікавою особистістю, власницею салону, який відвідували письменники, артисти, високопосадовці. Весь свій спадок вона залишила своєму особистому лікарю: Д’Аламбер не заявив на нього своїх прав. До своїх 48 років він жив зі сім’єю Росс, вважав їх своїми батьками. В цій сім’ї він звик до суворого, простого життя, навчився поважати працю звичайних людей. Ставши знаменитим, допомогав Россам матеріально і з гордістю називав їх своїми батьками.

Д’Аламбер отримав хорошу освіту. Батько Детуш уважно слідкував за вихованням свого сина і дуже цінував його надзвичайні здібності. Він помістив чотирирічного хлопчика в хороший пансіон, і з цього часу Д'Аламбер став серйозно вчитися. Коли Д'Аламберу йшов десятий рік, раптово помер його батько – генерал Детуш, який встиг призначити йому пожиттєву ренту і доручив своїй сім'ї піклуватися про його виховання та освіту.

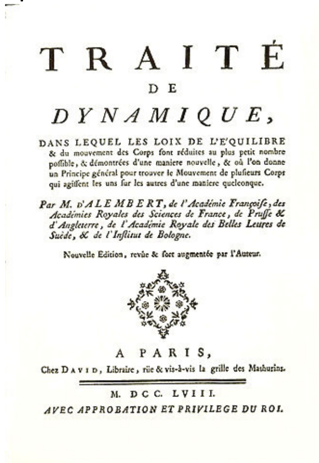
В тринадцять років Д'Аламбер вступив в коледж Мазаріні, де пробув три роки, вивчаючи літературу, поезію, грецьку та латиньську мови, філософію, ораторське мистецтво та математику. В шістнадцять років він одержав ступінь магістра вільних наук. Оцінюючи його блискучі здібності, наставники коледжу (а всі вони були священиками) розраховували, що він обере церковну кар'єру.

Після коледжу Д'Аламбер вступив до Академії юридичних наук, цікавився медициною. Але вивчаючи право і медицину, Д'Аламбер для свого задоволення займався математикою. Мало-помалу він повністю втягнувся в математику. Його друзі і рідні батька, помічаючи цю схильність, застерігали його, кажучи, що з математекою далеко не підеш. Вони переконали Д'Аламбера розлучитися з математичними книгами. Він відніс їх до Дідро і віддався медицині, але думка його була прикута до математики. Задачі носилися в його голові і не давали спокою. Д'Аламбер був палкий і нетерплячий від природи, він не вмів перемагати свої бажання. Коли йому необхідно було перевірити рішення якого-небудь питання, він йшов за своєю книгою. Таким чином він перетягнув мало-помалу всю колишню математичну бібліотеку в свою маленьку кімнату. Довелося скоритися нещасній пристрасті, він віддався їй з захопленням. Медицина була закинута. Д'Аламберу ледь виповнилося двадцять років, коли він вирішив стати математиком, а в двадцять шість років був вже світилом цієї науки. В кінці життя він писав: «Математика – це моя стара любов, найвірніша коханка».

Своєї сім'ї у Д'Аламбера не було. Сімнадцять років він кохав Жулію де Ласпінас, молодшу за нього на п'ятнадцять років, сумнівного походження та поведінки. Завдяки своїм родичам по лінії матері, яка рано померла, та своєму розуму, пані Леспінас досягла певного положення в суспільстві, очолювала салон, захоплювалась розумними людьми. Д'Аламбер багато часу приділяв заняттям з нею з літератури та філософії. Вона зробила його виконавцем своєї волі і ніколи не була йому вірною. У Д'Аламбера, людини з надзвичайно гострим розумом, енциклопедичною освітою, хорошим здоров'ям, відкритим веселим характером, почуттям гумору, дві жінки – Тансен та Ласпінас – забрали дитинство, сімейне щастя та старість. Він любив пані Леспінас навіть тоді, коли вона захоплювалася іншими чоловіками, ставилася до нього не тільки з байдужістю, а навіть з ненавистю. Леспінас отруїла себе від нещасного кохання і померла на руках Д'Аламбера.

По-своєму його любила мадам Росс, його годувальниця, називаючи його «філософом». Та, яка замінила йому матір, навіть не підозрюючи, яка геніальна людина живе з нею під одним дахом.

В 22 роки він представив Паризькій Академії свої перші дослідження, а в 23 роки був обраний ад'юнктом (асистентом) цієї Академії. Він вперше сформулював загальні правила складання диференціальних рівнянь руху будь-яких матеріальних систем (принцип Даламбера) у своєї найвідомішої праці «Трактат про динаміку», вперше в фізиці сформулював хвильове рівняння і запропонував метод його розв’язування (коливання струни). Його праці по диференціальних рівняннях лягли в основу математичної фізики. Разом з Алексі Клодом Клеро та Леонардом Ейлером займався питанням руху небесних тіл під дією сил тяжіння. Йому належать класичні роботи з теорії руху рідини, задачі трьох тіл, нутації Землі, руху Місяця, руху вітру, з теорії музики та ін. Д’Аламбер зробив перше доведення основної теореми алгебри. В теорії рядів сучасні студенти користуються ознакою збіжності знакододатних рядів Д’Аламбера.


TRAITÉ
DE
DYNAMIQUE,
DANS LEQUEL LES LOIX DE L'E'QUILIBRE & du mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une maniere nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres d'une maniere quelconque.

Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Françoise, des Académies Royales des Sciences de France, de Prusse & d'Angleterre, de l'Académie Royale des Belles Lettres de Suède, & de l'Institut de Bologne.

Nouvelle Edition, revûe & fort augmentée par l'Auteur.

A PARIS,
Chez DAVID, Libraire, rüe & vis-à-vis la grille des Mathurins.

M. DCC. LVIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Літературній діяльності Д’Аламбер віддав більшу частину свого часу, хоча не досяг в ній того високого становища, яке відразу, ще в першій молодості, зайняв в науці. Цікаво, як ставилися до цієї його діяльності інші відомі письменники того часу. Вольтер писав Д’Аламберу: «Ви єдиний письменник, який не говорить ні більше того, ні менше того, що хоче сказати. Я вважаю Вас найкращим письменником нашого століття». Ця вагома похвала Вольтера містила в собі частку істини, бо він впізнавав в манері Д’Аламбера руку математика. Дідро вважав Д’Аламбера письменником тонким, дотепним, сміливим, оригінальним, щирим, але докоряв йому в тому, що він про поезію судить математично.

У 1751 році Д’Аламбер разом з Дені Дідро видали «Енциклопедію наук, мистецтв та ремесел». Д’Аламбер був науковим редактором «Енциклопедії XVIII сторіччя», написав багато статей з математики, фізики, музики, релігії, права, а також філософський маніфест енциклопедистів. Це була велика подія для всього суспільства і для самого вченого, яка привернула до нього широку увагу публіки. Але в 1758 році змушений був піти з посади головного редактора внаслідок суспільного скандалу після публікації у 7 томі статті Д’Аламбера «Женева», де він протиставив моральну чистоту і релігійність женевських громадян і пасторів жорстокості і фанатизму єзуїтів. Висловлена в статті думка про те, що театри сприяють формуванню моральності, викликала різкий протест Руссо, який негативно ставився до досягнень цивілізації, в тому числі до наук і мистецтв.

Він вперше ділить наукові праці на точні і гуманітарні. Тільки в точних науках він визнавав абсолютні істини, все решта вважав відносними, умовними, ґрунтуючись на відмінності уяви від памяті і розуму.

В цей самий час Д’Аламбер почав відвідувати паризькі салони. Дотепність, почуття гумору, уміння підтримувати жваву і цікаву розмову робили Д’Аламбера всюди бажаним гостем, незважаючи на його тонкий голос, низький зріст, звичайну зовнішність та «незаконне» походження.

Він був членом всіх европейских академій наук, які в цей час існували, в тому числі Петербурзької, Лондонського королівського товариства, почесним членом Американської академії мистецтв та наук (1781 рік). Будучи членом двох академій - Паризької та Французької, в якій він мав посаду постійного секретаря, - він був душею обох академій, висловлюючи свої погляди на життя, науку, поезію, історію, філософію, володіючи хорошою риторикою, позитивним гумором та енциклопедичними знаннями. Листувався з пруським монархом Фрідріхом II та російською царицею Катериною II (навіть був запрошений нею на роль вихователя спадкоємця Павла), сподіваючись на відновлення та зліт Европи завдяки освіченим монархам.

Останні роки свого життя Д’Аламбер дуже хворів, переживаючи зради та смерть Жулії.

У вісімнадцятому столітті широко поширювався атеїзм. Був атеїстом і Д’Аламбер. Після його смерті церква відмовила відомому вченому і енциклопедисту у похованні за церковними обрядами. Він відмовився від причастя і його поховали в спільній могилі з жебраками без позначення.

На честь Жана Лерона Д’Аламбера в математиці було названо: формула Д’Аламбера (описує розв’язок задачі Коші для одновимірного хвильового рівняння), ознака Д’Аламбера, принцип Д’Аламбера-Лагранжа (або динамічний принцип віртуальних переміщень), оператор Д’Аламбера (Даламбертіан), який також називають хвильовим оператором, так як з його допомогою зручно записувати хвильове рівняння.

Його увіковічили у вигляді розкішної статуї, яка зберігається у Луврі, його іменем названо астероїд головного пояса – 5956, кратер на зворотній стороні Місяця та горний хребет на видимій стороні Місяця.

1. Д’Аламбер Жан Лерон. Філософський енциклопедичний словник. Київ : Абрис, 2002. 742 с. **2.** История в энциклопедии Дидро и Д’Аламбера. Ленинград : Наука, 1978. 318 с. **3.** Литвинова Е. Ф. Жан Лерон Д’Аламбер. Его жизнь и научная деятельность. Биографический очерк. Санкт-Петербург : Тип. Плюшара, 1891. 157 с. **4.** Добровольский В. А. Д’Аламбер. Москва : Знание, 1968. 32 с. **5.** Голованов Я. К. Этюды об ученых. Москва : Молодая гвардия, 1976. 74 с. URL: https://www.litmir.me/br/?b=10339&p=74 (дата звернення: 20.03.2021).

Dubchak I. V., Assistant; Yaremchuk D. T., Senior Student (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

JEAN LE ROUND D`ALEMBERT. LIFE AND STUDIES

The article describes the life and scientific work of a famous man with brilliant abilities, the famous scientist and encyclopedist Jean Leron D`Alembert.
Keywords: **A man of genius, a French scientist-encyclopedist, extraordinary abilities, the principle of D`Alembert, the wave equation, the motion of celestial bodies, scientific discoveries.**

УДК 378.14:51:504(043.3)

Цецик[1] С. П., к.пед.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, [1]s.p.tsetsyk@nuwm.edu.ua); **Помнітц С. З., вчитель математики, спеціаліст «вищої категорії»** (Рівненська загальноосвітня школа 1–3 ступенів № 27, м. Рівне)

РОЛЬ ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА» У СИСТЕМІ ПРОФЕСІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ ЕКОЛОГІВ

У статті обґрунтовано роль дисципліни «Вища математика» у процесі підготовки фахівців-екологів. Визначено, що основу для формування професійного мислення майбутніх екологів складає математичне мислення. Враховуючи абстрактну природу математичних структур, математичні знання є знаряддям у вивченні спеціальних дисциплін та у професійній діяльності студентів. Встановлено, що для забезпечення якості викладання курсу «Вища математика» важливо навчати студентів розв'язувати прикладні задачі з елементами математичного моделювання.
Ключові слова: **математична підготовка, математичне мислення, прикладні задачі, міжпредметні зв'язки, студенти-екологи.**

Важливим завданням вищої школи на сучасному етапі її розвитку та в контексті інтеграції України до світового освітнього простору є забезпечення якості підготовки майбутніх фахівців, їх конкурентоспроможності на ринку праці. Ураховуючи гостроту екологічних проблем, у процесі професійної підготовки студентів необхідно акцентувати увагу на формуванні екологічної складової в їх освіті. З цією метою Міністерством освіти і науки у 2001 р. затверджено Концепцію екологічної освіти України. У ній особливу увагу приділено необхідності підготовки висококваліфікованих фахівців-екологів.

Вагома роль у забезпеченні якості професійної підготовки студентів спеціальності «Екологія» відводиться дисциплінам фундаментального блоку: біології, хімії, фізиці, математиці та інформатиці. Ґрунтовна математична підготовка є фундаментом професійної підготовки майбутніх фахівців, оскільки розв'язання багатьох екологічних проблем вимагає використання математичних методів та методів математичного моделювання.

Однак, як свідчить практика та аналіз психолого-педагогічних джерел з даної проблеми, загострилися суперечності між: зростаючою роллю фундаментальних дисциплін, зокрема, математики у підготовці фахівців-екологів та зниженням інтересу до їх вивчення; між математичними знаннями, що отримують студенти, і вмінням їх застосовувати на практиці.

Тому постала потреба в обґрунтуванні ролі курсу «Вища математика» для майбутніх екологів у сучасних умовах розвитку вищої освіти.

Відповідно до освітньо-професійної програми (ОПП) підготовки бакалаврів за спеціальністю 101 «Екологія» [6] визначено такі загальні компетентності, що формуються у процесі вивчення ними дисципліни «Вища математика»:

- здатність визначати особливості сучасного соціально-політичного розвитку українського суспільства та його перспективу під час здійснення виробничої і соціальної діяльності;

- здатність синтезувати знання з фахових та гуманітарних дисциплін у цілісне світосприйняття та світорозуміння на основі набутого філософського знання;

- здатність породжувати нові ідеї. Ініціативність та дух підприємництва. Здатність до формування світогляду, розуміння принципів розвитку суспільства.

Програмні результати навчання студентів даної спеціальності передбачають знання фундаментальних розділів математики в обсязі, необхідному для володіння математичним апаратом для обробки інформації і аналізу даних та моделюванню процесів екології і природокористування.

Враховуючи наведені компетентності та програмні результати можна виділити два основні аспекти, що висвітлюють роль математичної підготовки у процесі формування фахівців-екологів.

По-перше, математика взагалі, а «Вища математика» зокрема, є потужним механізмом розвитку професійного мислення майбутнього еколога.

Як відомо, професійне мислення еколога (і не тільки!) формується на основі математичного. Психологічні особливості навчального предмету [5]:

- високий рівень узагальнення, абстрагування;

- тісний зв'язок між навчальним матеріалом;

- велика кількість понять та формул;

- домінування дедуктивних методів, логічних обґрунтувань, постійне включення аналітично-синтетичних функцій мислення тощо роблять його одним із провідних у питанні розвитку інтелекту особистості.

Зазначимо, що мислення (англ. thinring) – психологічний процес відображення дійсності, вища форма активності людини; це цілеспрямований розвиток і нарощування знань, яке можливе лише за умови, що воно спрямоване на розв'язання суперечностей, об'єктивно властивих реальному предмету думки. В генезисі мислення важливу роль відіграє розуміння [2, с. 310].

Мисленевий процес, як відомо, включає в себе загальні прийоми розумової діяльності: аналіз, синтез, індукцію, дедукцію, аналогію, порівняння та абстрагування.

Більш глибокий аналіз механізмів розумової діяльності людини дозволяє визначити такі важливі якості мислення, що актуалізуються у процесі вивчення математики [1, с. 14]:

- самостійність мислення – вміння ставити задачі та знаходити рішення у складних ситуаціях, діяти самостійно і відповідально;
- швидкість мислення – легкість орієнтації у проблемах; здатність швидко розібратися у ситуації і прийняти правильне рішення; прийти до результату більш раціональним шляхом;
- глибина мислення – прагнення дійти до істини, схильність до роздумів для змістовного результату, вміння проникати у сутність складних процесів;
- критичність мислення – вміння критично ставитися до власних висловлювань і висловлювань інших; при оцінці подій, у дискусіях, уміння підтверджувати кожний свій погляд з будь-якого питання системою фактів, доказів;
- гнучкість мислення – здатність коректувати програму відповідно до вимог ситуації, легкість зміни гіпотез у відповідності до нових фактів і обставин; свобода думки, вміння змінити свою точку зору, якщо вона неправильна;
- узагальнення мислення – вміння відображати одиничні об'єкти як особливе виявлення загального, перенесення знань і навичок з однієї ситуації або діяльності на іншу, вміння виділяти головне, робити висновки; вміння конспектувати, резюмувати, користуватися схемами, таблицями для узагальнення матеріалу;
- швидкість засвоєння знань – відсутність складнощів при засвоєнні матеріалу, високі показники відтворювання матеріалу і запам'ятовування смислових одиниць;
- концентрація уваги – зосередження на одній діяльності, одному об'єкті, вміння до кінця вислухати, вміння продуктивно працювати протягом певного часу.

Водночас, математика впливає на загальну культуру особистості. Серед інтелектуальних якостей, які розвивають у процесі вивчення математики, є логічне мислення: дедуктивні судження, вміння абстрагувати, узагальнювати, аналізувати, критикувати тощо. Заняття математикою сприяють набуттю раціональних якостей думки і її вираженню: порядок, точність, ясність, стислість, а також вимагають уяви та інтуїції. Математика дає відчуття об'єктивності, інтелектуальну чесність, смак до досліджень, тобто сприяє розвитку творчого мислення.

Заняття математикою вимагають постійної напруги, уваги, вміння зосередитись, бути наполегливим і тим самим закріплюють хороші навички роботи. Тобто математика виконує важливу роль у розвитку інтелекту і у формуванні характеру [5, с. 25].

Важливою умовою забезпечення розвитку професійного мислення студентів у процесі вивчення курсу «Вища математика» є розв'язання ними прикладних задач екологічного змісту. Кожна така задача вимагає уміння виділити об'єкти, що позбавлені конкретних матеріальних властивостей, і брати до уваги не конкретні відношення між цими об'єктами, а лише їх властивості [3, с. 234]. Ця процедура є лише одним із етапів створення математичних моделей явищ або процесів, що відбуваються у природі, суспільстві.

Тобто прикладні задачі значно актуалізують прийоми розумової діяльності. Поряд із засвоєнням основних теоретичних положень дисципліни у студентів формується вміння конкретизувати ці положення, узагальнювати, переходити від загального до конкретного і навпаки.

По-друге, математика є необхідним інструментом для успішного оволодіння спеціальністю та у професійній діяльності.

Дійсно, аналіз ОПП підготовки бакалаврів-екологів, робочих програм та силабусів фахових і професійно-орієнтованих дисциплін засвідчив потребу студентів у знаннях таких математичних методів:

- математичне моделювання екологічних явищ та процесів;

- обробка й аналіз даних експериментальних досліджень методами математичної статистики.

Тобто важливо у процесі викладання дисципліни наводити приклади використання математичних методів у майбутній професії, проводити пропедевтику тих понять, з якими студенти зустрінуться при вивченні інших предметів. Йдеться про забезпеченню міжпредметних зав'язків (МПЗ) у навчанні.

Згідно з загальною теорією формування МПЗ, знання та вміння набувають статусу міжпредметних за умови, що, сформувавшись у результаті вивчення однієї дисципліни, вони використовуються для вивчення інших дисциплін, забезпечуючи тим самим утворення системи знань. Тобто знання та вміння, сформовані у процесі вивчення дисципліни «Вищої математики», закріплені відповідними прикладними задачами, використовуються студентами під час вивчення дисциплін фундаментального блоку: екології, біології, хімії, фізики. Такі МПЗ є передумовами інтеграції знань студентів.

У роботі [4] визначено, що системність у знаннях утворюється тоді, коли є основне ядро знань і всі інші вступають з ним у все більш тісні зв'язки. В ролі такого ядра у підготовці майбутніх екологів у силу міждисциплінарного статусу науки «Екологія», слугують природничі (екологія, хімія, фізика, біологія) та інструментальні (математика, інформатика) дисципліни. Основою для конструювання МПЗ може слугувати положення про необхідність формування у студентів системи екологічних знань засобами різних дисциплін.

При плануванні МПЗ математичних дисциплін з природничими, професійно спрямованими та спеціальними, важливо, на нашу думку, зосередити увагу на: а) спільних знаннях, уміннях та навичках, що характерні для вказаних дисциплін; б) темах математичних дисциплін, що дозволяють проілюструвати міжпредметну взаємодію; в) змісті прикладних задач.

Спільними щодо зазначених моментів можна вважати:

- загальні прийоми розумової діяльності, що необхідні студентам на всіх етапах професійної підготовки. Як зазначено вище, ці прийоми актуалізуються у процесі математичної підготовки, за умови введення прикладних задач;

- математичний апарат, що буде використано в інших дисциплінах. Так, для дисциплін природничого циклу підготовки актуальними будуть знання, вміння та навички, що формуються у процесі вивчення студентами курсу «Вищої математики»: визначення функціональної залежності між досліджуваними величинами; побудова математичної моделі деякого явища чи процесу, її розв'язання та дослідження, обчислення відповідних величин тощо. Щодо спільності понять, то, зокрема, поняття швидкості як похідної відноситься не лише до випадків розпаду та об'єднання хімічних елементів, швидкості механічного руху, а й до охолодження та нагрівання тіл, швидкості росту рослин, розмноження бактерій тощо;

- самостійну роботу як специфічний вид навчальної діяльності. Формування у студентів-першокурсників у процесі вивчення курсу «Вищої математики» вміння ефективно працювати самостійно забезпечує основу подальшого успішного оволодіння ними майбутньою професією.

Систематичне та цілеспрямоване ознайомлення студентів з нескладними математичними моделями у процесі математичної підготовки – завдання вкрай важливе не тільки з погляду розкриття значущості математичних дисциплін у професії еколога, посиленні мотивації її вивчення, а й з погляду поступового («плавного») входження у майбутню професію.

Наведемо приклади введення математичних моделей деяких природничих явищ та відповідних їм екологічних понять на рівні тем курсу «Вищої математики» (таблиця).

Найбільш сприятливими щодо ілюстрації міжпредметної взаємодії математичних і природничих дисциплін вважаємо розділи «Звичайні диференціальні рівняння» та «Системи диференціальних рівнянь» .

Таблиця

Приклади введення математичних моделей деяких екологічних явищ у курсі «Вищої математики» для студентів-екологів

Теми	Математичні моделі	Екологічні поняття
1	2	3
Матриці. Дії над ними.	Матриці та вектори — зручна система математичних позначень, що використовується для опису складних екологічних систем.	Атмосфера. Викид в атмосферу. Забруднення. Епідеміологія. Контакти першого і другого порядку в епідеміології. Популяція. Екосистема. Бактерії.
Вектори. Лінійні операції над векторами. Скалярний добуток векторів.	Скалярний добуток як загальна добова потреба в їжі деякої популяції.	Субстрат. Ареал. Ареал екологічний.
Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).	СЛАР як модель співіснування деякої популяції.	Популяція. Бактерії.
Елементарні функції та їх властивості.	1. Пряма пропорційність (залежність довжини риби (на ранній стадії її розвитку) від часу). 2. Обернена пропорційність (спрощена модель взаємовід-носин типу, «хижак-жертва»). 3. Дробово-раціональна функція (модель Міхаеліса-Мент). 4. Кубічна функція (модель, що описує залежність ваги риби від її довжини). 5. Експоненціальна модель росту бактерій (дріжджів, пеніцилінових грибків), цвітіння води тощо.	Популяція. Бактерії.

продовження таблиці

Диференціальне числення функції однієї змінної.	Мінімізація екологічно шкідливих викидів азоту для процесу горіння.	Екологічно шкідливі викиди азоту.
Визначений інтеграл.		Радіоактивні речовини, зсув ґрунтів, розмноження бактерій.
Диференціальні рівняння.	Експоненціальна модель розмноження бактерій (Мультаса), логістична (Ферхюльна – Пірла). Модель забруднення води органічними відходами. Моделі розпаду та об'єднання хімічних елементів, швидкості механічного руху, охолодження та нагрівання тіл, швидкості росту рослин, розмноження бактерій.	Популяція. Бактерії. Радіоактивна речовина. Природний приріст населення. Забруднення органічними відходами. «Цвітіння води».
Системи диференціальних рівнянь.	Модель взаємодії типу «хижак-жертва» Лотки-Вольтерра.	Екосистема. Популяція. Точка рівноваги системи. Симбіоз. Міжвидова конкуренція.

Тобто, у процесі математичної підготовки студентів важливо дотримуватися положення про те, що математика не просто абстрактна наука, яка вивчається заради неї самої, а що вона є потужним потенціалом для розв'язання практичних потреб людства та розвитку самої особистості.

Отже, роль математичної підготовки студентів-екологів у системі професійної можна розглядати у двох аспектах. По-перше, математика є потужним механізмом розвитку професійного мислення майбутнього еколога, яке формується на основі математичного. По-друге, враховуючи абстрактну природу математичних структур, математичні дисципліни як інструментальні є знаряддям у вивченні спеціальних дисциплін та у професійній діяльності. При цьому важливо забезпечувати міжпредметні зв'язки між курсом «Вищої математики» та природничими, фаховими дисциплінами, що реалізуються через прикладні задачі екологічного змісту.

1. Алфімов В. Модель творчої особистості ліцеїста. *Рідна школа.* 2005. № 5. С. 9–14. **2.** Большой психологический словарь. Санкт-Петербург : Прайм ЕВРОЗНАК, 2003. 672 с. **3.** Ешуков Л. Н. О воспитательном значении математики. *Сборник методических работ по высшей математике.* Рязань, 1971. Вып. 26. С. 231–243. **4.** Зверев И. Д. Взаимная связь учебных предметов. Москва : Знание, 1977. 64 с. **5.** Кудрявцев Л. Д. Современная математика и ее преподавание. Москва : Наука, 1985. 170 с. **6.** Освітньо-професійна програма бакалавра першого рівня вищої освіти за спеціальністю 101 «Екологія». Галузь знань — 10 «природничі науки». Рівне : НУВГП, 2018. 14 с. URL: https://drive.google.com/file/d/19fORD_qMbO6wg_iZx2N0_Grdd68m5KIX/view (дата звернення 20.03.2021).

Tsetsyk S. P., Candidate of Pedagogical Sciences (Ph.D.), Associate Professor (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne); **Pomnitz S. Z., Mathematics Teacher of highest category** (Rivne Secondary School for Levels I–III № 27, Rivne)

THE ROLE OF THE DISCIPLINE «HIGHER MATHEMATICS» IN THE SYSTEM OF PROFESSIONAL TRAINING OF FUTURE ECOLOGISTS

The article substantiates the role of the discipline «Higher Mathematics» in the process of training environmentalists. It is determined that the basis for the formation of professional thinking of future ecologists is mathematical thinking. Given the abstract nature of mathematical structures, mathematical knowledge is a tool in the study of special disciplines and in the professional activities of students. It is established that to ensure the quality of teaching the course «Higher Mathematics» it is important to teach students to solve applied problems with elements of mathematical modeling.
Keywords: **mathematical training, mathematical thinking, applied problems, interdisciplinary connections, students-ecologists.**

УДК 539.3

Дейнека[1] О. Ю., старший викладач (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, [1]o.yu.dejneka@nuwm.edu.ua)

ПІДСИЛЕННЯ КОНТУРУ КРУГОВОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ ЗАМКНЕНИМ ПРУЖНИМ РЕБРОМ

Знайдено розв’язок задачі про підсилення замкненим ребром сталого поперечного перерізу контуру кругового отвору в нескінченій ізотропній пластинці, яка перебуває в умовах однорідного напруженого стану на нескінченності. Моделюючи кільце замкненим криволінійним брусом, розрахунок якого ґрунтується на гіпотезі нормального перерізу, а лінія контакту не співпадає з геометричною віссю, побудовано систему інтегрально диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення контактних зусиль між пластинкою і кільцем. Розв’язок задачі встановлено методом тригонометричних рядів.
Ключові слова**: ребро жорсткості, ізотропна пластина, круговий стрижень, внутрішні зусилля, нормальні напруження.**

Вступ. У різних галулях машинобудування широко використовуються тонкі пружні пластинки послаблені отворами, контури яких підсилені замкненими ребрами сталої або змінної жорсткості.

Концентрація напружень у з’єднаннях виконаних шляхом зварювання (склеювання) є визначальним фактором їх міцності та довговічності. Огляд досліджень напруженого стану в масивних циліндричних тілах кругової форми проведено в роботах [1; 2].

Постановка задачі. Розглянемо нескінчену ізотропну пластинку товщиною $2h$ з круговим отвором радіусом ρ, контур якого підкріплено замкнутим пружним ребром сталого прямокутного перерізу висотою $2h$, шириною 2η. Спільна серединна площина пластинки і кільця із зовнішнім радіусом ρ_0 віднесені до прямокутної $(x,\, y)$ і полярної $(\rho,\, \lambda)$ систем відліку з початком в центрі отвору.

Пружна пластичаста конструкція перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподіленими зусиллями p і q, прикладеними на нескінченості (рисунок), за відсутності інших зовнішніх навантажень на пластинку і ребро.

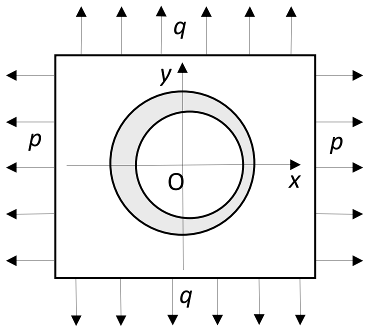


Рисунок. Підкріплення контуру пластинки замкненим пружним ребром

Розв’язання задачі передбачає визначення контактних зусиль між пластинкою і кільцем, а також компонент напруженого стану в кільці.

Умовно відділивши пластинку від кільця, замінюючи дії одного тіла на інше нормальними T_ρ і дотичними $S_{\rho\lambda}$ контактними зусиллями, приходимо до першої основної задачі теорії пружності для нескінченої пластинки з круговим отвором і круглого пружного кільця.

Основні рівняння задачі. Пластинка перебуває під дією зовнішнього навантаження на нескінченості та контактних зусиль на контурі γ. Її напружено-деформований стан характеризується співвідношеннями [3]

$$\begin{gathered}
\varepsilon_\lambda = \frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)T_\rho(\lambda) - \frac{1}{\pi}\oint_\gamma T_\rho(t)dt + \frac{1}{\pi}\oint_\gamma S_{\rho\lambda}(t)ctg\frac{\lambda-t}{2}dt + \right. \\
\left. + p + q - 2(p-q)\cos(2\lambda)\right], \\
V = \frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}(\lambda) - \frac{1}{\pi}\oint_\gamma S_{\rho\lambda}(t)dt - \frac{1}{\pi}\oint_\gamma T_\rho(t)ctg\frac{\lambda-t}{2}dt + \right. \\
\left. + 2(p-q)\sin(2\lambda)\right].
\end{gathered} \tag{1}$$

Тут введено позначення: ε_λ, V – відносне видовження контуру γ і кут повороту нормалі до нього; $E,\, \nu$ – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки.

Ребро моделюємо замкненим криволінійним стрижнем (брусом) геометрична вісь, якого не співпадає з фактичною лінією контакту [4].

Компоненти напруженого стану кільця (поперечна Q, поздовжня N сили та згинальний момент L_b) які віднесені до його осі, визначаються залежностями

$$T_\rho(\lambda)=\frac{N(\lambda)}{\rho_0}-\frac{dQ(\lambda)}{ds},\qquad S_{\rho\lambda}(\lambda)=-\frac{Q(\lambda)}{\rho_0}-\frac{dN(\lambda)}{ds},$$

$$\frac{dL_b(\lambda)}{ds}-\eta\frac{dN(\lambda)}{ds}-Q(\lambda)=0, \tag{2}$$

де s – дуга на контурі контакту ребра, до якого прикладене зовнішнє навантаження.

Формули для визначення відносного видовженням $\varepsilon_\lambda^{(c)}$ та кута повороту нормалі θ_b в точках крайнього поздовжнього волокна кільця, яке контактує з пластинкою мають вигляд [5]:

$$\varepsilon_\lambda^{(c)}(\lambda)=\frac{1}{E_0F_0}\left[N(\lambda)+\frac{\eta+\eta_c}{\rho_0\eta_c}L_b(\lambda)\right],\qquad \frac{d\theta_b}{d\lambda}=\frac{1}{E_0F_0}\left[N(\lambda)+\frac{L_b(\lambda)}{\eta_c}\right]. \tag{3}$$

Тут введено такі позначення: $2h_0$, 2η – висота і ширина поперечного перерізу підсилювального ребра; E_0 – модуль Юнга матеріалу ребра; E_0F_0 – жорсткість стрижня на розтяг (стиск); $F_0=2h_0\cdot 2\eta$ – площа поперечного переріз; η_c – відстань від осі ребра до нейтрального для чистого згину поздовжнього волокна.

Граничні умови на межі контакту пластинки і ребра формулюємо у вигляді умов ідеального механічного контакту в диференціальній формі

$$\varepsilon_\lambda(\lambda)=\varepsilon_\lambda^{(c)}(\lambda);\quad V(\lambda)=\theta_b(\lambda),\quad \lambda\in[0;2\pi]. \tag{4}$$

Підстановка (1), (3) в ці граничні умови призводить до системи сингулярних інтегрально-диференціальних рівняння

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)T_\rho(\lambda)-\frac{1}{\pi}\oint_\gamma T_\rho(t)dt+\frac{1}{\pi}\oint_\gamma S_{\rho\lambda}(t)ctg\frac{\lambda-t}{2}dt+\right.\\
\left.+p+q-2(p-q)\cos(2\lambda)\right]=\frac{1}{E_0F_0}\left[N(\lambda)+\frac{\eta+\eta_c}{\rho_0\eta_c}L_b(\lambda)\right],\\
\frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}(\lambda)-\frac{1}{\pi}\oint_\gamma S_{\rho\lambda}(t)dt-\frac{1}{\pi}\oint_\gamma T_\rho(t)ctg\frac{\lambda-t}{2}dt+\right.\\
\left.+2(p-q)\sin(2\lambda)\right]=\frac{1}{E_0F_0}\int_0^\lambda\left[N(t)+\frac{L_b(t)}{\eta_c}\right]dt,
\end{gathered} \tag{5}$$

яка разом із співвідношеннями (2) та умовою однозначності кута повороту нормалі θ_b до зовнішнього контуру ребра

$$\oint_\gamma\left[N(t)+\frac{L_b(t)}{\eta_c}\right]dt=0 \tag{6}$$

визначає математичну модель даної задачі.

Побудова розв’язку задачі. Оскільки контакт між пластинкою та ребром неперервний, а задача є симетричною відносно координатних осей, то функції T_ρ, $S_{\rho\lambda}$, N, Q, L_b обираємо у вигляді

$$T_\rho(\lambda)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}A_{2n}\cos 2n\lambda,\qquad S_{\rho\lambda}(\lambda)=\sum_{n=1}^{M}B_{2n}\sin 2n\lambda,$$

$$N(\lambda)=\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}C_{2n}\cos 2n\lambda,\qquad Q(\lambda)=\sum_{n=1}^{M}E_{2n}\sin 2n\lambda, \tag{7}$$

$$L_b(\theta)=\frac{D_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}D_{2n}\cos 2n\lambda\,.$$

Підстановка (7) в співвідношення (5), (2), (6), на підставі співвідношень [6]

$$\oint_\gamma ctg\frac{\lambda-t}{2}dt=0\,;\qquad \frac{1}{\pi}\oint_\gamma\begin{Bmatrix}\cos mt\\ \sin mt\end{Bmatrix}ctg\frac{\lambda-t}{2}dt=2\begin{Bmatrix}\sin m\lambda\\ -\cos m\lambda\end{Bmatrix},\quad m\in\mathbb{N}$$

призводить до системи функційних рівнянь для визначення сталих $A_0,\,C_0,\,D_0,\,A_{2n},\,B_{2n},\,C_{2n},\,D_{2n},\,E_{2n}\;\;(n=\overline{1,\,M})$.

$$\frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)\left(\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}A_{2n}\cos 2n\lambda\right)-A_0-2\sum_{n=1}^{M}B_{2n}\sin 2n\lambda+p+q-2(p-q)\cos(2\lambda)\right]=$$
$$=\frac{1}{E_0F_0}\left[\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}C_{2n}\cos 2n\lambda+\frac{\eta+\eta_c}{\rho_0\eta_c}\left(\frac{D_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}D_{2n}\cos 2n\lambda\right)\right],$$

$$\frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)\sum_{n=1}^{M}B_{2n}\sin 2n\lambda-2\sum_{n=1}^{M}A_{2n}\sin 2n\lambda+2(p-q)\sin(2\lambda)\right]=$$
$$=\frac{1}{E_0F_0}\left[\frac{C_0}{2}\lambda+\frac{1}{2n}\sum_{n=1}^{M}C_{2n}\sin 2n\lambda+\frac{D_0}{2\eta_c}\lambda+\frac{1}{2n\eta_c}\sum_{n=1}^{M}D_{2n}\sin 2n\lambda\right],$$
$$\rho_0\left(\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}A_{2n}\cos 2n\lambda\right)=\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}C_{2n}\cos 2n\lambda-2\sum_{n=1}^{M}nE_{2n}\cos 2n\lambda, \tag{8}$$
$$\rho_0\sum_{n=1}^{M}B_{2n}\sin 2n\lambda=-\sum_{n=1}^{M}E_{2n}\sin 2n\lambda+2\sum_{n=1}^{M}nC_{2n}\sin 2n\lambda,$$
$$-2\sum_{n=1}^{M}nD_{2n}\sin 2n\lambda+2\eta\sum_{n=1}^{M}nC_{2n}\sin 2n\lambda-\rho_0\sum_{n=1}^{M}E_{2n}\sin 2n\lambda=0,\qquad \frac{C_0}{2}+\frac{D_0}{2\eta_c}=0.$$

Порівнюючи у (8) коефіцієнти при однакових гармоніках одержимо системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2Eh}\left[(-1-\nu)\dfrac{A_0}{2}+p+q\right]=\dfrac{1}{E_0F_0}\left[\dfrac{C_0}{2}+\dfrac{\eta+\eta_c}{\rho_0\eta_c}\dfrac{D_0}{2}\right],\\[2ex] \rho_0\dfrac{A_0}{2}=\dfrac{\tilde{N}_0}{2},\;\;\dfrac{\tilde{N}_0}{2}+\dfrac{D_0}{2\eta_{\tilde{n}}}=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)A_2 - 2B_2 - 2(p-q)\right] = \dfrac{1}{E_0F_0}\left[C_2 + \dfrac{\eta+\eta_c}{\rho_0\eta_c}D_2\right], \\ \dfrac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)B_2 - 2A_2 + 2(p-q)\right] = \dfrac{1}{E_0F_0}\left[\dfrac{C_2}{2} + \dfrac{D_2}{2\eta_c}\right], \\ \rho_0 A_2 = C_2 - 2E_2,\quad \rho_0 B_2 = -E_2 - 2C_2,\quad 2D_2 - 2\eta C_2 + \rho_0 E_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)A_{2n} - 2B_{2n}\right] = \dfrac{1}{E_0F_0}\left[C_{2n} + \dfrac{\eta+\eta_c}{\rho_0\eta_c}D_{2n}\right], \\ \dfrac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)B_{2n} - 2A_{2n}\right] = \dfrac{1}{E_0F_0}\left[\dfrac{C_{2n}}{2n} + \dfrac{D_{2n}}{2n\eta_c}\right], \\ \rho_0 A_{2n} = C_{2n} - 2nE_{n2},\quad \rho_0 B_{2n} = -E_{2n} - 2nC_{2n},\quad 2nD_{2n} - 2\eta n C_{2n} + \rho_0 E_{2n} = 0. \end{cases}$$

З яких визначаємо

$$A_0 = \frac{(p+q)E_0F_0}{Eh(\rho_0-\eta-\eta_c)+(1+\nu)E_0F_0},\quad C_0 = \frac{\rho_0(p+q)E_0F_0}{Eh(\rho_0-\eta-\eta_c)+(1+\nu)E_0F_0},$$

$$D_0 = \frac{\rho_0(p+q)E_0F_0\eta_c}{Eh(\rho_0-\eta-\eta_c)+(1+\nu)E_0F_0}.$$

$$A_2 = \frac{(g_{12}-2g_{11})b_2}{\rho_0(g_{11}g_{22}+g_{12}g_{21})},\quad B_2 = \frac{(2g_{12}-g_{11})b_2}{\rho_0(g_{11}g_{22}+g_{12}g_{21})},\quad C_2 = \frac{g_{12}b_2}{g_{11}g_{22}+g_{12}g_{21}},$$

$$D_2 = \frac{(\eta g_{12}-0{,}5\rho_0 g_{11})b_2}{g_{11}g_{22}+g_{12}g_{21}},\quad E_2 = \frac{g_{11}b_2}{g_{11}g_{22}+g_{12}g_{21}},$$

де

$$g_{11} = (1+\nu)E_0F_0\eta_c + 2Eh\eta(\eta+\eta_c+0{,}5\rho_0) + 3Eh\rho_0\eta_c,$$
$$g_{12} = (1+\nu)E_0F_0\eta_c + \rho_0 Eh(\eta+\eta_c+0{,}5\rho_0)$$
$$g_{21} = (\nu-3)E_0F_0\eta_c + 2Eh\eta(\eta+\eta_c-0{,}5\rho_0) - Eh\rho_0\eta_c,$$
$$g_{22} = (\nu-3)E_0F_0\eta_c + \rho_0 Eh(\eta+\eta_c-0{,}5\rho_0);$$

$$A_{2n} = B_{2n} = C_{2n} = D_{2n} = E_{2n} = 0,\quad \text{якщо}\quad n>1.$$

Так наприклад, контактні зусилля визначаються за формулами

$$T_\rho = \frac{(p+q)E_0F_0}{2Eh(\rho_0-\eta-\eta_c)+2(1+\nu)E_0F_0} + \frac{(g_{12}-2g_{11})b_2}{\rho_0(g_{11}g_{22}+g_{12}g_{21})}\cos 2\lambda,$$

$$S_{\rho\lambda} = \frac{(2g_{12}-g_{11})b_2}{\rho_0(g_{11}g_{22}+g_{12}g_{21})}\sin 2\lambda.$$

1. Чернець М. Моделювання і аналіз трибоконтактної взаємодії у циліндричних спряженнях. *Машинознавство.* 2003. № 2 (68). С. 30–33. **2.** Семенов-Ежов И. Е. Проблема концентрации напряжений в соединениях с натягом (обзор). *Вестник машиностр. МГТУ им. Н. Э. Баумана.* 2001. № 4. С. 37–40. **3.** Сяський А. А., Сяський В. А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением. *Прикладная механика.* 1983. Т. 19. № 5. С. 94–99. **4.** Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С. Опір матеріалів. Київ : Вища школа, 2004. 655 с. **5.** Сяський А., Шевцова Н. Застосування методу сил для статичного розрахунку замкнених криволінійних стрижнів жорсткості. *Вісник Тернопільського національного технічного університету.* 2015. № 3 (79). С. 24–30. **6.** Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Москва : Наука, 1977. 638 с.

Deineka O. Y., Senior Lecturer (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne).

REINFORCEMENT OF THE CIRCLE OF THE CIRCULAR HOLE IN THE ENDLESS ISOTROPIC PLATE BY A CLOSED ELASTIC RIB

The solution of the problem of amplification by a closed edge of a stable cross section of the contour of a circular hole in an infinite isotropic plate, which is under conditions of homogeneous stress state at infinity, is found. Modeling a ring with a closed curved beam, the calculation of which is based on the hypothesis of normal cross section, and the contact line does not coincide with the geometric axis, a system of integral differential equations with Hilbert nuclei is constructed to determine the contact forces between the plate and the ring. The solution of the problem is established by the method of trigonometric series.

***Keywords*: reinforcing edge, isotropic plate, circular bar, internal efforts, normal tensions.**

Наукове видання

ВІСНИК
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВОГО ІНСТИТУТУ АВТОМАТИКИ, КІБЕРНЕТИКИ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ НУВГП

Випуск 9

Технічний редактор *Галина Сімчук*

Друкується в авторській редакції

Підписано до друку 28.05.2021 р. Формат 70×100 $^1/_{16.}$
Ум.-друк. арк. 3,4. Обл.-вид. арк. 3,7.
Тираж 100 прим. Зам. № 5569.

Видавець і виготовлювач
Національний університет
водного господарства та природокористування
вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції РВ № 31 від 26.04.2005 р.