Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та природокористування

Кафедра автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій

**04-03-274М**

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних занять 1, 2
з навчальної дисципліни
**«Системний аналіз»**
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології» та «Робототехніка та штучний інтелект» спеціальності 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології» денної та заочної форм навчання

Рекомендовано науково-методичною радою з якості ННІАКОТ
Протокол № 10  від 20.09.2022 р.

Рівне – 2022

Методичні вказівки до виконання практичних занять 1, 2 з навчальної дисципліни «Системний аналіз» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології» та «Робототехніка та штучний інтелект» спеціальності 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології» денної та заочної форм навчання [Електронне видання] / Сидорчук Б. П., Матус С. К. – Рівне : НУВГП, 2022. – 39 с.

Укладачі:

Сидорчук Б. П., к.т.н., доцент кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій;

Матус С. К., к.т.н., доцент кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій.

Відповідальний за випуск: Древецький В. В., д.т.н., професор, завідувач кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій.

Керівник освітньої програми «Робототехніка та штучний інтелект» спеціальності 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології»: Сафоник А. П., д.т.н., професор кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій.

Керівник освітньої програми «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології» спеціальності 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології»: Христюк А. О., к.т.н., доцент кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологі.й

## ЗМІСТ

# ВСТУП

Системний аналіз – сукупність методологічних засобів, які використовуються для підготовки та обґрунтування рішень із складних проблем, зокрема технічного та наукового характеру. Основою є системний підхід та ряд методів, математичних дисциплін і сучасної теорії управління. Основна процедура – це побудова узагальненої моделі, яка відображає взаємозв'язки технологічних об'єктів та процесів. "Системний аналіз" та "системний підхід" можуть використовуватися як синоніми.

Сам системний аналіз полягає у потребі проведення досліджень міждисциплінарного характеру, а саме створення технологічних та виробничих комплексів та систем управління ними.

Основна задача дисципліни: показати, як різні знання математики, теорії управління, методи оптимізації та інші можуть служити розв'язанню складних прикладних задач та побудові складних систем.

За допомогою математичного апарату та комп'ютерних програм необхідно поєднати формальні й неформальні методи; експериментальні, евристичні та математичні основи досліджень.

Основними задачами в системному аналізі є: визначення загальної структури системи; організація необхідної взаємодії між підсистемами і елементами; урахування впливу зовнішнього середовища; оптимізація структури системи; розробка оптимальних алгоритмів функціонування.

Методичні вказівки передбачають виконання практичних робіт, що відображають основні практичні завдання системного аналізу.

## Практичне заняття №1. Аналіз характеристичних властивостей технологічних систем як об’єктів керування

### 1.1 Мета заняття

Навчитись проводити аналіз структурної керованості та спостережуваності, а також апаратурної керованості технологічних процесів та систем як об’єктів керування.

### 1.2 Теоретичні відомості

Основна задача при розробці систем керування – переробка інформації для цілей керування процесами і системами.

При дослідженні технологічних процесів (ТП) і технологічних систем (ТС) як об'єктів керування необхідно:

- представити систему у виді окремих елементів підсистем, що відповідають або окремим апаратам, або групам апаратів, об'єднаних функціональними зв'язками;
- сформулювати задачу керування системою;
- виявити вхідні та вихідні збурюючі змінні, керуючі і керовані змінні як для кожної з підсистем, так і для системи в цілому;
- одержати математичний опис динаміки окремих підсистем і ТС у цілому;
- провести аналіз характеристичних властивостей системи як об'єкта керування, основними з якиї є: *чутливість, керованість, спостережуваність, перешкодозахищеність, стійкість, эмерджентність і інтеректність.*

Під *чутливістю* системи розуміють її властивість змінювати характеристики свого функціонування під впливом змін власних параметрів системи і зовнішніх збурюючих впливів. Необхідність дослідження чутливості при розробці систем керування обумовлена потребою виявити параметри системи, які вимагають найбільш точного вимірювання, а також можливістю вибору керуючих впливів, що забезпечують найбільшу чутливість вихідних керованих змінних системи. Крім того, дослідження чутливості - важливий етап створення таких ТС, що малочутливі або не чутливі як у статичних, так і в динамічних режимах функціонування.

Під *керованістю* розуміють властивість системи мати керуючі впливи, що дозволяють перевести її з заданого початкового стану в необхідний за кінцевий відрізок часу.

Так само як і спостережуваність, керованість залежить від конструктивних і технологічних параметрів системи, структури (топології) ТС і обмежень, накладених на керуючі змінні.

При дослідженні керованості важливо знати, чи охоплює область керованості системи задану область функціонування. Аналіз керованості складних систем проводять з використанням декомпозиції, послідовно виділяючи окремі підсистеми з загальної системи. Якщо при цьому виявляється, що всі отримані підсистеми керовані, то і система в цілому керована. Якщо ж уся система некерована при всіх можливих комбінаціях керуючих впливів, то необхідно змінити або обмеження на величину керуючих впливів, або конструктивні і технологічні параметри, або структуру ТС.

Дамо математичну інтерпретацію і пояснимо поняття керованості. Розглянемо динамічну систему, для характеристики якої використовується вектор стану $X$, координатами якого є сукупність змінних станів: $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1.1}$$

і вектор керування $U$:

$$U = (u_1, u_2, ..., u_m) \tag{1.2}$$

У цьому випадку динамічна система описується рівняннями стану виду

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, ..., x_n, \tau, U(\tau)), \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.3}$$

Скористаємося далі поняттям фазового простору, у якому стан об'єкта керування зображується точками. У загальному випадку, тобто коли є довільне число $n$ змінних станів, фазовий простір можна представити $n$ - мірним простором, що не має наочної графічної інтерпретації при $n > 3$. Якщо $n = 2$, фазовий простір переходить у фазову площину і зображення стану об'єкта стає наочним; при значеннях змінних станів $x_0^1$ і $x_0^2$ ним буде деяка точка $X^0$.

Будь-яка зміна вектора $U$ переводить об'єкт керування в деякий новий стан. У фазовому просторі цей «перехід» відбивається у виді руху з початкової точки $X^0$ у нову точку $X^1$ по деякій траєкторії, що представляється у фазовому просторі неперервною лінією (чи фазовою траєкторією), що з'єднує початкову і кінцеву точки.

Сукупність фазових траєкторій називається фазовим портретом розглянутої динамічної системи.

Якщо нас не цікавить процес переходу з точки $X^0$ в точку $X^1$, а оцінку переходу виявляють, порівнюючи початковий і кінцевий стани, то можна говорити, що задано визначену *функцію вигоди*, що залежить тільки від стану об'єкта керування. Якщо ж нас цікавить і форма шляху, по якому процес переходить з початкового стану в кінцевий, то говорять, що задано деякий функціонал від траєкторії руху і потрібно вибрати дану траєкторію таким чином, щоб процес переходу відповідав мінімальному чи максимальному значенню зазначеного функціонала. У найпростішому випадку таким функціоналом служить час переходу об'єкта з початкового стану в кінцевий, причому величина цього переходу повинна бути мінімальною.

У випадку, коли функція вигоди залежить тільки від стану об'єкта, для рішення задач використовуються методи математичного програмування, у той час як для задач, у яких важлива форма шляху, застосовуються методи варіаційного числення, динамічне програмування, а також *принцип максимуму*.

Повертаючись до поняття керованості, можна сказати, що, якщо у фазовому просторі $X=\left(x_1,...,x_n\right)$ задано дві множини $\Gamma_1$ і $\Gamma_2$, то система (3) називається керованою відносно $\Gamma_1$ і $\Gamma_2$, якщо існує таке припустиме керування $U(\tau)$, що за кінцевий відрізок часу переводить точку $X$ системи (3) з множини $\Gamma_1$ в множину $\Gamma_2$. Зокрема, множина $\Gamma_1$ може збігатися з усім фазовим простором системи (3), а множина $\Gamma_2$ вироджуватися в одну точку, наприклад у початок координат. Керованість заданої системи істотно залежить від класу припустимих керуючих впливів, тобто від характеру обмежень, накладених на керуючі впливи.

Принцип максимуму являє собою сукупність ряду теорем теорії оптимальних процесів, зміст яких установлює необхідні умови для побудови оптимального закону керування об'єктом. При цьому передбачається, що керований об'єкт описується системою звичайних диференціальних рівнянь (1.3)

Таким чином, якщо задано початковий стан об'єкта:

$$x_i\big|_{\tau=0}=x_{i0}, \quad i=1,...,n \tag{1.4}$$

то його подальше поводження знаходиться розв’язуванням системи рівнянь (1.3) при початкових умовах (1.4).

Поряд з фазовими координатами $x_i$ в рівняння руху об'єкта входять також керуючі впливи $u_1,...,u_m$, що можуть довільним чином змінюватися в деяких межах, обумовлених системою співвідношень

$\alpha_k \le u_k \le \beta_k, \quad k = 1,...,m.$

Зміна керуючих впливів $u_k$ приводить до того, що траєкторія об'єкта у фазовому просторі змінюється. Якщо із траєкторією руху зв'язаний деякий кількісний критерій оцінки її ефективності, виникає задача оптимального керування. Ця задача полягає у виборі такого закону керування $u_k(\tau), k = 1,...,m$, при якому заданий критерій оптимальності приймає максимальне чи мінімальне значення.

Під *спостережуваністю* системи розуміють властивість відновлювати вектор її стану за координатами, що спостерігаються.

Проблема полягає в тому, щоб по деякому лінійному перетворенню $Y(\tau) = CX(\tau)$ вектора стану $X(\tau)$ на деякій підмножині $\omega$ кінцевого відрізка часу $[\tau_0, \tau]$ визначити стан системи (3), тобто вектор $X(\tau)$, на якій-небудь іншій підмножині відрізка $[\tau_0, \tau]$.

Вимога спостережуваності має пряме відношення до задачі ідентифікації, що має сенс лише, коли об'єкт спостережуваний.

Будемо вважати, що система цілком спостережувана при даному перетворенні $C$, якщо існує перетворення (наприклад, на основі правила, алгоритму чи закону), за яким спостережуваній на інтервалі $[\tau_0, \tau]$ траєкторії $Y(\tau)$ ставиться у взаємно однозначну відповідність точка $X(\tau_0) \in \Gamma_0$. Визначення і дослідження необхідних і достатніх умов, які потрібно накласти на перетворення $C$, відрізок $[\tau_0, \tau]$ і множину початкових станів $\Gamma_0$, щоб, спостерігаючи $Y(\tau)$ на $[\tau_0, \tau]$, можна було знайти $X(\tau_0) \in \Gamma_0$, складає зміст проблеми спостережуваності системи.

Дослідження керованості і спостережуваності ТС дозволяє визначити канали зв'язку між ТС і системою автоматичного керування (САУ), а також можливість створення оптимальної замкнутої системи ТС-САУ.

Стан лінійного стаціонарного об'єкта вважається спостережуваним, якщо він може бути однозначно визначений на підставі вимірювань вихідного сигналу $Y = \varphi(T, X, 0)$ на кінцевому інтервалі часу $0 \le \tau \le T$ . Тут $Y$ - вектор вимірюваних виходів системи (вектор спостереження).

Для лінійних стаціонарних дискретних чи неперервних систем отримані критерії керованості і спостережуваності, що можуть бути використані при аналізі керованості і спостережуваності ТС, які описуються системою диференціальних рівнянь виду:

$$X = AX + BUY = CX + DU \qquad (1.5)$$

де $A, B, C, D,$ - матриці розмірності $n \times n, n \times m, L \times n, L \times m$ відповідно.

Критерієм (тобто необхідною і достатньою умовою) керованості системи (1.4) є рівність

$$rang \left[ BAB \ldots A^{n-1}\ BD \right] = n \qquad (1.6)$$

У загальному випадку змінні вектора стану $X$ не є вимірюваними змінними, тому система цілком керована за виходом тоді і тільки тоді, коли матриця

$$G = \left[ CB\, CAB \ldots CA^{n-1}\ BD \right] \qquad (1.7)$$

має ранг, рівний $n$ , тобто

$$rangG = n \qquad (1.8)$$

Для того щоб система (5) була цілком спостережувана, необхідно і достатньо, щоб матриця

$$Q = \left[ C^T\ A^T\ C^T \ldots \left(A^T\right)^{n-1}\ C^T \right] \qquad (1.9)$$

мала ранг, рівний $n$, тобто $rang\, Q = n$ .

Індекс «Т» означає транспонування матриці. За критерієм керованості виду (6), як правило, неможливо оцінити, у результаті чого виникла некерованість системи, чи лежать у її основі структурні особливості системи чи причиною є значення конструктивних і технологічних параметрів. Така оцінка особливо важлива при спільному проектуванні ТС і САУ ще і тому, що багаторазовість аналізу керованості, а також труднощі, зв'язані з обчисленням критеріїв (6), (7), обумовлюють необхідність попередньої оцінки керованості в залежності від структури ТС. Аналіз керованості ТС, що враховує лише її структурні особливості, називають *аналізом структурної керованості ТС*.

В основу структурної керованості ХТС покладене твердження: якщо матриця $G$ містить нульові рядки, то відповідні компоненти вектора стану некеровані, тому що вони інваріантні стосовно наявних керувань.

На підставі цього твердження можна зробити висновок, що якщо при всіляких змінах ненульових елементів матриць $A, B, C, D$ деяким компонентам вектора стану в матриці $G$ відповідають нульові рядки, то має місце структурна некерованість ХТС. Однак для доказу структурної некерованості необхідно визначити матрицю $G$ для всіляких значень матриць $A, B, C, D$, що практично неможливо. Найбільш простими методами дослідження структурної керованості є методи, які базуються на логічному аналізі можливості проходження сигналу від входу до виходу системи. До них можна віднести топологічний метод, що базується на виділенні прямих шляхів у сигнальному графі, і метод безпосереднього аналізу матриць $A, B, C, D$. Метод визначення структурної керованості на основі безпосереднього аналізу матриць $A, B, C, D$ базується на наступних положеннях:

а) компонент вектора $Y$ системи *структурно керований,* якщо у відповідній рядку матриці $D$ є хоча б один ненульовий елемент;

б) компонент вектора $Y$ системи *структурно керований*, якщо у відповідному рядку матриці $D$ всі елементи нульові, а у відповідному рядку матриці $C$ є хоча б один ненульовий елемент, що вказує на можливість передачі сигналу від структурно керованого компонента вектора стану;

в) компонент вектора стану $X$ системи *структурно керований,* якщо у відповідному рядку матриці $B$ є хоча б один ненульовий елемент, або у відповідному рядку матриці $A$ є хоча б один ненульовий елемент, що вказує на можливість передачі сигналу від іншого структурно керованого компонента вектора стану.

Приведений метод дозволяє досить просто і без попереднього перетворення математичного опису проаналізувати структурну керованість ТС.

Структурна керованість і спостережуваність вказують на можливість зміни і визначення вектора стану, але не дають відповіді на питання, чи буде така зміна і визначення бажаним для керування технологічною системою. Для визначення повної керованості і спостережуваності ТС необхідний аналіз її апаратурної керованості і спостережуваності.

*Апаратурна керованість* вказує на можливість переведення ТС з одного стаціонарного стану в інший і цілком визначається значеннями елементів матриць $A, B, C, D$, тобто апаратурна керованість залежить від конструктивних і технологічних параметрів ТС і від її апаратурного оформлення.

Як випливає з критерію (6), визначення апаратурної керованості зводиться до перевірки умови $rang\, G = n$, чи, що теж саме, до перевірки умови нерівності нулю одного з визначників $n$ - го порядку матриці $G$. Більш раціонально робити виділення керованої частини ТС і визначення її керованості з використанням умов лінійної залежності рядків матриці $G$. При цьому метод визначення апаратурної керованості полягає в наступному. Аналізується лінійна залежність двох рядків матриці $G$ за умовою:

$$\frac{g_{i1}}{g_{k1}} = \frac{g_{i2}}{g_{k2}} = \ldots = \frac{g_i\left[m(n+1)\right]}{g_k\left[m(n+1)\right]}.$$

Якщо два аналізовані рядки матриці $G$ лінійно незалежні, то необхідно скласти комбінацію з трьох рядків $G$, що включає рядки $i, k$ і новий рядок $l$. У противному випадку необхідний аналіз лінійної залежності іншої пари рядків матриці $G$. Якщо три аналізовані рядки незалежні, то необхідно скласти комбінацію з чотирьох рядків матриці $G$ і т.д. Комбінаціям лінійно-незалежних рядків матриці керованості відповідають комбінації керованих компонентів вектора системи.

Приведені методи аналізу керованості і спостережуваності дозволяють провести оцінку працездатності системи, а у випадку необхідність-коректування ТС; при спільному проектуванні ТС і САУ вони також дають можливість проаналізувати і вибрати канали зв'язку.

*Стійкість ТС* - це здатність системи зберігати необхідні характеристичні властивості в умовах діючих збурень. У більш вузькому змісті під стійкістю ТС слід розуміти стійкість як статичних, так і динамічних режимів функціонування ТС. Інтенсифікація процесів ТС приводить до того, що окремі елементи ТС експлуатуються в граничних режимах, що забезпечує максимальні значення показників функціонування ТС. У цих випадках можливий хитливий режим роботи як окремих елементів, так і ТС у цілому.

Стійкість динамічних режимів функціонування ТС можна пояснити на прикладі абсорбційно - десорбційних систем, широко розповсюджених у хімічній промисловості. Якщо абсорбер експлуатується в малоінтенсивних гідродинамічних режимах, то система стійка в динамічних режимах. При функціонуванні абсорбера в найбільш ефективному режимі в умовах діючих збурень можливий перехід режиму роботи абсорбера в область нестійкості, що веде до нестійкості режиму функціонування абсорбційно - десорбційної системи в цілому і необхідності її аварійної зупинки. Нестійкість стаціонарних і динамічних режимів функціонування ТС є вкрай небажаним явищем, ліквідувати яке можна і за допомогою введення додаткових технологічних впливів (таких, як зміна поверхні теплообміну, розміру зерна каталізатора), і за допомогою інформаційних зв'язків шляхом розробки спеціальних систем керування.

Емерджентність і інтеректність ТС є відмітними характеристичними властивостями системи в цілому. *Емерджентність* ТС - це здатність системи здобувати нові властивості, що відрізняються від властивостей окремих елементів, що утворять цю систему. Емерджентність ТС обумовлює наступне: а) можливість появи хитливих режимів ТС, кожен елемент якої має стійкість; б) зміна чутливості ТС у порівнянні з чутливістю окремих її елементів за рахунок уведення зворотних технологічних зв'язків (збільшення чутливості при введенні позитивної і зменшення при введенні негативної); в) необхідність обліку транспортних комунікацій, по яких протікають технологічні потоки, тобто великих транспортних запізнювань, і т.д. *Інтеректність* ТС - здатність елементів, утворюючих систему, взаємодіяти між собою при функціонуванні системи, що забезпечується технологічними й інформаційними зв'язками між елементами. Інтеректність ТС виявляється в тому, що зміна змінних на вході одного елемента ТС приводить до зміни вихідних змінних інших елементів і системи в цілому.

## 1.3 Розв’язування задач

Задача 1. Провести аналіз структурної керованості і спостережуваності однієї зони реактора гідроформування пропилена, математична модель якої має вигляд:

$$\frac{dG_n}{d\tau} = \frac{1}{\tau_{ж}} G^0{}_n - \frac{1}{\tau_{ж}} G_n - K_T \ G_T \,,$$

$$\frac{dG_H}{d\tau} = \frac{1}{\tau_{ж}} G^0{}_H - \frac{1}{\tau_{ж}} G_H + 1{,}715 \ K_1 \ G_n \,,$$

де $G^0{}_n \left(G_H{}^0\right), G_n\left(G_H\right)$ - кількість пропилена (і $н$- альдегідів) на входах у зони і виходах з них; $\tau_{ж}$ – час перебування рідкої фази в зоні реактора; $K_T$ – константа швидкості реакції гідроформування пропилена; $K_T = b\,exp\left[17{,}8 - 8211/\left(t + 273\right)\right] K_1$ – константа швидкості утворення нормальних альдегідів.

Один з можливих статичних режимів роботи зони характеризується наступними параметрами: $G_n{}^0 = 500 кг/хв;\ G_n = 486{,}4 кг/хв;\ G_H{}^0 = 0{,}0 кг/хв;\ G_H = 18{,}3 кг/хв;\ \tau_{ж} = 1{,}0582 хв;$ $t = 109{,}6^\circ C;\ b = 0{,}992$.

Модель зони реактора для цього режиму має вид:

$$\frac{dG_n}{d\tau} = -0{,}9693\, G_n - 0{,}011\, t - 0{,}2071\, b + 0{,}945\, G^0{}_n + 0{,}1276,$$

$$\frac{dG_H}{d\tau} = 0{,}0326\, G_n - 0{,}945\, G_H + 0{,}0147\, t + 0{,}0278\, b + 0{,}945\, G^0{}_H - 0{,}1703.$$

*Розв'язок*

Для даної системи матриця $A$ має вид:

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}9693 & 0{,}0 \\ 0{,}0326 & -0{,}945 \end{bmatrix}$$

1. Нехай як керування використовується температура в зоні реакції, тоді

$$B = \begin{bmatrix} -0{,}0110 \\ 0{,}0147 \end{bmatrix}$$

У цьому випадку обидва компоненти вектора стану (витрата пропилена $н$ - альдегідів) структурно керовані, тому що у відповідних рядках $B$ є ненульові елементи.

2. Нехай як керування використовується подача $н$ - альдегідів у зону $G_H{}^0$, тоді

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}945 \end{bmatrix}.$$

У цьому випадку $G_H$ - структурно керована, тому що у відповідній рядку матриці $B$ є ненульовий елемент, а $G_n$ структурно некерована, тому що у відповідній рядку матриці $B$ стоїть нульовий елемент, а вплив $G_H \to G_n$ відсутній.

3. Нехай як керування використовуються подача пропилена і температура $t$, тоді

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}945 & -0{,}0110 \\ 0{,}0 & 0{,}0147 \end{bmatrix}$$

Обидва компоненти вектора стани структурно керовані, тому що у відповідних рядках матриці $B$ є ненульові елементи.

Задача 2. Провести аналіз апаратної керованості зони реактора гідроформування.

1. Нехай як керування використовується температура в зоні, тоді

$$G = [BAB] \qquad B = \begin{bmatrix} -0{,}0110 \\ 0{,}0147 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -0{,}9693 & 0{,}0 \\ 0{,}0326 & -0{,}945 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}0110 \\ 0{,}0147 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0107 \\ -0{,}0142 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -0{,}0110 & 0{,}0107 \\ 0{,}0147 & -0{,}0142 \end{bmatrix}, \qquad \frac{g_{21}}{g_{11}} \approx \frac{g_{22}}{g_{12}}$$

Рядка матриці $G$ лінійно залежні отже, система апаратно некерована.

2. Нехай як керування використовується подача пропилена в зону реактора, тоді

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}945 \\ 0{,}0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0{,}945 & -0{,}916 \\ 0{,}0 & 0{,}0308 \end{bmatrix}$$

У цьому випадку система апаратурно керована, тому що рядка матриці $G$ лінійно-незалежні.

### 1.4 Самостійна робота

Задача 1. Дослідити структурну керованість інформаційної системи, частковий випадок для якої зображується моделлю:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{d\tau} = 2y_1 + 2{,}5x_1 - 4V + 5, \\ \dfrac{dy_2}{d\tau} = 3y_1 - 2y_2 + 0{,}5V - 4x_2 - 1{,}2, \end{cases}$$

де $x_1, x_2$ - кількість потоків вхідної інформації І та ІІ, $y_1, y_2$ - кількості потоків вихідної інформації, $\tau$ - час проходження інформації, $V$ - швидкість проходження інформації. Розглянути випадки, коли в якості керування використовується: 1) швидкість проходження інформації $V$; 2) кількість потоку вхідної інформації ІІ.

*Пояснення до задачі*

Система є структурно керованою, якщо у рядках матриці керування є ненульові елементи.

$A = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} V \\ V \end{bmatrix}$ - матриця В – матриця керування.

$G = [B \quad AB]$ - матриця, що визначає апаратну керованість системи: якщо рядки матриці лінійно залежні, тобто $\dfrac{g_{21}}{g_{11}} \approx \dfrac{g_{22}}{g_{12}}$, то система апаратно некерована.

## 1.5 Домашнє завдання

1. Дослідити структурну керованість інформаційної системи, частковий випадок для якої зображується моделлю:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{d\tau} = 4y_1 - 1{,}5x_1 + 2V - 2x_2 + 3 \\ \dfrac{dy_2}{d\tau} = 3{,}3y_1 + y_2 + 3{,}3V - 2 \end{cases}$$

де $x_1, x_2$ - кількість потоків вхідної інформації І та ІІ, $y_1, y_2$ - кількості потоків вихідної інформації, $\tau$ - час проходження інформації, $V$ - швидкість проходження інформації. Розглянути випадки, коли в якості керування використовується кількість потоку вхідної інформації І і швидкість проходження інформації $V$.

2. Дослідити апаратну керованість інформаційної системи, частковий випадок для якої зображується моделлю:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{d\tau} = y_1 - 5x_1 + V - 2{,}3 \\ \dfrac{dy_2}{d\tau} = 2y_1 + 3y_2 - 1{,}5V + x_2 - 2{,}5 \end{cases}$$

де $x_1, x_2$ - кількість потоків вхідної інформації I та II, $y_1, y_2$ - кількості потоків вихідної інформації, $\tau$ - час проходження інформації, $V$ - швидкість проходження інформації. Розглянути випадки, коли в якості керування використовується швидкість проходження інформації $V$ .

### 1.6 Контрольні запитання

1. Які є основні характеристичні властивості системи як об'єкта керування?
2. Що розуміють під чутливістю системи?
3. Для чого необхідне дослідження чутливості при розробці систем керування?
4. Що розуміють під керованістю системи?
5. Від чого залежить керованість системи?
6. Що називається фазовим портретом динамічної системи?
7. Що являє собою принцип максимуму?
8. Що розуміють під спостережуваністю системи?
9. Що дозволяє визначити дослідження керованості і спостережуваності систем?
10. Що називають аналізом структурної керованості систем?

## Практичне заняття № 2. Методи оптимізації в системному аналізі

### 2.1 Мета заняття

Навчитись використовувати методи оптимізації в системному аналізі

### 2.2 Теоретичні відомості

*2.2.1 Загальна характеристика методів оптимізації технологічних процесів*

Оптимізація полягає в знаходженні оптимуму розглянутої функції або оптимальних умов проведення даного процесу.

Для оцінки оптимуму необхідно насамперед вибрати критерій оптимізації. У залежності від конкретних умов як критерій оптимізації можна взяти технологічний критерій, наприклад максимальне отримання продукції з одиниця об'єму апарата, економічний критерій - мінімальна вартість продукту при заданій продуктивності.

На підставі обраного критерію оптимізації складається так звана цільова функція, чи функція вигоди, що представляє собою залежність критерію оптимізації від параметрів, що впливають на його значення. Задача оптимізації зводиться до знаходження екстремуму (максимуму або мінімуму) цільової функції.

Необхідно зважати, що проблема оптимізації виникає в тих випадках, коли необхідно вирішувати компромісну задачу: що покращувати із двох чи більше кількісних характеристик, які різним чином впливають на змінні процесу при умові їхнього взаємного балансування. Наприклад, ефективність процесу балансує із продуктивністю, кількість – з якістю, запас одиниць - з їхньою реалізацією.

Для автоматично керованих процесів або систем розрізняють дві стадії оптимізації: статичну і динамічну.

Проблеми створення і реалізації оптимального стаціонарного режиму процесу вирішує статична оптимізація, створення і реалізація системи оптимального управління процесом - динамічна оптимізація.

В залежності від характеру розглянутих математичних моделей застосовуються різні математичні методи оптимізації. Багато з них зводяться до знаходження мінімуму чи максимуму цільової функції. Лінії, уздовж яких цільова функція зберігає постійне значення при зміні вхідних в неї параметрів, називаються контурними, або лініями рівня.

Лінії рівня, що відповідають різним значенням цільової функції, не перетинаються. Усередині лінії рівня, що відповідає визначеному числу $y_1$ (вихід продукту), знаходяться всі лінії рівня, що відповідають числам $y$, що більші ніж $y_1$, у випадку максимуму і меншим, ніж $y_1$, у випадку мінімуму. Цільова функція може бути задана як без обмежень, так і з обмеженнями на значення окремих параметрів.

Застосовувані методи оптимізації систематизовані в табл.2.1.

Таблиця 2.1. Методи оптимізації в системному аналізі

| Методи оптимізації | Об'єкт оптимізації, розв'язувані задачі |
|---|---|
| Аналітичні | |
| Аналітичний пошук екстремуму | Детерміновані процеси з критерієм оптимальності у виді диференційованих функцій |
| Метод множників Лагранжа | Задачі з обмеженнями типу рівностей з критерієм оптимальності у виді диференційованих функцій |
| Варіаційні методи | Задачі з критерієм оптимальності у виді функціонала. Розрахунок оптимальних температурних профілів хімічних реакторів, оптимальних режимів періодичних процесів |
| Принцип максимуму Понтрягіна | Широкий клас задач з об'єктами, що описуються диференціальними рівняннями. Розрахунок оптимальних керувань в задачах регулювання |
| Математичне програмування | |
| Геометричне програмування | Процеси, що описуються співвідношеннями у виді алгебраїчних функцій – поліномів. |
| Лінійне програмування | Процеси, що описуються лінійними алгебраїчними рівняннями з критерієм оптимальності у виді лінійної функції. Задачі максимізації доходу при обмеженні ресурсів, оптимальне використання обладнання, транспортні задачі. |

| | |
|---|---|
| Динамічне програмування | Багатостадійні процеси з критерієм оптимальності у виді адитивної функції. Каскад апаратів, реактори і т.д. |
| Градієнтні | |
| Метод градієнта, метод найшвидшого спуску і ін. | Більшість складних процесів хімічної технології, окремі об'єкти і каскади апаратів з перехресними зв'язками. Найбільш загальні випадки оптимізації лінійних і нелінійних функції з лінійними і нелінійними обмеженнями |
| Автоматичні з моделями, які самоналагоджуються | |
| Адаптивні, програмні з автоматичними пристроями | Складні об'єкти хімічної технології |
| Статистичні | |
| Регресійний аналіз, кореляційний аналіз та ін. | Об'єкти, котрі не мають детермінованого опису. Задачі оптимізації. Планування експерименту. |

При виборі методу оптимізації необхідно враховувати можливі обчислювальні труднощі, обумовлені обсягом обчислень, складністю самого методу, розмірністю задачі і т.п. Доцільно по можливості проводити попередню оцінку положення оптимуму якої-небудь конкретної задачі. Для цього необхідно розглянути вихідні й основні співвідношення між змінними. Для скорочення розмірності задачі часто використовується прийом виділення найбільш істотних змінних.

Доцільно застосовувати однотипні обчислювальні схеми. Застосування комп'ютерів дозволяє спростити розрахунки, використовуючи стандартні підпрограми, оскільки в таких випадках лише для цільових функцій приходиться створювати спеціальні програми (наприклад, при динамічному програмуванні). Створити певні правила спрощення задачі для всіх можливих випадків взагалі неможливо: при виборі методу оптимізації і рішення задачі необхідно щораз виходити з конкретної суті самої задачі.

*2.2.2 Аналітичні методи*

Аналітичні методи є класичними методами визначення екстремального значення функції (мінімуму чи максимуму). Вони застосовуються, коли функції, котрі оптимізуються, задані аналітично і число незалежних змінних невелике. При великому числі змінних виникає так названий бар’єр багатомірності, і застосування аналітичних методів стає складним. Також ускладнює застосування аналітичних методів наявність обмежень. Внаслідок цього практично використання аналітичних методів у їхньому класичному виді досить обмежене.

При визначенні оптимуму в задачах, де незалежними змінними є незалежні функції, можуть застосовуватися варіаційні методи. У цих випадках задача зводиться до знаходження екстремуму функціонала, що залежить від однієї чи декількох невідомих функцій.

Аналітичний пошук екстремуму цільової неперервної функції $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, де $x_1, x_2, ..., x_n$ незалежні змінні, зводиться до прирівнювання її часткових похідних до нуля:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = 0.$$

Так як диференціали $dx_i$ можна вибрати незалежно, то

$$\partial F / \partial x_i = o, i = 1,2,...,n.$$

Класичний метод аналізу функцій одного незалежного параметра $F(x_1)$ дозволяє знайти координати точок екстремумів з умови $F'(x_1) = 0$. При цьому вид екстремуму (мінімум чи максимум) з'ясовується за відомими правилами для другої похідної. При $F''(x_1) = 0$ варто провести аналіз поводження $F''(x_1)$ в околі точки або дослідити вищі похідні.

Якщо число змінних більше одиниці, трудноші знаходження екстремуму стають істотними. Для функції двох змінних $F(x_1, x_2)$ маємо: $F'_{x_1}(x_1, x_2) = 0$ і $F'_{x_2}(x_1, x_2) = 0$; при цьому кожна пара значень дає одну точку. Для перевірки екстремуму досліджується вираз:

$$\Delta = F''_{x_1 x1} F''_{x_2 x_2} - \left(F''_{x_1 x_2}\right)^2. \quad (2.1)$$

Якщо $\Delta > 0$, то екстремум є; якщо $\Delta < 0$, те екстремуму немає; при $F''_{x_1 x_2} < 0$ є максимум, при $F''_{x_1 x_2} > 0$ є мінімум.

*2.2.3 Метод множників Лагранжа*

Цей метод звичайно використовується, коли на змінні накладені обмеження типу рівності. Так, якщо потрібно знайти екстремум функції $F(x_1,x_2,...,x_n)$ при наявності обмежень типу рівностей на незалежні змінні $f(x_1,x_2,...,x_n)=0$ $(i=1,...,m; m<n)$, то для рішення цієї задачі вводиться допоміжна функція:

$$\varphi=(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)=F(x_1,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x_1,...,x_n). \quad (2.2)$$

де $\lambda_i$ $(i=1,...,m)$ – невизначені множники Лагранжа. У цьому випадку екстремальні точки функції $F(x_1,x_2,...,x_n)$ визначаються рішенням системи рівнянь, що отримується прирівнюванням до нуля похідних від функції $\varphi=(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)$ за усіма незалежними змінними $x_{k(k=1,..,n)}$ і за всіма множниках Лагранжа $\lambda_i$ $(i=1,...,m)$. В результаті отримується система рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)}{\partial x_k}=0, k=1,...,n, \\ \dfrac{\partial\varphi(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)}{\partial\lambda_i}=f_i(x_1,...,x_n)=0, i=1,...,m, \end{cases} \quad (2.3)$$

яка містить $n+m$ рівнянь, з яких можна виключити $m$ невизначених множників Лагранжа, що мають допоміжне значення, і знайти координати екстремальних точок $x'_k$ $(k=1,...,n)$. Кожне обмеження додає ще одне рівняння, і на кожне обмеження вводиться один множник Лагранжа.

Слід зазначити, що множники Лагранжа використовують також як допоміжний засіб при рішенні спеціальними методами задач інших класів з обмеженнями типу рівностей, наприклад у варіаційному численні і динамічному програмуванні. Особливо ефективне застосування множників Лагранжа в методі динамічного програмування, у цьому випадку вони можуть знизити розмірність розв'язуваної задачі.

*2.2.3 Методи математичного програмування*

*Геометричне програмування*

Метод геометричного програмування застосовується для мінімізації алгебраїчних виразів наступного виду:

$$F(x_1,...,x_n)=\sum_{j-1}^{l} C_j P_j(x_1,...,x_n), \qquad (2.4)$$

де $C_j$ - додаткові константи; $P_j(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}$ , $a_{ij}$ - дійсні числа.

Геометричне програмування базується на теоремі про середнє. За якою середнє арифметичне додатних чисел завжди більше або рівне їх середнього геометричного, тобто

$$\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2 \ge \sqrt{y_1 y_2} . \qquad (2.5)$$

Визначивши допоміжні величини наступним чином

$$\delta_1+...+\delta_m=1 \qquad (2.6)$$

можна узагальнити попередню рівність, а саме

$$\delta_1 y_1+\delta_2 y_2+...+\delta_m y_{m1}=y_1^{\delta_1}...y_m^{\delta_m} . \qquad (2.7)$$

Відповідно до нерівності (2.5) можна записати:

$$M=M_1+M_n=\delta_1(M_1/\delta_1)+...+\delta_m(M_m/\delta_m)\ge(M_1/\delta_1)^{\delta_1}+...+(M_m/\delta_m)^{\delta_m} \qquad (2.8)$$

де $M_1,...,M_m-$ позитивні числа; $\delta_1,...,\delta_m$ визначаються співвідношенням (2.6).

У загальному випадку число $M_j$ є функція багатьох змінних $x_1,...,x_n$, тоді ліва частина співвідношення (2.8) є функція тільки змінних $x_i(i=1,2,...,n)$, а права ще і $\delta_j(j=1,...,m)$.

Нехай тепер $M_j$ є

$$M_j=C_j P_j(x_1,...,x_n)=C_j x_1^{a_{1j}}+...+x_n^{a_{nj}} , \qquad (2.9)$$

де всі $x_i \ge 0,(i=1,2,...,n)$

Відповідно до рівності (2.9) величина $M$ зі співвідношення (6) дорівнює $F(x_1,x_2,...,x_n)$ з виразу (2.4).

З урахуванням рівності (2.9) співвідношення (2.8) можна записати в наступному виді:

$$F(x_1,...,x_n)=\sum_{j=1}^{m} C_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}} \ge \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{C_j}{\delta_j}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}\right)^{\delta_i} \qquad (2.10)$$

Функція $F(x_1,x_2,...,x_n)$ мінімальна, якщо в співвідношенні

(2.10) досягається рівність, а це можливо при виконанні наступних умов:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\delta_j = 0, i = 1,2,...,n. \tag{2.11}$$

Таким чином, числа $\delta_j$ повинні задовольняти умовам (2.6) і (2.11). Отже, рішення задачі мінімізації функції $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ зводиться до знаходження величин $\delta_j$ для функції $u$:

$$u = \prod_{j=1}^{m} \left( \frac{C_j}{\delta_j} \right) \left( \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}} \right)^{\delta_j} \tag{2.12}$$

таких, котрі задовольняють рівнянням (2.6) і (2.11). При цьому в співвідношенні (2.10) досягається рівність, і, отже, $u$=$F$*, де $F$* – мінімальне значення $F(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Істотною перевагою методу є те, що він дозволяє звести складну задачу оптимізації нелінійного співвідношення до рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Крім того, у результаті обчислення чисел $\delta$ відразу визначається мінімальне значення критерію оптимальності без обчислення значень змінних, що визначають цей мінімум.

*Лінійне програмування*

Знаходження екстремуму критерію оптимальності у задачах з лінійними рівняннями представляє собою задачу методу лінійного програмування. Цільова функція виражається так:

$$F = c_1 x_1 + ... + c_n x_n \tag{2.13}$$

*Обмеження задаються у виді лінійних нерівностей*

$$a_{i1} x_1 + ... + a_{im} x_m \geq b_i \tag{2.14}$$

$$x_1, ..., x_n \geq 0$$

де $x_i$ - оптимізуючі параметри.

Найбільш типовими прикладами є наступні:

1. Задача виготовлення різної продукції, що забезпечує максимальний дохід при різних видах сировини.

2. Задача оптимального використання устаткування.

Наприклад, така: за час $\tau$ необхідно випустити $N_1$ одиниць продукту $P_1$ і $N_2$ одиниць продукту $P_2$. Для випуску цієї продукції використовуються дві установки А і В різної потужності і вартості. Треба організувати процес так, щоб витрати на експлуатацію устаткування були мінімальні.

3. Транспортна задача.

Необхідно більш економічно перевозити продукт із пунктів $A_1$ і $A_2$ у пункти споживання $B_1, B_2$ і $B_3$. Вартість перевезень повинна бути мінімальною, і план повинний бути виконаний. Рішення проводиться кроковим методом або симплекс-методом.

*Динамічне програмування*

Метод динамічного програмування застосовується для багатостадійних процесів, що характеризуються послідовністю рішень і тим, що стан системи залежить тільки від попереднього кроку. У таких випадках використовується принцип оптимальності, що формулюється в наступному виді: оптимальна стратегія має таку властивість, що, який би не був початковий стан і початкове рішення, наступні рішення повинні прийматися, виходячи з оптимальної стратегії щодо стану, одержуваного в результаті першого рішення.

Основна ідея динамічного програмування і полягає в тому, що якщо який-небудь потік змінюється на кожній стадії процесу, то, якщо на останній стадії режим роботи (незалежно від режиму роботи на всіх стадіях) не буде оптимальним стосовно потоку, що надходить до неї, не буде оптимальним і режим усього багатостадійного процесу в цілому.

Застосування методу динамічного програмування складається у визначенні такого режиму роботи стадії, що максимізує дохід на цій і всіх наступних стадіях для будь-яких можливих станів потоку, що надходить до неї. Як правило, розгляд починається з останньої стадії процесу. Оптимальний режим усього процесу визначається постадійно.

Таким чином, метод динамічного програмування припускає розбивання аналізованого процесу в часі або просторі на стадії або ступені. Як стадію можна прийняти одиницю часу (хвилина або година), одиничний елемент устаткування (реактор у ланцюгу реакторів) і т.д.

У будь-якому випадку стадія або ступінь - це математична абстракція, що застосовується для представлення неперервної змінної в дискретному виді. Стан системи характеризується сукупністю змінних, що описують систему на будь - якій стадії процесу.

Кожна стадія характеризується, як правило, вхідними $x^{i-1}$ і вихідними $x^{i}$ параметрами, а також параметрами управління (керування) $u^{i}$. При допомозі керуючих впливів оптимізується результуюча оцінка ефективності багатостадійного процесу, обумовлена як адитивна функція результатів, одержуваних на кожній стадії $r_i\left(x_1^{i-1}, u^i\right)$:

$$R_N = \sum_{i=1}^{N} r_i\left(x_1^{i-1}, u^i\right). \tag{2.15}$$

Значення критерію оптимальності $R_N$ залежить від сукупності $u_N$ керуючих впливів на всіх стадіях. Сукупність керувань називається стратегією керування багатостадійним процесом.

Основним рівнянням динамічного програмування є функціональне рівняння виду:

$$f_N\left(x^0\right) = \max_{u^1 \in U}\left\{r_1\left(x^0, u^1\right) + f_{N-1}\left[\varphi^1\left(x^0, u^1\right)\right]\right\} \tag{2.16}$$

де $f_N\left(x^0\right)$ – оптимізуюча функція *N*-стадійного процесу, максимальне значення критерію $R_N$.

Максимізація першого доданку $r_1\left(x^0, u^1\right)$, що представляє собою частковий критерій, який характеризує першу стадію, проводиться тільки за керуванням $u^1$.

Коефіцієнт $f_{N-1}\left[\varphi^1\left(x^0, u^1\right)\right]$ є значення оптимізуючої функції на наступних *N*-1 стадіях і максимізується вибором керувань на всіх стадіях, $u^i\left(i = 1,\ldots,N\right)$, оскільки значення $x^1$ залежить від керування $u^1$.

Вираз (2.16) являє собою рекурентне співвідношення, що характеризує послідовність функцій $f_i\left(x^{N-i}\right), i = 1,\ldots,N$, остання з яких $f_N\left(x^0\right)$ відповідає шуканому розв’язку оптимальної задачі. Стратегія рішення виражається системою обраних значень $u_i$ - коефіцієнтів рівняння (2.16), де $i = 1,\ldots,N$; система дає рішення функціонального рівняння. Оптимальна стратегія виражається системою функцій $u_i$, що максимізують праву частину рівняння (2.16), а саме: $u_1^*,...,u_N^*$ для $i=1,...,N$.

Часто важливіше знати сам характер оптимальної стратегії, ніж значення оптимізуючої функції. У ході визначення функції $f_N(x)$ одержують одночасно послідовність рішень $u_i$ або стратегію також у виді функції номера стадії *і*.

Розв'язок рекурентних рівнянь звичайно виконується чисельними методами. Часто використовується наступна послідовність розрахунку з застосуванням: спочатку знаходять $f_1(x)$, потім за знайденим значенням функції $f_1(x)$ за рівнянням (1) визначають функцію $f_2(x)$; далі послідовно визначають $f_3(x)$ із $f_2(x)$ і т.д.

Динамічне програмування виключає необхідність одночасного дослідження усіх $K_N$ розв'язків $N$ - стадійного процесу; послідовно розглядається кожна стадія окремо і для кожної стадії вибирається найкращий із *К* розв'язків. При використанні методу динамічного програмування замість $K^N$ комбінацій потрібно проаналізувати тільки *NK* комбінацій. Отже, динамічне програмування різке скорочує обсяг обчислень і полегшує розв'язування задачі.

До недоліків методу динамічного програмування варто віднести відсутність інформації про те, як виконувати оптимізацію (підбирати значення $u_N$), а також складність його застосування у випадку процесів з рециклами.

При розв'язуванні задач оптимізації методом динамічного програмування необхідно звернути увагу на наступні основні положення:

а) оптимізуючий процес повинен бути дискретно розподіленим у часі або просторі (багатостадійний процес);

б) окремі стадії процесу повинні мати відносну незалежність, тобто вектор вихідних параметрів будь-якої стадії повинний залежати тільки від вектора вхідних параметрів на цю стадію і керування на ній;

в) критерій оптимальності всього процесу повинний бути сформульований як адитивна функція критеріїв оптимальності кожної стадії.

Якщо виконуються ці умови, необхідно правильно сформулювати задачу оптимізації. При формулюванні задачі оптимізації повинні бути виявлені: 1) параметри, що характеризують стан кожної стадії; 2) керуючі параметри на кожній стадії; 3) обмеження, що накладаються на параметри стану процесу і керуючі параметри. Крім того, повинен бути складений математичний опис для кожної стадії і визначений критерій оптимальності.

*2.2.4 Градієнтні методи оптимізації*

Градієнтні методи оптимізації відносяться до чисельних методів пошукового типу. Вони універсальні, добре пристосовані для роботи із сучасною комп'ютерною технікою й у більшості випадків дуже ефективні при пошуку екстремального значення нелінійних функцій з обмеженнями і без них, а також тоді, коли аналітичний вид функції узагалі невідомий. Внаслідок цього градієнтні, чи пошукові, методи широко застосовуються на практиці.

Сутність зазначених методів полягає у визначенні значень незалежних змінних, що дають найбільші зміни цільової функції. Звичайно для цього рухаються уздовж градієнта, ортогонального до контурної поверхні в даній точці.

Різні пошукові методи в основному відрізняються один від одного способом визначення напрямку руху до оптимуму, розміром кроку і тривалістю пошуку уздовж знайденого напрямку, критеріями закінчення пошуку, простотою алгоритмізації. Техніка пошуку екстремуму базується на розрахунках, що дозволяють визначити напрямок найбільш швидкої зміни оптимізуючого критерію.

Якщо критерій заданий рівнянням

$$F = F(x_1,...,x_n) \tag{2.17}$$

то його градієнт у точці $(x_1,...,x_n)$ визначається вектором:

$$gradF = (\partial F/\partial x_1,...,\partial F/\partial x_{1n},) . \tag{2.18}$$

Частинна похідна $\partial F/\partial x_i$ пропорційна косинусу кута, утвореного вектором градієнта з $i$-ою віссю координат. При цьому

$$(\partial F/\partial x_i) \Bigg/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\partial F/\partial x_i)^2} = cos(gradFx_i). \tag{2.19}$$

Поряд з визначенням напрямку градієнтного вектора основним питанням, що вирішується при використанні градієнтних методів, є вибір кроку руху за градієнтом. Величина кроку в напрямку $grad\ F$ у значній мірі залежить від виду поверхні. Якщо крок занадто малий, будуть потрібні тривалі розрахунки; якщо занадто великий, можна проскочити оптимум. Розмір кроку $\Delta x_i$ повинний задовольняти умові, при якому всі кроки від базисної точки лежать у тому ж самому напрямку, що і градієнт у базисній точці. Розміри кроку по кожної змінній $x_i$ обчислюються із значень часткових похідних у базовій (початкової) точці:

$$\Delta x_i = K(\partial F / \partial x_i) \Bigg/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\partial F / \partial x_i)^2} \qquad (2.20)$$

де $K$ - константа, що визначає розміри кроку й однакова для всіх $i$-х напрямків. Тільки в базовій точці градієнт строго ортогональний до поверхні. Якщо ж кроки занадто великі в кожнім $i$-му напрямку, вектор з базисної точки не буде ортогональний до поверхні в новій точці.

Якщо вибір кроку був задовільним, похідна в наступній точці істотно близька до похідної в базисній точці.

Для лінійних функцій градієнтний напрямок не залежить від положення на поверхні, для якої він обчислюється. Якщо поверхня має вид

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \qquad (2.21)$$

то

$$\partial F / \partial x_1 = c_1,\ \partial F / \partial x_2 = c_2,\ \partial F / \partial x_3 = c_3$$

і компонента градієнта в і-му напрямку дорівнює

$$c_i / \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\ .$$

Для нелінійної функції напрямок градієнтного вектора залежить від точки на поверхні, у якій він обчислюється.

Незважаючи на існуючі розходження між градієнтними методами, послідовність операцій при пошуку оптимуму в більшості випадків однакова і зводиться до наступного:

а) вибирається базисна точка;

б) визначається напрямок руху від базисної точки;

в) знаходиться розмір кроку;

г) визначається наступна точка пошуку;

д)значення цільової функції в даній точці порівнюється з її значенням у попередній точці;

е) знову визначається напрямок руху і процедура повторюється до досягнення оптимального значення.

*Методи найшвидшого спуску (крутого сходження) і градієнта*

Опишемо принцип використання градієнтних методів на прикладі функції двох змінних

$$F = F(x_1 x_2) \qquad (2.22)$$

при наявності двох додаткових умов:

$$H_1(x_1, x_2) \leq 0,\ H_2(x_1, x_2) \leq 0. \qquad (2.23)$$

Цей принцип (без зміни) можна застосувати при будь-якому числі змінних, а також додаткових умов. Розглянемо площину $x_1, x_2$ (рис.1). Відповідно до формули (2.22) кожній точці відповідає деяке значення *F*. На рис.1 лінії *F=const*, що належать цій площини, представлені замкнутими кривими, що оточують точку *M*, у якій *F* мінімальне. Нехай у початковий момент значення $x_1, x_2$ відповідають точці *Mo*. Цикл розрахунку починається із серії спробних кроків. Спочатку величині $x_1$ дається невеликий приріст $\delta x_1$>0; у це час значення $x_2$ незмінне. Потім визначається отримане при цьому збільшення $\delta F_1$ величини *F*, яке можна вважати пропорційним значенню частинної похідної

$$\partial F / \partial x_1 \approx \delta F_1 / \delta x_1 = const \delta F_1. \qquad (2.24)$$

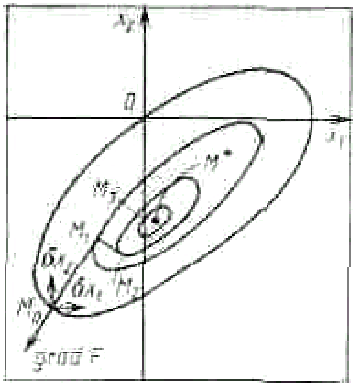


Рис. 2.1. Графічний пошук мінімуму функції методом градієнта

(якщо величина $\delta x_1$ завжди та сама). Далі дається збільшення $\delta x_2$ величині $x_2$. У цей час $x_1 = const$. Одержуване при цьому збільшення $\delta F_2$ величини *F* є мірою іншої часткової похідної

$$\partial F / \partial x_2 \approx \delta F_2 / \delta x_2 = const \delta F_2 \qquad (2.25)$$

Визначення часткових похідних таким чином означає, що знайдено вектор з координатами $\partial F / \partial x_1$ і $\partial F / \partial x_2$, який називається градієнтом величини $F$ і позначається так:

$$gradF = \{\partial F / \partial x_1, \partial F / \partial x_2\} \qquad (2.26)$$

Відомо, що напрямок цього вектора збігається з напрямком найбільш крутого зростання величини $F$. Протилежний йому напрямок - це «найшвидший спуск», іншими словами, найбільш круте спадання величини $F$.

Після знаходження складових градієнта спробні рухи припиняються і здійснюються робочі кроки в напрямку, протилежному напрямку градієнта, причому величина кроку тим більше, чим більше абсолютна величина вектора *grad F*. Ці умови здійснюються, якщо величини робочих кроків $\Delta x_1$ і $\Delta x_2$ пропорційні отриманими раніше значенням частинних похідних:

$$\Delta x_1 = -\alpha(\partial F / \partial x_1),\ \Delta x_2 = -\alpha(\partial F / \partial x_2) \qquad (2.27)$$

де $\alpha$ - позитивна константа.

Після кожного робочого кроку оцінюється збільшення $\Delta F$ величини $F$. Якщо воно виявляється негативним, то рух відбувається в правильному напрямку і потрібно рухатися в тому ж напрямку $M_o M_1$ далі. Якщо ж у точці $M_1$ результат вимірювань показує, що $\Delta F > 0$, то робочі рухи припиняються і починається нова серія спробних рухів. При цьому визначається градієнт *grad F* у новій точці $M_1$, потім робочий рух продовжується по новому знайденому напрямку найшвидшого спуску, тобто по лінії $M_1 M_2$ і т.д. Цей метод називається методом найшвидшого спуску або методом крутого сходження.

Коли система знаходиться поблизу мінімуму, показником чого є мале значення величини

$$\varepsilon = |\partial F / \partial x_1| + |\partial F / \partial x_2| \qquad (2.28)$$

відбувається переключення на більш «обережний» метод пошуку, що називається методом градієнта. Від методу найшвидшого спуска він відрізняється тим, що після визначення градієнта *grad F* робиться лише один робочий крок, а потім у новій точці знову починається серія спробних рухів. Такий метод пошуку забезпечує більш точне встановлення мінімуму в порівнянні з методом найшвидшого спуску, тим часом як останній дозволяє швидше наблизитися до мінімуму. Якщо в процесі пошуку точка $M$ доходить до границі допустимої області і хоча б одна з величин $M_1M_2$ змінює знак, метод міняється і точка $M$ починає рухатися уздовж границі області.

Ефективність методу крутого сходження залежить від вибору масштабу змінних і виду поверхні відгуку. Поверхня зі сферичними контурами забезпечує швидке стягування до оптимуму.

До недоліків методу крутого сходження варто віднести:

1. Обмеженість екстраполяції. Рухаючи уздовж градієнта, ми ґрунтуємося на екстраполяції частинних похідних цільової функції за відповідним змінним. Однак форма поверхні відгуку може змінюватися і необхідно змінювати напрямок пошуку. Іншими словами, рух на площині не може бути тривалим.

2. Труднощі пошуку глобального оптимуму. Метод застосовується для відшукання тільки локальних оптимумів.

*Метод крутого сходження при наявності обмежень*

При наявності обмежень на зміну параметрів цільової функції базисна точка вибирається так, щоб вона не суперечила обмеженням, і пошук починають за методом крутого сходження. Після розрахунку наступної точки оцінюють: чи не відбулося порушення обмежень; якщо ні, пошук продовжується. Коли яке-небудь обмеження порушене, градієнт розраховують з урахуванням обмежень.

Можна також скористатися методом, відповідно до якого при одиничному порушенні обмежень точка повертається на лінію обмежень. Коли існує більш ніж одне обмеження й у кожен момент часу порушується нове обмеження, метод вимагає, щоб точки були перенесені до нового обмеження. У цьому методі приймається, що оптимум лежить на обмеженні.

За методом Розенброка цільова функція (функція мети) видозмінюється уведенням множників. Усякий раз, коли одна із змінних порушує обмеження, множник стає рівним нулю (функція мети збільшується на нуль і тому стає рівною нулю). Якщо значення змінної знаходяться в межах допустимого режиму, множник дорівнює 1 і цільова функція приймає своє повне значення. Однак, коли значення змінної знижуються до меж, що визначаються «прикордонною зоною»» множник змінюється параболічно від 0 до 1 у межах прикордонної зони і цільова функція змінюється від 0 до свого повного значення.

## 2.3 Розв’язування задач

Задача 1. Знайти оптимум функції $y = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2$ використовуючи метод знаходження екстремуму функції двох змінних.

Розв’язок.

Для функції двох змінних $F(x_1, x_2)$ маємо:

$F'_{x_1}(x_1, x_2) = 0$ і $F'_{x_2}(x_1, x_2) = 0$; при цьому кожна пара значень дає одну точку. Для перевірки екстремуму досліджується вираз

$\Delta = F''_{x_1x1}F''_{x_2x_2} - \left(F''_{x_1x_2}\right)^2$

Якщо $\Delta > 0$, то екстремум є; якщо $\Delta < 0$, те екстремуму немає; при $F''_{x_1x_2} < 0$ є максимум, при $F''_{x_1x_2} > 0$ є мінімум.

А отже в нашому випадку матимемо:

$y_{x1}' = 2x_1 - 4x_2$, $y_{x2}' = -4x_1 + 5$.

$y_{x1x1}'' = 2$, $y_{x2x2}'' = 0$, $y_{x1x2}'' = -4$,

$\Delta = F''_{x_1x1}F''_{x_2x_2} - \left(F''_{x_1x_2}\right)^2$ =2*0-16<0 .Отже екстремум не існує

Задача 2. Визначити розміри відкритого прямокутного бака ємкістю 1000 $м^3$ при умові мінімальної поверхні дна і стінок. Об’єм бака $V = lbh$, де $l$ - довжина, $b$ - ширина, $h$ - висота.

Розв’язок.

Використаємо метод множників Лагранжа.

Цільова функція: мінімізувати площу, тобто мінімізувати функцію:

$F(l,b,h) = 2hb + lb + 2hl$.

Обмеження: $f(l,b,h) = 0$, тобто $f(l,b,h) = lbh - V$.

Допоміжна функція має вигляд:

$\varphi(l,b,h,\lambda) = F(l,b,h) + \lambda(lbh - V)$

або

$\varphi(l,b,h,\lambda) = 2hb + lb + 2hl + \lambda(lbh - V)$ .

Беремо часткові похідні по $l, b, h, \lambda$ і прирівнюємо їх до нуля. Отримаємо систему чотирьох рівнянь на чотири невідомі. В результаті отримаємо розв'язок:

$$l = 12{,}6\text{м},\ \ b = 12{,}6\text{м},\ \ h = 6{,}3\text{м}.$$

Задача 3.Розрахувати необхідне число циклів фільтрації об'єму $V_t$ при загальному мінімальному часі фільтрації. Час одного циклу фільтрації:

$$\theta = \theta_f + \theta_p + \theta_d,$$

де $\theta_f$, $\theta_p$, $\theta_d$ - час, що витрачається відповідно на фільтрацію, промивання, розвантаження та очистку фільтра.

Для фільтрації при постійному тиску час фільтрації об'єму $V_t$ складає:

$$n\theta_f = nKV_c^2,$$

де $V_c = V_t / n$ - об'єм фільтрату, що перероблюється за цикл, $n$ - число циклів, $K$ - коефіцієнт пропорційності.

Якщо об'єм промивної води пропорційний $V_c$, час промивки буде рівний:

$$n\theta_p = \beta nKV_c^2,$$

де $\beta$ - коефіцієнт пропорційності.

Час завантаження і очистки складає величину $n\theta_d$.

Таким чином, загальний час переробки фільтрату, об'єм якого рівний $V_t$ :

$$\theta_t = \left(KV_c^2 + \beta KV_c^2\right)(1/n) + \theta_d n.$$

Для розв'язування задачі оптимізації необхідно знайти число циклів $n$, при яких $\theta_t$ буде мінімальним.

Розв'язок.

Позначимо $A = KV_c^2 + \beta KV_c^2$, тоді час переробки об'єму $V_t$ буде рівний:

$$\theta_t = An^{-1} + \theta_d n.$$

Згідно методу геометричного програмування, записуємо функцію:

$$u = (A/\delta_1)^{\delta_1}(\theta_d/\delta_2)^{\delta_2}.$$

Далі записуємо умови для величин $\delta_j$:

$$\delta_1 + \delta_2 = 1, \quad (-1)\delta_1 + (+1)\delta_2 = 0.$$

Розв'язуючи цю систему відносно $\delta_1$ і $\delta_2$, отримаємо: $\delta_1 = \delta_2 = 1/2$.

Таким чином, мінімальний час фільтрації рівний:

$$\theta_{t\min} = u = (4A\theta_d)^{1/2} = 2(A\theta_d)^{1/2}.$$

Крім того, рівність $\delta_1 = \delta_2$ означає, що для досягнення мінімального часу фільтрації. Необхідно, щоб час розвантаження і очистки $\theta_d$ був рівний сумі часу фільтрації і промивки $\theta_f + \theta_p$. Число циклів $n$ розраховується із цієї умови, тобто:

$$(A\theta_d)^{1/2} = An_{опт}^{-1} = \theta_{d_{опт}} n,$$

$$n_{опт} = (A/\theta_d)^{1/2}.$$

Задача 4. Розрахувати розподіл тиску за ступенями компресора, виходячи із умов мінімуму енергії, що затрачається на стиснення газу. Повні затрати енергії на стиснення газу розраховуються за співвідношенням

$$E = \sum_{i==1}^{N} K\left[\left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right)^{\alpha} - 1\right],$$

де $K$ і $\alpha$ - додатні константи ; $P_i$ - тиск газу на вході в (*i+1*) ступінь; $P_{i-1}$ тиск газу після (*i+1*) ступеня; N – кількість ступенів.

Таблиця 1

| № вар | N | $P_o$ $(кг/см^2)$ | $P_N$ $(кг/см^2)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 300 |
| 2 | 4 | 2 | 400 |
| 3 | 5 | 1 | 250 |
| 4 | 4 | 2 | 300 |
| 5 | 6 | 3 | 500 |
| 6 | 4 | 1 | 250 |
| 7 | 3 | 2 | 250 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 6 | 2 | 300 |
| 9 | 4 | 1 | 300 |
| 0 | 5 | 3 | 450 |

Розв’язок. (Розв’язок проводимо згідно варіанту 0)

Принцип оптимальності формулюється наступним чином: оптимальна стратегія має таку властивість, що, який би не був початковий стан і початковий розв’язок, наступний розв’язок повинен прийматися, виходячи із оптимальної стратегії відносно стану, отриманого в результаті першого розв’язку.

В даній постановці задачі критерій оптимальності обраховується за формулою

$$R = E = \sum_{i=1}^{0} r_i \,, \quad \text{де } r_i = K\left[\left(P_i / P_{i-1}\right)^{\alpha} - 1\right]. \tag{2.29}$$

Тобто, $R$ є адитивна функція часткових критеріїв оптимальності, так як загальна енергія, що затрачається на стиснення, є сумою витрат на кожній стадії. Управляючі параметри співпадають з параметрами стану $P_i$ і на них накладені обмеження: $P_o \le P_i \le P_N$. оскільки константа $K$ не впливає на умову мінімуму $R$, при розв’язуванні її можна опустити, тобто перейти до нового критерію оптимальності

$$R^* = \frac{R}{K} = \sum_{i==1}^{N} K\left[\left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right)^{\alpha} - 1\right]. \tag{2.30}$$

Згідно принципу оптимальності для останньої стадії процесу записуємо:

$$f_1(P_{N-1}) = \min_{P_N \in P}\left[\left(P_N / P_{N-1}\right)^{\alpha} - 1\right], \tag{2.31}$$

де $P$ - область допустимих значень $P_i\left(P_o \le P_i \le P_N\right)$.

Оскільки тиск $P_N$ заданий, для $f_1\left(P_{N-1}\right)$ матимемо:

$$f_1(P_{N-1}) = \left(P_N / P_{N-1}\right)^{\alpha} - 1 . \tag{2.32}$$

Аналогічно далі матимемо

$$f_2(P_{N-2}) = \min_{P_{N-1} \in P}\left\{\left[\left(P_{N-1} / P_{N-2}\right)^{\alpha} - 1\right] + \left[\left(P_N / P_{N-1}\right)^{\alpha} - 1\right]\right\}. \tag{2.33}$$

Позначимо:

$$u_{N-1} = \left[\left(P_{N-1} / P_{N-2}\right)^{\alpha} - 1\right] + \left[\left(P_N / P_{N-1}\right)^{\alpha} - 1\right]. \tag{2.34}$$

Скориставшись необхідною умовою існування екстремуму функції однієї змінної, запишемо:

$$du_{N-1} / dP_{N-1} = \left(\alpha P_{N-1}^{\alpha-1} / P_{N-2}^{\alpha}\right) - \left(\alpha P_{N}^{\alpha} / P_{N-1}^{\alpha+1}\right) = 0. \tag{2.35}$$

Звідси отримаємо

$$P_{N-1(опт)} = (P_{N-2} P_N)^{1/2}. \tag{2.36}$$

Перевіряємо також достатню умову існування екстремуму, взявши другу похідну від співвідношення (2.34), та прирівнявши отриманий вираз до нуля.

Далі, підставивши в рівняння (2.33) співвідношення (2.36), отримаємо

$$f_2(P_{N-2}) = \left[\frac{(P_{N-2}P_N)^{(1/2)\alpha}}{P_{N-2}^{\alpha}} - 1\right] + \left[\frac{P_N^{\alpha}}{(P_{N-2}P_N)^{(1/2)\alpha}} - 1\right] = 2\left[\left(\frac{P_N}{P_{N-2}}\right)^{(1/2)\alpha}\right] \tag{2.37}$$

Для $f_3(P_{N-3})$ матимемо:

$$f_3(P_{N-3}) = \min_{P_{N-2}\in P}\left\{\left[(P_{N-2} / P_{N-3})^{\alpha} - 1\right] + 2\left[(P_N / P_{N-2})^{(1/2)\alpha} - 1\right]\right\}. \tag{2.38}$$

Вираз для $P_{N-2(опт)}$ знаходимо аналогічно до попереднього за необхідною умовою існування екстремуму, а також перевіряємо достатню умову існування екстремуму. Продовжуючи процес далі, отримаємо систему ( $N-1$) рівнянь з невідомими $P_{i(опт)}$, $i = \overline{N-1,1}$, в результаті розв’язання якої отримаємо шукані невідомі.

*Задача 5.* Знайти оптимум цільової функції $y$ для системи, яка характеризується параметрами $x_1$, $x_2$, а цільова функція має вигляд: $y = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 x_2$. Початкові координати пошуку: $x_{10} = 2$, $x_{20} = 2$.

Розв’язок.

Одним із градієнтних методів є метод крутого сходження. Принцип використання якого полягає в наступному.

На початку визначаємо напрямок градієнта, обчислюючи значення часткових похідних за відповідними осями: $\partial y / \partial x_1$, $\partial y / \partial x_2$. Далі знаходимо значення даних похідних в початковій точці пошуку ($x_{10}$, $x_{20}$).

Визначення часткових похідних означає, що знайдений вектор, що називається градієнтом величини $y$ $grad\ y = \{\partial y/\partial x_1, \partial y/\partial x_2\}$.

Відомо, що напрямок цього вектора співпадає з напрямком найбільш швидкого збільшення функції $y$(та навпаки). Якщо необхідно мінімізувати функцію, то необхідно зменшувати значення $x_{10}$, $x_{20}$ до досягнення мінімального значення $y$, яке визначається із співвідношення

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|_{x_1=x_{10}} : \left.\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|_{x_2=x_{20}} = y_{o(onm)}.$$

Крок зміни $\Delta x_{1i}$ та $\Delta x_{2i}$ визначатимемо наступним чином:

$$\Delta x_{1i} = \beta \left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|_{x_1=x_{10}}, \ \Delta x_{2i} = \Delta x_{1i} * y_{o(onm)},\ i=1,2,... \ .$$

де $\beta<1$ – деяке додатнє число.

Отже, $x_{1i} = x_{10} - \Delta x_{1i}$, $x_{1i} = x_{10} - \Delta x_{1i}$, $i=1,2,...$ .

На кожному кроці вираховуємо значення цільової функції. Якщо на деякому $j$- му кроці цільова функція досягла свого мінімального значення (згідно вибраного кроку) і почала зростати, то далі відповідні значення параметрів $x_{1j}$ та $x_{2j}$ приймаємо за нові початкові значення, і знову проводимо аналогічні розрахунки, зменшивши величину кроку $\Delta x_{1i}$ (та $\Delta x_{2i} = \Delta x_{1i} * y_{j(onm)}$, $i=1,2,...$ . ) та вибравши напрямок зміни параметрів $x_1$, $x_2$. Подібні розрахунки продовжуватимемо доти, доки не досягнемо оптимальних умов, або (як в даному випадку) мінімального значення.

### 2.4 Самостійна робота

Визначити розміри відкритого прямокутного бака ємкістю 800 $м^3$ при умові мінімальної поверхні дна і стінок. Об’єм бака $V = lbh$, де $l$ - довжина, $b$ - ширина, $h$ - висота.

### 2.5 Домашнє завдання

1. Визначити розмір відкритого куба ємкістю 900 $м^3$ при умові мінімальної поверхні дна. Об’єм бака $V = l_1^3$, де $l_1$ - довжина.

2. Розв’язати задачу 1 згідно варіантів таблиці 1 .

3. Розв’язати задачу 1 при наступних вихідних даних:

| *№вар* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta_f$ | 2 | 4 | 5 | 6 | 3 | 4 | 7 | 3 | 5 | 2 | 7 | 3 | 5 |
| $\theta_p$ | 3 | 4 | 7 | 3 | 5 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 4 | 5 | 6 |
| $\theta_d$ | 3 | 5 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 2 | 4 | 5 | 6 | 3 | 7 |
| $V_t$ | 16 | 15 | 14 | 12 | 13 | 16 | 14 | 13 | 11 | 10 | 7 | 15 | 9 |
| $n$ | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| $K$ | 0.3 | 0.7 | 0.5 | 0.7 | 0.2 | 0.6 | 0.4 | 0.6 | 0.7 | 0.3 | 0.6 | 0.8 | 0.4 |
| $\beta$ | 1.2 | 1.5 | 1.4 | 1.3 | 1.1 | 1.4 | 1.7 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.2 | 1.1 |

4. Знайти оптимум цільової функції $y$ для системи, яка характеризується параметрами $x_1$, $x_2$, а цільова функція має вигляд: $y = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_1 x_2$. Початкові координати пошуку: $x_{10} = 3$, $x_{20} = 4$.

## 2.6 Контрольні запитання

1. Що називається цільовою функцією?
2. Які стадії оптимізації розрізняють для автоматично керованих систем?
3. Які є методи оптимізації?
4. В чому полягає метод аналітичного пошуку екстремуму?
5. У яких випадках використовується метод множників Лагранжа?
6. Для чого застосовується метод геометричного програмування?
7. На якій теоремі базується метод геометричного програмування?
8. Що представляє собою задача методу лінійного програмування?
9. Для яких процесів застосовується метод динамічного програмування?
10. В чому полягає основна ідея методу динамічного програмування?

## Список рекомендованої літератури

1. Ладанюк А. П. Основи системного аналізу : навч. посіб. Вінниця : Нова книга, 2004. 176 с.

2. Згуровський М. З., Панкратова Н. Д. Системный анализ: проблемы, методология, приложения. К. : Наук. думка, 2005. 744 с.

3. Згуровський М. З., Панкратова Н. Д. Основи системного аналізу : підручник. Київ : BHV, 2007. 544 с.

4. Катренко А. В. Системний аналіз об'єктів та процесів комп'ютеризації : навч. посіб. Львів : Новий світ-2000, 2007. 424 с.

5. Задоров В. Б. Системний аналіз об'єктів і процесів: технологічні основи : навч. посіб. Київ : КНУБА, 2003. 276 с.

6. Лазарєв Ю. Ф. Моделювання динамічних систем у Matlab : електронний навчальний посібник. Київ : НТУУ "КПІ", 2011. 421 с.

7. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування : підручник. К.: Либідь, 2007. 656 с.

8. Горбань О. М., Бахрушин В. Є. Основи теорії систем і системного аналізу. Запоріжжя : ГУ "ЗІДМУ", 2011. 204 с.