ХІМІЯ ТА ФІЗИКА

УДК 517.956 https://doi.org/10.31713/vt1202230

Прохоренко М. В., к.ф.-м.н., доцент, Прохоренко С. В., д.т.н., професор (Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів), **Мороз М. В., д.х.н., професор** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне), **Ярема Н. П., к.т.н., доцент** (Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів)

ПРОСТІ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Досліджено процес імпульсного коливання струни з регулюючим функціоналом. Визначено умови існування періодичних розв'язків з одним імпульсом на періоді.

Ключові слова: **диференціальні рівняння; імпульсна дія; коливання зі зворотною дією.**

Вступ. Необхідність вивчення диференціальних рівнянь з імпульсною дією виникає у випадках, коли при побудові математичної моделі існуючих фізичних, технічних, біологічних та ін. процесів із швидкозмінними збуреннями можна знехтувати тривалістю самого збурення. Такі задачі можна знайти в роботах [1–5]. Одержані для імпульсних систем результати підсумовано у монографії [6]. Зазначена робота є продовженням досліджень, розпочатих у [7].

Постановка задачі. Розглянемо рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\nu u_t - bu \quad \left(0 \le x \le l, 0 \le t < \infty\right), \tag{1}$$

з початковими та граничними умовами

$$u\left(x,0\right) = \varphi_0\left(x\right), \quad u_t\left(x,0\right) = \psi_0\left(x\right) \quad \left(0 \le x \le l\right), \tag{2}$$

$$u_x\left(0,t\right) - hu\left(0,t\right) = 0, \quad u_x\left(l,t\right) + hu\left(l,t\right) = 0 \quad \left(0 \le t < \infty\right), \tag{3}$$

де функція $u\left(x,t\right)$ – зміщення струни в момент часу t; $a,b,c,\nu,l,h = const > 0$, $\varphi_0 \in C^2\left[0,l\right]$, має кусково-неперервну на $\left[0,l\right]$ похідну третього порядку та задовольняє умовам

$\varphi_0(0)=\varphi_0(l)=0,\ \varphi_0''(0)=\varphi_0''(l)=0$; функція $\psi_0 \in C^1[0,l]$, має кусково-неперервну на $[0,l]$ похідну другого порядку та задовольняє умовам $\psi_0(0)=\psi_0(l)=0$. Для узгодженості початкових та граничних умов вимагаємо $\varphi_0'(0)=\varphi_0'(l)=0$.

Закон імпульсної дії визначимо співвідношенням

$$\begin{gathered}\left.\left(u(x,t+0)-u(x,t-0)\right)\right|_{E_u(t)=E_0}=\alpha(x),\\ \left.\left(u_t(x,t+0)-u_t(x,t-0)\right)\right|_{E_u(t)=E_0}=\beta(x)\quad (0\le x\le l),\end{gathered} \tag{4}$$

де регулюючий функціонал $E_u(t)$ визначає повну енергію коливання струни, що визначається рівністю [8]:

$$E_u(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left((au_x)^2+(u_t)^2\right)dx+\frac{a^2h}{2}\left(u^2(0,t)+u^2(l,t)\right), \tag{5}$$

критичне значення $E_0>0$, $\alpha\in C^2[0,l],\beta\in C^1[0,l]$ – задані функції, для яких $\alpha|_{x=0,l}=\beta|_{x=0,l}=0$, $\alpha'|_{x=0,l}=0$, $\alpha''|_{x=0,l}=0$, третя похідна функції α та друга похідна функції β є кусково-неперервні на $[0,l]$.

Отже, постановка задачі складається зі співвідношень (1)–(4) причому рівності (1)–(3) справджуються тільки у випадку $E_u(t)\ne E_0$. Якщо $E_u(0)=E_0$, то в умові (4) розглядаємо $\varphi_0(x)$ замість $u(x,t-0)$, а $\psi_0(x)$ замість $u_t(x,t-0)$ та 0 замість $t-0$.

Моменти часу $t_k, k\in\mathbb{N}$, коли регулюючий функціонал $E_u(t_k)=E_0$, визначають моменти імпульсної дії.

Для забезпечення існування нескінченної послідовності імпульсів задачі (1)–(4) при заданих E_0,α,β, як було показано в [7], вимагаємо виконання нерівності

$$E_0<\frac{1}{8}\int_0^l\left(a^2\alpha_x^2(x)+\beta^2(x)\right)dx. \tag{6}$$

Розв'язком задачі (1)–(4) є функція $u=u(x,t)$, яка двічі неперервно диференційована за змінними x,t в кожній області

$D_k = \{(x,t) | x \in [0,l], t \in (t_k, t_{k+1}), E_u(t) \neq E_0, t_0 = 0\}$, $k = 0,1,2,\ldots$, крім того, функція u та її похідна u_t неперервні зліва в точках $t = t_k, k \in \mathbb{N}$.

Розв'язок задачі (1)–(4) існує, єдиний та визначений в області $D = \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k$ як розв'язок задачі (1), (3) для рівняння коливань струни в кожній області $D_k = \{(x,t) | x \in [0,l], t \in (t_k, t_{k+1}), E_u(t) \neq E_0, t_0 = 0\}$, $k = 0,1,2,\ldots$ з початковими умовами (2) для $k = 0$ та початковою умовою

$$\varphi_k(x) = u(x,t_k) + \alpha(x), \psi_k(x) = u_t(x,t_k) + \beta(x), x \in [0,l],$$

для $k = 1,2,\ldots$.

Прості періодичні розв'язки

Зафіксуємо значення E_0, функції α, β та з'ясуємо існування простих періодичних розв'язків [1] задачі (1)–(4), для яких імпульсна дія здійснюється один раз за період T, тобто з'ясуємо якими мають бути функції φ_0, ψ_0, щоб розв'язок задачі (1)–(4) був простим періодичним.

Теорема. *Якщо задані функції* α, β *та значення* E_0 *задовольняють нерівність* $\int_0^l \left(a^2 \alpha_x^2(x) + \beta^2(x)\right) dx > 8E_0$, *то задача* (1)–(4) *має простий періодичний розв'язок.*

Доведення. Розв'язок задачі (1)–(4), з фіксованими функціями α, β та E_0 буде простим T-періодичним з імпульсом при $t = 0$, якщо будуть виконуватися одночасно рівності:

$$R_{0n}(T) + \alpha = \varphi_{0n}, \; S_{0n}(T) + \alpha = \psi_{0n}, \tag{7}$$

де

$$R_{0n}(t) = \begin{cases} e^{-\nu t}\left(\varphi_{0n} + \psi_{0n} t\right), & \textit{при} \quad \nu^2 = (a\lambda_n)^2 + b, \\ e^{-\nu t}\left(\varphi_{0n} \operatorname{ch}\omega_n t + \psi_{0n} \operatorname{sh}\omega_n t\right), & \textit{при} \quad \nu^2 > (a\lambda_n)^2 + b, \\ e^{-\nu t}\left(\varphi_{0n} \cos\omega_n t + \psi_{0n} \sin\omega_n t\right), & \textit{при} \quad \nu^2 < (a\lambda_n)^2 + b, \end{cases}$$

$$S_{0n}(t)=\begin{cases} e^{-\nu t}\left(\psi_{0n}-\nu\varphi_{0n}-\nu\psi_{0n}t\right), & при \quad \nu^2=\left(a\lambda_n\right)^2+b, \\ e^{-\nu t}\left(\left(\omega_n\psi_{0n}-\nu\varphi_{0n}\right)\mathrm{ch}\,\omega_n t- \right. & \\ \left. -\left(\nu\psi_{0n}-\omega_n\varphi_{0n}\right)\mathrm{sh}\,\omega_n t\right), & при \quad \nu^2>\left(a\lambda_n\right)^2+b, \\ e^{-\nu t}\left(\left(\omega_n\psi_{0n}-\nu\varphi_{0n}\right)\cos\omega_n t- \right. & \\ \left. -\left(\nu\psi_{0n}-\omega_n\varphi_{0n}\right)\sin\omega_n t\right), & при \quad \nu^2<\left(a\lambda_n\right)^2+b, \end{cases}$$

$$\omega_n=\begin{cases} \sqrt{\nu^2-\left(a\lambda_n\right)^2-b}, & при \quad \nu^2>\left(a\lambda_n\right)^2+b, \\ \sqrt{\left(a\lambda_n\right)^2+b-\nu^2}, & при \quad \nu^2<\left(a\lambda_n\right)^2+b, \end{cases}$$

де λ_n – власні значення та $X_n(x)=\sin(\lambda_n x+\theta_n)$ – власні функції задачі: $X''(x)+\lambda^2 X(x)=0$, $X'(0)-hX(0)=0$, $X'(l)+hX(l)=0$, $X_n(x)$ утворюють ортогональну систему функцій на $[0,l]$, λ_n – додатні корені рівняння $\mathrm{tg}\lambda l=\frac{2\lambda h}{\lambda^2-h^2}$, $\lambda_n=O(\pi n)$ при $n\to+\infty$, $\theta_n=\mathrm{arctg}\frac{\lambda_n}{h}$.

Підставивши розв'язки φ_{0n},ψ_{0n} системи (7) у розв'язок задачі (1)–(4)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}R_{0n}(t)\sin(\lambda_n x+\theta_n),$$

одержимо вигляд простого періодичного розв'язку

$$u^*(x,t)=e^{-\nu t}\sum_{n=1}^{\infty}R_n^*(t)D_n^{-1}\sin(\lambda_n x+\theta_n),$$

де $0\le x\le l, 0\le t<T$,

$$R_n^*(t)=\begin{cases}\begin{gathered}\Big(\alpha_n\left(e^{\nu T}-1\right)+T\left(\nu\alpha_n+\beta_n\right)+\\ +t\Big(\beta_n\left(e^{\nu T}-1\right)-\nu\alpha_n\Big)\Big),\end{gathered} & \textit{при}\quad \nu^2=\left(a\lambda_n\right)^2+b,\\ \begin{gathered}\Big(\mathrm{ch}\,\omega_n t\Big(\left(\alpha_n\nu+\beta_n\right)\mathrm{sh}\,\omega_n T-\alpha_n\omega_n\,\mathrm{ch}\,\omega_n T+\\ +\alpha_n e^{\nu T}\Big)+\mathrm{sh}\,\omega_n t\Big(\beta_n e^{\nu T}-\alpha_n\omega_n\,\mathrm{sh}\,\omega_n T-\\ -\left(\alpha_n\nu+\beta_n\right)\mathrm{ch}\,\omega_n T\Big)\Big),\end{gathered} & \textit{при}\quad \nu^2>\left(a\lambda_n\right)^2+b,\\ \begin{gathered}\Big(\cos\omega_n t\Big(\left(\alpha_n\nu+\beta_n\right)\sin\omega_n T-\alpha_n\omega_n\cos\omega_n T+\\ +\alpha_n e^{\nu T}\Big)+\sin\omega_n t\Big(\beta_n e^{\nu T}-\alpha_n\omega_n\sin\omega_n T-\\ -\left(\alpha_n\nu+\beta_n\right)\cos\omega_n T\Big)\Big),\end{gathered} & \textit{при}\quad \nu^2<\left(a\lambda_n\right)^2+b.\end{cases}$$

$$D_n=\begin{cases}e^{\nu T}+e^{-\nu T}+\nu T-2, & \textit{при}\quad \nu^2=\left(a\lambda_n\right)^2+b,\\ e^{\nu T}+\nu\,\mathrm{sh}\,\omega_n T-\left(\omega_n+1\right)\mathrm{ch}\,\omega_n T+\omega_n e^{-\nu T}, & \textit{при}\quad \nu^2>\left(a\lambda_n\right)^2+b,\\ e^{\nu T}+\nu\sin\omega_n T-\left(\omega_n+1\right)\cos\omega_n T+\omega_n e^{-\nu T}, & \textit{при}\quad \nu^2<\left(a\lambda_n\right)^2+b,\end{cases}$$

Рівняння для знаходження періоду T має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(R_n^{*2}(T)\Big(\lambda_n\sin(\lambda_n l)\cos(\lambda_n l+2\theta_n)+h\Big(\sin^2(\lambda_n l+\theta_n)+\sin^2\theta_n\Big)+\\ +\lambda_n^2 l\Big)+S_n^{*2}(T)\frac{\lambda_n l-\sin(\lambda_n l)\cos(\lambda_n l+2\theta_n)}{\lambda_n}\Big)=4E_0e^{2\nu T},\tag{8}$$

де

$$R_n^*(T)=\begin{cases}\left(\left(\alpha_n+T\beta_n\right)e^{\nu T}-\alpha_n\right)D_n^{-1}, & \textit{при}\quad \nu^2=\left(a\lambda_n\right)^2+b,\\ \left(\left(\alpha_n\,\mathrm{ch}\,\omega_n T+\beta_n\,\mathrm{sh}\,\omega_n T\right)e^{\nu T}-\alpha_n\omega_n\right)D_n^{-1}, & \textit{при}\quad \nu^2>\left(a\lambda_n\right)^2+b,\\ \left(\left(\alpha_n\cos\omega_n T+\beta_n\sin\omega_n T\right)e^{\nu T}-\alpha_n\omega_n\right)D_n^{-1}, & \textit{при}\quad \nu^2<\left(a\lambda_n\right)^2+b,\end{cases}$$

$$S_n^*(T)=\begin{cases} \left(\left(\beta_n-\nu\alpha_n+\nu\beta_n T\right)e^{\nu T}+\alpha_n\left(\nu-1\right)-\beta_n\right)D_n^{-1}, & \nu^2=\left(a\lambda_n\right)^2+b, \\ \left(\omega_n\alpha_n\left(\nu\mathrm{ch}2\omega_n T-\omega_n\mathrm{sh}2\omega_n T\right)+\right. \\ +\left(\left(\omega_n-\nu\alpha_n\right)\mathrm{ch}\omega_n T+\left(\omega_n-\nu\alpha_n\right)\mathrm{sh}\omega_n T\right)e^{\nu T}- & \nu^2>\left(a\lambda_n\right)^2+b, \\ \left.-\omega_n\left(\nu\alpha_n+\beta_n\right)\right)D_n^{-1}, \\ \left(e^{\nu T}\left(\omega_n\beta_n-\nu\alpha_n\right)\cos\omega_n T-\omega_n\beta_n+\right. & \nu^2<\left(a\lambda_n\right)^2+b. \\ \left.-\left(\omega_n\alpha_n+\nu\beta_n\right)\sin\omega_n T\right)D_n^{-1}, \end{cases}$$

Існування розв'язків рівняння (8) для $T\in\left(0;+\infty\right)$ еквівалентне відшуканню нулів функції

$$f\left(t\right)=e^{-2\nu T}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(R_n^{*2}\left(T\right)\Bigl(\lambda_n\sin\left(\lambda_n l\right)\cos\left(\lambda_n l+2\theta_n\right)+\lambda_n^2 l+$$
$$+h\Bigl(\sin^2\left(\lambda_n l+\theta_n\right)+\sin^2\theta_n\Bigr)\Bigr)+$$
$$+S_n^{*2}\left(t\right)\frac{\lambda_n l-\sin\left(\lambda_n l\right)\cos\left(\lambda_n l+2\theta_n\right)}{\lambda_n}\Bigr)-4E_0,\, T\in\left(0;+\infty\right).$$

Мають місце границі $\lim\limits_{T\to+0}f\left(T\right)=4\left(E_u\left(+0\right)-E_0\right)>0$ (оскільки $E_0<E_u\left(+0\right)$ при виконанні співвідношення (6)) та $\lim\limits_{T\to+\infty}f\left(T\right)=-4E_0<0$. Звідси функція на проміжку за теоремою Больцано-Коші [9, С. 168] має принаймні один нуль. Таким чином, для заданих функцій α,β та значення E_0 існує простий T-періодичний розв'язок задачі (1)–(4).

1. Мышкис А. Д. Процесс теплопроводности с авторегулируемой импульсной поддержкой. *Автоматика и телемеханика*. 1995. № 2. С. 35–43. **2.** Myshkis A. D. Vibrations of the string with energy dissipation and impulsive feedback support. *Nonlin. Anal., Theory, Meth Appl*. 1996. Vol. 26, № 7. P. 1271–1278. **3.** Мышкис А. Д. Автоколебания струны с импульсной обратной связью. *Дифференц. уравнения*. 1998. 34, № 12. С. 1640–1644. **4.** Самойленко В. Г., Хомченко Л. В. Крайова задача Неймана для сингулярно збуреного рівняння теплопровідності з імпульсною дією. *Нелінійні коливання*. 2005. № 1. Т. 8. С. 89–123. **5.** Елгондиев К. К., Хасанов М. Колебания струны с импульсным воздействием. *Крайові задачі для диф. р-нь* : зб. наук. пр. Чернівці : Прут, 2006. Вип. 13. С. 96–102. **6.** Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive differential equations. *Singapore: World Scientific*. 1995. Vol. 14. 462 p. **7.** Прохоренко М. В., Прохоренко С. В., Мороз М. В., Соляк Л. В. Задача з імпульсною дією для одного рівняння коливань струни. *Вісник НУВГП. Сер. Технічні науки*. 2019. Вип. 3(87). С. 119–127. **8.** Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Наука. 1966. 724 с. **9.** Фихтенгольц Г. М. Курс диффенциального и интегрального исчисления : в 3-х т. М. : Наука. 1970. Т. 1. 608 с.

REFERENCES:

1. Myishkis A. D. Protsess teploprovodnosti s avtoreguliruemoy impulsnoy podderjkoy. *Avtomatika i telemehanika*. 1995. № 2. S. 35–43. **2.** Myshkis A. D. Vibrations of the string with energy dissipation and impulsive feedback support. *Nonlin. Anal., Theory, Meth Appl*. 1996. Vol. 26, № 7. P. 1271–1278. **3.** Myishkis A. D. Avtokolebaniya strunyi s impulsnoy obratnoy svyazyu. *Differents. uravneniya*. 1998. 34, № 12. S. 1640–1644. **4.** Samoilenko V. H., Khomchenko L. V. Kraiova zadacha Neimana dlia synhuliarno zburenoho rivniannia teploprovidnosti z impulsnoiu diieiu. *Neliniini kolyvannia*. 2005. № 1. T. 8. S. 89–123. **5.** Elgondiev K. K., Hasanov M. Kolebaniya strunyi s impulsnyim vozdeystviem. *Kraiovi zadachi dlia dyf. r-n* : zb. nauk. pr. Chernivtsi : Prut, 2006. Vyp. 13. S. 96–102. **6.** Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive differential equations. *Singapore: World Scientific*. 1995. Vol. 14. 462 p. **7.** Prokhorenko M. V., Prokhorenko S. V., Moroz M. V., Soliak L. V. Zadacha z impulsnoiu diieiu dlia odnoho rivniannia kolyvan struny. *Visnyk NUVHP. Ser. Tekhnichni nauky*. 2019. Vyp. 3(87). S. 119–127. **8.** Tihonov A. N., Samarskiy A. A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. : Nauka. 1966. 724 s. **9.** Fihtengolts G. M. Kurs diffentsialnogo i integralnogo ischisleniya : v 3-h t. M. : Nauka. 1970. T. 1. 608 s.

Prokhorenko M. V., Candidate of Physico-Mathematical Sciences (Ph.D.), Associate Professor, Prokhorenko S. V., Doctor of Engineering, Professor (Lviv Polytechnic National University, Lviv), **Moroz M. V.**, **Doctor of Chemical Sciences, Professor** (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne), **Yarema N. P., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor** (Lviv Polytechnic National University, Lviv)

SIMPLE PERIODIC SOLUTIONS ONE EQUATIONS OF STRING OSCILLATION WITH IMPULSE INFLUENCE

The necessity of study of differential equations with an impulsive action arises in cases where the construction of a mathematical model of existing physical, technical, biological, ets. processes with rapidly changing perturbations can be neglected by the duration of the perturbation duration. This work is a continuation of the started research published in [Pulse action problem for one string oscillation equation. Prokhorenko MV, Prokhorenko SV, Moroz MV, Solyak LV – Bulletin of NUWEE. 2019. Is. 3(87). P. 119–127.]. The process of impulsive vibration of a string with a control functional is studied. Let's look at the equation

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\nu u_t - bu \quad \left(0 \le x \le l, 0 \le t < \infty\right), \tag{1}$$

with initial and boundary conditions

$$u\left(x,0\right) = \varphi_0\left(x\right), \quad u_t\left(x,0\right) = \psi_0\left(x\right) \quad \left(0 \le x \le l\right) \tag{2}$$

$$u_x\left(0,t\right) - hu\left(0,t\right) = 0, \quad u_x\left(l,t\right) + hu\left(l,t\right) = 0 \quad \left(0 \le t < \infty\right), \tag{3}$$

where the function $u\left(x,t\right)$ – string snake at the moment of the hour t; $a,b,c,\nu,l,h = const > 0$, $\varphi_0 \in C^2\left[0,l\right]$, has a lumpy-continuous on $\left[0,l\right]$ derivative of the third order and satisfies the conditions of the rules $\varphi_0\left(0\right) = \varphi_0\left(l\right) = 0, \quad \varphi_0''\left(0\right) = \varphi_0''\left(l\right) = 0$; function $\psi_0 \in C^1\left[0,l\right]$, has a lumpy-continuous on $\left[0,l\right]$ derivative of the second order and satisfies the conditions of the $\psi_0\left(0\right) = \psi_0\left(l\right) = 0$. For consistency of initial and boundary conditions, we require $\varphi_0'\left(0\right) = \varphi_0'\left(l\right) = 0$.

The law of impulse action is determined by the ratio

$$\left(u(x,t+0)-u(x,t-0)\right)\Big|_{E_u(t)=E_0}=\alpha(x),$$
$$\left(u_t(x,t+0)-u_t(x,t-0)\right)\Big|_{E_u(t)=E_0}=\beta(x)\quad(0\le x\le l),\qquad\textbf{(4)}$$

where regulatory functional $E_u(t)$ determines the total energy of the string oscillation, which is determined by equality:

$$E_u(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left((au_x)^2+(u_t)^2\right)dx+\frac{a^2h}{2}\left(u^2(0,t)+u^2(l,t)\right),\qquad\textbf{(5)}$$

critical value $E_0>0$, $\alpha\in C^2[0,l],\beta\in C^1[0,l]$ – specified functions for which $\alpha\big|_{x=0,l}=\beta\big|_{x=0,l}=0$, $\alpha'\big|_{x=0,l}=0$, $\alpha''\big|_{x=0,l}=0$, third derivative of the function is α and the second derivative of the function β are lumpy-continuous on $[0,l]$.

Conditions for the existence of periodic solutions with one momentum per period are determined. There are boundaries $\lim\limits_{T\to+0}f(T)=4\left(E_u(+0)-E_0\right)>0$ (because $E_0<E_u(+0)$ and $\lim\limits_{T\to+\infty}f(T)=-4E_0<0$). Hence, the function at the interval according to the Bolzano-Cauchy theorem has at least one zero. Thus, for the specified functions of functions α,β and meaning E_0 there is a simple T – periodic solution of the problem (1)–(4). It is shown that for given functions of alpha functions and values of the regulating functional at 0 – there is a simple periodic solution of the problem, the law of impulse action describing the implementation.

Keywords: **differential equations; impulsive action; feedback oscillations.**