Г. Й. СУХОМЕЛ

ҐІДРАВЛІКА

ДЕРЖСІЛЬГОСПВИДАВ

ВАЖЛИВІШІ ПОМІЧЕНІ ПОМИЛКИ В КНИЖЦІ: Г. Й. СУХОМЕЛ— ГІДРАВЛІКА.

Стор.	Рядок	Надруковано	Треба
25	8 знизу	z_0	$z_0 = H$
25	5 знизу	p	P
32	17 зверху	P	P_e
35	15 зверху	Q	Q_1
52	4 знизу	$\frac{h\gamma}{2g}$	$\frac{h\gamma}{\gamma}$
57	10 знизу	≈ 2000	$\mathrm{Const} \approx 2000$
85	10 знизу	$Q = Q_c + Q$	$Q = Q_c + Q_d$
86	5 знизу	O_1	Q_1
119	6 зверху	Q	a
135	11 знизу	$= I_0 \frac{t^3 - t_0^3}{t_0^3}$	$= I_0 \frac{t^3 - t_0^3}{t^3}$
166	14 зверху	$F_1 t_{1c} - F_2 t_2$	$F_1 t_{1c} - F_2 t_{2c}$
166	17 зверху	$\frac{Q}{F_1 g} + F_1 t_{2c}$	$\frac{Q}{F_1 g} + F_1 t_{1c}$
182	9 зверху	$v_1 = v \frac{F}{F_2}$	$v_1 = v \frac{F}{F_1}$
215	11 зверху	$H \neq H$	$H \neq H_c$
217	16 зверху	$H + p_f = H + p$	$H_f + p_f = H + p$
234	5 знизу	$\frac{Q}{F}$	$\frac{Q}{F} = v$
249	8 знизу	$\left[\frac{\nu v^2}{L}\right]$	$\left[\frac{\nu v}{L^2}\right]$
249	6 знизу	$\left[\frac{\nu v^2}{L^2}\right]$	$\left[\frac{\nu v}{L^2}\right]$

На рис. 43 коло літ. B треба замість цифри I поставити II.
На рис. 164 треба поставити в посуді B на дзеркалі рідини літ F_1.
Рис. 117 та 120 трохи повернути за годинниковою стрілкою.

Г. Й. СУХОМЕЛ
ПРОФЕСОР КИЇВСЬКОГО ІНЖЕНЕРНО-МЕЛІОРАТИВНОГО ІНСТИТУТУ

ГІДРАВЛІКА

МЕТОДСЕКТОР НКО ДОЗВОЛИВ ДО ВЖИТКУ ЯК ПІДРУЧНИК ДЛЯ ІНЖЕНЕРНО-МЕЛІОРАТИВНИХ ІНСТИТУТІВ

ДЕРЖСІЛЬГОСПВИДАВ
ХАРКІВ 1933 КИЇВ

ШОСТА
ДРУКАРНЯ
КИЇВ
ДВОУ
УПП

Редактор групи *В. Захарченко*
Редактори { *Овчінніков*, *Білоус*
Літредактор *Бутенко*
Техоформлення *Немченко*
Техкер *Вошкулат*
Коректор *Іваниця-Білан*

Здано в роботу 9.I — 33 р.
Підписано до друку 31.III — 33 р.

Головліт № 5520 (2378) Зам. № 39. $17^1/_2$ арк. Тир. 3000

ПЕРЕДМОВА

Дореволюційна Росія була одна з найвідсталіших капіталістичних країн щодо використання своїх енерґетичних, а надто гідравлічних ресурсів.

СРСР уже третього року п'ятирічки виверш ав плян ГОЕЛРО, збудувавши такі гідротехнічні велетні, як Дніпрельстан, гідроелектровні Волховську, Свірську, Ріонську та багато менших гідроустав.

Не меншого маштабу набуло будівництво гідротехнічних споруд для використання водних ресурсів у сільському господарстві та промисловості. Велетенські ириґаційні системи Середньої Азії, Північного Кавказу, Надволжжя, іриґація південних українських степів поставили гідротехніку та гідроенерґетику на службу соціялістичному господарству.

XVII партійна конференція затвердила завдання на другу п'ятирічку щодо розвитку електрифікації і визначила видобуток електроенерґії до 100 мільярдів кіловат годин 1937 року проти 17 мільярдів кіловат годин 1932 року; крім того, вона поставила питання про використання водної енерґії, як найважливішого чинника в створенні новішої енерґетичної бази.

> „Найважливіший елемент технічної реконструкції народнього господарства — це утворення найновішої енерґетичної бази, що ґрунтується на найширшій електрифікації промисловости і транспорту та поступовому запровадженні електроенерґії в сільське господарство з використанням величезних ресурсів водної енерґії“... (з резолюції XVII партконференції про другу п'ятирічку).

Використання водної енерґії є один з найважливіших елементів пляну електрифікації другої п'ятирічки; воно набуває виключного народньо-господарського значення ще й через те, що гідроустави, як правило, розв'язують комплексні проблеми для цілих районів (електрифікація, судноплавство, зрошення тощо). Чудовий приклад цьому є будівництво великої Волги, що розв'язує поряд енерґоозброєности також проблему створення сталої 300-мільйонової пшеничної бази та питання судноплавства.

Постанова ЦК ВКП(б) і Раднаркому СРСР про будівництво гідростанції на Волзі є конкретний захід до виконання рішень XVII партконференції; ця проблема, а також проблеми другої черги Дніпра, Волго-Дону, Анґари тощо поставили перед нами завдання забезпечити більшовицьку організацію цих будівництв, тобто підготувати потрібну кількість висококваліфікованих технічних кадрів — фахівців-гідротехніків, що могли б на підставі найновіших досягнень науки й техніки, знаючи специфічні умови нашого господарства, створити найважливіший елемент технічної реконструкції народнього господарства — найновішу соціялістичну гідротехнічну базу.

„Підготування кадрів, що кількісно і якісно відповідали б величезному розгортанню соціялістичної промисловости, є неодмінна умова успішного виконання пляну... Підготовити технічно-культурні широкі маси робітничої кляси і підготовити інженерів-фахівців, що справді могли б бути за відповідальних керівників справи, яку ведеться на основі найновішої техніки,—таке є завдання“ (з резолюції на доповідь тов. *Орджонікідзе* на XVII партконференції).

Гідротехнічні ВТУЗ'и висувають нові вимоги до підручної літератури. Тому підручника з певної дисципліни треба складати за програмами певного фаху чи близько споріднених фахів, з умовою, звичайно, що ці програми цілком підпорядковано вимогам соціялістичного будівництва. Цього підручника гідравліки складено для студентів інженерно-меліоративних інститутів, і автор добирав матеріял відповідно до потреб тих галузей гідротехніки, що їх вивчають у цих інститутах: гідротехнічні меліорації (висушування боліт, зрошення, заліснення ярів), обводнення (греблі з відповідними спорудами, водопостачання, переважно сільсько-господарське, реґулювання річок). Дещо менше він зважав на потреби інших галузей гідротехніки, що є допоміжні в інженерно-меліоративних інститутах, хоч і щільно пов'язані з основними фахами їх.

Але, висвітлюючи практичний бік, треба водночас дати й досить глибоке, можливе при сучасному стані гідравліки, теоретичне обґрунтовання її положень, бо тільки це допоможе правильно зрозуміти їх, дасть змогу критично поставитися до розв'язання практичних завдань і уникнути вузького техніцизму в опрацьованні цих завдань.

Далі автор великої ваги надає тому, щоб поруч і разом з математичним опрацьованням гідравлічних явищ з'ясувати й фізичний зміст їх, допомогти студентам якнайконкретніше зрозуміти цей зміст і застосування гідравліки до практичних завдань. Інакше бо викладання наук, що широко користуються з математичних способів дослідження, стає на шлях формалізму й схоластики, тобто теорія відривається від соціялістичної практики, а тоді, звичайно, годі й думати про те, щоб дати фахівця вищої якости, організатора-будівника, що повинен працювати, „якнайкраще знаючи специфічні умови нашого господарства“, „революціонізувати існуючий світ, практично протистати наявним речам та змінити їх“.

З наведеного бачимо, що в процесі вивчання гідравліки чимало важить і гідравлічна ляборатор́ія.

Щоб студенти могли зосередити свою увагу на основних твердженнях, фактах і теоремах гідравліки, автор намагається обмежити кількість суто емпіричного матеріялу і подає тільки все найпотрібніше; емпіричні формули краще подавати в гідравлічних довідниках або навіть у відповідних гідротехнічних дисциплінах — саме там, де в них є потреба.

Соціялістичне будівництво повинно базуватися на новіших досягненнях науки й техніки; в цьому курсі є досить багато нових висновків і досягнень, що їх має гідравліка у нас і за кордоном. Алеж у книжці поруч з новішими формулами та розв'язаннями деяких питань подано й відповідні старі, наприклад: *Базенову* та *Ганґільє-Куттерову* формули для коефіцієнта *Шезі* подано поруч з новішими формулами проф. *Павловського* та *Форхгаймера*, способи *Бресів* та *Толькмітів* побудови поверхні води при нерівномірному русі — поруч із способом проф. *Бахметєва* тощо. Це довелося зробити цілком свідомо, бо в закордонній і нашій гідротехнічній літературі ці старі формули та способи покищо застосовують коли б не ширше за нові; звичайно, в книжці пояснено про переваги новіших формул і способів.

Треба зауважити, що в гідравлічних обчисленнях різних гідротехнічних споруд мабуть що найважче пов'язувати явища, які відбуваються вздовж водотоки в самих спорудах, перед і за ними. Розглядаючи гідравлічні явища в спорудах, не пов'язували їх із рухом води перед і за спорудами; це призводило та й досі ще призводить до багатьох помилок. Автор щосили намагався цю хибу виправити, висвітлюючи, наскільки це можна зараз, і підкреслюючи зв'язок та взаємовплив явищ вздовж водотоки, як от: розглядаючи рух води через переливи та інші споруди, пов'язував це з нерівномірним рухом води у відкритих водотоках тощо; деякі питання розв'язав інакше, ніж це робили досі, — переважно в напрямі узагальнення та уточнення висновків: рух води через перелив із широким порогом, визначення місця стрибка, коли перед і за ним маємо нерівномірний рух, розгляд руху через гідротехнічні споруди тощо.

Взагалі, як відомо, в гідравліці назбиралася сила-силенна емпіричних матеріялів, різноманітних досліджень окремих явищ, що потребують узагальнення, науково-теоретичного опрацювання. Все це можна здійснити і тільки тоді, як свідомо застосувати матеріялістичну діялектику до згаданих сирих матеріялів гідравліки.

Щоб краще засвоїти курс і щільніше пов'язати теорію гідравліки з практикою гідротехнічних обчислень, до відповідних параграфів додано досить багато практичних завдань, при чому майже всі їх теми взято із згаданих уже галузей гідротехніки. Але, крім цих завдань, що більшість їх тут і розв'язано, студентам треба опрацювати ще якусь певну кількість їх. Теми для них найкраще брати з відповідних проєктів, особливо при умові реального проєктування. Студентам, розв'язуючи завдання, треба звикати користуватися з номограм і таблиць, що часто набагато скорочують час, потрібний на обчислення, і таким способом значно підвищують темпи роботи проєктних організацій. Тому до книжки додано 16 таблиць і 3 графіки; цього досить, щоб студенти могли навчитися користуватися з номограм і таблиць (повний комплект таблиць і номограм краще подавати в гідравлічному довіднику).

Щодо економічних обчислень труб і каналів, а також водопровідних мереж, то ґрунтовно опрацювати ці питання можна тільки тоді, як пов'язати їх із вивченням водопостачання в цілому чи відповідних гідротехнічних дисциплін; ось чому ці питання висвітлено тільки так, щоб показати, що, обчислюючи споруди, гідравлічні обчислення конче треба щільно пов'язати з економічними.

Поруч із питаннями гідравліки, що безпосередньо стосуються до тої чи тої галузі гідротехніки, в книжці водночас порушено кілька питань, які стосуються військової справи, фізкультури тощо, як от: плавання людини (статичне), принцип роботи гарматного компресора, сферична форма землі тощо. Крім курсу гідравліки, що його викладено в цій книжці, в плянах інженерно-меліоративних та інших гідротехнічних ВТУЗ'ів є ще й спеціяльна гідравліка, але якихось визначених границь ця дисципліна не має та й взагалі є сумнів, чи їх можна встановити. Тому наперед треба визнати, що в цьому курсі розглянуто і такі питання, які часто вивчають у курсах спеціяльної гідравліки.

Підготовити до друку цю книжку мені допоміг викладач гідравліки в Київському інженерно-меліоративному інституті *І. В. Журавель*; він склав більше половини завдань, подав до них розв'язання, підготовив числові таблиці та рисунки, додав багато доповнень і зауважень до тексту і написав частину § 37 про перепади та витікання з-під щита.

Дякую щиро кwęкторові А. І. Іваниці-Білан за її надзвичайно сумлінну роботу над цією книжкою.

СПИСОК КНИЖОК,

що з них користувався автор, складаючи цього підручника (крім згаданих у тексті)

1. *Астров А. Н.* — Гидравлика. Москва, 1911.
2. *Бахметьев Б. А* — Гидравлика. Ч. 1 и 2. Петроград, 1913.
3. „ — О равномерном движении жидкостей в каналах и трубах. Ленинград, 1931.
4. *Есьман И. Г.* — Гидравлика. Тифлис, 1930.
5. *Журин В. Д.* — Елементарная практическая гидравлика. Ташкент, 1928.
6. *Павловский Н. Н.* — Гидравлика. Ч. 1. Ленинград, 1928.
7. *Пинегин В. Н.* — Гидравлика. 1928.
8. *Проскура Г. Ф.* — Гидравлика. Харьков, 1924.
9. *Пешль Т.* — Курс гидравлики. Москва, 1927.
10. *Чертоусов М. Д.* и *Горчин Н. К.*—Гидравлика в задачах. Ленинград, 1927.
11. *Щапов Н. М.* — Примеры расчетов по гидравлике. Москва, 1924.
12. *Сурин А. А.* — Водоснабжение. Ч. 1. Ленинград, 1926.
13. Bánkí, D. — Energie-Umwandlungen in Flüssigkeiten. I B. Berlin, 1922.
14. Budau, A. — Kurzgefasstes Lehrbuch der Hydraulik. Wien, 1921.
15. Daugherty R. L. — Hydraulics. New-York. 1925.
16. Forchheimer, Ph. — Hydraulik. Leipzig, 1930.
„ — Grundriss der Hydraulik. Leipzig, 1926.
17. Lorenz, H. — Technische Hydromechanik. Berlin, 1910.
18. Mises, R. — Elemente der technischen Hydromechanik. T. I. Leipzig, 1914.
19. Prandtl, L., Tietjens, O. — Hydro-und Aeromechanik. Erst. Band. Berlin, 1929.
20. „ „ — „ „ „ Zweit. Band. Berlin, 1931.
21. Wittenbauer, F. — Aufgaben aus der techynischen Mechanik. III B. Flüssigkeiten und Gasen. Berlin, 1911.

Крім наведених джерел, автор користувався ще з багатьох інших книжок та журнальних статтів.

ВСТУП

Гідравліка є технічна механіка рідин, тобто вона вивчає важливі для техніки закони руху та рівноваги рідин.

Рідина відрізняється від твердого тіла великою рухливістю своїх часток; цю властивість мають і гази. В цьому курсі вивчатимемо тільки краплянi рідини — переважно воду. Частки рідини дуже рухливі через те, що сили спійности та сили тертя між ними, а також між рідиною й стінками посудин — дуже малі; ось чому силам розтяжним і зсувним, дотичним (зрізним) рідина може чинити тільки малий опір. *Гайнеман* (Heinemann) довів своїми дослідами, що вода при температурі 15°C може чинити опір розтягуванню до 0,00037 *кг/см*^{2}, а зсуванню до 0,000263 *кг/см*^{2}. Тому, вивчаючи питання рівноваги й руху великих мас рідини, з якими маємо справу в гідравліці, можна вважати, що в них зовсім немає сил спійности. Далі, вивчаючи рівновагу рідин, не зважають на сили тертя між окремими частками, а також між рідиною й стінками посудини. У процесі руху рідин сили тертя (хоч і тут вони порівняно незначні) відіграють велику ролю і не зважати на них не можна.

Наслідком таких властивостей рідини чинять малий опір зміні їхньої форми і в звичайних умовах набирають форму посудини, до якої їх наливають. Коли посудина не закрита, то частина поверхні рідини, що не стикається із стінками цієї посудини, називається вільною поверхнею рідини або дзеркалом її.

При невеликих хитаннях температури й тиску, що в звичайних умовах (на практиці) діють на рідини, вони змінюють свій об'єм дуже мало, а разом з цим мало змінюються і їхні властивості (питома вага). Наприклад, якщо тиск збільшується на одну атмосферу в границях тиску 1 — 25 атм., то вода при звичайних температурах (0° — 20°C) зменшує свій об'єм пересічно на $\beta = 0{,}00005$ його, а в границях 25 — 500 атм. на $\beta = 0{,}0000405$. Коефіцієнт β зветься об'ємним коефіцієнтом стиску рідини. Як при атмосферному тиску залежить вага кубічної одиниці (а разом з нею густина) від температури — показано в такій таблиці:

Температура на градуси С	0°	4°	10°	20°	100°
Вага кубічного метра води (на кілограми)	999,87	1000	999,75	998,26	958,65

Із цих даних виразно видно, чому в гідравліці вважають вагу кубічної одиниці рідини за величину сталу, незалежну від температури й тиску *.

* Залежність об'єму (а разом і ваги кубічної одиниці) рідини від температури й тиску докладно вивчають у курсах фізики.

Саме визначення гідравліки свідчить, що вона має бути розподілена на дві частини: гідростатику, що вивчає рівновагу рідин, і гідродинаміку, що вивчає рух рідин. Тут же треба зауважити, що рівновага рідин, як і кожна інша рівновага, є окремий випадок руху (див. § 6), але вивчати її доцільно окремо.

Треба відзначити, що в теоретичній механіці є розділи з тими самими назвами, але там переважно вивчають ідеальні рідини, тобто не зважають не тільки на сили спійности і зміну об'єму при змінах тиску й температури, як це роблять і в гідравліці, а й на сили тертя.

Висновки гідростатики щодо ідеальних рідин цілком збігаються з висновками експериментальних дослідів над реальними рідинами. Зовсім інакше стоїть справа з висновками теоретичної гідродинаміки, що часто суперечать явищам у реальних рідинах, і тому, розв'язуючи практичні питання, з них часто не можна користуватися. Гідравліка різниться від теоретичної гідродинаміки не тільки тим, що, вивчаючи рух рідин, вона надає відповідного значення силам тертя, а й методами вивчання.

Теоретична гідродинаміка намагається вивчити рух рідин з допомогою математичної аналізи, загальних законів механіки та деяких припущень, але їй досі пощастило розв'язати цими способами тільки небагато питань, що мають практичне значення в гідротехніці. Коли точного розв'язання того чи того практичного питання ще нема, або навіть і тоді, коли точне розв'язання дуже складне і через те ним незручно користуватися на практиці, то гідравліка, не нехтуючи способами теоретичної гідродинаміки, надзвичайно широко користується з експерименту та емпіричних спостережень, а також з наближених способів.

Звичайно, таке розходження теоретичної науки з прикладною цілком ненормальне і шкідливе. Але останнього часу ці дві науки почали пов'язувати між собою: поперше, теоретична гідродинаміка почала розв'язувати складніші практичні завдання з теорії водяних турбін, смоків, аеропланів *, а також і гідротехніки **; вона почала у відповідних випадках зважати на властивості реальних рідин та користуватися з експерименту; подруге, і гідравліка, під впливом вимог техніки щодо уточнення гідравлічних обчислень, удосконалює свої методи дослідження й поширює коло тих питань, що їх вона опрацьовує. Тому можна сподіватися, що в майбутньому обидві науки зіллються в одну. Цей процес особливо прискориться, якщо свідомо застосувати до механіки рідин матеріялістичну діялектику, бо вона допоможе науково опрацювати величезний емпіричний матеріял гідравліки та вдосконалити теоретичні засоби її так, щоб їх легко можна було застосувати в техніці.

Увага. У всіх формулах цього курсу вживатимемо метричної системи мір: метр, кілограм, секунда; як виняток у деяких випадках подаватимемо інші міри.

---

* Аеродинаміка, власне кажучи, застосовує методи гідродинаміки.

** Див. наприклад: H. Kulka — Der Eisenwasserbau. I Band. 1928.

РОЗДІЛ I

ГІДРОСТАТИКА

§ 1. ЗАГАЛЬНІ ЗАУВАЖЕННЯ

Вивчаючи закони рівноваги великої кількости рідини, можна вважати, що сил спійности, а також сил тертя між окремими частками, або частками й стінками посудини зовсім немає *.

На підставі цієї властивости рідин можемо дійти такого важливого висновку: на поверхню рідини, що є в стані рівноваги, можуть діяти тільки сили, які спрямовані по нормалях до поверхні й стискають рідину, тобто сили, спрямовані по внутрішніх нормалях до поверхні рідини, або ще інакше — сили стискні. Справді, розтяжні сили відірвали б від маси рідини частки, до яких вони прикладені, бо сил спійности між частками немає; так само сили, що дотикаються до поверхні рідини, всунули б зовнішні частки, бо між частками рідини в стані рівноваги нема не тільки сил спійности, а й тертя. Отже, прикладаючи до рідини сили розтяжні або дотичні, напевно порушимо стан рівноваги. Легко зрозуміти, що стан рівноваги порушиться також і тоді, коли до поверхні рідини прикласти похилі сили, бо їх завжди можна розікласти на нормальні й дотичні складові.

Проте, щоб рідина підо впливом стискних сил залишилась у стані спокою, ці сили повинні задовольняти ще таку вимогу: це мають бути сили, розподілені по поверхні рідини, бо цілком зрозуміло, що на рідину не можуть діяти сили зосереджені, які натискають в окремих точках поверхні рідини.

Крім поверхневих сил на рідину в стані рівноваги можуть діяти сили, прикладені до кожної елементарної частки маси рідини. Такі сили називатимемо масовими або об'ємними (наприклад сила тяжіння).

З наведених міркувань бачимо, що на поверхню рідини в стані рівноваги можуть діяти тільки розподілені стискні сили, спрямовані по внутрішніх нормалях.

Проте, на підставі цих самих міркувань можна дійти ще й такого висновку: поверхня рідини в стані спокою в кожній точці завжди перпендикулярна до поверхневої сили, що діє на рідину в цій точці. Все сказане стосується не тільки до всієї (а значить і вільної) поверхні рідини, що її наллято

---

* Коли досліджувати рівновагу малої кількости рідини, то сили спійности тут уже багато важать; саме ці сили надають невеликій кількості рідини форму краплі, але вивчення явищ у малих кількостях рідини належить до фізики.

до будь-якої посудини, а й до всякого довільного об'єму A (рис. 1), виділеного всередині цієї рідини. Справді, діяння на об'єм A часток, що оточують його, можна замінити силами, розподіленими по його поверхні. Під впливом цих, а також масових сил (тяжіння), рідина в об'ємі A залишається в стані рівноваги. Звідси доходимо висновку, що ці сили стискні й спрямовані по внутрішніх нормалях. Зваживши на те, що поверхню об'єму A взято довільно, можемо сказати, що і всередині рідини по всякій довільній поверхні діють тільки розподілені нормальні стискні сили.

Рис. 1.

§ 2. ГІДРОСТАТИЧНИЙ ТИСК

Виділимо на поверхні елементарного об'єму A біля точки O малу площу ΔF і позначимо вислідну розподілених зусиль, що тиснуть на цю площу, через ΔP; межа відношення $\frac{\Delta P}{\Delta F}$, якщо ΔF і ΔP безконечно меншають, зветься гідростатичним тиском у даній точці O*: $p = \lim\limits_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}$; вимірюватимемо його на *кг/м²*.

Доведемо, що цей тиск у будь-якій точці не залежить від напряму безконечно малої площі, тобто він буде сталий на всіх малих поверхнях, що проходять через узяту точку. Для цього виділимо всередині рідини, що є в стані рівноваги, безконечно малого тетраедра $ABCD$ (рис. 2) з паралельними до осей координат рубами: AB, AC і AD. На цей тетраедр діятимуть поверхневі й масові сили. Поверхневі сили охарактеризуємо, подавши гідростатичний тиск: p_z на площу ABC, p_y на ABD, p_x на ACD і p на CBD. Масові сили, що діють на одиницю маси рідини, охарактеризуємо проєкціями їх на осі координат: X, Y, Z. Густина рідини хай буде ρ.

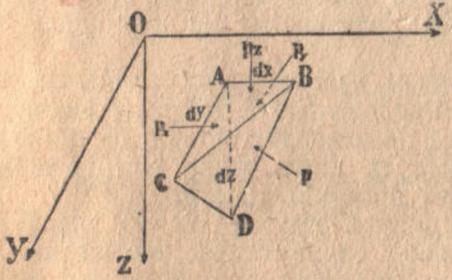


Рис. 2.

Тепер напишемо рівняння рівноваги тетраедра $ABCD$, спроєктувавши поверхневі та масові сили на координатні осі. Проєктуючи, відповідно позначимо кути, що утворює нормаль до площі трикутника BCD з координатними осями x, y, z, через α, β, γ.

* Гідростатичний тиск є сила, що припадає на квадратову одиницю поверхні; тому його звуть іноді одиничним. Цього терміну будемо вживати тільки тоді, коли без нього можуть виникнути непорозуміння.

Спроектувавши на вісь x, матимемо:

$$\frac{dx\,dy\,dz}{6}\rho X + p_x\frac{dy\,dz}{2} - (p \triangle BCD)\cos\alpha = 0$$

$\triangle BCD$ виражає площу трикутника BCD.

Взявши на увагу, що $(p \triangle BCD)\cos\alpha = p\,(\triangle BCD\cos\alpha) = p \triangle ACD = p\frac{dy\,dz}{2}$, можемо написати:

$$\frac{dx\,dy\,dz}{6}\rho X + p_x\frac{dy\,dz}{2} - p\frac{dy\,dz}{2} = 0$$

Аналогічно:

$$\frac{dx\,dy\,dz}{6}\rho Y + p_y\frac{dx\,dz}{2} - p\frac{dx\,dz}{2} = 0$$

$$\frac{dx\,dy\,dz}{6}\rho Z + p_z\frac{dx\,dy}{2} - p\frac{dx\,dy}{2} = 0$$

У кожному з цих рівнянь перший доданок є безконечно мала третього порядку, а два інших доданки — безконечно малі другого порядку. Тому, відкинувши перші доданки, ті самі рівняння запишемо так:

$$p_x\frac{dy\,dz}{2} - p\frac{dy\,dz}{2} = 0$$

$$p_y\frac{dx\,dz}{2} - p\frac{dx\,dz}{2} = 0$$

$$p_z\frac{dx\,dy}{2} - p\frac{dx\,dy}{2} = 0$$

Звідси
$$p = p_x = p_y = p_z$$

Отже доведено, що гідростатичний тиск p в довільній точці не залежить від напряму малої площі, що проходить через узяту точку.

Далі легко було б довести, що при переході в рідині від точки до точки гідростатичний тиск міняється безперервно, але через те, що це твердження майже очевидне, не наводимо його доказу.

§ 3. РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ РІДИНИ

Виділимо всередині рідини елементарний паралелепіпед (рис. 3) так, щоб його руби були рівнобіжні до відповідних осей координат* і дорівнювали dx, dy, dz.

Хай знову X, Y, Z — складові об'ємних сил, що діють на одиницю маси, ρ — густина

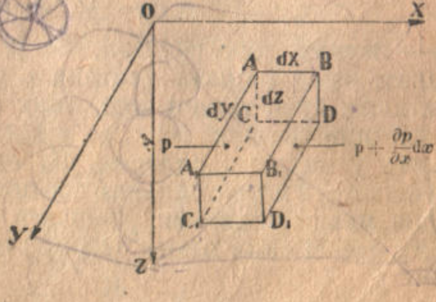


Рис. 3.

* Осі x і y горизонтальні, а вісь z вертикальна.

рідини. Позначимо також літерою p одиничний гідростатичний тиск на малих поверхнях AA_1CC_1, $ABCD$, AA_1BB_1, що всі вони проходять через точку A; тоді тиск на малих поверхнях BB_1DD_1, $A_1B_1C_1D_1$ і CDC_1D_1 відповідно дорівнюватиме: $p+\frac{\partial p}{\partial x}dx$, $p+\frac{\partial p}{\partial y}dy$ і $p+\frac{\partial p}{\partial z}dz$.

Проєктуємо всі сили, що діють на виділений паралелепіпед, на осі координат:

$$\rho X\,dx\,dy\,dz+p\,dy\,dz-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz=0$$

$$\rho Y\,dx\,dy\,dz+p\,dx\,dz-\left(p+\frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dx\,dz=0$$

$$\rho Z\,dx\,dy\,dz+p\,dx\,dy-\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dx\,dy=0$$

Після деяких спрощень:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\rho X;\ \ \frac{\partial p}{\partial y}=\rho Y;\ \ \frac{\partial p}{\partial z}=\rho Z\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Це є *Ейлерові* (Leonhard Euler) рівняння рівноваги рідини.

Фізично кожна з похідних $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ становить зміну тиску на одиницю довжини в напрямі відповідної осі — x, y, z; у цих же напрямах на кожну кубічну одиницю діють складові масових сил ρX, ρY, ρZ. Отже *Ейлерові* рівняння рівноваги констатують той майже очевидний факт, що зміна тиску p на квадратову одиницю, віднесена до одиниці довжини, дорівнює масовій силі, яка діє в цьому самому напрямі на одиницю об'єму, тобто припадає на ту саму одиницю довжини. Наприклад, у звичайних умовах у важкій рідині тиск збільшується так: на кожний метр униз на площі 1 $м^2$ на вагу (порівняти § 4-а) 1 $м^3$ рідини.

Помноживши кожне з рівнянь (1) відповідно на dx, dy, dz і додавши їх після того одно до одного, матимемо:

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=\rho X\,dx+\rho Y\,dy+\rho Z\,dz$$

або

$$dp=\rho(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

dp — повний диференціял, бо p тут є функція тільки координат; отже і права частина є так само повний диференціял. Це може бути тільки тоді, коли складові масових сил X, Y, Z є частинні похідні за x, y, z від певної функції U, що її називають у механіці силовою. Та сама функція із знаком мінус називається потенціяльною або потенціялом складових сил X, Y, Z. Отже маємо висновок: рівновага рідини може бути тільки тоді, коли масові сили мають силову (чи потенціяльну) функцію, тобто

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\ Z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

Позначивши прискорення сили ваги літерою g і вагу

кубічної одиниці ($1\ м^3$) літерою γ, матимемо: $\gamma = \rho g$ або $\rho = \frac{\gamma}{g}$.
Тепер можна надати рівнянню (2) такої форми, що іноді буває зручніша для технічних обчислень:

$$dp = \frac{\gamma}{g}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\text{-а})$$

Проінтеґрувавши це рівняння, можна визначити гідростатичний тиск p в довільній точці рідини.

§ 4. ПОВЕРХНІ РІВНЯ РІДИНИ. РІВНОВАГА ВАЖКИХ РІДИН. ГІДРОСТАТИЧНИЙ ТИСК У ВАЖКІЙ РІДИНІ.

Поверхнями рівня рідини називатимемо геометричні місця з точно однаковим гідростатичним (одиничним) тиском p в рідині. Інакше можна сказати, що на поверхні рівня рідини $dp = 0$. Зваживши на те, що для рідких тіл $\rho = \text{const}$, напишемо диференціяльне рівняння поверхонь рівня рідини так:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

З цього рівняння видно, що поверхні рівня рідини нормальні до масової сили. Дзеркало рідини, що перебуває під сталим тиском (здебільшого — тиском атмосфери), є теж одна з поверхонь рівня. Отже поверхня рідини на землі всюди перпендикулярна до масової сили, а саме — до сили ваги, спрямованої до центра землі. В невеликих резервуарах чи водоймищах цю поверхню можемо вважати за горизонтальну площу. Щодо великих водоймищ на землі, то дзеркало води в них сферичне, бо лінії, поведені від центра землі до кожної точки цього дзеркала, вже не можна вважати за паралельні. Колись земля вся була в рідкому стані і тоді набула (про це виразно свідчить сказане попереду) сферичної форми; ця форма в неї залишилася й після того, як поверхня її затужавіла. Незначний відхил від сферичної форми пояснюється тим, що земля обертається навколо своєї осі і що вона (земля) неоднорідна.

Щоб визначити поверхні рівня рідини, яка є в стані рівноваги під впливом власної ваги (важкої рідини), скористуємося з рівняння (3), де буде (рис. 4) $X = 0$, $Y = 0$; по вертикальному напряму на одиницю маси діятиме стала сила $Z = g$, що дорівнює прискоренню сили ваги*. Отже диференціяльне рівняння поверхні рівня рідини (3) набуває такого вигляду:

$$g\,dz = 0,$$

а після інтеґрування:

$$gz = \text{const}$$

Звідси бачимо, що поверхні рівня важких рідин у стані рівноваги є горизонтальні площі. Дзеркало рідини теж горизонтальна площа (в невеликих посудинах; у морях або великих озерах поверхні рівня рідини є сферичні).

---

* Щоб це з'ясувати, згадаємо загальне рівняння механіки: $P = mj$, де P є сила, m — маса тіла, що на нього діє сила P, а j є прискорення, що його спричинює (або може спричинити) сила P. Для важкого тіла P є сила ваги, прискорення $j = g$, а масу тіла взято таку, щоб вона дорівнювала одиниці.

Щоб визначити гідростатичний тиск у будь-якій точці A (рис. 4), скористуємося з рівняння (2-а).

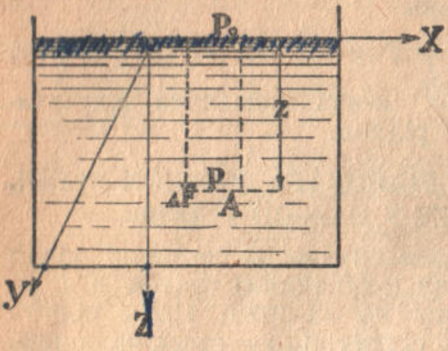


Рис. 4.

Вважаючи, що знову $X = Y = 0$, а $Z = g$, матимемо:

$$dp = \frac{\gamma}{g} g\, dz = \gamma\, dz,$$

після інтеґрування:

$$p = \gamma z + C$$

Вважаючи одиничний тиск p_0 на вільній поверхні рідини (при $z = 0$) за відомий, легко визначити довільну сталу: $C = p_0$. Тепер можна написати:

$$p = p_0 + z\gamma \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

§ 4-а. ЕЛЕМЕНТАРНИЙ ВИВІД ФОРМУЛИ ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ. ПАСКАЛІВ (PASCAL) ЗАКОН

Тому що формула $p = p_0 + z\gamma$ (4), за якою можна обчислити одиничний гідростатичний тиск у будь-якій точці в рідині, є дуже важлива, виведемо її ще іншим, елементарнішим, але зате наочнішим, способом.

Виділимо біля довільної точки A (рис. 4) малу горизонтальну площу ΔF і над нею циліндричний вертикальний стовпчик води до вільної поверхні.

Спроєктуємо всі сили, що діють на цей стовпчик, на вертикальний напрям. На верхню основу його тисне сила $\Delta F p_0$, спрямована донизу; на нижню основу тисне суміжна рідина — знизу догори; позначивши гідростатичний тиск у точці A літерою p, матимемо силу $\Delta F p$. Крім того, на стовпчик ще діє вага його — $\Delta F z\gamma$, спрямована донизу. Тиск суміжної рідини на бічну поверхню стовпчика не дає вертикальної складової; через те, що стовпчик у стані рівноваги, можемо написати:

$$\Delta F p_0 + \Delta F z\gamma - \Delta F p = 0,$$

звідси й маємо:

$$p = p_0 + z\gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Хоч цю формулу виведено для горизонтальної площі, але пам'ятаючи про властивості одиничного гідростатичного тиску, можемо застосовувати її до всіх площ, що проходять через точку A, незалежно від їх напряму.

З формули (4) видно, що у важкій рідині в стані рівноваги поверхні з однаковим тиском p, тобто поверхні рівня, є горизонтальні площі. Крім того, та сама формула стверджує відомий *Паскалів* (Pascal) закон, а саме: тиск p_0, який діє на поверхню рідини, передається в усі точки рідини. з однаковою си

Виводячи рівняння (4), ми не зважали на форму посудини; звідси робимо важливий висновок, що одиничний гідростатичний тиск p у всякій точці в рідині не залежить від форми посудини, тільки від глибини z (віддаль від дзеркала рідини), на якій міститься розглядувана точка.

Якщо тиск p_0 на вільній поверхні (або взагалі на якійсь частині поверхні рідини) дуже великий, порівняно з частиною тиску $z\gamma$, то, розв'язуючи практичні завдання, можна вважати, що він у всіх точках рідини сталий: $p=p_0$. Тут ми нехтуємо вагою рідини, тобто вважаємо рідину за безважну.

Таке припущення можна робити тільки тоді, коли глибина для всіх точок рідини мала, бо тоді й добуток $z\gamma$ теж малий.

ЗАВДАННЯ ДО § 4

1. Визначити тиск одної технічної атмосфери на $кг/м^2$, тобто мірами, що їх взагалі вживають у гідравліці.

Розв'язання. Технічною атмосферою називають тиск в 1 $кг$ на 1 $см^2$; тиск на 1 $м^2$ буде в 10000 разів більший. Отже 1 технічна атмосфера $= 10000$ $кг/м^2$.

2. Визначити гідростатичний тиск у точці A (рис. 4) на глибині $z = 15{,}6$ $м$, коли тиск на дзеркалі води $p_0 = 2$ атм.

Розв'язання. Через те, що вага кубічної одиниці води $\gamma = 1000$ $кг/м^3$, знайдемо за формулою (4) $p=p_0+z\gamma = 20000+15{,}6 \cdot 1000 = 35600$ $кг/м^2 = 3{,}56$ атм. $= 35{,}6$ $т/м^2$.

1 ата = 10000 т/м²

3. a) Не зважаючи на тертя в заглушниках циліндрів гідравлічного преса (рис. 5) і на різницю висоти положень обох толоків h_0, обчислити відношення P_1 та P.

b) Як зміниться це відношення, коли сили P та P_1 порівняно невеликі, тобто коли треба зважати й на висоту h_0?

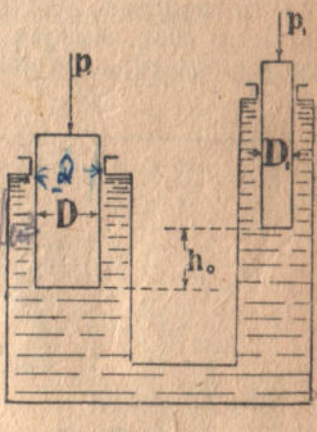


Рис. 5.

Розв'язання. a) $\dfrac{P_1}{P}=\dfrac{D^2}{D_1^{\,2}}$ b) $\dfrac{4P}{\pi D^2}=\dfrac{4P_1}{\pi D_1^{\,2}}+h_0\gamma$

§ 5. ЗЛУЧЕНІ ПОСУДИНИ. РІДИННІ МАНОМЕТРИ ТА ВАКУУМЕТРИ

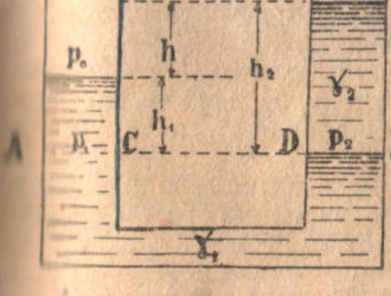


Рис. 6.

Розглянемо рівновагу двох різних рідин у двох злучених посудинах (рис. 6).

Легко зрозуміти, що важча рідина осяде в нижній частині посудини, бо тільки при такій умові потенціяльна енерґія обох рідин буде найменша, а рівновага стійка. Хай легшу рідину наллято в праве рамено.

Щоб рідина нижче горизонтальної площі розділу DB залишилася в стані рівноваги, треба, щоб гідростатичний тиск p_2 на площі DB дорівнював тискові p_1 на площі AC, яка є продовження площі DB. Розглянемо випадок, коли тиск на дзеркала рідин в обох раменах однаковий, а саме p_0; хай вага кубічної одиниці важчої рідини γ_1, а легшої γ_2, тоді тиск в усіх точках площі AC буде: $p_1 = p_0 + h_1\gamma_1$, а площі DB: $p_2 = p_0 + h_2\gamma_2$. Звідси $p_1 = p_2 = p_0 + h_1\gamma_1 = p_0 + h_2\gamma_2$ або $h_1\gamma_1 = h_2\gamma_2$. Останнє рівняння записуємо так:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Пропорцію (5) можна подати так: висоти дзеркал двох рідин у злучених посудинах над площею розділу обернено пропорціональні до ваг однакових кубічних одиниць цих рідин (до властивих ваг, або густин їх).

Цілком зрозуміло, що коли до обох рамен наллято ту саму рідину ($\gamma_1 = \gamma_2$), то й висоти h_1 та h_2 будуть однакові, тобто дзеркала рідини в обох раменах становитимуть одну горизонтальну площу.

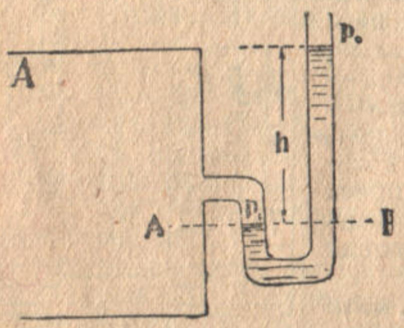


Рис. 7.

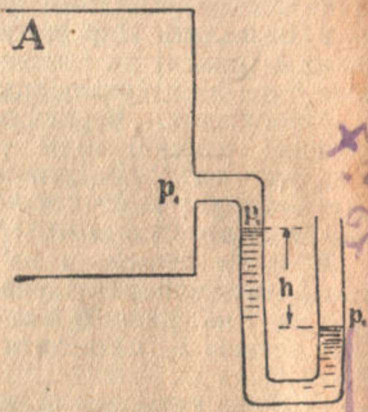


Рис. 8.

Тепер розглянемо випадок, коли до обох рамен наллято одну рідину, але тиск на дзеркала рідини неоднаковий в обох раменах. Рівень рідини буде нижчий у тому рамені, де тиск більший (рис. 7); легко зрозуміти, що $p_1 = p_0 + h\gamma$; маючи p_0 і γ та змірявши h, можемо визначити тиск газу або пари в посудині A (принцип рідинного манометра).

Коли $p_1 < p_0$ (рис. 8), то $p_1 = p_0 - h\gamma$ (принцип рідинного вакуумметра).

Коли p_0 є тиск атмосфери, як це здебільшого буває, то тиск газу в посудині A, обчислений за формулою $p = p_0 + h\gamma$, називають абсолютним. Дуже часто вважають за краще користуватися з манометричного або робітного тиску, що дає перевищення тиску рідини, газу чи пари над атмосферним*, а тому його слід обчислювати за формулою $p = h\gamma$.

Абсолютний тиск може бути тільки додатний, бо від'ємний абсолютний тиск — це було б не що інше, як розтягування, а розтяжних зусиль рідини не передають. Робітний тиск буває

* Його можна було б називати ще вадтиском.

додатний, але може бути й від'ємний, а саме — якщо тиск рідини, газу або пари в посудині A менший за атмосферний * (рис. 8); тоді його треба обчислювати за формулою $p = -h\gamma$.

Робітний тиск часто буває зручніше подавати не на $кг/м^2$, а висотою h стовпа рідини; так само й атмосферний тиск (а також і абсолютний тиск взагалі) часто виміряють висотою відповідного водяного або живосрібного стовпа.

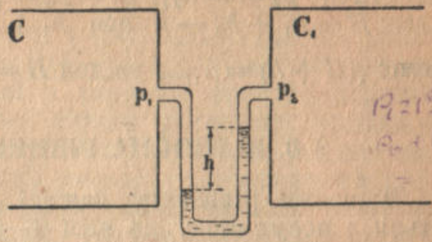


Рис. 9.

Іноді треба виміряти різницю тисків $p_1 - p_2$ газів у двох посудинах C і C_1 (рис. 9). Злучивши посудину C з одним, а посудину C_1 з другим раменом рідинного манометра, виміряємо різницю рівнів h в обох раменах; очевидячки $p_1 - p_2 = h\gamma$ (принцип диференціяльного рідинного манометра). Звичайно й тут різницю тисків $p_1 - p_2$ можна безпосередньо виміряти висотою h стовпа тої чи іншої рідини.

ЗАВДАННЯ ДО § 5.

1. Вакууметр конденсатора показує вакуум $h = 60$ *см*, а атмосферний тиск у той самий час $H = 74$ *см* живосрібного стовпа. Обчислити абсолютний і робітний тиск у конденсаторі на $кг/м^2$ і $кг/см^2$.

Розв'язання. Тиск атмосфери $p_0 = H\gamma = 0{,}74 . 13590 = 10060\ кг/м^2 = 1{,}006\ кг/см^2$, тут для живого срібла $\gamma = 13590\ кг/м^3$; абсолютний тиск у конденсаторі: $p_1 = p_0 - h\gamma = 10060 - 0{,}6 . 13590 = 1910\ кг/м^2 = 0{,}191\ кг/см^2$; робітний тиск буде: $p_1 = -h\gamma = -8150\ кг/м^2 = -0{,}815\ кг/см^2$.

2. Вода витікає із смока до нагнітної труби з надтиском $p = 8{,}3$ атм. (тех.). Обчислити висоту відповідного цьому тискові водяного стовпа. Дано: $\gamma = 1000\ кг/м^3$.

3. Щоб визначити різницю H рівнів води в двох резервуарах (рис. 10), можна скористатися з живосрібного манометра, що до одного коліна його підведено трубку від резервуара M, а до другого — від резервуара N; обидві ці трубки виповнено водою. Обчислити

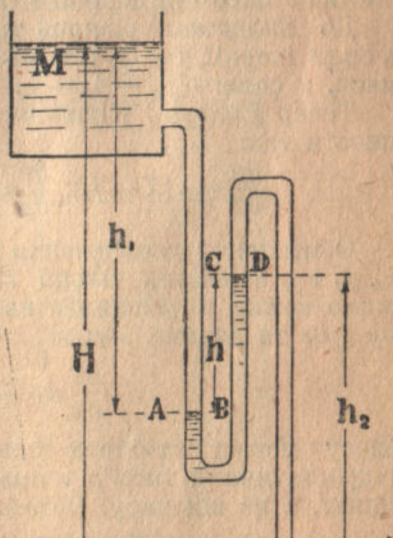


Рис. 10.

* Тоді часто кажуть, що в посудині A вакуум (розрідження).

різницю рівнів H, якщо різницю рівнів h живого срібла в колінах манометра виміряно.

Розв'язання. Тиск на рівні AB дорівнює $p_1 = h_1\gamma$, а на рівні CD тиск $p_2 = -h_2\gamma$; $p_1 - p_2 = \gamma[h_1 - (-h_2)] = \gamma(h_1 + h_2) = h\gamma_{жс}$; алеж $H = h_1 + h_2 - h$ або $h_1 + h_2 = H + h$; підставивши, дістанемо: $\gamma(H + h) = h\gamma_{жс}$; звідси $H = h\frac{(\gamma_{жс} - \gamma)}{\gamma}$.

§ 6. ВІДНОСНА РІВНОВАГА ВАЖКИХ РІДИН

Відносну рівновагу важкої рідини маємо, коли вона рухається з посудиною, до якої її наллято, але рухається так, що всі частки рідини одна відносно одної, а також відносно посудини не переміщаються. Звичайно, сюди можна застосувати *Ейлерові* рівняння рівноваги, але треба додати за *Д'Аламберовим* (D'Alembert) принципом до чинних масових сил X, Y, Z сили інерції, що дорівнюють для кожної частки її масі, помноженій на прискорення переносного руху з противним знаком. Систему координат $Oxyz$ беруть рухому, незмінно зв'язану з посудиною; на осі її проектують чинні сили й прискорення (із складовими j_x, j_y і j_z по осях) переносного руху рідини; інших прискорень при відносній рівновазі нема. Складові сил інерції по осях для частки з масою m дорівнюють: $-mj_x, -mj_y, -mj_z$.

До *Ейлерових* рівнянь треба записувати масові сили (отже і сили інерції, бо це теж масові сили), що належать до одиниці маси, а саме: $-j_x, -j_y, -j_z$.

Тепер *Ейлерові* рівняння для відносної рівноваги можна написати так:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho(X - j_x);\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho(Y - j_y);\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho(Z - j_z)\quad \ldots (1\text{-a})$$

Обмежуючи дослідження відносної рівноваги випадками, коли j_x, j_y і j_z залежать тільки від координат, а не від часу, помножимо кожне з тількищо написаних рівнянь відповідно на dx, dy і dz та додамо. Вираз

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

знову можна замінити повним диференціялом тиску dp, бо гідростатичний тиск p у прийнятих умовах є функція від координат, а не від часу. Остаточно матимемо:

$$dp = \rho[(X - j_x)dx + (Y - j_y)dy + (Z - j_z)dz]\quad \ldots (2\text{-c})$$

Аналогічно до § 3 і тут робимо висновок, що відносна рівновага рідини може бути тільки тоді, коли складові $(X - j_x)$, $(Y - j_y)$ і $(Z - j_z)$ мають силову функцію.

Проінтеґрувавши рівняння (2-c), можна визначити тиск у рідині, що є в стані відносної рівноваги. З цього ж рівняння легко вивести диференціяльне рівняння поверхонь рівня для рідини в стані відносної рівноваги; треба тільки згадати, що на поверхні рівня рідини p є стала величина, а $dp = 0$. Отже диференціяльне рівняння поверхні рівня рідини можемо написати так:

$$(X - j_x)\,dx + (Y - j_y)\,dy + (Z - j_z)\,dz = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (3\text{-a})$$

Порівнюючи рівняння (1-а), (2-с) і (3-а) для відносної рівноваги з відповідними рівняннями (1), (2) і (3) для абсолютної рівноваги, бачимо, що ці останні є окремий випадок перших. Власне кажучи, насправді маємо тільки рівновагу відносну. Коли все ж таки широко користуємося з рівнянь абсолютної рівноваги, то це тому, що в наших умовах на землі вплив прискорень переносних рухів (обертання землі навколо своєї осі та навколо сонця) порівняно малий; тому в звичайних технічних умовах на прискорення цих рухів не зважають.

ЗАВДАННЯ ДО § 6

1. Визначити поверхні рівня й тиск у рідині, наллятій у посудину, яка вільно падає в атмосфері під впливом сили тяжіння.

Розв'язання. Вісь z спрямуємо вертикально вниз; тоді $X = Y = 0$, $j_x = j_y = 0$, $Z = g$, $j_z = g$, де g є прискорення тяжіння.

Записавши ці вартості до рівняння (2-с), матимемо:

$$dp = 0$$

З цього рівняння видно, що тиск p є величина стала в усіх точках рідини й має, очевидячки, дорівнювати тискові на поверхні рідини, тобто атмосферному. Звідси вже цілком зрозуміло, що тут поверхонь рівня рідини зовсім нема.

2. Рідина в циліндричній посудині (рис. 11) обертається рівномірно навколо вертикальної осі Oz. a) Скласти рівняння вільної поверхні AO_1C, якщо рідина обертається з кутовою швидкістю ω. b) Змірявши під час обертання рідини розмір a, визначити число обертів посудини за хвилину.

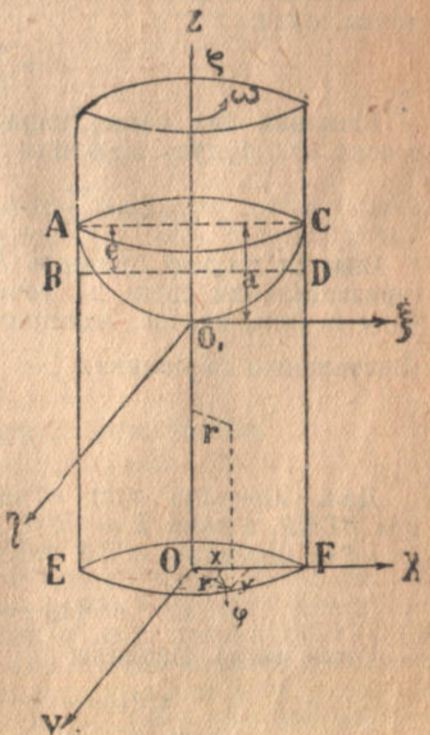


Рис. 11.

Розв'язання. a) Щоб написати диференціяльне рівняння поверхні AO_1C, що є одна з поверхонь рівня, треба до рівняння (3-а) підставити (при наведеному на рисунку розташуванні осей $Oxyz$): $Z = -g$, $X = Y = 0$; далі — доосередкове прискорення частки з масою одиниці, що міститься на віддалі r від осі z, буде $j_r = -\omega^2 r$, складові його по осях x та y:

$$j_x = -\omega^2 r \cos\varphi = -\omega^2 x$$
$$j_y = -\omega^2 r \sin\varphi = -\omega^2 y$$

Підставивши, маємо:

$$\omega^2 x\,dx + \omega^2 y\,dy - g\,dz = 0$$

Після інтеґрування:

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz = C$$

Це є рівняння параболоїда обертового.

Щоб визначити довільну сталу C, підставимо до тількищо написаного рівняння координати вершка параболоїда: $x = 0$, $y = 0$, $z = z_0$; отже відшукаємо: $C = -gz_0$.

Тепер рівняння параболоїда набере такої форми:

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - g(z - z_0) = 0$$

Рівняння параболі AO_1C в координатних осях xOz, очевидячки, буде:

$$z = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + z_0$$

Рівняння тих самих параболоїда в осях $O_1\xi\eta\zeta$ і параболі в осях $\xi O_1\zeta$ будуть відповідно:

$$\zeta = \frac{\omega^2}{2g}(\xi^2 + \eta^2) \text{ і } \zeta = \frac{\omega^2}{2g}\xi^2$$

Знаючи радіюс циліндра R і висоту H рівня води BD над горизонтальним дном до початку обертання, визначимо величину z_0 (яка, власне, залишилася досі невідома) і величину a. Підставивши до рівняння $\zeta = \frac{\omega^2}{2g}\xi^2$ замість ξ радіюс R, матимемо:

$$a = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

Далі міркуємо так: об'єм води дорівнює об'ємові циліндра $BDEF$, а саме $V = \pi R^2 H$; цей самий об'єм можна виразити, як об'єм циліндра $ACEF$ мінус об'єм параболоїда AO_1C або

$$\pi R^2(z_0 + a) - \frac{1}{2}\pi R^2 a$$

Отже маємо рівняння:

$$\pi R^2(z_0 + a) - \frac{1}{2}\pi R^2 a = \pi R^2 H,$$

звідси

$$z_0 = H - \frac{1}{2}a = H - \frac{\omega^2}{4g}R^2$$

b) Знаючи R і вимірявши a при якомусь числі обертів n за хвилину, визначимо ω з формули $a = \frac{\omega^2}{2g}R^2$:

$$\omega=\frac{\sqrt{2ga}}{R}=\frac{2\pi n}{60}=\frac{\pi n}{30},$$

звідси

$$n=\frac{30\sqrt{2ga}}{\pi R}$$

Легко довести, що $a=2e$. Тепер можемо написати:

$$n=\frac{60\sqrt{ge}}{\pi R}$$

Коли на скалі біля поверхні скляної трубки повідкладати кілька вартостей e, позначити кожну з них рискою й поставити коло кожної риски відповідну вартість n, вираховану з тількищо відшуканої формули, то з такої трубки можна користатися, як з тахометра, і вимірювати нею число обертів.

3. Рідина в прямокутній посудині (рис. 12) рухається рівномірно-прискорено в напрямі горизонтальної осі x (з додатним прискоренням j). Визначіть вільну поверхню рідини під час цього руху.

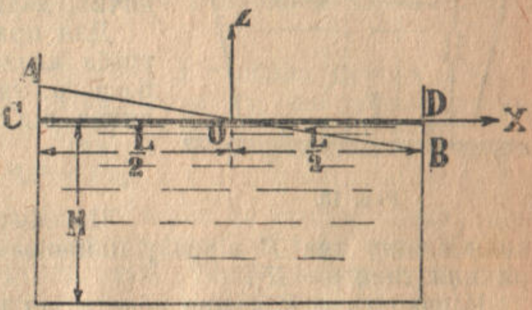


Рис. 12.

Розв'язання. Вільна поверхня — це поверхня рівня рідини. Осі $Oxyz$ рухаються разом з посудиною (вісь y перпендикулярна до площі рисунка).

Складові масової сили:

$$X=Y=0,\ Z=-g$$

Складові прискорення:

$$j_x=j;\ j_y=j_z=0$$

Диференціяльне рівняння поверхні рівня рідини:

$$-j\,dx-g\,dz=0 \quad \text{або} \quad j\,dx+g\,dz=0$$

Інтеґрал цього рівняння:

$$jx+gz=C$$

Отже поверхні рівня рідини, а також і вільна поверхня AB під час руху є площі. Зважаючи на форму посудини та на те, що об'єм призми AOC має дорівнювати об'ємові призми BOD (об'єм води під час руху такий самий, як і в стані спокою), доходимо такого висновку: площа AB пройде через початок координат O і вісь y, як це й показано на рисунку. Тому для вільної поверхні $C=0$, а рівняння її: $jx+gz=0$, звичайно, в рухомих координатах $Oxyz$.

4. Циліндричну круглу посудину вщерть виповнено водою і вона обертається з кутовою швидкістю ω навколо своєї горизонтальної осі (паралельної до твірних циліндра). Відшукати рівняння поверхонь рівня.

§ 7. ТИСК НА ПЛОСКІ СТІНКИ

Розглянемо спочатку тиск рідини на якусь частину F горизонтального дна посудини (рис. 13). Одиничний гідростатичний тиск у всіх точках дна визначимо за формулою $p = p_0 + H\gamma$ (абсолютний тиск). Щоб дістати вислідну P_1 тиску рідини на площу F, треба помножити F на p:

$$P_1 = Fp = Fp_0 + FH\gamma$$

У звичайних умовах одиничний тиск p_0 на вільній поверхні рідини й одиничний тиск на зовнішніх поверхнях стінок і дна посудини однакові, а саме — це тиск атмосфери. Вислідна тиску атмосфери на зовнішню поверхню дна, очевидячки, дорівнює $P_2 = Fp_0$.

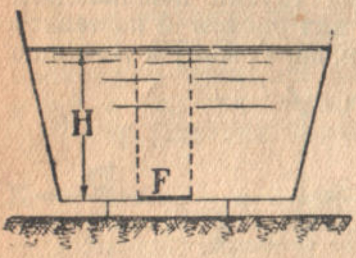


Рис. 13.

Для практичних потреб звичайно треба визначати тільки ту частину повного тиску P_1 на дно, що виникає від ваги рідини; обчислюють її так:

$$P = P_1 - P_2 = FH\gamma$$

Цю саму формулу дістанемо й тоді, коли площу дна F відразу помножимо на одиничний манометричний тиск $p = H\gamma$.

Наочно тиск P можна подати, як вагу стовпа води над площею F до дзеркала води. Тепер цілком зрозуміло, що вислідна тиску P не залежить від форми посудини й що вона проходить через центр ваги тількищо згаданого стовпа води, а так само й

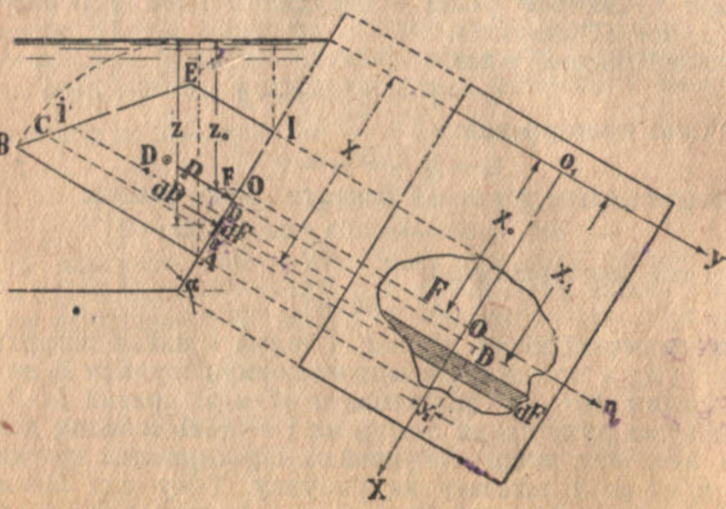


Рис. 14.

через центр ваги площі F; напрям вислідної P перпендикулярний до дна.

Складніше визначити вислідну тиску води (без тиску атмосфери) на похилу або вертикальну стінку посудини (рис. 14), бо тут при переході від точки до точки площі F гідростатичний тиск міняється.

Виділимо горизонтальними прямими малий елемент площі dF на глибині $z = x \sin \alpha$. Одиничний тиск $p = z\gamma$ в усіх точках dF можемо вважати за сталий; тоді вислідний тиск води на dF буде: $dP = dF\,p = dF\,z\gamma$. Тиск на всю площу F можна визначити так:

$$P = \gamma \int_F z\,dF = \gamma \sin \alpha \int_F x\,dF$$

Інтеґрал $\int_F x\,dF$ є статичний момент S_y площі F відносно осі y (лінія, де перетинається дзеркало води із стінкою).

Позначимо координату центра ваги O площі F через x_0; тоді $S_y = Fx_0$ і $P = \gamma \sin \alpha\, Fx_0$.

З рисунка бачимо, що $x_0 \sin \alpha = z_0$ є глибина центра ваги O під дзеркалом води. Тепер подамо формулу, що за нею можна обчислювати вислідний тиск P на площу F, у такій формі:

$$P = Fz_0\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Силу P спрямовано перпендикулярно до стінки; точка прикладання її D зветься центром тиску площі F і не може зливатися при похилій (або вертикальній) стінці з центром ваги O, а буде завжди нижче від нього, бо гідростатичний тиск донизу зростає.

Щоб визначити координати x_D і y_D центра тиску D, згадаємо, що момент вислідної сили P відносно осі y дорівнює сумі (інтеґралові) моментів усіх елементарних складових сил dP відносно тієї самої осі y:

$$Px_D = \int_F dF\,z\gamma x$$

або інакше:

$$\gamma \sin \alpha\, S_y\, x_D = \int_F \gamma \sin \alpha\, x^2\, dF,$$

звідси

$$x_D = \frac{\int_F x^2\, dF}{S_y}$$

$\int_F x^2 dF$ є не що інше, як момент інерції I_y площі F відносно осі y; отже $x_D = \frac{I_y}{S_y}$. Цій формулі краще надати дещо іншої форми, замінивши I_y через $I_\eta + Fx_0^2$, де I_η — момент інерції відносно осі η, яка проходить через осередок ваги O площі F паралельно осі y; замінивши, матимемо:

$$x_D = \frac{I_\eta + Fx_0^2}{S_y} = \frac{I_\eta}{S_y} + \frac{Fx_0^2}{Fx_0}$$

або

$$x_D = x_0 + \frac{I_\eta}{S_y} = x_0 + \frac{I_\eta}{Fx_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Цілком аналогічно для другої координати центра тиску вишукаємо формулу

$$y_D = \frac{I_{xy}}{S_y}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

де I_{xy} — відосередковий момент інерції площі F проти осей xOy.

Із формули (7) бачимо, що x_D завжди більше за x_0, а це й доводить, що центр тиску міститься нижче, ніж центр ваги площі F.

Із формули (8) можна зробити такий важливий висновок: коли вісь x є водночас (як це здебільшого буває на практиці) і вісь симетрії площі F, то $y = 0$, тобто центр тиску міститься на осі x і визначає його тільки одна координата x_D.

Усі формули й висновки, що їх зроблено для похилої стінки, можна, звичайно, пристосовувати й до вертикальної ($\alpha = 90°$) стінки. Виводячи формули, що за ними визначають тиск на стінку й точку його прикладання, ми не зважали на тиск на дзеркало води, він бо є здебільшого атмосферний. Дуже рідко, але все ж таки інколи треба відшукати повний тиск на стінку, що спричинює його не тільки вага рідини, а й тиск p_0 на дзеркало її. Тоді можна скористатися з тих самих формул, але дзеркало треба підійняти (тільки в думці, звичайно) на висоту H_0, що якраз відповідала б тиску p_0, себто H_0 треба визначити з формули $p_0 = H_0\gamma$.

Наочно тиск води dP на елемент площі dF можна подати (рис. 14) вагою стовпчика води *abci* заввишки *z*. Тиск P на всю площу F дорівнюватиме вазі зрізаного циліндра *ABEI*, що його дістанемо тоді, коли додамо всі елементарні стовпчики над кожним елементом площі F і після того кожний елемент dF наближатимемо до його межі — нуля.

Вислідна P пройде, звичайно, через центр ваги D_0 циліндра *ABEI*, але вона буде спрямована перпендикулярно до стінки, а не вертикально, і пройде через центр тиску її D.

ЗАВДАННЯ ДО § 7

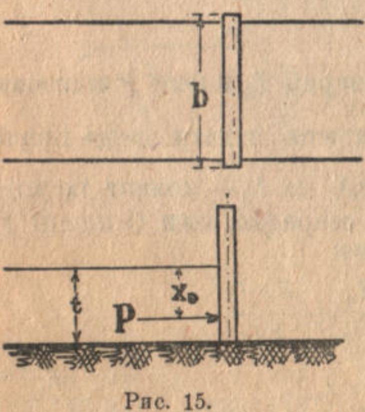


Рис. 15.

1. Канал прямокутнього перекрою, що ним підведено воду до турбінної камери, перегороджено дерев'яною заставкою (рис. 15) завширшки 2 *м*; глибина води в каналі $t = 1$ *м*. Визначити: a) силу тиску P на спущену заставку, коли з правого боку її води немає; b) координату центра тиску x_D всієї заставки; c) силу P_1, потрібну на те, щоб підійняти заставку, якщо коефіцієнт тертя дерева по залізу (ґари залізні) $f = 0{,}3$, а вага самої заставки $G = 250$ *кг*.

Розв'язання.

a) $P = Fz_0\gamma = bt\dfrac{t}{2}\gamma = \dfrac{bt^2}{2}\gamma = \dfrac{2\cdot 1^2}{2}\cdot 1000 = 1000$ *кг*

b) $x_D = x_0 + \dfrac{I_y}{Fx_0} = \dfrac{t}{2} + \dfrac{bt^3}{12bt\dfrac{t}{2}} = \dfrac{2}{3}t = 0{,}67$ *м*

Гідротехнікові дуже корисно пам'ятати, що для прямокутної заставки, яка доходить до вільного рівня, $x_D = \dfrac{2}{3}t$.

c) $P_1 = fP + G = 0{,}3\,.\,1000 + 250 = 550$ *кг*

2. Визначити: a) тиск води P на заставку, що прикриває прямокутній отвір у вертикальній стінці (рис. 16); b) координату x_D центра тиску D на цю заставку (розміри подано на рисунку).

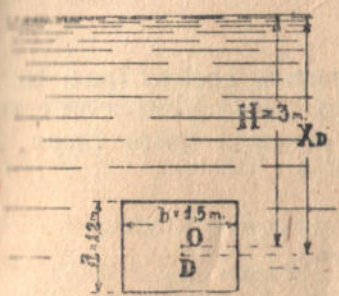


Рис. 16.

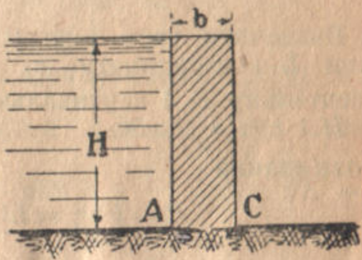


Рис. 17.

Розв'язання.

a) $P = Fz_0\gamma = abH\gamma = 1{,}5\,.\,1{,}2\,.\,3\,.\,1000 = 5400$ *кг*

b) $x_D = H + \dfrac{I_\eta}{Fx_0} = H + \dfrac{ba^3}{12abH} = H + \dfrac{a^2}{12H} =$

$$= 3 + \frac{1{,}2^2}{12\,.\,3} = 3{,}04 \text{ м}$$

3. Довести, що момент M сили P тиску води на будь-яку площу відносно горизонтальної осі η, яка проходить через центр ваги площі F, не залежить від глибини z_0 H занурення центра ваги цієї площі.

Розв'язання. Сила $P = Fz_0\gamma$; координата $x_D = x_0 + \dfrac{I_\eta}{Fx_0}$; звідси рамено сили P відносно осі η: $e = x_D - x_0 = \dfrac{I_\eta}{Fx_0}$. Пригадавши, що для похилої площі $x_0 = \dfrac{H}{\sin\alpha}$ (рис. 14), напишемо:

$$M = Pe = \frac{FH\gamma I_\eta}{FH}\sin\alpha = I_\eta\gamma\sin\alpha$$

4. Бетонова стінка водоймища має прямокутній перекрій (рис. 17). a) Визначити розмір b так, щоб у перекрої AC не

P

було розтяжних напруг; b) перевірити стінку на ковзання на площі AC, вважаючи, що коефіцієнт тертя $f=0{,}75$; c) визначити найбільшу напругу стиску в тому самому перекрої AC. Вага кубічного метра бетону $\gamma_б \approx 2000$ *кг/м³*.

Відповідь: a) $b \geqq H\sqrt{\dfrac{\gamma}{\gamma_0}}$

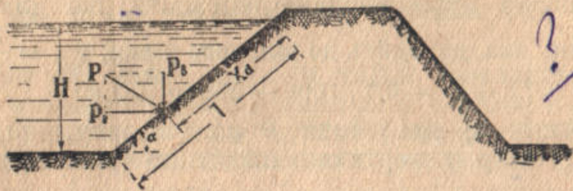


Рис. 18.

5. Визначити тиск води P на похилу греблю (рис. 18) завдовжки L і координату x_D центра тиску. Визначити також горизонтальну $P_г$ і вертикальну $P_в$ складові цього тиску. Глибину H і кут α задано.

Розв'язання.

$$P = Fz_0\gamma = Ll\frac{H}{2}\gamma = \frac{LH^2\gamma}{2\sin\alpha}$$

$$x_D = x_0 + \frac{I_\eta}{Fx_0} = \frac{l}{2} + \frac{Ll^3}{12Ll\frac{l}{2}} = \frac{2}{3}l = \frac{\ }{3}\,\frac{H}{\sin\alpha}$$

$$P_г = P\sin\alpha = \frac{LH^2}{2}\gamma \qquad P_в = P\cos\alpha = \frac{LH^2}{2}\gamma\operatorname{ctg}\alpha$$

5-а. Щоб обвалувати Дніпровські плавні на річці Конській, запроєктовано гатку, споховина якої 1 : 3 ($\operatorname{ctg}\alpha = 3$), а глибина води при найвищому її рівні $H = 6{,}5$ *м* („Нижний Днепр". Рабочая гипотеза. Москва, 1931 г.). Визначити вислідний тиск на 1 *м* довжини гатки при найвищому рівні води, а також горизонтальну й вертикальну складові цього тиску і координату x_D центра тиску.

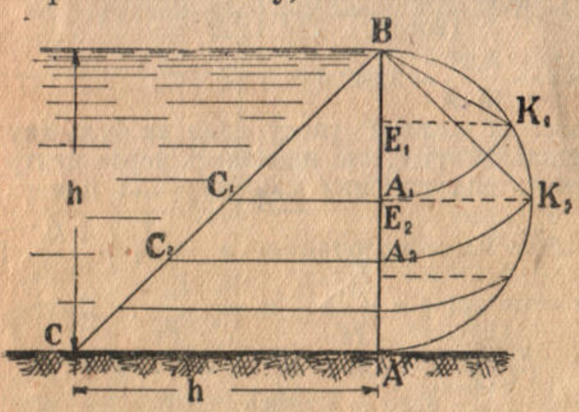


Рис. 19.

6. Плоска вертикальна металева заставка (рис. 19) має такі розміри: завширшки $b = 6$ *м*, заввишки

$h = 4$ *м.* Вода тільки з одного боку й сягає до верхнього краю заставки. a) Горизонтальними лініями так поділити площу заставки на $n = 4$ пояси, щоб вода тиснула на всі пояси однаково. b) Де треба, там до кожного пояса так принютувати зв'язні, щоб усіх їх було однаково обтяжено.

Розв'язання. a) Якщо графічно накреслити вислідний тиск P на стінку AB, то матимемо призму з основою ABC і висотою b. Щоб поділити тиск P на n частин, треба тільки поділити на стільки ж частин площу ABC (а разом і призму).

$$P = \frac{bh^2}{2}\gamma = \frac{6 \cdot 4^2}{2} \cdot 1000 = 48000 \text{ кг}$$

Тиск на один пояс:

$$\frac{P}{n} = \frac{48000}{4} = 12000 \text{ кг}$$

Тиск на верхній пояс подаємо трикутником A_1C_1B. Маємо пропорцію $P : \frac{P}{n} = AB^2 : A_1B^2$; звідси $A_1B^2 = \frac{h^2}{n}$; це означає, що A_1B є середня пропорціональна між h і $\frac{h}{n}$; якщо $BE_1 = \frac{h}{n}$, то BK_1 якраз і дорівнює A_1B.

Далі площа A_2BC_2 зображає тиск $2\frac{P}{n}$; тому $P : \frac{2P}{n} = AB^2 : A_2B^2$ або $A_2B^2 = \frac{2h^2}{n}$; звідси бачимо, що A_2B є середня пропорціональна між h та $2\frac{h}{n}$. На рисунку $E_1E_2 = \frac{h}{n}$; тому $BK_2 = A_2B$.

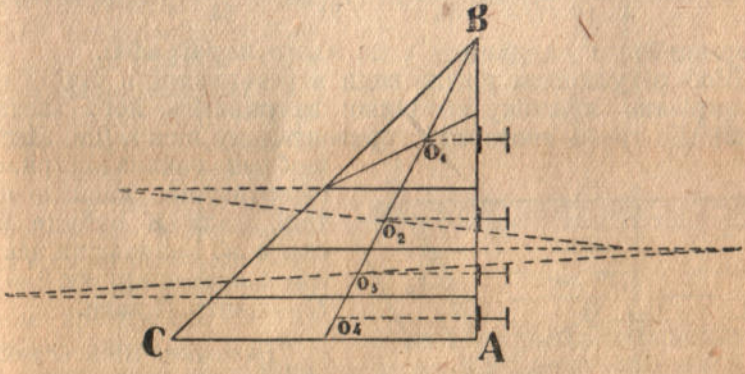
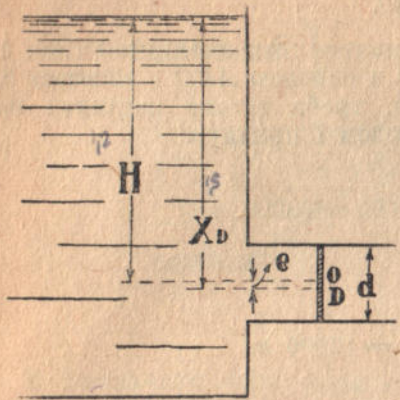


Рис. 20.

Аналогічно треба продовжити цей процес і далі.

b) Поділивши трикутник ABC (рис. 20) на рівні площі, зв'язні розташовуємо проти їх центрів ваги O_1, O_2, O_3...

7. Визначити тиск води P на круглий поворітний хлипак, припасований у трубі (рис. 21), діяметром $d = 2$ *м*. Глибина центра ваги хлипака під рівнем води у водоймищі, звідки починається труба, $H = 12$ *м*. Визначити розмір e між центром ваги O і центром тиску D хлипака, а також момент сили тиску води на хлипак відносно його осі O.



Момент сили Р.

Рис. 21.

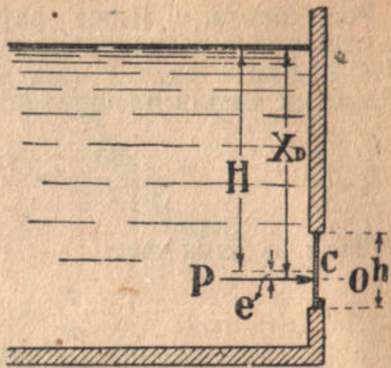


Рис. 22.

Розв'язання. Тиск на хлипак:

$$P = Fz_0\gamma = \frac{\pi d^2}{4} H\gamma = \frac{3{,}14 \,.\, 2^2}{4} \,.\, 12.1000 = 37700 \text{ кг} = 37{,}7 \text{ т}$$

$$e = x_D - x_0 = H + \frac{\pi d^4 4}{64\pi d^2 H} - H = \frac{d^2}{16H} = \frac{2{,}0^2}{16 \cdot 12} = 0{,}0208 \text{ м}$$

Момент сили P відносно осі O:

$$M = Pe = \frac{\pi d^2 H\gamma d^2}{4 \cdot 16 \cdot H} = \frac{\pi d^4}{64}\gamma = I_\eta \gamma = \frac{3{,}14 \cdot 2^4}{64} \cdot 1000 = 785 \text{ кг/м}$$

(Порівняйте з завданням 1 до цього параграфа).

8. Щоб реґулювати рівень води в резервуарі, в бічній стінці його вирізано прямокутне вікно; закривають його заставкою (рис. 22). Де треба поставити горизонтальну вісь O цієї заставки, щоб вона почала відкриватися (обертаючись навколо осі O) тоді, коли H набуде вартости 3 *м*? Завдовжки заставка $h = 1$ *м*, завширшки $b = 0{,}8$ *м*. C — центр її ваги.

Вказівка. Вісь O заставки має проходити через центр тиску заставки при глибині центра її ваги $H = 3$ *м*.

Відповідь: $e = \frac{h^2}{12H} \approx 0{,}0278$ *м*

Рис. 23.

9. Визначити тиск P на похилу прямокутню заставку (рис. 23), якщо глибина $H = 3{,}2$ *м*; кут, що його утворює заставка з вертикаллю, $\alpha = 30°$, а ширина заставки $b = 1{,}75$ *м*. Визначити також координату центра тиску x.

Відповідь: $P = 10{,}35$ *т*; $x_D = 2{,}46$ *м*.

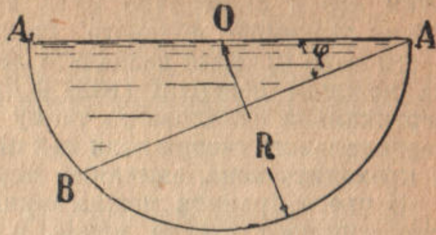


Рис. 24.

10. До посудини, що являє половину сфери, вставлено стінку AB (рис. 24). Визначити кут φ так, щоб тиск на стінку AB води, наллятої поверх неї до A_1OA, досягнув максимуму. Визначити також величину цього максимального тиску P_{max} і точку його прикладання.

Відповідь: $\varphi = 30°$; $P_{max} = \dfrac{3\sqrt{3}\pi R^2}{16}\gamma$.

8. ГОРИЗОНТАЛЬНА Й ВЕРТИКАЛЬНА СКЛАДОВІ ТИСКУ РІДИНИ НА СТІНКИ. ТИСК НА КРИВОЛІНІЙНУ СТІНКУ

Силу тиску води dP на елемент стінки dF (рис. 25) по нормалі до неї відшукаємо за формулою:

$$dP = dF z\gamma$$

Звідси за заданим напрямом легко визначити величину горизонтальної складової цієї сили:

$$dP_г = dF z\gamma \sin\alpha = (dF \sin\alpha) z\gamma$$

Алеж $dF \sin\alpha$ — це проекція ac (a_1c_1) елемента dF на вертикальну площу, перпендикулярну до визначеного напряму складової $dP_г$. Тепер можемо вивести таке правило визначати горизонтальну складову $dP_г$ тиску води на елемент похилої площі: треба спроектувати елемент dF на вертикальну площу, перпендикулярну до визначеного напряму, і потім обчислити тиск по нормалі на цю проекцію; відшуканий тиск і є горизонтальна складова тиску на елемент dF. Цілком зрозуміло, що це правило цілком придатне, щоб визначати горизонтальну складову тиску води не тільки на кожний елемент плоскої чи криволінійної стінки, а й на всяку скінчену плоску чи криволінійну поверхню або її частину. Вертикальна складова сили dP буде така:

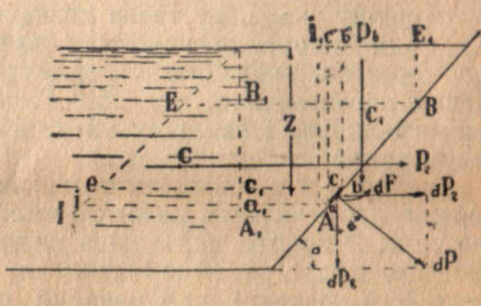


Рис. 25.

$$dP_в = dF x\gamma \cos\alpha = (dF \cos\alpha) z\gamma,$$

де $dF \cos\alpha$ є проекція bc елемента dF на горизонтальну площу; тепер стає цілком зрозуміло, що вертикальна складова $dP_в$ тиску рідини на елемент будь-якої поверхні дорівнює вазі стовпа води над проекцією ab до дзеркала рідини; коли вважатимемо, що об'єм abc є безконечно мала величина вищого порядку проти об'єму тількищо поданого стовпа води $bcb''c'$, то можна вивести таке правило визначати вертикальну складову тиску води на довільні поверхні (малі й скінчені, плоскі й криволінійні): вертикальна складова $P_в$ тиску води на поверхню дорівнює вазі вертикального стовпа води над цією поверхнею до дзеркала рідини й проходить вона, звичайно, через центр ваги C_1 цього стовпа.

З цього правила можна користуватися й тоді, коли над стінкою водяного стовпа немає, а його треба збудувати в думці (рис. 26); проте, тут складова $P_в$ матиме напрям знизу догори.

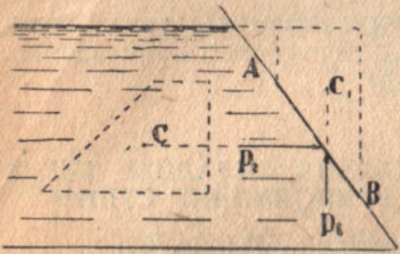


Рис. 26.

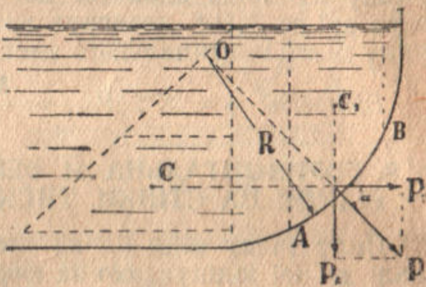


Рис. 27.

Знаючи складові $P_в$ і $P_г$ тиску води на криволінійну стінку легко, коли треба, визначити й вислідний тиск P (рис. 27) але тут розрізнятимемо два випадки: поверхня AB є частина циліндричної поверхні з вертикальною симетральною площею й перпендикулярними до неї горизонтальними твірними; другий загальніший випадок, а саме — довільна криволінійна стінка. У першому випадку треба визначити горизонтальну складову в напрямі, перпендикулярному до твірних циліндра, і точку C, що через неї проходить $P_г$; далі треба визначити $P_в$ і точку C_1. Легко переконатися, що $P_г$ і $P_в$ міститимуться в одній площі (симетральній), і вислідну тиску P дістанемо тоді, коли додамо геометрично $P_г$ і $P_в$.

Значно легше визначати положення вислідної P, коли поверхня AB є частина колового циліндра, бо тоді наперед відомо, що сила P пройде через вісь циліндра O. До цієї властивости колового циліндра спричинюється те, що тиск на кожний елемент його поверхні, спрямований по нормалі до елемента, проходить через вісь O, а тому й вислідний тиск мусить пройти через ту саму вісь. Вислідний тиск на довільну частину сферичної поверхні проходить через геометричний центр цієї поверхні.

У складніших випадках довільних криволінійних поверхонь горизонтальні й вертикальні складові іноді не перетинаються в одній точці і тоді крім вислідної сили P вони утворять ще пару сил. Легко зрозуміти, що пари сил на може бути тоді, коли поверхня має вертикальну симетральну площу.

Якщо треба визначити тиск рідини на складніші поверхні, то краще поділити їх на частини, визначити окремо горизонтальні й окремо вертикальні складові на ці частини, а після того вже обчислити складові $P_в$ та $P_г$ для всієї поверхні. Визначаючи горизонтальну складову, треба ділити поверхню на такі частини, щоб горизонтальні прямі, паралельні заданому напряму, перетинали кожну окрему частину поверхні тільки один раз. Аналогічно, визначаючи вертикальну складову, треба поверхню ділити на такі частини, щоб вертикальні прямі перетиналися з кожною з них тільки один раз.

ЗАВДАННЯ ДО § 8

1. Визначити a) горизонтальну $P_г$ і вертикальну $P_в$ складові тиску води на поверхню AKI (рис. 28) циліндричної заставки діяметром D й завдовжки L; b) величину й лінію дії вислідного тиску P на ту саму поверхню.

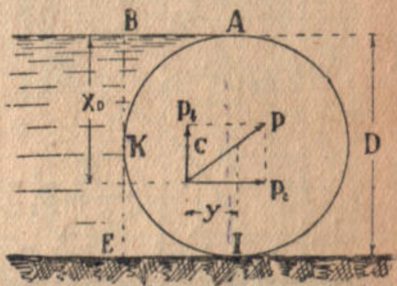


Рис. 28.

Розв'язання. a) Горизонтальна складова $P_г$ дорівнює тискові по нормалі на проекцію BKE поверхні AKI: $P_г = Fz_0\gamma = DL\frac{D}{2}\gamma = \frac{D^2L\gamma}{2}$; координата центра тиску площі BKE: $x_D = \frac{2}{3}D$. По вертикальному напряму донизу діє сила ваги води в об'ємі $ABKA$, а догори вага води в об'ємі $ABKIA$; вислідна $P_в$ цих двох сил дорівнює, очевидячки, вазі води в об'ємі півциліндра $AKIA$ й проходить через його центр ваги C:

$$P_в = \frac{\pi D^2 L}{4 \cdot 2}\gamma, \quad y = \frac{4R}{3\pi}$$

(координата центра ваги півкруга).

b) Коли відшукаємо не тільки величини складових $P_г$ і $P_в$, а й лінії їх дії, вислідну P можна визначити графічно, як це показано на рисунку. Коли ж визначено тільки величини $P_г$ і $P_в$, то величину вислідної тиску води можна відшукати з формули: $P = \sqrt{P_г^2 + P_в^2}$ і тангенс кута P з $P_г$: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_в}{P_г}$; під цим кутом поведемо P через центр кола. Вислідна P має пройти через нього ж, бо поверхня AKI є частина поверхні колового циліндра.

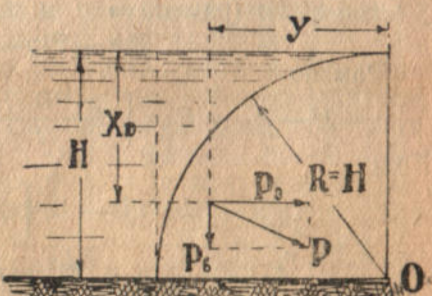


Рис. 29.

2. Визначити горизонтальну $P_г$ і вертикальну $P_в$ складові та тиск P на вісь O квадратної заставки (рис. 29). Глибина води H, довжина заставки L.

Відповідь: $P_г = \frac{LH^2}{2}\gamma;\quad x_D = \frac{2}{3}H$

$$P_в = LH^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\gamma;\ y = 0{,}776H$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right);\ P = \frac{LH^2}{2}\gamma\sqrt{1 + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Сила P проходить через вісь заставки.

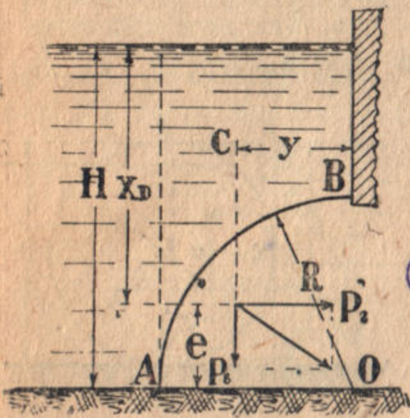


Рис. 30.

3. Отвір у дні засувають заставкою AB (рис. 30), що являє собою чверть циліндра радіусом R. Визначити горизонтальну $P_г$ і вертикальну $P_в$ складові тиску і точки їх прикладання — координати x_D і y. Довжина заставки L.

Розв'язання.

$$P_г = Fz_0\gamma = RL\left(H - \frac{R}{2}\right)\gamma = \frac{RL\gamma}{2}(2H - R)$$

$$P_в = HRL\gamma - \frac{\pi R^2}{4}L\gamma = \frac{RL\gamma}{4}(4H - \pi R)$$

$$x_D = x_0 + \frac{I_\eta}{Fx_0} = H - \frac{R}{2} + \frac{LR^3 \cdot 2}{12LR(2H - R)} = H - \frac{R}{2} + \frac{R^2}{6(2H - R)}$$

Щоб визначити точку прикладання сили $P_в$ (координату), візьмемо моменти чинних сил відносно точки O. Сума моментів складових відносно довільної точки дорівнює моменту вислідної відносно тієї самої точки. Момент вислідної відносно точки O дорівнює нулю (рамено $= 0$), а тому

$$P_г e - P_в y = 0;\quad P_г e = P_в y$$

Рамено

$$e = H - x_D = H - \left[H - \frac{R}{2} + \frac{R^2}{6(2H - R)}\right] = \frac{R}{2} - \frac{R^2}{6(2H - R)}$$

Тоді

$$y = \frac{P_г e}{P_в} = \frac{RL\gamma(2H - R)\left[R - \frac{R^2}{3(2H - R)}\right]}{2 \cdot 2\frac{RL\gamma}{4}(4H - \pi R)} = \frac{2R(3H - 2R)}{3(4H - \pi R)}$$

§ 9. АРХІМЕДІВ ЗАКОН

Дослідимо сили, що діють на тіло $ABCD$, занурене в воду. Для цього збудуємо циліндричну поверхню з горизонтальними твірними довільного напряму, що стикається з поверхнею тіла

ABCD; лінія стику цих поверхонь поділить поверхню *ABCD* на дві частини: *AFBEC* та *AFBED* (рис. 31). Горизонтальні складові тиску води на ці поверхні (за напрямом твірних циліндра) врівноважуватимуть одна одну, бо обидві поверхні мають ту саму вертикальну проєкцію $A_1E_1B_1F_1$, а це говорить про те, що обидві складові матимуть однакові абсолютні величини; напрями ж їх, очевидячки, протилежні. Наведені міркування можна застосувати до будь-якого горизонтального напряму. Отож доведено, що вислідна тиску води на занурене тіло може мати тільки вертикальний напрям. Щоб визначити її величину, опишемо коло тіла *ABCD* циліндер з вертикальними твірними; знову лінія стику цих поверхонь *DFCED* поділить поверхню зануреного тіла на дві частини — *ADFCE* і *BDFCE*.

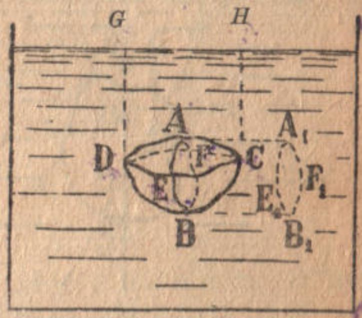


Рис. 31.

Тиск по вертикальному напряму на *ADFCE* дорівнюватиме вазі стовпа води *GHDFCEA* і буде спрямований донизу. Аналогічно тиск на *BDFCE* дорівнюватиме вазі стовпа води *GHDFCEB*, але спрямований він уже догори. Різниця обох сил, очевидячки, буде спрямована догори, дорівнюватиме вазі води в об'ємі зануреного тіла й проходитиме через центр ваги об'єму тіла. Тепер уже можемо зформулювати *Архімедів* (Archimedes) закон: вислідна тиску рідини на занурене в неї тіло (або підіймальна сила) дорівнює вазі витиснутої рідини; спрямована вона знизу догори й проходить через центр ваги витиснутого тілом об'єму рідини (центр водообсягу).

§ 10. РІВНОВАГА ЗАНУРЕНИХ У РІДИНУ ТІЛ. СТІЙКІСТЬ ПЛАВАННЯ ТІЛ

Позначимо вагу тіла літерою G, а вагу води в об'ємі тіла літерою P. Коли $P < G$, то тіло в воді тонутиме; коли $P = G$, тіло в воді не буде ані тонути, ані спливати; коли ж $P > G$, то цілком занурене тіло, очевидячки, спливатиме, аж доки занурена частина його витискатиме якраз такий об'єм води, що його вага P дорівнюватиме вазі тіла G*. Отже рівність $P = G$ є неодмінна умова рівноваги цілком зануреного в воду тіла і тіла, що плаває на її поверхні; але цієї умови ще недосить, щоб тіло було в стані рівноваги.

Розглянемо спочатку рівновагу цілком зануреного тіла. На нього діє зверху вниз сила тяжіння G, прикладена в центрі (фізичному) ваги цього тіла; знизу догори діє сила P (що дорівнює G), прикладена в центрі водообсягу. Центр ваги тіла

*Корисно знати, що для цілком зануреного тіла нормально розвиненої людини підіймальна сила води більша за вагу її тіла (особливо, коли в легенях є певна кількість повітря). Тому людина може лежати на воді навіть не рухаючись. Лежати треба на спині, щоб тільки обличчя виступало над водою. Це є ледве чи не найзручніший спосіб навчитися плавати.

й центр ваги об'єму тіла можуть зливатися, але можуть і не зливатися. В першому випадку сили P і G врівноважуються при довільному положенні тіла, тобто матимемо невизначену рівновагу; якщо цієї умови не дотримано, то рівновага може бути тільки при такому положенні тіла, коли його центр ваги C й центр водообсягу Q (рис. 32 і 33) будуть на одній вертикальній

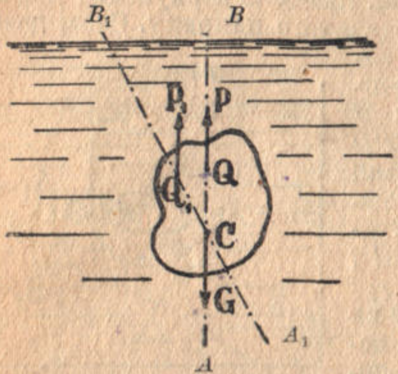


Рис. 32.

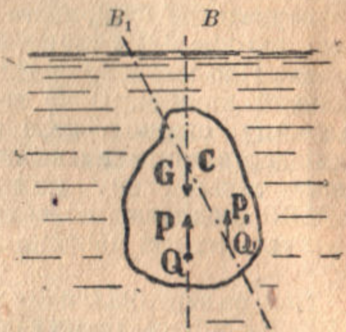


Рис. 33.

лінії. Але й тут треба розрізняти два випадки: центр водообсягу Q буде вищий за центр ваги тіла C (рис. 32) — тоді рівновага буде стійка, бо коли тіло відхиляється від положення рівноваги AB до нового положення A_1B_1, то виникає момент від сил P_1 і G, який повертатиме його до початкового положення; другий випадок — коли Q нижче ніж C (рис. 33) — рівновага буде нестійка, бо коли тіло відхиляється від положення рівноваги, то виникає момент, що відхилятиме тіло від початкового положення далі й далі, аж доки Q не стане над C.

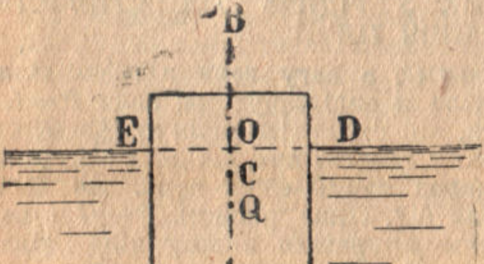


Рис. 34.

При надводному плаванні занурена частина тіла витискає такий об'єм води (водообсяг), щоб вага його P дорівнювала вазі тіла G. Площу ED (рис. 34), що відділяє надводну частину від зануреної, звемо площею плавання (а також площею ватерлінії), а лінію, де ця площа перетинається з поверхнею тіла, — ватерлінією. Безмежно велика кількість плоских поверхонь може відділити однакові (за розміром) водообсяги, але рівновага й тут може бути тільки при умові, що центр водообсягу Q і центр ваги тіла C містяться на одній вертикальній, яку зватимемо віссю плавання. Легко зрозуміти, що рівновага й при надводному плаванні буде стійка *, якщо центр ваги тіла буде нижчий

* Про судна кажуть „держкість" замість „стійкість".

проти центра водообсягу. Але зараз подамо умову, дотримуючись якої, матимемо стійке надводне плавання навіть і тоді, коли центр водообсягу буде нижчий проти центра ваги. Відхилимо тіло, що плаває на поверхні (рис. 35 і 36), від стану його рівноваги на малий кут $d\varphi$; при цьому клин EE_1O виступить із води, а клин DD_1O зануриться. Наслідком цього центр водообсягу переміститься з Q до Q_1. Сила P, що тепер проходить через точку Q_1 перетнеться з віссю плавання в точці M, яку звуть метацентром. З рисунка 35 видно таке: якщо метацентр M вище, ніж центр C ваги тіла, то дві сили P і G, які утворюються, коли трохи відхилити тіло від стану рівноваги, повертають його в початкове положення; коли ж метацентр нижче від центра ваги тіла C, то ці сили перекидають тіло.

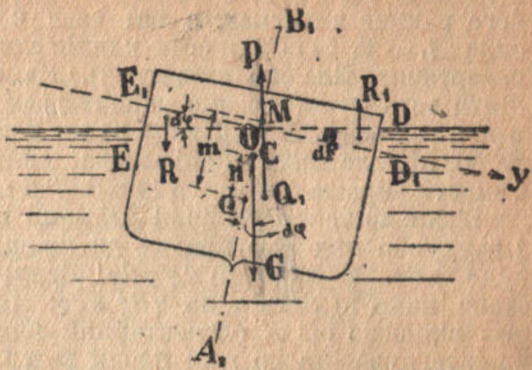


Рис. 35.

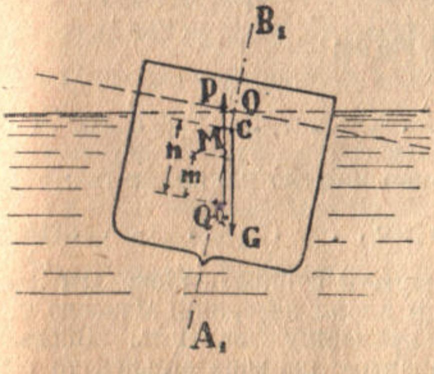


Рис. 36.

Отже рівновага тіла, що плаває, є стійка, коли метацентр вищий за центр ваги тіла. Легко переконатися, що ця умова стійкости плавання охоплює й той, уже попереду розглянутий випадок, коли центр водообсягу вищий від центра ваги тіла. Отже умова ця є загальна умова стійкости плавання тіл.

§ 10-а. АНАЛІТИЧНА ОЗНАКА СТІЙКОСТИ ПЛАВАННЯ

Виведемо умову стійкости надводного плавання в аналітичній формі. В площі плавання ED (рис. 35) вісь x спрямуємо через початок координат O перпендикулярно до площі фігури, а вісь y — по лінії OD_1. Позначимо MQ літерою m, а CQ літерою n; рівновага плавання буде стійка, коли $m - n > 0$.

Величину n ми знаємо, а величину m визначимо. Коли від стану рівноваги відхилимо тіло на малий кут $d\varphi$, то тиск води на тіло зміниться. Цю зміну можна досліджувати двома способами. Можна вважати, що точка прикладання Q підіймальної сили P переміститься в точку Q_1 — центр ваги нового зануреного об'єму, або можна уявляти собі й таке: сила P, як і до повертання тіла, прикладена до точки Q, але зате додано пару сил $R_1 R$, які утворилися тому, що клин EE_1O виступив із води й до його ваги нібито додалася вага R того об'єму води, що він його раніше витискав, а від ваги клина DD_1O ніби відднялася сила $R_1 = R$, бо об'єми обох клинів однакові (занурений об'єм від повертання тіла не зміниться). На підставі сказаного можна дійти того висновку, що момент двох сил R і R_1 мусить дорівнювати моменту $P \cdot QQ_1$, який виник тоді, коли перемістилися точка Q прикладання підіймальної сили до точки Q_1, бо обидва моменти виражають ту саму зміну в дії сили тиску води на тіло.

Візьмемо тепер у площі DE малу частку dF з координатою y і збудуємо над нею призму до площі E_1D_1; висота цієї призми буде $y\,d\varphi$, а об'єм її $dF\,y\,d\varphi$. Занурюючись у воду, призма стане начебто легша на $\gamma\,dF\,y\,d\varphi$; ця елементарна сила утворює відносно осі x елементарний момент $\gamma\,dF\,y\,d\varphi\,y = \gamma\,dF\,y^2\,d\varphi$; проінтеґрувавши по всій площі ватерлінії, визначимо, очевидячки, момент двох сил R і R_1: $M = \gamma\,d\varphi \int_F dF\,y^2$. Алеж інтеґрал $\int_F dF\,y^2$ є не що інше, як момент інерції I_x площі ватерлінії проти осі x; тому $M = \gamma I_x\,d\varphi$. Момент $P \cdot QQ_1$ можна подати ще в такій формі: $V\gamma m\,d\varphi$, де V є об'єм зануреної частини тіла; QQ_1 можна порівняти з $m\,d\varphi$, бо кут $d\varphi$ малий. Порівнявши тепер обидва моменти, матимемо:

$$\gamma I_x\,d\varphi = \gamma V m\,d\varphi;$$

звідси

$$m = \frac{I_x}{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Умову рівноваги плавання тепер можемо написати так:

$$\frac{I_x}{V} - n > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10\text{-a})$$

Цілком зрозуміло, що, досліджуючи стійкість рівноваги плавання, треба брати момент інерції площі ватерлінії відносно тієї осі, відносно якої він має найменшу вартість. Віддаль $MC = m - n$ звемо висотою метацентра; що вона більша, то рівновага плавання стійкіша.

ЗАВДАННЯ ДО §§ 9 і 10

1. Людина може підняти важок вагою $G = 50$ *кг*. Визначити вагу чавунного важка G_1, що його може підняти та сама людина в воді. Для чавуна вага кубічної одиниці $\gamma_1 = 7000$ *кг/м³*.

Розв'язання. Об'єм важка, що його людина може підняти в воді, $V_1 = \frac{G_1}{\gamma_1}$; за Архімедовим законом на цей важок знизу догори діятиме в воді підіймальна сила $V_1\gamma = \frac{G_1}{\gamma_1}\gamma$. Вагу G_1 визначимо з рівняння:

$$G_1 - \frac{G_1}{\gamma_1}\gamma = G;\; G_1 = \frac{G}{1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}} = \frac{50}{1 - \frac{1000}{7000}} \approx 58{,}3 \text{ кг}$$

2. Площа ватерлінії судна $F = 100\ м^2$. Наскільки глибше воно зануриться у воду, коли вантажа в ньому буде більше на $G = 5000\ кг$.

Відповідь: $\frac{G}{F\gamma} = \frac{5000}{100 \cdot 1000} = 0{,}05\ м = 5\ см$

3. У воді плаває дерев'яний паралелепіпед (рис. 37) завдовжки l, завширшки b і заввишки h (розмір h — вертикальний). При якому відношенні $\frac{h}{b}$ рівновага плавання перестає бути стійка? Питома вага дерева $\gamma_д = 900\ кг/м^3$.

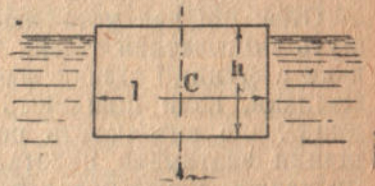


Рис. 37.

Розв'язання. Паралелепіпед буде занурений у воду на $0{,}9h$. Центр ваги його буде на висоті $0{,}5h$, а центр водообсягу на висоті $0{,}45h$ від нижньої його основи; отже $n = 0{,}05h$.

Тепер напишемо умову стійкого плавання за формулою (10-а):

$$\frac{b^3 l}{12(0{,}9hbl)} - 0{,}05h > 0$$

Звідси відшукаємо, що стійкість рівноваги плавання порушиться, коли $\frac{h}{b} < 1{,}36$.

4. Циліндричний поплавець (рис. 38) з діяметром $d = 15\ см$ важить $G = 2\ кг$. Центр ваги його C міститься на висоті $h = 6\ см$ від основи. Перевірити стійкість плавання поплавця.

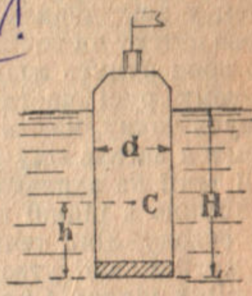


Рис. 38.

Розв'язання. Водообсяг:

$$V = \frac{G}{\gamma} = \frac{2}{1000} = 0{,}002\ м^3$$

$$m = \frac{I_x}{V} = \frac{\pi d^4}{64 V} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}15^4}{64 \cdot 0{,}002} = 0{,}0125\ м = 1{,}25\ см$$

$$H = \frac{V}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{0{,}002}{0{,}0179} = 0{,}112\ м$$

Висота центра водообсягу над основою:

$$\frac{H}{2} = 0{,}056\ м;\ n = h - \frac{H}{2} = 0{,}06 - 0{,}056 = 0{,}004\ м = 0{,}4\ см$$

$$m - n = 1{,}25 - 0{,}4 = 0{,}85\ см > 0$$

Отже плавання стійке.

РОЗДІЛ II

РУХ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ГІДРАВЛІКИ

§ 11. ЗАГАЛЬНІ ЗАУВАЖЕННЯ Й ВИЗНАЧЕННЯ

Рух рідини називають усталений (стаціонарний), якщо швидкість і тиск у кожній точці її залишаються сталі.

Отож під час усталеного руху рідини швидкість і тиск можуть змінюватися тільки при переході від точки до точки, тобто вони є функції тільки координат точки і не залежать від часу. Навпаки, коли швидкість і тиск залежать не тільки від координат, що визначають положення точок, а й від часу, то рух рідини зватимемо неусталений. Траєкторії часток рідини, що проходять через певну точку при усталеному русі, з часом не змінюються; щодо неусталеного руху, то траєкторії взагалі змінюються, але вони можуть залишатися й незмінні, як от при неусталеному русі в трубі, якщо її цілком виповнено рідиною. Лінія, що дотикається в певний момент до напрямів швидкостей у всіх точках, через які вона проходить, називається лінією потоку чи течії; якщо траєкторії часток рідини не змінюються, то вони будуть водночас і лініями потоку. Взагалі ж при неусталеному русі частки рідини, що проходять послідовно через якусь точку, мають у ній різні швидкості з різними напрямами; тому в загальному випадку неусталеного руху траєкторії й лінії течії не зливаються.

Якщо в рідині взяти малу площу й провести через усі точки її обводу лінії течії, то вони утворять трубку течії. Рідина ж у трубці течії утворює елементарну струминку.

Рух рідини і усталений, і неусталений у вигляді струмини, що не змінюється з часом і має малий поперечний перекрій, називаємо однорозмірний, бо при ньому положення частки в струмині можна визначити одною тільки віддаллю від якогось певного (початкового) перекрою її, а не трьома *Декартовими* (Descartes) координатами, як звичайно.

Рух звемо рівномірний (одноманітний), коли швидкість вздовж струминки не змінюється. Якщо ж при усталеному русі швидкість вздовж струминки змінюється, то такий рух називаємо нерівномірний.

Зважаючи на складність явищ руху рідин, у загальному курсі гідравліки обмежуються звичайно вивченням тільки тих випадків, що в практиці багато важать, а саме: витікання з отворів у стінках посудин, рух рідини у трубах та в ґрунтах і рух рідин у відкритих коритах, тобто в каналах та річках; в усіх цих випадках розглядають рух усталений.

Вивчення явищ неусталеного руху рідини має менше практичне значення, а досліджувати його багато важче, ніж усталений. В цьому курсі виведемо загальні рівняння однорозмірного неусталеного руху; крім того, розглянемо коротенько ще деякі випадки неусталеного руху, наприклад витікання води з посудини через отвори при змінному рівні води в ній тощо. Ці випадки мають значення в техніці, а досліджувати їх порівняно легко.

Основні рівняння й теореми, що стосуються до руху рідин, виведемо спочатку для ідеальної рідини, а вже потім, на підставі ляборaторних та практичних досліджень, внесемо відповідні корективи, зважаючи на властивості реальних рідин, що ними вони відрізняються від рідин ідеальних.

§ 12. ЕЙЛЕРОВІ РІВНЯННЯ РУХУ. ТИСК У РІДИНІ ПІД ЧАС РІВНОБІЖНОГО РУХУ Й ПАДАННЯ ЇЇ

Рівняння руху рідин можна дістати з рівнянь рівноваги їх (1) на підставі *Д'Алямберового* принципу — додавши до масових сил X, Y, Z сили інерції. Позначимо складові прискорення по осях координат літерами j_x, j_y, j_z; тоді рівняння руху можна написати так:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\rho(X-j_x);\quad \frac{\partial p}{\partial y}=\rho(Y-j_y);\quad \frac{\partial p}{\partial z}=\rho(Z-j_z)\quad . \ . \ . \ . \ (11)$$

У найзагальнішому випадку неусталеного руху рідини масові сили, прискорення й тиск є функції від координат розглядуваної точки, а також і від часу.

Позначивши складові швидкости рідини по осях координат v_x, v_y, v_z і пам'ятаючи, що й вони є функції часу й координат, можемо написати:

$$dv_x=\frac{\partial v_x}{\partial t}dt+\frac{\partial v_x}{\partial x}dx+\frac{\partial v_x}{\partial y}dy+\frac{\partial v_x}{\partial z}dz$$

або поділивши на dt:

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Тут $\frac{dv_x}{dt}$ є складова прискорення по осях, що її вже позначено j_x; $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ і $\frac{dz}{dt}$ є складові швидкості v_x, v_y, v_z.

Підставивши ці величини матимемо:

$$j_x=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_x}{\partial z}v_z$$

Вирази для j_y і j_z можна написати цілком аналогічно. Підставивши тепер вирази для j_x, j_y і j_z до рівнянь (11) та трохи перетворивши їх, одержимо:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\quad . \ . \ (11\text{-a})\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}$$

Це і є *Ейлерові* диференціяльні рівняння руху ідеальної рідини. Якщо розглядаємо рух усталений, то в рівняннях (11-а) члени $\frac{\partial v_x}{\partial t}$, $\frac{\partial v_y}{\partial t}$ та $\frac{\partial v_z}{\partial t}$ зникнуть, бо швидкість у кожній точці рідини не залежить від часу. Тому *Ейлерові* диференціяльні рівняння усталеного руху рідини мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \qquad \ldots \text{(11-b)} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

Як бачимо, в *Ейлерових* рівняннях руху рідини є чотири невідомих: v_x, v_y, v_z і p ($\rho = \text{const}$). Щоб можна було визначити ці невідомі, треба скласти ще одно рівняння — так зване рівняння нерозривности. Виділимо в рідині, що рухається, паралелепіпед з боками dx, dy, dz (рис. 3); через стіну його AC_1A_1C за одиницю часу входить об'єм рідини $v_x\,dy\,dz$, а через стіну BDB_1D_1 виходить за той самий час $(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx)\,dy\,dz$; тут v_x є складова швидкости на стіні ACA_1C_1 по осі x, $\frac{\partial v_x}{\partial x} dx$ є приріст швидкости (додатний чи від'ємний) при переході до стіни BDB_1D_1. Різниця обох об'ємів (додатна чи від'ємна) дорівнює $\frac{\partial v_x}{\partial x} dx\,dy\,dz$. Аналогічно напишемо вирази для двох інших пар стін паралелепіпеда: $\frac{\partial v_y}{\partial y} dx\,dy\,dz$ і $\frac{\partial v_z}{\partial z} dx\,dy\,dz$.

Сума цих різниць дорівнює нулю, бо об'єм паралелепіпеда незмінний і виповнений рідиною (в рідині нема розривів); отже

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = 0$$

або

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(11-c)}$$

Рівняння (11—11-с) є основа теоретичної гідродинаміки ідеальної рідини. Інтеґрувати їх взагалі дуже складно, а для багатьох випадків ми їх ще й досі не вміємо розв'язувати.

Рівняння (11) дають змогу порівняно легко визначити одиничний тиск у рідині в стані руху (гідродинамічний тиск) в деяких окремих випадках, що саме мають велику вагу для гідравліки.

Для цього треба помножити кожне з рівнань (11) відповідно на dx, dy, dz і після того додати:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho[(X - j_x)\,dx + (Y - j_y)\,dy + (Z - j_z)\,dz] \ldots \text{(12)}$$

Якщо рух усталений, ліва частина цього рівняння буде повний диференціял, бо p тоді не залежить від часу; ось чому

$$dp = \rho[(X - j_x)\,dx + (Y - j_y)\,dy + (Z - j_z)\,dz] \quad . \; . \; . \; (12\text{-a})$$

Порівнюючи рівняння (11) і (12-а) з рівнянням (1) та (2), можна дійти висновку, що в рідині, яка рухається, одиничний тиск (гідродинамічний) підпорядкований іншим законам, ніж тиск у рідині в стані рівноваги (гідростатичний тиск).

Застосуємо рівняння (12-а) до руху паралельними й прямолінійними струминками. Щоб дослідити цей випадок, спрямуємо вісь x (рис. 39) паралельно до струминок і розглянемо розподіл тиску в площі zy, перпендикулярній до напряму руху. В площі zy, очевидячки, матимемо:

$$j_y = 0, \; j_z = 0 \text{ і } dx = 0$$

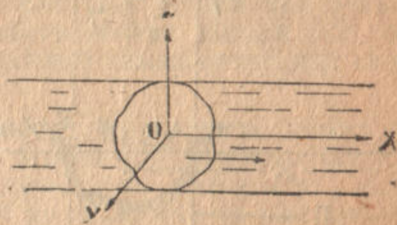


Рис. 39.

Тепер рівняння (12-а) можна подати так:

$$dp = \rho(Y\,dy + Z\,dz)$$

Легко помітити, що це рівняння є окремий випадок відповідного рівняння гідростатики (2); тому можемо подати таке важливе твердження: одиничний тиск при паралельному (або близькому до нього) русі в кожному перекрої, перпендикулярному до напряму потока (але не вздовж потока), розподіляється за законами гідростатики.

Досить легко також визначити розподіл тиску в масі рідини тоді, коли прискорення частинок дорівнюють величиною й напрямом тим прискоренням, що їх спричинюють масові сили.

Важливий приклад такого руху — це струмина, що витікає з отвору в стінці посудини й потім вільно спадає. Спрямувавши вісь z вертикально донизу, матимемо для кожної частки в струмині:

$$Z = g; \; j_z = g; \; X = 0; \; Y = 0; \; j_x = 0; \; j_y = 0$$

Тому рівняння (12-а) можна написати так:

$$dp = 0,$$

тобто одиничний тиск у всіх точках вільної струмини сталий і дорівнює, очевидячки, тиску на поверхні її.

ЗАВДАННЯ ДО § 12

1. Береги річки на певній довжині мають форму дуг (рис. 40) двох концентричних кіл. Припустімо, що швидкість у всіх точках поперечного перекрою однакова. Відшукати рівняння кривої AB і висоту e рівня води біля лівого берега над рівнем коло правого берега.

Розв'язання. Не зважаючи на спад річки на безконечно короткій дільниці dy, можна вільну поверхню на цій дільниці вважати за циліндричну з горизонтальними твірними.

На цій поверхні тиск всюди однаковий, тому диференціяльне рівняння її одержимо, дорівнявши в рівнянні (11) dp до нуля:

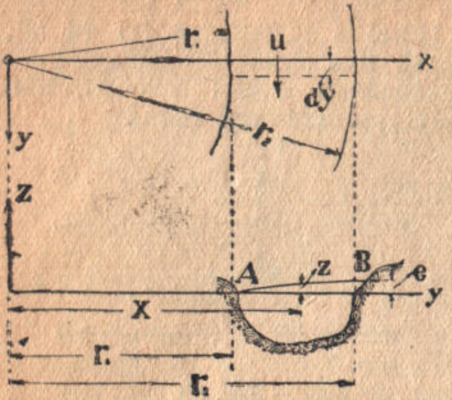


Рис. 40.

$$(X-j)\,dx+(Y-j_y)\,dy+$$
$$+(Z-j_z)\,dz=0$$

В цьому рівнянні для частки з координатою x: $Z=g$; $X=0$; $Y=0$; $j_z=0$; $j_y=0$; $j_x=-\frac{u^2}{x}$.

Підставивши, матимемо:

$$\frac{u^2}{x}\,dx-g\,dz=0$$

Інтеґрал цього рівняння:

$$u^2\ln x-gz=C$$

Довільну сталу C одержимо, скориставшись з умови: при $x=r_1$, $z=0$. Після підставлення: $u^2\ln r_1=C$. Отож рівняння циліндричної поверхні на дільниці dy, а водночас і рівняння кривої $\overset{\frown}{AB}$, набуде такого вигляду: $u^2\ln x-gz=u^2\ln r_1$ або трохи інакше: $z=\frac{u^2}{g}\ln\frac{x}{r_1}$.

Висоту e можна визначити з цього самого рівняння, підставивши до нього замість x радіюс r_2, отож $e=\frac{u^2}{g}\ln\frac{r_2}{r_1}$.

§ 13. ЕНЕРҐІЯ РІДИНИ. РІВНЯННЯ Д. БЕРНУЛЛІ

Частка рідини може мати, як і тверде тіло, кінетичну енерґію та енерґію положення; але крім цих двох форм механічної енерґії, частка рідини, що є під тиском, має ще так звану енерґію тиску. Щоб краще зрозуміти, що таке „енерґія тиску“, уявімо собі велику посудину (рис. 41), у стінці якої є отвір з дуже малою площею ΔF; тому можна вважати, що одиничний тиск (розглядаємо тиск робітний) $p=h\gamma$ однаковий у всіх точках площі ΔF отвору.

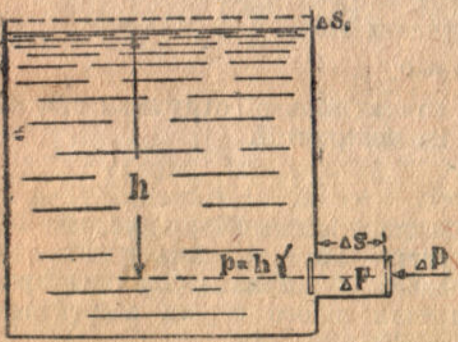


Рис. 41.

Уявімо собі далі, що отвір закрито засувкою, а з другого боку до нього щільно припасовано трубочку, виповнену водою й закриту з другого кінця толоком з тою самою площею ΔF; цей толок може рухатися в трубочці без тертя. Відкриємо засувку й помалу пересунемо толок до лівого кінця трубочки, витискаючи воду з трубочки до простору з тиском $p=h\gamma$.

Для цього до толока доведеться прикласти силу $\Delta P = p\Delta F$ і витратити роботу $\Delta A_1 = \Delta P \, . \, \Delta s$. Тиск протягом усього ходу Δs толока вважатимемо за сталий, тобто не зважатимемо на те, що під час пересування толока рівень підіймається на малу, якщо порівняти з h, величину Δs_1.

Робота ΔA_1, витрачена на нагнітання об'єму води $\Delta F \Delta s = \Delta V$ до простору з тиском p, перетворюється в енерґію тиску цього об'єму. Роботу ΔA_1 можна знову мати від рідини при зворотному процесі. Очевидячки, цю роботу можна подати ще так: $\Delta A_1 = p \, \Delta F \Delta s = p \, \Delta V$. За цією формулою можна обчислити енерґію тиску p об'єму води ΔV.

Замість того, щоб нагнітати воду через отвір, можна закрити засувку, підняти трубку з водою до вільного рівня й вилити її. Щоб підняти воду, доведеться витратити роботу $\Delta A_2 = \Delta F \Delta s \gamma h = \Delta V \gamma h$ (знову таки не зважаючи на різні втрати енерґії).

Робота ΔA_1 (що є водночас і енерґія тиску) має дорівнювати роботі ΔA_2. Щоб визначити енерґію p тиску в 1 *кг* рідини, треба поділити обидві частини рівняння $\Delta A_1 = \Delta A_2$ на вагу рідини $\Delta V \gamma$, що міститься в об'ємі ΔV; спростивши, матимемо: $\frac{p}{\gamma} = h$.

Отож енерґію тиску 1 *кг* рідини виміряють часткою $\frac{p}{\gamma}$; ця частка якраз дорівнює висоті h, що утворює тиск p; тому цю частку $\frac{p}{\gamma}$ часто звуть висотою тиску. Легко помітити, що склад величини (розмірність) $\frac{p}{\gamma}$ є довжина. На практиці висоту $\frac{p}{\gamma}$ можна виміряти за допомогою так званої п'єзометричної трубки. Це — вертикальна, відкрита з обох кінців скляна трубка; один кінець її занурюють у рідину (перпендикулярно до напряму руху) до точки, в якій бажано виміряти висоту $\frac{p}{\gamma}$, або ж цю трубку притуляють до отвору в стінці труби (рис. 42 — коло B).

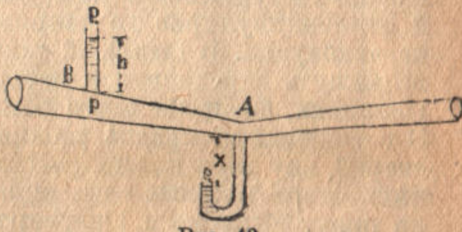


Рис. 42.

Якщо тиск біля отвору дорівнює p, то цілком зрозуміло, що рідина підіймається в трубці на висоту $h = \frac{p}{\gamma}$; тому висоту $\frac{p}{\gamma}$ звуть п'єзометричною. Висоту абсолютного тиску в якійсь точці можна відшукати, додавши до п'єзометричної висоти в тій самій точці висоту атмосферного тиску $\frac{p_0}{\gamma}$, яка становить приблизно 10 *м* * водяного стовпа. Висоту абсолютного тиску можна виміряти, притуливши до отвору в трубі барометричну трубочку, тобто залютовану з одного боку трубочку, що з неї висмоковано повітря **. Абсолютний гідродинамічний тиск, а також і відповідна до нього висота, не можуть набувати від'ємних вартостей, так само, як і абсолютний гідростатичний тиск. П'єзометрична ж висота, що відповідає манометричному робітному тиску, може набувати й від'ємні вартості, а саме тоді, коли тиск у рідині менший, ніж атмосферний. Це може, наприклад, трапитися (докладніше про це сказано далі) в тому випадку, коли труба значно звужується, а потім знову розширюється (перекрій A на рис. 42). Якщо до такого місця притулити п'єзометричну трубку, то в ній не тільки не підійметься вода, а навпаки — через неї засмоктуватиметься повітря й тому тиск у цьому перекрої не можна виміряти звичайною п'єзометричною трубкою. Тоді п'єзометр треба змінити, спрямувавши його спочатку вниз, а потім загнувши його догори (як це показано на рис. 42) біля точки A ***. Робітний тиск у точці A буде $-x\gamma$, а п'єзометрична висота $-x$ теж від'ємна і спрямована від труби донизу.

Коли б до отвору біля точки A притулити барометричну трубочку, то в ній вода піднялася б на висоту $\frac{p_0}{\gamma} - x$, де p_0 атмосферний тиск.

Тепер розглянемо, як виводити рівняння *Д. Бернуллі* (D. Bernoulli) для усталеного руху. Припустімо, що рідина ідеальна, що потік, який далі розглядатимемо, складається з паралельних або приблизно паралельних струминок, рух усталений і з об'ємних сил є тільки сила тяжіння. Виділимо спочатку (рис. 43) довільну струминку AB малого поперечного перекрою. Доведемо, що вона не може ні віддавати, ні забирати енерґії від прилеглих струминок. Справді, сили тиску суміжних струминок на AB і навпаки спрямовано по нормалях до бічної поверхні струминки й перпендикулярно до напряму руху, отож вони ніякої роботи не виконують. В ідеальній рідині частинки суміжних струминок не можуть переходити (і переносити енерґію) до струминки AB і навпаки, бо проти цього говорить саме визначення струминки. З наведених міркувань робимо висновок, що загальна кількість енерґії, яку несе кожна частка струмини під час руху, є величина стала і тільки одна відміна енерґії може перетворюватись на іншу. Візьмемо в I перекрої струминки AB через точку O_1 частку рідини вагою ΔG і визначимо, скільки енерґії несе ця частка. Висоту положення z_1 вимірятимемо від якоїсь горизонтальної площі порівняння NN (нулевої площі), розміри поперечних перекроїв струминки братимемо такі малі, щоб висоти всіх

* Вартість висоти атмосферного тиску коливається: пересічна ж на рівні моря становить 10,33 *м*.

** На практиці вода в барометричній трубочці підійметься менше, ніж це відповідає абсолютному тиску в отворі труби, менше на висоту тиску водяної пари температури води (або іншої рідини).

*** Це вже буде власне вакуумметр. До нього треба налляти води через відкрите його рамено.

точок кожного перекрою над площею NN, одиничний тиск і швидкості у всіх точках кожного перекрою можна було вважати

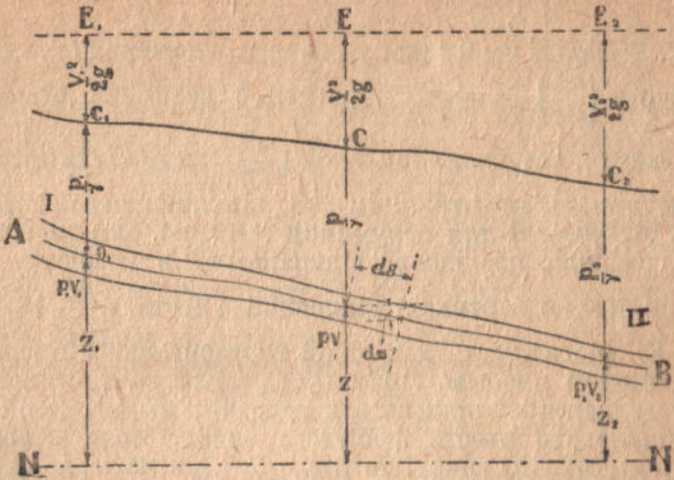


Рис. 43.

за однакові (тобто розглядатимемо однорозмірний рух). Енерґія положення взятої частки буде $\Delta G \cdot z_1$. Визначивши тиск у I перекрої p_1 і швидкість v_1, відшукаємо, що енерґія тиску взятої частки $\Delta G \cdot \frac{p_1}{\gamma}$, а кінетична енерґія її $\frac{\Delta G}{g} \cdot \frac{v_1^2}{2}$.

Сума всіх енерґій частки, коли вона проходить через I перекрій:

$$\Delta G\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}\right)$$

Сума енерґії тої самої частки *, коли вона проходить через II перекрій (цілком довільний):

$$\Delta G\left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}\right)$$

Прирівнявши ці суми й спростивши на ΔG, матимемо:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = \text{const} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Це і є рівняння *Д. Бернуллі* для ідеальної рідини. Вираз $z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}$ є сума енерґій положення, тиску та кінетичної в кожній одиниці ваги рідини, коли вона проходить I перекрій. Рівняння *Д. Бернуллі* тепер можна написати так: сума енерґій — положення, тиску та кінетичної — в одиниці ваги рідини при переході від одного перекрою до другого (довільного) залишається стала. Величину $\frac{v^2}{2g}$ часто звуть висотою швидкости (легко

---

* При усталеному русі, що його зараз розглядаємо, і для кожної іншої частки струминки з тою самою вагою ΔG.

переконатися, що $\frac{v^2}{2g}$ справді має розмірність довжини). Згадавши, що сказано попереду про висоту тиску $\frac{p}{\gamma}$, можемо подати рівняння *Д. Бернуллі* ще й так: сума висот положення (z), тиску $\left(\frac{p}{\gamma}\right)$ і швидкости $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ вздовж струминки є величина стала. Треба ще зауважити, що величини z, $\frac{p}{\gamma}$ і $\frac{v^2}{2g}$ часто звуть (відповідно) геометричним, п'єзометричним та швидкісним напором. Рівняння *Д. Бернуллі* для струминки AB (рис. 43) можна побудувати графічно, послідовно відкладаючи в кожному перекрої від площі NN по вертикалі відповідні висоти z, $\frac{p}{\gamma}$ і $\frac{v^2}{2g}$. Точки E_1, E і E_2 міститимуться в одній горизонтальній площі, що її звуть напірною площею. Лінія C_1CC_2 показує, до якого рівня в кожному перекрої підійметься вода в п'єзометричній трубці, якщо відкладено висоти робітного тиску. Коли ж відкладемо висоти абсолютного тиску, то лінія C_1CC_2 покаже, до якого рівня вода підійметься в барометричній трубочці в кожному перекрої.

Варто тут же зауважити, що реальна рідина, протікаючи шляхом I — II, витратить частину своєї механічної енерґії на те, щоб перемагати опори*, які неминуче супроводять усякий її рух. Позначимо через H_w кількість енерґії, що її витрачає вагова одиниця рідини на шляху I — II. Коли додамо до суми енерґій $z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$ у II перекрої втрату енерґії H_w, то сума, очевидячки, повинна дорівнювати сумі енерґій у I перекрої; тому рівняння *Д. Бернуллі* для реальної рідини треба написати так:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + H_w \quad . \; . \; . \; . \; (13\text{-b})$$

Величину H_w часто називають висотою втрат енерґії або висотою опорів. Докладніше її розглянемо далі; тут же зауважимо, що вона чимало важить для руху рідин, які протікають довгими трубами, каналами, річками; при витіканні ж з отворів і в деяких інших випадках висота втрат має менше значення.

— § 13-а. ІНШИЙ ВИВІД РІВНЯННЯ Д. БЕРНУЛЛІ

Наведемо ще інший вивід рівняння *Д. Бернуллі*, базуючись на рівнянні (12):

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho\left[(X - j_x)\,dx + (Y - j_y)\,dy + (Z - j_z)\,dz\right]$$

Застосуємо це рівняння до однорозмірного руху рідини, що на неї впливає сила тяжіння. Щоб узагальнити виводи,

* Звичайно, ця частина механічної енерґії не зникає, а перетворюється на інші відміни енерґії, переважно теплову; але для процесу руху рідини — це втрата енерґії.

розглядатимемо неусталений рух: тоді швидкості, прискорення й тиск будуть функції не тільки шляху s, але й часу t.

Розглядаючи рух частки рідини на довжині ds (рис. 43), спрямуємо вісь z вертикально вгору; тоді $X=0$, $Y=0$, $Z=-g$ і рівняння (12) набирає такого вигляду:

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=\rho(-j_x\,dx-j_y\,dy-j_z\,dz-g\,dz)$$

Поділимо всі члени цього рівняння на ds:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{ds}=-\rho\left(j_x\frac{dx}{ds}+j_y\frac{dy}{ds}+j_z\frac{dz}{ds}\right)-\rho g\frac{dz}{ds}$$

У лівій частині маємо похідну $\frac{\partial p}{\partial s}$, а вираз у дужках правої частини — проєкція прискорення j частки на ds. Тепер наведене попереду рівняння можемо подати в простішій формі:

$$\frac{\partial p}{\partial s}+\rho j+\rho g\frac{dz}{ds}=0$$

Позначивши швидкість на початку ds літ. v, маємо: $j=\frac{dv}{dt}$;

але для руху неусталеного v є функція координати s і часу t, а s є знову таки функція t для кожної частки. Ось чому

$$j=\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial s}\frac{ds}{dt};$$

інакше

$$j=\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial s},\quad \text{бо}\quad \frac{ds}{dt}=v$$

Підставивши це до диференціяльного рівняння, одержимо:

$$\frac{\partial p}{\partial s}+\rho v\frac{\partial v}{\partial s}+\rho g\frac{dz}{ds}+\rho\frac{\partial v}{\partial t}=0$$

або ще так:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(p+\rho\frac{v^2}{2}+\rho gz\right)+\rho\frac{\partial v}{\partial t}=0$$

Проінтеґрувавши це рівняння на шляху s_0 поміж I і II перекроями й поділивши після того всі члени на $\gamma=\rho g$, одержимо:

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+\frac{1}{g}\int_0^{s_0}\frac{\partial v}{\partial t}ds \quad . \; . \; . \; (13\text{-a})$$

Це і є рівняння однорозмірного неусталеного руху* для ідеальної рідини.

Для руху усталеного $\frac{\partial v}{\partial t}=0$ і через це останній член у рівнянні (13-а) зникає, а воно перетворюється на рівняння *Д. Бернуллі.*

---

* Розв'язання практичних питань однорозмірного неусталеного руху подано в книжці проф. *Бахметєва* „Введение в изучение неустановившегося движения жидкости". Вып. I, Петроград, 1915.

§ 13-ъ. РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТИ

Поміж швидкостями v_1 і v_2 (рис. 44) в довільних перекроях струминки можна встановити ще одну просту, але важливу залежність у формі так званого рівняння нерозривности. Частки рідини, що проходять у даний момент через перекрій AB з швидкістю v_1, за безконечно короткий час пройдуть шлях $v_1 dt$ і за цей самий час через перекрій AB пройде, очевидячки, об'єм рідини $F_1 v_1\, dt$. Чрез перекрій CD за той самий час dt пройде об'єм $F_2 v_2\, dt$.

Поділивши вираз $F_1 v_1\, dt$ на dt, визначимо кількість (об'єм) води $Q_1 = F_1 v_1$, що протікає через перекрій AB за одиницю часу і що її зватимемо витратою через перекрій AB; так само відшукаємо витрату рідини через перекрій CD: $Q_2 = F_2 v_2$.

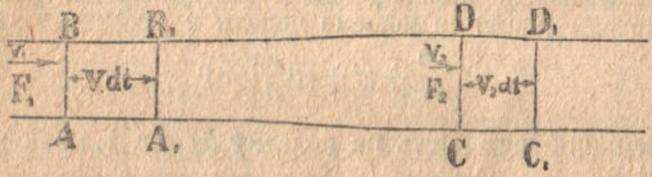


Рис. 44.

Легко переконатися, що витрата Q_1 у кожний момент має дорівнювати витраті Q в будь-якому іншому перекрої струмини. Справді, ці витрати можуть бути неоднакові в таких двох випадках: 1) коли б рідину між розглянутими перэкроями стискали (або вона поширювалася б), а цього не може бути, бо ми розглядаємо рідини нестисливі, або 2) коли б розірвалася суцільність руху рідин, та цього теж не може бути, бо розрив могли б спричинити тільки розтяжні сили, що їх рідини не передають.

Тільки но доведену рівність пишуть так:

$$Q = F_1 v_1 = F_2 v_2 = Fv \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

і звуть рівнянням нерозривности. Іноді його подають ще так: швидкості вздовж струминки зворотно пропорціональні до площ поперечних перекроїв її.

Рівняння (14) для струминки можна б вивести з загального рівняння нерозривности (11-с), але поданий вивід наочніший.

ЗАВДАННЯ ДО §§ 13 і 13-ъ

1. Визначити витрату в маґістральній водопровідній трубі за допомогою водоміра *Вентурі* (Venturi). Він є горизонтальна частина труби, яка спочатку звужується до діяметра d_2 (рис. 45), а потім розширюється до первісного діяметра. Там, де починається звужене місце, і в найвужчому місці поставлено манометри, що під час руху показують тиск p_1 і p_2. Розв'язуючи завдання, вважати площі F_1 в перекрої A і F_2 за малі, а швидкості в усіх точках кожного перекрою за однакові, так само, як і тиск.

На висоту втрат енерґії поміж перекроями A і B можна не зважати.

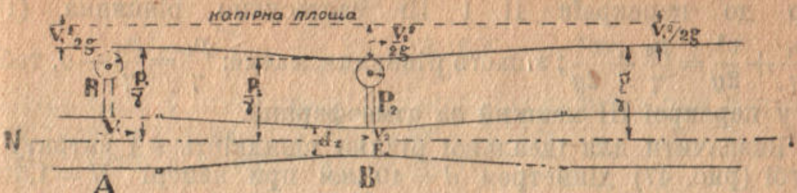


Рис. 45.

Розв'язання. Напишемо рівняння *Д. Бернуллі* для перекроїв A і B, взявши за площу порівняння горизонтальну площу, що проходить через вісь водоміра:

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}$$

Висоти положення відкинуто через те, що вони однакові для всіх точок на осі водоміра і мало відрізняються від висот інших точок усіх перекроїв, бо площі F_1 і F_2 малі, як було вказано в умові.

Додавши до рівняння *Д. Бернуллі* ще рівняння нерозривности: $F_1 v_1 = F_2 v_2$, матимемо два рівняння з двома невідомими v_1 і v_2. З цих рівнянь:

$$v_1=\sqrt{\frac{2g\,(p_1-p_2)}{\left[\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2-1\right]\gamma}}$$

Витрата води:

$$Q=F_1 v_1=F_1\sqrt{\frac{2g\,(p_1-p_2)}{\left[\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2-1\right]\gamma}}=\sqrt{\frac{2g\,(p_1-p_2)}{\left(\frac{1}{F_2^2}-\frac{1}{F_1^2}\right)\gamma}}$$

2. З посудини C (рис. 46) вода витікає через трубочку II — III. Рівень I незмінний, бо до посудини C доливають стільки води, скільки її звідси витікає. Тиск p_0 на вільній поверхні й при виході з труби атмосферний. Вважаючи, що втрат енерґії H_w немає, визначити тиск p в III перекрої труби й швидкість витікання.

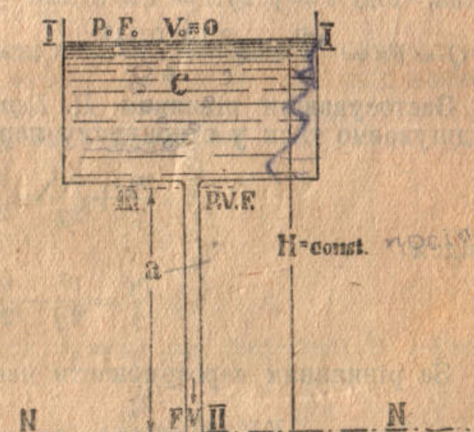


Рис. 46.

Розв'язання. Застосуємо рівняння *Д. Бернуллі* (13) до перекроїв I і II:

$H + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$; звідси швидкість у трубі $v = \sqrt{2gH}$.
Тепер до перекроїв II і III застосуємо рівняння (13): $a + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$; з цього рівняння маємо: $\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} - a$, тобто тиск у перекрої III менший за атмосферний.

3. Визначити для ідеальної рідини швидкість v і витрату Q в трубі (рис. 47) діяметром $d = 40$ *мм* при напорі $H = 1{,}5$ *м*.

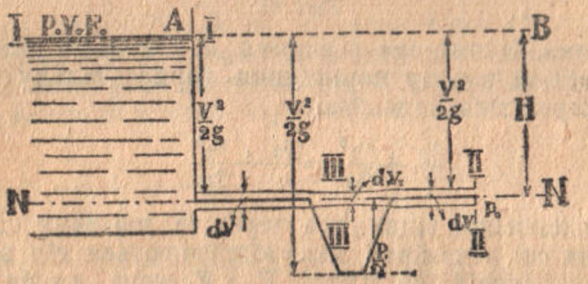


Рис. 47.

Визначити швидкість і тиск у звуженому перекрої труби $d_1 = 30$ *мм*. Накреслити п'єзометричну лінію.

Розв'язання. Щоб визначити швидкість v у трубі, застосуємо до перекроїв I і II рівняння *Д. Бернуллі*. Тиск беремо манометричний $\left(\frac{p_0}{\gamma} = 0\right)$, а площу порівняння по осі труби (висота положення для II перекрою $z_2 = 0$).

$H + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}$; величину $\frac{v_0^2}{2g}$ відкидаємо, бо порівняно з $\frac{v^2}{2g}$ вона мала; тоді $v = \sqrt{2gH} = 4{,}43 \cdot 1{,}225 = 5{,}43$ *м/сек*.

$$Q = Fv = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}04^2}{4} \cdot 5{,}43 = 0{,}00684 \text{ м}^3/\text{сек} = 6{,}84 \text{ л/сек}$$

Застосувавши рівняння *Д. Бернуллі* до перекроїв II і III, відшукаємо тиск у стиснутому перекрої:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v^2}{2g};$$

звідси

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

За рівнянням нерозривности маємо $v_1 = \frac{vF}{F_1}$, а $v = \sqrt{2gH}$, ось чому $v_1 = \frac{F\sqrt{2gH}}{F_1}$.

Підставимо замість v і v_1 їх вартості:

$$\frac{p_1}{\gamma}=\frac{2gH}{2g}-\frac{2gHF^2}{2gF_1^2}=H-H\frac{F^2}{F_1^2}=$$

$$=H\left(1-\frac{d^4}{d_1^4}\right)=-2{,}16H=-3{,}24 \textit{ м}$$

Отож тиск у стиснутому перекрої від'ємний і при поданому співвідношенні діяметрів дорівнює $-2{,}16H$.

Швидкість у стиснутому перекрої:

$$v_1=\frac{vF}{F_1}=\frac{5{,}43\,.\,0{,}04^2}{0{,}03^2}=9{,}65 \textit{ м/сек}$$

П'єзометричну лінію креслимо по точках, відкладаючи від напірної площі величини $\frac{v^2}{2g}$ і $\frac{v_1^2}{2g}$, як показано на рисунку. Обрис п'єзометричної лінії на переходовій дільниці від d до d_1 залежить від форми труби на цій дільниці.

4. Труба, що злучає два резервуари, у яких різниця рівнів становить $H=2{,}0$ *м*, складається з трьох коротких трубок різних

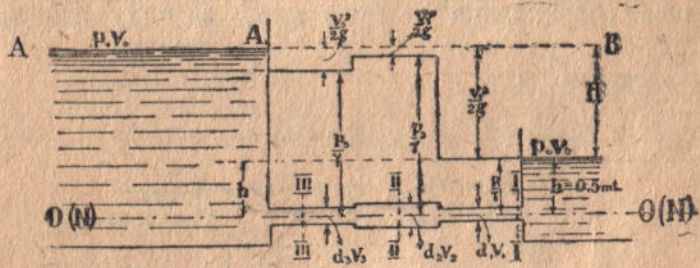


Рис. 48.

діяметрів: $d_1=20$ *мм*, $d_2=40$ *мм*, $d_3=30$ *мм* (рис. 48). Визначити швидкість і тиск у кожній трубці та накреслити п'єзометричну лінію. Рідина ідеальна.

Розв'язання. Щоб визначити шукані величини, застосуємо рівняння *Д. Бернуллі* до перекроїв AA і I, бо для них маємо найбільше відомих величин.

За площу порівняння візьмемо вісь труби.

Тиск у перекрої I: $p_1=h\gamma$

$$H+h+\frac{v_0^2}{2g}=\frac{h\gamma}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g};$$

спростивши, дістанемо:

$$v_1=\sqrt{2gH}=4{,}43\,.\,1{,}41=6{,}246 \textit{ м/сек}$$

Швидкість у трубі діяметром $d_2=40$ *мм* (перекрій II) з рівняння нерозривности:

$$v_2=\frac{v_1F_1}{F_2}=\frac{vd_1^2}{d_2^2}=\frac{6{,}246\,.\,2^2}{4^2}=1{,}56 \textit{ м/сек};\quad \frac{v_2^2}{2g}=\frac{1{,}52^2}{19{,}62}=0{,}124 \textit{ м}$$

Висоту тиску визначають з рівняння:

$$\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}=\frac{h\gamma}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}$$

$$\frac{p_2}{\gamma}=h+\frac{2gH}{2g}-\frac{2gHF_1^2}{2gF_2^2}=h+H-H\frac{d_1^4}{d_2^4}=h+0{,}938H=2{,}38\ м$$

Для перекрою III:

Швидкість:

$$v_3=\frac{v_1F_1}{F_3}=\frac{v_1d_1^2}{d_3^2}=2{,}78\ м/сек;\quad \frac{v_3^2}{2g}=0{,}39\ м$$

Висота тиску:

$$\frac{p_3}{\gamma}=h+\frac{v_1^2}{2g}-\frac{v_3^2}{2g}=h+H-H\frac{d_1^4}{d_3^4}=h+0{,}802H=2{,}10\ м$$

Щоб накреслити п'єзометричну лінію, відкладаємо для кожного перекрою вартість $\frac{v^2}{2g}$ вниз від напірної площі AB. Точки злучимо прямими, як показано на рисунку.

5. На яку висоту h_1 треба спустити звужений перекрій труби (рис. 49), щоб розрідження не було вище за одну атмосферу.

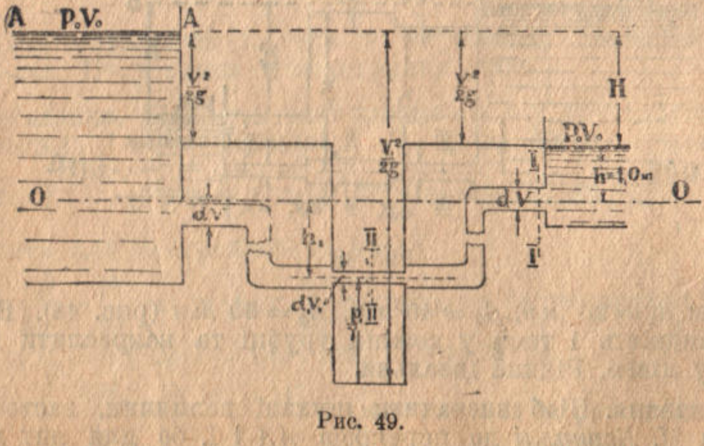


Рис. 49.

(Напір $H=2{,}20$ *м*, $d=50$ *мм*, $d_1=25$ *мм*). Накреслити лінію п'єзометричних висот.

Розв'язання. Для перекроїв AA і I рівняння *Д. Бернуллі*:

$$H+h+\frac{v_0^2}{2g}=\frac{h\gamma}{\gamma}+\frac{v^2}{2g},$$ звідки після спрощення $v=\sqrt{2gH}$.

Для перекроїв I і II: $-h_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{h\gamma}{\cancel{2g}\gamma}+\frac{v^2}{2g}$

При умові, що $\frac{p_1}{\gamma}=-10$ *м* водяного стовпа:

$$-h_1=h+\frac{v^2}{2g}-\frac{v_1^2}{2g}-\frac{p_1}{\gamma}=h+H-H\frac{d^4}{d_1^4}-\frac{p_1}{\gamma}=$$
$$=1+2{,}20-16\,.\,2{,}2+10=-22{,}0\ м$$

Щоб збудувати лінії п'єзометричних висот, відшукаємо швидкості й висоти швидкостей:

$$v = \sqrt{2gH} = 4,43 \, . \, 1,482 = 6,57 \ \text{м/сек}$$

$$v_1 = \frac{vF}{F_1} = \frac{vd^2}{d_1^2} = 26,26 \ \text{м/сек}$$

$$\frac{v_1^{\ 2}}{2g} = \frac{26,26^2}{19,62} = 35,20 \ \text{м/сек}$$

6. Який розшир має бути (рис. 50) в сифоні (відшукати d_1), щоб розрідження в найвищих точках на висоті $h = 8,0$ *м* над рівнем у резервуарі A не перевищувало 0,9 атмосфери. (Напір $H = 3,2$ *м*, а діяметр трубки $d = 75$ *мм*). Збудувати п'єзометричну лінію.

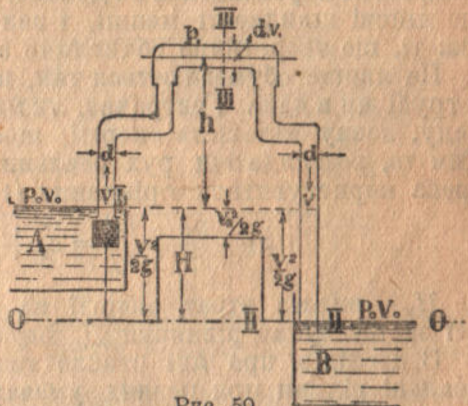


Рис. 50.

Розв'язання. З рівняння *Д. Бернуллі* для перекроїв I—I і II—II швидкість у трубі $v = \sqrt{2gH} = 4,43 \, . \, 1,789 = 7,93$ *м/сек.* Застосуємо рівняння *Д. Бернуллі* до перекроїв III — III і II — II:

$$H + h + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^{\ 2}}{2g} = \frac{v^2}{2g},$$

звідки

$$\frac{v_1^{\ 2}}{2g} = \frac{v^2}{2g} - H - h - \frac{p_1}{\gamma};$$

при умові $\frac{p_1}{\gamma} = -9$ *м* водяного стовпа:

$$\frac{v_1^{\ 2}}{2g} = 3 - 3 - 8 + 9 = 1,0 \ \text{м};$$

звідки

$$v_1 = 4,43 \ \text{м/сек}$$

$$F_1 = \frac{vF}{v_1} = \frac{7,925 \, . \, 0,004418}{4,43} = 0,00790 \ \text{м}^2$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \frac{4 \, . \, 0,00790}{3,14} = 0,10 \ \text{м} = 100 \ \text{мм}$$

За величинами $\frac{v^2}{2g}$ і $\frac{v_1^{\ 2}}{2g}$ будуємо п'єзометричну лінію (див. рисунок).

РОЗДІЛ III

РУХ РЕАЛЬНИХ РІДИН У ТРУБАХ. ГІДРАВЛІЧНІ ОПОРИ

§ 14. РУХ ЛЯМІНАРНИЙ. РУХ ТУРБУЛЕНТНИЙ. ПУЛЬСАЦІЯ

Застосувавши рівняння *Д. Бернуллі* (13) для ідеальних рідин до струминки реальної рідини, що тече в трубі або в каналі, легко переконатися за допомогою відповідних експериментів, що дійсні швидкості менші, і звичайно в багато разів менші, ніж ті, що теоретично обчислимо з рівняння (13).

Це явище обумовлюється тим, що реальна рідина, рухаючись у трубі чи в каналі, витрачає, як ми про це вже згадували попереду, певну кількість енерґії, щоб перемогти шкідливі опори. Тим то, розглядаючи рух реальних рідин у трубах і каналах, треба користуватися з рівняння (13-а):

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + H_w,$$

де H_w — висота втрат енерґії на тій частині струмини, що до неї застосовуємо рівняння *Д. Бернуллі.*

З дослідів, про які стисло говоритимемо далі, бачимо, що реальні рідини при певних умовах можуть текти цілком правильними (паралельними) верствами, струминками. Такий рух звемо лямінарний чи струминний. Частіше ж під час руху в рідині з'являються вихри, що порушують правильність його; тоді рух звемо турбулентний чи вихровий. Залежно від режиму руху — лямінарного чи турбулентного втрати енерґії H_w підлягають різним законам.

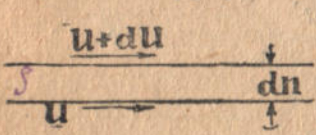


Рис. 51.

Спочатку розглянемо рух лямінарний. Уявімо собі, що дві суміжних верстви рідини рухаються з швидкостями u і $u + du$ (рис. 51), а віддаль по нормалі між частками, що посідають ці швидкості, dn.

Між верствами під час лямінарного руху виникає тертя. Силу P_t цього внутрішнього тертя, спрямовану проти руху, можна обчислити за формулою:

$$P_t = \eta F \frac{du}{dn} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Тут η є дослідний коефіцієнт внутрішнього тертя або коефіцієнт в'язкости та F — площа, що по ній труться верстви рідини.

Формулу (15) треба ще трохи пояснити. Коли б швидкості суміжних верств були однакові (тобто $du = 0$), то не могла б виникнути ніяка сила тертя; коли ж переходити по нормалі від певної верстви до суміжної на dn і швидкості змінюються на du, то за гіпотезою, що її висловив ще *Ньютон*, сила тертя P_t пропорціональна відносній швидкості суміжних верств, або буде ще зрозуміліше, як скажемо так: пропорціональна зміні швидкости, що відбувається на одиниці довжини по нормалі, тобто $\frac{du}{dn}$; крім того, ця сила пропорціональна площі, що по ній труться верстви, і залежить від властивостей рідини, що їх характеризує коефіцієнт в'язкости; проте сила тертя P_t не залежить від тиску.

Обмежимо тепер дослідження лямінарного руху тільки одним випадком, а саме — розглянемо усталений рівномірний рух у горизонтальній круглій трубі (рис. 52). Виділимо частину труби

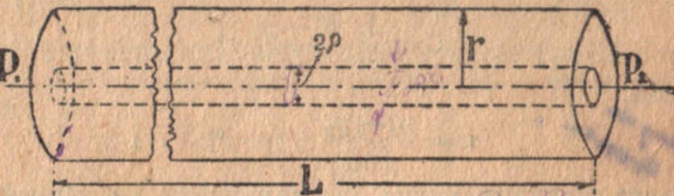


Рис. 52.

завдовжки L і припустимо, що на одному кінці її маємо тиск p_1, а на другому p_2; різниця цих тисків $p_1 - p_2$, що її можна виміряти висотою $\frac{p_1 - p_2}{\gamma}$, вся витрачається на тертя вздовж дільниці L. Звичайно вважаємо, що під час лямінарного руху частки, які безпосередньо прилягають до стінок труби, прилипають до них, а тому й швидкість їх дорівнює нулю. Частки рідини, що рухаються вздовж осі труби, мають найбільшу швидкість; швидкість же в трубуватих верствах, що на них можна поділити рідину в трубі, під впливом внутрішнього тертя ступнево зменшується від осі до стінок. Щоб визначити закон розподілу швидкостей у перекрої, зауважимо, що на будь-який осевий циліндер, обмежений циліндричною поверхнею радіюса ρ, діятимуть такі сили*: 1) $\pi\rho^2 p_1$, 2) $-\pi\rho^2 p_2$ — обидві на основи циліндра й 3) $\eta(2\pi\rho L)\frac{du}{d\rho}$, що є сила внутрішнього тертя, дотична до бічної поверхні виділеного циліндра. У виразах чинних сил $\pi\rho^2$ — площа основи циліндра, а $2\pi\rho L$ — бічна поверхня циліндра завдовжки L, що відповідає площі F у рівнянні (15)**; du є диференціял швидкости, який відповідає збільшенню радіюса на $d\rho$, а $d\rho$ тут відограє ролю dn у тому самому рівнянні (15). Через те, що рух рівномірний, всі ці сили мають врівноважуватися:

$$\pi\rho^2(p_1 - p_2) + \eta 2\pi\rho L\frac{du}{d\rho} = 0$$

* За додатний вважаємо напрям швидкости u.

** Сила $\eta 2\pi\rho L\frac{du}{d\rho}$ є від'ємна, але знак — (мінус) прихований у виразі $\frac{du}{d\rho}$, бо u зменшується, коли ρ зростає.

або
$$du = -\frac{1}{2\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}\rho\, d\rho$$

Проінтеґрувавши, відшукаємо:

$$u = -\frac{1}{4\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}\rho^2 + C$$

Довільну сталу C в цьому рівнянні можна визначити з умови, що $u = 0$, коли $\rho = r$ (біля стінок):

$$0 = -\frac{1}{4\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}r^2 + C,$$

звідси

$$C = \frac{1}{4\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}r^2$$

Остаточно:

формула Стокса

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(r^2 - \rho^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

З цього рівняння видно, що швидкість по діяметру змінюється за законом параболі. Тепер визначимо секундну витрату рідини через трубу. Для цього знову виділимо трубувату верству рідини з внутрішнім радіюсом ρ і зовнішнім $\rho + d\rho$; площа перекрою цієї верстви $2\pi\rho\, d\rho$, а швидкість її в усіх точках визначають за формулою:

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(r^2 - \rho^2);$$

тому витрата через цю елементарну площу:

$$dQ = 2\pi\rho\frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(r^2 - \rho^2)\, d\rho,$$

а витрата всієї труби:

$$Q = \int_0^r \pi\rho\frac{p_1 - p_2}{2\eta L}(r^2 - \rho^2)\, d\rho$$

або

$$Q = \pi\frac{p_1 - p_2}{8\eta L}r^4 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (17)$$

Цю формулу подав *Пуазейль* (Poiseuille) на підставі своїх експериментів. Застосовуючи цю формулу, за допомогою порівняно нескладного досліду, можна визначити коефіцієнти внутрішнього тертя (в'язкости). Будемо звати пересічною швидкістю v частку від ділення витрати Q на площу поперечного перекрою:

$$v = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{p_1 - p_2}{8\eta L}r^2, \quad \ldots \ldots \ldots (18)$$

звідси

$$p_1 - p_2 = \frac{8\eta L}{r^2}v$$

або поділивши обидві частини на γ:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{8\eta L}{\gamma r^2}v \quad \ldots \ldots \ldots (18\text{-a})$$

Як уже згадували, вся висота $\frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ витрачається на внутрішнє тертя. Отож з формули (18-а) можемо зробити такий висновок: витрата енерґії на внутрішнє тертя при лямінарному режимі руху прямо пропорціональна до середньої швидкости й довжини труби та зворотно пропорціональна до квадрата радіюса трубки.

Поділивши енерґію $\frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ на довжину труби L, визначимо втрату енерґії на тертя одного кілограма рідини на одиницю довжини труби; цю втрату, в даному разі відношення $\frac{p_1 - p_2}{\gamma L}$, називають відносним спадом і позначають літерою I. Скориставшися з цього позначення, формулу (18-а) можна написати ще й так:

$$v = \frac{\gamma r^2}{8\eta} I, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18\text{-b})$$

тобто при лямінарному руху швидкість v пропорціональна відносному спаду I.

На підставі рівняння (15) легко можна довести, що коефіцієнт в'язкости η є величина такої розмірности (при основних одиницях — кілограм, метр, секунда): $\frac{кг \cdot сек}{м^2}$. Цей коефіцієнт залежить від температури і зменшується, коли вона зростає; для води при $T°C$ можна обчислювати η за такою формулою:

$$\eta = \frac{0{,}0001817}{1 + 0{,}0336T + 0{,}000221T^2} \frac{кг \cdot сек}{м^2} \quad \ldots \quad (19)$$

Як видно з дослідів *О. Рейнолдса* (O. Reynolds) рідини течуть у трубах правильними струминками чи верствами, доки середня швидкість не досягне певної в кожному окремому випадку вартости — так званої критичної швидкости, що її можна відшукати з такої дослідної формули:

$$v_{kp} = \text{const} \frac{\eta g}{D\gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

або

$$v_{kp} = \text{const} \frac{\eta}{D\rho} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20\text{-a})$$

Const $\approx$ 2000; ρ в цій формулі — густина рідини.

Досліди *О. Рейнолдса* в загальних рисах були такі: вода витікала з посудини (рис. 53) скляною трубочкою з різними швидкостями (для цього треба змінювати рівень води в посудині). В трубочку піпеткою впроваджували струминку розчину анілінової фарби. Доки середня швидкість не перевищувала вартостей v_{kp}, визначених за формулою (20), фарба рухалася вздовж трубочки і мала вигляд стрічки; при швидкостях же більших як v_{kp} стрічка ця втрачала свій обрис і фарба змішувалася з усією масою рідини. Коли в темному приміщенні освітлювати рідину в трубці електричною іскрою, то можна помітити, що в ній з'являються вихри, схожі на звої тютюнового диму в повітрі *. Наслідком цих

Рис. 53.

дослідів з'ясовано також, що втрати енерґії (напору) при струминному рухові пропорціональні першому ступеню середньої швидкости відповідно до формули (18-а); при турбулентному ж рухові ці втрати пропорціональні, приблизно, другому ступеню середньої швидкости.

З пізніше переведених дослідів виявлено, що при швидкостях більших як v_{kp} рух у трубах може бути турбулентний, але може залишитися й струминний, аж доки швидкість не досягне вартостей у кілька разів більших за v_{kp}. Отож, коли середня швидкість залишається в зазначених межах, матимемо нестійкий стан, при якому, під впливом різних, часто незначних причин, турбулентний режим може замінити струминний. З'явлення й розповсюдження вихорів у рідині можна до деякої міри пояснити так.

Навіть і при турбулентному режимі руху біля стінки водотоки — труби чи канала — залишається, як це довели новіші теоретичні та експериментальні дослідження проф. *Прандтля* (Prandtl) і його співробітників, верства рідини з лямінарним рухом; її називають межевою верствою (Grenzschicht). У межевій верстві швидкість зростає від нуля до якоїсь критичної вартости. За цією межею матимемо вже турбулентний рух. У тур-

Рис. 54.

булентній зоні швидкості зростають уже поволі до осі труби чи вільної поверхні в канали. Вихрі утворюються в межевій верстві, але механізм утворення їх і розповсюдження в турбулентну зону ще недосить з'ясовано. Вихри в межевій верстві утворюються й тоді, коли стінки водотоки рівні; але набагато інтенсивніше це відбувається, коли стінки шерехаті. Це можна пояснити в такий, трохи грубий, спосіб. Коли швидкості поблизу стінки невеликі, то лямінарна верства рідини, обтікаючи нерів-

* Ось чому режим руху при швидкостях більших за критичну зветься вихровим чи турбулентним на відміну від руху струминного чи лямінарного.

ності та виступи стінки, плине за їх обрисами і не відривається від них. Якщо ж швидкість досить велика, то за виступами ця верства може відриватися, як це подано на рис. 54. В місці „відриву“ (точка C) тоді утворюється вихор: струмина потягне його від стінки, після чого почне утворюватися новий вихор і т. д. Отож бачимо, що процес утворювання вихрів до певної міри періодичний. Розповсюдження вихрів у турбулентній зоні можна пояснити так: обертальна швидкість часток вихра додається до швидкости головного руху; тому швидкість у точці a більша, ніж у точці b, а тиск, навпаки, менший у точці a, бо сума енерґій частки стала; ця різниця тисків і посуває вихори до осі трубки; але водночас вихри беруть участь і в головному рухові. З цих міркувань бачимо, які складні траєкторії (рис. 54, AA_1) часток рідини. Швидкість у кожній точці не залишається стала, бо величина й напрям її ввесь час змінюються. Цілком зрозуміло, що й важлива складова швидкости в напрямі головного руху, інакше — осева складова, теж увесь час змінюється. В її змінах спостерігається до деякої міри періодичність; це явище називають пульсацією. Щоб було легше обчислити, на практиці замість змінної складової швидкости в напрямі головного руху беруть пересічну її вартість за певний час і таким способом замінюють неусталений по суті рух фіктивним усталеним. Найбільшу пульсацію спостерігають недалеко від стінок; це свідчить про те, що вихри, в міру віддалення від межевої верстви, поступово стишуються. Як уже згадували, і при турбулентному режимі швидкість зростає від стінок до осі труби чи до вільної поверхні води в каналі *, але розподіл осевих складових u тут інший, ніж при лямінарному рухові (рис. 55): біля стінок у лямінарній верстві швидкість зростає раптово, а в турбулентній зоні поволі.

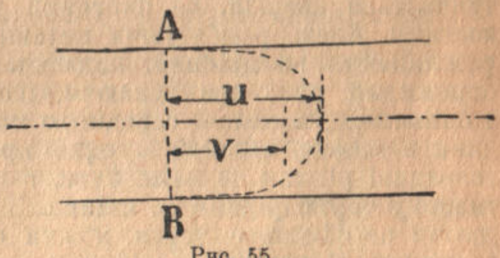


Рис. 55.

Вивчаючи турбулентний рух, треба і тут визначити так звану середню швидкість перекрою, як частку від ділення витрати на площу поперечного перекрою F:

$$v = \frac{Q}{F}$$

Тепер розглянемо питання про те, чи можна застосовувати рівняння *Д. Бернуллі* до турбулентного (і струминного) руху рідин у трубах скінченого поперечного перекрою; власне його не можна застосовувати ні до потока в цілому, ні до окремих

* Дуже докладні лябораторні дослідження щодо цього провів *І. Нікурадзе* і описав їх у книжці; „Untersuchungen über Geschwindigkeitsverteilungen in turbulenten Strömungen“. Berlin, 1926.

струминок, бо тут не додержано тих умов, що з них ми виходили, виводячи рівняння *Д. Бернуллі*, а саме: рівности швидкостей по перекрою та паралельности струминок.

Алеж із дослідів видно таке: коли підставити до рівняння *Д. Бернуллі* середню швидкість і написати його для середньої струминки в трубі, то можна одержати наслідки, що вдовольнятимуть практичні вимоги. Звичайно, беручи висоту середньої швидкости, ми помиляємося. Слід було б обчислювати кінетичну енерґію для секундної витрати Q через даний перекрій, зважаючи при цьому на дійсні швидкості u в окремих його точках, а потім уже поділити на вагу об'єму Q.

Висота швидкости, обчислена таким способом, дорівнює $\alpha \frac{v^2}{2g}$; тут, звичайно, для турбулентного руху коректив $\alpha \approx 1{,}11$; коли ж нерівномірність розподілу швидкостей по площі перекрою більша проти звичайної, то коефіцієнт α може набувати й більші вартості; але такі випадки трапляються як виняток. Коли обчислювати довгі труби і запровадити до рівняння *Д. Бернуллі* коефіцієнт α, то це не відіб'ється на остаточних наслідках, бо при довгих трубах висота швидкости, навіть з коефіцієнтом α, проти висоти втрат енерґії H_w дуже невелика; отже на неї часто зовсім не зважають.

Попереду говорили вже, що під час руху в масі рідини витрачається енерґія, бо частинки рухаються з різними швидкостями. Алеж, розв'язуючи питання руху в трубах і каналах, розглядають не дійсний, надзвичайно складний, а фіктивний, спрощений рух, припускаючи, що всі струминки рухаються з однаковою, а саме — середньою швидкістю. Уявляючи рух рідини в такому вигляді, мусимо припустити, що втрат енерґії всередині рідини не може бути, а всі їх треба приписати фіктивному тертю рідини об стінки. З дослідів видно таке: розглядаючи це фіктивне тертя, можна одержати для втрат енерґії величини, відповідні до дійсних, але для цього треба виходити з таких положень: втрати енерґії на тертя залежать від якоїсь функції середньої швидкости, вони прямо пропорціональні до поверхні дотику рідини з стінками і не залежать від тиску.

Розглянемо фіктивний рух на якійсь певній довжині l потока з циліндричними чи призматичними стінками. Позначимо площу чинного перекрою літерою F; довжину тої частини периметру чинного перекрою, де рідина стикається з стінками, зватимемо змочений або мокрий периметр і позначимо його літерою U (в трубах увесь периметр змочений).

Силу фіктивного тертя між рідиною й стінкою на поверхні 1 $м^2$ позначимо $\varphi(v)$, вважаючи її за функцію середньої швидкости. Тоді повна сила тертя на поверхні всього потока, спрямована проти руху, дорівнюватиме: $\varphi(v)Ul$, а робота, потрібна на те, щоб перемогти цю силу на довжині l:

$$\varphi(v)Ull = \varphi(v)Ul^2$$

Цю роботу має дати рідина, що забирає в потоці довжину l; об'єм її Fl, а вага $Fl\gamma$. Отож втрату енерґії на тертя (висоту втрат на тертя) по довжині l потока на вагову одиницю рідини одержимо в такому вигляді:

$$H_r = \frac{\varphi(v) U l^2}{F l \gamma} = \frac{\varphi(v) U}{\gamma F} l$$

Відношення площі чинного перекрою F до мокрого периметру U звуть гідравлічним радіюсом; позначивши його літерою R, можемо написати:

$$R = \frac{F}{U}$$

Користуючися з поняття гідравлічний радіюс, можемо надати H_r такого вигляду:

$$H_r = \frac{\varphi(v) l}{\gamma R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

Виразу $\frac{\varphi(v)}{\gamma}$ звичайно надають вигляду функції другого ступеня середньої швидкости v без вільного члена:

$$\frac{\varphi(v)}{\gamma} = av + bv^2$$

Вільного члена тут не може бути, бо в рідині, коли вона є в стані рівноваги, тобто коли $v = 0$, сил тертя немає, отож $\frac{\varphi(v)}{\gamma}$ має дорівнювати нулю. При лямінарному режимі коефіцієнт b має дорівнювати нулю, бо втрата енерґії на тертя (чи висота втрати) пропорціональна першому ступеню середньої швидкости v. Розглядаючи турбулентний рух, звичайно не зважають на член av, що залежить від першого ступеня v.

Через це для висоти втрат на тертя при турбулентному русі маємо таку формулу:

$$H_r = bv^2 \frac{l}{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21\text{-a})$$

Часто зручніше висоту втрат на тертя подавати, як функцію висоти середньої швидкости $\frac{v^2}{2g}$, а обчислювальну формулу для H_r подавати так:

$$H_r = \lambda \frac{v^2}{2g} \frac{l}{4R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21\text{-b})$$

Знаючи коефіцієнт b, можна обчислити коефіцієнт λ (і навпаки), бо між ними є, очевидячки, така залежність:

$$b = \frac{\lambda}{8g}$$

Далі розглядатимемо тільки турбулентний рух у трубах (а також у річках і каналах), бо на практиці швидкості в трубах (а також і каналах) більші за критичні; щождо лямінарного руху, то обмежимося тими відомостями, які подано в цьому параграфі.

ЗАВДАННЯ ДО § 14

1. В кам'яній греблі (рис. 56) є трубуватий отвір діяметром $d \approx 0{,}2$ *см*. Скільки води витікає через цей отвір за добу? Температура води $T = 10°C$; $h = 1{,}5$ *м*.

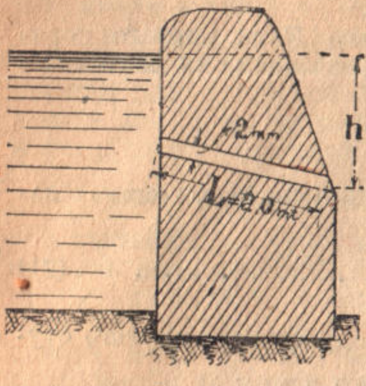


Рис. 56.

Розв'язання. Вважатимемо, що тут увесь напір $h = 1{,}5$ *м* витрачається на тертя, тобто на висоту швидкости в отворі не зважатимемо, бо вона мала. Припустімо, що швидкість менша за критичну; тоді за формулою (18-а) висота тертя для лямінарного руху $h = \frac{8\eta L}{\gamma r^2} v$.

Визначимо коефіцієнт в'язкости:

$$\eta = \frac{0{,}0001817}{1 + 0{,}0336\,T + 0{,}000221\,T^2} = $$

$$= 0{,}0001336 \frac{кг.\,сек}{м^2};$$

тепер

$$1{,}5 = \frac{8\,.\,0{,}0001336\,.\,2}{1000\,.\,0{,}001^2} v;$$

звідси

$$v = 0{,}7\ м/сек$$

Перевіримо, чи може бути в даних умовах лямінарний рух; для цього обчислимо критичну швидкість:

$$v_{kp} = 2000 \frac{\eta g}{D\gamma} = 2000 . \frac{0{,}0001336\,.\,9{,}81}{0{,}002\,.\,1000} = 1{,}31\ м/сек$$

Швидкість 0,7 *м/сек* менша за критичну, а тому рух лямінарний.

Витрата $Q = Fv = \frac{\pi\,.\,0{,}002^2}{4} . 0{,}7 = 0{,}0000022\ м^3/сек$

Витрата на годину 0,00792 $м^3$, а за добу 0,19 $м^3$.

§ 15. ОПОРИ В ТРУБАХ

I. ВТРАТИ ЕНЕРҐІЇ НА ТЕРТЯ

Обчислюючи висоту втрат на тертя в призматичних або циліндричних трубах, найзручніше скористатися з формули (21-b). На практиці найбільше значення мають круглі труби. Тому визначимо гідравлічний радіюс кола, як функцію діяметра його, підставимо до формули (21-b):

$$R = \frac{F}{U} = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4}$$

Отож гідравлічний радіюс перекрою круглої труби дорівнює чверті внутрішнього діяметра труби (або половині радіюса). Тепер для висоти втрати на тертя в круглій трубі можемо написати замість (21-b) такий вираз:

$$H_r = \lambda \frac{v^2}{2g} \frac{l}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21\text{-c})$$

Коефіцієнт λ треба визначити з емпіричних формул.

Деякі з них наводимо у наступній таблиці:

№№	Хто подав формулу	Вираз для вартости λ	Увага
1	*Лянґ* (Lang)	$\lambda = a + \frac{b}{\sqrt{vd}}$	$a = 0{,}012$ для чистої води й цілком рівних труб (металевих, скляних); $a = 0{,}020$ для нових чавунних труб. b залежить від в'язкости рідин, отож і від температури; для води при $t = 3°C$ $b = 0{,}0022$; $t = 20°C$ $b = 0{,}0018$; $t = 100°C$ $b = 0{,}0004$
2	*Біль* (Biel) — для нових чавунних труб	$\lambda = 0{,}00942 + \frac{0{,}00565}{\sqrt{d}} + \frac{0{,}000805}{v\sqrt{d}}$	
	Біль — для старих чавунних труб	$\lambda = 0{,}00942 + \frac{0{,}00720}{\sqrt{d}} + \frac{0{,}000497}{v\sqrt{d}}$	
3	*Мізес* (Mises) — для нових чавунних труб, при $t = 5°C$	$\lambda = 0{,}01 + \frac{0{,}007}{\sqrt{d}} + \frac{0{,}0023}{\sqrt{vd}}$	Для води з температурою 20° C у формулу *Мізеса* в останньому члені треба поставити 0,0018 замість 0,0023
4	*Мізес* — для чавунних труб, що ними користувалися, при $t = 5°C$	$\lambda = 0{,}01 + \frac{0{,}0116}{\sqrt{d}} + \frac{0{,}0023}{\sqrt{vd}}$	
5	*Леві* (Lévy) — для чистих чавунних труб	$\lambda = \frac{0{,}042}{1{,}41 + \sqrt{d}}$	
6	*Леві* — для старих чавунних труб	$\lambda = \frac{0{,}044}{0{,}47 + \sqrt{d}}$	
7	*Дарсі* (Darcy) — для чавунних труб	$\lambda = 0{,}01989 + \frac{0{,}0005078}{d}$	Для старих труб малого діяметра слід λ, обчислене за формулою *Дарсі*, збільшити вдвоє, а для труб великого діяметра — в 1,5 раза.

Для наближених обчислень можна вважати, що $\lambda = 0{,}03$. Слід зауважити, що з наведених формул теоретично найобґрунтованіша формула *Мізесова*.

II. ВТРАТИ ЕНЕРҐІЇ НА МІСЦЕВІ ОПОРИ

Крім втрат на тертя, розподілених на всю довжину труби, в деяких місцях її можуть бути ще особливі місцеві втрати. Це буває тоді, коли перекрої струмини в напрямі руху раптово розширюються, а частки рідини, що течуть надзвичайно швидко, вдаряються (за давніми твердженнями) в ширшому перекрої в масу води з меншою швидкістю і тут нібито відбувається „удар" і втрата енерґії. Розглянемо кілька найважливіших випадків, надаючи висоті тої чи іншої місцевої втрати вигляду функції висоти швидкости, а саме:

$$h_w = \xi \frac{v^2}{2g};$$

тут ξ є коефіцієнт опору, різний для різних опорів, а h_w — енерґія, що її втрачає одиниця ваги рідини.

а) Раптове поширення труби

Коли вода потрапляє з труби меншого перекрою F_1 до труби з більшим перекроєм F_2 (рис. 57), то швидкість її має раптово зменшуватися з v_1, до вартости v_2*, а тому втрачається швидкість $v_1 - v_2$ на удар. За теоремою *Карно* (Carnot), відомою з механіки, кожний кілограм води (маса кілограма дорівнює $\frac{1}{g}$, де g є прискорення сили тяжіння) втратить при ударі енерґію

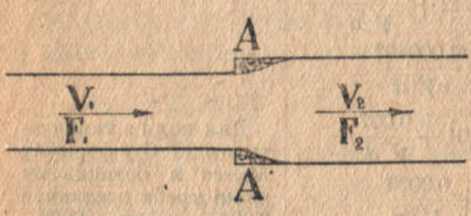


Рис. 57.

$$h_w = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (22)$$

тобто втрата енерґії дорівнює живій силі втраченої швидкости. Висловлене тільки но положення відоме в гідравліці під назвою теореми *Борда* (Borda) або *Борда-Карно*.

Явище „вдару" дуже складне. Як це показано на рис. 57, струмина хоч і розширюється дуже швидко, але не раптово. Далі, нерівномірний розподіл швидкостей у вузькому і в широкому перекрої надзвичайно ускладнює явище. Навколо струмини утворюється кільцевий простір *AA*, виповнений водою, яка має обертово-вихровий рух і майже не бере участи в поступовому русі. Простір *AA* звуть часто „мертвий". Всі згадані попереду моменти заважають досконало теоретично та експериментально дослідити явище вдару, але з проведених численних дослідів видно, що на практиці можна одержати цілком добрі наслідки, користуючись із теореми *Борда*, хоча, виводячи

* Звичайно, і тут v_1 та v_2 — середні швидкості в перекроях F_1 і F_2.

її, явище вдару розглядали не так, як воно відбувається в дійсності. Для практичних обчислень формулі (22) краще надати трохи іншого вигляду.

З рівняння нерозривности $v_1 F_1 = v_2 F_2$ відшукаємо:

$$v_1 = \frac{F_2}{F_1} v_2;$$

підставивши це до формули (22), матимемо:

$$h_w = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g}.$$

або

$$h_w = \xi_n \frac{v_2^2}{2g}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22\text{-a})$$

тут $\xi_n = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2$ *

б) Втрата при вході до труби

Рідина потрапляє до труби кривими траєкторіями (рис. 58), тому на частинку її діють відосередкові сили; вони стискають струмину при вході до площі перекрою $F_1 < F_2$; після цього

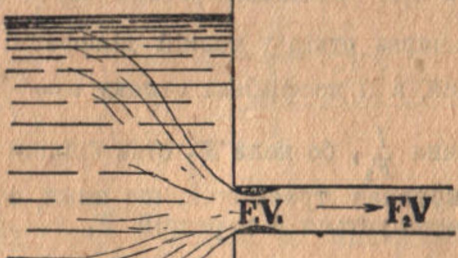


Рис. 58.

струмина раптово розширюється і знову відбувається „вдар". Висоту втрати енерґії на вдар можна вичислити за формулою:

$$h_w = \xi_{вх} \frac{v^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

На підставі дослідів можна вважати, що $\xi_{вх} = 0{,}5$. Відношення $\frac{F_1}{F_2} = \alpha$ звуть коефіцієнтом стиску струмини. Закругливши

---

* Інколи формулу (22-а) подають у такому вигляді:

$$h_w = \xi' \frac{v_1^2}{2g}, \text{ де } \xi' = \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)^2.$$

гострий край труби при вході до неї, можна значно зменшити коефіцієнт опору, а саме — тоді $\xi = 0{,}04$. Навпаки, коли вхід до

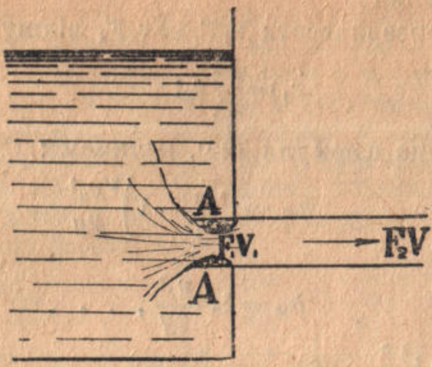


Рис. 59.

труби зробити так, як на рис. 59, то коефіцієнт $\xi_{вх}$ збільшиться до одиниці, бо крайні траєкторії тоді будуть кривіші, відосередкові сили збільшаться і перекрій струмини F_1 стискатиметься більше, а разом з тим збільшиться втрата на вдар.

в) Втрата при протіканні рідини через діяфрагму

Протікаючи через отвір у тонкій діяфрагмі (рис. 60), струмина стискається, а її коефіцієнт стиску $\alpha = \dfrac{F_1}{f}$ то менший, що менше відношення $\dfrac{f}{F_2}$, бо коли F_2 стає більше порівняно з f, то збільшується кривина траєкторій, що ними вода притікає до отвору; отже зменшується й перекрій F_1.

Рис. 60.

Пройшовши через стиснутий перекрій F_1, струмина раптово розширюється. Втрата на вдар за теоремою *Борда*:

$$h_w = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$$

або, підставивши сюди $F_1 = \alpha f$, одержимо:

$$h_w = \left(\frac{1}{\alpha}\,\frac{F_2}{f} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$$

Позначивши вираз $\left(\frac{1}{\alpha}\frac{F_2}{f}-1\right)^2$ літерою ξ_∂, остаточно матимемо:

$$h_w = \xi_\partial \frac{v^2}{2g} \qquad (24)$$

Коефіцієнт ξ_∂ можна брати з такої таблиці, складеної на підставі дослідів:

$\frac{f}{F_2}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
ξ_∂	232	51,0	19,8	9,61	5,26	3,08	1,82	1,17	0,77

Коли діяфрагму вмістити біля переходу з резервуара до труби, то коефіцієнт стиску зменшиться і набуде майже сталі вартості (коливається від 0,616 при $\frac{f}{F_2}=0{,}1$ до 0,596 при $\frac{}{F_2}=1$); через це коефіцієнт ξ_∂ теж трохи зменшиться.

г) Втрата при раптовому звуженні труби

Коли струмина потрапляє з труби більшого перекрою F_1 (рис. 61) до труби з меншим перекроєм F_2, то вона стискається;

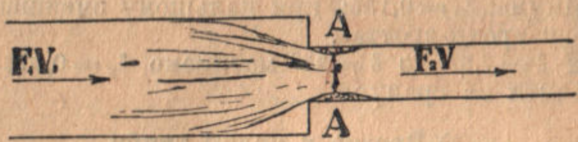


Рис. 61.

коефіцієнт стиску $\alpha=\frac{f}{F_2}$ залежить од відношення $\frac{F_2}{F_1}$ і збільшується разом з ним. Висоту втрати на вдар при дальшому раптовому розширенні струмини можна визначити з формули:

$$h_w = \left(\frac{F_2}{f}-1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$$

або, згадавши що $\frac{F_2}{f}=\frac{1}{\alpha}$,

$$h_w = \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \xi_{зв}\frac{v^2}{2g} \qquad (25)$$

Коефіцієнт $\xi_{зв}$ і α можна брати з таблиці *Вайсбаха,* що її складено на підставі дослідів:

$\frac{F_1}{F_2}$	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8
$\xi_{зв}$	0,80	0,50	0,42	0,34	0,25	0,15
α	0,585	0,585	0,605	0,635	0,663	0,720

ґ) Втрата при поступовому розширенні труби

Коли вода протікає конічну трубу (рис. 62), то утворюються вихри (крім звичайних, які бувають при кожному турбулентному русі). Ось чому й втрачається енерґія; розмір втрати можна визначити за поданою нижче формулою:

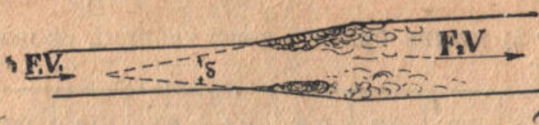


Рис. 62.

$$h_w = \xi_p \frac{(v_1 - v)^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

На підставі дослідів *Флігнера* (Fliegner) коефіцієнт опору ξ_p можна обчислити за такою формулою:

$$\xi_p = \sin \delta$$

для кутів $\delta < 30°$.

З пізніших дослідів *Гібсона* (Gibson) видно, що для $\delta = 180°$ $\xi_p \lessapprox 1$; коли δ зменшується від 180° до 65°, то ξ_p трохи збільшується, а далі починає швидко зменшуватися і при $\delta = 5{,}5°$ досягає мінімума: $\xi_p = 0{,}135$; при дальшому зменшенні δ коефіцієнт ξ_p знову трохи зростає.

В межах $\delta = 7{,}5°$ до $\delta = 35°$ матимемо $\xi_p = 0{,}011\,\delta^{1,22}$; тут δ треба визначити на градуси.

д) Втрата в коліні труби

Висоту втрати при протіканні коліном (рис. 63), де раптово змінюється напрям, треба обчислювати за звичайною для місцевих опорів формулою:

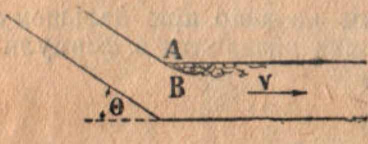


Рис. 63.

$$h_w = \xi_k \frac{v^2}{2g};$$

коефіцієнт опору на підставі *Вайсбахових* (Weissbach) дослідів треба обчислювати за формулою:

$$\xi_k = 0{,}9457 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2{,}047 \sin^4 \frac{\theta}{2} \quad \ldots\ldots (27)$$

Як це видно з рисунка, струмина стискається в перекрої A й за ним виникає „вдар“, а простір B виповнено водою з вихровим рухом.

Якщо труба має круглий перекрій *, то коефіцієнт опору

---

* Про новіші досліди з цього питання див.: „Mitteilungen d. Hydraulischen Instituts d. Technischen Hochschule München“, H. 3, 1929. Стаття: *A. Hofmann*. Der Verlust in 90° — Rohrkrümmern mit gleichbleibendem Kreisquerschnitt.

в закругленому коліні (рис. 64) можна обчислити за формулою

$$\xi_k = \left[0{,}131 + 0{,}1635\left(\frac{d}{R}\right)^{\frac{7}{2}}\right]\frac{\theta^\circ}{90}; \quad (28)$$

коли ж труба з прямокутнім перекроєм, то коефіцієнт опору обчислюють за такою формулою:

$$\xi_k = \left[0{,}124 + 0{,}2744\left(\frac{d}{R}\right)^{\frac{7}{2}}\right]\frac{\theta^\circ}{90}; \quad (29)$$

В обох формулах θ° в градусах, d — діяметр круглого перекрою в формулі (28) і висота перекрою в площі кривини осі труби в формулі (29).

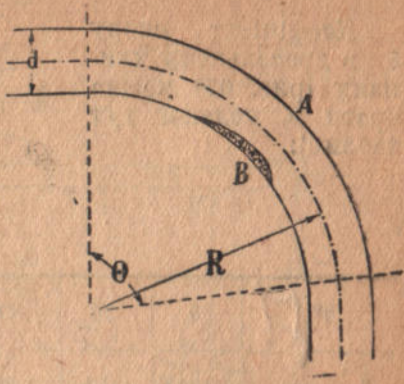


Рис. 64.

е) Втрата в засувці

Коефіцієнт опору в цьому випадку (рис. 65) можна брати з такої таблиці:

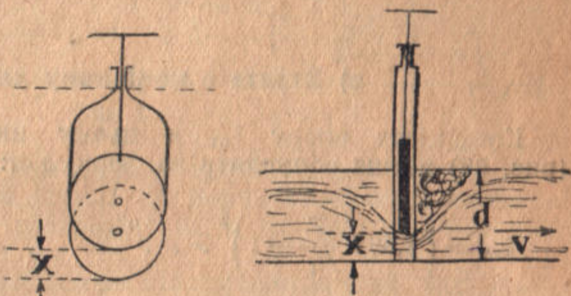


Рис. 65.

$\frac{x}{d}$	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\xi_з$	0	0,07	0,26	0.81	2,06	5,52	17,0	97,8

є) Втрата в ґранті

Коефіцієнт опору в ґранті (рис. 66) подано в такій таблиці:

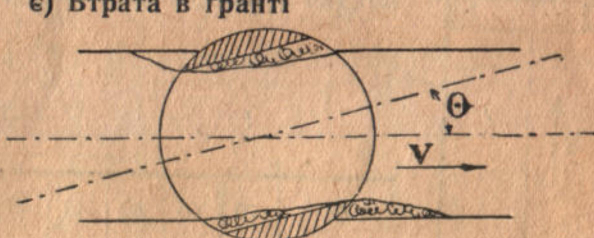


Рис. 66.

θ°	5	10	20	30	40	50	60
$\xi_г$ . . .	0.5	0,29	0,56	5,47	17,3	52,6	206

ж) Втрата в дросельному хлипаку

Коефіцієнт опору ξ в дросельному хлипаку (рис. 67) можна брати з поданої тут таблиці:

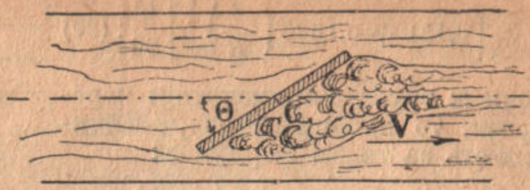


Рис. 67.

$\theta°$	5	10	20	30	40	50	60	70
$\xi_{xд}$ . . .	0,24	0,52	1,54	3,91	10,8	32,6	118	851

з) Втрата в конічному хлипаку

Коефіцієнт опору ξ_{xk} в цьому випадку (рис. 68) можна обчислити за формулою:

$$\xi_{xk} = \left(1{,}537\,\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

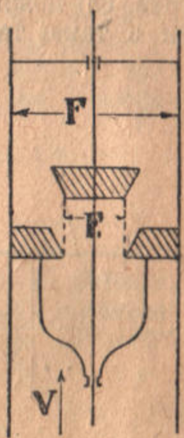


Рис. 68.

і) Втрата у відкидному хлипаку

Коефіцієнт опору $\xi_{xв}$ для відкидного хлипака (рис. 69) подано в наступній таблиці:

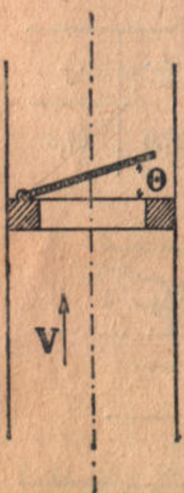


Рис. 69.

$\theta°$	70	60	50	45	40	35	30	25	20	15
$\xi_{xв}$ . .	1,7	3,2	6,6	9,5	14	20	30	42	62	90

§ 16. РУХ У ТРУБІ З СТАЛИМ ДІЯМЕТРОМ І СТАЛОЮ ВИТРАТОЮ

Припустімо, що вільні рівні (рис. 70) в резервуарах C і D не змінюють свого положення (рух усталений), а тиск на них

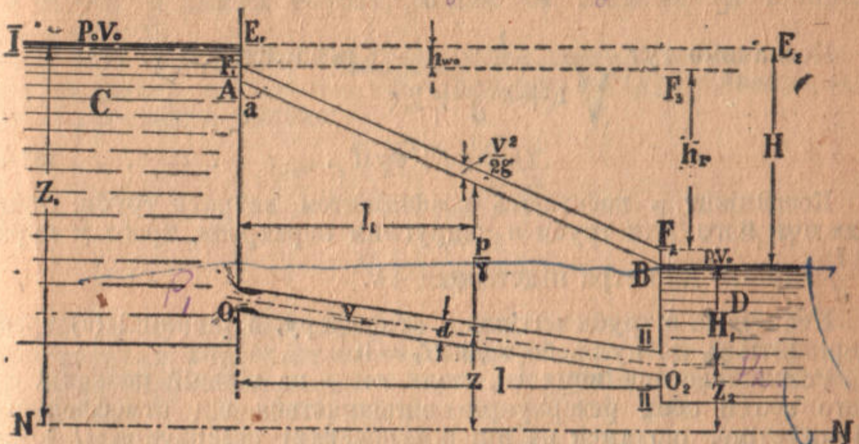


Рис. 70.

атмосферний. Досліджуючи рух у трубі O_1O_2, скористаємося з рівняння *Д. Бернуллі* (13-а). За перший перекрій вважатимемо дзеркало води в резервуарі C, а за другий — перекрій труби O_2 на кінці її.

Тиск в обох перекроях братимемо манометричний: тоді $p_1=0$, $p_2=H_1\gamma$, де H_1 — глибина виходу з труби; швидкість у першому перекрої дорівнює нулю; суму висот усіх місцевих втрат можна подати так: $\frac{v^2}{2g}\Sigma\xi$; втрата на тертя: $\lambda\frac{v^2}{2g}\frac{l}{d}$. Напишемо тепер рівняння *Д. Бернуллі*:

$$z_1=z_2+\frac{v^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+\lambda\frac{v^2}{2g}\frac{l}{d}+\frac{v^2}{2g}\Sigma\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; (\text{a})$$

Підставивши сюди $\frac{p_2}{\gamma}=H_1$, можемо за цим рівнянням визначити швидкість у трубі v:

$$v=\sqrt{\frac{2g(z_1-z_2-H_1)}{1+\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\xi}}=\sqrt{\frac{2gH}{1+\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\xi}} \quad . \; . \; (31)$$

Коли підставити до рівняння (31) числові вартості H, l, d, а також коефіцієнт тертя λ і вартості коефіцієнтів місцевих опорів, які є в трубі (при вході до труби, протіканні засувок, колін тощо), то зможемо обчислити швидкість v, а далі й витрату труби, а саме:

$$Q=Fv=\frac{\pi d^2}{4}v$$

Іноді буває зручніше користуватися з цієї формули, надавши їй трохи іншого вигляду, а саме:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \xi}} F\sqrt{2gH}$$

Позначимо тут $\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \xi}}$ одною літерою μ; тоді

$$Q = \mu F\sqrt{2gH} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31\text{-a})$$

Коефіцієнт μ називають коефіцієнтом витрати труби. Обчислюючи його для труби з некруглим перекроєм, треба у вираз $\lambda \frac{l}{d}$ замість діяметра підставити $4R$.

Коли вода з труби витікає в атмосферу, в рівнянні (а) треба дорівняти p_2 до нуля, бо тоді $H_1 = 0$.

Розглянемо ще випадок, коли тиск на вільній поверхні одного або й обох резервуарів відрізняється від атмосферного. Припустімо, що тиск на вільній поверхні резервуара C дорівнює p', а на поверхні резервуара D дорівнює p''; тоді рівняння (а) треба написати так:

$$\frac{p'}{\gamma} + z_1 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{v^2}{2g} \frac{l}{d} + \Sigma \xi,$$

тут

$$p_2 = p'' + H_1\gamma$$

Визначивши швидкість v, легко вже обчислити висоти місцевих втрат і втрат на тертя. Коли при вході до труби є одна тільки місцева втрата енергії, то після попереднього обчислення можна накреслити лінію п'єзометричних висот, як це показано на рис. 70. Від точки E_1 напірної площі E_1E_2 донизу відкладаємо висоту $h_{w\,вх}$ — втрати при вході до труби і проводимо лінію F_1F_3. Від цієї лінії донизу треба відкласти в кожному перекрої висоту втрат на тертя від початку труби до перекрою, що його розглядаємо; але, пам'ятаючи, що ця висота пропорціональна віддалі перекрою від початку труби, легше зробити це так: відкласти від точки F_3 висоту втрат на тертя h_r в усій трубі й злучити прямою лінією точки F_1 та F_2. Далі відкладемо від лінії F_1F_2 донизу висоту швидкости $\frac{v^2}{2g}$ і проведемо лінію AB, паралельну F_1F_2; легко переконатися, що лінія AB і є лінія п'єзометричних висот.

Тиск у будь-якому перекрої труби легко визначити й аналітично. Для цього треба застосувати до перекрою I і того, що відшукуємо для нього тиск, рівняння *Д. Бернуллі*, визначивши спочатку швидкість v. Якщо край труби не закруглено, то, потрапляючи до неї, струмина стискається, швидкість у звуженому місці зростає, а тому лінія п'єзометричних висот над звуженим перекроєм знижується, як це показано пунктиром на рис. 70 коло літери a. Висота швидкости $\frac{v^2}{2g}$ при вході до резервуара D витрачається на „вдар“. Місцеві втрати енергії чимало важать тільки в коротких, порівняно, трубах; розглядаючи ж рух у довгих трубах, можна не зважати на місцеві втрати енергії.

Так само, розглядаючи рух у довгих трубах, можна не зважати на висоту швидкости. Отож для довгих труб рівняння (а) матиме простіший вигляд:

$$z_1 = z_2 + H_1 + \lambda \frac{v^2}{2g} \frac{l}{d}$$

або

$$H = \lambda \frac{v^2}{2g} \frac{l}{d}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(c)}$$

тобто ми припускаємо в цьому випадку, що вся різниця рівнів у резервуарах витрачається виключно на те, щоб перемагати опір тертя. Зробивши такі припущення, лінію п'єзометричних висот можна б дістати, злучивши точки E_1 і B (рис. 70). Звідси ми бачимо також, що резервуари C і D відіграють, між іншим, ролю п'єзометрів для початку й кінця труби.

Тепер легко зрозуміти, що, взявши дільницю труби довжиною l (рис. 71), можемо написати й для неї:

$$H = \lambda \frac{v^2}{2g} \frac{l}{d};$$

тут

$$H = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)$$

є різниця п'єзометричних висот на початку і в кінці дільниці.

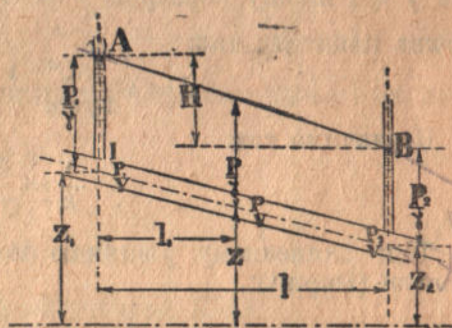


Рис. 71.

Через місцеві умови, доводиться часто класти водопровідні труби під кутом до горизонтальної площі, але кут цей майже завжди невеликий, і тому можна вважати, що довжина труби дорівнює проекції її на горизонтальну площу.

На практиці хоча й не часто, але трапляється так, що певну частину труби (CD — рис. 72) треба розмістити над лінією п'єзометричних висот.

Тоді в точках C і D, де труба перетинається з лінією п'єзометричних висот GK, тиск у трубі буде атмосферний, а в частині її CD п'єзометричні висоти, а разом і манометричний тиск, будуть від'ємні. П'єзометрична висота h в найвищій точці E труби не може перевищувати своєю абсолютною величиною висоти тиску атмосфери, бо інакше в цій точці ми мали б від'ємний абсолютний тиск, тобто розтяг, а цього не може бути.

Частину труби *CED*, розташовану над лінією п'єзометричних висот, звуть сифоном. Коли в стінці сифона зробити отвір, то через нього проходитиме до труби повітря.

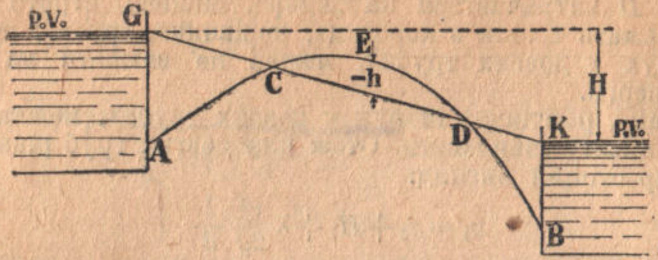


Рис. 72.

Труби обчислюють не безпосередньо за основним рівнянням (c) $H = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$, а перетворюють його, надаючи йому зручніших для практичного вжитку форм. Поділимо обидві частини цього рівняння на l; відношення $\frac{H}{l} = I$ зватимемо відносним схилом або відносним спадом. Далі виразимо швидкість v через витрату Q і площу перекрою $F = \frac{\pi d^2}{4}$: $v = \frac{4Q}{\pi d^2}$; тоді рівняння (c) можна написати так:

$$I = \lambda \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4} \frac{1}{d} = \frac{8\lambda}{\pi^2 g} \frac{Q^2}{d^5}$$

Позначимо так:

$$\frac{1}{k} = \frac{8\lambda}{g\pi^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (31\text{-b})$$

Тоді написаному рівнянню можна надати форми рівняння *Дюпюї* (Dupuit):

$$= \frac{Q^2}{kd^5} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (32)$$

або

$$H = \frac{Q^2 l}{kd^5} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (32\text{-a})$$

Зваживши на відповідні обставини, доберемо коефіцієнт λ і обчислимо величину $\frac{1}{k}$; при приблизних обчисленнях можна брати для нових труб: $\frac{1}{k} = 0{,}0025$, а для старих більше, як от — для старих труб з намулом за *Фанінгом* (Fanning): $\frac{1}{k} = 0{,}00387$.

Поділивши обидві частини основного рівняння (c) на l і помноживши на d, матимемо:

$$\frac{H}{l} d = \frac{\lambda}{2g} v^2$$

або, згадавши що $\frac{H}{l} = I$ і запровадивши означення

$$b_1 = \frac{l}{2g}, \quad \dots \dots \dots \dots \quad (33)$$

одержимо таке рівняння, що за ним можна обчислювати труби:

$$Id = b_1 v^2 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (34)$$

За рівняннями (32) і (34) можна обчислювати тільки круглі труби.

Крім цих формул є ще інші, що їх можна застосувати не тільки до труб довільного перекрою (включаючи сюди й круглі), а й обчислювати за ними канали (про це говоритимемо далі). Щоб вивести ці формули, візьмемо замість рівняння (c) загальнішу формулу (21), за якою можна обчислити висоту втрат на тертя в трубах і каналах довільного призматичного чи циліндричного перекрою:

$$h_r = H = bv^2 \frac{l}{R}$$

Звідси легко одержати рівняння аналогічне рівнянню (34):

$$IR = bv^2, \quad \dots \dots \dots \dots \quad (35)$$

тут

$$b = \frac{\lambda}{8g} = \frac{b_1}{4} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (36)$$

Розв'язавши рівняння (35) щодо v, одержимо дуже важливу формулу *Шезі* (Chezy):

$$v = C\sqrt{RI}, \quad \dots \dots \dots \dots \quad (37)$$

тут

$$C = \sqrt{\frac{1}{b}} = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (38)$$

Величину C називатимемо коефіцієнтом *Шезі*.

Обчислюючи труби за формулою *Шезі*, коефіцієнт C можна вичислювати за так званою „старою формулою *Куттера* (Kutter)":

$$C = \frac{100\sqrt{R}}{m + \sqrt{R}} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (39)$$

Величина m для нових чавунних і залізних труб може дорівнювати 0,15; для труб, що ними вже користувалися, $m = 0{,}25$; для старих труб, з жированням, $m = 0{,}35$. Обчислюючи водопровідні мережі, часто вважають, що $m = 0{,}25$.

Аналогічно *Горбачов* для коефіцієнта C подав такі формули:

$$C = \frac{70\sqrt{R}}{0{,}06 + \sqrt{R}} \quad \text{для нових чавунних труб.}$$

$$C = \frac{70\sqrt{R}}{0{,}08 + \sqrt{R}} \quad \text{для старих труб.}$$

Крім того, слід згадати *Манінґову* (Manning) формулу, за якою можна визначати коефіцієнт *Шезі*.

$$C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}},$$

де n — коефіцієнт шерехатости за *Ганґільє-Куттером* (див. стор. 102 § 21).

З так званих показникових формул, загальний вигляд яких

$$I = p \frac{v^{\alpha}}{R^{\beta}}\text{*},$$

де I — спад, p — стала для даної форми перекрою й матеріялу стінок, α і β — показники, відмінні від 1 і 2.

Подаємо формулу *Лямпе* (Lampe) для чавунних водопровідних труб:

$$I = 0{,}000755 \frac{v^{1,802}}{d^{1,25}}$$

і Flamant'a:

$$I = p \frac{v^{1,75}}{d^{1,25}}$$

Тут стала $p = 0{,}00056$ для олив'яних, скляних, поцинкованих і залізних гладеньких труб, $p = 0{,}00074$ для нових чавунних труб, $p = 0{,}00092$ для чавунних і нютованих залізних труб, що ними вже користувалися.

До цієї самої групи належить формула *Скобея* (Scobey), за якою можна обчислювати дерев'яні труби:

$$I = 0{,}000885 \frac{v^{1,8}}{d^{1,17}} \quad \dots\dots\dots\dots (40\text{-b})$$

Цю формулу можна написати ще й так:

$$v = 49{,}7\, D^{0,65} I^{0,556}$$

На підставі *Скобеєвих* досліджень, *Форхгаймер* для бетонних труб пропонує в своїй формулі

$$v = C_0 R^{0,7} I^{0,5} \quad \dots\dots\dots\dots (40\text{-c})$$

такі вартості коефіцієнта C_0:

Старі трубопроводи, що їх недосить старанно зібрано з окремих труб	76
Трубопроводи, зібрані з окремих труб, що їх використовували вже кілька років . . .	85
Трубопроводи монолітні, виготовлені на змащених залізних формах	88
Трубопроводи монолітні, шліфовані, якнайгладші	100

* Треба зауважити, що формулу *Шезі* можна подати ще й у такому вигляді: $I = \frac{1}{C^2} \frac{v^2}{R}$. Цілком зрозуміло, що її можна вважати за окремий випадок показникових формул.

Етернітові труби можна обчислювати за формулою:

$$v = C_0 R^{0,68} I^{0,56}$$

Тут для нових труб $C_0 = 160$, для трохи вживаних $C_0 = 140$ до 150. Ще деякі відомості щодо труб подано в розділі IV.

Обчислюючи труби, здебільшого користуємося з рівнянь (32) і (37) *Дюпюї* і *Шезі*.

Найскладніша справа — це добрати коефіцієнта λ або C. Деякі вказівки про це ми вже подавали. Дуже докладно це питання розглянуто в курсі „Общая гидравлика" проф. *Максименка,* 1921 р. (див. також курси водопостачання й каналізації).

Після наведеної формули для швидкости: $v = C\sqrt{RI}$ вираз для витрати набуде вигляду:

$$Q = Fv = FC\sqrt{R}\sqrt{I}$$

Для даного діяметра труби F і R величини сталі. Коефіцієнт C, коли його вважати лише за функцію коефіцієнта шерехатости й гідравлічного радіюса, є теж величина стала. Замінивши $FC\sqrt{R}$ через K, матимемо для витрати ще таку форму:

$$Q = K\sqrt{I}$$

Величину K звуть модулем витрати; це власне є витрата при спаді $I = 1$. Легко переконатися, що вона має розмірність витрати ($м^3/сек$). Згадавши, що знаменник у формулі *Дюпюї* $\frac{1}{kd^5}$ дорівнює $\frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5}$, а це є не що інше, як $\frac{1}{F^2C^2R} = \frac{1}{K^2}$, для круглого перекрою можна також формулу *Дюпюї* написати у вигляді:

$$I = \frac{Q^2}{K^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41\text{-a})$$

Величини модулів K і K^2 подано в таблиці II. Коефіцієнт C взято за старою *Куттеровою* формулою при $k = 0,25$. Там же подано і модулі швидкости $S = C\sqrt{R}$. Модуль швидкости є швидкість при спаді $I = 1$. Запроваджені величини K і S часто значно спрощують обчислення.

Взагалі, обчислюючи труби, не безпосередньо користуються згаданими формулами, а вдаються до таблиць чи номограм, що їх складено на підставі цих формул (див., наприклад, „Гидравлический справочник" проф. *Павловського,* 1924 р., табл. XXVI і номограма обчислювати труби — рис. 11, а також у кінці цієї книжки — таблиця II, графік I). З таблицями й номограмами можна далеко швидше обчислювати труби.

ЗАВДАННЯ ДО §§ 14 — 16

1. Із резервуара A вода витікає в атмосферу (рис. 73) через трубу завдовжки $L = 70,0$ *м* і діяметром $d = 150$ *мм*. Визначити швидкість і витрату в трубі та накреслити лінію п'єзометричних висот, коли напір $H = 5,0$ *м*, а $l_1 = l_3 = l_4 = 10,0$ *м* та $l_2 = 40$ *м*.

Увага. Труба коротка, стара, чавунна, з гострим краєм при вході. Коліна закруглені. Ґрант повернуто на кут θ, що дорівнює приблизно 30° (кут між осями ґранта й труби).

Розв'язання. Увесь напір витрачається на утворення швидкости, тертя й місцеві опори, тому рівняння *Д. Бернуллі* для

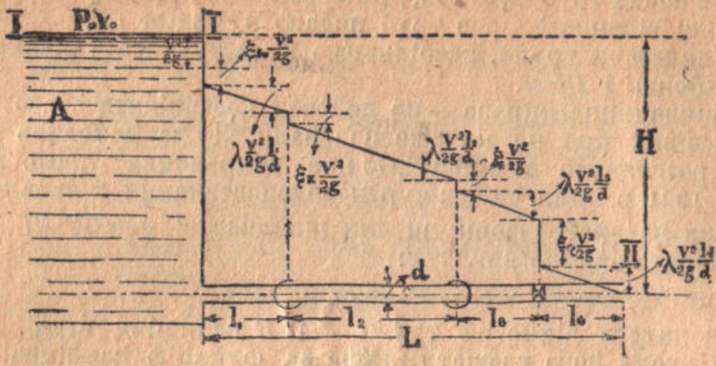


Рис. 73.

перекроїв I — II, коли його спростити, набуде такого вигляду:

$$H = \frac{v^2}{2g}\left(1 + \frac{\lambda l}{d} + \Sigma\xi\right), \ldots \ldots \ldots \text{(A)}$$

де $\Sigma\xi$ сума коефіцієнтів місцевих втрат.

Місцеві втрати маємо такі:

1. При вході до труби $\qquad \xi_{вх}\frac{v^2}{2g} = 0{,}5\frac{v^2}{2g}$

2. У двох колінах $\qquad 2\xi_k\frac{v^2}{2g} = 2\,.\,0{,}3\frac{v^2}{2g}$ $\qquad$ (для нормального сортаменту).

3. У ґранті $\qquad \xi_r\frac{v^2}{2g} = 5{,}0\frac{v^2}{2g}$

Щоб полегшити роботу, коефіцієнт λ обчислюємо за формулою *Леві* для старих труб:

$$\lambda = \frac{0{,}044}{0{,}47 + \sqrt{d}} = 0{,}051$$

Підставивши числові величини до рівняння (A), дістанемо:

$$5 = \frac{v^2}{2g}\left(1 + \frac{0{,}051\,.\,70}{0{,}15} + 0{,}5 + 0{,}6 + 5{,}0\right) = 30{,}9\,\frac{v^2}{2g},$$

звідки

$$v = \sqrt{\frac{2g\,.\,5}{30{,}9}} = 1{,}78 \text{ м/сек}$$

до

$$Q = Fv = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{3{,}14 \,.\, 0{,}15^2}{4} \cdot 1{,}78 = 0{,}0314 \ м^3/сек = 31{,}4 \ л/сек$$

Щоб збудувати лінію п'єзометричних висот, обчислимо висоти втрат і швидкости.

1. Висота швидкости:

$$h_v = \frac{v^2}{2g} = \frac{1{,}78^2}{2g} = 0{,}162 \ м.$$

2. „ на втрати при вході:

$$h_{вх} = \xi_{вх} \frac{v^2}{2g} = 0{,}5 \,.\, 0{,}162 = 0{,}081 \ м$$

3. „ втрати на тертя на 1-ій дільниці $l_1 = 10$ *м*:

$$h_{r1} = \lambda \frac{l_1}{d} \frac{v^2}{2g} = 0{,}051 \cdot \frac{10}{0{,}15} \cdot 0{,}162 = 0{,}551 \ м$$

4. „ втрати в 1-му коліні:

$$h_k = \xi_k \frac{v^2}{2g} = 0{,}3 \,.\, 0{,}162 = 0{,}049 \ м$$

5. „ втрати на тертя на 2-ій дільниці $l_2 = 40$ *м*:

$$h_{r2} = \lambda \frac{l_2}{d} \frac{v^2}{2g} = 0{,}051 \cdot \frac{40}{0{,}15} \cdot 0{,}162 = 2{,}203 \ м$$

6. „ втрати в 2-му коліні:

$$h_{k2} = \xi_k \frac{v^2}{2g} = 0{,}3 \,.\, 0{,}162 = 0{,}049 \ м$$

7. „ втрати на тертя на 3-ій дільниці дорів втрати на 1-ій дільниці ($l_1 = l_3$):

$$h_{r3} = h_{r1} = 0{,}551 \ м$$

8. „ втрати в ґранті:

$$h_{ґ} = \xi_{ґ} \frac{v^2}{2g} = 5 \,.\, 0{,}162 = 0{,}810 \ м$$

9. „ втрати на тертя на 4-ій дільниці дорівнює висоті втрати на 1-ій дільниці ($l_4 = l_1$):

$$h_{r4} = h_{r1} = 0{,}551 \ м$$

Сумарна втрата $h_w = \Sigma h = 5{,}007$ *м*. Розходження на 7 *мм* сталося тому, що не дуже точно обчислювали.

За визначеними вартостями висоти втрат будуємо п'єзометричну лінію, як це показано на рисунку.

2. При якій різниці рівнів H через сифон (рис. 74) діяметром $d = 400$ *мм* проходитиме витрата $Q = 150$ *л/сек*? Довжина сифону $L = 60$ *м*. Відшукати тиск у найвищій точці труби C, якщо висота її $h = 7{,}5$ *м* над рівнем води у резервуарі A. Збудувати п'єзометричну лінію.

Розв'язання. Сифон обчислюємо, як коротку трубу ($L < 400d = 400 . 0{,}4$).

Загальна обчислювальна формула:

$$Q = Fv = F\sqrt{\frac{2gH}{1+\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\xi}} = \mu F\sqrt{2gH};\ \sqrt{H} = \frac{Q}{\mu F\sqrt{2g}} \ldots (A)$$

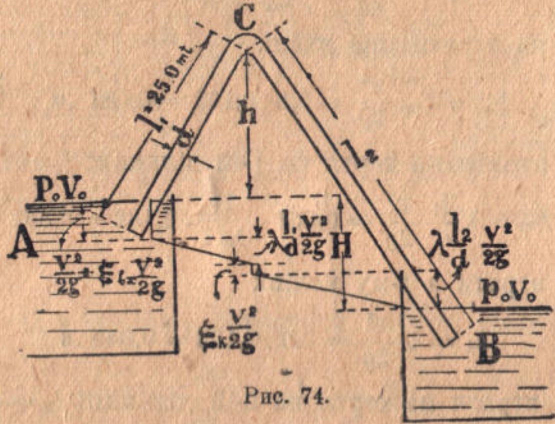


Рис. 74.

Відшукаємо коефіцієнт

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda\frac{L}{d}+\Sigma\xi}} \ldots\ldots\ldots (B)$$

За *Мізесом* для старих труб:

$$\lambda = 0{,}01 + \frac{0{,}0116}{\sqrt{d}} + \frac{0{,}0023}{\sqrt{vd}} = 0{,}01 + \frac{0{,}0116}{0{,}633} + \frac{0{,}0023}{0{,}691} =$$

$$= 0{,}01 + 0{,}01834 + 0{,}003329 = 0{,}03167$$

Швидкість, що є у формулі для λ:

$$v = \frac{0{,}150 . 4}{3{,}14 . 0{,}4^2} = 1{,}195\ м/сек$$

З місцевих втрат у сифоні маємо втрату при вході та в коліні:

$$\Sigma\xi\frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}(\xi_{вх}+\xi_k) = (0{,}5+0{,}3)\frac{v^2}{2g} = 0{,}8\frac{v^2}{2g}$$

Підставимо відшукані величини у формулу (B):

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}03167\frac{60}{0{,}4}+0{,}8}} = \frac{1}{\sqrt{6{,}555}} = 0{,}391$$

З формули (A)

$$\sqrt{H} = \frac{Q}{\mu F\sqrt{2g}} = \frac{0{,}150}{0{,}391 . 0{,}1256 . 4{,}429} = 0{,}690\ м^{\frac{1}{2}}$$

$$H\ 0{,}69^2 = 0{,}476\ м$$

Щоб збудувати п'єзометричну лінію, обчислюємо висоти втрат і висоту швидкости.

Висота швидкости:

$$h_v = \frac{v^2}{2g} = \frac{1,195^2}{19,62} = 0,0727 \text{ м}$$

Висота втрати при вході:

$$h_{вх} = \xi_{вх} \frac{v^2}{2g} = 0,5 \,.\, 0,0727 = 0,0364 \text{ м}$$

Висота втрати на тертя на дільниці до точки C:

$$h_{r1} = \lambda \frac{l_1}{d} \frac{v^2}{2g} = 0,03167 \cdot \frac{25}{0,4} \cdot 0,0727 = 0,1438 \text{ м}$$

Висота втрати в коліні:

$$h_k = \xi_k \frac{v^2}{2g} = 0,3 \,.\, 0,0727 = 0,0218 \text{ м}$$

Висота втрати на тертя на дільниці від точки C:

$$h_{r2} = \lambda \frac{l_2}{d} \frac{v^2}{2g} = 0,03167 \cdot \frac{35}{0,4} \cdot 0,0727 = 0,2015 \text{ м}$$

Сумарна втрата напору $\sum h$ має дорівнювати H:

$$\Sigma h = 0,0727 + 0,364 + 0,1438 + 0,0218 + 0,2015 = 0,4762 \text{ м}$$

(розходження на 0,0002 *м* сталося тому, що не дуже точно обчислювали).

За відшуканими висотами втрат будуємо п'єзометричну лінію (рис. 74). Застосувавши рівняння *Д. Бернуллі* до перекроїв C і вихідного перекрою в резервуарі B, абож безпосередньо за п'єзометричною лінією, можна відшукати тиск у точці C.

До точки C втрати становлять:

$$\Sigma_1 h = h_v + h_{вх} + h_{r1} + h_k = 0,0727 + 0,0364 + 0,1438 + 0,0218 = \\ = 0,2747 \text{ м}$$

Висота розрідження в точці C:

$$h_p = h + \Sigma_1 h = 7,50 + 0,2747 = 7,7747 \text{ м}$$

3. Два резервуари злучено трубою, розміри якої подано на рис. 75. Визначити витрату через трубу й накреслити лінію п'єзометричних висот. Напір H=8,0 *м*.

Увага. Труба коротка, стара, чавунна; край при вході закруглений.

4. Визначити діаметр труби завдовжки $L = 1000$ *м*; через трубу протікає за годину 72 *м*³. Втрата натиску

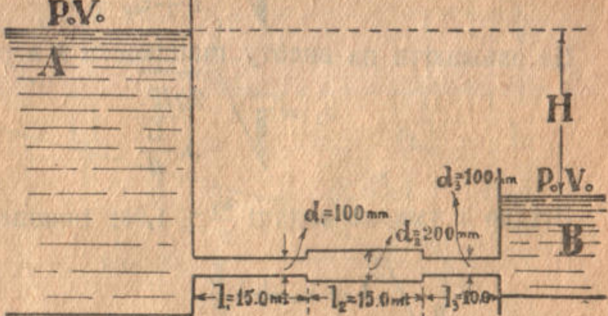


Рис. 75.

(різниця п'єзометричних висот) $H = 9{,}5$ *м.* Труба стара, чавунна. На місцеві втрати натиску можна й не зважати.

Розв'язання. Відносний спад $I = \frac{H}{L} = 0{,}0095$; за секунду витрачається води $Q = \frac{72}{60.60} = 0{,}02$ *м³/сек.*

Щоб обчислити (покищо приблизно) діяметр труби, скористаємося з формули (32) і підставимо туди $\frac{1}{k} = 0{,}00387$; матимемо $0{,}0095 = 0{,}00387 . \frac{0{,}02^2}{d^5}$; звідси $d = 0{,}174 \approx 0{,}175$ *м* $= 175$ *мм.*
Швидкість у такій трубі $v = \frac{Q}{F} = \frac{0{,}02.4}{\pi 0{,}175^2} = 0{,}833$ *м/сек.*

Тепер можемо точніше обчислити коефіцієнт λ, а потім і $\frac{1}{k}$; наприклад, за формулою *Мізеса* для старих труб:

$$\lambda = 0{,}01 + \frac{0{,}0116}{\sqrt{d}} + \frac{0{,}0023}{\sqrt{vd}} = 0{,}01 + \frac{0{,}0116}{\sqrt{0{,}175}} + \frac{0{,}0023}{\sqrt{0{,}833 . 0{,}175}} = 0{,}043$$

Тоді $\frac{1}{k} = \frac{8\lambda}{g\pi} = 0{,}00354$, майже те саме, що й за *Фанінгом.*

Розв'язати це завдання за допомогою таблиць і номограм.

5. Коли не зважаємо на місцеві втрати енерґії й висоту швидкости, то, обчислюючи швидкість у трубі, робимо певну помилку. Визначити те відношення довжини труби L до її діяметра d, що при ньому вказана помилка буде не більша як 5% (коли не зважаємо тільки на втрату при вході до труби й висоту швидкости). Коефіцієнт тертя $\lambda = 0{,}03$. Край труби при вході гострий.

Розв'язання. Швидкість за формулою (31):

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \xi_{вх} + \lambda \frac{L}{d}}}$$

Не зважаючи на висоту швидкости й втрату при вході:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gH}{\lambda \frac{L}{d}}}$$

Згідно з умовою задачі $\frac{v_1}{v} \leqq 1{,}05$; інакше:

$$\sqrt{\frac{1 + \xi_{вх} + \lambda \frac{L}{d}}{\lambda \frac{L}{d}}} \leqq 1{,}05;$$

підставляючи числа:

$$\sqrt{\frac{1,5+0,03\frac{L}{d}}{0,03\frac{L}{d}}} \leqq 1,05;$$

звідси

$$\frac{L}{d} \geqq 500$$

6. Два резервуари сполучено трубою (рис. 70); довжина її $l = 1200$ *м*; діяметр $d = 200$ *мм*; різниця рівнів у резервуарах $H = 18$ *м*. Відшукати швидкість і витрату. Труба стара, чавунна.

Розв'язання. $$I = \frac{H}{l} = \frac{18}{1200} = 0,015$$

Q визначимо за допомогою формули: $I = \frac{Q^2}{kd^5}$; звідси:

$$Q = \sqrt{kd^5 I} = \sqrt{\frac{1}{0,00387} \cdot 0,2^5 \cdot 0,015} = 0,0352 \text{ м}^3/\text{сек} = 35,2 \text{ л/сек}$$

Швидкість $$v = \frac{Q}{F} = \frac{0,0352.4}{\pi\, 0,2^2} = 1,12 \text{ м/сек}$$

Обчислимо знову коефіцієнт λ точніше за формулою *Мізеса:*

$$\lambda = 0,01 + \frac{0,0116}{\sqrt{0,2}} + \frac{0,0023}{\sqrt{1,12.0,2}} = 0,0407,$$

а $$\frac{1}{k} = \frac{8.0,0407}{\pi^2 g} = 0,00334$$

Тепер можемо обчислити точніше:

$$Q = \sqrt{kd^5 I} = \sqrt{\frac{1}{0,00334} . 0,2^5 . 0,015} = 0,0379 \text{ м}^3/\text{сек} = 37,9 \text{ л/сек}$$

$$v = 1,206 \approxeq 1,21 \text{ м/сек}$$

Обчислювати ще раз не треба, бо λ майже не зміниться від того, що швидкість дещо збільшилася.

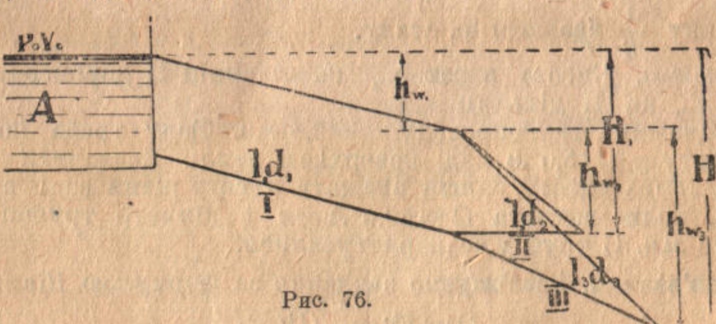


Рис. 76.

7. Труба I розгалужується (рис. 76) на дві труби — II і III. Розміри труб подано на рисунку. Обчислити витрати Q_1, Q_2 і Q_3

через кожну з цих труб та збудувати лінії п'езометричних висот. Величину $\frac{1}{k}$ вважати за сталу.

Розв'язання. Висота втрати на тертя на I дільниці за формулою (32-а) $h_{w_1}=\frac{Q_1^2 l_1}{kd_1^5}$. Так само висоти втрат на двох інших дільницях: $h_{w_2}=\frac{Q_2^2 l_2}{kd_2^5}$; $h_{w_3}=\frac{Q_3^2 l_3}{kd_3^5}$.

Тепер можемо скласти такі рівняння:

$$H_1=h_{w_1}+h_{w_2}=\frac{1}{k}\left(\frac{Q_1^2 l_1}{d_1^5}+\frac{Q_2^2 l_2}{d_2^5}\right)$$

$$H=h_{w_1}+h_{w_3}=\frac{1}{k}\left(\frac{Q_1^2 l_1}{d_1^5}+\frac{Q_3^2 l_3}{d_3^5}\right)$$

$$Q_1=Q_2+Q_3$$

З цих рівнянь визначимо Q_1, Q_2 і Q_3. Після того обчислимо h_w і збудуємо лінії п'єзометричних висот, як це вказано на рисунку.

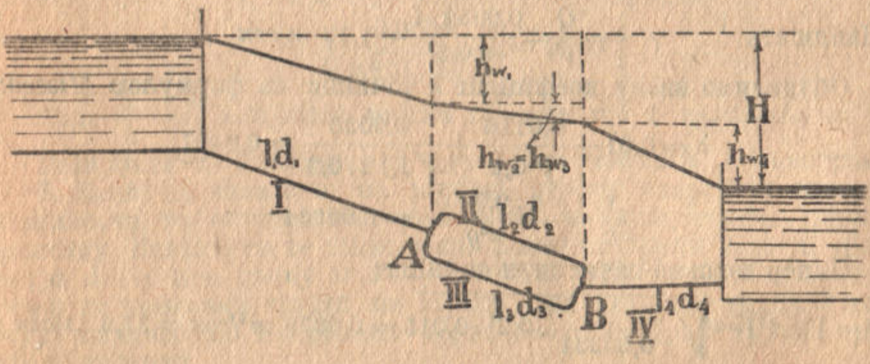


Рис. 77.

8. Визначити витрати через кожну з 4 труб, що їхні розміри подано на рис. 77, і збудувати лінії п'єзометричних висот. Величину $\frac{1}{k}$ вважати за сталу.

Вказівка. Висота втрат h_{w_2} на дільниці II дорівнює висоті втрат h_{w_3} на III дільниці.

9. Довжина трубопроводу $l=2{,}5$ *км.* Воду треба подавати на висоту $y=15{,}0$ *м* над поверхнею землі. Визначити висоту башти H (за висоту башти вважати висоту рівня води в резервуарі), коли витрата $Q=50{,}5$ *л/сек* і діяметр трубопроводу $d=300$ *мм.* З труб уже користувалися.

Розв'язання. Розв'язуємо завдання за формулою *Шезі*:

$$Q=Fv=FC\sqrt{RI},$$

звідки

$$I=\frac{Q^2}{F^2C^2R}=\frac{0{,}0505^2}{0{,}0707^2\cdot 52{,}29^2\cdot 0{,}075}=\frac{0{,}00255}{1{,}0249}=0{,}00249\approx 0{,}0025$$

Коефіцієнт *Шезі* C визначено за старою *Куттеровою* формулою:

$$C=\frac{100\sqrt{R}}{m+\sqrt{R}}=\frac{100\sqrt{0{,}075}}{0{,}25+\sqrt{0{,}075}}=52{,}29$$

Тут $m=0{,}25$ для труб, що ними вже користувалися.

$$I=\frac{h_w}{l},$$

звідки $h_w=Il=0{,}0025\,.\,2500=6{,}25$ *м*,

де h_w — втрата на тертя.

Висота башти $H=h_w+y=6{,}25+15=21{,}25$ *м*

Це саме завдання розв'яжемо, користуючись з модулів витрати: $Q=K\sqrt{I}$, звідки $I=\frac{Q^2}{K^2}$.

У таблиці (див. табл. II) знаходимо для труби діяметром $d=300$ *мм*: $K^2=1{,}024$ $(м^3/сек)^2$.

Тоді

$$I=\frac{0{,}0505^2}{1{,}024}=0{,}00249\approx 0{,}0025$$

$$h_w=lI=2500\,.\,0{,}0025=6{,}25 \text{ м}$$

$$H=h_w+y=15+6{,}25=21{,}25 \text{ м}$$

Увага. Обчислюючи висоту башти, базувалися на тому, що основа її має ту саму позначку, що й поверхня землі, куди подається воду. Розв'язати це завдання за допомогою таблиць і номограм.

10. Відшукати висоти y_c і y_D (рис. 78), до яких може підійнятися вода в точках C і D, якщо витрата в точці C: $Q_c=15{,}4$ *л/сек* і в точці D: $Q_d=9{,}7$ *л/сек*. Напір $H=25{,}4$ *м*. Точки A, B, C, D на одній горизонтальній площі.

Накреслити п'єзометричну лінію. Труби чавунні, вживані.

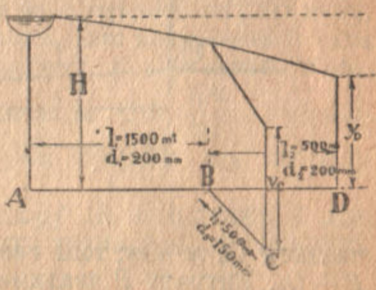


Рис. 78.

Розв'язання. Витрата на дільниці AB:

$$Q=Q_c+Q_d=15{,}4+9{,}7=25{,}1 \text{ л/сек}$$

Втрата напору на тій самій дільниці:

$$h_{wb}=\frac{Q^2l_1}{kd_1^5}=\frac{Q^2l_1}{K_1^2}=\frac{0{,}0251^2\,.\,1500}{0{,}11003}=8{,}59 \text{ м}$$

Модуль витрати K (квадрат його) беремо з таблиці для труби $d=200$ *мм*.

Втрата напору на дільниці BD:

$$h_{wd}=\frac{Q_d^2l_2}{K_2^2}=\frac{0{,}0154^2\,.\,500}{0{,}11003}=1{,}077=1{,}08 \text{ м}$$

Втрата напору на дільниці ABD:

$$h_{wad}=h_{wb}+h_{wd}=8{,}59+1{,}08=9{,}67 \text{ м}$$

$$y_D=H-h_{wad}=25{,}4-9{,}67=15{,}73 \text{ м}$$

Втрата напору на дільниці BC:

$$h_{wc} = \frac{Q_2^2 l_3}{K_3^2} = \frac{0{,}0097^2 . 500}{0{,}02231} = 2{,}109 = 2{,}11 \text{ м}$$

$$h_{wac} = h_{wb} + h_{wc} = 8{,}59 + 2{,}11 = 10{,}70 \text{ м}$$

$$y_c = H - h_{wac} = 25{,}4 - 10{,}7 = 14{,}7 \text{ м}$$

Розв'язати це завдання за допомогою таблиць і номограм.

§ 17. ТРУБА СТАЛОГО ПЕРЕКРОЮ З ТРАНЗИТНОЮ ТА НЕПЕРЕРИВНОЮ ВИТРАТОЮ

У водопроводах із труб вуличної мережі воду через невеликі відгалуження підводять до будинків, тому витрата в трубі поступово зменшується. Обчислюючи точно, треба було б розглядати окремо кожну дільницю труби — від одного відгалуження до одного, але це дуже забарна й складна робота. Щоб спростити обчислення, припускають, що витрати через відгалуження до будинків розподілено цілком рівномірно вздовж усієї труби, хоча насправді ці витрати зосереджуються в окремих точках труби.

Припустімо, що до резервуара D (рис. 79) через трубу O_1O_2 вливається P *л/сек* і по дорозі на всій довжині труби витра-

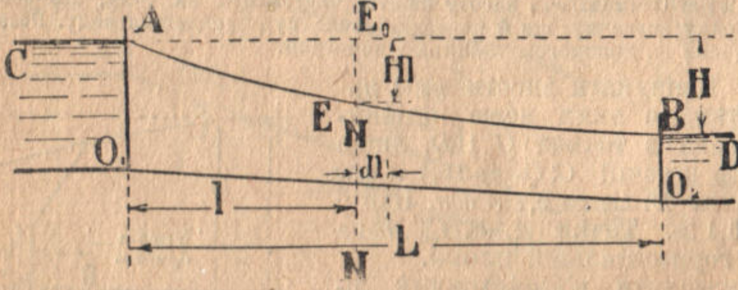


Рис. 79.

чається Q_0 *м³/сек*; тоді секундна витрата на початку труби буде: $P + Q_0$. Витрату P зватимемо транзитною, а витрату Q_0 вздовж труби — неперервною. Коли на одиницю довжини труби L припадає витрата q *м³/сек*, то $Q_0 = qL$.

Коли знову не зважатимемо на місцеві втрати, то можна сказати, що ввесь напір H втрачається на тертя, але тепер ця втрата не розподіляється рівномірно вздовж усієї труби, бо швидкість вздовж неї змінюється; тому, злучивши прямою точки A і B, вже не можна одержати лінію п'єзометричних висот. Щоб накреслити цю лінію, зробимо так. Визначимо витрату через довільний перекрій NN на віддалі l від початку труби O_1; очевидячки

$$Q_l = P + Q_0 - ql$$

Виділимо тепер безконечно коротку дільницю труби dl; вздовж цієї дільниці витрату Q_l можна вважати за сталу; втрату напору на тертя на цій дільниці позначимо dH. Скористаємося з рівняння (32-а):

$$dH = \frac{Q_l^2\,dl}{kd^5} = \frac{(P + Q_0 - ql)^2\,dl}{kd^5}$$

Проінтеґрувавши це рівняння для всієї труби в межах від 0 до L, дістанемо:

$$H = \frac{P^2L}{kd^5} + \frac{PQL}{kd^5} + \frac{Q_0^2L}{3kd^5} = \frac{\left[P^2 + (\sqrt{PQ_0})^2 + \frac{Q_0^2}{3}\right]L}{kd^5} \quad . \; . \; \text{(a)}$$

Обчисляти вираз

$$R^2 = P^2 + (\sqrt{PQ_0})^2 + \frac{Q_0^2}{3}$$

є досить складна робота; тому його дуже часто замінюють таким виразом:

$$R^2 \approx (P + 0{,}55Q)^2$$

Легко переконатися, що помилка від такої заміни дуже невелика. Тепер можемо висловити таке твердження: обчислюючи трубу сталого діяметра з транзитною та непереривною витратою, можемо скористатися з тої самої формули (32), але замість витрати Q треба поставити туди фіктивну (обчислювальну) витрату

$$R = P + 0{,}55Q_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (42)$$

Коли у виразі (а) транзитна витрата $P = 0$, то матимемо:

$$H = \frac{Q_0^2L}{3kd^5}$$

З цього бачимо, що коли є тільки непереривна витрата води, то висота втрати на тертя втроє менша, ніж коли була б така сама транзитна витрата. Щоб накреслити тепер лінію п'єзометричних висот, скористуємося з рівняння $H = \frac{R^2l}{kd^5}$, застосовуючи його до кількох дільниць труби (щоразу від початку труби до певного її перекрою).

Обчислимо, наприклад, втрату напору H_l на дільниці l; для цього визначимо спочатку транзитну витрату цієї дільниці, тобто витрату через перекрій NN:

$$P' = P + \frac{Q_0}{L}(L - l)$$

Непереривна витрата на дільниці l:

$$Q_0' = \frac{Q_0}{L}l$$

Маючи P' і Q_0', легко вже обчислити фіктивну витрату R' на дільниці l за формулою (42), а далі за формулою (32) і висоту втрати на тертя:

$$H_l = \frac{R'^2l}{kd^5}$$

Відклавши H_l униз від площі натиску AE_0 над перекроєм NN, відшукаємо точку E, яка, очевидячки, міститься на лінії п'єзометричних висот. Взявши ще кілька дільниць, можемо визначити кілька точок на лінії п'єзометричних висот, а злучивши їх кривою, одержимо й саму п'єзометричну лінію. Щоб не дуже ускладняти всі виводи, величину $\frac{1}{k}$ вважають за сталу.

ЗАВДАННЯ ДО § 17

1. Транзитна витрата труби (рис. 79) $P = 4{,}2$ *л/сек*, неперервна витрата $q = 0{,}003 \frac{л}{м.сек,}$ довжина труби $L = 1{,}2$ *км*, напір $H = 6$ *м*; труба стара, чавунна, $\frac{1}{k} = 0{,}00387$.

Відшукати її діяметр, а також висоту H_l втрати напору на дільниці $l = 400$ *м* (від початку труби).

Розв'язання. Неперервна витрата вздовж усієї труби:

$$Q_0 = qL = 0{,}003 \,.\, 1200 = 3{,}6 \text{ л/сек}$$

Обчислювальна (фіктивна) витрата:

$$R = P + 0{,}55\, Q_0 = 4{,}2 + 0{,}55 \,.\, 3{,}6 \cong 6{,}2 \text{ л/сек} = 0{,}0062 \text{ м}^3\text{/сек}$$

Діяметр труби визначимо з рівняння:

$$H = \frac{R^2 L}{kd^5};\ d^5 = \frac{R^2 L}{kH} = 0{,}00387 \cdot \frac{0{,}0062^2 \,.\, 1200}{6} \cong 0{,}00003;$$

звідси

$$d \cong 0{,}125 \text{ м}$$

Транзитна витрата в перекрої NN:

$$P' = P + q(L - l) = 4{,}2 + 0{,}003\,(1200 - 400) = 6{,}6 \text{ л/сек} = 0{,}0066 \text{ м}^3\text{/сек};$$

неперервна витрата на дільниці l:

$$Q_0' = ql = 0{,}003 \,.\, 400 = 1{,}2 \text{ л/сек} = 0{,}0012 \text{ м}^3\text{/сек};$$

фіктивна витрата на дільниці l:

$$R' = 0{,}0066 + 0{,}55 \,.\, 0{,}0012 = 0{,}0073 \text{ м}^3\text{/сек}$$

Висота втрат на дільниці l:

$$H_l = \frac{R^2 l}{kd^5} = 0{,}00387 \cdot \frac{0{,}00732 \,.\, 400}{0{,}125^5} = 2{,}78 \text{ м}$$

Відклавши H_l униз від точки E_0 над перекроєм NN, відшу-

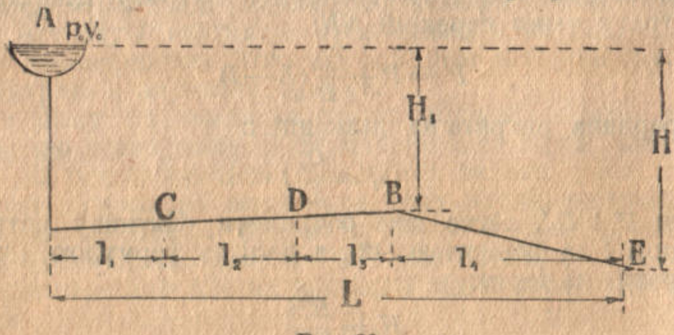


Рис. 80.

каємо точку E, що міститься на лінії п'єзометричних висот.

2. Транзитна витрата труби (рис. 80) в точці B: $P = 5{,}7$ *л/сек*. Неперервна витрата на всій довжині труби $L = 1{,}5$ *км* $Q_0 = 8$ *л/сек*.

Напір до точки B: $H_1 = 3{,}6$ *м* і загальний до точки E: $H = 4{,}2$ *м*. Визначити діяметр на дільницях AB і BE (сталий для кожної дільниці) та накреслити лінію п'єзометричних висот за точками C, D, B і E. Задано: $l_1 = 300$ *м*, $l_2 = 350$ *м*, $l_3 = 250$ *м* і $l_4 = 600$ *м*; труба стара, чавунна, $\frac{1}{k} = 0{,}00387$.

§ 18. ТРУБА СТАЛОГО ДІЯМЕТРА, ЩО ЖИВИТЬСЯ З ОБОХ КІНЦІВ

Припустімо, що трубу OO_1 (рис. 81) обчислено на неперервну витрату Q_0 і транзитну витрату P. Коли з якихось причин неперервна витрата збільшується проти обчислювальної її вартости Q_0, то транзитна зменшуватиметься, і нарешті може статися, що вода не тільки перестане витікати до резервуару D, а, навпаки, витікатиме трубою OO_1 з цього резервуара.

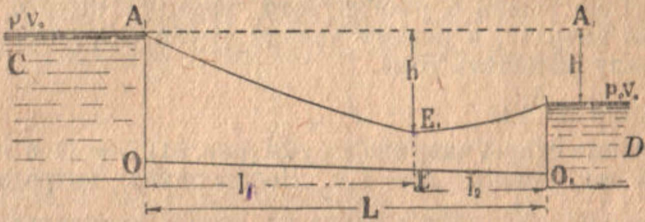


Рис. 81

Тоді якась частина труби l_1 живитиметься водою з резервуара C, а друга частина l_2 — з резервуара D. Точку E, що розділяє ці дільниці, звуть точкою розділу або нулевою точкою.

Такий випадок може статися у вуличній водопровідній трубі, яку звичайно приєднано обома кінцями до двох маґістральних труб; висоти рівнів води в резервуарах C і D відповідають п'єзометричним висотам у тих перекроях маґістральних труб, де до них приєднується вулична труба. Щоб дослідити явище, припустімо, що трубу обчислено на фіктивну витрату R, яку визначили з формули:

$$R^2 = P^2 + PQ_0 + \frac{Q_0^2}{3};$$

тепер звідси визначимо транзитну витрату P, вважаючи, що R і Q відомі:

$$P = -0{,}5Q_0 + \sqrt{R^2 - \frac{Q_0^2}{12}}$$

З цієї формули видно, що коли $Q_0 > R\sqrt{3}$, то транзитна витрата P стає від'ємна, тобто вода вже потече не з труби до резервуара D, а навпаки; отож, коли є ця нерівність, то труба живиться з обох кінців. Напишемо тепер рівняння, що поєднали б витрату $q = \frac{Q_0}{L}$ на одиницю довжини труби, довжини

l_2 і l_1 та висоту h втрати від резервуара C до точки розділу E; складаючи рівняння, треба пам'ятати, що h має бути більше за H, бо інакше вода з резервуара D не потече в трубу:

$$l_2+l_1=L \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

$$h=\frac{(ql_1)^2l_1}{3kd^5}=\frac{q^2l_1^3}{3kd^5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

$$h-H=\frac{(ql_2)^2l_2}{3kd^5}=\frac{q^2l_2^3}{3kd^5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

За допомогою цих рівнянь можна розв'язати різні задачі про трубу, яка живиться з обох кінців. Коли ж будуть відомі всі величини, що є в рівняннях, то можна легко накреслити й лінію п'єзометричних висот для кожної окремої дільниці — OE та O_1E.

Аналогічно можна б розв'язувати задачу, коли б, крім неперервної витрати, в певних точках труби OO_1 довелося забирати чималу кількість води.

ЗАВДАННЯ ДО § 17

1. Довжина старої чавунної труби (рис. 81) $L=1200$ *м*, діяметр її $d=125$ *мм*, напір $H=6$ *м*. Неперервна витрата з цієї труби $q=0{,}01\ \frac{л}{м.сек}$. Чи є через цю трубу транзитна витрата? Якщо її нема, то визначити точку розділу E і висоту втрат на дільниці труби між резервуаром C і точкою розділу E.

§ 19. ПРАВИЛО ДЮПЮЇ

Розглянемо трубу з сталою витратою, але із змінним діяметром рис. 82). Пам'ятаючи, що випадок повільної й непере-

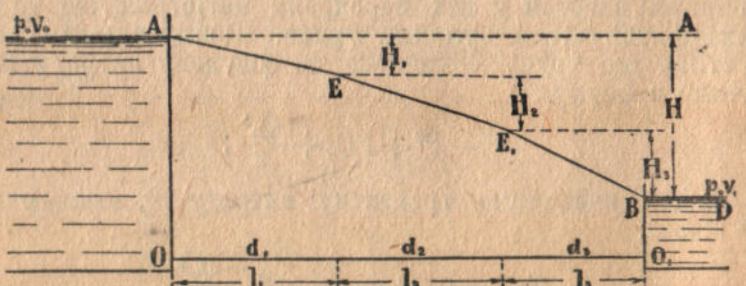


Рис. 82.

ривної зміни діяметра в довгих трубах не має практичного значення, досліджуватимемо тільки рух води в трубопроводі, що складається з кількох труб з неоднаковими, але сталими на кожній дільниці діяметрами $d_1, d_2, d_3 \ldots d_n$; довжина відповідних труб хай буде $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$.

Висоту втрат на довільній дільниці l_i, коли дільниці довгі і на місцеві втрати можна не зважати, обчислимо за формулою (32-а):

$$H_i = \frac{Q^2 l_i}{k d_i^5}$$

Сума втрат на всіх дільницях дорівнює різниці рівнів у резервуарах:

$$\sum H_i = H = \frac{Q^2}{k} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{l_i}{d_i^5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

Власно величина $\frac{1}{k}$ на різних дільницях має різні вартості і тому її не слід було б виносити за знак суми; проте, щоб спростити обчислення, можна взяти для всіх дільниць середню її вартість. Коли бажано даний трубопровід замінити одною трубою з сталим діяметром D і довжиною L, в якій при тій самій вартості напору H була б колишня витрата Q (еквівалентна труба), то для цього треба виконати таку умову:

$$\frac{L}{D^5} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{l_i}{d_i^5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (43\text{-а})$$

Ця формула й дає правило *Дюпюї*.

ЗАВДАННЯ ДО § 18

1. Трубопровід (старий чавунний) складається з двох труб (рис. 83); перша діяметром $d_1 = 250$ *мм* і завдовжки $l_1 = 1000$ *м*, друга діяметром $d_2 = 100$ *мм* і завдовжки $l_2 = 50$ *м*. Напір $H = 10$ *м*. Визначити: а) діяметр D еквівалентної труби завдовжки $L = l_1 + l_2 = 1050$ *м*, b) витрату водопроводу. Накреслити лінію п'єзометричних висот ABC.

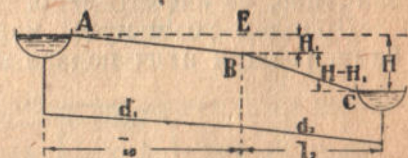


Рис. 83.

Розв'язання. а) Визначаємо діяметр D еквівалентної труби.

$$\frac{L}{D^5} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{l}{d_i^5}$$

$$D^5 = \frac{L}{\frac{l_1}{d_1^5} + \frac{l_2}{d_2^5}} = \frac{1050}{\frac{1000}{0{,}25^5} + \frac{50}{0{,}1^5}} = \frac{1050}{1026000 + 5000000} = 0{,}000174 \text{ м}^5,$$

звідси $$D = 0{,}177 \text{ м}$$

б) Із формули $H = \frac{Q^2}{k} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{l_i}{d^5}$ маємо:

$$Q=\sqrt{\frac{H}{\frac{1}{k}\left(\frac{l_1}{d_1^5}+\frac{l_2}{d_2^5}\right)}}=\sqrt{\frac{10}{0{,}0387\left(\frac{1000}{0{,}255}+\frac{50}{0{,}15}\right)}}=$$

$$=0{,}0207\ м^3/сек=20{,}7\ л/сек$$

Щоб накреслити лінію п'єзометричних висот, обчислимо висоту втрати на тертя на дільниці l_1:

$$H_1=\frac{Q^2 l_1}{k d_1^5}=0{,}00387\cdot\frac{0{,}0207^2 \cdot 1000}{0{,}25^5}=1{,}65\ м$$

Тепер можна відкласти H_1 униз від точки E (над кінцем дільниці l_1) і таким способом визначити точку B на лінії п'єзометричних висот. Треба зважити на те, що на дільниці l_1 з діяметром 0,25 *м* втрачається всього 1,65 *м*; на другій дільниці l_2, що в 20 раз коротша, втрачається 8,35 *м*. Це пояснюється тим, що вона має значно менший діяметр.

§ 20. ДЕЯКІ ВКАЗІВКИ ЩОДО ОБЧИСЛЕННЯ ВОДОПРОВІДНИХ МЕРЕЖ І ЕКОНОМІЧНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ТРУБ

Водопровідні мережі подають воду з водонатискного резервуара (або й безпосередньо від смокової станції) до багатьох пунктів. У попередніх параграфах та в завданнях до них ми роздивилися, як обчислювати окремі труби, та деякі складніші випадки. Тут подамо коротенько кілька вказівок щодо обчислень водопровідних мереж. Будемо окремо роздивлятися розімкнуту, чи зазубневу мережу й кільцеву. На місцеві втрати енерґії, звичайно, не зважатимемо.

Приклад розімкнутої мережі подано на рис. 84. Вода трубами, розміри яких подано на рисунку, подається з резервуара

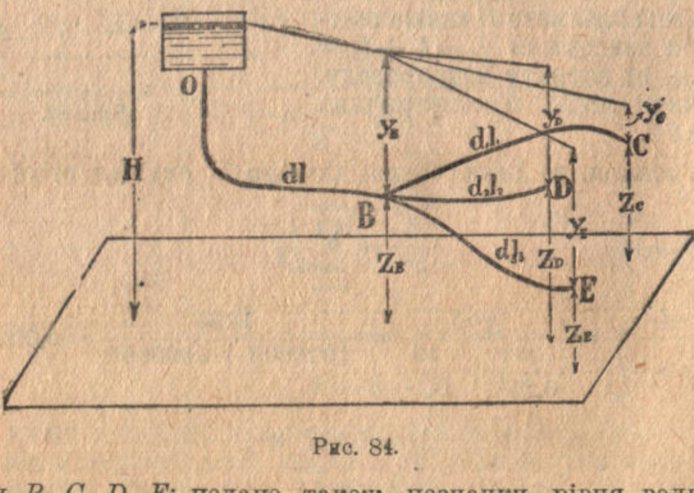


Рис. 84.

в точки B, C, D, E; подано також позначки рівня води в резервуарі, вузла B і точок C, D, E. Нехай маємо тільки транзитні витрати, що їх позначено відповідно Q, Q_1, Q_2, Q_3. Висоту тисків у вузлі B і в точках C, D, E позначимо y_B, y_C, y_D, y_E. Тоді для дільниці від резервуара до вузла B можна скласти таке рівняння:

$$H-(z_B+y_B)=\frac{Q^2 l}{kd^5}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

для дільниці BC:

$$(z_B+y_B)-(z_C+y_C)=\frac{Q_1^2 l_1}{kd_1^5},$$

для дільниці BD:

$$(z_B+y_B)-(z_D+y_D)=\frac{Q_2^2 l_2}{kd_2^5},$$

для дільниці BE:

$$(z_B+y_B)-(z_E+y_E)=\frac{Q_3^2 l_3}{kd_3^5}$$

Складаючи ці рівняння, базуємося на тому, що тиск і висота його (y_B) у вузлі (B) однакові для всіх труб, які з'єднуються в цьому вузлі. Друге важливе при обчисленні мереж твердження таке: альґебрична сума витрат усіх труб, які з'єднуються у вузлі, і витрати в самому вузлі (Q_B), якщо вона є, дорівнює нулю. Коли складають рівняння на підставі цього твердження, то треба витрати труб, по яких вода тече до вузла, брати з одним знаком, а витрати труб, що по них вода тече від вузла, із зворотним. Для вузла B (рис. 84) тепер легко скласти рівняння:

$$Q_B+Q_1+Q_2+Q_3-Q=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

З п'ятьох написаних рівнянь можна визначити п'ять невідомих величин, якщо решту величин задано або їх можна заздалегідь добрати. Величину $\frac{1}{k}$ в першому наближенні ми взяли однакову для всіх труб. Якщо треба мати точніші наслідки, то $\frac{1}{k}$ доводиться обчислювати для кожної окремої труби. Коли розімкнута мережа має більше вузлів, то легко скласти більше рівнянь.

Якщо вузлів багато, то наведені рівняння досить важко розв'язувати; ось чому, обчислюючи мережі, вдаються до іншого способу, а саме: добирають якусь найважливішу лінію (наприклад OBD); для кожної дільниці її, добравши швидкість і маючи з завдання водопровідну витрату, обчислюємо діяметр і закруглюємо його відповідно до сортаменту труб; після цього можна обчислити втрати енерґії на кожній дільниці і збудувати лінію п'єзометричних висот для дібраної лінії, бо тиск на кінці задано.

Таким способом визначимо положення рівня води у водонатискному резервуарі.

Якщо, навпаки, подано положення рівня води у водонатискному резервуарі, то обчислюємо спочатку пересічний відносний спад I для головної лінії; для цього спаду й витрат кожної дільниці добираємо найпридатніші діяметри за сортаментом і після того будуємо лінію п'єзометричних висот.

Маючи тиск на початку і в кінці кожної бічної лінії, а також витрату, легко обчислити бічні лінії *BC*, *BE*. Взагалі легко пристосувати ці способи обчислень і до тих випадків, коли на якійсь лінії, крім транзитної, є й непереривна витрата.

Розімкнуті мережі мають ту велику ваду, що до кожного пункту воду подають тільки з одного боку; коли на лінії труб станеться якась аварія, то за це місце вода вже не надходитиме. Ось чому у водопостачанні ширше користуються з кільцевих мереж.

Приклад нескладної кільцевої мережі подано на рис. 85. У таких мережах вода до кожної точки може надходити з двох боків; отож, якби якусь дільницю маґістралі *AB* довелося виключити, наприклад, для ремонту, то до всіх точок мережі (крім виключеної дільниці, звичайно) вода все ж таки тектиме, хоч може й з меншим напором.

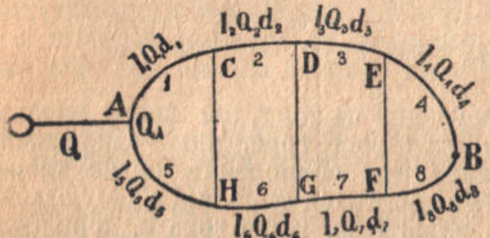


Рис. 85.

Для кожної дільниці кільцевої мережі, якщо подано позначки вузлів, можна скласти рівняння, аналогічне до рівняння(a), а для кожного вузла—аналогічне до рівняння (b). Складаючи рівняння (b) витрат для кільцевої мережі, часто заздалегідь не можна знати, чи певною трубою вода тече до вузла, чи від нього; тому в сумнівних випадках знак для витрати можна брати довільний. Розв'язавши рівняння, побачимо, чи знак було взято правильно, чи його треба змінити.

Розв'язувати систему рівнянь для кільцевої мережі ще складніше, аніж для зазубневої; тому й тут обчислення спрощують різними способами; наприклад, для мережі, поданої на рис. 85, виділяють кільце маґістральних труб *ACDEBFGHA*, намічають на ньому точку розділу *B* (інакше — нулеву точку), до якої вода доходить з обох боків (при нормальній роботі водопроводу), визначають із завдання водопроводу витрати кожної дільниці та у вузлах, враховуючи при цьому витрати в лініях *HC*, *DG*, *EF*; далі вже починають обчислювати кожну галузь *ACDEB* і *AHGFB* так, як і головну лінію зазубневої системи. Треба, щоб п'єзометричні лінії для обох галузей злилися в точці *A* на однаковій висоті; якщо відразу не пощастить дістати хоча б приблизних наслідків, то доводиться ще раз обчислювати, змінюючи при цьому положення нулевої точки, діяметри труб тощо. Обчисливши маґістральні лінії, можна вже добрати діяметри й для ліній *HC*, *DC*...

Коли маґістральних ліній не дві, а більше, як от на рис. 86, де є три маґістралі, то можна відкинути лінії *MB*, *CI*, *LP*, *KN* *HE*, *DG*, *EG*, знову визначити витрати всіх дільниць маґістралей і обчислити кожну маґістраль, злучивши п'єзометричні лінії їх у точці A. Після цього можна вже добрати діяметри для відгалужених спочатку ліній. Безперечно, обчислюючи водопровідну мережу, треба користуватися для окремих дільниць з відповідних номограм або таблиць.

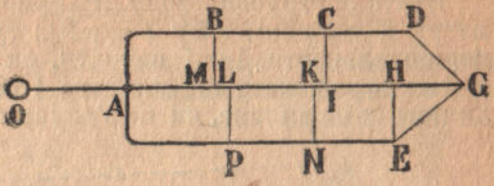


Рис. 86.

Зауважимо, що швидкості в трубах не можна брати дуже великі, бо коли раптово спинити воду в трубі (наприклад, закривши на ній засувку тощо), то тиск у ній збільшиться, і то більше, що більша швидкість; це явище називають гідравлічним ударом.

Щоб гідравлічні вдари не псували чавунних труб, на практиці встановлено, що швидкості не повинні перевищувати меж, поданих у таблиці.

Діяметри на *м*	Допускні швидкості на *м/сек*
0,06	0,70
0,10	0,75
0,15	0,80
0,20	0,90
0,25	1,00
0,30	1,10
0,40	1,25
0,50	1,40
0,60	1,60

Як видно з попереднього, певну кількість води можна транспортувати трубою з малим діяметром, допускаючи в ній великі швидкості, отож і великі втрати енерґії, або добирати дорожчі труби з більшим діяметром, але зменшити втрати енерґії. При першому варіянті п'єзометрична лінія матиме більший спад і висота рівня води у водонатискному резервуарі (рис. 87) буде вища, ніж при другому варіянті. Як бачимо, коли спроєктувати дешеву водопровідну мережу з малим діяметром труб, то доведеться витрачати більше енерґії на те, щоб вище підіймати смоками воду до водонатискного резервуара. Питання про те, який же саме варіянт вибрати, не можна розв'язати способами гідравліки, а треба вдатися до економічних обчислень, що становлять важливу частину курсів водопостачання.

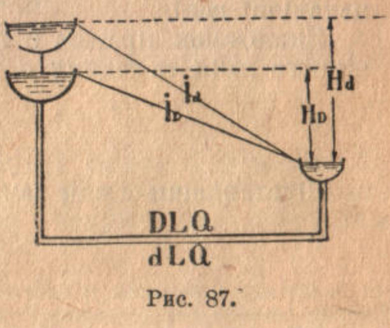


Рис. 87.

Тут же, щоб обізнатися з характером таких обчислень і з тим, який зв'язок вони мають із гідравлічними обчисленнями, розглянемо важливий випадок економічного обчислення нагнітної труби смоківні (від смоків до водонатискного резервуара — рис. 88).

Вартість трубопроводу P приблизно пропорціональна діяметру й довжині, тому $P = pDL$; тут p — певний коефіцієнт пропорціональности. Інші витрати, як от на земляні роботи тощо, майже не залежать від діяметра, і тому на остаточні наслідки величина їх не вплине, як це з'ясується далі. Хай δ — це щорічний

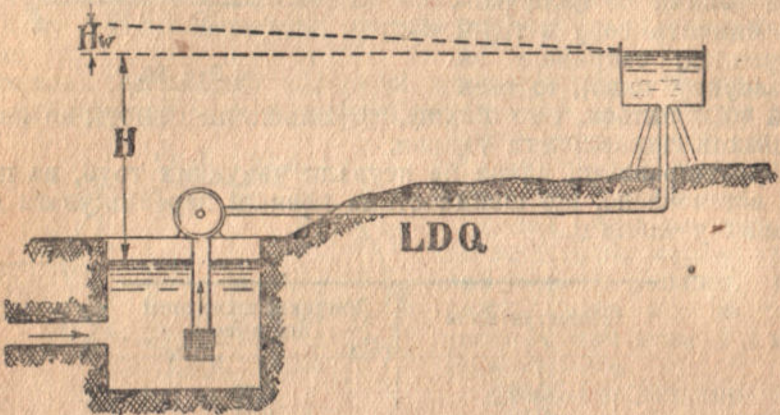


Рис. 88.

відсоток від P на амортизацію, обслуговування тощо; тоді експлуатаційні витрати на трубопровід за рік дорівнюватимуть:

$$Э_1 = \delta pDL$$

Експлуатаційні витрати на підіймання води на висоту H_w можна обчислити таким способом: вправність смока, що її доводиться витрачати на підіймання води на висоту H_w:

$$N = \frac{\gamma Q H_w}{75\eta};$$

тут γQ — вага підійнятої за секунду води на 1 *кг*; її треба підіймати на висоту H_w *, витрачаючи $\gamma Q H_w$ *кгм/сек*; поділивши це на коефіцієнт вправности η і на 75, одержимо витрачену силу на механічні коні.

Якщо смок працює n годин за рік і вартість одного механічного коня за годину a, то експлуатаційні витрати на енерґію:

$$Э_2 = \frac{an\gamma Q H_w}{75\eta}$$

Підставивши сюди замість H_w його вираз $\frac{Q^2L}{kD^5}$, одержимо:

$$Э_2 = \frac{an\gamma\, Q^3 L}{75\eta\, kD^5}$$

* Геометрична висота H стала; через це вона не вплине на остаточні наслідки.

Позначивши всі інші експлуатаційні витрати, що не залежать від діяметра (підіймання води на геометричну висоту H, обслуговування смоківні тощо), через $Э_3$, можемо написати для них:

$$Э_0 = Э_1 + Э_2 + Э_3 = \delta pDL + \frac{an\gamma Q^3L}{75\eta kD^5} + Э_3$$

Найвигідніший діяметр труби такий, щоб експлуатаційні витрати були найменші; цей діяметр можна визначити з такої умови:

$$\frac{dЭ_0}{dD} = 0$$

Наочніше розв'язувати це питання графічно, як показано на рис. 89, але на ньому нанесено тільки члени $Э_1$ та $Э_2$, що залежать від D.

Детально й конкретно обчислення водопровідних мереж подано в курсах водопостачання, де наводять і інші способи цих обчислень. Подані коротенькі відомості про мережі мають показати, як треба переходити від теорії руху води в трубах до практичних обчислень водопровідних мереж.

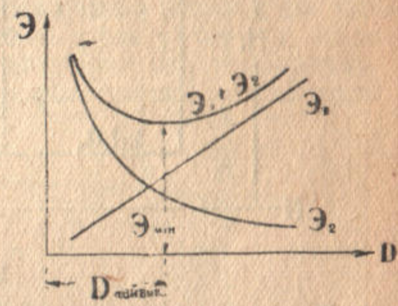


Рис. 89.

ЗАВДАННЯ ДО § 20

1. З водонапірної башти воду подають до мережі, що має кілька розгалужень (рис. 90). Визначити діяметри на кожній дільниці мережі за поданими на рисунку довжинами дільниць труби й витратами. Напір, як різ-

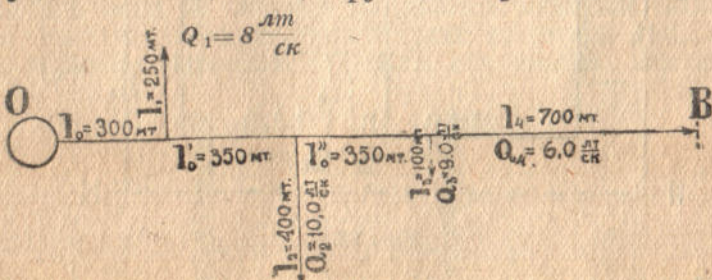


Рис. 90.

ниця позначок рівня води в резервуарі башти O й висоти, на яку потрібно подати воду в точці B, $H = 20,0$ *м*. Накреслити лінію п'єзометричних висот. Труби чавунні (за *Куттером* $m = 0,25$).

Увага. Обчислювати за допомогою таблиць чи номограм; швидкості допускати в межах 0,75 — 1,5 *м/сек*. Напори на кінцях відгалузків не повинні бути менші за 0,5 атм. Рельєф місцевости — рівнина.

2. Задача про три резервуари. Визначити для поданих на рис. 91 розмірів труб витрати Q_1, Q_2, Q_3. При якій умові вода потече до резервуара III? Вважати, що для всіх труб величина $\frac{1}{k}$ приблизно однакова.

Увага. Вода потече до резервуара III, якщо $z_B + y_B > H_3$ або інакше: $\frac{H_1 - H_3}{l_1} d_1^5 > \frac{H_3 - H_2}{l_2} d_2^5$ (суцільна п'єзометрична лінія). Якщо ж $z^B + y_B' < H_3$, то вода з I і III резервуарів потече до II резервуара (пунктирна п'єзометрична лінія).

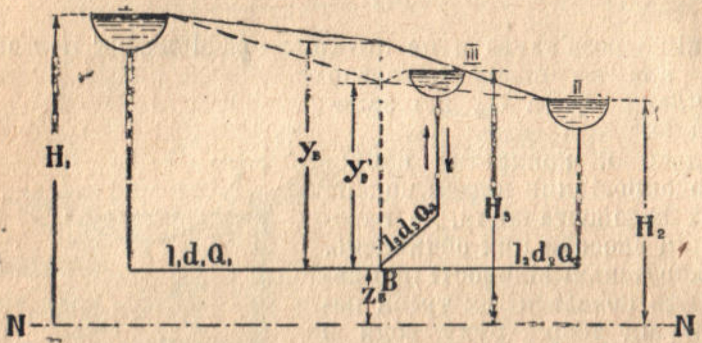


Рис. 91.

3. Трубопровід з контррезервуаром. Визначити з поданих на рис. 92 розмірів труб витрати Q_1 і Q_2; витрату в точці B

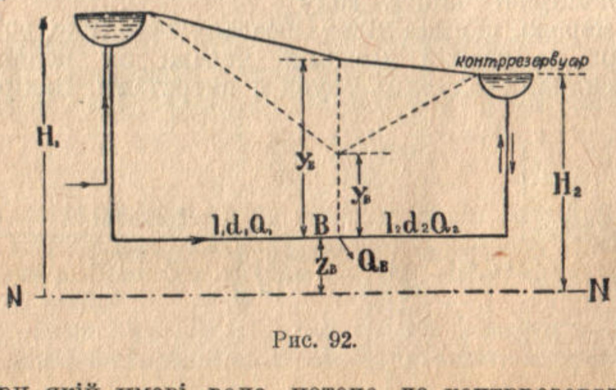


Рис. 92.

задано. При якій умові вода потече до контррезервуара? Вважати, що $\frac{1}{k}$ для обох труб приблизно однакова.

Вказівка. Вода потече до контррезервуара, якщо

$$Q_B < \sqrt{\frac{H_1 - H_2}{l_1} k d_1^5} \text{ і тоді } y_B > H_2 - z_B.$$

РОЗДІЛ IV

РІВНОМІРНИЙ (ОДНОМАНІТНИЙ) РУХ У КАНАЛАХ І РІЧКАХ

§ 21. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ Й ФОРМУЛИ

Відкриті корита бувають природні й штучні. Потік у природному кориті звемо річкою; штучні корита називаємо каналами. Водотоки у відкритих коритах мають вільну поверхню, що на неї тисне атмосфера. У трубах вода, виповнюючи ввесь перекрій, вільної поверхні не має. З гідравлічного погляду ця різниця не має великого значення, бо вона є ось у чому: 1) лінія п'єзометричних висот у каналах і річках (рис. 93), очевидячки, зливається з лінією AB (подовжній профіль потока) і 2) витрати

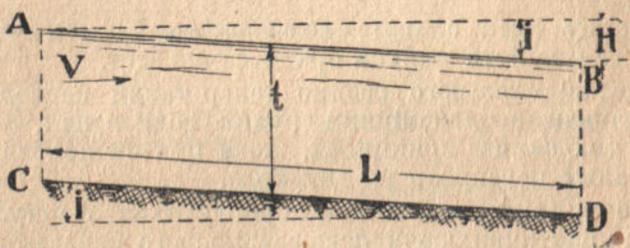


Рис. 93.

на тертя в каналах і річках є тільки вздовж бічних стінок та дна; на тертя води об повітря на вільній поверхні можна не зважати. Ось чому, обчислюючи витрати на тертя, слід брати не ввесь периметр перекрою, а тільки, так званий, мокрий (чи

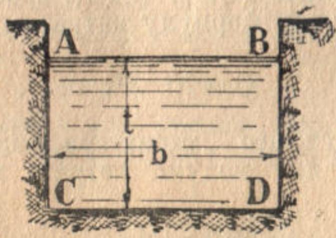


Рис. 94.

змочений); на рис. 94, наприклад, мокрий периметр: $U = AC + CD + DB$; для труби з таким самим перекроєм мокрий периметр був би: $U = AC + CD + DB + BA$. Виміряючи швидкості в різних точках поперечного перекрою річки або канала, можна побачити, що й тут швидкості коло стінок найменші і збільшуються в міру того, як від них віддаляються; максимуму швидкість досягає в симетричних перекроях посередині річки або канала, трохи нижче вільного рівня *.

Щоб спростити виводи, і тут, як і в трубах, розглядатимемо не дійсний рух, а фіктивний, вважаючи, що швидкості в усіх точках перекрою мають однакову середню вартість. Рівномірний усталений рух відрізняється тим, що швидкості не тільки не змінюються в розглядуваній точці, але вони залишаються сталі і вздовж струминок. Такий рух може бути тільки тоді, коли кут спаду I дна (рис. 93), а також площа поперечного перекрою й властивості стінок не змінюються вздовж водотоки.

Ці умови на практиці є в каналах, а в річках тільки як виняток, на окремих дільницях. Очевидячки, вільна поверхня в потоках з рівномірним рухом має такий самий спад, як і дно.

Величину H (рис. 93), що цілком відповідає різниці п'єзометричних висот у циліндричних трубах, звемо абсолютним спадом або схилом на дільниці L. Цей спад витрачається на те, щоб перемагати опір тертя.

Частка $\frac{H}{L} \approx I$ зветься відносним спадом або схилом і дорівнює синусу кута спаду; але через те, що цей кут взагалі малий, можна замість синуса брати самий кут.

На підставі сказаного робимо тепер такий висновок: обчислюючи канали з рівномірним рухом води в них, слід базуватися на тих самих принципах, що й при обчисленні довгих труб із сталим перекроєм та витратою.

Коли обчислюють канали, то користуються формулами (35) і (37). Для практичних обчислень здебільшого вживають останню формулу — *Шезі*:

$$v = C\sqrt{RI} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

Тоді витрата

$$Q = FC\sqrt{RI} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

Замінивши на K вираз $FC\sqrt{R}$ (як це зробили і для труб — див. § 16), матимемо таку формулу витрати:

$$Q = K\sqrt{I} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

K — модуль витрати або „характеристика витрати". Коли маємо Q і I, то величину модуля витрати відшукаємо з формули (c):

$$K = \frac{Q}{\sqrt{I}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (d)$$

* Для турбулентного руху, який ми тут тільки й розглядаємо, швидкості не тільки мають різні вартості в різних точках перекрою, але вони й не зовсім паралельні і навіть у кожній точці періодично змінюють свою величину (пульсація). Це є наслідок утворювання вихорів, про що вже говорили в § 14.

Аналогічно до наведеного в § 15, модуль швидкости $S = C\sqrt{R}$. Обчислюючи канали, частіше користуються з K і S, ніж при обчисленні труб.

Обчислюючи гідравлічний радіюс, треба брати не повний периметр перекрою, а лише мокрий.

Щодо коефіціента *Шезі*, то його обчислюють за одною з таких емпіричних формул:

„Нова" *Базенова* (Bazin) формула:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Тут коефіціент шерехатости γ залежить від властивостей стінок каналів або річок. Вартості його наведемо в таблиці:

№№	Характеристика корита	Коефіціент шерехатости
1	Дуже рівні стінки (стругані дошки, стінки рівно тиньковані цементом)	0,06
2	Рівні стінки (нестругані дошки, тесове й цегляне мурування, бетонові й чавунні труби, бетонування) .	0,16
3	Нерівні стінки (бутове мурування, бетонування) .	0,46
4	Проміжна категорія стінок (бутове мурування начорно, бетонування начорно по скелі, брукування, стінки в щільному землистому ґрунті в доброму стані, начисто висічені в скелі)	0,85
5	Земляні стінки в звичайному стані, або бруковані, але трохи порослі	1,30
6	Земляні, зовсім нерівні стінки (з великим опором на тертя), порослі травою, вкриті наметнями, лобаком, вирубані в скелястому ґрунті	1,75
7	Річки й канали з дуже нерівним коритом, вкритим камінням тощо	2,00 і більше

„Повна" формула *Ганґільє* (Gangillet) й *Куттера* (Kutter) занадто складна (вона особливо придатна для каналів із спадом $I < 0{,}0005$):

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00155}{I}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{I}\right)\frac{n}{\sqrt{R}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Вартості коефіцієнта шерехатости n подано в таблиці:

№№	Характеристика корита	n	$\frac{1}{n}$
1	Поверхні вкриті склицею або поливою. Дуже старанно виструтані дошки, добре припасовані	0,009	111,11
2	Стругані дошки. Тинькування самим цементом	0,010	100,00
3	Цементове тинькування ($\frac{1}{3}$ піску). Чисті (нові) гончарні, чавунні та залізні труби старанно прокладені та з'єднані	0,011	90,91
4	Нестругані, але добре припасовані дошки. Водопровідні труби в нормальних умовах, без помітного жирування; дуже чисті водозбіжні труби; дуже старанне бетонування.	0,012	83,33
5	Тесове мурування, старанно зроблене з цегли. Водозбіжні труби в нормальних умовах; трохи забруднені водопровідні труби. Нестругані, не щільно припасовані дошки.	0,013	76,92
6	Забруднені труби (водопровідні та водозбіжні); мурування з цегли, бетонування каналів у середніх умовах. .	0,014	71,43
7	Цегляне мурування начорно; кам'яне мурування (не тесове), поверхні старанно опоряджено	0,015	66,67
8	Звичайне бутове мурування в задовільному стані; старе мурування з цегли, бетонування начорно. Гладенька, добре опоряджена скеля	0,017	58,82
9	Канали вкрито грубим, тривалим, мулким шаром; канали в щільному лесі й щільному дрібному нарінку, затягнуті суцільною мулкою плівкою (все в цілком доброму стані)	0,018	55,56
10	Бутове мурування начорно; мурування на сухо з великого каміння; брук. Канали старанно висічено в скелі. Канали в лесі, щільному нарінку, щільній землі, затягнуті мулкою плівкою (в нормальних умовах)	0,020	50,00
11	Брук із великого рваного каміння з виступами. Канали в скелі; поверхню їх досить старанно опоряджено; прокладено їх у щільній глині, лесі, нарінку; затягнуті несуцільною мулкою плівкою. Великі земляні канали в середніх умовах, малі — в умовах вищих за середні . . .	0,0225	44,44
12	Великі земляні канали в середніх умовах, а малі — в доброму стані. Річки й струмки в сприятливих умовах (вільна течія, вони не засмічені й немає водоростів) . .	0,025	40,00
13	Земляні канали — великі в умовах нижче за середні, малі — в середніх	0,0275	36,36
14	Канали й річки в порівняно кепському стані (подекуди з водоростями, брукняком, помітно заросли травою, подекуди обвалилися споховини)	0,030	33,33
15	Канали й річки в дуже кепському стані, із неопоряджeним профілем, дуже засмічені камінням та водоростями	0,035	28,57
16	Канали й річки у вийнятково кепському стані (уламки скелі та каміння по кориту, густе коріння, з великими завалами та водоростями, вкриті очеретом)	0,040	25,00

Коли спад канала $I > 0{,}0005$, то часто користуються з „скороченої“ формули *Ганґільє* й *Куттера*:

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{23n}{\sqrt{R}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45\text{-a})$$

або з наведеної вже в розділі III „старої“ *Куттерової* формули (39):

$$C = \frac{100\sqrt{R}}{m + \sqrt{R}}$$

Коефіцієнт шерехатости m можна обчислити за такою формулою: $m = 100n - 1$; тут n — коефіцієнт шерехатости за *Ганґільє* й *Куттером*, вартості якого подано попереду.

З новіших слід згадати порівняно прості формули *Форхгаймерову* (Forchheimer), наведену вже попереду *Манінґову* та проф. *Павловського*, що належать до групи так званих показникових, а саме:

За *Форхгаймером:* $C = \frac{1}{n} R^{0,2} = \frac{1}{n} \sqrt[5]{R}$ . . . . (45-b)

За *Манінґом:* $C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{n} \sqrt[6]{R}$

За *Павловським:* $C = \frac{1}{n} R^{y}$ . . . . (45-c)

Тут: $y = 2{,}5\sqrt{n} - 0{,}13 - 0{,}75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0{,}10)$. Наближені ж значення показника y: $y \approx 1{,}3\sqrt{n}$ при $R > 1{,}0$ *м*; $y \approx 1{,}5\sqrt{n}$ при $R < 1{,}0$ *м*. Формулу (45-с) проф. *Павловський* радить застосовувати для каналів з гідравлічним радіюсом не більшим за 3 *м.*

У формулах n є коефіцієнт шерехатости за *Ганґільє-Куттером.*

З них можна користуватися й при обчисленні труб.

Для практичних обчислень, крім коефіцієнта *Шезі*, треба обчислювати величини F, U і R. Площа F і мокрий периметр U для трапезуватого канала є величини, що залежать від ширини в дні b, глибини t і кута α, утвореного споховиною і горизонтальною лінією. Подамо тут вирази для F і U через b, t і α (рис. 95):

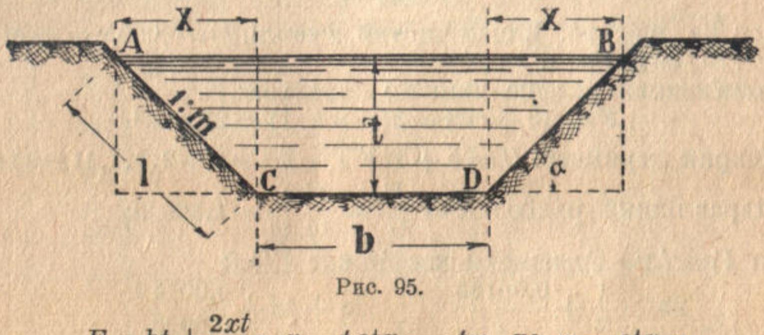


Рис. 95.

$$F = bt + \frac{2xt}{2};\quad x = t \operatorname{ctg}\alpha = tm, \text{ де } m = \operatorname{ctg}\alpha;$$

тому остаточно вираз для площі буде:

$$F = bt + t^2m = t(b + tm)$$

Величину m добирають як до ґрунту.

$$U = b + 2l;\quad l = \sqrt{t^2 + x^2} = \sqrt{t^2 + t^2m^2},$$

а тому

$$U = b + 2t\sqrt{1 + m^2}$$

У виразі для U під коренем є величина, що не залежить від ширини й глибини, а лише від категорії ґрунту. Подамо коротеньку табличку величин $\sqrt{1+m^2}$ для найуживаніших m:

m	0,5	0,75	1,0	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
$\sqrt{1+m^2}$	1,118	1,249	1,414	1,600	1,803	2,014	2,236	2,462	2,693

Для прямокутнього канала $\alpha = 90°$ і $m = 0$, тому:

$$F = bt; \quad U = b + 2t$$

Щоб легше було обчислювати канали, слід користуватися з відповідних таблиць і номограм, де вже обчислено вартості коефіцієнта *Шезі* C тощо (див. таблиці III – IV, графік I у кінці книжки, „Гидравлический справочник" проф. *Павловського*, збірники номограм *Д. В. Журина*, а також *Б. К. Бжеського*).

ЗАВДАННЯ ДО § 21

1. Визначити швидкість і витрату в каналі, що його розміри

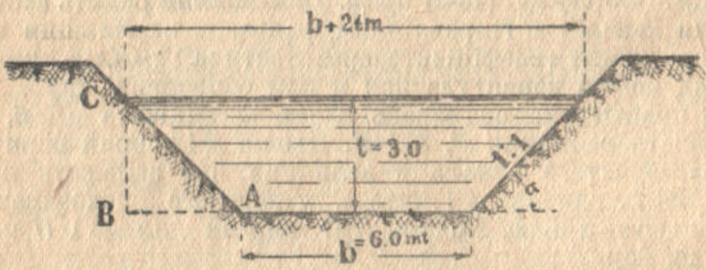


Рис. 96.

подано на рис. 96. Канал чистий, в землі. $I = 0{,}0003$; $m = \operatorname{ctg}\alpha = AB:BC = 1:1 = 1$.

Розв'язання. Площа чинного перекрою:

$$F = t(b + tm) = 3(6 + 3\,.\,1) = 27{,}0 \ м^2$$

Мокрий периметр: $U = b + 2t\sqrt{1+m^2} = 6 + 2\,.\,3\,.\,1{,}414 = 14{,}48\,м$

Гідравлічний радіус $R = \dfrac{F}{U} = \dfrac{27{,}0}{14{,}48} = 1{,}865 \ м$

За *Ганґільє-Куттером* коефіцієнт *Шезі*:

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00155}{I}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{I}\right)\frac{n}{\sqrt{R}}} = \frac{23 + 40 + \frac{0{,}00155}{0{,}0003}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{0{,}0003}\right)\frac{0{,}025}{\sqrt{1{,}865}}} \approx 45{,}0$$

Швидкість: $v = C\sqrt{RI} = 45\,.\,1{,}367\,.\,0{,}0173 = 1{,}06 \ м/сек$

Витрата: $Q = Fv = 1{,}06\,.\,27{,}0 = 28{,}12 \ м^3/сек$

За *Базеном*: $C = \dfrac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} = \dfrac{87}{1 + \frac{1{,}30}{1{,}367}} = 44{,}6$

(тут коефіцієнт шерехатости $\gamma = 1{,}30$, що приблизно відповідає $n = 0{,}025$ за *Ганґільє-Куттером*).

$$v = C\sqrt{RI} = 44{,}6 \,.\, 1{,}376 \,.\, 0{,}0173 = 1{,}05 \text{ м/сек}$$

$$Q = Fv = 27{,}0 \,.\, 1{,}05 = 28{,}35 \text{ м}^3\text{/сек}$$

2. Довести, що для широкого прямокутнього перекрою гідравлічний радіюс приблизно дорівнює глибині.

Доказ. Позначивши ширину перекрою літерою B, а глибину літерою t, можемо написати: $F = Bt$; $U = B + 2t$; $R = \frac{Bt}{B + 2t}$.

Алеж $2t$ можна відкинути, бо за умовою це величина мала, як порівняти її з B; тоді $R \approx \frac{Bt}{B} = t$.

3. Відшукати ширину канала в дні, коли витрата $Q = 27{,}6$ м³/сек, глибина $t = 2{,}5$ м; споховина $1 : m = 1 : 1{,}5$ і спад $I = 0{,}0002$.

Канал земляний, з трохи порослими стінками ($\gamma = 1{,}30$).

Розв'язання. Найлегше розв'язати завдання способом добору. Беремо довільні вартості b і обчислюємо гідравлічні елементи канала F, U, R та швидкість і витрату для кожної вибраної ширини. Наслідки обчислень для різних b зведемо в таблицю.

b	t	F	U	R	$\sqrt{R}$	C	$\sqrt{I}$	v	Q
7,0	2,5	26,875	16,00	1,68	1,30	43,5	0,0141	0,797	21,42
8,0	2,5	29,375	17,00	1,73	1,32	43,8	0,0141	0,815	23,94
9,0	2,5	31,875	18,00	1,78	1,33	44,1	0,0141	0,827	26,36
10,0	2,5	34,375	19,00	1,81	1,35	44,3	0,0141	0,843	28,98

Збудувавши графік залежности Q від b (рис. 97), відшукаємо інтерполяцією ширину канала для $Q = 27{,}6$ м³/сек, що дорівнює 9,5 м. Перевіривши, дістанемо: $Q = 27{,}59$ м³/сек.

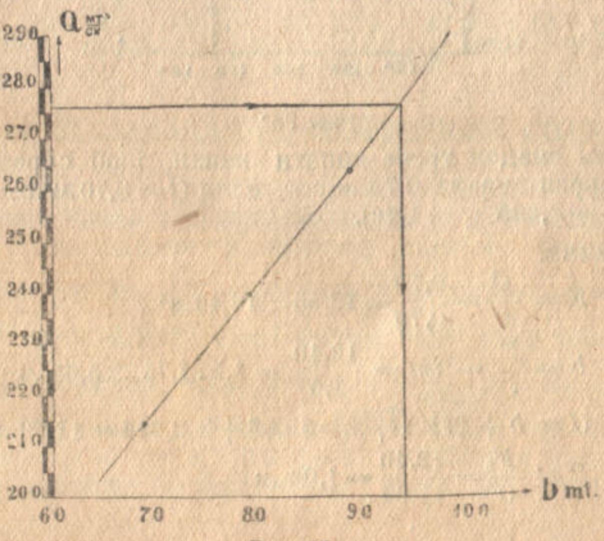


Рис. 97.

4. Витрата в каналі $Q = 17{,}5$ $м^3/сек$. Відшукати глибину канала t_0, коли ширина в дні $b = 9{,}0$ $м$, $m = 2{,}0$, $I = 0{,}0003$. Канал земляний, трохи порослий ($\gamma = 1{,}30$).

Розв'язання. Розв'яжемо завдання способом добору, користуючись при цьому з модуля витрати:

$$K_0 = \frac{Q}{\sqrt{I}} = \frac{17{,}5}{0{,}0173} = 1011{,}5 \ м^3/сек$$

Вибираючи довільні вартості t, відшукуємо для добраних глибин величини K:

t	b	F	U	R	$\sqrt{R}$	C	K	v
1,40	9,0	16,52	15,26	1,08	1,04	38,6	662,42	0,694
1,50	9,0	18,00	15,71	1,15	1,07	39,3	756,64	0,727
1,60	9,0	19,52	16,16	1,21	1,10	39,8	854,33	0,757
1,70	9,0	21,08	16,60	1,27	1,13	40,3	960,11	0,788
1,80	9,0	22,68	17,05	1,33	1,15	40,8	1064,15	0,812

Графічною інтерполяцією (рис. 98) для $K_0 = 1011{,}5$ $м^3/сек$, визначаємо $t_0 = 1{,}75 м$

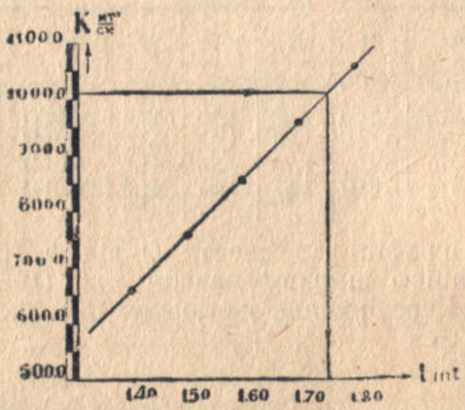


Рис. 98.

5. З яким спадом треба копати канал, щоб середня швидкість не перевищувала 0,70 $м/сек$, коли $Q = 8{,}70$ $м^3/сек$, $t = 1{,}5$ $м$, $m = 1{,}75$, $n = 0{,}025$ ($\gamma = 1{,}30$).

Розв'язання.

$$F = \frac{Q}{v} = \frac{8{,}70}{0{,}70} = 12{,}45 \approx 12{,}40 \ м^2$$

$$b = \frac{F}{t} - tm = \frac{12{,}40}{1{,}5} - 1{,}5 \cdot 1{,}75 \approx 5{,}65 \ м$$

$$U = b + 2t\sqrt{1 + m^2} = 5{,}65 + 3 \cdot 2{,}014 = 11{,}69 \ м$$

$$R = \frac{F}{U} = \frac{12{,}40}{11{,}69} = 1{,}06 \ м$$

З формули *Шезі*: $I=\frac{v^2}{C^2R}$

Коефіцієнт C можемо взяти за *Маніґовою* або за *Базеновою* формулами.

За *Маніґом* $C=40{,}4$;

$$I=\frac{v^2}{C^2R}=\frac{0{,}7^2}{40{,}4^2 \,.\, 1{,}06}=0{,}000283$$

За *Базеном* $C=38{,}4$;

$$I=\frac{v^2}{C^2R}=\frac{0{,}7^2}{38{,}4^2 \,.\, 1{,}06}=0{,}00031$$

6. У каналі виміряно $Q=8{,}40$ *м³/сек* і середню швидкість $v=0{,}517$ *м/сек*. Визначити коефіцієнти шерехатости n і γ, коли ширина канала в дні $b=7{,}75$ *м*, глибина $t=1{,}60$ *м*, $I=0{,}0002$ і $m=1{,}5$.

Розв'язання.

$$F=bt+t^2m=7{,}75 \,.\, 1{,}60+1{,}6^2 \,.\, 1{,}5=16{,}24 \text{ м}^2$$

$$U=b+2t\sqrt{1+m^2}=7{,}75+3{,}20 \,.\, 1{,}803=13{,}52 \text{ м}$$

$$R=\frac{F}{U}=\frac{16{,}24}{13{,}52}=1{,}20 \text{ м}$$

За формулою *Шезі*:

$$C=\frac{Q}{\sqrt{RI} \,.\, F}=\frac{8{,}40}{1{,}10 \,.\, 0{,}0141 \,.\, 16{,}24}=33{,}35$$

Коефіцієнт n визначаємо за *Маніґовою* формулою:

$$n=\frac{R^{\frac{1}{6}}}{C}=\frac{1{,}20^{\frac{1}{6}}}{33{,}35}=0{,}0309$$

За *Базеном*:

$$\gamma=\frac{87\sqrt{R}-C\sqrt{R}}{C}=\frac{87 \,.\, 1{,}10-33{,}35 \,.\, 1{,}10}{33{,}35}=1{,}77$$

§ 22. ЗАДАЧА ПРО НАЙМЕНШИЙ СПАД

Досить часто на практиці треба розв'язати таку задачу: спроєктувати канал з певною витратою Q і швидкістю v так, щоб спад I мав найменшу можливу вартість. Насамперед можемо обчислити площу поперечного перекрою: $Q=\frac{F}{v}$. Тепер цій площі треба надати такої форми, щоб спад мав найменшу вартість. З формули *Шезі* маємо: $I=\frac{v^2}{C^2R}$; у правій частині цієї рівности величина v^2 стала; C^2 залежить від форми поперечного перекрою, проте, коли форма змінюється мало, то й величина C^2 теж майже не змінюється. Через це можемо вважати її за сталу. Тепер цілком зрозуміло, що спад набирає найменшої вартости, коли R досягне максимуму *.

Згадавши, що $R=\frac{F}{U}$ і F в кожній окремій задачі має сталу вартість, робимо такий висновок: гідравлічний радіюс R досягне максимуму, коли мокрий периметр буде якнайменший. Вважатимемо за доведене, що з усіх фігур з даною площею найменший периметр має коло **; на підставі цього можна сказати, що з усіх можливих форм перекроїв відкритих корит найменший мокрий периметр має півколо. Алеж цей „найвигідніший" з теоретичного погляду перекрій каналів непридатний для практики з конструктивних міркувань. Тому розглянемо прямокутній та трапезуватий перекрої, що з них користуються на практиці.

а) ПРЯМОКУТНІЙ ПЕРЕКРІЙ

Мокрий периметр (рис. 94) $U=b+2t$; алеж сюди можна підставити замість b частку $\frac{F}{t}$; тоді

$$U=\frac{F}{t}+2t$$

Ця функція глибини досягає мінімуму, коли

$$\frac{dU}{dt}=-\frac{F}{t^2}+2=0;\ t=\sqrt{\frac{F}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2F}$$

Звідси:

$$b=\frac{F}{t}=\sqrt{2F}$$

Отож у „найвигідніших" прямокутніх перекроях $b=2t$.

Обчислимо ще гідравлічний радіюс „найвигіднішого" прямокутнього перекрою:

$$R=\frac{F}{U}=\frac{F}{\sqrt{2F}+2\frac{\sqrt{2F}}{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{2F}$$

Звідси доходимо висновку, що в „найвигідніших" прямокутніх перекроях $R=\frac{t}{2}$.

б) ТРАПЕЗУВАТИЙ ПЕРЕКРІЙ

Тут, крім площі F (рис. 99), дано ще кут α; він залежить від властивостей ґрунту й подано його в курсах гідротехніки. Площу трапеза й мокрий периметр через його розміри можна виразити так:

$$F=(b+t\operatorname{ctg}\alpha)\,t$$

$$U=b+\frac{2t}{\sin\alpha}$$

* Це то більше, що коли збільшується R, то збільшується й C.

** Доказ цього подано у варіяційному численні.

Визначивши з першого рівняння b і підставивши його до другого, матимемо:

$$U=\frac{F}{t}-t\operatorname{ctg}\alpha+\frac{2t}{\sin\alpha}$$

Мокрий периметр U матиме мінімум, коли

$$\frac{dU}{dt}=-\frac{F}{t^2}-\operatorname{ctg}\alpha+\frac{2}{\sin\alpha}=0$$

Звідси глибина найвигіднішого перекрою:

$$t=\sqrt{\frac{F\sin\alpha}{2-\cos\alpha}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Згадавши, що ширина в дні і гідравлічний радіус R залежать

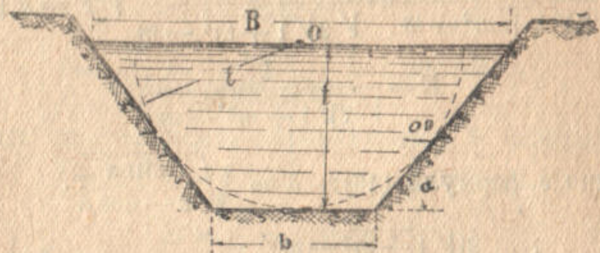


Рис. 99.

від площі чинного перекрою F і глибини t, легко й для них відшукати аналітичні вирази, як функції від F та кута α для найвигіднішого перекрою, а саме:

$$b=\frac{F-t^2\operatorname{ctg}\alpha}{t}=\frac{F-\frac{F\sin\alpha}{2-\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\sqrt{\frac{F\sin\alpha}{2-\cos\alpha}}}=$$

$$=\frac{2-2\cos\alpha}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{F\sin\alpha}{2-\cos\alpha}}=\frac{2(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{F\sin\alpha}{2-\cos\alpha}}\ \ldots \quad (46\text{-a})$$

$$R=\frac{F}{U}=\frac{F}{b+\frac{2t}{\sin\alpha}}=\frac{\sqrt{\frac{F\sin\alpha}{2-\cos\alpha}}}{2}$$

або

$$R=\frac{t}{2}$$

Подаємо ще тут вирази для гідравлічних елементів найвигіднішого перекрою канала через $\operatorname{ctg}\alpha=m$:

$$t=\sqrt{\frac{F}{2\sqrt{1+m^2}-m}}\ \ldots\ldots\ldots \quad (46\text{-b})$$

$$b = 2\left(\sqrt{1+m^2} - m\right)\sqrt{\frac{F}{2\sqrt{1+m^2}-m}} \; . \; . \; . \qquad (46\text{-c})$$

$$R = \frac{t}{2}$$

У формулах (46-a, b, c) кут α для кожного окремого випадку є величина стала, бо відома категорія ґрунту. Через це для багатьох величин α, чи власне для $m = \operatorname{ctg} \alpha$, що здебільшого трапляються на практиці, можна скласти таблицю залежности t і b від F, замінивши m числовими вартостями та відповідно спростивши:

$$t = \sqrt{\frac{F}{2\sqrt{1+m^2}-m}} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{1+m^2}-m}}\sqrt{F} = E\sqrt{F},$$

де
$$E = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{1+m^2}-m}}$$

або відповідно з формули (46): $E = \sqrt{\dfrac{\sin \alpha}{2 - \cos \alpha}}$.

$$b = \frac{2\left(\sqrt{1+m^2}-m\right)}{\sqrt{2\sqrt{1+m^2}-m}}\sqrt{F} = E_1\sqrt{F},$$

де
$$E_1 = \frac{2\left(\sqrt{1+m^2}-m\right)}{\sqrt{2\sqrt{1+m^2}-m}}$$

або: $E_1 = \dfrac{2\,(1 - \cos \alpha)}{\sqrt{\sin \alpha\,(2 - \cos \alpha)}}$ за формулою (46-a).

Далі подаємо в таблиці величини E і E_1 для різних вартостей m (різних кутів α).

m	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
E	0,707	0,743	0,759	0,756	0,740	0,715	0,689	0,663	0,636	0,611	0,589
E_1	0,414	0,160	0,938	0,755	0,612	0,501	0,418	0,350	0,300	0,259	0,227

Після того, як відшукаємо розміри „найвигіднішого" перекрою — чи прямокутнього, чи трапезуватого, а також гідравлічний радіюс його, можна вже обчислити коефіцієнт *Шезі* C і за формулою $I = \dfrac{v^2}{C^2 R}$ визначити найменший можливий спад, що задовольняв би вимогам задачі.

ЗАВДАННЯ ДО § 22

1. Визначити спад I і розміри найвигіднішого прямокутнього поперечного перекрою бетонованого канала, коли витрата $Q = 3{,}0$ *м³/сек*, швидкість $v = 1{,}25$ *м/сек*, $n = 0{,}014$.

Розв'язання.

$$F=\frac{Q}{v}=\frac{3,00}{1,25}=2,40\ м^2$$

$$t=\frac{\sqrt{2F}}{2}=\frac{\sqrt{2\,.\,2,40}}{2}=1,0955=1,10\ м$$

$$R=\frac{t}{2}=0,55\ м$$

$$b=2t=2,20\ м$$

Коефіцієнт *Шезі* визначимо за *Форхгаймеровою* формулою:

$$C=\frac{1}{n}\sqrt[5]{R}=\frac{0,8873}{0,014}=63,4$$

$$I=\frac{v^2}{C^2R}=\frac{1,25^2}{63,4^2\,.\,0,55}=0,000707$$

Розв'яжемо ще завдання, користуючися з величин E і E_1:

$$t=E\sqrt{F}=0,707\,.\,1,549=1,095=1,10\ м$$

$$R=\frac{t}{2}=0,55\ м$$

$$b=E_1\sqrt{F}=1,414\,.\,1,549=2,19\ м$$

Тут E і E_1 взято з таблиці для $m=0$.
Коефіцієнт C за *Манінґом:*

$$C=\frac{1}{n}\sqrt[6]{R}=\frac{0,9056}{0,014}=64,7$$

$$I=\frac{v^2}{C^2R}=\frac{1,25^2}{64,7^2\,.\,0,55}=0,000678$$

2. Запроектувати канал найвигіднішого поперечного перекрою, коли витрата $Q=7,55\ м^3/сек$, допускна швидкість $v=0,75\ м/сек$, споховини $1:m=1:1,5$, коефіцієнт шерехатости $n=0,025$.

Розв'язання.

$$F=\frac{Q}{v}=\frac{7,55}{0,75}=10,066\ м^2$$

$$t=E\sqrt{F}=0,689\,.\,3,265=2,250\ м$$

$$b=E_1\sqrt{F}=0,418\,.\,3,265=1,362\ м,$$

де коефіцієнти E і E_1 взято з таблиці для $m=1,5$;

$$R=\frac{t}{2}=\frac{2,250}{2}=1,125\ м$$

Коефіцієнт *Шезі* C з таблиці за *Манінґом*: $C=41,5$

$$I=\frac{v^2}{C^2R}=\frac{0,75^2}{41,5^2\,.\,1,125}=0,00029$$

3. Глибина трапезуватого канала найвигіднішого поперечного перекрою $t = 1{,}6$ *м*, спад $I = 0{,}0004$, $m = 2{,}00$, $n = 0{,}025$. Визначити: b, F, Q і v.

Відповідь: $b = 0{,}755$ *м*
$F = 6{,}336$ *м*²
$Q = 4{,}372$ *м*³/*сек*
$v = 0{,}69$ *м/сек*

Коефіцієнт *Шезі* C взято за *Манінґом.*

4. З річки, спад якої $I_p = 0{,}006$, треба подати воду до турбіни і не будувати греблю, запроєктувавши канал, паралельний річці, із найвигіднішим поперечним перекроєм. Обчислити його довжину; витрата $Q = 4{,}0$ *м*³/*сек*, а потрібний напір $H = 10{,}0$ *м*. Споховини канала $1 : m = 1 : 1{,}5$ забруковані. $n = 0{,}020$. Допускна швидкість $v = 1{,}0$ *м/сек*.

Розв'язання.

$$F = \frac{Q}{v} = \frac{4{,}0}{1{,}0} = 4{,}0 \text{ м}^2$$

$$t = E\sqrt{F} = 0{,}689 \,.\, 2 = 1{,}378 \text{ м}$$

$$b = E_1\sqrt{F} = 0{,}418 \,.\, 2 = 0{,}836 \text{ м}$$

$$R = \frac{t}{2} = \frac{1{,}378}{2} = 0{,}689 \text{ м}$$

За *Манінґом*: $C = 47{,}0$

Спад канала $I = \dfrac{v^2}{C^2 R} = \dfrac{1{,}0^2}{47{,}0^2 \,.\, 0{,}689} = 0{,}000657$

Отож канал можна копати з меншим спадом, аніж має його річка. Різниця $I_I = I_p - I$ дає заощаджуваний спад на 1 *м* канала. Сумарне заощадження (напір) $H = 10$ *м* на всю довжину канала L.

$$L I_I = H;$$

звідки

$$L = \frac{H}{I_I} = \frac{10{,}0}{0{,}006 - 0{,}000657} = 1871{,}6 \text{ м}$$

§ 23. РОЗПОДІЛ ШВИДКОСТЕЙ У ПЕРЕКРОЇ КАНАЛА. ЗАДАЧА ПРО СТАЛУ ШВИДКІСТЬ У КАНАЛІ. КАНАЛІЗАЦІЙНІ ТА ДРЕНАЖНІ ТРУБИ

Ми вже згадували, що швидкості в різних точках перекроїв потоків різні. Способи й прилади, яких вживають, щоб досліджувати дійсні швидкості, вивчає окрема наука — гідрометрія; тому на них тут спинятись не будемо, а тільки коротенько подамо деякі наслідки таких дослідів. Найбільше практичне значення мають: середня швидкість v, найбільша швидкість у перекрої v_{max} та мінімальна швидкість поблизу стінок v_{min}. *Базен* так подав залежності між цими швидкостями у відкритих потоках:

$$v_{max} = v + 14\sqrt{RI} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

$$v_{min} = v - 6\sqrt{RI} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

Обчислюючи канали, треба зважати й на те, щоб швидкість біля стінок v_{min} не перевищувала певної межі, встановленої на практиці для кожного ґрунту; інакше бо вода розмиватиме стінки канала. Разом з тим швидкість не повинна бути й занадто мала, бо інакше в каналі осідатиме мул і дрібний пісок, що їх несе вода. Замість того, щоб подавати найбільші допускні вартості v_{min}, можна дати межі для середньої швидкости v, бо вона пов'язана з v_{min}.

За деякими дослідами, щоб вода не розмивала стінки й дно, середня швидкість не повинна перевищувати таких вартостей:

№№	Ґрунт	Величина межевих швидкостей v на *м/сек*	
		За *Раунером*	За *Флінном*
1	Мулкий (мулистий)	0,11	0,10
2	Глинястий	0,23	0,20
3	Піщаний	0,46	0,40
4	Нарінок	0,96	0,80
5	Голиш великий	1,23	1,20
6	Скеля верстувата	2,27	2,50
7	Камінь великий	1,86	1,70
8	Скеля тверда	3,70	4,00
9	Конґльомерат, шифер	—	2,00

Докладніші відомості про допускні швидкості для різних ґрунтів і матеріялів стінок каналів подано в курсах гідротехнічних дисциплін.

Швидкість v має бути не менша як 0,25 — 0,3 *м/сек*; тоді не осідатиме легкий мул; коли ж вода несе дрібний пісок, то вона має бути більша як 0,5 — 0,6 *м/сек*.

За спостереженнями Kennedy над Пенджабською зрошувальною системою (Індія), канали не замулюються, якщо пересічна швидкість у них

$$v = 0,55\, t^{0,64} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

або більша.

Проте, в інших випадках (це залежить від складу намулів) навіть при трохи менших швидкостях канали не замулюються, як от на Sind'і при швидкості, що дорівнювала тільки $\frac{3}{4}$ швидкости, обчисленої за формулою (а), канали не замулювалися.

Трапляється дуже часто, що глибина води в каналі (наповнення) змінюється. Швидкість тоді теж змінюється й за певних умов може перевищити ті межі, що їх тільки но було вказано.

Звідси виникає потреба сконструювати такий поперечний перекрій, щоб швидкість не змінювалася, коли змінюється наповнення канала. Щоб вдовольнити цю вимогу, треба спроєктувати такий перекрій, щоб не змінявся гідравлічний радіюс, коли змінюється глибина. За сказаним попереду швидкість залишається стала, коли $\frac{F}{U}=R=\text{const}$, хоч наповнення канала й змінюється. Припустимо, що BB_1CD (рис. 100) є перекрій канала під час мінімальної глибини води в ньому; хай тоді площа перекрою F_0 і мокрий периметр U_0.

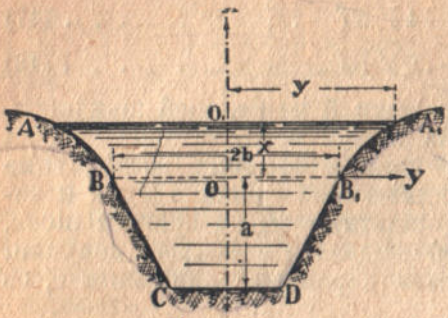


Рис. 100.

Треба відшукати такі криві AB і A_1B_1, щоб гідравлічний радіюс не змінювався, коли глибина збільшиться на довільну величину x; відповідно площа перекрою й мокрий периметр:

$$F_x=F_0+2\int_0^x y\,dx$$

$$U_x=U_0+2\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx$$

$$R=\frac{F_0+2\int_0^x y\,dx}{U_0+2\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx}=\text{const}$$

Звідси

$$F_0+2\int_0^x y\,dx=U_0R+2R\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx$$

Щоб спростити це рівняння, продиференціюємо його; після невеличких перетворень:

$$\frac{dx}{R}=\frac{dy}{\sqrt{y^2-R^2}}$$

Проінтеґрувавши, відшукаємо рівняння кривої A_1B_1:

$$x=R\ln\frac{y+\sqrt{y^2-R^2}}{b+\sqrt{b^2-R^2}}$$

Ця форма поперечного перекрою для практики непридатна з конструктивних міркувань, а головно — вона все ж таки не забезпечує сталої швидкости, коли збільшується витрата й глибина: над кривими AB і A_1B_1 швидкість що далі від середини канала, то стає менша, алеж посередині вона зростає з глибиною. Ця розбіжність між математичним висновком і практичними спостереженнями пояснюється тим, що математичний зв'язок між різними гідравлічними елементами у вигляді формули *Шезі* не відповідає для форми перекрою (рис. 100) реальним зв'язкам; виводячи формулу *Шезі*, вважають, що тертя на всіх частинах мокрого периметру однаково впливає на рух у всій водотоці; для розглядуваної ж теоретичної форми поперечного перекрою тертя на частинах периметру біля літер A і A_1, очевидячки, впливає на невеликі кількості води, що течуть над цими частинами.

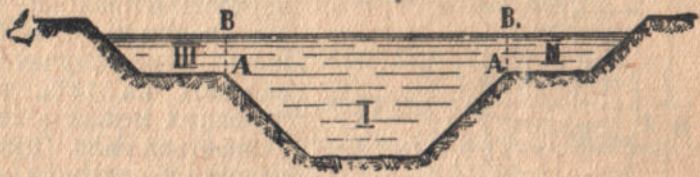


Рис. 101.

Практично корисне таке розширення корита, як показано на рис. 101, бо деяка кількість води може текти частинами перекрою II і III, а тому рівень у всьому перекрої підійметься менше, ніж коли б цих бічних частин не було; водночас і швидкість у середній частині зростатиме повільніше; але й тут треба бути обережним, бо за спостереженнями вода тече тут нібито в трьох окремих каналах — I, II і III, особливо коли II і III частини широкі. Відрізок AB і A_1B_1 не можна додавати до мокрих периметрів кожного з цих потоків, бо тертя об воду багато менше, ніж тертя об стінки.

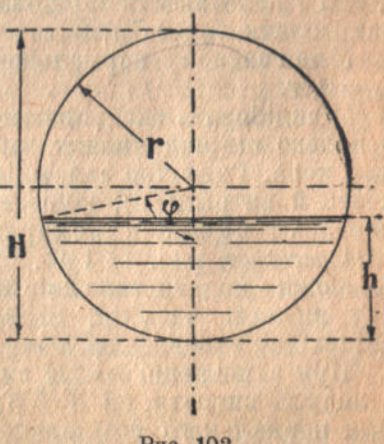


Рис. 102.

Для каналізації та дренажу користуються з закритих перекроїв каналів, у яких швидкість змінюється порівняно мало, якщо наповнення коливається в певних межах. Найпоширеніші з таких перекроїв — круглий та яйцюватий (овоїдальний).

Площа перекрою струмини і мокрий периметр в круглій трубі (рис. 102) залежать від кута φ і мають вигляд:

$$F = \frac{r^2}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi); \quad U = 2\varphi r;$$

гідравлічний радіус

$$R = \frac{r}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}\right);$$

він досягає максимуму, коли:

$$\frac{dR}{d\varphi} = -\frac{r}{2}\;\frac{2\varphi \cos 2\varphi\, 2 - 2\sin 2\varphi}{4\varphi^2} = 0$$

Звідси

$$2\varphi = \operatorname{tg} 2\varphi$$

Це рівняння має дві розв'язки: $2\varphi = 0$ і $2\varphi = 257°30'$.

Перша розв'язка відповідає тому випадку, коли $h = 0$ і $v = 0$. У другому випадку $h = 0{,}813d$ $(d = 2r)$ і швидкість v досягає максимуму. Коли $h = r$ (половинне наповнення) і $h = 2r = d$ (цілковите наповнення), то гідравлічний радіюс, отож і швидкість v, мають однакові вартості. В проміжку під час заповнення $h = 0{,}813d$ швидкість перевищуватиме ці вартості на 13%, тобто в указаних межах швидкість змінюється мало. Цікаво, що витрата теоретично досягає максимуму не тоді, коли труба цілком виповнена, а коли $h = 0{,}949d$.

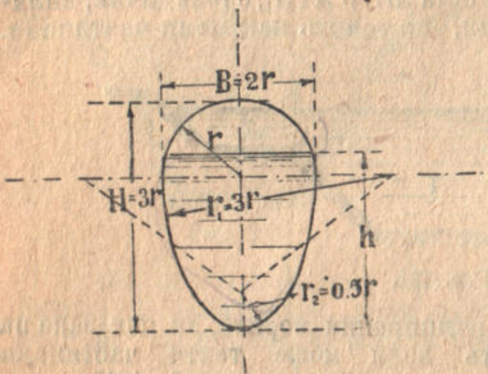


Рис. 103.

Периметр овоїдального перекрою (рис. 103) складається з дуг кіл з радіюсами r, r_1 і r_2. Змінюючи відношення між цими радіюсами, можна накреслити багато різноманітних овоїдальних перекроїв.

У так званому нормальному овоїдальному перекрої $r_1 = 3r$ та $r_2 = 0{,}5r$.

Швидкість в овоїдальному перекрої змінюється досить мало, в далеко ширших межах змін наповнення h, ніж це ми бачили для кола. Графічно залежність площі живого перекрою, швидкости й витрати від заповнення h для круглого й овоїдального перекрою подано в „Гидравлическом справочнике" професора *Павловського*, рис. 14 і 15.

Можна подати залежність Q, v і F від величини заповнення h і у вигляді таблиці. Назвемо через K_0 модуль витрати, що відповідає заповненню $h = H$.

При заповненні $h < H$ зміняться величини F, U, R, а разом і модуль витрати, на $K \neq K_0$. Для труби з діяметром $d = H$ (або для нормального овоїдального перекрою $3r = H$) можна обчислити K_0 і K_1, K_2, ... K_n, що відповідатимуть різним глибинам заповнення h_1, h_2, ... h_n. Назвемо відносне заповнення $\frac{h}{H}$ через a; тоді кожному a відповідатиме певне відношення модулів $\frac{K}{K_0} = \alpha$. Аналоґічно для модулів швидкости (S_0 — якщо заповнення $h = H$ і S — якщо заповнення $h < H$) відшукаємо, що кожній величині $\frac{h}{H} = a$ відповідає відношення модулів швидкости $\frac{S}{S_0} = \beta$.

Як видно з обчислень, величини коефіцієнтів α і β майже не залежать від розмірів (діяметра) труби, а тому їх можна вважати за сталі для кожного a. В таблиці VIII подано величини коефіцієнтів α і β (залежно від a) для труб круглого та нормального овоїдального поперечних перекроїв.

Користуючись із таблиць коефіцієнтів α і β, легко визначити шуканий елемент (d, Q, I), коли подано два з них і величину a; визначатимемо елемент цей з таких формул:

$$Q = \alpha K_0 \sqrt{I}$$

$$v = \beta S_0 \sqrt{I}$$

Величини K_0 і S_0 для каналізаційних труб, що їх обчислено за формулами:

$$K_0 = FC\sqrt{R}$$

$$S_0 = C\sqrt{R},$$

де коефіцієнт C взято за скороченою *Ганґільє-Куттеровою* формулою при $n = 0{,}013$, подано в таблиці VII.

Дренажні труби з погляду гідравліки є власне закриті канали, здебільшого круглого чи прямокутнього перекрою (дренаж *Бутца*). Точки п'єзометричної лінії для будь-якого перекрою збігаються з найвищими точками рівня води в трубі в цьому самому перекрої; через те, що дренаж обчислюють так, щоб труба була цілком заповнена, то, очевидячки, п'єзометрична лінія буде лінією перетину подовжньої вертикальної діяметральної площі з внутрішнею поверхнею труби. Отож і дренажні, і каналізаційні труби є безнапірні трубопроводи. Гідравлічне обчислення дренажу нічим не відрізняється від обчислення каналів, а тому формули, виведені в § 21, можна застосовувати й тут. Треба тільки пам'ятати, що мокрий периметр дорівнює обводу кола.

Основні обчислювальні формули:

$$v = C\sqrt{RI} \quad Q = Fv = FC\sqrt{RI} = K\sqrt{I}$$

Коефіцієнт C можна визначити за старою *Куттеровою* формулою

$$C = \frac{100\sqrt{R}}{m + \sqrt{R}} = \frac{100\sqrt{d}}{2m + \sqrt{d}},$$

де m—коефіцієнт шерехатости—дорівнює 0,27 для гончарних труб і $R = \frac{d}{4}$ —гідравлічний радіус, або за формулами *Маннінговою* та іншими, відповідно добравши коефіцієнт шерехатости.

Щоб легше було обчислювати, в таблиці IX подано величини модулів витрати (K) і швидкости $(S = C\sqrt{R})$ для дренажних труб з найуживанішими діяметрами. Складаючи таблиці, коефіцієнт *Шезі* C взяли за старою *Куттеровою* формулою; $m = 0{,}27$.

ЗАВДАННЯ ДО § 23

1. Визначити витрату Q і середню швидкість v в каналі складного поперечного перекрою за поданими на рис. 104 розмірами, коли спад $I = 0{,}0003$, $n = 0{,}025$, $m_1 = 1{,}50$, $m_2 = 1{,}25$.

Розв'язання. Канал складного профілю поділимо на три окремих канали — I, II і III; для кожного з них визначимо гідравлічні елементи і швидкість.

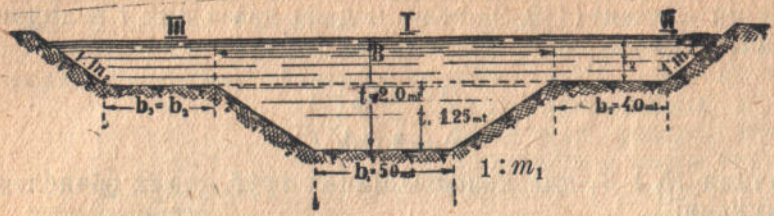


Рис. 104.

Середня частина канала (I):

$$B = b_1 + 2t_1m_1 = 5{,}0 + 2\,.\,1{,}25\,.\,1{,}5 = 8{,}75\ м$$

$$F_1 = bt_1 + t_1^2m_1 + B(t - t_1) = 5{,}0\,.\,1{,}25 + 1{,}25^2\,.\,1{,}5 + $$
$$+ 8{,}75\,(2{,}0 - 1{,}25) = 15{,}138\ м^2$$

$$U_1 = b_1 + 2t_1\sqrt{1 + m_1^2} = 5{,}0 + 2\,1{,}25\,.\,1{,}803 = 9{,}508\ м$$

$$R_1 = \frac{F_1}{U_1} = \frac{15{,}138}{9{,}508} = 1{,}592\ м$$

За *Манінгом* з таблиці $C_1 = 43{,}3$

$$v_1 = C_1\sqrt{R_1I} = 43{,}3\,.\,1{,}261\,.\,0{,}0173 = 0{,}945\ м/сек$$
$$Q_1 = F_1v_1 = 15{,}138\,.\,0{,}945 = 14{,}305\ м^3/сек$$

Права бічна частина канала складного профілю (II):

$$t_2 = t - t_1 = 2{,}00 - 1{,}25 = 0{,}75\ м^2$$

$$F_2 = b_2t_2 + \frac{t_2^2m_2}{2} = 4{,}0\,.\,0{,}75 + \frac{0{,}75^2\,.\,1{,}25}{2} = 3{,}352\ м^2$$

$$U_2 = b_2 + t_2\sqrt{1 + m_2^2} = 4{,}0\,.\,0{,}75\,.\,1{,}600 = 5{,}20\ м$$

$$R = \frac{F_2}{U_2} = \frac{3{,}352}{5{,}20} = 0{,}645\ м$$

За *Манінгом* $C_2 = 37{,}2$

$$v_2 = C_2\sqrt{R_2I} = 37{,}2\,.\,0{,}803\,.\,0{,}0173 = 0{,}517\ м/сек$$

$$Q_2 = F_2v_2 = 3{,}352\,.\,0{,}517 = 1{,}733\ м^3/сек$$

Гідравлічні елементи, швидкість і витрата лівої бічної частини канала (III) дорівнюватимуть, очевидячки, таким самим елементам правої частини.

Сумарна витрата:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 14{,}305 + 1{,}733 + 1{,}733 = 17{,}771\ м^3/сек$$

Площа $F = F_1 + F_2 + F_3 = 15{,}138 + 3{,}352 + 3{,}352 = 21{,}842\ м^2$

Середня швидкість:

$$v_{сер} = \frac{Q}{F} = \frac{17{,}771}{21{,}842} = 0{,}814\ м/сек$$

2. Визначити витрату й швидкість у каналізаційному колекторі діяметром $d = 300$ *мм*; заповнення $a = \frac{h}{H} = 0{,}90$; спад $I = 0{,}004$.

Розв'язуємо за допомогою таблиць.

Розв'язання. У таблиці VII для каналізаційної труби $d = 300$ *мм* відшукуємо $K_0 = 0{,}9082$ *м³ сек*, $S_0 = 12{,}86$ *м/сек*.

У таблиці VIII при заповненні $a = 0{,}90$ відшукуємо величини коефіцієнтів $\alpha = 1{,}082$ і $\beta = 1{,}142$;

$$Q = \alpha K_0 \sqrt{I} = 1{,}082 \, . \, 0{,}9082 \, . \, 0{,}0632 = 0{,}0621 \text{ м}^3/\text{сек} = 62{,}1 \text{ л/сек}$$

$$v = \beta S_0 \sqrt{I} = 1{,}142 \, . \, 12{,}86 \, . \, 0{,}0632 = 0{,}928 \text{ м/сек}$$

3. З яким діяметром треба прокласти каналізаційну трубу, щоб витрата $Q = 67{,}7$ *л/сек* проходила при заповненні $a = 0{,}95$? Спад $I = 0{,}002$. Визначити швидкість v у трубі.

Розв'язання. Модуль витрати колектора при $Q = 0{,}0677$ *м³/сек* дорівнює:

$$K = \frac{Q}{\sqrt{I}} = \frac{0{,}0677}{0{,}0447} = 1{,}5145 \text{ м}^3/\text{сек}$$

Такий модуль має бути при $a = 0{,}95$, що йому відповідає $\alpha = 1{,}087$; визначивши α і K, можемо відшукати

$$K_0 = \frac{K}{\alpha} = \frac{1{,}5145}{1{,}087} = 1{,}3932 \text{ м}^3/\text{сек}$$

Такий модуль (дуже близький до нього) має труба $d = 350$ *мм*, з модулем $K_0 = 1{,}393$ *м³/сек*.

$$v = \beta S_0 \sqrt{I} = 1{,}108 \, . \, 14{,}48 \, . \, 0{,}0447 = 0{,}717 \text{ м/сек}$$

β і S_0 беремо з таблиць.

4. При яких глибинах h_1 і h_2 пройдуть витрати $Q = 21{,}2$ *л/сек* і $Q = 50{,}1$ *л/сек* через овоїдальну трубу розміром $\frac{H}{B} = 45/30$ *см*, коли спад $I = 0{,}0025$.

Розв'язання. З таблиці для овоїдальної труби розміром 45/30 *см* $K_0 = 1{,}523$ *м³/сек*.

Модуль для поданих витрат:

$$K_1 = \frac{Q_1}{\sqrt{I}} = \frac{0{,}0212}{0{,}05} = 0{,}424 \text{ м}^3/\text{сек}$$

$$K_2 = \frac{Q_2}{\sqrt{I}} = \frac{0{,}0501}{0{,}05} = 1{,}002 \text{ м}^3/\text{сек}$$

Відношення $\frac{K}{K_0}$ дасть α:

$$\alpha_1 = \frac{K_1}{K_0} = \frac{0{,}424}{1{,}523} = 0{,}278$$

$$\alpha_2 = \frac{K_2}{K_0} = \frac{1{,}002}{1{,}523} = 0{,}658$$

З таблиці для α_1 відшукуємо $a_1 = 0{,}40$.

$$h_1 = Ha_1 = 0{,}45 \cdot 0{,}40 = 0{,}18 \text{ м}$$

При $\alpha_2 = 0{,}658$ відшукуємо a_2 інтерполяцією:

α	a
0,585	0,60
0,658	x
0,672	0,65
0,087	0,05
0,014	x_1

Звідси
$$x_1 = 0{,}01;$$

$$x = 0{,}65 - x_1 = 0{,}64$$

Глибина
$$h_2 = H \cdot 0{,}64 = 0{,}45 \cdot 0{,}64 = 0{,}288 \text{ м}$$

5. З яким спадом треба прокладати дренажну трубу діяметром 120 *мм*, коли витрата $Q = 3{,}8$ *л/сек*? Відшукати також швидкість v.

Розв'язання.
$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}12^2}{4} = 0{,}01131 \text{ м}^2$$

$$R = \frac{d}{4} = 0{,}03 \text{ м}$$

$$C = \frac{100\sqrt{d}}{2 \cdot 0{,}27 + \sqrt{d}} = \frac{100 \cdot 0{,}346}{0{,}54 + 0{,}346} = 39{,}1$$

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{0{,}0038}{0{,}01131} = 0{,}336 \text{ м/сек}$$

$$I = \frac{v^2}{C^2 R} = \frac{0{,}336^2}{39{,}1^2 \cdot 0{,}03} = 0{,}00246$$

Розв'яжемо ще завдання, користуючись з модулів витрати й швидкости:

$$Q = K\sqrt{I};\ I = \frac{Q^2}{K^2} = \frac{0{,}0038^2}{0{,}0058599} = 0{,}00246$$

$$v = S\sqrt{I} = 6{,}768 \cdot 0{,}0497 = 0{,}336 \text{ м/сек}$$

(величини K і S взято з таблиці IX для труби $d = 120$ *мм*).

§ 24. ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ ПРО ЕКОНОМІЧНЕ ОБЧИСЛЕННЯ КАНАЛІВ

Не завжди гідравлічно найвигідніший перекрій буде і економічно найвигідніший. Часто трапляється, що економніше збудувати канал з меншою глибиною, ніж глибина гідравлічно найвигіднішого перекрою, бо коли він дуже глибокий, то земляні роботи коштують дорожче або іноді за місцевими геологічними умовами в глибокому каналі довелося б закріпляти дно тощо; у висушних та судноплавних каналах глибину визначають заздалегідь. Навпаки, коли ставлять умову, щоб канал забирав якнайменше місця, то доводиться глибину його робити більшу, як гідравлічно найвигіднішу.

Економічні обчислення каналів залежать від місцевих умов і бувають досить різноманітні. Розглянемо тут такі випадки.

Хай з річки (рис. 105) треба каналом підвести до точки A певну кількість води Q *м³/сек*; різницю H рівнів води у точці A і в річці (точка B) задано. Треба канал у землі спроєктувати так, щоб він коштував якнайменше. Нехай спад річки I_p виміряно, а розшукуваний спад канала I, звичайно, буде менший за нього. Потрібну довжину L канала можна визначити з формули:

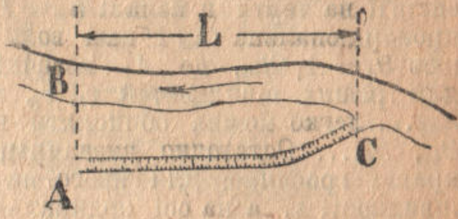


Рис. 105.

$$L = \frac{H}{I_1},$$

де $I_1 = I_p - I$ (див. завдання 4 до § 22).

Спад канала I визначимо так. Візьмемо кілька швидкостей v_1, v_2, $v_3 \ldots$ в межах, дозволених ґрунтом; для кожної з них обчислимо потрібну площу чинного перекрою F_1, F_2, $F_3 \ldots$, спроєктуємо поперечні перекрої на задану витрату Q (якщо можна, то гідравлічно найвигідніші), а також обчислимо відповідні спади канала $I_1, I_2, I_3 \ldots$; для кожного спаду обчислимо I_1, а далі — потрібну довжину канала L_1, L_2, $L_3 \ldots$ Вартість канала в землі приблизно пропорціональна об'єму земляних робіт. Вийма ж землі для різних швидкостей дорівнюватиме добуткам площ перекроїв на відповідні довжини каналів: F_1L_1, F_2L_2, $F_3L_3 \ldots$ Накресливши графік, де подано залежність цих об'ємів від швидкости в каналі, легко визначити найдешевший варіянт (рис. 106).

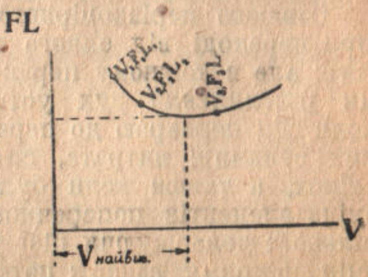


Рис. 106.

Розглянемо ще економічне обчислення дериваційного канала гідросиловні. Хай з річки в пункті C (рис. 105) забираємо кількість води Q *м³/сек* для гідросиловні; довжину канала L тепер задано. Треба спроєктувати канал так, щоб експлуатаційні витрати на нього були якнайменші. Ці витрати складаються з щорічних відрахувань на амортизацію, на ремонт канала, догляд за ним тощо та з вартости гідравлічної енерґії, що її доводиться витрачати в каналі на тертя. Знову обчислимо вартості канала для різних швидкостей води в ньому; якщо вартість кубічної одиниці вибраної землі p, то ці вартості для швидкостей v_1, v_2, $v_3 \ldots$ будуть pF_1L, pF_2L, $pF_3L \ldots$ (L тепер стале). Позначивши річний відсоток на експлуатаційні витрати для канала (крім втрат енергії) через δ, відшукаємо величину їх для якоїсь швидкости v за формулою $Э = \delta pFL$, тобто відповідно: δpF_1L, δpF_2L, $\delta pF_3L \ldots$

Цілком зрозуміло, що більшим швидкостям відповідають менші вартості канала й менші експлуатаційні витрати $Э$ на нього. Проте, більшим швидкостям відповідають більші втрати енергії на тертя в каналі $h_w = IL$. Вартість втраченої енергії пропорціональна h_w і вазі води γQ, тобто вона щороку дорівнює $Э_0 = A\gamma Qh_w$, де A — коефіцієнт пропорціональности. Отож для різних швидкостей v_1, v_2, $v_3 \ldots$ і відповідних їм h_{w1}, h_{w2}, $h_{w3} \ldots$ легко можна обчислити вартості втраченої енергії $Э_{01}$, $Э_{02}$, $Э_{03} \ldots$ Остаточно визначити найвигідніший варіянт найкраще графічно; для цього на осі абсцис треба відкласти швидкості v, а на осі ординат — відповідні суми $Э + Э_0$. Найменшій сумі $Э + Э_0$ відповідає найвигідніша швидкість v.

РОЗДІЛ V

НЕРІВНОМІРНИЙ УСТАЛЕНИЙ РУХ ВОДИ В РІЧКАХ І КАНАЛАХ

§ 25. ЗАГАЛЬНІ ЗАУВАЖЕННЯ. ДИФЕРЕНЦІЯЛЬНЕ РІВНЯННЯ НЕРІВНОМІРНОГО РУХУ

Ознакою нерівномірного руху є зміна середньої швидкости при переході від одного перекрою відкритої водотоки до другого; але в кожному перекрої швидкість залишається стала, бо ми розглядаємо рух усталений. Швидкість змінюється тоді, коли від перекрою до перекрою змінюється одна або кілька таких величин: витрата, спад, гідравлічний радіюс, шерехатість стінок, а також коли будують загати тощо. Вважатимемо, що зміна елементів поперечного перекрою потока відбувається повільно*; додержуючи цієї умови, а також тоді, як немає різких змін напряму вздовж потока, вільний рівень у кожному перекрої можна вважати за горизонтальну лінію.

Виведемо тепер диференціяльне рівняння нерівномірного усталеного руху. Розглядатимемо й тут у кожному перекрої середню швидкість. Застосуємо до струминки, що проходить через точки A і B (рис. 107), рівняння *Д. Бернуллі*:

$$dy + \frac{v^2}{2g} = \frac{(v + dv)^2}{2g} + dH_r$$

Тут dH_r — висота втрат на тертя на дільниці ds. Обчислюючи dH_r, можна вважати, що площа поперечного перекрою, швид-

* Такі місця, де перекрій відкритої водотоки змінюється раптово, тут не розглядатимемо.

кість і змочений периметр, а звідси й гідравлічний радіус на всій дільниці будуть сталі, бо дільниця ця коротка. За таких умов відносний спад I_r, потрібний для того щоб перемагати опір тертя на дільниці ds, можна визначити за формулою

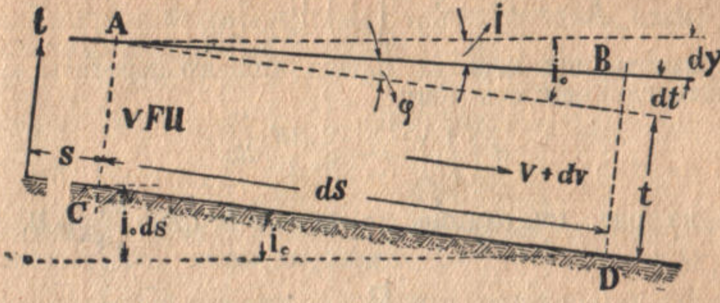


Рис. 107.

(35) або (37). Скористуємося з останньої формули: $I_r = \frac{v^2}{C^2R}$. Щоб визначити відповідну висоту втрат, треба відносний спад I_r помножити на довжину дільниці:

$$dH_r = I_r\,ds = \frac{v^2}{C^2R}ds$$

Підставивши цей вираз у відшукане рівняння й спростивши його, матимемо:

$$dy = d\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \frac{v^2}{C^2R}ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

Це і є диференціяльне рівняння нерівномірного руху *. Якщо скористувалися б з формули (35), то замість рівняння (49) мали б

$$dy = d\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \frac{bv^2}{R}ds \quad \ldots\ldots\ldots (49\text{-a})$$

Треба зауважити, що формули (49) і (49-а) виведено для довільної форми поперечного перекрою корита, тому їх можна застосовувати до всяких водоток чи дільниць, у яких глибина, площа чинного поперечного перекрою та інші гідравлічні елементи змінюються повільно. До місць, де чинний перекрій змінюється раптово, не можна застосовувати рівняння *Д. Бернуллі*, отож і рівняння (49) чи (49-а), що їх виведено з рівняння *Д. Бернуллі*.

Перетворимо тепер рівняння (49) для нерівномірного руху в коритах призматичних, але з довільними реґулярними перекроями.

---

* Коли зважити на те, що швидкості по перекрою розподілено нерівномірно, то замість рівняння (49) одержимо:

$$dy = \alpha\, d\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \frac{v^2}{C^2R}ds,$$

де $\alpha = 1{,}11$ є коректив на нерівномірний розподіл швидкостей у перекрої.

Підставимо до рівняння (49) замість dy і v такі вирази: $I_0\,ds - dt$ (рис. 107) і $\frac{Q}{F}$; тоді легко одержимо:

$$I_0 ds - dt = \frac{Q^2}{2g}\,d\left(\frac{1}{F^2}\right) + \frac{Q^2}{F^2C^2R}\,ds$$

У призматичних коритах площа чинного перекрою є функція тільки глибини; ось чому

$$d\left(\frac{1}{F^2}\right) = -\frac{2}{F^3}\frac{dF}{dt}\,dt$$

Але на рис. 108 бачимо, що $dF = B\,dt$; отож $\frac{dF}{dt} = B$. Тепер

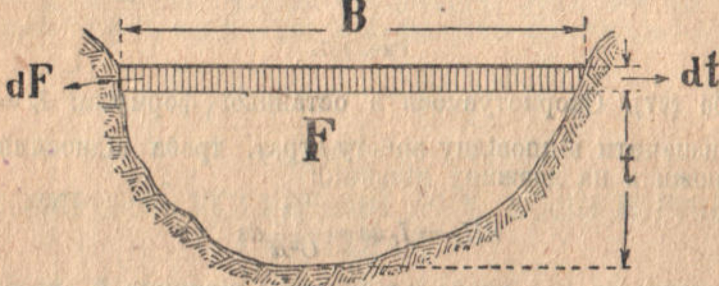


Рис. 108.

бачимо, що $d\left(\frac{1}{F^2}\right) = -\frac{2B}{F^3}\,dt$. Підставивши до диференціяльного рівняння, одержимо:

$$I_0 ds - dt = -\frac{Q^2}{g}\,\frac{B}{F^3}\,dt + \frac{Q^2}{F^2C^2R}\,ds$$

або

$$\left(I_0 - \frac{Q^2}{F^2C^2R}\right)ds = \left(1 - \frac{Q^2B}{gF^3}\right)dt,$$

звідси

$$\frac{dt}{ds} = I_0\,\frac{1 - \dfrac{Q^2}{I_0F^2C^2R}}{1 - \dfrac{Q^2B}{gF^3}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49\text{-b})$$

Зауважимо, що в цьому рівнянні I_0, Q і g — величини сталі, а решта змінні і залежать для певного перекрою корита від глибини t; коефіцієнт *Шезі* тут залежить і від коефіцієнта шерехатости. Похідна $\frac{dt}{ds}$ — це є танґенс кута φ, що його утворює елемент AB подовжнього профілю поверхні води з подовжнім профілем дна. Цей кут у звичайних умовах дуже малий і тому $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi \approx \varphi$. Рівняння (49-b) є диференціяльне рівняння подовжнього профілю поверхні водотоки з нерівномірним рухом, віднесене до осей s і t.