Г. ФІЛІПС

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

ОНТИ ДЕРЖАВНЕ НКТП
НАУКОВО-ТЕХНІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНИ

Г. ФІЛІПС.

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

ПЕРЕКЛАД З ЧЕТВЕРТОГО
ПЕРЕРОБЛЕНОГО РОСІЙСЬКОГО ВИДАННЯ

ЗА РЕДАКЦІЄЮ
проф. А. К. СУШКЕВИЧА

ОНТИ ДЕРЖАВНЕ НКТП
НАУКОВО-ТЕХНІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНИ
Харків 1935 Київ

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літопису Укр. Друку“, „Картковому реперт.“ та інших покажчиках Укр. Книж. Палати.

21 — 5 — 2

Відповідальний редактор *А. К. Сушкевич*
Техоформлення *В. П. Волков*

Друкарня Державного науково-технічного видавництва України
Київ, вул. Воровського, 42

Уповноваж. Головліту № 3423. Зам. № 214. Тираж 5000—24¹/₂ арк.

ПЕРЕДМОВА ДО УКРАЇНСЬКОГО ВИДАННЯ

Другий том підручника Філіпса з аналізу нескінченно-малих,— „Інтегральне числення",—що зараз видається українською мовою, є переклад з четвертого російського видання (під ред. проф. Кагана). В українському виданні є такі зміни порівнюючи з російським виданням: грунтовно змінено початок розділу про означення інтеграла, як границі суми; в російському виданні це питання розглядається дуже коротко, тоді як нема ніяких підстав для подібного „упрощенства"; навпаки, ця короткість дає студентам-початківцям туманне уявлення про таку важливу річ, як представлення означеного інтеграла, як границі суми; тут якраз навпаки,—конче потрібна цілковита ясність; тому я й вважав за необхідне грунтовно переробити це питання. Розділ про диференціальні рівняння майже цілком запозичений з невеликої книжки того ж автора „Диференциальные уравнения" (рос. вид. друге); в цій книжці цей розділ викладено докладніше ніж в рос. вид. „Інтегрального числення" Філіпса. В цьому ж розділі грунтовно перероблено частину про лінійні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами, бо в Філіпса тут прикладається символічний метод, погано зрозумілий для початківців. Крім того, зроблено ще деякі дрібні зміни й поправки, зокрема скорочено розділ, де даються відповіді на вправи.

Ця книжка призначається для студентів витшів, де математика вивчається в невеликому обсязі.

А. Сушкевич.

РОЗДІЛ ПЕРШИЙ

ІНТЕГРУВАННЯ

1. Інтеграл. Функція $F(x)$, диференціал якої дорівнює $f(x)\,dx$ зветься *інтегралом від* $f(x)\,dx$. Така функція позначається символом $\int F(x)\,dx$. Отже, за означенням, рівності

$$F(x)=\int f(x)\,dx \quad \text{і} \quad dF(x)=f(x)\,dx$$

еквівалентні між собою. Процес відшукання інтеграла даного диференціала зветься *інтегруванням*.

Наприклад, через те, що $d(x^2)=2x\,dx$, то

$$\int 2x\,dx=x^2.$$

Так само

$$\int \cos x\,dx=\sin x, \quad \int e^x\,dx=e^x.$$

Щоб пересвідчитися в правильності виконаного інтегрування, досить продиференціювати добуту функцію; якщо в результаті добудемо заданий диференціал, то інтегрування виконано вірно.

2. Стала інтегрування. Якщо C є стала, то

$$d\,[F(x)+C]=d\,F(x).$$

Якщо через те $F(x)$ є один інтеграл даного диференціала то $F(x)+C$ при будьякому значенні сталої C також є інтеграл, того самого диференціала. Наприклад,

$$\int 2x\,dx=x^2+C, \quad \int \cos x\,dx=\sin x+C,$$

де C є стала.

Доведемо тепер обернене твердження, саме виявимо, що *різниця двох неперервних функцій, які мають один і той самий диференціал, являє собою сталу.*

Справді, припустимо, що $F_1(x)$ і $F_2(x)$ є дві функції, що мають той самий диференціал. Нехай $y=F_2(x)-F_1(x)$. Нанесемо

на рисунку криву, яку виражає це рівняння. Кутовий коефіцієнт дотичної цієї кривої є

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dF_2(x)-dF_1(x)}{dx}=0.$$

Він завжди дорівнює нулеві, тому дотична до цієї лінії на всьому її протязі параллельна осі абсцис. Через те й сама лінія, очевидно, є пряма,паралельна осі абсцис; її ордината має тому стале значення, тобто

$$F_2(x)-F_1(x)=C,$$

що й треба було довести.

Отже, коли $F(x)$ є один інтеграл диференціала $f(x)dx$, то всякий інший інтеграл його має вид

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

де C є стала, якій можна надати зовсім довільного значення. Тому вона зветься *довільною* сталою.

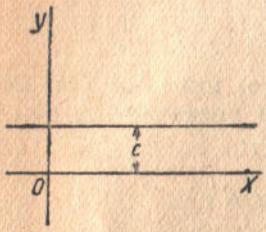

Рис. 1

3. Основні формули. Нехай a і n будуть сталі, u, v, w — змінні.

I. $\int(du\pm dv\pm dw)=\int du\pm\int dv\pm\int dw.$

II. $\int a\,du=a\int du.$

III. $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$, якщо n не дорівнює -1.

IV. $\int u^{-1}du=\int\frac{du}{u}=\ln u+C.$

Щоб ці формули довести, досить виявити, що в кожному випадку диференціал правої частини збігається з виразом, який стоїть у лівій частині під знаком інтеграла. Виходить, щоб довести формулу III, диференціюємо праву її частину і добуваємо

$$d\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}+C\right)=\frac{(n+1)\,u^n\,du}{n+1}=u^n\,du.$$

Формула I виражає, що інтеграл алгебричної суми диференціалів можна добути, інтегруючи окремі диференціали і складаючи результати.

Формула II виражає, що сталий множник можна винести за знак інтеграла, не змінюючи результату. Змінну величину винести за знак інтеграла, звичайно, не можна.

Приклад 1. $\int x^5\,dx$.

Прикладаємо формулу III, припускаючи в ній $u=x$ і $n=5$; тоді $du=dx$, і тому

$$\int x^5\,dx=\frac{x^{5+1}}{5+1}+C=\frac{x^6}{6}+C.$$

Приклад 2. $\int 3\sqrt{x}\,dx$.

За формулою другою маємо:

$$\int 3\sqrt{x}\,dx=3\int x^{1/2}dx=\frac{3x^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C=2x^{3/2}+C.$$

Приклад 3. $\int (x-1)(x+2)\,dx$.

Розкриваємо дужки і інтегруємо почленно; дістаємо:

$$\int(x-1)(x+2)\,dx=\int(x^2+x-2)\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+C.$$

Приклад 4. $\int\frac{x^2-2x+1}{x^3}\,dx$.

Ділячи кожний член окремо на x^3, дістаємо послідовно:

$$\int\frac{x^2-2x+1}{x^3}\,dx=\int(x^{-1}-2x^{-2}+x^{-3})dx=$$

$$=\ln x+2x^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2}+C=$$

$$=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}+C.$$

Приклад 5. $\int\sqrt{2x+1}\,dx$.

Нехай $u=2x+1$, $du=2\,dx$. Відповідно до цього ми вміщаємо перед dx множник 2, а щоб його компенсувати, ставимо перед знаком інтеграла множник $\frac{1}{2}$. Дістаємо:

$$\int\sqrt{2x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int(2x+1)^{1/2}2\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du=\frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}+C.$$

Приклад 6. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

Тут мы можемо скористатися формулою IV, якщо припустимо $u=x^2+1$; тоді $du=2x\,dx$, і тому

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln u+C=$$

$$=\ln\sqrt{x^2+1}+C.$$

Приклад 7. $\int \frac{4x+2}{2x-1}\,dx$,

Ділячи, дістаємо:

$$\frac{4x+2}{2x-1}=2+\frac{4}{2x-1}.$$

а тому

$$\int \frac{4x+2}{2x-1}\,dx=\int\left(2+\frac{4}{2x-1}\right)dx=2x+2\ln(2x-1)+C.$$

Вправи

1. $\int (x^4-3x^3+5x^2)\,dx.$ $= \frac{x^5}{5} -$

2. $\int \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx.$

3. $\int \left(\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)dx.$

4. $\int \left(\sqrt{2x}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx.$

5. $\int \sqrt{x}(x^2+2x+1)\,dx.$

6. $\int (\sqrt{a}-\sqrt{x})^3 dx.$

7. $\int x\,(x+a)(x+b)\,dx.$

8. $\int \frac{2x+3}{x}\,dx.$

9. $\int \frac{(y+2)^2}{y}\,dy.$

10. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{x^{3/2}}\,dx.$

11. $\int \frac{dx}{x+1}.$

12. $\int \frac{dx}{(x+1)^2}.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}+1}.$

14. $\int \frac{x\,dx}{x^2+2}.$

15 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}.$

16. $\int \frac{x\,dx}{(a+bx^2)^3}.$

17. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

18. $\int \frac{x^2\,dx}{a^3+x^3}.$

19. $\int x^2\sqrt{x^3-1}\,dx.$

20. $\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b}\,dx.$

21. $\int \frac{(2x+a)\,dx}{\sqrt{x^2+ax+b}}.$

22. $\int \frac{t^4\,dt}{1-at^5}.$

23. $\int t\,(a^2-t^2)^{3/2}\,dt.$

24. $\int \frac{x+1}{x-2}\,dx.$

25. $\int \left(2+\frac{1}{2x^2+1}\right)\frac{x\,dx}{2x^2+1}$

26. $\int \left(1-\frac{1}{x}\right)^3\frac{dx}{x^2}.$

27. $\int \frac{x^{n-1}dx}{(x^n+a)^n}$

28. $\int (\sqrt{2x}-\sqrt{2a})^{10}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

29. $\int \frac{x^3-2}{x^3+2}\,x^2\,dx.$

30. $\int (x^3-1)^2 x\,dx.$

4. Рух матеріальної точки. Нехай w буде числове значення прискорення точки, яка рухається по прямій лінії, v — її скорість, s — пройдена путь. Тоді, як відомо,

$$w=\frac{dv}{dt}, \qquad v=\frac{ds}{dt}.$$

Виходить

$$dv=w\,dt, \quad ds=v\,dt.$$

Тому якщо w є відома нам функція від t або стала, то

$$v=\int w\,dt+C_1, \quad s=v\,dt+C_2.$$

Якщо матеріальна точка рухається по кривій лінії, а компоненти її прискорення нам відомі, то тим самим способом можна відшукати кожну компоненту скорості і кожну координату окремо. Справді, коли координати прискорення (тобто числові значення компонент, див. „Дифер. числ.", рубр. 71) точки, яка рухається в площині, є w_x і w_y, то

$$\frac{dv_x}{dt}=w_x, \quad \frac{dv_y}{dt}=w_y; \quad dv_x=w_x\,dt, \quad dv_y=w_y\,dt;$$

$$v_x=\int w_x\,dt+C_1; \quad v_y=\int w_y\,dt+C_2.$$

Далі

$$\frac{dx}{dt}=v_x, \quad \frac{dy}{dt}=v_y; \quad dx=v_x\,dt, \quad dy=v_y\,dt.$$

Отже

$$x=\int v_x\,dt+C_3,\quad y=\int v_y\,dt+C_4.$$

Приклад 1. Тіло, яке в початковий момент, тобто при $t=0$, перебуває в спокої, падає при сталому прискоренні сили ваги g. Знайти скорість і пройдену путь у функції від часу t.

В даному випадку

$$w=\frac{dv}{dt}=g,\quad dv=g\,dt.$$

Виходить

$$v=\int g\,dt=gt+C.$$

Тому що в момент $t=0$ тіло було в спокої, то при $t=0$ і $v=0$. Ці значення змінних t і v через те мусять справджувати рівняння $v=gt+C$.

Отже

$$0=g\cdot 0+C,$$

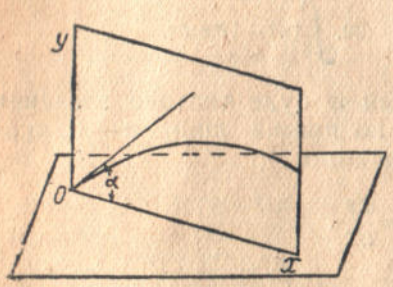

Рис. 2.

о бто $C=0$; разом з тим $v=gt$. Далі

$$v=\frac{ds}{dt},\quad ds=v\,dt=gt\,dt,$$

а тому

$$s=\int gt\,dt=\frac{1}{2}gt^2+C.$$

Але при $t=0$ і $s=0$; виходить, $C=0$ і $s=\frac{1}{2}gt^2$.

Приклад 2. Снаряд вилітає з гармати з скорістю v_0, напрямленою під кутом α до горизонту. Відкидаючи опір повітря, визначити його рух.

Через напрям скорості в момент, коли снаряд вилітає з дула ($t=0$), проведімо вертикальну площину (рис. 2). У цій площині візьмімо точку, з якої снаряд вилітає, за початок, горизонтальну лінію — за вісь x-ів, вертикальну лінію — за вісь y-ів. Прискорення спричинюється виключно дією сили ваги. Воно напрямлене вертикально вниз, і числове його значення дорівнює g. Виходить

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g.$$

Інтегрування дає:

$$\frac{dx}{dt}=C_1, \qquad {}_{dt}=-gt+C_2.$$

При $t=0$, $\frac{dx}{dt}$ і $\frac{dy}{dt}$ є координати скорості (тобто числові значення її складових). Виходить

$$C_1=v_0\cos\alpha, \quad C_2=v_0\sin\alpha$$

і

$$\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha,$$

$$\frac{dy}{dt}=v_0\sin\alpha-gt.$$

Інтегруючи знову, дістаємо:

$$x=v_0t\cos\alpha,$$

$$y=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2;$$

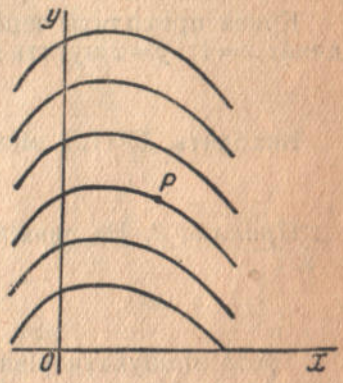

Рис. 3.

сталі інтегрування дорівнюють нулеві, бо $x=0$ і $y=0$ при $t=0$.

5. Криві даного нахилу. Якщо задано нахил кривої в кожній її точці, тобто якщо кутовий коефіцієнт дотичної $\frac{dy}{dx}$ є задана функція абсциси x, тобто

$$\frac{dy}{dx}=f(x),$$

то

$$dy=f(x)\,dx,$$

і співвідношення

$$y=\int f(x)\,dx+C$$

є рівняння кривої.

Тут стала може мати довільне значення, а тому є безліч кривих, які мають даний нахил (рис. 3).

Коли потрібно, щоб крива проходила через дану точку $P(x_0, y_0)$, то ми можемо визначити значення C, підставляючи координати цієї точки в рівняння після інтегрування.

Приклад 1. Знайти криву, яка проходить через точку (1, 2), коли кутовий коефіцієнт дотичної в кожній її точці (x, y) дорівнює $2x$. Тоді

$$\frac{dy}{dx}=2x.$$

Отже

$$y=\int 2x\,dx=x^2+C.$$

Крива проходить через точку (1, 2), а тому значення координат $x=1$ і $y=2$ мусять задовольняти рівняння кривої, а через те

$$2=1+C$$

Виходить, $C=1$, і рівняння кривої є

$$y=x^2+1.$$

Приклад 2. На деякій кривій

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x.$$

Треба відшукати рівняння цієї кривої, коли відомо, що вона проходить через точку (—2, 1) і має в цій точці кутовий коефіцієнт —2.

Інтегруючи рівняння, маємо:

$$\frac{dy}{dx}=\int\frac{d^2y}{dx^2}\,dx=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C.$$

В точці (—2, 1), $x=-2$, а $\frac{dy}{dx}=-2$.

Тому

$$-2=2+C,$$

тобто $C=-4$. Отже,

$$y=\int\left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx=\frac{1}{6}x^3-4x+C_1.$$

Крива проходить через точку (—2, 1), а тому

$$1=-\frac{8}{6}+8+C_1.$$

Через те $C_1=-5\frac{2}{3}$, і

$$y=\frac{1}{6}x^3-4x-5\frac{2}{3}$$

є рівняння кривої.

6. Відокремлення змінних. Формули інтегрування мають лише одну змінну. Коли диференціал має дві змінних або більше число їх, то його треба звести до виду, при якому окремі його члени мають кожний лише одну змінну. Якщо цього не можна зробити, то проінтегрувати диференціал за поданими вище методами не можна.

Приклад 1. Відшукати таку криву, в якій частина дотичної, що є між осями координат, ділиться в точці дотику пополам.

Нехай $P(x, y)$ буде точка, в якій AB дотикається до кривої (рис. 4). Точка P є середина відрізка AB, а тому

$$OA=2y, \quad OB=2x.$$

Кутовий коефіцієнт дотичної в точці P дорівнює

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{OA}{OB}=-\frac{y}{x}.$$

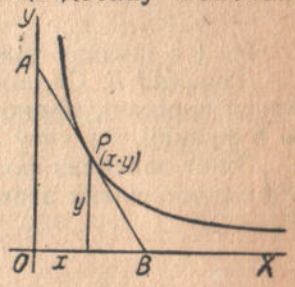

Рис. 4.

Це співвідношення можна написати так:

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0.$$

Кожний член лівої частини має лише одну змінну, тому можна проінтегрувати її за формулою IV і дістати:

$$\ln y+\ln x=C,$$

або інакше

$$\ln xy=C,$$

звідки

$$xy=e^C=K,$$

де C, а, виходить, і K, можуть набрати довільних значень.

Приклад 2. За Ньютоновим законом охолодження

$$\frac{d\theta}{dt}=-k(\theta-a),$$

де k є стала, θ — температура охолоджуваного тіла в момент t, a — температура навколишнього повітря. Виразити θ в функції від t.

Якщо помножимо обидві частини заданого рівняння на dt і поділимо на $\theta-a$, то рівняння Ньютона набере виду:

$$\frac{d\theta}{\theta-a}=-k\,dt.$$

Інтегруючи обидві частині, добудемо:

$$\ln(\theta-a)=-kt+C.$$

Звідси

$$\theta - a = e^{-kt+C} = e^C e^{-kt}$$

Припустімо, що при $t=0$ буде $\theta=\theta$.
Тоді

$$\theta_0 - a = e^C e^0 = e^C.$$

і, значить,

$$\theta - a = (\theta_0 - a)\, e^{-kt}.$$

Це і є шукане рівняння.

Приклад 3. Сповільнююча дія тертя на диск, який обертається в рідині, пропорціональна кутовій скорості ω. Виразити ω в функції від часу t.

Зміст завдання полягає в тому, що скорість зміни функції ω пропорціональна значенню ω, тобто

$$\frac{d\omega}{dt} = k\omega,$$

де k є стала, яка має від'ємне значення. Відокремлюючи змінні, добудемо:

$$\frac{d\omega}{\omega} = k\, dt,$$

звідки

$$\ln \omega = kt + C$$

і

$$\omega = e^{kt+C} = e^C e^{kt}.$$

Нехай ω_0 буде значення ω при $t=0$. Тоді

$$\omega_0 = e^{k \cdot 0} e^C = e^C.$$

Заміняючи e^C через ω_0, ми зведемо попереднє рівняння до виду:

$$\omega = \omega_0 e^{kt}.$$

Це й є потрібний результат.

Приклад 4. На дні циліндричної посудини, наповненої водою, є щілина. Покладаючи, що скорість витікання рідини пропорціональна висоті рідини в посудині і що $^1/_{10}$ рідини витікає за першу добу, визначити, скільки часу потрібно, щоб з посудини витекла половина рідини.

Нехай a буде радіус циліндра, h — його висота, x — висота води в посудині через t днів. Об'єм води в посудині в момент t дорівнює $\pi a^2 x$, а скорість зміни об'єму є

$$\pi a^2 \frac{dx}{dt}.$$

За умовою ця величина пропорціональна x, так що

$$\pi a^2 \frac{dx}{dt} = kx,$$

де k є стала. Відокремлюючи змінні, маємо:

$$\frac{\pi a^2 dx}{x} = k\,dt.$$

Інтегрування дає:

$$\pi a^2 \ln x = kt + C.$$

При $t=0$ циліндр увесь наповнений водою, так що $x=h$ Виходить,

$$\pi a^2 \ln h = C.$$

Віднімаючи це співвідношення з попереднього почленно, добудемо:

$$\pi a^2 \ln \frac{x}{h} = kt.$$

При $t=1$, $x=\frac{9}{10}h$. Виходить

$$\pi a^2 \ln \frac{9}{10} = k$$

При $x=\frac{1}{2}h$

$$t = \frac{\pi a^2 \ln \frac{x}{h}}{k} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{9}{10}} = 6{,}57 \text{ діб.}$$

Вправи

1. Скорість якогось тіла, що рухається по прямій лінії, виражається залежно від часу формулою $v=2t+3t^2$; знайти віддаль, пройдену між моментами $t=2$ і $t=5$.

2. Знайти віддаль, яку пройде за t секунд тіло, кинуте вертикально вниз з початковою скорістю 30 см/сек.

3. З точки, яка є на висоті 18 м над рівнем землі, кинуто вертикально вгору м'яч з скорістю 30 м/сек. Знайти висоту, на якій тіло перебуває в момент t в функції від часу. Знайти також найбільшу висоту, до якої підніметься тіло.

4. Куля проходить через дошку завтовшки 7,5 см, яка затримує її рух, надаючи їй сталого від'ємного прискорення. Скорість кулі в момент, коли вона досягає дошки, становить 300 м/сек, а в момент, коли вона з дошки вилітає,— 150 м/сек. Скільки часу припало на рух кулі крізь дошку?

5. Рухома матеріальна точка виходить з точки (1, 2). Через t секунд складова скорість, паралельна осі x-ів, має числове значення, яке дорівнює $2t-1$, а

складова, паралельна осі y-ів, має значення $1-t$. Знайти координати рухомої точки в функції часу, а також рівняння траєкторії.

6. Снаряд випущено з гармати з скорістю 900 м/сек під кутом у 45° до горизонту з точки, яка є на висоті 30 м над землею. Не зараховуючи опору повітря, знайти точку, в яку снаряд упаде на землю.

7. Визначити рух матеріальної точки, що виходить з початку координат з початковою скорістю v_0, напрямленою вертикально, коли прискорення має стале значення k і сталий напрям, що становить кут у 30° з площиною горизонту.

8. Знайти рівняння кривої, кутовий коефіцієнт якої дорівнює $2-x$, коли відомо, що вона проходить через точку (1, 0).

9. Знайти криву, яка проходить через точку (0, 1), якщо її кутовий коефіцієнт в кожній точці числово дорівнює ординаті точки.

10. На деякій кривій

$$\frac{dy}{dx}=2x+3.$$

Знайти нижчу точку кривої, коли відомо, що крива проходить через точку 1, 2).

11. На деякій кривій

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x-1.$$

Знайти рівняння кривої, коли відомо, що вона проходить через точку (— 1, 1) і має в цій точці кутовий коефіцієнт, який дорівнює 2.

12. На деякій кривій

$$\frac{dx^2}{dy^2}=2-3x.$$

Знайти різницю ординат точок кривої, які відповідають значенням абсциси $x=3$ і $x=4$, коли відомо, що при $x=0$ кутовий коефіцієнт кривої дорівнює —1.

13. Тиск повітря p і висота точки над рівнем моря h зв'язані рівнянням

$$\frac{dp}{dh}=-kp,$$

де k є стала. Показати, що $p=p_0\,e^{-kh}$, де p_0 є тиск на рівні моря.

14. Радій розпадається із скорістю, пропорціональною наявній його кількості. Якщо половина початкової його кількості вивітрюється за 1800 років, то який процент вивітрюється за 100 років?

15. Якщо бактерії розмножуються при наявності необмеженої кількості їжі, то число їх наростає із скорістю, яка в кожний момент пропорціональна наявному числу бактерій. Виразити це число в функції часу.

16. Тростниковий цукор розкладається на складові його речовини при наявності кислот. Скорість, з якою йде цей процес, пропорціональна масі нерозкладеного цукру x. Показати, що $x=ce^{-kt}$. Що тут означає стала c?

17. Скорість, з якою вода витікає з невеликого отвору на дні посудини, пропорціональна кореневі квадратному з висоти води в посудині. Якщо половина води витікає з циліндричної посудини за 5 хвилин, то за який час витече вся вода?

18. Розв'язати попередню задачу, якщо циліндрична посудина заміняється на конічну лійку.

РОЗДІЛ ДРУГИЙ

ФОРМУЛИ І МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

7. Формули. Уміщені нижче формули являють собою розвиток формул, наведених в рубриці 3. В цих формулах u означає будьяку змінну або функцію від однієї незалежної змінної,

Приклад 7. $\int e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x\, dx.$

Припускаємо $u = \operatorname{tg} x$, за формулою XVIII дістанемо:

$$\int e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x\, dx = \int e^u\, du = e^u + C = e^{\operatorname{tg} x} + C.$$

Вправи

Проінтегрувати такі вирази:

1. $\int (\sin 2x - \cos 3x)\, dx.$

2. $\int \cos\left(\frac{2x-3}{5}\right) dx.$

3. $\int \sin(nt+\alpha)\, dt.$

4. $\int \sec^2 \frac{1}{3}\theta\, d\theta.$

5. $\int \csc \frac{\theta}{4} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{4}\, d\theta$

6. $\int \cos\theta \sin\theta\, d\theta.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 2x}.$

9. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}.$

10. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x}.$

11. $\int \left(\csc \frac{\theta}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}\right) \csc \frac{\theta}{2}\, d\theta.$

12. $\int \cos(x^2 - 1)\, x\, dx$

13. $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}\, dx.$

14. $\int (\sec x - 1)^2\, dx.$

15. $\int \frac{1-\sin x}{\cos x}\, dx.$

16. $\int (\cos\theta - \sin\theta)^2\, d\theta$

17. $\int \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\sin x}\, dx.$

18. $\int \sin^2 x \cos x\, dx.$

19. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x\, dx.$

20. $\int \sec^2 x \operatorname{tg} x\, dx.$

21. $\int \cos^5 x \sin x\, dx.$

22. $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{1 + 2\operatorname{tg} x}.$

23. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{1 - \sin 2x}.$

24. $\int \frac{\sec^2(ax)\, dx}{1 + \operatorname{tg}(ax)}.$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}.$

26. $\int \frac{2\, dx}{3x^2+4}.$

27. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-4}}$.

28. $\int \frac{dy}{12y^2+3}$.

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2+1}}$.

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2x^2-9}}$.

31. $\int \frac{dx}{3-4x^2}$.

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}}$.

33. $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

34. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$.

35. $\int \frac{x+4}{4x^2-5}\,dx$.

36. $\int \frac{5x-2}{\sqrt{3x^2-9}}\,dx$.

37. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2-\sin^2 x}}$.

38. $\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{2-\sin^2 x}}$.

39. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$.

40. $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg} x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-1}}$.

41. $\int \frac{\sec x\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{\sec^2 x+1}}$.

42. $\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}$.

43. $\int \frac{dx}{x[4-(\ln x)^2]}$.

44. $\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}}$.

45. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$.

46. $\int e^{-k^2x}\,dx$.

47. $\int (e^{ax}+e^{-ax})^2\,dx$.

48. $\int \frac{e^{3x}\,dx}{1+e^{3x}}$.

49. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$.

50. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

51. $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$.

52. $\int \frac{e^{-x}\,dx}{1-e^{-2x}}$.

53. $\int \frac{e^{ax}\,dx}{\sqrt{1-e^{2ax}}}$.

54. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

9. Інтеграли з виразом ax^3+bx+c. Інтеграли, які мають тричлен 2-го степеня ax^2+bx+c, часто можна звести до однієї з основних форм, доповнюючи двочлен ax^2+bx до повного квадрата.

Приклад 1. $\int \frac{dx}{3x^2+6x+5}$.

Доповнюючи перші два члени в знаменнику до повного квадрата, дістаємо:

$$3x^2+6x+5=3(x^2+2x+1)+2=3(x+1)^2+2.$$

Якщо тепер припустимо $u=(x+1)\sqrt{3}$, то

$$\int \frac{dx}{3x^2+6x+5}=\int \frac{d(x+1)}{3(x+1)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{u^2+2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\frac{(x+1)\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+C.$$

Приклад 2. $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$.

Коефіцієнт при x^2 має від'ємне значення, тому ми беремо останні два члени три члена в дужки, взявши мінус за дужки. Тоді

$$2-3x-x^2=2-(x^2+3x)=\frac{17}{4}-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2.$$

Тому, якщо припустимо $u=x+\frac{3}{2}$, то матимемо

$$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}=2\int \frac{du}{\sqrt{\frac{17}{4}-u^2}}=2\arcsin\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{17}}+C.$$

Приклад 3. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}}$.

Чисельник має перший степінь незалежної змінної, а тому розкладемо інтеграл на дві частини так:

$$\int \frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}}=\frac{1}{4}\int \frac{(8x+4)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}}-2\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}}.$$

У правій частині в першому інтегралі чисельник обрано так, що він дорівнює диференціалові тричлена $4x^2+4x+2$, який стоїть в знаменнику під знаком радикала. У другому члені чисельником буде dx. Коефіцієнти $\frac{1}{4}$ і -2 за знаком інтеграла добрано так, щоб зберегти рівність обох частин. Перший інтеграл має вид:

$$\frac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\sqrt{u}=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+2}\,.$$

Другий інтеграл обчислюємо, подаючи підкорінний вираз як суму квадратів

$$2\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}}=2\int\frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+1}}=\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}},$$

де $u=2x+1$. За формулою XVI, цим інтегралом є $\ln(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+2})+C$. Загальний результат дістаємо такий:

$$\int\frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}}=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+2}-$$
$$-\ln(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+1})+C.$$

Вправи

1. $\int\frac{dx}{x^2+6x+13}$.
2. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+4x-4x^2}}$.
3. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+4x+2}}$.
4. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+5x-5x^2}}$.
5. $\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{2x^2-12x+15}}$.
6. $\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.
7. $\int\frac{(2x+5)\,dx}{4x^2-4x-2}$.
8. $\int\frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt{3x^2-6x+1}}$.
9. $\int\frac{x\,dx}{3x^2+2x+2}$.
10. $\int\frac{(2x+3)\,dx}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x-1}}$.
11. $\int\frac{(3x-3)\,dx}{(x^2-2x+3)^{3/2}}$.
12. $\int\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}\,dx$.
13. $\int\frac{e^x\,dx}{2e^{2x}+3e^x-1}$.

10. Інтеграли тригонометричних функцій. Степінь тригонометричної функції, помножений на диференціал цієї функції, інтегрується за формулою I. Наприклад, коли $u=\operatorname{tg}x$, то

$$\int\operatorname{tg}^4x\cdot\sec^2x\,dx=\int u^4\,du=\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5x+C.$$

Диференціал часто можна звести до цього виду через попередні перетворення. Це з'ясовується на таких прикладах:

Приклад 1. $\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx$.

Якщо припустимо $\cos x\, dx = du$ і скористуємося співвідношенням $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то решту множників можна виразити через $\sin x$ без введення радикалів. А саме:

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cdot \cos x\, dx =$$

$$= \int \sin^4 x\,(1 - \sin^2 x)\, d(\sin x) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

Приклад 2. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x\, dx$.

Коли припустимо $\sec^2 x\, dx = du$ і скористуємося співвідношенням $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, то інші множники можна виразити через $u = \operatorname{tg} x$ без радикалів. Добудемо:

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x\, dx = \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \sec^2 x \cdot \sec^2 x\, dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^3 x\,(1 + \operatorname{tg}^2 x)\, d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x + C.$$

Приклад 3. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x\, dx$.

Коли тут припустити $\operatorname{tg} x \sec x\, dx = d \sec x = du$ і скористатися співвідношенням $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$, то інтеграл набере форми:

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \operatorname{tg} x \sec x\, dx =$$

$$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x\, d \sec x = \frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + C.$$

Приклад 4. $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$.

Це є добуток синуса одного кута на косинус другого. Цей добуток можна розгорнути в суму або різницю за формулою:

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)].$$

Виходить, у даному випадку

$$\sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2}[\sin 5x + \sin(-x)] = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x).$$

Разом з тим

$$\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

Приклад 5. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$.

Якщо замінити $\operatorname{tg}^2 x$ через $\sec^2 x - 1$, то інтеграл набере виду:

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \int \operatorname{tg}^3 x\,(\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \int \operatorname{tg}^3 x\,dx.$$

Інтегрування таким способом зводиться до обчислення простішого інтеграла $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$. Так само

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \operatorname{tg} x\,(\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x,$$

а тому остаточно

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln\cos x + C.$$

11. Парні степені синуса і косинуса. Інтеграли виду

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

де m або n є непарне число, можна обчислити методами, зазначеними у попередній рубриці; проте, якщо обидва показники m і n є числа парні, то цього методу не можна прикласти. В даному випадку обчислити все ж таки можна, користуючись формулами:

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 u &= \frac{1-\cos 2u}{2} \\ \cos^2 u &= \frac{1+\cos 2u}{2} \\ \sin u \cos u &= \frac{\sin 2u}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Приклад 1. $\int \cos^4 x\,dx$.

За наведеними вище формулами

$$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x\right) dx =$$

$$= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}(1+\cos 4x)\right] dx =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Приклад 2. $\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx$.

$$\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x\, dx = \int \frac{1}{8} (1 - \cos 4x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

12. Тригонометричні підставлення. Диференціали, що мають $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, яких не можна звести до інтегрованих форм безпосередньою заміною радикала на нову змінну, часто можна проінтегрувати за допомогою одного з таких попередніх підставлень:

Для випадку $\sqrt{a^2 - x^2}$ припускаємо $x = a \sin \theta$.

Для випадку $\sqrt{a^2 + x^2}$ припускаємо $x = a \operatorname{tg} \theta$.

Для випадку $\sqrt{x^2 - a^2}$ припускаємо $x = a \sec \theta$.

Приклад 1. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

Нехай $x = a \sin \theta$. Тоді

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta, \quad dx = a \cos \theta\, d\theta.$$

Отже,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int \cos^2 \theta\, d\theta = \frac{a^2}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + C.$$

Через те, що $x = a \sin \theta$, то

$$\theta = \arcsin \frac{x}{a}, \qquad \frac{1}{2} \sin 2\theta = \sin \theta \cos \theta = \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}.$$

Звідси остаточно

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Приклад 2. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$.

Якщо припустимо $x = a \operatorname{tg} \theta$, $x^2 + a^2 = a^2 \sec^2 \theta$, $dx = a \sec^2 \theta\, d\theta$ то дістанемо:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^3} \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta} = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 \theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2a^3} (\theta + \sin \theta \cos \theta) + C.$$

Далі

$$x = a \operatorname{tg} \theta, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}, \quad \sin\theta \cos\theta = \frac{ax}{a^2+x^2},$$

а тому

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2+x^2}\right) + C.$$

Вправи

1. $\int \sin^3 x\, dx.$

2. $\int \cos^5 x\, dx.$

3. $\int (\cos x + \sin x)^3\, dx.$

4. $\int \cos^2 x \sin^3 x\, dx.$

5. $\int \sin^4 \frac{1}{2} x \cos^5 \frac{1}{2} x\, dx.$

6. $\int \sin^5 3\theta \cos^3 3\theta\, d\theta.$

7. $\int (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \sin\theta\, d\theta.$

8. $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{1 - \sin x}.$

9. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin x}$

10. $\int \frac{\sin^5 \theta\, d\theta}{\cos\theta}.$

11. $\int \sec^4 x\, dx.$

12. $\int \csc^{10} y\, dy.$

13. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx.$

14. $\int \frac{\sec^3\theta + \operatorname{tg}^3\theta}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta}\, d\theta.$

15. $\int \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \sec^3 \frac{1}{2} x\, dx.$

16. $\int \operatorname{tg}^5 2x \sec^3 2x\, dx.$

17. $\int \operatorname{ctg}^3 x\, dx$

18. $\int \operatorname{tg}^7 x\, dx.$

19. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin^6 x}$

20. $\int \sec^2 x \csc x\, dx.$

21. $\int \sin^2 ax\, dx.$

22. $\int \cos^2 ax\, dx.$

23. $\int \cos^2 x \sin^4 x\, dx.$

24. $\int \cos^4 \frac{1}{2} x \sin^2 \frac{1}{2} x\, dx.$

25. $\int \sin^6 x\, dx.$

26. $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$

27. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

28. $\int \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$.

29. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}}$.

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$.

31. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}$.

32. $\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$.

33. $\int x^3\sqrt{x^2+a^2}\, dx$.

34. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

35. $\int \frac{(x^2-x)\,dx}{\sqrt{2-2x-4x^2}}$.

13. Інтегрування раціональних функцій. Дроби виду

$$\frac{x^3+3x}{x^2-2x-3},$$

чисельниками й знаменниками яких є поліноми, що містять тільки цілі степені незалежної змінної x, звуться *раціональними функціями* або *раціональними дробами*.

Якщо степінь чисельника не нижче степеня знаменника, то з даного дробу можна виділити цілу частину. Так,

$$\frac{x^3+3x}{x^2-2x-3}=x+2+\frac{10x+6}{x^2-2x-3}.$$

Дріб, знаменник якого має вищий степінь, ніж чисельник, можна розкласти на суму *частинних* або елементарних дробів, знаменниками яких є множники знаменника вихідного дробу. Наприклад:

$$\frac{10x+6}{x^2-2x-3}=\frac{10x+6}{(x-3)(x+1)}=\frac{9}{x-3}+\frac{1}{x+1}.$$

Самі складові дроби часто можна відшукати безпосереднім випробованням. Коли це не вдається, то слід робити, як показано в поданих нижче прикладах.

Випадок 1. Знаменник має лише різні лінійні множники, кожний у першому степені.

Приклад 1. $\int \frac{x^4+2x+6}{x^3+x^2-2x}\, dx$.

Поділяючи чисельник на знаменника, дістанемо:

$$\frac{x^4+2x+6}{x^3+x^2-2x}=x-1+\frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x}=$$

$$=x-1+\frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)}.$$

Тепер припускаємо

$$\frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}.$$

Ця рівність є тотожність: обидві частини її є лише різні форми виразу тієї самої функції. Тому, якщо звільнимо рівність від дробів, то обидві частини добутої рівності

$$3x^2+6=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)=$$
$$=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A$$

також тотожно рівні. Це означає

$$A+B+C=3,\quad A+2B-C=0,\quad -2A=6.$$

Розв'язуючи ці рівняння, добуваємо:

$$A=-3,\quad B=3,\quad C=3.$$

Навпаки, якщо A, B, C мають ці значення, то попередні рівності дійсно є тотожності. Виходить,

$$\int\frac{x^4+2x+6}{x^3+x^2-2x}\,dx=\int\left(x-1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2}x^2-x-3\ln x+3\ln(x-1)+3\ln(x+2)+C=$$
$$=\frac{1}{2}x^2-x+3\ln\frac{(x-1)(x+2)}{x}+C.$$

Сталі часто легше визначити підставленням замість x окремих значень. Так, наведене вище рівняння

$$3x^2+6=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1),$$

як було вже сказано, є тотожність, а тому справджується при всіх значеннях x. Зокрема, коли $x=0$, то воно набирає виду

$$6=-2A,$$

звідки $A=-3$. Припускаючи так само, що $x=1$ і $x=-2$, добудемо:

$$9=3B,\quad 18=6C,$$

або

$$B=3,\quad C=3.$$

Випадок II. У знаменнику є лише лінійні множники (тобто множники першого степеня), але деякі з них повторюються, входять кратно, тобто не в першому, а у вищому степені.

Приклад 2. $\int \frac{(8x^3+7)\,dx}{(x+1)(2x+1)^3}$.

Вважаємо

$$\frac{8x^3+7}{(x+1)(2x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(2x+1)^3}+\frac{C}{(2x+1)^2}+\frac{D}{2x+1}.$$

Відповідно до того, що множник $2x+1$ є в знаменнику в третьому степені, ми вводимо в праву частину дроби, які мають знаменниками як $(2x+1)^3$, так і всі нижчі степені цього двочлена. Звільняючи рівняння від знаменника і розв'язуючи добуті рівняння, знайдемо:

$$A=1,\quad B=12,\quad C=-6,\quad D=0.$$

Звідси

$$\int \frac{8x^3+7}{(x+1)^2(2x+1)^3}=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{12}{(2x+1)^3}-\frac{6}{(2x+1)^2}\right)dx=$$

$$=\ln(x+1)-\frac{3}{(2x+1)^2}+\frac{3}{2x+1}+C.$$

Випадок III. Знаменник має множники 2-го степеня, але вони не повторюються, тобто кожний лише в першому степені.

Приклад 3. $\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-1}\,dx$.

Знаменник тут складається з множників $x-1$ і x^2+x+1. Відповідно до того припускаємо

$$\frac{4x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Коли знаменником складового дробу є тричлен 2-го степеня, ми вводимо в чисельник не просту сталу, а лінійну функцію виду $Bx+C$. Звільняючи потім рівняння від знаменника і розв'язуючи умовні рівняння відносно A, B, C, знаходимо:

$$A=2,\qquad B=2,\qquad C=1.$$

Виходить

$$\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-1}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx=$$

$$=2\ln(x-1)+\ln(x^2+x+1)+C.$$

Випадок IV. Знаменник має множники другого степеня; деякі з них входять повторно.

Приклад 4. $\int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}\,dx.$

Покладаємо

$$\frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Відповідно до того, що множник x^2+1 входять до знаменника у другому степені, в складові дроби ми вводимо, як знаменники, двочлен x^2+1 один раз — у другому, а другий раз — у першому степені. Звільнивши рівняння від дробів і розв'язавши відповідні умовні рівняння відносно A, B, C, D і E, знайдемо:

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=-1,\quad D=-1,\quad E=1.$$

Отже

$$\int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}\,dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x+1}{(x^2+1)^2}-\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-$$

$$-\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)^2}-\int\frac{(x-1)\,dx}{x^2+1};$$

далі, маємо:

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x;$$

$$\int\frac{(x-1)\,dx}{x^2+1}=\int\frac{x\,dx}{x^2+1}-\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arc\,tg} x=$$

$$=\ln\sqrt{x^2+1}-\operatorname{arc\,tg} x;$$

$$\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2(x^2+1)}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2};$$

для знаходження останнього інтеграла розглянемо такий вираз:

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{x^2+1};$$

інтегруючи обидві частини, маємо:

$$\frac{x}{x^2+1}=2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}-\operatorname{arc\,tg} x;$$

отже:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x.$$

Таким чином, остаточно дістанемо:

$$\int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}\, dx = \ln x + \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x -$$

$$- \ln\sqrt{x^2+1} + \operatorname{arc\,tg} x + C =$$

$$= \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{x-1}{2(x^2+1)} + C.$$

Увага. Метод, який ми застосували для знаходження інтеграла

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

має загальніший характер. Нехай нам дано такий інтеграл:

$$\int \frac{dx}{(x^2+A)^n}.$$

Для його визначення розглянемо вираз:

$$\left(\frac{x}{(x^2+A)^{n-1}}\right)' = \frac{(x^2+A)^{n-1} - 2x^2(n-1)(x^2+A)^{n-2}}{(x^2+A)^{2n-2}} =$$

$$= \frac{x^2+A-(2n-2)x^2}{(x^2+A)^n} = \frac{(3-2n)x^2+A}{(x^2+A)^n} =$$

$$= \frac{3-2n}{(x^2+A)^{n-1}} + \frac{(2n-2)A}{(x^2+A)^n};$$

звідси, інтегруючи обидві частини, знайдемо:

$$\frac{x}{(x^2+A)^{n-1}} = (3-2n)\int \frac{dx}{(x^2+A)^{n-1}} + (2n-2)A\int \frac{dx}{(x^2+A)^n}$$

або

$$\int \frac{dx}{(x^2+A)^n} = \frac{x}{(2n-2)A(x^2+A)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)A}\int \frac{dx}{(x^2+A)^{n-1}}.$$

Це — так звана рекурентна формула; з неї ми не визначаємо безпосередньо наш інтеграл, а зводимо його визначення на визначення інтеграла того ж типу:

$$\int \frac{dx}{(x^2+A)^{n-1}},$$

але з показником $n-1$ замість n. До цього інтеграла ми застосовуємо знов ту ж саму формулу, замінивши тільки в неї n на $n-1$ і зводячи таким чином наш інтеграл на інтеграл:

$$\int \frac{dx}{(x^2+A)^{n-2}};$$

і т. д., доки не дійдемо до інтеграла;

$$\int \frac{dx}{x^2+A},$$

який ми можемо безпосередньо знайти за формулою XIV або XVII рубр. 7

14. Інтеграли, які мають $(ax+b)^{\frac{p}{q}}$. Такі інтеграли можна звести до раціонального виду підставленням $ax+b=z^q$. Якщо в підінтегральному виразі є кілька дробових степенів двочлена $ax+b$, то слід скористатися підставленням

$$ax+b=z^n,$$

де число n треба добрати так, щоб усі корені можна було добути. Це цілком з'ясовується на прикладах.

Приклад 1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Покладемо $x=z^2$. Тоді $dx=2z\,dz$ і

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int \frac{2z\,dz}{1+z}=\int\left(2-\frac{2}{1+z}\right)dz=$$

$$=2z-2\ln(1+z)+C=$$

$$=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

Приклад 2. $\int \frac{(2x-3)^{1/3}\,dx}{(2x-3)^{1/2}+1}$.

Щоб звести до раціонального виду як $(2x-3)^{1/3}$, так $(2x-3)^{1/2}$, покладаємо $2x-3=z^6$. Тоді

$$\int \frac{(2x-3)^{1/3}dx}{(x-3)^{1/2}+1}=\int \frac{3z^8\,dz}{z^2+1}=3\int\left(z^6-z^4+z^2-1+\frac{1}{z^2+1}\right)dz=$$

$$=3\left(\frac{z^7}{7}-\frac{z^5}{5}+\frac{z^3}{3}-z+\operatorname{arc\,tg} z\right)+C=$$

$$=\frac{3}{7}(2x-3)^{7/6}-\frac{3}{5}(2x-3)^{5/6}+(2x-3)^{1/2}-$$

$$-3(2x-3)^{1/6}+3\operatorname{arc\,tg}(2x-3)^{1/6}+C.$$

Вправи

1. $\int \frac{x^3+x^2}{x^2-3x+2}\,dx$

2. $\int \frac{2x+3}{x^2+x}\,dx.$

3. $\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\,dx.$

4. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx.$

5. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}.$

6. $\int \frac{16x\,dx}{(2x-1)(2x-3)(2x-5)}.$

7. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx.$

8. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)(x-1)^2}.$

9. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}.$

10. $\int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx.$

11. $\int \frac{dx}{(x^5-x)^4}.$

12. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-4)^2}.$

13. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-4)^2}.$

14. $\int \frac{x^4\,dx}{x^4-1}.$

15. $\int \frac{dx}{x^3+1}.$

16. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1}.$

17. $\int \frac{dx}{x^5-x^3+x^2-1}.$

18. $\int \frac{2x^2+x-2}{(x^2-1)^2}.$

19. $\int \frac{x^4+24x^2-8x}{(x^3-8)^2}\,dx.$

20. $\int \frac{(x+1)^{1/2}\,dx}{x}.$

21. $\int \frac{x^{1/4}-x^{1/6}+1}{x^{2/3}-x^{5/6}}\,dx.$

22. $\int x\sqrt{ax+b}\,dx.$

23. $\int \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+3}\,dx.$

24. $\int \frac{dx}{(x^{1/4}-1)(x^{1/2}+1)}.$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$.

26. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$.

27. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$.

28. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+a^2}}$.

29. $\int \sqrt{x^2-4x+5}\,dx$.

15. Інтегрування частинне. Другий загальний спосіб перетворення інтеграла (див. рубр. 8) дає нам так звана формула *частинного інтегрування*. Візьмемо відому формулу для диференціала добутка:

$$d(uv)=u\,dv+v\,du$$

вона дає:

$$u\,dv=d(uv)-v\,du; \qquad (2)$$

звідси:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Якщо $\int v\,du$ відомий, то формула (2) дає $\int u\,dv$. Засноване на цій формулі інтегрування зветься *інтегруванням частинним*.

Приклад 1. $\int \ln x\,dx$.

Нехай $u=\ln x$; тоді $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$

$$\int \ln x\,dx=\ln x\cdot x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=x(\ln x-1)+C.$$

Приклад 2. $\int x^2 \sin x\,dx$.

Припускаємо

$$u=x^2 \quad \text{і} \quad dv=\sin x\,dx.$$

Тоді

$$du=2x\,dx, \quad v=-\cos x$$

і

$$\int x^2 \sin x\,dx=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx.$$

Другий інтеграл знову інтегруємо частинами і для цього припускаємо $u=2x$, $dv=\cos x\,dx$; тоді $v=\sin x$, і ми добуваємо:

$$\int 2x\cos x\,dx=2x\sin x-\int 2\sin x\,dx=$$

$$=2x\sin x+2\cos x+C.$$

Звідси остаточно

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Інтегрувати частинами доцільно найчастіше в тих випадках, коли під знаком інтеграла стоїть функція, яка диференціюванням набагато спрощується, як, наприклад, $\ln x$, або добуток функцій різних категорій, наприклад, $x \sin x$. При інтегруванні цим методом даний диференціал треба подати як добуток двох множників $u \cdot dv$. Метод приводить до мети, якщо dv має відомий інтеграл, а множник u набагато спрощується диференціюванням.

Іноді при інтегруванні частинами з правого боку з'являється інтеграл, який являє собою кратне первісного інтеграла. Тоді ми переносимо цей інтеграл в ліву частину, і після зведення шуканий інтеграл визначається безпосередньо. Це з'ясовується на таких прикладах:

Приклад 3. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

Інтегруємо частинами, припускаючи $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$, дістаємо:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Додаючи до чисельника підінтегрального виразу a^2 і віднімаючи еквівалентний інтеграл, зведемо цю рівність до виду:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} -$$

$$- \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Переносячи інтеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ в ліву частину і поділяючи обидві частини рівності на 2, добудемо:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Приклад 4. $\int e^{ax} \cos bx\, dx$.

Інтегруємо частинами, припускаючи,

$$u = e^{ax}, \quad dv = \cos bx\, dx;$$

добудемо:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Тепер знову інтегруємо частинами; припускаємо:

$$u=e^{ax},\ dv=\sin bx\,dx;$$

тоді

$$v=-\frac{1}{b}\cos bx.$$

Разом з тим добуваємо:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-$$

$$-\frac{a}{b}\left[-\frac{e^{ax}\cos bx}{b}+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx\right]=$$

$$=e^{ax}\left(\frac{b\sin bx+a\cos bx}{b^2}\right)-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Переносячи останній інтеграл у праву частину і поділяючи обидві частини на $1+\frac{a^2}{b^2}$, добуваємо:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=e^{ax}\left(\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}\right).$$

16. Рекурентні формули. Інтегрування частинне часто зводить до того, що заданий інтеграл зводиться до інтеграла, хоч і того самого типу, але простішого. Прикладаючи цю формулу повторно кілька разів, ми часто дістаємо можливість відшукати значення шуканого інтеграла.

Щоб вияснити цей спосіб, візьмемо інтеграл:

$$\int\sin^n x\,dx;$$

де n є ціле додатне число. Інтегруємо частинами, покладаючи $u=\sin^{n-1}x$, $dv=\sin x\,dx$, добуваємо:

$$\int\sin^n x\,dx=-\sin^{n-1}x\cos x+\int(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\,dx-$$

$$-(n-1)\int\sin^n x\,dx.$$

Переносячи останній інтеграл у ліву частину рівності і поділяючи на n дістаємо:

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx.$$

Ця формула зводить інтегрування диференціала $\sin^n x\,dx$ до інтегрування диференціала того самого типу, але з показником нижчим. Повторно прикладаючи цю формулу, ми зведемо відшукання інтеграла $\int \sin^n x\,dx$ до одного з двох інтегралів $\int dx$ або $\int \sin x\,dx$, залежно від того, чи є n парне чи непарне число

Приклад. $\int \sin^6 x\,dx$.

За тількищо встановленою формулою маємо:

$$\int \sin^6 x\,dx = -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6}\int \sin^4 x\,dx =$$

$$= -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6}\left[-\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx\right] =$$

$$= -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} - \frac{5}{24}\sin^3 x \cos x - \frac{5}{16}\sin x \cos x + \frac{5}{16}x + C.$$

Вправи

1. $\int x \cos 2x\,dx$

2. $\int \ln x \cdot x\,dx$.

3. $\int \arcsin x\,dx$.

4. $\int x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

5. $\int \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})\,dx$

6. $\int \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

7. $\int \ln(\ln x)\frac{dx}{x}$

8. $\int x^2 \operatorname{arc\,sec} x\,dx$.

9. $\int e^{-x} \ln(e^x + 1)\,dx$

10. $\int x^2 e^x\,dx$.

11. $\int x^3 e^{-x}\,dx$.

12. $\int (x-1)^2 \sin 2x\,dx$.

13. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$.

14. $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$.

15. $\int e^{5x} \sin 3x \, dx$.

16. $\int e^{x} \cos x \, dx$.

17. $\int e^{-x} \sin 2x \, dx$.

18. $\int \sec^3 \theta \, d\theta$.

19. $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$.

20. Довести формулу

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx$$

скористатися нею, щоб відшукати інтеграл

$$\int \sec^5 x \, dx.$$

21. Довести формулу

$$\int (a^2 - x^2)^n \, dx = \frac{x(a^2 - x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} \int (a^2 - x^2)^{n-1} \, dx$$

і скористатися нею, щоб відшукати інтеграл

$$\int (a^2 - x^2)^{5/2} \, dx.$$

РОЗДІЛ ТРЕТІЙ

ОЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ

17. Похідна від площі. Нехай A є площа, обмежена віссю абсцис, кривою

$$y = f(x)$$

і двома ординатами, що відповідають абсцисам a і x (див. рис. 5). Ми розглядатимемо площу A, як функцію кінцевої абсциси x; дослідимо, чи ця функція безперервна і чи має вона похідну щодо x. Нехай x дістає приріст Δx; відповідний приріст площі A є

$$\Delta A = MPQN.$$

Нехай g є найбільша, а k найменша ордината нашої кривої в інтервалі від x до $x + \Delta x$. Збудуємо два прямокутники з основою Δx і з висотами g і k; площі цих прямокутників є

$$g \cdot \Delta x \quad \text{і} \quad k \cdot \Delta x.$$

Очевидно, що ΔA знаходиться між цими двома площами, тобто

$$k \cdot \Delta x < \Delta A < g \cdot \Delta x.$$

Звідси видно, що коли Δx прямує до нуля, то й ΔA теж прямує до нуля; значить, A є безперервна функція від x. Маємо, далі, з попередньої формули:

$$k<\frac{\Delta A}{\Delta x}<g.$$

Якщо Δx прямує до нуля, тобто (див. рис. 5) точка Q наближається до точки P і смуга $MNQP$ стає все вужчою, то очевидно, що k і g можуть деякий час зовсім не змінятися, але надалі вони починають змінятися, при чому k може тільки зростати, а g зменшуватись; тобто вони наближаються одно до одного; і коли точка Q зіллється з точкою P, тобто наша смуга стане просто відрізком MP, то й k і g стануть рівними цій самій ординаті $MP=y$; отже, права й ліва частини попередньої нерівності мають спільну границю y; значить, і середня частина має ту саму границю y:

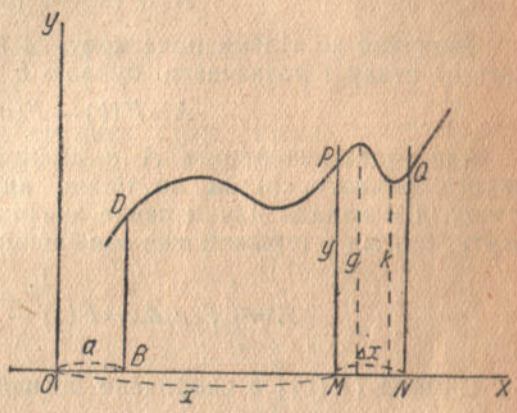

Рис. 5.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x}=\frac{dA}{dx}=y=f(x). \qquad (1)$$

А звідси із самого означення інтеграла випливає:

$$A=\int f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Отже, геометричне представлення інтеграла таке: інтеграл є площа, обмежена кривою $y=f(x)$, віссю x і двома ординатами.

18. Означені і неозначені інтеграли. Ми знаємо, що наш інтеграл містить у собі довільний сталий доданок C; тому він називається *неозначеним* інтегралом. З'ясуємо, який геометричний зміст має ця довільна стала C. Хай ми якимсь способом обчислили наш неозначений інтеграл:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

де $F(x)$ — відома функція, а C — довільна стала. Тоді значить:

$$A=F(x)+C.$$

Але ж A є *певна* площа $BMPD$ — тут наче нема нічого невизначеного або довільного. Справа в тому, що початкова абсциса a по суті є довільна. Значить, ми можемо визначити C залежно від a. Саме, коли точка M зливається з B, тобто $x=a$, тоді наша площа дорівнює нулеві:

$$F(a)+C=0$$

звідси

$$C=-F(a);$$

$$A=F(x)-F(a).$$

Звичайно не тільки початкову, а й кінцеву абсцису вважають за сталу і позначають буквою b замість x; тоді маємо:

$$A=F(b)-F(a).$$

Але тоді наша площа A є цілком визначена, вона не має нічого змінного, бо ми не тільки визначили нашу „довільну" сталу, а й надали для x певне значення b. В такому разі кажуть, що ми одержали вже означений інтеграл; позначають саме:

$$A=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=\Big[F(x)\Big]_a^b. \qquad (3)$$

Символ $\Big[F(x)\Big]_a^b$ є скорочене позначення для різниці $F(b)-$ $-F(a)$.

Числа a і b називаються *границями* означеного інтеграла — *нижня*, b — *верхня* границя.

19. Співвідношення між означеним інтегралом і неозначеним. Отже, означений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ виражає площу, обмежену кривою $y=f(x)$, віссю абсцис і ординатами $x=a$ и $x=b$[1]. Якщо

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

то, за рівністю (3), ця площа дорівнює $F(b)-F(a)$. Звідси робимо висновок, що

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a), \qquad (4)$$

тобто, щоб *знайти значення означеного інтеграла*

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

[1] Тобто ординатами, що відповідають абсцисам $x=a$ і $x=b$.

ми підставляємо в неозначений інтеграл замість x спочатку b, а потім a і з першого результата віднімаємо другий.

Приклад. Знайти значення означеного інтеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Шукане значення є:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

20. Означений інтеграл як границя суми. Нехай $y=f(x)$ є безперервна функція в інтервалі від $x=a$ до $x=b$, включаючи

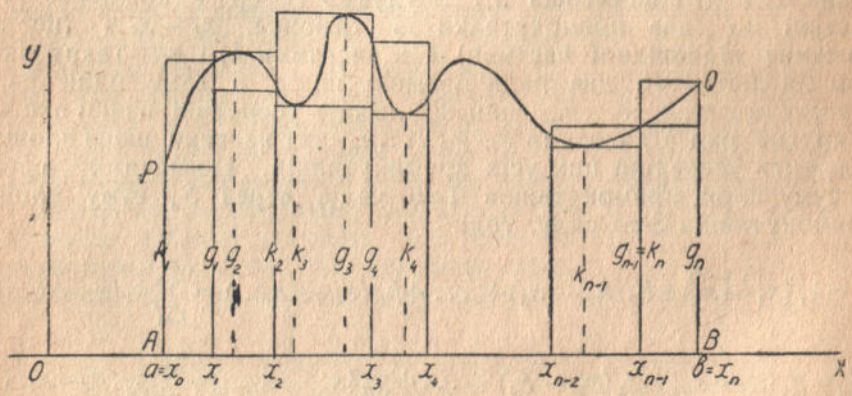

Рис. 6.

і його кінці (тобто в *замкненому* інтервалі (a, b)). Нам треба обчислити площу $ABQP$ (рис. 6), що обмежена віссю x, кривою $y=f(x)$ і двома її ординатами AP і BQ. Ми знаємо, що ця площа I дається означеним інтегралом:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Але досі ми знаємо тільки. що цей означений інтеграл можна обчислити, обчисливши наперед неозначений інтеграл:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

тобто, знаючи функцію $F(x)$. З другого боку, ми бачили, що функція $F(x)$ знаходиться більш-менш штучно, та й те — в не-

великій кількості випадків; є багато таких функцій $f(x)$, що ми їх не можемо проінтегрувати, тобто знайти відповідні їм „неозначені інтеграли“ $F(x)$. Як тоді обчислити нашу площу? В усякому разі ми можемо обчислити її наближено й досить простим (принаймні з теоретичного боку) способом; саме, ми можемо знайти дві такі площі S і s, що наша площа I лежить між ними, так що S і s — її наближені значення, s — з недостачею, S — з надвишкою. Для цього поділимо наш інтервал (a, b) на кілька (скажемо, на n) частин точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; для одноманітності позначимо ще: $x_0=a$, $x_n=b$. Довжини цих частин: $x_1-a=x_1-x_0$, x_2-x_1, x_3-x_2, ..., $b-x_{n-1}=x_n-x_{n-1}$ взагалі можуть бути якими завгодно, — необов'язково рівними одна одній, але практично зручніше ділити інтервал на рівні частини.

В кожній з цих частин, скажемо, в i-ій, тобто в інтервалі (x_{i-1}, x_i), знайдемо найбільшу й найменшу ординати; найбільша нехай буде g_i і найменша k_i. Збудуємо тепер у кожній (i-ій) частині по два прямокутники з основою x_i-x_{i-1} (це є довжина відповідної частини) і з висотами k_i і g_i. Таким чином ми дістанемо два ряди прямокутників, а саме один ряд з висотами $k_1, k_2, \ldots, k_n$; вони всі лежать усередині нашої площі I; другий ряд з висотами $g_1, g_2, \ldots, g_n$; тут навпаки наша площа I лежить усередині цих усіх прямокутників. Позначимо через s_n суму площ прямокутників 1-го ряду; через S_n суму площ прямокутників 2-го ряду, тоді:

$$s_n=k_1(x_1-x_0)+k_2(x_2-x_1)+\ldots+k_n(x_n-x_{n-1})=\sum_{i=1}^{n}k_i(x_i-x_{i-1});$$

$$S_n=g_1(x-x_0)+g_2(x_2-x_1)+\ldots+g_n(x_n-x_{n-1})=\sum_{i=1}^{n}g_i(x_i-x_{i-1}),$$

при чому, очевидно:

$$s_n<I<S_n.$$

Отже ми можемо вважати s_n і S_n за наближені значення для I, s_n — з недостачею, S_n — з надвишкою; з рисунка легко бачити, що при достатньо великій кількості частин n і при достатньо малих довжинах цих частин s_n і S_n дійсно будуть достатньо точними наближеннями для I. Доведемо це точніше. А саме доведемо ось що:

Теорема. Якщо кількість n частин, на які ми поділили наш інтервал (a, b) безмежно зростає, а довжина *кожної* частини x_i-x_{i-1} прямує до нуля, то суми s_n і S_n мають спільну границю, яка і є наша площа I.

Доведення. Будемо вставляти поміж точками $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ нові точки поділу і так збільшувати кількість наших частин; доведемо насамперед, що від цього вставлення сума s_n може

тільки зростати, а сума S_n може тільки зменшуватись. Нехай ми поділили нашу i-ту частину (x_{i-1}, x_i) ще на кілька, скажемо — на чотири частини точками ξ_1, ξ_2, ξ_3 (див. рис. 7). Тоді замість площі меншого прямокутника $k_i(x_i - x_{i-1})$ дістанемо таку суму:

$$\varkappa_1(\xi_1 - x_{i-1}) + \varkappa_2(\xi_2 - \xi_1) + \varkappa_3(\xi_3 - \xi_2) + \varkappa_4(x_i - \xi_3),$$

яка є більша за $k_i(x_i - x_{i-1})$, бо тут (див. рис. 7): $\varkappa_1 = k_i$, тоді як $\varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ більші за k_i. Аналогічно, замість площі $g_i(x_i - x_{i-1})$ добудемо таку суму:

$$\gamma_1(\xi_1 - x_{i-1}) + \gamma_2(\xi_2 - \xi_1) +$$
$$+ \gamma_3(\xi_3 - \xi_2) + \gamma_4(x_i - \xi_3),$$

яка менша за $g_i(x - x_{i-1})$, бо тут $\gamma_4 = g_i$, тоді як $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ менші за g_i. Отже кожний доданок в s_n заміняється кількома доданками, і сума їх більша, ніж цей один доданок; в S_n — навпаки: кожний доданок заміняється кількома, але з меншою сумою, ніж цей один доданок. Значить, із зростанням n, s_n збільшується, а S_n зменшується; а через те, що завжди $s_n < S_n$, то ці дві суми наближаються одна до одної.

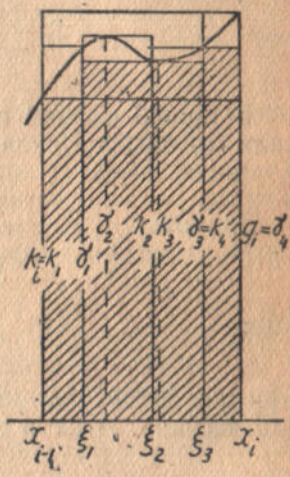

Рис. 7.

Звідси ще не випливає, що ці дві суми мають спільну границю. Це нам ще залишається довести. Ми доведемо саме, що різниця $S_n - s_n$ прямує до нуля. Маємо:

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} k_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (g_i - k_i)(x_i - x_{i-1}).$$

$g_i - k_i$ є різниця між найбільшим і найменшим значенням функції $f(x)$ в інтервалі (x_{i-1}, x_i); це так зване *коливання* функції в цьому інтервалі. Але через те, що функція $f(x)$ *безперервна*, її коливання в *достатньо малому* інтервалі (x_{i-1}, x_i) буде яке завгодно мале. Ми можемо наперед узяти яке завгодно мале число $\varepsilon > 0$ та ще поділити його на довжину $b - a$ всього нашого інтервала (це ділення ми робимо для зручності) і після того взяти *всі* наші інтервали $x_i - x_{i-1}$ такими малими (а, значить, кількість їх n такою великою), що в *кожному* з цих інтервалів $(x_{i-1} - x_i)$ буде:

$$g_i - k_i < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$ [1]

[1] Власне кажучи, це вимагає окремого доводу; це так звана теорема про *рівномірну безперервність* функції в замкненому інтервалі. Ми випускаємо довід цієї досить складної теореми.

Тепер маємо:

$$S_n - s_n < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1});$$

через те, що $\frac{\varepsilon}{b-a}$ одно і те ж в кожному доданку, ми можемо цей множник узяти за дужки або, іншими словами, за знак суми:

$$S_n - s_n < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).$$

В правій частині є сума довжини усіх частин нашого інтервала (a, b); вона складає довжину всього інтервала (a, b), тобто дорівнює $b-a$.

Значить:

$$S_n - s_n < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)$$

або:

$$S_n - s_n < \varepsilon$$

при достатньо великому n і при достатньо малій довжині кожної частини. А це й значить, що:

$$\lim_{n \to \infty} (S_n - s_n) = 0.$$

Через те, що s_n і S_n обмежені, при чому s_n ввесь час зростає, а S_n ввесь час зменшується, ми висновуємо, що вони мають границі; а через те, що їх різниця прямує до нуля, ми висновуємо, що вони мають *спільну* границю. Ця границя і є площа I, бо вона стала (не залежить від поділу нашого інтервала) і завжди лежить між s_n і S_n. Отже:

$$\lim s_n = \lim S_n = I.$$

Ми знаємо, що коли ми можемо проінтегрувати нашу функцію $f(x)$, то I є означений інтеграл від цієї функції в межах від a до b. А коли ми не можемо знайти для функції $f(x)$ неозначеного інтеграла, ми *означаємо* його тепер, як спільну границю сум s_n і S_n, і пишемо:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} k_i (x_i - x_{i-1}) = \lim \sum_{i=1}^{n} g_i (x_i - x_{i-1}).$$

Тут треба розуміти границю цих сум, якщо кількість n їх доданків безмежно зростає, а кожний доданок прямує до нуля (бо кожна різниця $x_i - x_{i-1}$ прямує до нуля).

На підставі цього нового означення інтеграла доведену теорему можна висловити так: *кожна безперервна функція в (замкненому) інтервалі* (a, b) *має в цілому інтервалі означений інтеграл.*

Увага 1. Ми маємо тут істотну різницю між похідними й інтегралами: далеко не кожна безперервна функція має похідну (або диференціал), тоді як інтеграл (означений) має *кожна* безперервна функція. Справа тільки в тому, що не завжди ми можемо цей інтеграл „знайти", тобто виразити його через відомі нам елементарні функції, в більшості випадків доводиться кожний означений інтеграл окремо вивчати, як нову (так звану „вищу трансцендентну") функцію.

Увага 2. Для визначення означеного інтеграла, як границі сум s_n і S_n, нам треба обрати якийсь певний спосіб поділу нашого інтервала (a, b) і збільшення кількості точок поділу. Можна довести, що значення означеного інтеграла не залежить від способу поділу інтервала. Геометрично це цілком ясно, бо як би ми не ділили наш інтервал, ми кожний раз наближаємось до однієї і тієї ж площі I.

21. Наближене обчислення інтегралів. Одночасно ми добули й спосіб наближеного обчислення означених інтегралів: за наближені значення можна взяти суми s_n і S_n; різниця $S_n - s_n$ є границя похибки, яку ми робимо, беручи s_n або S_n замість I. Але тут виникає практична трудність відшукання найбільшого й найменшого значень g_i, k_i нашої функції $f(x)$ в кожному інтервалі (x_{i-1}, x_i). Щоб уникнути цієї трудності, беруть замість s_n і S_n таку третю суму:

$$T_n = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1});$$

тобто в кожній частині (x_{i-1}, x_i) замість k_i або g_i беруть початкову ординату $y_{i-1} = f(x_{i-1})$. Отже T_n є сума площ прямокутників, що їх зображено на рис. 8. Коли порівняти рис. 8 із рис. 6, то ми бачимо, що деякі з прямокутників на рис. 8 дорівнюють меншим відповідним прямокутникам на рис. 6, деякі—більшим, а деякі—лежать між меншими й більшими. Значить, сума T_n лежить між сумами s_n і S_n або в крайньому разі дорівнює одній з цих сум:

$$s_n \leqq T_n \leqq S_n.$$

Значить, і T_n прямує до тієї самої границі, що й s_n, і S_n при безмежному зростанні n і при прямуванні до нуля довжини кожної частини $x_i - x_{i-1}$.

Отже, замість s_n або S_n ми можемо взяти суму T_n, як наближене значення інтеграла I. Тільки тут ми в загальному випадку не знаємо заздалегідь, чи з недостачею, чи з надвишкою буде це наближене значення T_n.

Як уже було зазначено (див. рубр. 20) на практиці інтервал (a, b) ділять на *рівні* частини; позначимо через Δx довжину кожної частини, тобто:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = \Delta x;$$

тоді ми можемо скорочено написати:

$$T_n = \sum_1^n f(x)\,\Delta x,$$

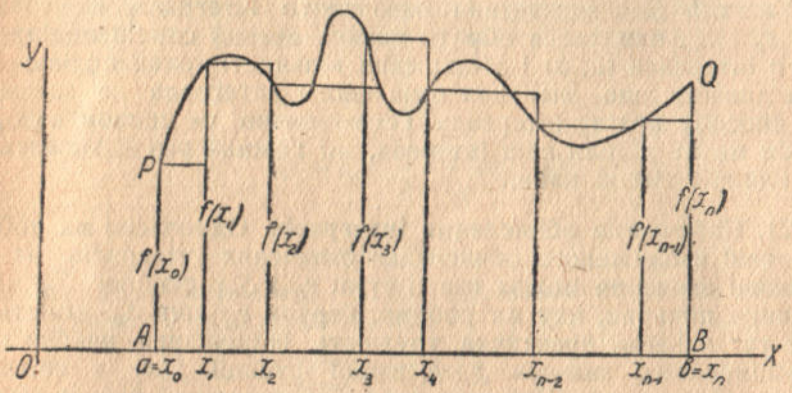

Рис. 8.

де під $f(x)$ ми розуміємо значення $f(x_0), f(x_1), \ldots$, коли n зростає безмежно, то Δx прямує до нуля, і ряд значень $x_0, x_1, x_2, \ldots$ стає все частішим. Отже можна вважати, що в границі при $\Delta x \to 0$ ці значення заповнюватимуть увесь відрізок (a, b); тоді ми маємо право писати просто $f(x)$; замість Δx пишемо dx, розглядаючи безконечно малий приріст Δx, як „диференціал" dx; нарешті, замість знака суми Σ пишемо знак інтеграла $\int$, який є не що інше, як стилізована латинська літера S, що нам нагадує про суму; приписуємо ще границі a і b. Так виправдується звичайне позначення означеного інтеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ми бачимо також, яку істотну вагу має цей,—на перший погляд,—зайвий множник dx.

Увага 1. Іноді (особливо в прикладаннях) скорочено кажуть: „інтеграл є сума безконечно великої кількості безконечно ма-

лих доданків". Цей вираз є не зовсім коректний: інтеграл є тільки *границя* суми, де кількість доданків безмежно *зростає*, а кожний доданок *прямує* до нуля. Це означення, як ми бачимо, *динамічне*.

Увага 2. Спосіб наближеного обчислення означених інтегралів через суми T_n називається способом *прямокутників*, бо нашу площу I ми тут заміняємо сумою площ ряду прямокутників.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_1^2 x^2\,dx$ наближено, через суму $\sum_1^2 x^2\,\Delta x$, якщо $\Delta x=\frac{1}{4}$.

Інтервал між 1 і 2 поділений на частини, кожна з яких має довжину $\Delta x=\frac{1}{4}$. Точки ділення є $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$.

Отже

$$\int_1^2 x^2\,dx \approx \sum_1^2 x^2\,\Delta x = 1^2\Delta x+\left(\frac{5}{4}\right)^2\Delta x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\Delta x+\left(\frac{7}{4}\right)^2\Delta x=$$

$$=\frac{63}{8}\,\Delta x=\frac{63}{8}\cdot\frac{1}{4}=1{,}97.$$

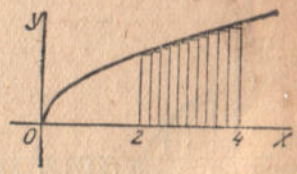

Рис. 9.

Приклад 2. Знайти наближене значення площі, обмеженої віссю x-ів, кривою $y=\sqrt{x}$ і ординатами $x=2$ і $x=4$.

З рисунка 9 виходить, що досить вірне наближення можна добути, якщо поділити інтервал від $x=2$ до $x=4$ на 10 частин, кожна завдовжки 0,2. Добута таким чином площа дорівнює:

$$\sum_2^4 \sqrt{x}\,\Delta x=(\sqrt{2}+\sqrt{2{,}2}+\sqrt{2{,}4}+\ldots+\sqrt{3{,}8})(0{,}2)=3{,}39.$$

Площа ж, обчислена з точністю до 2-го десяткового знака (за методом неозначених інтегралів, зазначеним в рубр. 18), становить 3,45.

22. Випадок, коли підінтегральна функція змінює знак. Коли крива $y=f(x)$ лежить вище осі абсцис і $a<b$, то інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ є границя вписаних у криву прямокутників; ця границя є площа, обмежена кривою, віссю абсцис і з боків ординатами, які відповідають абсцисам $x=a$ і $x=b$.

В точці, що міститься під віссю абсцис, ордината $f(x)$ має від'ємне значення, і тому добуток $f(x)\Delta x$ є площа відповідного прямокутника, взята із знаком мінус. Отже (рис. 10) $\sum_a^b f(x)\Delta x$ дорівнює сумі всіх прямокутників які містяться над віссю абсцис без суми прямокутників, що містяться під нею. В границі $\int_a^b f(x)dx =$ =(площа над віссю абсцис)—(площа під цією віссю).

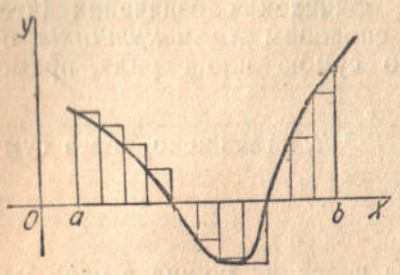

Рис. 10.

Якщо, проте, $a > b$, як на рис. 11, то x зменшується, коли ми переходимо від a до b, Δx має від'ємне значення, і попередня рівність заміняється такою: $\int_a^b f(x)\,dx =$(площа, що лежить нижче осі x-ів)—(площа, яка лежить вище осі x-ів).

Приклад 1. Показати графічно, що $\int_0^{2\pi} \sin^3 x\,dx = 0$. Крива $y = \sin^3 x$ зображена на рис. 12. В інтервалі від $x=0$ до $x=2\pi$ площі,

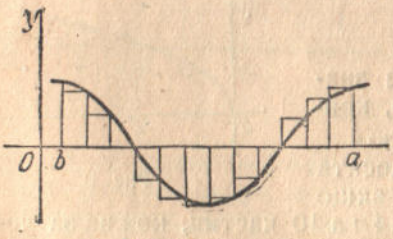

Рис. 11.

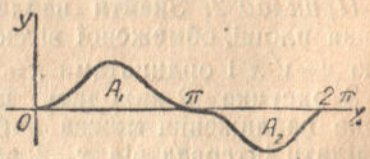

Рис. 12.

розміщені над віссю абсцис і під нею, рівні між собою. Виходить,

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x\,dx = A_1 - A_2 = 0.$$

Приклад 2. Показати, що

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx = 2\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

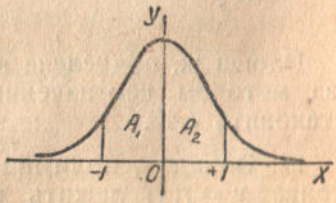

Рис. 13.

Крива $y = e^{-x^2}$ зображена на рис. 13. Вона міститься симетрично відносно осі y-ів. Площа, яко міститься між $x = -1$

і $x=0$, дорівнює, виходить, площі, що є між $x=0$ і $x=1$. Отже

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx = A_1 + A_2 = 2A_2 = 2\int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx.$$

Вправи

Знайти значення таких сум:

1. $\sum_{0}^{2} x\,\Delta x, \qquad \Delta x = \frac{1}{3}.$

2. $\sum_{1}^{10} \frac{\Delta x}{x}, \qquad \Delta x = 1.$

3. $\sum_{-2}^{2} \sqrt[3]{x}\,\Delta x, \quad \Delta x = \frac{1}{2}.$

Наближені значення яких інтегралів дають ці суми?

4. Показати, що наближено

$$\sum_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin x\,\Delta x = 1 - \cos\frac{\pi}{6}.$$

Скористатися для цього таблицею натуральних значень синуса і припустити $\Delta x = \frac{\pi}{60}$.

5. Обчислити π наближено за формулою

$$\pi = 4\sum_{0}^{1} \frac{\Delta x}{1+x^2}, \qquad \Delta x = 0{,}1.$$

Зображаючи інтеграли, як площі, довести графічно такі рівності:

6. $\int_{0}^{\pi} \sin 2x\,dx = 0.$

7. $\int_{0}^{2\pi} \cos^7 x\,dx = 0.$

8. $\int_{0}^{\pi} \sin^5 x\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx.$

9. $\int\limits_{-a}^{+a} \frac{x\,dx}{1+x^4}=0.$

10. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x+x^4}=2\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^4}.$

23. Основні властивості означених інтегралів. Означений інтеграл має такі прості властивості:

I. $\int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx=-\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$

II. $\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx+\int\limits_{b}^{c} f(x)\,dx.$

III. $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx=(b-a)\,f(x_1), \quad a \leqq x_1 \leqq b.$

Перша властивість обумовлюється тим, що Δx має додатне значення, коли x змінюється від a до b, і від'ємне, коли x змінюється від b до a. Тому обидва інтеграли виражають ту саму площу, але з різними знаками.

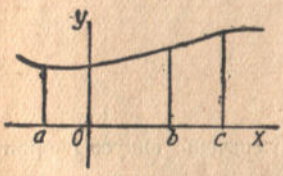

Рис. 14.

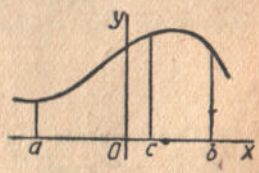

Рис. 15.

Друга властивість виражає, що площа від a до c дорівнює сумі площ, узятих від a до b і від b до c. Це буває не тільки тоді, коли b міститься між a і c (як на рис. 14), а й тоді, коли точка b лежить за c (як на рис. 15). В останньому випадку інтеграл $\int\limits_{b}^{c} f(x)dx$ має від'ємне значення, і сума

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx+\int\limits_{b}^{c} f(x)\,dx$$

є різниця обох площ.

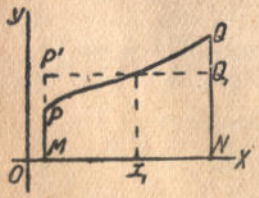

Рис. 16.

Третя властивість виражає, що площа $PQMN$ (рис. 16) дорівнює площі певного прямокутника $P'Q'NM$, висота якого є між PM і QN (точніше між найбільшою і найменшою ординатою).

24. Нескінченні границі означеного інтеграла. Раніше ми завжди припускали, що границі означеного інтеграла мають скінченні значення. Якщо інтеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

наближається до означеної границі, коли b необмежено зростає, то ця границя розглядається як значення інтеграла:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Це означає, за означенням, нами встановлюваним, що

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \qquad 5)$$

Якщо неозначений інтеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

наближається до означеної границі, коли x необмежено зростає, то

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b=\infty}[F(b) - F(a)] = F(\infty) - F(a).$$

Значення означеного інтеграла в даному випадку добувають за тим самим правилом (4), яке прикладається у випадку скінченних границь.

Приклад 1.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Неозначений інтеграл у даному випадку є

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Коли x прямує до ∞, $\operatorname{arc\,tg} x$ прямує до $\frac{\pi}{2}$.

Виходить, у даному випадку означений інтеграл

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

існує, а саме:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\operatorname{arc\,tg} x\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 2. $\int_0^\infty \cos x\,dx.$

Неозначеним інтегралом тут є функція $\sin x$, яка не прямує ні до якої границі, коли x необмежено зростає. Тому

$$\int_0^\infty \cos x\,dx$$

не має певного значення; кажуть, що означений інтеграл в даному випадку *не існує*.

25. Нескінченні значення підінтегральної функції. Якщо функція $f(x)$ обертається в нескінченність при $x=b$, то інтеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

визначається як границя:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z=b} \int_a^z f(x)\,dx,$$

де z міститься між a і b.

Так само, якщо $f(a)$ є нескінченність, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z=a} \int_z^b f(x)\,dx,$$

де z міститься між a і b.

Коли функція обертається в нескінченність у певній точці c, що є між a і b, то інтеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

визначається рівнянням

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (6)$$

Приклад 1. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

При $x=0$ $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ обертається в нескінченність. Відповідно до цього ми поділяємо інтеграл на дві частини:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0.$$

Приклад 2. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

Якщо скористуємося рівнянням (4), то добудемо:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2.$$

Інтеграл, очевидно, мусить мати додатне значення, а тому результат —2 змісту не має. Це обумовлюється тим, що підінтегральна функція $\frac{1}{x^2}$ при $x=0$ обертається в нескінченність. Розчленяючи інтеграл на дві частини, дістаємо:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \infty + \infty = \infty.$$

26. Заміна змінної. Якщо при обчисленні інтеграла змінено змінні, то границі інтеграла треба замінити відповідними значеннями нової змінної. Щоб це побачити, припустимо, що неозначений інтеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

переходить у

$$\int \varphi(t)\,dt = \Phi(t),$$

коли незалежна змінна x виражається через другу незалежну змінну t. Якщо t_0 і t_1 є значення змінної t, відповідні значення x_0 і x_1 змінної x, то

$$F(x_0)=\Phi(t_0), \qquad F(x_1)=\Phi(t_1),$$

і так само

$$F(x_1)-F(x_0)=\Phi(t_1)-\Phi(t_0),$$

тобто

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t)\,dt.$$

Якщо тому самому значенню змінної x відповідає кілька значень змінної t, то треба добре пересвідчитися в тому, що x дійсно змінюється від x_0 до x_1, коли t змінюється від t_0 до t_1 і що для всіх проміжних значень

$$f(x)\,dx=\varphi(t)\,dt.$$

Приклад. $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

Припускаючи $x=a\sin\theta$, знаходимо:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int \cos^2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right].$$

При $x=a$, $\sin\theta=1$ і $\theta=\frac{\pi}{2}$. При $x=-a$, $\sin\theta=-1$ і $\theta=-\frac{\pi}{2}$.

Виходить:

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Тому що $\sin\frac{3}{2}\pi=-1$, то може здатися, що ми мусимо взяти за нижню границю $\frac{3}{2}\pi$. Ми тоді дістали б

$$a^2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = -\frac{\pi a^2}{2}.$$

Але це невірно; справді, коли θ проходить через інтервал від $\frac{3}{2}\pi$ до $\frac{1}{2}\pi$, то θ спадає в межах 3-го і 2-го квадрантів; тому $\cos\theta$ і $d\theta$ мають від'ємні значення, а через те

$$\sqrt{a^2-x^2}\,dx=(-a\cos\theta)a\cos\theta\,d\theta,$$

а не $a^2\cos\theta\,d\theta$, як це було взято вище.

Вправи

Знайти значення таких означених інтегралів:

1. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx.$

2. $\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

3. $\int\limits_{-2}^{2} (x-1)^3\,dx.$

4. $\int\limits_{-5}^{9} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+144}}.$

5. $\int\limits_{-\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin^3\theta\,d\theta.$

6. $\int\limits_{2}^{3} x\ln x\,dx.$

7. $\int\limits^{4} \frac{dx}{x^2-3x+2}.$

8. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx.$

9. $\int\limits_{0}^{a\ln 2} \left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx.$

10. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

11. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x\,dx.$

12. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

13. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-k^2x^2}x\,dx.$

14. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}.$

Обчислити значення таких означених інтегралів через вказану в кожному випадку заміну змінних:

15. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2},$ $\qquad x=\operatorname{tg}\theta.$

16. $\int\limits_{1}^{5} \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx,$ $\qquad x-1=z^2.$

17. $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}}$, $\qquad z = \frac{1}{x}$

18. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{6 - 5\sin\theta + \sin^2\theta}$, $\qquad \sin\theta = z$.

19. $\int\limits_{0}^{a} \frac{x^3\, dx}{a^2 + x^2}$, $\qquad a^2 + x^2 = z^2$

РОЗДІЛ ЧЕТВЕРТИЙ

ПРОСТІ ПЛОЩІ І ОБ'ЄМИ

27. Площа, обмежена плоскою кривою. Прямокутні координати. Площа, обмежена кривою $y = f(x)$, віссю x-ів і двома орди-

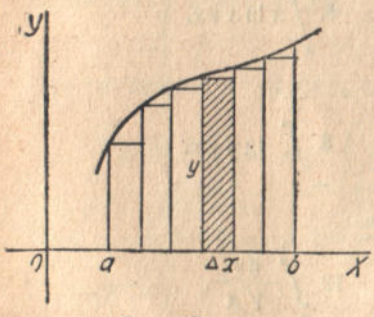

Рис. 17.

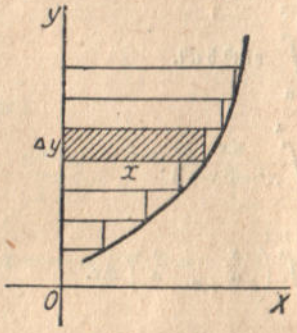

Рис. 18.

натами $x = a$, $x = b$ [1], є границя, до якої наближається сума прямокутників $y\,\Delta x$. Це означає

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} y\,\Delta x = \int\limits_{a}^{b} y\, dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx. \qquad (1)$$

Так само площа, обмежена якоюсь кривою, абсцисами $y = a$ і $y = b$ і віссю y-ів, є

$$A = \lim_{\Delta y \to 0} \sum x\,\Delta y = \int\limits_{a}^{b} x\, dy. \qquad (2)$$

---

[1] Див. увагу 2 на стор. 49

Приклад 1. Обчислити площу, обмежену кривою

$$x=2+y-y^2$$

і віссю y-ів.

Крива (рис. 19) перетинає вісь y-ів у точках $y=-1$ і $y=2$ Шукана площа тому дорівнює

$$A=\int_{-1}^{2} x\,dy=\int_{-1}^{2}(2+y-y^2)\,dy=$$

$$=2y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2}=4\frac{1}{2}.$$

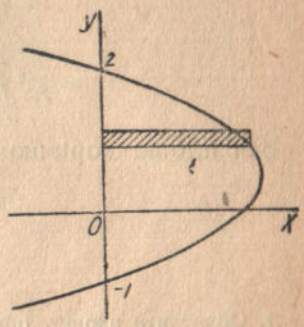

Рис. 19.

Приклад 2. Знайти площу, що міститься між колом $x^2+y^2=16$ і параболою $x^2=6y$.

Розв'язуючи разом рівняння обох кривих, ми знайдемо, що парабола і круг перетинаються в точках $P(-2\sqrt{3};\ 2)$ і $Q(2\sqrt{3};\ 2)$. Площа $MPQN$ (рис. 20), яка лежить під колом, дорівнює

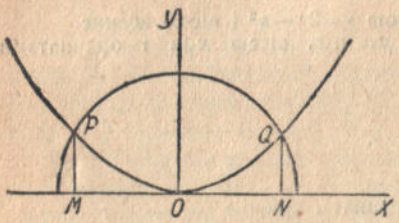

Рис. 20.

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} y\,dx=\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}\,dx=$$

$$=\frac{16}{3}\pi+4\sqrt{3}.$$

Площа $MPO+OQN$, яка лежить під параболою, дорівнює

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\frac{x^2}{6}\,dx=\frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

Площа, яка міститься між цими двома кривими, є різниця

$$MPQN-MPO-OQN=$$

$$=\frac{16}{3}\pi+\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

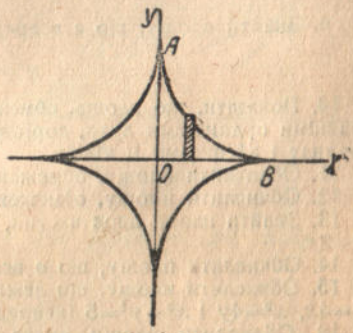

Рис. 21.

Приклад 3. Знайти площу, що міститься всередині гіпоциклоїди:

$$x=a\sin^3\varphi,\quad y=a\cos^3\varphi.$$

Площа OAB (рис. 21), що є в першому квадранті, дорівнює:

$$\int_0^a y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3\varphi \cdot 3a\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{3}{32}\pi a^2.$$

Вся площа дорівнює

$$4\cdot OAB = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

Вправи

1. Обчислити площу, обмежену прямою $2y-3x=5$, віссю x-ів і ординатами $x=1$ і $x=3$.

2. Обчислити площу, обмежену параболою $y=3x^2$, віссю y-ів і абсцисами $y=2$, $y=4$.

3. Обчислити площу, обмежену кривою $y^3=x$, прямою $y=-2$ і ординатами $x=0$, $x=3$.

4. Обчислити площу, обмежену параболою $y=2x-x^2$ і віссю абсцис.

5. Обчислити площу, обмежену кривою $y=\ln x$, віссю x-ів і ординатами $x=2$, $x=8$.

6. Знайти площу, обмежену еліпсом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

7. Знайти площу, обмежену осями координат і кривою

$$x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}.$$

8. Знайти площу, що є всередині завитка кривої

$$x^2=y^2(4-y^2).$$

9. Знайти площу, що є всередині завитка кривої

$$y^2=(x-1)(x-2)^2.$$

10. Показати, що площа, обмежена дугою гіперболи $xy=k^2$, віссю абсцис і крайніми ординатами дуги, дорівнює площі, обмеженій тією самою дугою, віссю ординат і абсцисами її кінців.

11. Обчислити площу, обмежену кривими $y^2=4ax$, $x^2=4ay$.

12. Обчислити площу, обмежену параболою $y=2x-x^2$ і прямою $y=-x$.

13. Знайти площі двох частин, на які коло $x^2+y^2=8$ поділене параболою $y^2=2x$.

14. Обчислити площу, що є всередині параболи $x^2=4y+4$ і кола $x^2+y^2=16$.

15. Обчислити площу, що лежить в першому квадранті і обмежену кривими $y^2=4x$, $x^2=4y$ і $x^2+y^2=5$ (всередині круга).

16. Обчислити площу круга, користуючись параметричними рівняннями кола, що обмежує його:

$$x=a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta.$$

17. Обчислити площу, обмежену віссю x-ів і однією віткою циклоїди

$$x=a(\varphi-\sin\varphi),\quad y=a(1-\cos\varphi).$$

18. Обчислити площу, що є всередині кардіоїди

$$x=a\cos\theta(1-\cos\theta),\quad y=a\sin\theta(1-\cos\theta).$$

19. Обчислити площу, обмежену віткою трохоїди

$$x=a\varphi-b\sin\varphi,\quad y=a-b\cos\varphi.$$

і дотичною до неї в нижчих її точках.

20. Обчислити площу, обмежену еліпсом

$$x^2-xy+y^2=3.$$

21. Обчислити площу, обмежену кривою

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x}$$

та її асимптотою $x=2a$.

22. Обчислити площу, що є всередині кривої

$$\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{y}{b}\right)^3=1.$$

28. Площа, обмежена плоскою кривою. Полярні координати. Треба обчислити площу сектора POQ, обмежену двома радіусами-векторами OP, OQ і дугою PQ заданої кривої.

Кут POQ поділимо на певне число рівних частин $\Delta\theta$ і збудуємо кругові сектори, показані на рис. 22. Один з цих секторів ORS має площу

$$\frac{1}{2}OR^2\Delta\theta=\frac{1}{2}r^2\Delta\theta.$$

Якщо α і β є крайні значення полярного кута θ, то сума всіх секторів є

$$\sum_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^2\Delta\theta.$$

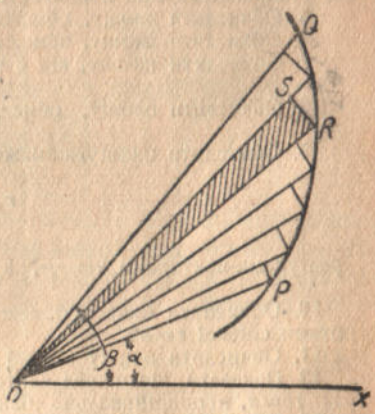

Рис. 22.

Якщо $\Delta\theta$ прямує до нуля, то сума ця прямує до площі A сектора POQ. Виходить

$$A=\lim_{\Delta\theta\to 0}\sum_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^2\Delta\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^2d\theta. \qquad (3)$$

В цій рівності треба виразити r у функції від θ по рівнянню кривої.

Приклад. Знайти площу, обмежену одним завитком кривої $r=a\sin 2\theta$ [1] (рис. 23).

Завиток лежить між $\theta=0$ і $\theta=\frac{\pi}{2}$. Площа, ним обмежена, є

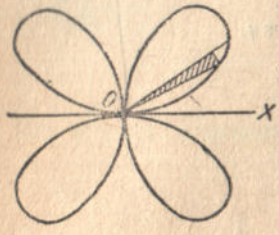

Рис. 23.

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^2\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2}{2}\sin^2 2\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\,d\theta=\frac{\pi a^2}{8}.$$

Вправи

1. Обчислити площу круга $r=a$.
2. Обчислити площу круга $r=a\cos\theta$.
3. Обчислити площу, обмежену координатними осями і прямою

$$r=a\sec\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right).$$

4. Обчислити площу, обмежену початковою віссю і завитком спіралі $r=ae^{\theta}$, які утворюються при першому обороті навколо спіралі.
5. Обчислити площу, обмежену одним завитком кривої $r^2=a^2\cos 2\theta$.
6. Обчислити площу, обмежену кривою $r=\cos\theta+2$.
7. Обчислити площу, що є всередині кардіоіди $r=a(1+\cos\theta)$.
8. Обчислити площу, обмежену параболою $r=a\sec^2\frac{\theta}{2}$ і віссю y-ів.
9. Обчислити площу, обмежену параболою

$$r=\frac{2a}{1-\cos\theta}$$

радіусами-векторами $\theta=\frac{\pi}{4}$; $\theta=\frac{\pi}{2}$.

10. Обчислити площу, обмежену початковою віссю і другим та третім оборотами спіралі $r=a\theta$.
11. Обчислити площу кривої $r=2a\cos 3\theta$, що лежить поза кругом $r=a$.
12. Показати, що площа сектора, обмежена двома радіусами-векторами спіралі $r\theta=a$, пропорціональна різниці довжин цих радіусів-векторів.
13. Обчислити спільну площу кругів:

$$r=a\cos\theta,\qquad r=a\cos\theta+a\sin\theta.$$

---

[1] Якщо $r=f(\theta)$ для певного значення θ набирає від'ємного значення, то відповідну точку будуємо, відкладаючи абсолютне значення r на продовженні радіуса-вектора по другу сторону полюса; інакше кажучи, будуємо точку $(-r,\ \theta+\pi)$. Так, напр. значенням θ, що є між $\frac{\pi}{2}$ і π, відповідає на рис. 23 завиток, що лежить у 4-й чверті.

14. Обчислити всю площу, що лежить усередині кривої

$$r = a\cos^3\frac{\theta}{3}.$$

15. Обчислити площу, що є всередині кривої

$$(r-a)^2 = a^2(1-\theta^2).$$

29. Об'єм тіла обертання. Треба обчислити об'єм, який виходить від обертання площі $ABCD$ навколо осі x-ів.

Впишемо в цю площу ряд прямокутників, як це показано на рис. 24. Кожний з цих прямокутників, скажемо $PQSR$, при цьому обертанні описує циліндр, радіус основи якого PR дорівнює ординаті y, а висота RS є Δx. Об'єм цього циліндра є

$$\pi y^2 \Delta x.$$

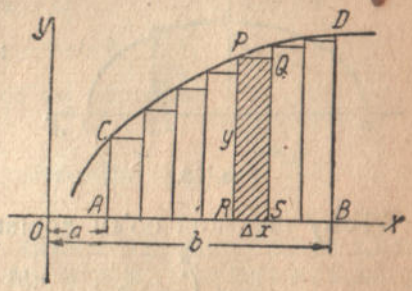

Рис. 24.

Якщо a і b є абсциси крайніх точок C і D кривої, яка обертається, то сума об'ємів усіх циліндрів є

$$\sum_a^b \pi y^2 \Delta x.$$

Об'єм, утворений обертанням площі, є границя цієї суми.

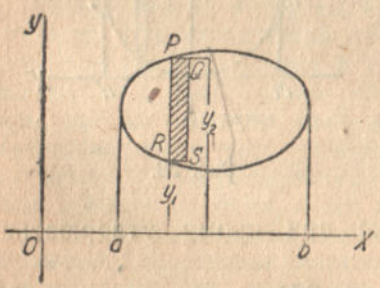

Рис. 25.

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \pi y^2 \Delta x = \int_a^b \pi y^2 dx. \qquad (4)$$

Якщо площа, яка обертається, не досягає осі абсцис, як на рис. 25, то справа стоїть трохи складніше. Коли y_1 є ордината нижньої точки, а y_2—ордината верхньої точки обертового прямокутника $PQRS$, то при цьому обертанні утворюється порожнистий циліндр, об'єм якого дорівнює

$$\pi(y_2^2 - y_1^2)\Delta x.$$

Відповідно до цього об'єм усього тіла обертання є

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2)\Delta x = \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2)\, dx. \qquad (5)$$

Коли обертання відбувається не навколо осі абсцис, а навколо другої прямої, то ординату y треба замінити довжиною перпендикуляра, опущеного з точки кривої на вісь, а абсцису x віддаллю від певної сталої точки на осі до основи перпендикуляра, опущеного з точки кривої на вісь.

Приклад 1. Обчислити об'єм, утворюваний обертанням еліпса

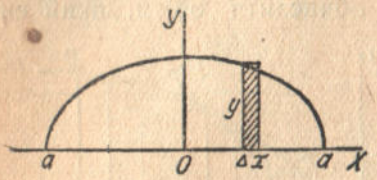

Рис. 26.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

навколо осі абсцис.

З рівняння кривої добуваємо

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\ (a^2-x^2).$$

Тому шуканий об'єм дорівнює:

$$v=\int_{-a}^{a}\pi y^2\,dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\ \pi ab^2.$$

Приклад 2. Круг радіуса a обертається навколо осі, яка лежить в його площині на віддалі b (більшій, ніж a) від центра

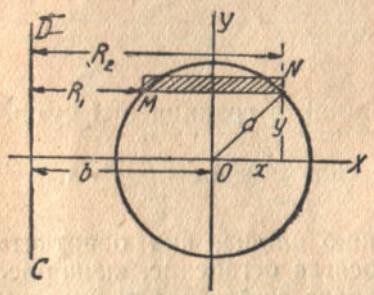

Рис. 27.

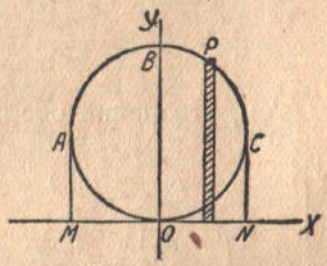

Рис. 28.

Обчислити об'єм тіла обертання, яке при цьому утворюється (це тіло звичайно звуть *тором*).

Отже, нехай круг обертається (рис. 27) навколо прямої CD Прямокутник MN утворює порожнистий циліндр з радіусами:

$$R_1=b-x=b-\sqrt{a^2-y^2}\ ,$$

$$R_2=b+x=b+\sqrt{a^2-y^2}\ .$$

Об'єм цього порожнистого циліндра дорівнює

$$\pi\,(R_2^2-R_1^2)=4\pi b\sqrt{a^2-y^2}\ \Delta y.$$

Відповідно до цього об'єм тіла обертання дорівнює

$$v=\int_{-a}^{a} 4\pi b\sqrt{a^2-y^2}\,dy=2\pi^2a^2b.$$

Приклад 3. Обчислити об'єм, який утворюється обертанням круга $r=a\sin\theta$ навколо осі абсцис (рис. 28).

В даному випадку

$$y=r\sin\theta=a\sin^2\theta,$$

$$x=r\cos\theta=a\cos\theta\sin\theta.$$

Відповідно до цього шуканий об'єм дорівнює

$$v=\int \pi y^2\,dx=\int_{\pi}^{0} \pi a^3\sin^4\theta\,(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,d\theta=\frac{\pi^2a^3}{4}.$$

Причина, на підставі якої за нижню границю взято π, за верхню 0, полягає в тому, що при цій умові dx зберігає на всьому протязі верхньої частини ABC кривої додатне значення.

Коли θ змінюється від π до 0, то точка P описує путь $OABCO$. Вздовж дуг CO і OA dx має від'ємне значення. Виходить, інтеграл дає об'єм, утворюваний обертанням площі $MABCN$ без об'єма, утворюваного обертанням площ OAM і OCN.

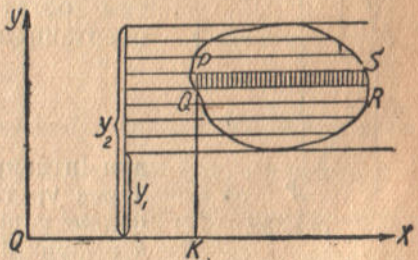

Рис. 29.

Отже, спосіб, яким ми користалися для обчислення об'єму тіла обертання, полягає в тому, що ми: 1) поділяємо обертову фігуру на смужки, потім кожну смужку заміняємо прямокутником, що нескінченно мало відрізняється від цієї смужки; 2) обчислюємо об'єм тіла, утворюваного обертанням кожного прямокутника; 3) підсумовуємо ці об'єми і 4) знаходимо границю, до якої прямує ця сума, коли всі прямокутники прямують до нуля.

У всіх розглянутих випадках ми ділили фігуру на смужки прямими, перпендикулярними до осі обертання. Проте, іноді буває доцільніше поділити прямими, паралельними осі обертання; це приводить до другої формули для виразу об'єму тіла обертання, яку часто застосовують.

Припустімо, що обертова фігура міститься між ординатами y_1 і y_2 (рис. 29). Інтервал між цими ординатами, як звичайно, ділимо на рівні частини, завдовжки Δy. Через точки поділу проводимо прямі, паралельні осі обертання, і цим поділяємо фігуру на смужки. Виділяємо одну смужку (на рисунку заштриховану) і заміняємо її прямокутником $PQRS$; нижня основа прямокут-

ника відповідає ординаті y, верхня — ординаті $y+\Delta y$. Тіло, утворюване обертанням прямокутника $PQRS$, є порожнистий циліндр, об'єм якого дорівнює

$$\pi(y+\Delta y)^2 h - \pi y^2 h = 2\pi y\,\Delta y\, h + \pi\,\Delta y^2 h,$$

де h є основа прямокутника PS, яка править за висоту порожнистого циліндра. Сума об'ємів тіл, утворюваних обертанням усіх прямокутників, є

$$\sum_{y_1}^{y_2}(2\pi y\,\Delta y + \pi\,\Delta y^2)\,h,$$

яку, проте, при переході до границі можна замінити сумою

$$\sum_{y_1}^{y_2} 2\pi y\,\Delta y\, h,$$

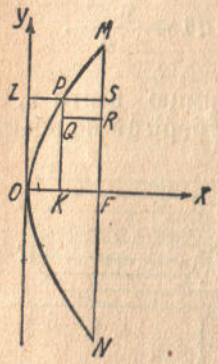

Рис. 30.

бо другий член під знаком підсумування є нескінченно мала вищого порядку. Разом з тим остаточно об'єм тіла, утворюваного обертанням усієї фігури,

$$v = 2\pi\int_{y_1}^{y_2} yh\,dy; \qquad (6)$$

для інтегрування треба наперед виразити h через y; та й зрозуміло, що кожному значенню y відповідає певне значення h, тобто h є функція від y, яка визначається з рівняння контура обертової фігури.

Приклад. Через фокус F параболи $y^2=2px$ проходить перпендикуляр FM до осі. Визначити об'єм тіла, яке утворюється від обертання півсегмента MOF навколо осі параболи.

Як відомо, абсциса фокуса дорівнює $\frac{1}{2}p$. Координати точки M тому є $\frac{p}{2}$, p. В даному випадку $y_1=0$, $y_2=p$. Якщо x і y є координати точки P, то

$$h = PS = LS - LP = OF - OK = \frac{p}{2} - x.$$

А з рівняння параболи $x=\frac{y^2}{2p}$, тому

$$h = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p} = \frac{p^2 - y^2}{2p}.$$

Основна формула (6) дає:

$$v=\frac{\pi}{p}\int_0^p (p^2-y^2)\,y\,dy=\frac{\pi}{p}\left[\left(\frac{p^2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right)\right]_0^p=\frac{\pi p^3}{4}.$$

Повертаючись до загальної формули (6), зауважимо, що добуток $h\,dy$ є площа dA нескінченно малого прямокутника $PQRS$; тому формулу (6) можна подати також

$$v=2\pi\int y\,dA. \qquad (7)$$

Вправи

1. Обчислити інтегруванням об'єм кулі.

2. Обчислити інтегруванням об'єм прямого конуса.

3. Обчислити об'єм, який буде від обертання навколо осі абсцис площі, обмеженої віссю абсцис і параболою $y=2x-x^2$.

4. Обчислити об'єм, який утворюється при обертанні навколо осі OY площі обмеженої осями координат і параболою $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$.

5. Обчислити об'єм, який утворюється при обертанні навколо осі x-ів площі, яка обмежена ланцюговою лінією

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

віссю x-ів і прямими $x=\pm a$.

6. Обчислити об'єм, утворюваний обертанням однієї вітки синусоїди $y=\sin x$ навколо осі x-ів.

7. Вершина нескінченного конуса лежить на поверхні кулі, а його вісь проходить через центр кулі. Знайти об'єм спільної частини обох тіл.

8. Обчислити об'єм тіла, що утворюється від обертання навколо осі y-ів тієї частини параболи $y^2=4ax$, яка відтинається прямою $x=a$.

9. Обчислити об'єм тіла, що утворюється від обертання навколо прямої $x=a$ тієї частини параболи $y^2=4ax$, яка цією прямою відтинається.

10. Знайти об'єм тіла, яке утворюється обертанням навколо прямої $y=-2a$ тієї частини параболи $y^2=4ax$, яка відтинається прямою $x=a$.

11. Обчислити об'єм тіла, яке утворюється при обертанні однієї вітки циклоїди

$$x=a(\varphi-\sin\varphi),\quad y=a(1-\cos\varphi)$$

навколо осі абсцис.

12. Обчислити об'єм який утворюється від обертання кривої

$$x=a\cos^3\varphi,\quad y=a\sin^3\varphi$$

навколо осі y-ів.

13. Обчислити об'єм тіла, яке утворюється від обертання кардіоїди

$$r=a(1+\cos\theta)$$

навколо початкової осі.

14. Обчислити об'єм тіла, яке утворюється від обертання тієї самої кардіоїди (див. попередню задачу) навколо прямої $4x+a=0$.

15. Обчислити об'єм тіла, яке утворюється від обертання еліпса

$$x^2+xy+y^2=3$$

навколо осі x-ів.

16. Обчислити об'єм тіла, яке утворюється від обертання навколо прямої $y=x$, тієї частини параболи $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$, яка відтинається прямою $x+y=a$.

30. Об'єм тіла, площі перерізів якого відомі. Поділімо дане тіло рядом паралельних площин на дуже тонкі шари. Нехай X буде площа перерізу, що є на віддалі x від певної сталої точки. Шар $PQRS$, який має за основу площу PQR, матиме об'єм

$$PQR \cdot \Delta x = X\,dx.$$

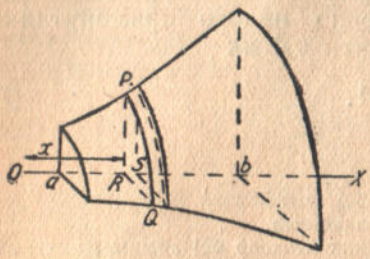

Рис. 31.

Якщо a і b є граничні значення x, (тобто віддалі від точки O крайніх перерізів), то сума об'ємів усіх шарів дорівнює

$$\sum_a^b X\Delta x.$$

Точніше сказати, що ця сума відрізняється від суми всіх шарів на нескінченно малу величину. В усякому разі об'єм нашого тіла є границя, до якої прямує ця сума, коли Δx прямує до нуля, а число шарів необмежено зростає. Тому

$$v=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_a^b X\Delta x=\int_a^b X\,dx. \qquad (8)$$

Приклад 1. Обчислити об'єм еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

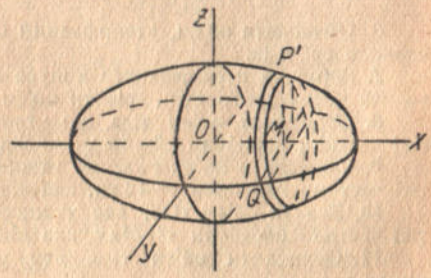

Рис. 32.

Переріз, перпендикулярний до осі x-ів на віддалі x від центра, є еліпс

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}.$$

Півосі цього еліпса мають довжини

$$MP=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad MQ=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Площа такого еліпса дорівнює (див. вправу 6 на стор. 60)

$$\pi\cdot MP\cdot MQ=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Тому об'єм еліпсоіда дорівнює

$$\int_{-a}^{a} \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Приклад 2. Осі двох рівних циліндрів перерізаються під прямим кутом. Знайти об'єм тіла, що становить спільну частину обох циліндрів.

На рисунку 33 осі циліндрів є OX і OZ, а $OABC$ є $^1/_8$ частина загального об'єму. Переріз тіла $OABC$ площиною, перпендикулярною до OY, є квадрат, сторона якого

$$MP=MQ=\sqrt{a^2-y^2}.$$

Тому площа цього перерізу

$$MPRQ=a^2-y^2,$$

а шуканий об'єм дорівнює

$$v=8\int_0^a (a^2-y^2)\,dy=\frac{16a^3}{3}.$$

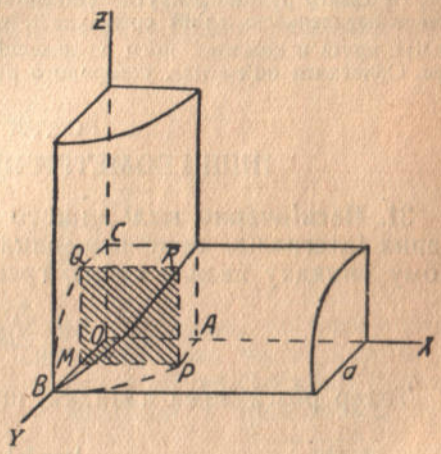

Рис. 33.

Вправи

1. Обчислити інтегруванням об'єм піраміди.

2. Від прямого круглого циліндра радіуса a відрізано клин площиною, яка проходить через діаметр основи і нахилена до основи під кутом α. Обчислити об'єм цього клина.

3. Два круги, розміщені у взаємно перпендикулярних площинах, мають спільний діаметр. Квадрат рухається так, що площина його залишається перпендикулярною до спільного діаметра, а його діагоналі є хорди кругів[1]. Знайти об'єм утворюваного тіла.

4. Центр рухомого круга переміщується по великій осі еліпса, при чому площина круга перпендикулярна до площини еліпса, а радіус круга в кожний момент дорівнює ординаті еліпса. Обчислити об'єм тіла, яке утворюється, коли круг переміщується від одної вершини еліпса до другої.

5. Площа рухомого трикутника залишається перпендикулярною до нерухомого діаметра круга радіуса a; його основа є хорда круга, а вершина його лежить на прямій, паралельній нерухомому діаметрові, на віддалі h від площини круга. Знайти об'єм тіла, утворюваного рухом цього трикутника від одного кінця діаметра до другого.

---

[1] Звичайно, що тут квадрат не тільки рухається, а й деформується: його сторони зростають, коли він наближається до спільного центра обох кругів, і зменшуються при віддаленні від центра. Те саме стосується і до дальших задач.

6. Трикутник сталої площі A обертається навколо прямої, перпендикулярної до його площини, і одночасно просувається вздовж цієї прямої. Обчислити об'єм, утворюваний рухом трикутника при його піднятті на віддаль h.

7. Довести, що два тіла, які стоять на одній площині, рівновеликі, якщо рівновеликі їхні перерізи будьякою площиною, паралельною основі, а висоти їх рівні.

8. Циліндрична поверхня проходить через два взаємно перпендикулярні великі круги сфери радіуса a. Обчислити об'єм тіла, що становить спільну частину циліндра й кулі.

9. Два циліндри мають одну висоту h, спільну верхню основу радіуса a, а нижні основи їх дотикаються. Знайти об'єм тіла, що становить спільну частину обох циліндрів.

10. Центр рухомого круга залишається на осі z-ів, а площина його, залишаючись паралельною самій собі, увесь час нахилена до осі z-ів під кутом 45°; радіус круга в кожному його положенні $r=\sqrt{a^2-z^2}$, де z — координата центра. Обчислити об'єм тіла, утвореного рухом круга.

РОЗДІЛ П'ЯТИЙ
ІНШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ПРИКЛАДАННЯ

31. Нескінченно малі вищого порядку. В прикладаннях означених інтегралів, вище нами викладених, шукана кількість в кожному випадку являла собою границю виду

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\,\Delta x.$$

Тепер розглянемо випадки, що мають границі виду

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b F(x, \Delta x),$$

при чому $F(x, \Delta x)$ лише наближено виражаються в формі $f(x)\Delta x$. Відшукуючи такі границі, здебільшого опускають нескінченно малі вищого порядку, ніж Δx. Подана нижче теорема зазначає, що цей спосіб не змінює шуканої границі.

Якщо для значень x, які є між a і b, $F(x, \Delta x)$ відрізняється від $f(x)\,\Delta x$ на нескінченно малу вищого порядку, ніж Δx, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b F(x, \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\,\Delta x.$$

Щоб це виявити, позначимо через ε число, добране так, що

$$F(x, \Delta x) = f(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x.$$

Коли $F(x, \Delta x)$ відрізняється від $f(x)\,dx$ на нескінченно малу вищого порядку, ніж Δx, то $\varepsilon\,\Delta x$ є нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx, і тому ε прямує до нуля, якщо Δx прямує до нуля (див. „Диференціальне числення", рубр. 48). Різниця

$$\sum_a^b F(x, \Delta x) - \sum_a^b f(x)\,\Delta x = \sum_a^b \varepsilon\,\Delta x.$$

графічно подається сумою прямокутників, висотами яких є різні значення ε. Усі ці значення наближаються до нуля[1], коли Δx прямує до нуля, а тому вся площа прямує до нуля і через те

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b F(x, \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\,\Delta x;$$

що й треба було довести.

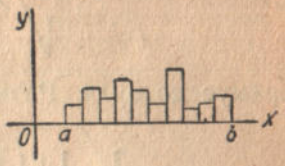

Рис. 34.

32. Довжина кривої. Прямокутні координати. В дугу кривої AB впишемо ряд хорд, тобто ламану лінію. Довжина однієї з цих хорд PQ дорівнює

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x,$$

а сума їхніх довжин є

$$\sum_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x.$$

Довжина дуги AB визначається як границя, до якої прямує ця сума, коли число сторін ламаної лінії необмежено зростає, а довжини їх прямують до нуля.

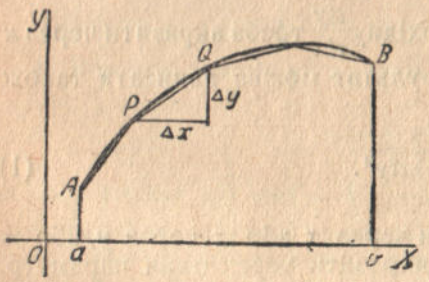

Рис. 35.

Кількість $\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$ не є функція однієї тільки незалежної змінної x. Коли, наприклад, рівняння кривої є

$$y = x^2, \text{ то } \Delta y = 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$

і

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x = \sqrt{1 + (2x + \Delta x)^2}\,\Delta x = F(x, \Delta x);$$

ми маємо тут якраз такий випадок, про який говорили вище. Проте, коли Δx прямує до нуля, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ має своєю границею

---

[1] Щоб це твердження було цілком точним, треба показати, що існує число більше, ніж усі значення ε, і що воно також прямує до нуля. Висловлюючись мовою вищої математики, наближення до границі мусить бути *рівномірним*. У звичайних випадках це дійсно буває. Подібне ж зауваження стосується до всіх прикладань попередньої теореми.

похідну $\frac{dy}{dx}$. Різниця

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\varepsilon$$

прямує до нуля. Разом з тим

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\Delta x+\varepsilon\,\Delta x.$$

Тому, коли ми замінимо

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

через

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\Delta x,$$

то припущена похибка являє собою нескінченно малу вищого порядку $\varepsilon\,\Delta x$. Тому довжина дуги

$$s=\lim_{\Delta x\to 0}\sum\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\Delta x=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Застосовуючи цю формулу, похідну $\frac{dy}{dx}$ треба виразити через x з рівняння кривої. Той самий результат можна написати також у формі:

$$s=\int_A^B\sqrt{dx^2+dy^2}. \qquad (1)$$

У цій формі y можна виразити через x або x через y, або ж обидві координати y і x можна виразити через один параметр. В обох випадках границями інтегрування мусять бути значення незалежної змінної в точках A і B.

Приклад 1. Обчислити довжину дуги параболи $y^2=4x$ від $x=0$ до $x=1$.

В даному випадку $\frac{dx}{dy}=\frac{y}{2}$. Граничні значення ординати y є 0 і 2. Виходить,

$$s=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=$$

$$=\int_0^2\frac{1}{2}\sqrt{y^2+4}\,dy=\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Приклад 2. Обчислити довжину всієї кривої

$$x=a\cos^3\varphi,\quad y=a\sin^3\varphi.$$

В даному випадку

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{9a^2\cos^4\varphi\sin^2\varphi+9a^2\sin^4\varphi\cos^2\varphi}\,d\varphi=$$
$$=3a\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi,$$

припускаючи, що $\cos\varphi\sin\varphi$ є число додатне, як це має місце в 1-й і 3-й чвертях. Для другої і четвертої чверті цей вираз треба було б узяти із знаком мінус. Ми можемо, проте, обмежитись випадком, коли φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$; точка пробігає при цьому чверть кривої. Виходить, довжина всієї кривої дорівнює

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi=6a.$$

Вправи

1. Обчислити інтегруванням довжину кола круга.
2. Знайти довжину дуги кривої $y^2=x^3$, що є між точками (0, 0) і (4, 8).
3. Обчислити довжину дуги кривої $x=\ln\sec y$, що є між $y=0$ і $y=\frac{\pi}{3}$.
4. Обчислити довжину дуги кривої

$$x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y,$$

що є між точками, для яких $y=1$ і $y=2$.

5. Знайти довжину дуги кривої $y=e^x$, що є між точками (0, 1) і (1, e).
6. Обчислити довжину кривої

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}.$$

7. Обчислити довжину дуги ланцюгової лінії

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

що є між точками, для яких $x=-a$ і $x=a$.

8. Обчислити довжину вітки циклоїди

$$x=a(\varphi-\sin\varphi),\qquad y=a(1-\cos\varphi).$$

9. Обчислити довжину дуги еволюти круга

$$x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta),\qquad y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta),$$

що є між $\theta=0$ і $\theta=2\pi$.

10. Обчислити довжину дуги циклоїди

$$x=a(\theta+\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta).$$

Якщо s є довжина дуги, що є між початком і точкою (x, y) тієї же вітки, то $s^2=8ay$. Виявити це.

33. Довжина кривої. Полярні координати. В полярних координатах диференціал дуги кривої (див. „Диференц. числення", рис. 59, рубр. 98) виражається формулою:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{dr^2+r^2\,d\theta^2}\,.$$

Рівняння (1) можна, значить, замінити еквівалентним йому рівнянням:

$$s=\int_A^B\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}. \qquad (2)$$

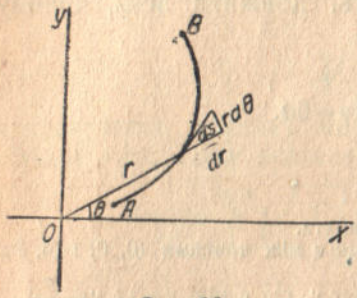

Рис. 36.

Застосовуючи цю формулу, треба виразити r через θ або θ через r з рівняння кривої. За границі інтегрування правлять значення добраної незалежної змінної в точках A і B.

Приклад. Обчислити довжину першого обороту спіралі $r=a\theta$. У цьому випадку $dr=a\,d\theta$ і

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\,d\theta^2+a^2\theta^2\,d\theta^2}=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=$$

$$=\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right).$$

Вправи

1. Обчислити довжину кола $r=a$.
2. Обчислити довжину кола $r=2a\cos\theta$.
3. Обчислити довжину спіралі $r=e^{a\theta}$ між точками $\theta=0$ і $\theta=\frac{1}{a}$.
4. Обчислити довжину прямої лінії $r=a\sec\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ від точки $\theta=0$ до точки $\theta=\frac{\pi}{2}$.
5. Обчислити довжину дуги параболи $r=a\sec^2\frac{1}{2}\theta$, яку відтинає вісь y-ів.
6. Обчислити довжину кривої

$$r=a\cos^4\frac{\theta}{4}.$$

7. Обчислити довжину кардіоіди

$$r=a(1+\cos\theta).$$

8. Обчислити довжину всієї кривої, яку виражає рівняння

$$r=a\sin^3\frac{\theta}{3}.$$

34. Поверхня тіла обертання. Обчислимо поверхню, утворювану обертанням дуги AB навколо осі x-ів.

Впишемо в дугу ламану лінію. Нехай x і y будуть координати точки P, а $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ координати точки Q. Хорда PQ утворює при обертанні поверхню зрізаного конуса, яка дорівнює

$$\pi(2y+\Delta y)PQ=\pi(2y+\Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

Через це поверхня, описувана ламаною лінією, дорівнює

$$\sum_A^B \pi(2y+\Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

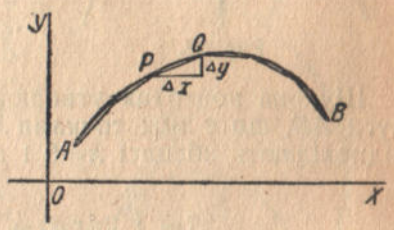

Рис. 37.

Поверхня S, утворена обертанням дуги AB, є границя, до якої прямує ця сума, коли Δx і Δy наближаються до нуля. Нехтуючи нескінченно малими вищого порядку, можна замінити

$$(2y+\Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

через

$$2y\cdot\sqrt{dx^2+dy^2}=2y\,ds.$$

Відповідно до цього величина всієї поверхні обертання дорівнює

$$S=\int_A^B 2\pi y\,ds. \qquad (3)$$

В цій формулі y і ds треба виразити в тій самій змінній з рівняння кривої. Границями будуть значення незалежної змінної в точках A і B.

Так само поверхня, утворена обертанням дуги AB навколо осі y-ів, виражається інтегралом

$$S=\int_A^B 2\pi x\,ds \qquad (4)$$

Взагалі при обертанні плоскої кривої навколо довільної прямої поверхня утвореного тіла обертання

$$S=2\pi\int_A^B u\,ds, \tag{5}$$

де u — віддаль точки від осі обертання.

Приклад. Знайти величину поверхні, утворюваної обертанням навколо осі y-ів частини кривої $y=1-x^2$ (рис. 38), розміщеної над віссю абсцис.

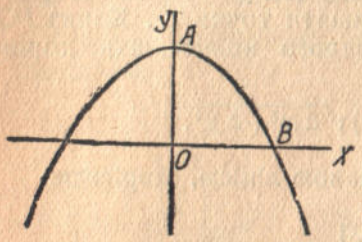

Рис. 38.

У цьому випадку

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=$$

$$=\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Шукана поверхня утворюється обертанням навколо осі y-ів дуги AB, що є між точками $x=0$ і $x=1$ (тобто між точками, які відповідають абсцисі $x=0$ і абсцисі $x=1$). Виходить,

$$S=\int_A^B 2\pi x\,ds=\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+4x^2}\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{6}(1+4x^2)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

Вправи

1. Обчислити поверхню сфери.
2. Обчислити поверхню прямого круглого конуса.
3. Обчислити поверхню сфероїда, утвореного обертанням еліпса навколо великої осі.
4. Обчислити поверхню, утворювану обертанням кривої

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$$

навколо осі y-ів.

5. Обчислити поверхню, утворювану обертанням навколо осі OX частини ланцюгової лінії

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

що є між точками, для яких $x=-a$ і $x=a$.

6. Обчислити поверхню, утворену обертанням однієї вітки ціклоїди

$$x=a(\varphi-\sin\varphi),\quad y=a(1-\cos\varphi)$$

навколо осі x-ів.

7. Обчислити поверхню, утворену обертанням кардіоїди $r=a(1+\cos\theta)$ навколо початкової осі.

8. Дуга кола

$$x^2+y^2=a^2,$$

що є між точками $(a, 0)$ і $(0, a)$, обертається навколо прямої $x+y=a$. Обчислити таку поверхню.

9. Дуга параболи $y=4x$, що є між прямими $x=0$ і $x=1$, обертається навколо прямої $y+2=0$. Обчислити поверхню, що утворюється від цього обертання.

10. Обчислити поверхню, яка утворюється від обертання однієї вітки лемніскати $r^2=2a^2\cos 2\theta$ навколо прямої $\theta=\frac{\pi}{4}$.

35. Окремі методи. Вище викладено найуживаніші методи обчислення довжин, площ та об'ємів. А в окремих випадках часто результат можна добути коротше й простіше іншими способами. Щоб розв'язати задачу інтегруванням, треба тільки виразити шукану кількість яким завгодно способом у вигляді границі, яким ми користалися, запроваджуючи поняття про означений інтеграл.

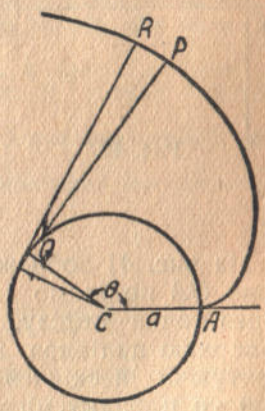

Рис. 39.

Приклад 1. Якщо нитка розгортається з нерухомого кола, залишаючись натягнутою, то кінець її описує криву, яка зветься *евольвентою* або *розгорткою* цього кола. Обчислити довжину тієї частини кривої, яка буває після того, як з кола згорнута частина нитки, яка складала перший повний оборот.

Припустімо, що нитка починає згортатися від точки A. Коли кінець її досягає точки P, то довжина PQ розгорнутої нитки дорівнює довжині дуги кола AQ. Виходить,

$$PQ=AQ=a\theta.$$

Коли точка P переходить у дуже близьку точку R, то дуга PR наближено дорівнює дузі кола, яка має центр у точці Q і центральний кут $\Delta\theta$. Виходить, наближено

$$PR=a\theta\,\Delta\theta.$$

Довжина кривої, описаної, коли θ наростає від 0 до 2π, дорівнює

$$s=\lim_{\Delta\theta\to 0}\sum_{0}^{2\pi} a\theta\,\Delta\theta=\int_{0}^{2\pi} a\theta\,d\theta=2\pi^2 a.$$

Приклад 2. Обчислити об'єм тіла, яке утворюється при обертанні навколо осі y-ів площі, обмеженої параболою $x^2=y-1$, віссю абсцис і ординатами $x=0$ і $x=1$.

Обертову площу поділимо на смужки ординатами, що є на віддалі одна від одної Δx (рис. 40). При обертанні навколо осі y-ів прямокутник PM утворює порожнистий циліндр, об'єм якого дорівнює

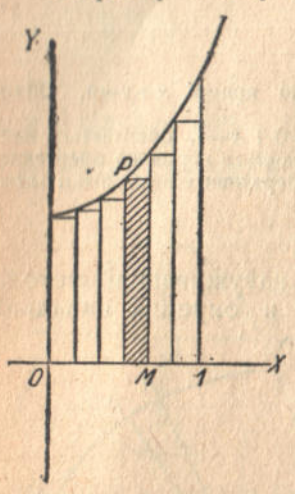

Рис. 40.

$$\pi(x+\Delta x)^2 y-\pi x^2 y=2\pi xy\Delta x+\pi y(\Delta x)^2.$$

Через те, що $\pi y(\Delta x)^2$ є нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx, то шуканий об'єм дорівнює

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_0^1 2\pi xy\Delta x=\int_0^1 2\pi x\,(1+x^2)\,dx=\frac{3}{2}\pi.$$

Приклад 3. Обчислити ту частину поверхні циліндра

$$x^2+y^2=ax,$$

яка є всередині сфери

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

На рис. 41 зображена четверта частина шуканої поверхні. Коло OA поділимо на невеликі дуги Δs. Твірні, які проходять через точки поділу, поділяють поверхню циліндра на смужки. Нехтуючи нескінченно малими вищого порядку, ми можемо вважати, що площа смужки MPQ дорівнює $MP\cdot\Delta s$. Якщо r і θ є полярні координати точки M, то

$$r=a\cos\theta$$

і

$$MP=\sqrt{a^2-r^2}=a\sin\theta.$$

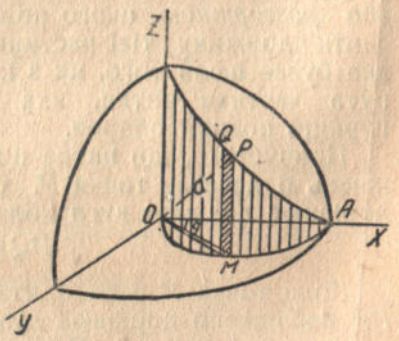

Рис. 41.

Шукана поверхня визначається, виходить, рівнянням

$$\frac{S}{4}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\sum_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin\theta\,\Delta\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin\theta\,d\theta.$$

Отже

$$S=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=4a^2.$$

Вправи

1. Обчислити площу, описану ниткою в прикладі 1, рубр. 35.

2. Обчислити поверхню, яку відрізає від прямого круглого циліндра площина, що проходить через діаметр основи і нахилена до основи під кутом 45°.

3. Осі двох круглих циліндрів з рівними основами перетинаються під прямим кутом. Обчислити поверхню тіла, яке становить спільну частину обох циліндрів (рис. 33).

4. Рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює a, обертається навколо прямої, паралельної основі і розміщеної на віддалі b від нього. Визначити об'єм тіла обертання.

5. Площа, обмежена гіперболою $x^2-y^2=a^2$ і прямими $y=\pm a$, обертається навколо осі x ів. Визначити об'єм тіла обертання.

6. Вершина подвійного конуса з кутом 2α у вісному перерізі міститься в центрі сфери радіуса a. Обчислити ту частину об'єму конуса, яка міститься всередині сфери.

7. Вісь конуса, радіус основи якого дорівнює $2a$, а висота дорівнює h, є в той самий час твірна циліндра радіуса a. Обчислити ту частину поверхні циліндра, яка міститься всередині конуса.

8. Обчислити ту частину поверхні конуса (див. попередню задачу), яка міститься всередині циліндра.

9. Умови задачі 7. Обчислити об'єм тієї частини циліндра, яка міститься всередині конуса.

РОЗДІЛ ШОСТИЙ

ПРИКЛАДАННЯ В МЕХАНІЦІ Й ФІЗИЦІ

36. Тиск. Тиск рідини на *горизонтальну* поверхню дорівнює вазі вертикального стовпа цієї рідини, який має за основу цю поверхню, а за висоту — віддаль її від вільної поверхні рідини. Під *тиском рідини у певній точці P* розуміють тиск на одиницю площі, яка є на глибині цієї точки. Об'єм стовпа, що має в основі одиницю площі, а висоту h, дорівнює h. Тому тиск на глибині h

$$p=wh, \tag{1}$$

де w є вага кубічної одиниці цієї рідини.

Щоб обчислити тиск на *вертикальну* поверхню, скористуємося тим фактом, що в кожній точці тиск у всі сторони однаковий. На рис. 43 зображена вертикальна поверхня, яку треба собі уявляти занурено в рідину. Вільна поверхня цієї рідини позначена верхньою рискою. Тиск на смужку AB, що є між двома дуже близькими горизонталями, наближено дорівнює $p\Delta S$, де ΔS є площа цієї смужки. Це результат наближений, бо тиск на верхній межі площі все ж нижчий, ніж на нижній. Про-

те, різниця ця нескінченно мала, а тому що вона помножається на ΔS, то помилка являє собою нескінченно малу вищого порядку. Тому ввесь тиск

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \sum p \Delta S = \int p\, dS = w \int h\, dS. \qquad (2)$$

До інтегрування dS треба виразити через h. Границями інтегрування є значення h біля основи і поверхні зануреної

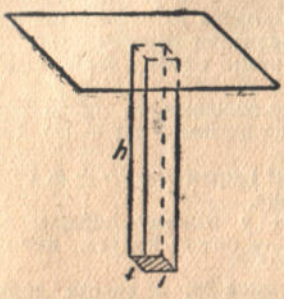

Рис. 42.

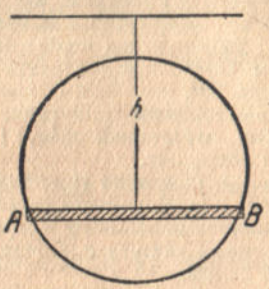

Рис. 43.

площі, на яку відбувається тиск. У випадку води $w = 1$ грамові, коли об'єм виражено в кубічних сантиметрах.

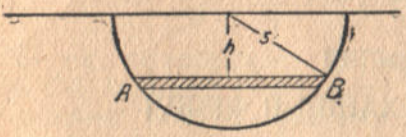

Рис. 44.

Приклад. Знайти тиск на півкруг, вертикально занурений у рідину, якщо його радіус дорівнює 5 см, а верхній діаметр лежить на вільній поверхні води (рис. 44).

В даному випадку елемент площі дорівнює добуткові $AB \cdot dh$. А через те, що

$$AB = 2\sqrt{5^2 - h^2},$$

то

$$dS = 2\sqrt{25 - h^2}\, dh.$$

Разом з тим

$$p = w \int h\, dS = 2w \int_0^5 h\sqrt{25 - h^2}\, dh,$$

через те $w = 1$ г, а неозначений інтеграл

$$\int \sqrt{25 - h^2} \cdot h\, dh = -\frac{1}{3}(25 - h^2)^{3/2},$$

то

$$p = w \cdot \frac{250}{3} = \frac{250}{3}\ \text{г} = 83^1/_3\ \text{г}.$$

Вправи

1. Обчислити тиск на прямокутний шлюз завширшки в 10 м і завглибшки у 12 м, якщо його верхня грань лежить на поверхні води.

2. Обчислити тиск на нижню половину шлюза в попередній задачі.

3. Обчислити тиск на трикутник з основою b см і висотою h см, якщо вершина трикутника лежить на поверхні води, а висота його міститься вертикально.

4. Обчислити тиск на трикутник, висота якого дорівнює h см, а основа b см, якщо він занурений у воду так, що основа його лежить на поверхні води, а висота напрямлена вертикально вниз.

5. Обчислити тиск на півеліпс, занурений в рідину так, що одна з осей його лежить на поверхні рідини, а друга міститься вертикально.

6. Вертикальна гребля має форму трапеції, верхня основа якої завдовжки 70 м, нижня 50 м, а висота 20 м. Якого тиску зазнає гребля?

7. Кінець труби, зануреної горизонтально в воду, можна закрити заслінкою. Визначити тиск на цю заслінку, якщо її діаметр 60 см, а центр її є на глибині 15 м під водою.

8. Прямокутна посудина наповнена рівними щодо об'єму частинами води й масла, при чому це масло вдвоє легше води; показати, що тиск зменшиться на дну п'яту, коли вода буде заміщена тим самим маслом.

37. Момент площі або лінії відносно осі. Припустімо, що на площині виділена площа, обмежена будьяким контуром. Поділімо її на невеликі частини так, щоб віддалі окремих точок кожної площі від певної осі, яка лежить у тій самій площині, відрізнялись між собою на нескінченно малу. Кожну таку площу помножимо на віддаль будьякої точки її від осі, вважаючи цю віддаль додатною по один бік від осі і від'ємною по другий бік. Границя, до якої прямує сума цих добутків, коли всі площі, на які ми поділили дану площу, прямують до нуля, зветься *моментом цієї площі відносно осі.*

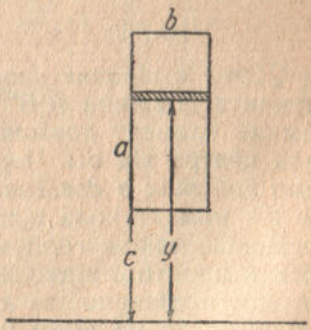

Рис. 45.

Приклад. Знайти момент прямокутника відносно осі, паралельної одній з його сторін і яка є на віддалі c від неї.

Поділімо прямокутник на смужки, паралельні осі (рис. 45). Нехай y буде віддаль смужки від осі. Якщо b є основа прямокутника, то площа смужки дорівнює $b\Delta y$. Виходить, момент прямокутника дорівнює

$$\lim_{\Delta y \to 0} \sum_{c}^{c+a} yb\Delta y = \int_{c}^{c+a} by\,dy = ab\left(c+\frac{a}{2}\right).$$

Через те, що ab є площа прямокутника, а $c+\frac{a}{2}$ є віддаль його центра від осі, то *момент прямокутника відносно осі*

паралельної одній з його сторін, дорівнює добуткові з площі цього прямокутника на віддаль його центра від осі.

Так само визначається момент плоскої кривої відносно осі. Саме, крива ділиться на дуже малі частини і довжина кожної частини помножається на віддаль довільної її точки від осі, взяту з тим або іншим знаком (залежно від того, з якого боку осі міститься елемент кривої); границя суми цих добутків і є момент кривої відносно осі. Відшукаємо, наприклад, момент кола відносно осі, розміщеної в його площині (рис. 46). Для цього поділимо коло на невеликі частини (елементи) прямими, перпендикулярними до осі. Якщо через Δl позначити довжину елементів $A'B'$ і $A''B''$ (вони рівні), то відповідні два доданки $\Delta l \cdot AA'$ і $\Delta l \cdot AA''$ дають у сумі

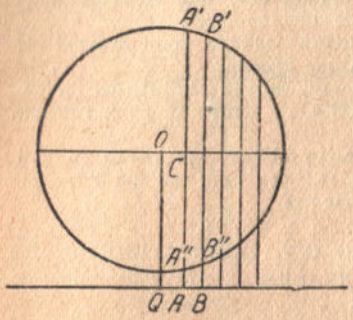

Рис. 46.

$$\Delta l\,(AA'+AA'') =$$
$$= \Delta l\,\{(AC+CA')+(AC-A''C)\} =$$
$$= 2\,\Delta l \cdot AC = 2\,\Delta l \cdot QO = 2\,\Delta l \cdot h,$$

де $QO = h$ є віддаль центра кола від осі. Ми тут сполучили два елемента довжини $A'B'$ і $A''B''$, тому ми можемо сказати, що кожний елемент довжини кінець-кінцем помножається на віддаль центра від осі. Через те, підсумовуючи всі доданки, дістанемо *добуток з довжини кола на віддаль його центра від осі.* Це і є момент кола відносно осі.

Можна також говорити про момент лінії, поверхні, тіла й маси в просторі відносно певної площини. Щоб визначити цей момент, поділяємо цю лінію, поверхню, тіло або масу на елементи, тобто на дуже малі частини так, щоб при наближенні їх до нуля різниця віддалей двох точок елемента від заданої площини була нескінченно малою. Довжину, площу, об'єм або масу елемента, залежно від завдання, ми помножаємо на віддаль будьякої точки елемента від даної площини, надаючи цій віддалі знак + по один бік даної площини і знак — по другий бік; складаємо всі ці добутки і відшукуємо границю, до якої прямує сума їх, коли всі елементи прямують до нуля. Ця границя і є момент цієї лінії, поверхні, тіла або маси відносно заданої площини.

Момент матеріальної точки відносно осі є добуток з маси цієї точки на її віддаль від осі. Момент кількох матеріальних точок, які лежать в одній площині з віссю, є сума моментів окремих точок, тобто сума добутків з маси кожної точки на її віддаль від основної осі, узяту з належним знаком. Момент точки або системи точок відносно площини визначається аналогічним способом.

Приклад 1. Дві рівні маси зосереджені в точках M_1 і M_2. Знайти момент їх відносно даної площини.

Якщо m є маса кожної точки, а y_1 і y_2 — віддалі точок M_1 і M_2 від даної площини, то момент цієї системи дорівнює

$$my_1+my_2=m(y_1+y_2)=2my,$$

де

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Але y є віддаль (від даної площини) середини відрізка M_1M_2, яку можна розглядати як центр ваги цих двох мас. З другого боку, $2m$ є маса системи двох точок, а тому $2my$ виражає момент центра ваги двох точок, якщо в ньому зосередити маси обох матеріальних точок.

Приклад 2. Знайти момент двох матеріальних точок M_1 і M_2, в яких зосереджені маси m_1 і m_2.

Нехай, як у попередньому прикладі, y_1 і y_2 будуть віддалі від даної площини матеріальних точок M_1 і M_2. Тоді момент цієї системи двох точок дорівнює

$$m_1y_1+m_2y_2=(m_1+m_2)y, \tag{3}$$

де

$$y=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}.$$

Але з аналітичної геометрії відомо, що y є віддаль від основної площини точки M, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношені $m_2:m_1$. Ця точка є центр ваги двох мас. Тому права частина рівності (3) є момент маси (m_1+m_2), зосередженої в одній точці M, центрі ваги системи двох точок.

Те ж саме стосується до системи, яка складається з довільного числа матеріальних точок з масами $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Якщо $y_1, y_1, y_3, \ldots, y_n$ є віддалі цих точок від основної площини, то момент усієї системи дорівнює:

$$(m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n)=(m_1+m_2+\ldots+m_n)y, \tag{4}$$

де

$$y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

З аналітичної геометрії і механіки відомо, що значення y є віддаль від тієї самої площини центра ваги системи M. Разом з тим рівність (4) виражає таку загальну теорему:

Момент системи матеріальних точок відносно площини збігається з моментом центра ваги цієї системи точок відно-

сно тієї самої площини, якщо в ньому зосередити всю масу системи.

Аналогічну теорему маємо для моменту матеріальної системи відносно осі, якщо всі точки системи лежать в одній площині з віссю.

38. Центр ваги. Під центром ваги лінії, поверхні або тіла розуміють центр ваги матеріальної лінії, матеріальної поверхні або матеріального тіла (як ці терміни розуміють у механіці), якщо вони складаються з однорідної речовини. Густість речовини тут не має значення, тому ми вважатимемо, що вона дорівнює одиниці. Тоді маса лінії, поверхні, тіла виражається тим самим числом, що й довжина лінії, площа поверхні, об'єм тіла. Як і у випадку системи окремих матеріальних точок, центр ваги матеріальної лінії, поверхні й тіла є та точка, в якій можна зосередити всю масу системи, не змінюючи її моменту відносно будьякої осі (для плоскої лінії або фігури) або будьякої площини.

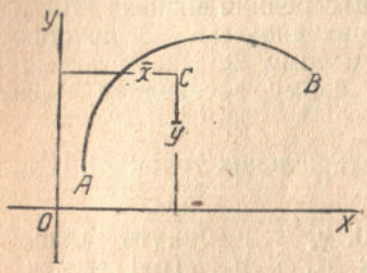

Рис. 47.

Нехай $C(\bar{x}, \bar{y})$ буде центр ваги дуги AB плоскої кривої (рис. 47) і нехай s її довжина. Тоді момент цієї дуги відносно осі абсцис виражається числом

$$\int_A^B y\,ds.$$

З другого боку, маса дуги виразиться, як і її довжина, числом s. Якщо ця маса буде вся зосереджена в центрі ваги дуги, то момент її буде $s\bar{y}$. Згідно з означенням центра ваги

$$s\bar{y} = \int_A^B y\,ds,$$

звідки

$$\bar{y} = \frac{1}{s}\int_A^B y\,ds.$$

Так само добудемо:

$$\bar{x} = \frac{1}{s}\int_A^B x\,ds.$$

Границями інтегрування є значення незалежної змінної, від якої залежить інтеграл у крайніх точках A і B, між якими інтегрування відбувається.

Нехай $C(\bar{x}, \bar{y})$ буде центр ваги плоскої фігури (рис. 48 і 49). Поділимо площу її на смужки і нехай (x, y) буде центр ваги смужки dA. Тоді момент усієї площі відносно осі x-ів дорівнює:

$$\int y\,dA.$$

Коли б маса всієї фігури була зосереджена в точці C, то момент дорівнював би $A\bar{y}$, де A є вся площа. Отже

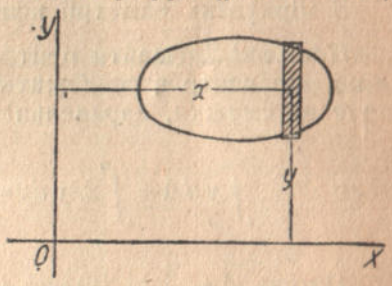

Рис. 48.

$$A\bar{y} = \int y\,dA,$$

або

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int y\,dA.$$

Так само

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int x\,dA.$$

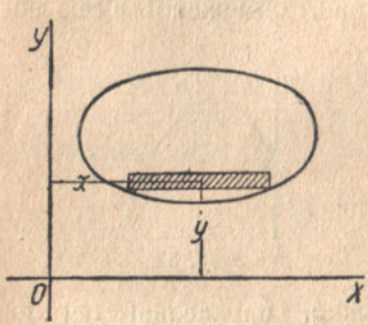

Рис. 49.

Звичайно смуги беруться паралельними осям координат; але ділити можна й інакше, якщо це чимсь зручно.

Приклад 1. Знайти центр ваги дуги, яка становить чверть кола. Візьмемо центр круга за початок і розгляньмо дугу, що є між додатними напрямами обох осей (рис. 50). Нехай $x^2+y^2=a^2$ буде рівняння кола. Тоді

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{a}{y}\,dx$$

і

$$\int y\,ds = \int_0^a y \cdot \frac{a}{y}\,dx = a^2.$$

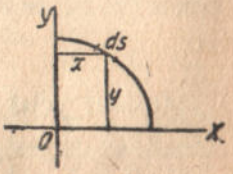

Рис. 50.

З другого боку, довжина дуги дорівнює

$$s = \frac{1}{4}(2\pi a) = \frac{\pi}{2}a.$$

Виходить,

$$\bar{y}=\frac{\int y\,ds}{s}=\frac{2a}{\pi}.$$

З міркувань симетрії ясно, що $\bar{x}$ має те саме значення.

Приклад 2. Знайти центр ваги півкруга. З симетрії цілком ясно, що центр ваги лежить на осі y-ів (рис. 51). Поділімо півкруг на смужки, паралельні осі x-ів. В такому разі $dA=2x\,dy$ і

$$\int y\,dA=\int 2xy\,dy=2\int_0^a y\sqrt{a^2-y^2}\,dy=\frac{2}{3}a^3.$$

Площа $A=\frac{\pi}{2}a^2$. Отже ордината центра ваги

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\int y\,dA=\frac{4a}{3\pi}.$$

Приклад 3. Знайти центр ваги площі, обмеженої віссю абсцис і параболою $y=2x-x^2$.

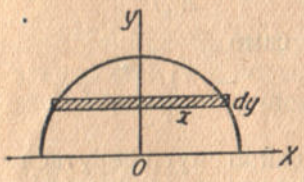

Рис. 51.

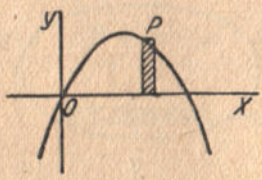

Рис. 52.

Поділімо нашу площу на смужки, паралельні осі y-ів (рис. 52). Якщо (x, y) є координати вершини смужки, то центр ваги її є $\left(x, \frac{y}{2}\right)$. Отже, момент смужки відносно осі y-ів є

$$\frac{y}{2}\cdot dA=\frac{1}{2}y^2\,dx.$$

Момент усієї площі відносно осі OX дорівнює

$$\int\frac{y^2}{2}\,dx=\int_0^2\frac{1}{2}(2x-x^2)^2\,dx=\frac{8}{15}.$$

Площа нашої фігури

$$A=\int y\,dx=\int_0^2(2x-x^2)\,dx=\frac{4}{3}.$$

Виходить, $\bar{y}=\frac{2}{5}$. Так само

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dA}{A}=\frac{\int_0^2 (2x^2-x^3)\,dx}{A}=1.$$

Центр ваги лінії, поверхні, тіла або маси в просторі визначається, як вище. Це точка в якій може бути зосереджена вся маса лінії, поверхні, тіла без зміни моменту відносно будьякої площини. Щоб відшукати центр ваги маси, яка займає певний об'єм, переріжмо його на шари маси Δm. Якщо (x, y, z) є центр ваги шара, то його момент відносно площини xy дорівнює $z\Delta m$, а момент усієї маси дорівнює

$$\lim_{\Delta m\to 0}\sum z\,\Delta m=\int z\,dm.$$

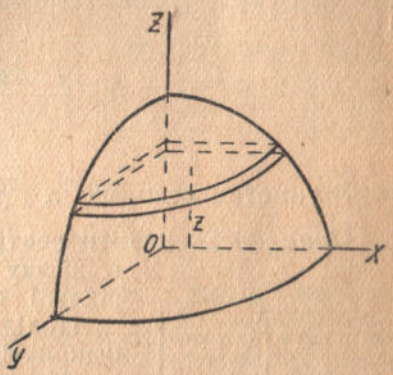

Рис. 53.

Якщо ми всю масу тіла M зосередимо в центрі ваги його $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, то її момент відносно площини xy буде $\bar{z}M$. Виходить:

$$\bar{z}M=\int z\,dm,$$

або

$$\bar{z}=\frac{\int z\,dm}{M}. \tag{5}$$

Так само

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dm}{M},\quad \bar{y}=\frac{\int y\,dm}{M}. \tag{6}$$

Як відомо, маса одиниці об'єму зветься густістю. Тому, якщо dv є об'єм елемента маси dm, а ρ — його густість, то

$$dm=\rho\,dv.$$

Щоб відшукати центр ваги лінії, поверхні або тіла, треба в цій формулі припустити $\rho=1$, а M замінити відповідно через s, S або v.

Приклад 1. Знайти центр ваги восьмої частини кулі, що між площинами координат (рис. 53).

У даному випадку об'єм шару

$$dv=\frac{1}{4}\pi r^2\,dz=\frac{1}{4}\pi(a^2-z^2)\,dz.$$

Виходить:

$$\int z\,dv = \int_0^a \frac{1}{4}\pi(a^2 - z^2)\,z\,dz = \frac{\pi}{16}a^4.$$

Об'єм октанта сфери дорівнює $\frac{1}{6}\pi a^3$. Тому

$$\bar{z} = \frac{\int z\,dv}{v} = \frac{\frac{\pi}{16}a^4}{\frac{\pi}{6}a^3} = \frac{3}{8}a.$$

З симетрії ясно, що $\bar{x}$ і $\bar{y}$ мають те саме значення.

Приклад 2. Знайти центр ваги прямого кругового конуса, в якому густість зростає пропорціонально віддалі шару від основи.

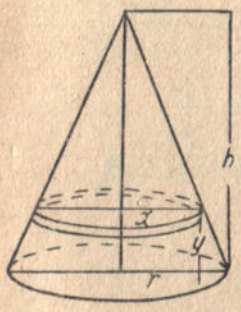

Рис. 54.

Поділимо конус на шари, паралельні основі. Нехай y буде віддаль шару від основи. Нехтуючи нескінченно малими вищих порядків, можна припустити, що об'єм шару дорівнює $\pi x^2\,dy$, а густість його дорівнює ky, де k — стала. Виходить, маса шару

$$dm = k\pi x^2 y\,dy.$$

З подібності трикутників легко виявити, що

$$x = \frac{r}{h}(h - y).$$

Отже

$$\int y\,dm = \int_0^h \frac{k\pi r^2}{h^2}(h-y)^2 y^2\,dy = \frac{k\pi r^2 h^3}{30},$$

$$M = \int dm = \int_0^h \frac{k\pi r^2}{h^2}(h-y)^2 y\,dy = \frac{k\pi r^2 h^2}{12}.$$

Разом з тим остаточно

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dm}{M} = \frac{2}{5}h.$$

Вправи

1. Вітер рівномірно тисне на прямокутні двері. Обчислити момент сили, яка намагається повернути двері на завісах.

2. Обчислити момент тиску води на прямокутну заслінку відносно горизонтальної осі, яка проходить через її центр, якщо рівень води досягає верхньої грані заслінки.

3. Трикутник, який має за основу b і висоту h, занурений у воду так, що основа його лежить горизонтально, висота вертикально, а вершина лежить над основою на глибині c під поверхнею води. Обчислити момент тиску води на трикутник відносно осі, яка проходить через його вершину паралельно основі.

4. Знайти центр ваги трикутника.

5. Знайти центр ваги сегмента параболи $y^2=ax$, відтятого прямою $x=a$.

6. Знайти центр ваги квадратна еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

7. Знайти центр ваги фігури, обмеженої осями координат і параболою $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$.

8. Знайти центр ваги сегмента кривої $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, розміщеного над віссю абсцис.

9. Знайти центр ваги площі, обмеженої віссю x-ів і однією віткою синусоіди $y=\sin x$.

10. Знайти центр ваги фігури, обмеженої двома параболами $y^2=ax$, $x^2=ay$.

11. Знайти центр ваги фігури, обмеженої верхньою половиною кардіоіди $r=a(1+\cos\theta)$.

12. Знайти центр ваги фігури, обмеженої віссю абсцис і однією віткою циклоіди

$$x=a(\varphi-\sin\varphi), \qquad y=a(1-\cos\varphi).$$

13. Знайти центр ваги фігури, обмеженої одним завитком лемніскати $r^2=a^2\cos 2\theta$.

14. Знайти центр ваги півкола радіуса a.

15. Знайти центр ваги дуги ланцюгової лінії

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

що є між точками, для яких $x=-a$ і $x=a$.

16. Знайти центр ваги дуги кривої $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, розміщеної в першому квадранті.

17. Знайти центр ваги дуги кривої

$$x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y,$$

що є між точками, для яких $y=1$ і $y=2$.

18. Знайти центр ваги вітки циклоіди

$$x=a(\varphi-\sin\varphi), \qquad y=a(1-\cos\varphi).$$

19. Знайти центр ваги однорідного прямого круглого конуса.

20. Знайти центр ваги однорідної півкулі.

21. Знайти центр ваги тіла, яке утворюється від обертання навколо осі OX фігури, обмеженої параболою $y^2=4x$ і прямою $x=4$.

22. Знайти центр ваги півкулі, густість якої пропорціональна віддалі від площини її основи.

23 Знайти центр ваги тіла, утворюваного обертанням кругового сектора навколо одного з радіусів, що обмежують його.

24. Знайти центр ваги тіла, яке утворюється при обертанні кардіоіди,

$$r=a(1+\cos\theta)$$

навколо початкової прямої.

25. Знайти центр ваги тіла, відтятого від прямого круглого циліндра площиною, яка проходить через діаметр основи і утворює з основою кут α.

26. Знайти центр ваги поверхні півсфери.

27. Показати, що центр ваги сферичного пояса лежить посередині між основами пояса.

28. Сегмент параболи $y^2=2ax$, відтятої прямою $x=a$, обертається навколо осі x-ів. Знайти центр ваги утворюваної поверхні.

39. Теорема Паппа. Теорема I. *Якщо дуга будьякої плоскої кривої обертається навколо осі, яка лежить у площині цієї дуги, але її не перетинає, то величина утвореної поверхні обертання числово дорівнює добуткові з довжини обертової дуги на довжину путі, описаної центром ваги цієї дуги.*

Теорема II. *Якщо плоска фігура обертається навколо осі, яка лежить в її площині, але цієї фігури не перетинає, то об'єм утвореного тіла обертання числово дорівнює добуткові з площі обертової фігури на довжину путі, описаної її центром ваги.*

Щоб довести першу теорему, припустимо, що дуга обертається навколо осі x-ів. Ордината її центра ваги

$$\bar{y}=\frac{\int y\,ds}{s},$$

звідки

$$2\pi\int y\,ds=2\pi\bar{y}s.$$

Але ліва частина цієї рівності являє собою числово величину поверхні, яка утворюється при цьому обертанні [див. рубр. 34 і, зокрема, формулу (3)]. З другого боку, $2\pi\bar{y}$ є довжина путі, описаної центром ваги дуги. Рівність виражає, значить, теорему, яку треба довести.

Щоб довести другу теорему, припустимо, що фігура, про яку йде мова, обертається навколо осі x-ів. Тоді рівність

$$\bar{y}=\frac{\int y\,dA}{A}$$

дає

$$2\pi\int y\,dA=2\pi\bar{y}A.$$

Через те, що $2\pi \int y\,dA$ є об'єм тіла обертання [рубр. 29, (7)], то ця рівність виражає теорему II.

Приклад 1. Обчислити поверхню тора, утвореного обертанням круга радіуса a навколо осі, яка лежить в його площині і є на віддалі від центра його на $b\,(b > a)$.

Коло круга дорівнює $2\pi a$, а довжина путі, пройденої при обертанні центром круга, дорівнює $2\pi b$, а тому поверхня тора, на підставі теореми I, дорівнює

$$S = 2\pi a \cdot 2\pi b = 4\pi^2 ab.$$

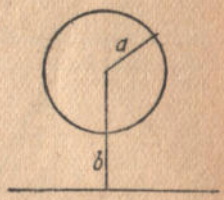

Рис. 55.

Приклад 2. Знайти центр ваги півкруга, користуючись теоремою Паппа.

Якщо півкруг обертається навколо свого діаметра, то об'єм утвореної ним кулі дорівнює $\frac{4}{3}\pi a^3$. Якщо $\bar{y}$ є віддаль центра ваги півкруга від цього діаметра, то, на підставі другої теореми Паппа,

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = 2\pi \bar{y} \cdot A = 2\pi \bar{y} \cdot \frac{1}{2}\pi a^2,$$

звідки

$$\bar{y} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{\pi^2 a^2} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Приклад 3. Обчислити об'єм, утворений при обертанні кардіоіди

$$r = a\,(1 + \cos\theta)$$

навколо початкової осі.

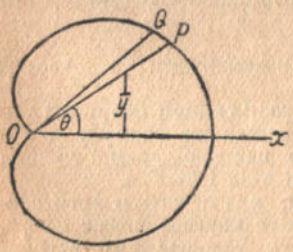

Рис. 56.

Площа трикутника OPQ приблизно дорівнює (рубр. 28)

$$\frac{1}{2} r^2 \Delta\theta;$$

центр ваги цього трикутника є на віддалі від вершини, яка дорівнює $\frac{2}{3}$ віддалі від вершини до основи. Виходить,

$$\bar{y} = \frac{2}{3} r \sin\theta.$$

За другою теоремою Паппа, об'єм тіла, утворюваного обертанням трикутника OPQ з точністю до нескінченно малих вищого порядку, дорівнює

$$2\pi \bar{y}\,\Delta A = \frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta\, d\theta.$$

Тому об'єм усього тіла обертання дорівнює

$$v=\int_0^{\pi}\frac{2}{3}\pi r^3\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta=$$

$$=-\frac{2}{3}\pi a^3\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{8}{3}\pi a^3.$$

Вправи

1. Користуючись теоремою Паппа, обчислити об'єм і бокову поверхню прямого кругового конуса.

2. Обчислити об'єм тора, утвореного обертанням круга радіуса a навколо осі, яка лежить в його площині на віддалі b від його центра ($b>a$).

3. На циліндрі, що має в діаметрі 6 см, кругом уздовж поверхні, вирізано канал, що має поперечним перерізом рівносторонній трикутник з стороною 0,5 см. Обчислити об'єм зрізаного матеріалу.

4. Циліндричний котел, який має в діаметрі 48 см, обвитий стальною стьожкою, переріз якої є півеліпс. Більша вісь еліпса дорівнює 6 см і лежить на поверхні котла вздовж твірної; менша вісь має $\sqrt{6}$ см. Обчислити об'єм стальної стьожки.

5. Довжина вітки циклоїди

$$x=a(\varphi-\sin\varphi),\qquad y=a(1-\cos\varphi)$$

дорівнює $8a$, а поверхня, утворювана обертанням циклоїди навколо осі x-ів, дорівнює $\frac{64}{3}\pi a^2$. Обчислити поверхню, утворювану обертанням тієї самої вітки циклоїди навколо дотичної у верхній її точці.

6. Обчислити об'єм тіла, утворюваного обертанням лемніскати $r^2=2a^2\cos 2\theta$ навколо осі x-ів.

7. Знайти формулу, яка виражає об'єм, що утворюється при обертанні полярного елемента площі навколо прямої $x=-a$. Прикласти цю формулу до обчислення об'єму тіла, яке утворюється від обертання навколо прямої $x=-a$ кругового сектора радіуса a, обмежуваного радіусами $\theta=\alpha$ і $\theta=-\alpha$.

8. Круг змінного радіуса обертається навколо осі, яка лежить в його площині; віддаль центра круга від осі дорівнює $2a$, а радіус круга дорівнює $a\sin\theta$, де θ — кут, на який круг повернувся. Обчислити об'єм утворюваного рогоподібного тіла.

9. Чи можна аналогічним способом обчислити поверхню тіла, про яке йде мова в попередній задачі.

10. Вершина прямого кругового конуса лежить на поверхні прямого круглого циліндра, а вісь конуса перетинає вісь циліндра під прямим кутом. Обчислити об'єм тіла, обмежуваного конусом і циліндром. (Скористатися перерізами, утворюваними площинами, які проходять через вершину конуса і твірні циліндра).

40. Момент інерції. Момент інерції матеріальної точки відносно осі є добуток її маси на квадрат її віддалі від осі.

Щоб обчислити момент інерції суцільної маси відносно осі, треба її поділити на дуже малі частини так, щоб віддалі окремих точок кожної частини від осі відрізнялись одна від одної на нескінченно малу. Нехай Δm буде маса такої частини, а R —

віддаль будьякої її точки від осі. Нехтуючи нескінченно малими вищого порядку, беремо $R^2\Delta m$ за момент інерції цієї частини відносно осі. Тоді момент інерції всієї маси

$$J=\lim_{\Delta m\to 0}\sum R^2\,\Delta m=\int R^2\,\Delta m. \qquad (7)$$

Під моментом інерції лінії, поверхні або тіла ми розуміємо значення, якого набере той самий вираз (7), якщо замінити dm диференціалом довжини, площі або об'єму; отже dm тепер являє собою диференціал однорідної маси, яка має форму лінії, поверхні або заданого тіла (при густості, що дорівнює 1).

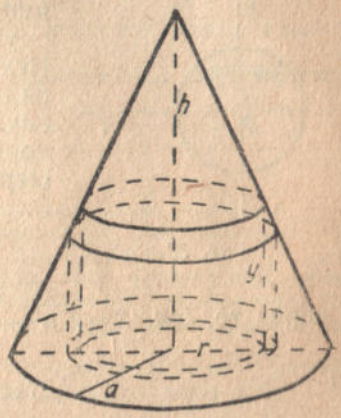

Рис. 57.

Приклад 1. Обчислити момент інерції прямого кругового конуса сталої густості відносно осі цього конуса.

Нехай ρ буде густість, h висота, a радіус основи конуса. Поділімо конус на шари, що мають форму порожнистих циліндрів за допомогою циліндричних поверхень, які мають ту саму вісь, що й конус. З подібності трикутників легко бачити, що висота циліндричного шару y і радіус його внутрішньої основи r зв'язані співвідношенням

$$\frac{y}{h}=\frac{a-r}{a}.$$

Нехтуючи нескінченно малими вищих порядків, можна вважати об'єм, що є між циліндричними поверхнями радіуса r і $r+\Delta r$, за рівний

$$\Delta v=2\pi ry\,\Delta r=\frac{2\pi h}{a}\,r\,(a-r)\,\Delta r.$$

Перший вираз, по суті, збігається з виразом, що стоїть під знаком інтеграла в формулі (6) [рубр. 29] і що також виражає об'єм нескінченно тонкого порожнього циліндра; тільки тут треба y замінити через r, а h через y. Тому момент інерції

$$J=\int r^2\,dm=\int r^2\rho\,dv=\frac{2\pi h\rho}{a}\int_0^a r^3(a-r)dr=\frac{\pi\rho h a^4}{10}.$$

Маса конуса

$$M=\rho v=\frac{1}{3}\pi\rho a^2 h,$$

тому

$$J=\frac{3}{10}Ma^2.$$

Приклад 2. Обчислити момент інерції круга відносно одного з його діаметрів.

Нехай a буде радіус круга, а вісь абсцис напрямлена по діаметру, відносно якого треба обчислити момент інерції. Поділимо площу круга на смужки прямими, паралельними осі абсцис. Нехтуючи нескінченно малими вищого порядку, ми можемо припустити, що площа смужки дорівнює $2x\Delta y$, а її момент інерції дорівнює $2xy^2\Delta y$. Згідно з цим момент інерції всього круга

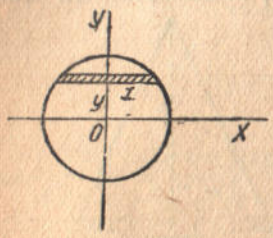

Рис. 58.

$$J=\int_{-a}^{a}2xy^2\,dy;$$

а через те, що $x=\sqrt{a^2-y^2}$, то

$$J=2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,y^2dy.$$

Щоб обчислити цей інтеграл, перейдемо до полярних координат, тобто припустимо,

$$y=a\sin\theta,\quad dy=a\cos\theta\,d\theta.$$

Тоді

$$J=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^4\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{a^4}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta.$$

З другого боку,

$$\sin^2 2\theta=\frac{1-\cos 4\theta}{2},$$

а тому

$$J=\frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta-\frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta\,d\theta.$$

Перший інтеграл дорівнює π, а другий дорівнює нулеві; тому

$$J=\frac{\pi a^4}{4}.$$

Вправи

1. Обчислити момент інерції прямокутника відносно одної з його сторон.
2. Обчислити момент інерції трикутника відносно його основи.
3. Обчислити момент інерції трикутника відносно осі, що проходить через його вершину паралельно основі.
4. Обчислити момент інерції відносно осі y-ів фігури, обмеженої параболою $y^2 = 4ax$ і прямою $x = a$.
5. Обчислити момент інерції тієї самої фігури відносно прямої $x = a$.
6. Обчислити момент інерції круга відносно осі, яка проходить через центр круга перпендикулярно до його площини.
7. Обчислити момент інерції циліндра, радіус якого дорівнює a, а маса дорівнює M, навколо його осі.
8. Обчислити момент інерції кулі, маса якої дорівнює M, а радіус дорівнює a, навколо одного з її діаметрів.
9. Еліпсоід утворився через обертання еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

навколо осі x-ів. Обчислити його момент інерції навколо осі обертання.

10. Обчислити момент інерції півсфери відносно осі, яка проходить через центр півсфери перпендикулярно до площини, яка її обмежує.
11. Довести, що момент інерції тіла (поверхні, лінії) відносно якої завгодно осі дорівнює моментові інерції відносно паралельної їй осі, яка проходить через центр ваги цього тіла (поверхні, лінії), складеному з добутком з маси тіла (поверхні, лінії) на квадрат віддалі між осями.
12. Користуючись розвя'зком вправи 6 і теоремою, викладеною у вправі 11, визначити момент інерції круга відносно осі, яка проходить через точку на його периферії перпендикулярно до його площини.

41. Робота, виконувана силою. До певної точки якогось тіла прикладена сила. Коли тіло рухається, сила виконує роботу. Якщо сила залишається сталою щодо величини і напряму, то робота, виконувана силою, дорівнює добуткові з величини сили на віддаль, пройдену точкою прикладення сили в напрямі її. Це значить

$$W = F \cdot s, \tag{8}$$

де W є робота, виконана силою, F — величина сили, а s — віддаль, пройдена в напрямі сили[1]. Якщо тіло рухається прямолінійно і напрям руху збігається з напрямом сили, то s просто є путь, пройдена тілом. Якщо ж напрям руху не збігається з напрямом сили, то виконана робота дорівнює добуткові з сили на проекцію переміщення на напрям сили. Виходить, коли тіло пересувається з положення A в положення B (рис. 59), то робота сили

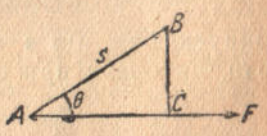

Рис. 59.

$$W = Fs\cos\theta, \tag{9}$$

бо путь AC, пройдена в напрямі сили, в даному випадку дорівнює $s\cos\theta$.

---

[1] Тут припускається, що тіло виконує переносний рух, тобто всі його точки проходять рівні й паралельні путі.

Якщо сила під час руху змінюється, то ми ділимо пройдену путь на дуже малі частини Δs. Рухаючись по елементу путі Δs, сила приблизно зберігає стале значення, так що робота, виконувана силою на цій частині путі, дорівнює $F\cos\theta\,\Delta s$ (рис. 60). В міру того, як інтервали Δs дедалі меншають, це наближене значення щораз менше відрізняється від справжньої величини роботи. В границі ми й добуваємо точне значення наведеної роботи

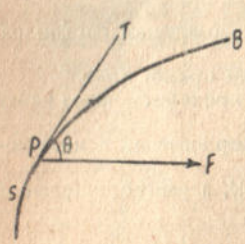

Рис. 60.

$$W=\lim_{\Delta s\to 0}\sum F\cos\theta\,\Delta s=\int F\cos\theta\,ds. \qquad (10)$$

На цю рівність слід дивитися, як на визначення роботи, виконуваної силою при будьякому русі.

Щоб визначити значення W, виражаємо $F\cos\theta$ і ds через одну змінну. Границями інтегрування є значення цієї змінної на кінцях путі. Якщо переміщення відбувається в напрямі сили, то $\theta=0$, $\cos\theta=1$ і

$$W=\int F\,ds. \qquad (11)$$

Приклад 1. Стиск гвинтової пружини пропорціональний прикладеній силі. Обчислити роботу, виконувану при стиску пружини на 4 см, якщо для стиску її на 1 см потрібна сила в 1 кг.

Нехай s буде стиск пружини, виражений у метрах; тоді

$$F=ks,$$

де k є стала. При $s=0{,}01$, $F=1$ кг; виходить, $k=100$ і попередня рівність дає

$$F=100\,s,$$

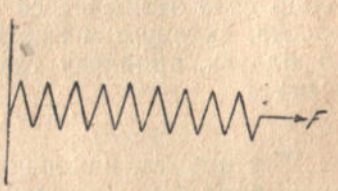

Рис. 61.

припускаючи, що s виражено в метрах, а F в кілограмах. Робота, виконана при стискові пружини на 4 см (0,04 м), дорівнює

$$\int_0^{0.04} F\,ds=\int_0^{0{,}04} 100s\,ds=\left[50s^2\right]_0^{0{,}04}=0{,}08 \text{ кілограмометра.}$$

Приклад 2. Газ міститься в циліндрі з рухомим поршнем. Застосовуючи закон Бойля-Маріотта $pv=k$, обчислити роботу, виконувану тиском газа при виштовхуванні поршня (рис. 62).

Нехай v буде об'єм газу в циліндрі, а p тиск на одиницю площі поршня. Якщо площа поршня виражається числом A, то

тиск на нього газу дорівнює pA. Якщо s є віддаль, на яку просувається поршень, то

$$W=\int_{s_1}^{s} pA\,ds.$$

Але приріст об'єму dv при просуванні поршня на віддаль ds дорівнює $A\,ds$, тобто

$$A\,ds=dv,\quad W=\int_{v_1}^{v_2} p\,dv=$$

$$=\int_{v_1}^{v_2}\frac{k}{v}\,dv=k\ln\frac{v_2}{v_1}.$$

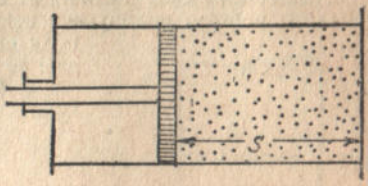

Рис. 62.

Це є робота, виконувана тиском газу, коли він розширяється від об'єму v_1 до об'єму v_2.

Приклад 3. Сила F, з якою електричний заряд e_1 відштовхує заряд e_2 на віддаль r, дорівнює

$$\frac{ke_1e_2}{r^2},$$

де k є стала. Обчислити роботу, виконувану силою, коли заряд e_2 переходить з віддалі $r=a$ на віддаль $r=b$, тоді як заряд e_1 залишається нерухомим.

Припустімо, що заряд e_2 просувається по путі AB (рис. 63). Робота, виконана силою відштовхування, дорівнює

$$W=\int F\cos\theta\,ds,$$

де θ — кут між радіусом-вектором і напрямом путі. Якщо проведемо дугу CE круга, то e_2E є приріст віддалі dr; з прямокутного трикутника e_2EC добудемо $dr=ds\cos\theta$. Тому

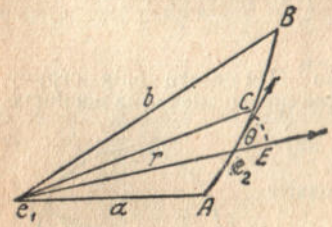

Рис. 63.

$$W=\int F\cos\theta\,ds=\int F\,dr=\int_a^b\frac{ke_1e}{r^2}\,dr=ke_1e_2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

Робота залежить лише від початкового і кінцевого положення заряду (тобто від положення точок A і B), а не від путі, по якій відбувалося переміщення.

Вправи

1. За законом Гука, сила, потрібна для розтягу стрижня з довжини a до довжини $a+x$, дорівнює

$$\frac{kx}{a},$$

де k є стала. Обчислити роботу, виконувану при розтязі стрижня від довжини a до довжини b.

2. Вважаючи силу тяжіння за обернено пропорціональну квадратові віддалі, обчислити роботу, виконувану нею під час падання на землю метеора в w кг, коли він проходить путь з необмежено великої віддалі до поверхні землі.

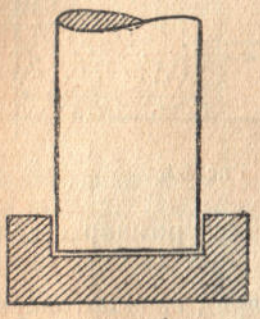

Рис. 64.

3. Якщо газ розширяється без зміни температури, то за законом Ван-дер-Вальса

$$p=\frac{c}{v-b}-\frac{a}{v^2},$$

є a, b, c є сталі. Обчислити роботу, виконувану тиском газу, коли він розширяється від об'єму v_1 до об'єму v_2 (умови прикладу 2 на стор. 96).

4. Робота, яку треба затратити, щоб підняти тіло від однієї висоти до другої, виражена в кілограмометрах, дорівнює добуткові ваги тіла в кілограмах на висоту підняття, виражену в метрах. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб викачати воду з циліндричної цистерни, яка має радіус a і глибину b метрів.

5. Вертикальний вал спирається на підп'ятник (рис. 64). Сила тертя між невеликою частиною основи вала і прилеглою до неї поверхнею опори дорівнює μp, де p є тиск на відповідну частину поверхні опори, а μ — стале число. Вважаючи, що тиск на одиницю площі однаковий у всіх точках поверхні опори, а вага вала з тягарем дорівнює P, обчислити роботу сили тертя при одному обороті вала.

6. Коли електричний струм протікає по однорідному провіднику з поперечним перерізом A і довжиною x, то опір дорівнює

$$\frac{kx}{A},$$

де k є стала, яка залежить від матеріалу провідника. Обчислити опір струму, коли він проходить з внутрішньої поверхні порожнистого циліндра на зовнішню, якщо радіуси цих поверхень є a і b.

7. Обчислити опір при проходженні струму з внутрішньої на зовнішню поверхню порожнистої кулі.

8. Обчислити опір при проходженні струму з однієї основи зрізаного конуса до другої.

9. Коли електричний струм i проходить уздовж безконечно малого відрізка AB (рис. 65), він збуджує в точці O магнітну силу (перпендикулярну до площини рисунка), яка дорівнює

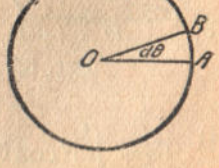

Рис. 65.

$$\frac{i\,d\theta}{r},$$

де r — віддаль між елементом AB і O. Обчислити магнітну силу в центрі кола, по якому тече струм i.

10. Обчислити магнітну силу на віддалі c від необмеженої прямої, вздовж якої тече струм i.

НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ОЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

42. Параболічна формула. Нехай y_1 і y_3 будуть ординати двох точок кривої, h — віддаль між ними, y_2 — ордината, яка проходить якраз посередині між першими двома ординатами. Площа, обмежена віссю абсцис, кривою і ординатами y_1 і y_3, наближено виражається формулою

$$S=\frac{1}{6}h(y_1+4y_2+y_3). \qquad (1)$$

Формула ця зветься *параболічною*, бо вона цілком точна для кривих, виражених рівняннями виду

$$y=a+bx+cx^2+dx^3, \qquad (2)$$

де a, b, c, d є сталі. Деякі з цих сталих можуть дорівнювати нулеві. Якщо $d=0$, то крива є звичайна парабола або парабола 2-го порядку. Якщо $d\neq 0$, то крива зветься параболою 3-го порядку.

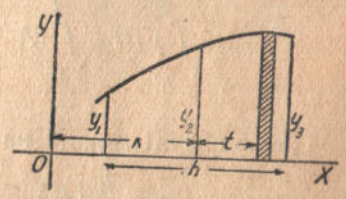

Рис. 66.

Насамперед доведемо, що формула (1) дійсно вірна для кривої (2). Щоб це зробити якнайпростіше, позначимо через k абсцису середньої ординати, а через t позначимо віддаль від неї до будьякої іншої ординати (рис. 66). Тоді

$$x=k+t.$$

Якщо в рівняння кривої (2) підставимо замість x цю суму, то воно набере виду:

$$y=A+Bt+Ct^2+Dt^3$$

де A, B, C і D є сталі. Ординати y_1, y_2, y_3 відповідають значенням параметра

$$t=-\frac{h}{2},\ 0,\ \frac{h}{2}.$$

Тому

$$y_1=A-\frac{Bh}{2}+\frac{Ch^2}{4}-D\frac{h^3}{8},$$

$$y_2=A,$$

$$y_3=A+\frac{Bh}{2}+\frac{Ch^2}{4}+D\frac{h^3}{8}.$$

Через те

$$y_1+y_3=2A+\frac{1}{2}Ch^2, \qquad y_1+4y_2+y_3=6A+\frac{1}{2}Ch^2.$$

З другого боку, за основною формулою (4) [рубр. 19] потрібна площа

$$S=\int_{x_1}^{x_3} y\,dx,$$

а через те, що $dx=dt$ і $t=-\frac{h}{2}$ при $x=x_1$ і $t=\frac{h}{2}$ при $x=x_3$, то

$$S=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y\,dt=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(A+Bt+Ct^2+Dt^3)\,dt=Ah+C\frac{h^3}{12}.$$

Цій формулі можна надати виду

$$S=\frac{h}{6}\left(6A+\frac{1}{2}Ch^2\right)=\frac{h}{6}(y_1+4y_2+y_3),$$

і формула (1), виходить, доведена.

Якщо рівняння кривої не має виду (2), то її звичайно можна наближено виразити рівнянням цього виду, а тому й формула дає наближене значення площі. Дуже важливо, звичайно, оцінити границі похибки, яку ми тут припускаємо; це можна знайти в курсах теорії скінченних різниць.

Ми ілюстрували параболічну формулу площею кривої; але її з таким же правом можна застосувати для обчислення довжини, об'єму, взагалі всякої величини, вираженої означеним інтегралом

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Такий інтеграл можна розглядати як значення площі, зображеної на рис. 66, коли крива виражається рівнянням $y=f(x)$, тому його можна обчислити за тією самою формулою (1), якщо в ній покласти

$$y_1=f(a), \quad y_2=f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad y_3=f(b), \quad h=b-a;$$

інакше кажучи, наближено

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{(b-a)}{6}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}. \qquad (3)$$

Приклад 1. Обчислити площу, обмежену віссю абсцис, кривою $y=e^{-x^2}$ і ординатами, які відповідають абсцисам $x=0$ і $x=2$.

Інтеграл

$$\int e^{-x^2}dx$$

не можна виразити в елементарних функціях. Тому обчислити інтеграл методами, викладеними в попередніх розділах ми не можемо; але параболічна формула дає наближене його значення. В даному випадку

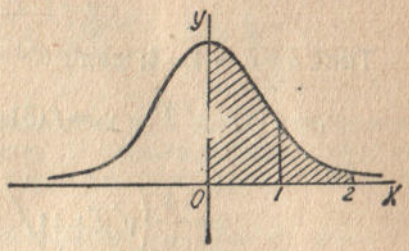

Рис. 67.

$$y_1=1, \quad y_2=e^{-1}, \quad y_3=e^{-4}.$$

Тому параболічна формула дає

$$S=\frac{2}{6}\left(1+\frac{4}{e}+\frac{1}{e^4}\right)=0{,}830.$$

В дійсності результат, обчислений з точністю до 3-го десяткового знака, є 0,882. Отже, помилка трохи перебільшує 0,05.

Приклад 2. Обчислити довжину дуги параболи $y^2=4x$, що є між точками, для яких $x=1$ і $x=5$.

Щоб скористатися формулою,

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_1^5\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

даною у рубр. 32, треба похідну $\frac{dy}{dx}$ виразити через x. Диференціюючи рівняння кривої, добудемо

$$y\frac{dy}{dx}=2, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{4}{y^2}=\frac{1}{x}.$$

Отже,

$$s=\int_1^5\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx.$$

Щоб скористатися параболічною формулою, припустимо:

$$y=f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}.$$

Тоді $h=5-1=4$; далі:

$$y_1=f(1)=\sqrt{2},\quad y_2=f(3)=\sqrt{\frac{4}{3}},\quad y_3=f(5)=\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Тому

$$s=\frac{4}{6}\left(\sqrt{2}+4\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=4{,}752.$$

Значення, точне до 0,001, є 4,726.

Приклад 3. Обчислити об'єм еліпсоїда обертання, утворюваного обертанням еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

навколо осі x-ів.

Переріз еліпсоїда площиною, перпендикулярною до осі x-ів має площу

$$S=\pi y^2=\pi b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

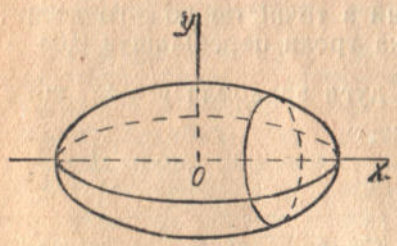

Рис. 68.

Об'єм виражається формулою (8) [рубр. 30]

$$V=\int_{-a}^{a} s\,dx.$$

Тому що S виражається через x поліномом другого степеня [що становить окремий випадок полінома третього степеня (2)], то параболічна формула дає точний результат. Площі трьох поперечних перерізів, які відповідають абсцисам $x=-a$, $x=0$, $x=a$, мають значення:

$$S_1=0,\quad S_2=\pi b^2,\quad S_3=0.$$

Виходить,

$$V=\frac{2a}{6}[S_1+4S_2+S_3]=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

43. Правило Сімпсона. Площу, що є між кривою, віссю абсцис і двома ординатами, поділимо на парне число частин ординатами $y_1, y_2, \ldots, y_n$, однаково віддаленими одна від одної (цих ординат буде потрібно, значить, непарне число). Правило

Сімпсона, яке виражає площу між ординатами y_1 і y_2, виражається формулою:

$$S=h\left(\frac{y_1+4y_2+2y_3+4y_4+2y_5+\ldots+y_n}{1+4+2+4+2+\ldots+1}\right), \qquad (4)$$

де h означає віддаль між ординатами y_1 і y_n. У чисельнику два крайніх коефіцієнта дорівнюють 1. Решта поперемінно дорівнюють 4 і 2. Знаменник же дорівнює сумі коефіцієнтів чисельника [1].

Цю формулу добуваємо, застосовуючи параболічну формулу до смуг, узятих по дві, і складаючи добуті результати. Наприклад, коли площа поділена на 4 смуги ординатами y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, то частина, яка є між ординатами y_1 і y_3, має основу, що дорівнює $\frac{h}{2}$. За параболічною формулою її площа дорівнює

$$\frac{1}{6}\frac{h}{2}(y_1+4y_2+y_3).$$

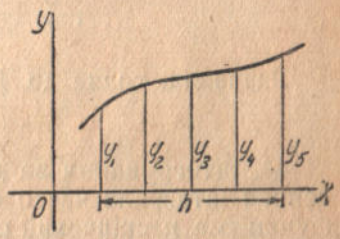

Рис. 69.

Так само площа, що є між ординатами y_3 і y_5, дорівнює

$$\frac{1}{6}\frac{h}{2}(y_3+4y_4+y_5).$$

Сума цих двох доданків і дає потрібну площу:

$$S=h\left(\frac{y_1+4y_2+2y_3+4y_4+y_5}{12}\right).$$

Користуючись досить великим числом ординат, можна досягнути того, щоб формула Симпсона виражала потрібну площу з бажаною точністю. За допомогою цієї формули можна з якою завгодно точністю виразити всякий означений інтеграл.

Приклад. Обчислити за правилом Сімпсона $\ln 5$.
Через те, що

$$\ln 5=\int_1^5\frac{dx}{x},$$

[1] Легко бачити, що знаменник цей дорівнює $3n$, де n — (парне) число частин, на які ми поділили наш інтервал.

то ми припускаємо в формулі Сімпсона $y=\frac{1}{x}$. Якщо поділити інтервал на 4 рівні частини, то добудемо:

$$\ln 5=4\left(\frac{1+4\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{12}\right)=1{,}622.$$

Якщо поділити інтервал на 8 частин, то дістанемо:

$$\ln 5=\frac{4}{24}\left(1+\frac{8}{3}+\frac{2}{2}+\frac{8}{5}+\frac{2}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{8}{7}+\frac{2}{4}+\frac{8}{9}+\frac{1}{5}\right)=1{,}6108.$$

Значення, точне до 4-го десяткового знака, в дійсності є

$$\ln 5=1{,}6094.$$

44. Інтегрування за допомогою рядів. При обчисленні означеного інтеграла часто буває зручно розкласти підінтегральну функцію в нескінчений ряд і інтегрувати його почленно. Зокрема це буває, коли в інтегралі є сталі, числові значення яких не зазначені. Звичайно, спосіб цей придатний лише в тих випадках, коли ряди, якими ми користуємося, збігаються. І в даному випадку треба було б, звичайно, довести, що ми маємо право інтегрувати нескінченний ряд почленно; але це можна зробити тільки в ширшому курсі.

Приклад. Знайти довжину чверті еліпса, яка лежить в першому квадранті. Припустімо, що в рівнянні еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$a>b$. Введемо параметр φ, припускаючи

$$x=a\sin\varphi.$$

Підставляючи це значення x в рівняння еліпса, знайдемо, що

$$y=b\cos\varphi.$$

Користуючись цими виразами для x і y, добудемо:

$$s=\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Це є так званий еліптичний інтеграл. Виразити його за допомогою скінченного числа елементарних функцій неможливо. Через

те ми постараємося виразити його нескінченним рядом. Користуючись біноміальним рядом, добудемо:

$$\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\varphi}=$$

$$=a\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\sin^2\varphi-\frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^2\sin^4\varphi-\ldots\right].$$

А тому, що

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{4},\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,d\varphi=\frac{3\pi}{16},$$

то почленним інтегруванням добуваємо

$$s=a\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)-\frac{3\pi}{128}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^2-\ldots\right]=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\left[1-\left(\frac{a^2-b^2}{4a^2}\right)-\frac{3}{64}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^2-\ldots\right].$$

Якщо числа a і b мало відрізняються одне від одного, то значення s можна за допомогою цього ряду обчислити дуже швидко.

Вправи

1. Показати, що параболічна формула для обчислення означених інтегралів дає цілком точні результати при обчисленні об'ємів таких тіл: a) кулі, b) конуса, c) циліндра, d) піраміди, e) сферичного сегмента, f) зрізаного конуса і g) зрізаної піраміди.

2. Знайти помилку, яку ми припускаємо, коли обчислюємо означений інтеграл $\int_1^5 x^4\,dx$ за допомогою параболічної формули.

В наведених нижче випадках порівняти значення, яке дає параболічна формула, з точним значенням, яке маємо в наслідок прямого інтегрування.

3. Площа обмежена кривою $y=\sqrt{x}$ і прямими $y=0$, $x=1$ і $x=3$.

4. Дуга кривої $y=x^2$, що є між точками, для яких $x=-2$ і $x=+2$.

5. Об'єм тіла, яке утворюється обертанням фігури, обмеженої віткою синусоїди $y=\sin x$ і віссю абсцис, навколо осі абсцис.

6. Поверхня півсфери.

Обчислити такі означені інтеграли, користуючись формулою Сімпсона при чотирьох інтервалах.

7. $\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$.

8. $\int_1^9\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

9. Довжину дуги кривої $y=\ln x$ між точками, для яких $x=1$ і $x=5$.

10. Поверхня еліпсоїда обертання, який утворюється в наслідок обертання еліпса $x^2+4y^2=4$ навколо осі x-ів.

11. Об'єм тіла, яке утворюється при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y=0$, $y=\frac{1}{1+x^2}$, $x=2$, $x=-2$.

12. Обчислити означений інтеграл

$$\int_0^1 \cos(x^2)\,dx,$$

розкладаючи його в ряд.

13. Виразити інтеграл

$$\int_0^a \frac{\sin(\lambda x)}{x}\,dx.$$

рядом, розміщеним за степенями λ.

14. Обчислити довжину чверті еліпса $x^2+2y^2=2$, що є між головними його осями.

РОЗДІЛ ВОСЬМИЙ

ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

45. Подвійний інтеграл. Під символом

$$\int_a^b\int_c^d f(x, y)\,dx\,dy$$

розуміють результат подвійного, тобто двічі виконаного інтегрування: перше інтегрування по y виконується в границях від c до d, припускаючи, що x залишається сталим; добутий результат інтегрується по x у границях від a до b. За цим означенням перше інтегрування провадиться по тій змінній, диференціал якої займає останнє місце; проте, в деяких працях при тому самому позначенні перше інтегрування виконується по змінній x. При читанні кожної роботи треба знати, якого правила додержується автор.

Приклад. Обчислити значення подвійного інтеграла:

$$\int_0^1\int_{-x}^{x}(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Інтегруємо спочатку по y в границях від $-x$ до $+x$, а потім по x в границях від 0 до 1. Це ще виразніше виявляється при такому позначенні:

$$\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}(x^2+y^2)\,dy.$$

Тепер

$$\int_{-x}^{x}(x^2+y^2)\,dy=\left[\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\right]_{-x}^{x}.$$

Знак підставлення означає, що замість y треба підставити спочатку x, а потім $-x$ і другий результат відняти з першого. Виходить:

$$\int_{-x}^{x} (x^2+y^2)\,dy = \frac{8}{3}\,x^3;$$

а тепер обчислюємо подвійний інтеграл

$$\int_0^1 \int_{-x}^{x} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{8}{3}\,x^3 dx = \frac{2}{3}.$$

46. Вираз площі за допомогою подвійного інтеграла. Припустімо, що нам треба обчислити площу, обмежену знизу й зверху двома кривими $y=f(x)$ і $y=F(x)$, а з боків двома прямими, паралельними осі ординат, $x=a$ і $x=b$ (рис. 70). Для цього поділимо площу цю на смужки прямими, паралельними осі y-ів; через Δx позначимо ширину кожної смужки. Нехай RS буде одна з цих смужок; ми поділимо її знову на нескінченно малі прямокутники прямими, паралельними осі абсцис; вилучимо один такий прямокутник PQ. Нехай (x, y) будуть координати точки P; $(x+\Delta x, y+\Delta y)$—координати точки Q. Тоді площа прямокутника PQ дорівнює $\Delta x \Delta y$. Площа ж прямокутника RS може бути виражена сумою (в границі інтегралом)

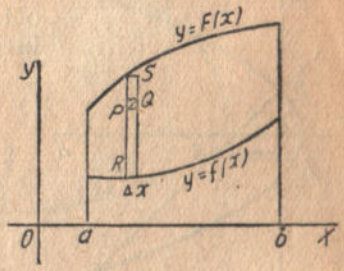

Рис. 70.

$$\Delta x \sum_{f(x)}^{F(x)} \Delta y = \Delta x \int_{f(x)}^{F(x)} dy.$$

Площа ж, що є між ординатами $x=a$ і $x=b$,

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \Delta x \int_{f(x)}^{F(x)} dy = \int_a^b \int_{f(x)}^{F(x)} dx\,dy.$$

Якщо чомусь зручніше поділити площу спочатку на смуги, паралельні осі абсцис, то вона виразиться подвійним інтегралом

$$S = \int\int dy\,dx;$$

границями першого інтегрування мусять бути значення абсциси x на кінцях змінної смуги; границями другого інтегрування мусять бути крайні значення ординати y.

Приклад 1. Припустімо, що на рис. 70 верхня крива є парабола $y=x^2+1$, а друга — парабола $y=\frac{1}{2}x^2+1$; нехай $a=1$, $b=2$. Потрібну площу можна виразити подвійним інтегралом

$$\int_1^2 \int_{\frac{1}{2}x^2+1}^{x^2+1} dx\,dy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x^2+1}^{x^2+1} dy = \int_1^2 \frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{7}{6}.$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y^2=4ax+4a^2$ і прямою $y=2a-x$ (рис. 71).

Розв'язуючи ці рівняння разом, знайдемо, що парабола й пряма перетиняються в точках $A(0, 2a)$ і $B(8a, -6a)$. Проведемо смуги паралельно осі абсцис. Площа виразиться подвійним інтегралом

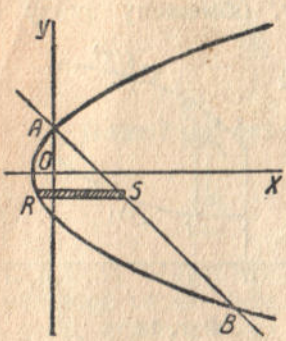

Рис. 71.

$$S=\int_{-6a}^{2a} \int_{\frac{y^2-4a^2}{4a}}^{2a-y} dy\,dx=$$

$$=\int_{-6a}^{2a}\left(2a-y-\frac{y^2-4a^2}{4a}\right)dy=\frac{64}{3}a^2.$$

Границями першого інтегрування будуть значення абсциси x у точках R і S у смузі, яка відповідає довільній ординаті y. Границями другого інтегрування є крайні значення ординати y у точках B і A.

47. Вираз об'єму за допомогою подвійного інтеграла. Треба обчислити об'єм тіла, обмеженого знизу площиною xy, зверху поверхнею $z=f(x, y)$, а з боків циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі z-ів.

Об'єм призми PQ, яка має основою прямокутник $\Delta x\,\Delta y$ (рис. 72), дорівнює

$$z\,\Delta x\,\Delta y.$$

Об'єм шару RT, складеного з таких призм, дорівнює

$$\lim_{\Delta y\to 0}\sum_R^S z\,\Delta x\,\Delta y = \Delta x\int_{f(x)}^{F(x)} z\,dy,$$

де $f(x)$ і $F(x)$ є значення y у точках R і S. Увесь об'єм виразиться границею суми таких шарів:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} \Delta x \int_{f(x)}^{F(x)} z\,dy = \int_{a}^{b} \int_{f(x)}^{F(x)} z\,dx\,dy,$$

де a і b є крайні абсциси контура основи.

Приклад. Обчислити об'єм, обмежений поверхнею

$$az = a^2 - x^2 - 4y^2$$

площиною xy. На рис. 73 зображена чверть цього об'єму.

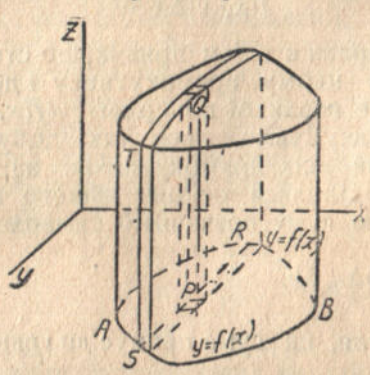

Рис. 72.

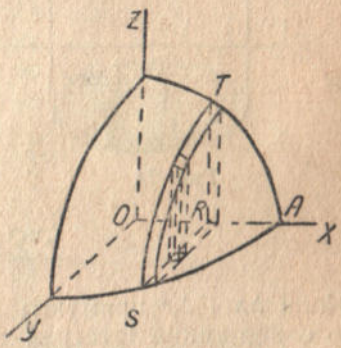

Рис. 73.

В точці R $y=0$. На контурі AS $z=0$; тому рівняння контура добудемо, припустивши в рівнянні поверхні $z=0$; воно має вид $0=a^2-x^2-4y^2$, а тому на цьому контурі

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Крайні значення абсциси x у точках O і A є 0 і a. Тому

$$v = 4\int_0^a \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}} z\,dx\,dy = 4\int_0^a \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{a}(a^2 - x^2 - 4y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{4}{3a}\int_0^a (a^2 - x^2)^{3/2}\,dx = \frac{\pi a^3}{4}.$$

Виходить, перше інтегрування виконується тут по y уздовж смуги RS від R до S, тобто від $y=0$ до $y=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}$; при

цьому складаються призми PQ, які становлять означений на рис. шар RST. Друге інтегрування виконується по x від O до A, тобто від $x=0$ до $x=a$; складаються тут шари зазначеного виду RST.

48. Подвійний інтеграл як границя подвійної суми. На рис. 74 зображено тіло, об'єм якого обчислятимемо подвійним інтегруванням. Для цього ділимо основу на прямокутники з сторонами Δx і Δy. Нехай (x, y) буде яка-небудь точка всередині такого прямокутника. Добуток

$$f(x, y)\Delta x \Delta y$$

виражає об'єм призми, що стоїть на цьому прямокутнику і досягає верхньої поверхні $z=f(x, y)$. Підсумуємо всі такі добутки для всіх прямокутників, на які поділилася основа нашого тіла. Цю суму позначимо символом

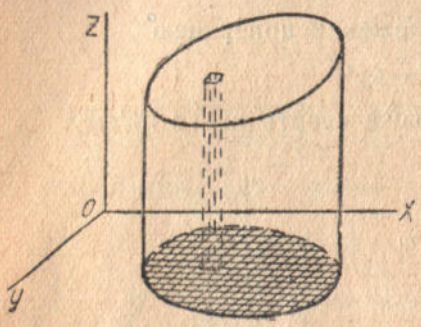

Рис. 74.

$$\sum\sum f(x, y)\Delta x\, \Delta y.$$

Коли Δx і Δy прямують до нуля, ця сума прямує до границі, якою є подвійний інтеграл

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy;$$

границі інтегрування визначаються контуром інтегрування. Ця границя і є об'єм нашого тіла, виражений подвійним інтегралом.

Отже, якщо якась величина є границя суми виду

$$\sum\sum f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y,$$

то її значення можна обчислити подвійним інтегруванням. Більш того, подаючи цю суму, можна нехтувати нескінченно малими вищого порядку, ніж $\Delta x\, \Delta y$, і границя від того не зміниться. Справді, якщо $\varepsilon\, \Delta x\, \Delta y$ є такого роду нескінченно мала, то сума похибок, при цьому припущенних, виразиться подвійною сумою

$$\sum\sum \varepsilon \Delta x\, \Delta y.$$

Коли Δx і Δy прямують до нуля, ε також прямує до нуля. Сума помилок також прямує до нуля, бо вона виражає об'єм тіла, товщина якого прямує до нуля. Проте, це можна виявити і суто аналітично без допомоги геометричних міркувань.

Приклад 1. Певна площа обмежена параболою $y^2=4ax$ і прямою $x=a$. Обчислити її момент інерції відносно осі, яка проходить через початок координат перпендикулярно до площини фігури.

Поділимо площу на прямокутники $\Delta x\,\Delta y$. Віддаль будьякої точки $P(x, y)$ від осі, перпендикулярної до площини фігури в початку координат, $R=\sqrt{x^2+y^2}$. Тому якщо (x, y) є точка, яка лежить усередині одного з цих прямокутників, то момент інерції цього прямокутника наближено дорівнює

$$R^2\,\Delta x\,\Delta y=(x^2+y^2)\,\Delta x\,\Delta y;$$

що це результат наближений, а не точний, обумовлюється тим, що віддалі різних точок прямокутника від осі трохи відрізняються одна від одної; ця різниця, проте, нескінченно мала; а що вона помножається на добуток $\Delta x\,\Delta y$, то це дає нескінченно малу вищого порядку. Згідно з цим ми добуваємо в границі

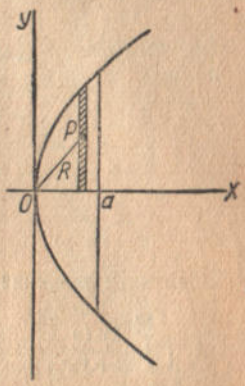

Рис. 75.

$$J=\int_0^a\int_{-2\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\frac{344}{105}\,a^4.$$

Границі інтегрування визначаються тим, що смужка, паралельна осі координат (рис. 75), тягнеться від $y=-\sqrt{4ax}$ до $y=+\sqrt{4ax}$; ці границі встановлюються за рівнянням параболи; абсциса ж смуги змінюється від 0 до a.

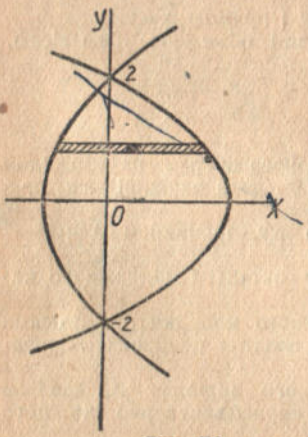

Рис. 76.

Приклад 2. Обчислити центр ваги фігури, обмеженої параболами $y^2=4x+4$ і $y^2=-2x+4$.

З симетрії ясно, що центр ваги фігури лежить на осі абсцис. Його абсциса дорівнює

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\int x\,dA.$$

Якщо ми хочемо скористатися подвійним інтегруванням, то треба тільки замінити dA через $dx\,dy$ або через $dy\,dx$. Як показано на рис. 76, перше інтегрування треба провести по x. Границі інтегрування визначаються рівняннями кривих: при даному y значення x змінюється від $\frac{1}{4}(y^2-4)$ до $\frac{1}{2}(4-y^2)$; розв'язуючи

разом рівняння кривих, знайдемо, що y має в нижній точці значення -2, а у верхній $+2$. Отже,

$$\bar{x}=\frac{\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} x\,dy\,dx}{\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} dy\,dx}=\frac{\frac{16}{5}}{8}=\frac{2}{5}.$$

Вправи

Обчислити значення таких подвійних інтегралів:

1. $\int\limits_{3}^{4}\int\limits_{1}^{2}\frac{dxdy}{(x+y)^2}$.

2. $\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{a\sin\theta}^{a} r\,d\theta\,dr$.

3. $\int\limits_{1}^{2}\int\limits_{x}^{x\sqrt{3}} xy\,dx\,dy$

4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-kr^2}\,r\,d\theta\,dr$.

5. $\int\limits_{0}^{3}\int\limits_{y}^{2}(x^2+y^2)dy\,dx$.

6. $\int\limits_{0}^{a}\int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} dy\,dx$.

7. Обчислити площу, обмежену параболою $y=2x$ і прямою $x=y$.

8. Обчислити площу, яка лежить над віссю абсцис і обмежена цією віссю, параболою $y^2=4ax$ і прямою $x+y=3a$.

9. Обчислити площу, обмежену еліпсом

$$(y-x)^2+x^2=1.$$

10. Обчислити об'єм прямого паралелепіпеда, зрізаного зверху параболоїдом $z=4-x^2-y^2$, і який стоїть над квадратом, що утворюється в площині xy прямими $x=\pm1$ і $y=\pm1$.

11. Обчислити об'єм тіла, обмеженого площиною xy, циліндром $x^2+y^2=1$ і площиною $x+y+z=3$.

12. Обчислити об'єм тіла, розміщеного в першому октанті і обмеженого циліндром $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ і параболоїдом $xy=z$.

13. Обчислити момент інерції трикутника, обмеженого координатними осями і прямою $x+y=1$ відносно осі, яка проходить через початок координат перпендикулярно до площини трикутника.

14. Обчислити момент інерції квадрата, сторона якого дорівнює a, навколо осі, яка проходить через одну з його вершин перпендикулярно до його площини.

15. Обчислити момент інерції трикутника, обмеженого прямими $x+y=2$, $x=2$, $y=2$, відносне осі x-ів.

16. Обчислити момент інерції площі, обмеженої параболою $y^2=ax$ і прямою $x=a$ відносно прямої $y=-a$.

17. Обчислити момент інерції площі, обмеженої гіперболою $xy=4$ і прямою, $x+y=5$ відносно прямої $x=y$.

18. Обчислити момент інерції куба відносно його ребра.

19. Від куба відрізано клин площиною, яка проходить через діагональ основи під кутом 45° до нього; обчислити момент інерції цього клина відносно осі, яка проходить через центр куба перпендикулярно до площини основи.

20. Знайти центр ваги трикутника, утворюваного прямими $x=y$, $x+y=4$, $x-2y=4$.

21. Знайти центр ваги площі, обмеженої параболою $y^2=4ax+4a^2$ і прямою $y=2a-x$.

49. Подвійне інтегрування. Полярні координати. Через початок проведемо ряд прямих, що утворюють одна з одною рівні кути $\Delta\theta$. Далі збудуємо ряд тіл, центр яких є в початку координат, а радіуси приростають на Δr. Ці прямі і кола ділять площину на криволінійні чотирикутники (рис. 77).

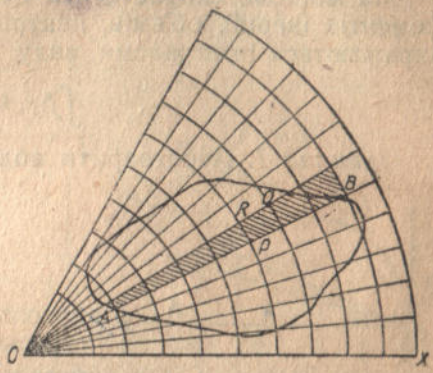

Рис. 77.

Нехай r, θ будуть координати точки P; $r+\Delta r$, $\theta+\Delta\theta$ — координати точки Q. Тому що PR є дуга кола радіуса r, яка стягає при центрі кут $\Delta\theta$, то $PR=r\,\Delta\theta$; далі $RQ=\Delta r$. Якщо Δr і $\Delta\theta$ дуже малі, то чотирикутник PQR дуже мало відрізняється від прямокутника, площа якого дорівнює

$$PR\cdot RQ=r\,\Delta\theta\,\Delta r.$$

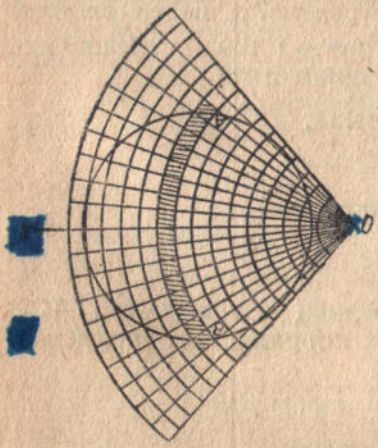

Рис. 78.

Дуже легко показати, що помилка являє собою нескінченно малу вищого порядку, ніж $\Delta\theta\,\Delta r$ (вправа 5, стор. 117). Виходить, сума

$$\sum\sum r\,\Delta\theta\,\Delta r,$$

поширена на всі прямокутники, які лежать усередині якоїсь кривої, дає в границі площу цієї кривої в формі подвійного інтеграла

$$A=\iint r\,d\theta\,dr. \qquad (1)$$

Границями першого інтегрування є значення r на кінцях A і B смуги AB, яка прорізує обчислювану площу. Границями другого інтегрування є значення θ, що відповідають крайнім смугам.

Часто буває зручніше виконувати перше інтегрування по змінній θ. Тоді площа

$$A=\iint r\,dr\,d\theta.$$

Границями першого інтегрування є значення θ на кінцях смуги, яка міститься між двома дуже близькими концентричними колами (рис. 78). Границями другого інтегрування є крайні значення r.

Елемент площі в полярних координатах

$$dA = r\,d\theta\,dr. \qquad (2)$$

Ми можемо скористатися цим виразом також при обчисленні моментів інерції, об'ємів, центрів ваги та інших величин, які виражаються інтегралами виду

$$\int f(r, \theta)\,dA.$$

Приклад 1. Перетворити подвійний інтеграл

$$\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

до полярних координат.

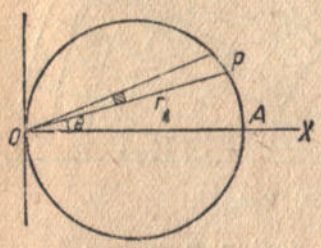

Рис. 79.

Інтеграл поширюється на площу півкруга $y=\sqrt{2ax-x^2}$ (рис. 79): рівняння

$$y^2+x^2-2ax=0 \quad \text{або} \quad (x-a)^2+y^2=a^2$$

виражає коло радіуса a, центр якого є в точці $(a, 0)$; для верхнього півкола $y=+\sqrt{2ax+x^2}$. Якщо перейти до полярних координат, тобто припустити

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta,$$

то рівняння це набере виду

$$r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta-2ar\cos\theta=0$$

або

$$r=2a\cos\theta;$$

це рівняння можна добути і безпосередньо з трикутника AOP на рис. 79. Елемент площі в полярних координатах виразиться через $r\,d\theta\,dr$.

Тому що $x^2+y^2=r^2$, то

$$\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta} r^2\cdot r\,d\theta\,dr.$$

Границями інтегрування при даному θ є значення r на початку й кінці хорди OP, тобто $r=0$ і $r=2a\cos\theta$; границями ж інтегрування по θ є $\theta=0$ і $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Не треба припускати, що $dx\,dy = r\,d\theta\,dr$. При перетворенні подвійного інтеграла переходом від декартових координат до полярних перерозподіляється площа на елементи. На рис. 80 зображено поділ площі круга на елементи в декартових коор-

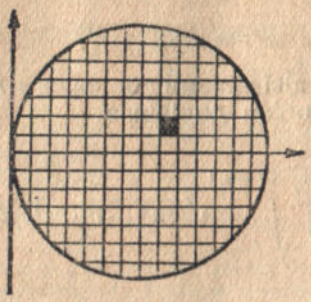

Рис. 80.

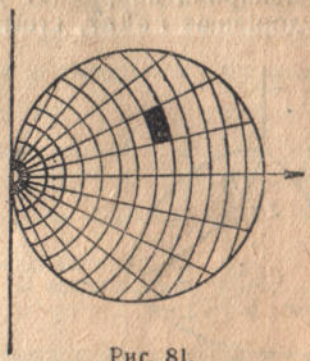

Рис. 81.

динатах, а на рис. 81—у полярних координатах.

Сума площ цих елементів при обох поділах дає в границі площу круга; але це не означає, що кожному елементові одного поділу відповідає рівний йому елемент другого поділу.

Приклад 2. Обчислити момент інерції площі кардіоіди $r = a(1+\cos\theta)$ близько осі, перпендикулярної до її площини в початку координат.

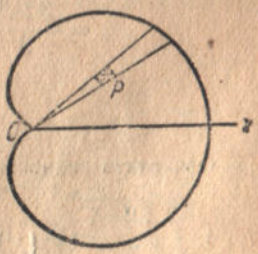

Рис. 82.

Віддаль будьякої точки $P(r, \theta)$ (рис. 82) від осі обертання є

$$OP = r.$$

Тому момент інерції

$$J = 2\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 \cdot r\,d\theta\,dr = \frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\,d\theta = \frac{35}{16}\,\pi a^4.$$

Приклад 3. Обчислити центр ваги кардіоіди в попередній задачі.

Ордината центра ваги, очевидно дорівнює нулеві. Його абсциса дорівнює

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{2\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r\cos\theta \cdot r\,d\theta\,dr}{2\int\int r\,d\theta\,dr} = \frac{5}{6}\,a.$$

Приклад 4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндричною поверхнею радіуса a і сферою радіуса $2a$, центр якої лежить на поверхні циліндра.

На рис. 83 зображена чверть шуканого об'єму. Візьмемо систему полярних координат у площині xy. На елементі, площа якого дорівнює $r\,d\theta\,dr$, стоїть призма з висотою

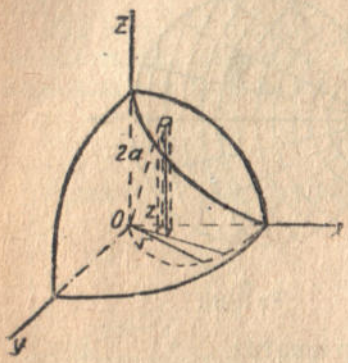

Рис. 83.

$$r=\sqrt{4a^2-r^2}.$$

Об'єм цієї призми дорівнює $z\cdot r\,d\theta\,dr$, а ввесь об'єм дорівнює

$$v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\cdot r\,d\theta\,dr=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(4a^2-r^2)^{3/2}}{-3}\Bigg|_0^{2a\cos\theta}d\theta=$$

$$=\frac{32a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,d\theta=\frac{16}{9}\,a^3(3\pi-4).$$

Вправи

Обчислити значення таких інтегралів через перехід до полярних координат

1. $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)\,dy\,dx.$

2. $\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}dx\,dy.$

3. $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$

4. $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$

5. Обчислити площу, обмежену двома кругами радіусів a і $a+\Delta a$ і двома прямими, які виходять з початку координат і утворюють з початковою віссю кути α і $\alpha+\Delta\alpha$. Показати, що при нескінченно малих Δa і $\Delta\alpha$ результат відрізняється від $a\,\Delta\alpha\,\Delta a$ на нескінченно малу вищого порядку, ніж $\Delta\alpha\,\Delta a$.

6. Центральний кут кругового сектора радіуса a дорівнює 2α. Знайти момент інерції площі цього сектора відносно бісектриси його кута.

7. Фігура обмежена колом $r=a\sqrt{2}$ і прямою $r=a\sec\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$. Знайти її момент інерції відносно осі, яка проходить через початок, перпендикулярно до її площини.

8. Знайти центр ваги кругового сектора радіуса a з кутом при вершині 2α.

9. Центр круга радіуса $2a$ лежить на колі радіуса a. Обчислити момент інерції площі, що є між обома колами відносно спільної дотичної.

10. Обчислити момент інерції площі лемніскати

$$r^2=2a^2\cos 2\theta$$

відносно осі, перпендикулярної до її площини в початковій точці.

11. Обчислити момент інерції площі круга $r=2a$, яка лежить поза параболою $r=a\sec^2\frac{\theta}{2}$, відносно осі, перпендикулярної до площини круга на початку координат.

12. Обчислити момент інерції відносно осі y-ів площі, яка є всередині кола

$$(x-a)^2+(y-a)^2=2a^2.$$

13. У квадратній пластинці густість пропорціональна віддалі від однієї з її вершин. Обчислити момент інерції пластинки відносно сторони, яка проходить через цю вершину.

14. Обчислити момент інерції циліндра відносно однієї з твірних його поверхні.

15. Обчислити момент інерції конуса відносно його осі.

16. Обчислити об'єм тіла, яке знизу обмежене площею лемніскати $r^2=a^2\cos 2\theta$, розміщеної в площині xy, зверху сферою $x^2+y^2+z^2=a^2$, а з боків циліндричною поверхнею, яка обгинає лемніскату.

17. Обчислити об'єм тіла обмеженого площиною xy, параболоїдом $az=x^2+y^2$ і циліндром $x^2+y^2=2ax$.

18. Обчислити момент інерції кулі, густості ρ і радіуса a відносно її діаметра.

19. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням вітки кривої $r=a\cos 2\theta$ навколо початкової лінії.

50. Обчислення поверхень. Якщо ми площу A, розміщену в одній площині, спроектуємо на другу площину, то проекція A' виразиться формулою

$$A'=A\cos\varphi,$$

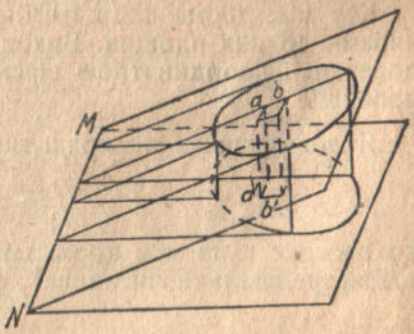

Рис. 84.

де φ є кут між обома площинами. Щоб це показати, поділимо площу A на прямокутники двома сітями прямих, відповідно паралельних лінії перетину площин MN і перпендикулярних до неї. Нехай a і b будуть сторони одного з цих прямокутників, при чому сторона a паралельна цій лінії. Проекцією цього прямокутника буде прямокутник з сторонами

$$a'=a,\quad b'=b\cos\varphi,$$

а його площа

$$a'b'=ab\cos\varphi.$$

Сума проекцій усіх прямокутників

$$\sum a\,b'=\sum ab\cos\varphi.$$

Якщо ми почнемо зменшувати сторони цих прямокутників і перейдемо до границі, то добудемо

$$A' = A \cos \varphi,$$

що й треба було довести.

Щоб обчислити площу якоїсь кривої поверхні, поділимо її на елементи; проекція кожного елемента на одну з координатних площин дорівнює диференціалові площини dA у цій площині. Елемент самої поверхні можна вважати за плоский; тому його площа наближено дорівнює

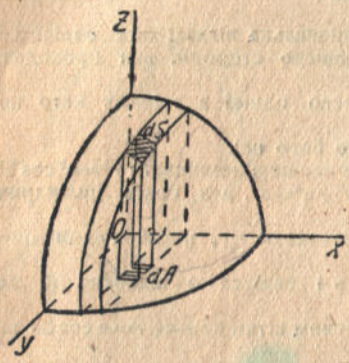

Рис. 85.

$$\frac{dA}{\cos \varphi},$$

де φ є кут між дотичною площиною до поверхні в певній точці цього елемента і площиною проекцій. Площа вимірюваної частини поверхні виражається границею суми таких елементів, тобто

$$S = \int \frac{dA}{\cos \varphi}.$$

Кут між двома площинами дорівнює кутові між перпендикулярами до цих площин. Виходить, φ є кут між нормаллю до поверхні і координатною віссю, перпендикулярною до площини проекції.

Якщо рівняння поверхні має вид

$$f(x, y, z) = 0,$$

то косинус кута між нормаллю в точці (x, y, z) і віссю z-ів („Диференціальне числення", рубр. 167).

$$\cos \gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Косинуси кутів між нормаллю і віссю x-ів або віссю y-ів добувають заміною похідної $\frac{\partial f}{\partial z}$ через $\frac{\partial f}{\partial x}$ або $\frac{\partial f}{\partial y}$. При обчисленні площ косинус треба взяти за абсолютною величиною. Тут треба кожного разу обчислювати таку частину поверхні, на

якій косинус не міняє знака. У противному ж разі треба поділити поверхню на частини так, щоб у границях кожної частини косинус зберігав знак, і кожну таку частину обчислювати окремо.

Часто рівняння поверхні подається так:

$$z=f(x, y),$$

написавши це рівняння таким способом:

$$F(x, y, z)=z-f(x, y)=0,$$

добудемо:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x}=-p;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y}=-q;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=1.$$

Отже:

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

і для площі нашої поверхні дістанемо формулу:

$$S=\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,dA,$$

або

$$S=\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Приклад 1. Обчислити частину поверхні кулі $x^2+y^2+z^2=a^2$, яка лежить у середині циліндра $x^2+y^2=ax$.

Проектуємо цю частину поверхні на площину xy. Тоді кут φ є не що інше, як кут γ між нормаллю до сфери і віссю z-ів. Косинус його є

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{a}.$$

Користуючись полярними координатами на площині xy, добудемо:

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-r^2},$$

звідки площа шуканої частини поверхні дорівнює

$$S=\int\frac{dA}{\cos\gamma}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\frac{ar\,d\theta\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=2a^2(\pi-2).$$

Приклад 2. Обчислити частину поверхні конуса $x^2=y^2+z^2$, що лежить у першому октанті і обмежена площиною $y+z=a$.

Спроєктуємо її на площину yz. Тоді $\varphi=\alpha$ і

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже шукана поверхня дорівнює

$$S=\int_0^a\int_0^{a-y}\sqrt{2}\,dy\,dz=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Вправи

1. Обчислити площу трикутника, який координатні площини висікають на площині

$$x+2y+3z=6.$$

2. Обчислити поверхню циліндра

$$x^2+y^2=a^2,$$

що є між площинами $z=0$ і $z=mx$.

3. Обчислити частину поверхні конуса $x^2+y^2=z^2$, відрізувану циліндром

$$x^2+y^2=2ax.$$

4. Обчислити частину площини $x+y+z=2a$, яка лежить в першому октанті і обмежена циліндром $x^2+y^2=a^2$.

5. Обчислити частину поверхні $z^2=2xy$, яка лежить над площиною xy і обмежена площинами $x=2$ і $y=1$.

6. Обчислити частину поверхні циліндра $x^2+y^2=2ax$, яка є між площиною xy і конусом $x^2+y^2=z^2$.

7. Обчислити частину поверхні параболоїда $y^2+z^2=2ax$, яка є між параболічним циліндром $y^2=ax$ і площиною $x=a$.

8. Обчислити частину поверхні циліндра $x^2+y^2=a^2$, яка лежить у першому октанті під площиною $x+y+z=2a$.

9. В кулі радіуса a вирізано просвіт з квадратною основою, сторона якого дорівнює також a; вісь просвіту зливається з діаметром кулі. Обчислити поверхню кулі, вирізану просвітом.

ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

51. Позначенням

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

користуються, щоб виразити результат, який добудемо, інтегрувавши спочатку по z (залишаючи, виходить, x і y сталими), потім по y (залишаючи x сталими) і, нарешті, по x. Перше інтегрування виконують у границях від z_1 до z_2, друге, в границях від y_1 до y_2 і, нарешті, третє — в границях від x_1 до x_2.

52. Прямокутні координати. Поділимо тіло на прямокутні паралелепіпеди із сторонами Δx, Δy і Δz площинами, паралельними площинам координат. Об'єм такого паралелепіпеда дорівнює $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$. Щоб обчислити об'єм усього тіла, складаємо спочатку суму об'ємів паралелепіпедів, що утворюють вертикальний стовпчик PQ. Результат становить

$$\lim_{\Delta z\to 0}\sum \Delta x\,\Delta y\,\Delta z = \Delta x\,\Delta y\int_{z_1}^{z_2} dz,$$

де z_1 і z_2 є значення z на кінцях стовпчика. Тепер просумуємо стовпчики вздовж основи MN і таким способом добудемо об'єм пластини MNR. Результат становить

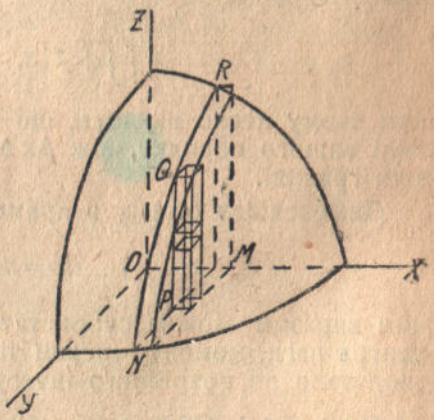

Рис.

$$\lim_{\Delta y\to 0}\sum \Delta x\,\Delta y\int_{z_1}^{z_2} dz = \Delta x\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} dy\,dz.$$

де y_1 і y_2 є граничні значення y для цієї пластини. Нарешті, підсумуймо об'єм цих пластин. Результат виразиться інтегралом

$$v = \lim_{\Delta x\to 0}\sum \Delta x\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} dy\,dz = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} dx\,dy\,dz,$$

де x_1 і x_2 є граничні значення абсциси x.

Іноді доцільніше проінтегрувати спочатку по x або по y. У всіх цих випадках границі можна добути на підставі того міркування, що перше інтегрування є підсумування паралелепіпедів для утворення призми, друге являє собою підсумування призм для утворення пластини, а третє являє собою підсумування пластин.

Нехай (x, y, z) буде якась точка паралелепіпеда $\Delta x \Delta y \Delta z$, а $f(x, y, z)$ якась задана функція від координат точки. Об'єм елементарного паралелепіпеда $\Delta x \Delta y \Delta z$ помножимо на значення функції у вибраній нами точці цього паралелепіпеда. Добутки, що стосуються до всіх елементарних паралелепіпедів, підсумуємо, тобто складемо суму

$$\sum \sum \sum f(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z,$$

поширену на всі паралелепіпеди тіла. Коли Δx, Δy і Δz прямують до нуля, сума прямує до границі, що виражається потрійним інтегралом

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz;$$

при цьому легко виявити, що члени, які являють нескінченно малі вищого порядку, ніж $\Delta x \Delta y \Delta z$, можна опустити, не змінюючи границі.

Диференціал об'єму в прямокутних координатах є

$$dv = dx dy dz;$$

цим виразом можна скористатися для обчислення маси тіла, центра ваги, моменту інерції тіла і т. д.; кожне таке обчислення зводиться до потрійного інтегрування.

Приклад 1. Обчислити об'єм еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

На рисунку 86 зображена восьма частина шуканого об'єму. За загальною формулою, виходить,

$$v = 8 \iiint dx dy dz;$$

границями першого інтегруваня є значення $z = 0$ в точці P і

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

в точці Q. Границями другого інтегрування є значення y в точках M і N. В точці M $y=0$, а в точці N при $z=0$

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Нарешті, границями інтегрування по x є 0 і a. Виходить,

$$v=8\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dx\,dy\,dz=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Приклад 2. Знайти центр ваги тіла, обмеженого параболоїдом

$$y^2+2z^2=4x$$

і площиною $x=2$.

На рис. 87 зображена четверта частина тіла.

За симетрією координати центра ваги $\bar{y}$ і $\bar{z}$ дорівнюють 0. Координата ж $\bar{x}$ дорівнює

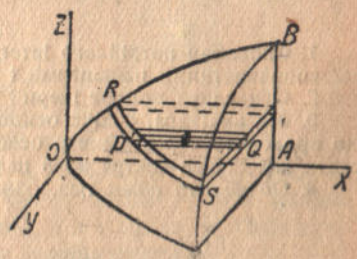

Рис. 87.

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dv}{\int dv}=\frac{4\int_0^2\int_0^{\sqrt{8-2z^2}}\int_{\frac{1}{4}(y^2+2z^2)}^{2} x\,dz\,dy\,dx}{4\int\int\int dz\,dy\,dx}=\frac{4}{3}.$$

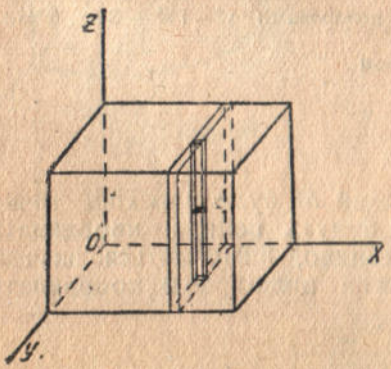

Рис. 88.

Границями інтегрування по x є значення

$$x=\frac{1}{4}(y^2+2z^2)$$

в точці P і $x=2$ в точці Q. В точці S $x=2$ і

$$y=\sqrt{4x-2z^2}=\sqrt{8-2z^2}.$$

Тому при інтегруванні по y границями є значення $y=0$ в точці R і $y=\sqrt{8-2z^2}$ в точці S. Нарешті, границя інтегрування по z є значення $z=0$ в точці A і $z=2$ в точці B.

Приклад 3. Обчислити момент інерції куба відносно одного з його ребер.

Вмістимо куб, як зображено на рис. 88, і визначимо його момент інерції відносно осі z-ів. Віддаль будьякої точки куба (x, y, z) від осі z-ів є

$$R=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Виходить, шуканий момент інерції є

$$J=\int_0^a\int_0^a\int_0^a (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{3}a^4,$$

де a є довжина ребра куба.

Вправи

1. Способом потрійного інтегрування обчислити об'єм піраміди, обмежуваної координатними площинами і площиною $x+y+z=1$.

2. Обчислити момент інерції тієї самої піраміди (впр. 1) відносно осі x-ів.

3. Від циліндра, радіус основи якого дорівнює a, відрізано клин площиною, що проходить через діаметр основи і нахилена до основи під кутом 45°. Обчислити положення центра ваги цього клина.

4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2\frac{x}{a}$$

і площиною $x=a$.

5. Обчислити об'єм частини конуса

$$(z-1)^2=x^2+y^2,$$

розміщеної в першому октанті, за допомогою трикратного інтегрування шістьма способами, відповідно до шести можливих переставлень диференціалів dx, dy, dz.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y^2=4a^2-3ax$, $y^2=ax$ $z=\pm h$.

7. Обчислити об'єм, обмежений циліндром

$$z^2=1-x-y$$

і площинами координат.

53. Циліндричні координати. Нехай M буде проекція точки P на площину xy. Нехай далі r, θ будуть полярні координати точки M. Положення точки P, очевидно, визначається значеннями величини r, θ і z; це так звані циліндричні координати точки P.

На рис. 89 бачимо, що

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

Користуючись цими рівняннями, ми легко можемо перетворити у всякому виразі прямокутні координати на циліндричні.

Елементом об'єму в циліндричних координатах є (рис. 90) своєрідна мала призма PQ. Вона обмежена двома циліндричними поверхнями радіусів r і $r+\Delta r$, двома горизонтальними площинами, розміщеними на висоті z і $z+\Delta z$, і двома вертикальними площинами, що проходять через вісь z-ів під кутами θ і $\theta+\Delta\theta$ до осі абсцис. Ясно, що основа призми дорівнює полярному елементові площі MN у площині xy; висота її дорівнює dz. Виходить

$$dv = r\,d\theta\,dr\,dz. \qquad (1)$$

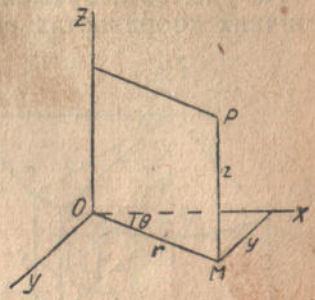

Рис. 89.

Цим виразом для елемента об'єму можна користуватися, обчислюючи об'єми, моменти інерції, центри ваги і т. ін. В задачах, зв'язаних з циліндричними, конічними, сферичними поверхнями, обчислення потрійних інтегралів у циліндричних координатах часто виконується набагато легше, ніж у прямокутних декартових координатах.

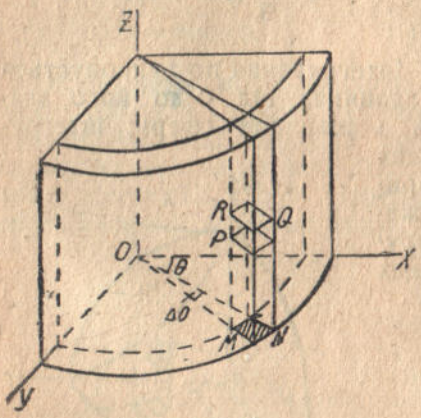

Рис. 90.

Приклад 1. Обчислити момент інерції круглого циліндра відносно осі, що править за діаметр основи циліндра.

Обчислимо момент інерції циліндра відносно осі x-ів (рис. 91). Квадрат віддалі елемента PQ від осі x-ів

$$R^2 = y^2 + z^2 = r^2 \sin^2\theta + z^2.$$

Тому момент інерції циліндра відносно осі x-ів виражається інтегралом:

$$\int R^3\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^a (r^2\sin^2\theta + z^2)\,r\,d\theta\,dz\,dr =$$

$$= \frac{\pi a^2 h}{12}(3a^2 + 4h^2).$$

Перше інтегрування виконується за елементами клиноподібного тіла RS, друге являє собою підсумування елементарних клинів, що складають клиноподібний шар OMN, а третє являє собою підсумування цих шарів.

Приклад 2. Обчислити об'єм, обмежений площиною xy, циліндром $x^2+y^2=ax$ і сферою $x^2+y^2+z^2=a^2$.

На рис. 92 зображена половина шуканого об'єму. В циліндричних координатах рівняння циліндра й сфери мають вид:

$$r=a\cos\theta \quad \text{і} \quad r^2+z^2=a^2.$$

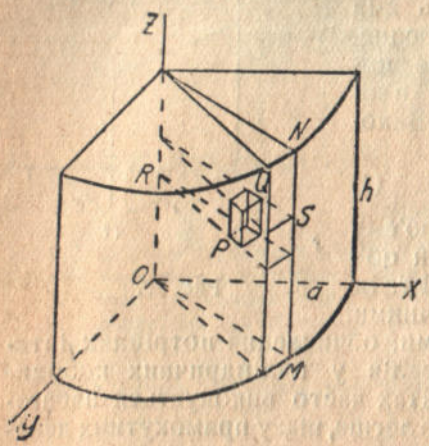

Рис. 91.

Відповідно до цього шуканий об'єм виражається в циліндричних координатах потрійним інтегралом:

$$v=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r\,d\theta\,dr\,dz=$$

$$=\frac{a^3}{9}(3\pi-4).$$

Інтегрування по z виконується в границях від 0 до його значення в точці N, яке визначають з рівняння сфери; інтегрування по r виконується в границях від 0 до його значення на периферії основи циліндра, яке виражається рівнянням $r=a\cos\theta$; інтегрування по θ виконується в границях від 0 до $\frac{\pi}{2}$.

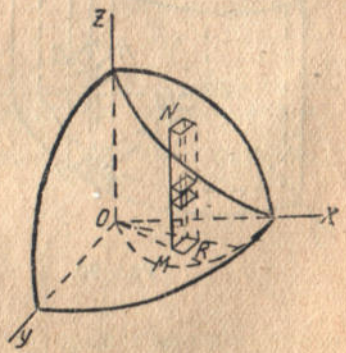

Рис. 92.

Перше інтегрування дає

$$r\,d\theta\,dr\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} dz=r\,d\theta\,dr\sqrt{a^2-r^2}.$$

Друге інтегрування дає:

$$d\theta\int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,dr=d\theta\Big|_0^{a\cos\theta}\frac{-(a^2-r^2)^{3/2}}{3}=$$

$$=\frac{d\theta}{3}(a^3-a^3\sin^3\theta).$$

І, нарешті, після третього інтегрування маємо:

$$v=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{3}(a^3-a^3\sin^3\theta)=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta-\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{\pi a^3}{3}-\frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta\right)=\frac{a^3}{9}(3\pi-4).$$

54. Сферичні координати. За сферичні, або полярні, координати точки P у просторі правлять (рис. 93) $r=OP$ і два кути θ і φ. З рисунка легко бачити, що

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,$$

$$y=r\sin\varphi\sin\theta,$$

$$z=r\cos\varphi.$$

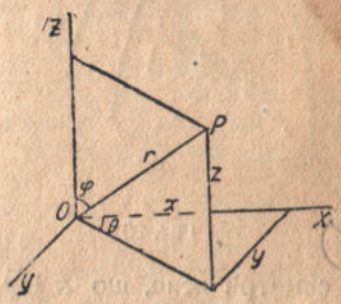

Рис. 93.

Геометричне місце $r=\text{const}$ являє собою сферу з центром у точці O; рівняння $\theta=\text{const}$ виражає площину, що проходить через вісь OZ і утворює з віссю OX кут θ. Нарешті, рівняння $\varphi=\text{const}$ виражає конус, який утворюють прямі, які проходять через точку O і утворюють з віссю OZ сталий кут φ.

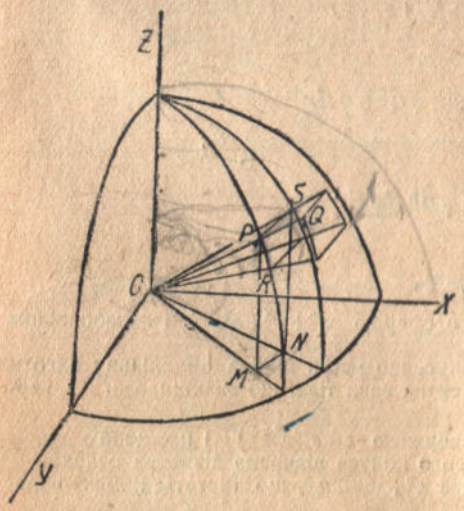

Рис. 94.

Елемент об'єму $PQRS$ (рис. 94) виділяється сферами радіусів r і $r+\Delta r$, площинами θ і $\theta+\Delta\theta$ і конусами φ і $\varphi+\Delta\varphi$. Коли Δr, $\Delta\varphi$ і $\Delta\theta$ дуже малі, цей елемент наближено являє собою прямокутний паралелепіпед. Тому що $OP=r$ і $POR=\Delta\varphi$, то

$$PR=r\,\Delta\varphi.$$

Так само $OM=OP\sin\varphi$, а дуга PS дорівнює своїй проекції MN. Отже

$$PS=MN=r\sin\varphi\,\Delta\theta;$$

виходить наближено

$$\Delta v=PR\cdot PS\cdot PQ=r^2\sin\varphi\,\Delta\theta\,\Delta\varphi\,\Delta r.$$

Коли прирости стають все менші, результат стає дедалі більш точним. Виходить

$$dv = r^2 \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi \, dr. \qquad (2)$$

Сферичні, або полярні, кординати з успіхом прикладають переважно в тих випадках, коли задача так або інакше зв'язана із сферичними поверхнями. Вони бувають також дуже корисні в тих випадках, коли в задачі відіграють важливу роль віддалі точок від деякої сталої точки.

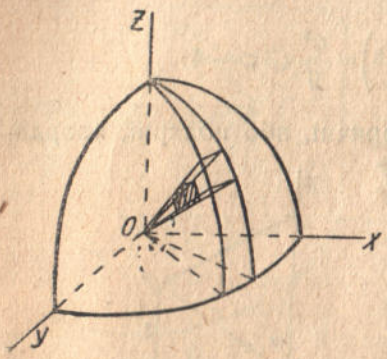

Рис. 95

Приклад. В тілі, що має форму півкулі, густість відміняється пропорціонально віддалі точки від центра. Знайти центр ваги цього тіла.

Центр кулі вважаємо за початок координат, а вісь z-ів напрямимо перпендикулярно до площини, що обмежує півкулю. З симетрії ясно, що $\bar{x}$ і $\bar{y}=0$. Густість в кожній точці $\rho = kr$, де k є стала. Разом з тим $z = r\cos\varphi$. Отже

$$\bar{z} = \frac{\int z\,dm}{\int dm} = \frac{\int krz\,dv}{\int kr\,dv} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{a} r^4 \cos\varphi \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi \, dr}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{a} r^3 \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi \, dr} = \frac{2}{5}a.$$

Вправи

1 Обчислити об'єм тіла, обмеженого сферою $x^2+y^2+z^2=4$ і параболоідом $x^2+y^2=3z$.

2. Із прямого циліндра вирізано конус, що має з циліндром спільну висоту й спільну основу. Обчислити віддаль центра ваги тіла, що залишилося, від вершини конуса.

3. Обчислити об'єм, обмежений поверхнею $z=e^{-(2x+y^2)}$ і площиною xy.

4. Обчислити момент інерції кругового конуса відносно діаметра основи.

5. Обчислити об'єм частини циліндра $x^2+y^2=2ax$, що міститься між параболоідом $x^2+y^2=2az$ і площиною xy.

6. Знайти центр ваги тіла, що міститься між сферою радіуса a і конічною поверхнею з кутом при вершині 2α, якщо вершина конуса збігається з центром сфери.

7. Знайти центр ваги тіла, обмеженого сферою радіуса a і двома площинами, що проходять через центр сфери і утворюють кут в 60°.

8. Вершина конуса лежить на поверхні сфери радіуса a; кут при вершині $\frac{\pi}{2}$; вісь конуса є діаметр сфери. Обчислити момент інерції тіла, обмеженого конічною і сферичною поверхнями, відносно осі конуса.

55. Притягання. Дві матеріальні точки з масами m_1 і m_2, що лежать одна від одної на віддалі r, притягають одна одну з силою

$$\frac{km_1m_2}{r^2},$$

де k є стала, що залежить від того, в яких одиницях виражено масу, віддаль і силу. За таким самим законом виражають взаємне притягання і відштовхування електричних зарядів.

Обчислимо притягання суцільною масою матеріальної точки. З цією метою розкладемо суцільну масу притяжного тіла на елементи, кожний з яких притягає матеріальну точку за наведеним законом. Через те, що ці частинні притягання, взагалі кажучи, діють не в одному напрямі, то результуючу силу не можна добути безпосереднім додаванням складових притягань. Ці елементарні притягання є дуже малі вектори, і рівнодійна їх є сума цих векторів. Як відомо, щоб обчислити координату суми векторів, треба додати відповідні координати доданків векторів (див. „Дифер. числ.", рубр. 111). Відповідно до цього, щоб обчислити складову рівнодійної сили по осі x-ів, треба обчислити складову притягання, яке чинить кожний елемент по осі x-ів, і ці складові просумувати.

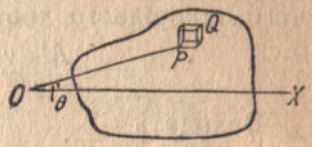

Рис. 96.

Якщо dm є маса елемента, яка облягає точку P, r—її віддаль від точки O, то притягання, яке чинить цей елемент на одиницю маси, зосереджену в точці O, дорівнює

$$k\,\frac{1\cdot dm}{r^2}=\frac{k\,dm}{r^2}.$$

Ця сила діє в напрямі OP. Її складова по осі OX дорівнює

$$\frac{\cos\theta\cdot k\,dm}{r^2}.$$

Складову по осі x-ів усього притягання тілом точки O виражають інтегралом

$$X=\int\frac{k\cos\theta\,dm}{r^2}.$$

Обчислення цього інтеграла виконують іноді однократним, іноді подвійним або потрійним інтегруванням, залежно від форми притягаючої маси.

Приклад 1. Обчислити притягання однорідним дротом завдовжки $2l$ і масою M матеріальної точки, що має одиницю маси і розміщена на перпендикулярі до дроту в його середині на віддалі c від неї.

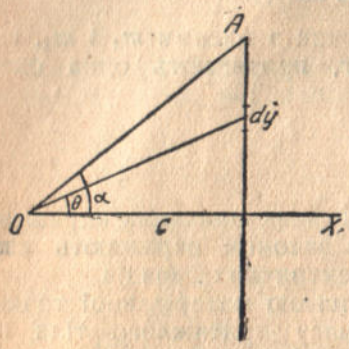

Рис. 97.

За початок координат приймемо точку O, в якій міститься притягувана матеріальна точка; вісь x-ів напрямимо перпендикулярно до дроту (рис. 97). Через те, що частинки, які містяться вище OX, притягають її з такою самою силою вгору, як частинки, що містяться нижче OX, притягають її вниз, то вертикальна складова притягання дорівнює нулеві. Все притягання зводиться тому до складової по осі OX. Маса елемента довжиною dy притягаючого однорідного дроту дорівнює

$$\frac{M\,dy}{2l}.$$

Виходить

$$X=\frac{kM}{2l}\int\frac{\cos\theta\,dy}{r^2}.$$

Щоб спростити інтегрування, краще за все прийняти кут θ за незалежну змінну. Тоді

$$y=c\operatorname{tg}\theta,\quad dy=c\sec^2\theta\,d\theta.$$

Разом з тим

$$X=\frac{kM}{2l}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\cos\theta\cdot c\sec^2\theta\,d\theta}{c^2\sec^2\theta}=\frac{kM}{cl}\sin\alpha,$$

де α є кут XOA. Виражаючи $\sin\alpha$ через l, маємо:

$$X=\frac{kM}{c\sqrt{c^2+l^2}}.$$

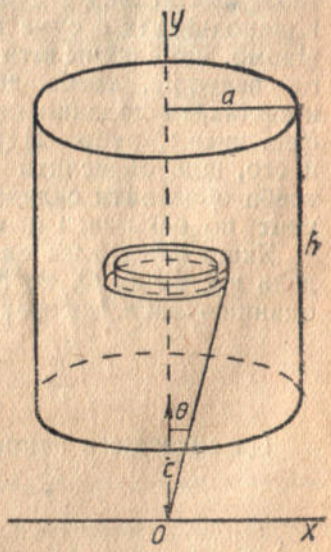

Рис. 98.

Приклад 2. Обчислити притягання, що чинить однорідний циліндр маси M, на частинку, яка має одиницю маси і розміщена на осі циліндра на віддалі c від його основи.

Через симетрію цілком ясно, що протягання всього циліндра буде напрямлене вздовж осі циліндра. За початок координат вважаємо положення притягуваної точки, а вісь y-ів напрямляємо по осі циліндра (рис. 98).

Поділимо циліндр на кільця, утворювані обертанням елемента $dx\,dy$ навколо осі y-ів; об'єм такого кільця дорівнює

$$2\pi x\,dx\,dy.$$

Маса ж кільця відноситься до маси всього циліндра, як об'єм кільця до об'єму циліндра; тому маса кільця

$$dm=\frac{M}{\pi a^2 h}\cdot 2\pi x\,dx\,dy=\frac{2M}{a^2 h}\,x\,dx\,dy.$$

Тому що всі точки кільця містяться на тій самій віддалі r від точки O, а прямі, що сполучають точку O з точками кільця, утворюють з віссю OY той самий кут θ, то вертикальна складова всього притягання дорівнює

$$z\int\frac{\cos\theta\,dm}{r^2}=k\int\frac{y\,dm}{r^3}=\frac{2Mk}{a^2 h}\int\limits_c^{c+h}\int\limits_0^a\frac{xy\,dy\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}=$$

$$=\frac{2Mk}{a^2 h}\left[h+\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a+(c+h)^2}\right].$$

Вправи

1. Обчислити притягання однорідним дротом масою M і довжиною l матеріальної точки, що має одиницю маси і лежить на продовженні дроту на віддалі c від її кінця.

2. Обчислити притягання дроту маси M, згорнутого в півколо радіуса a, на матеріальну точку, що має одиницю маси і міститься в її центрі.

3. Обчислити притягання плоского диска маси M і радіуса a на матеріальну точку, що має одиницю маси і міститься над центром диска на перпендикулярі до нього на віддалі c.

4. Обчислити притягання, яке справляє однорідний конус на матеріальну точку, що має одиницю маси і міститься в його вершині.

5. Показати, що притягання, яке справляє однорідна куля на зовнішню точку, не зміниться, якщо всю масу кулі зосередити в її центрі.

6. Обчислити притягання, яке справляє однорідний куб на матеріальну точку, що має одиницю маси і міститься в одній з його вершин.

ІНТЕГРУВАННЯ ВЕКТОР-ФУНКЦІЙ

56. Криволінійний інтеграл. В попередніх розділах нам двічі вже доводилося зустрічатися з векторами, хоч і в різних математичних формах. В рубр. 41 ми розглядали роботу, виконувану силою; вона виражається формулою (10) [рубр. 41]. Тут підінтегральний вираз $F\cos\theta\, ds$ є скалярний диференціал, і робота виражається звичайним скалярним інтегралом. Якщо t є час, відраховуваний від деякого певного моменту, то F, θ і s є функції від t, звичайно, функції скалярні: під F ми тут розуміємо не силовий вектор, а його довжину — скаляр; так само $\cos\theta$ і s є числа, що виражаються в функції від t.

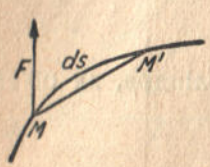

Рис. 99.

Якщо

$$F=F(t),\quad s=s(t),\quad \theta=\theta(t),$$

$$F\cos\theta\, ds=F(t)\cos\theta\,(t)s'(t)\,dt=\Phi(t)\,dt,$$

де $\Phi(t)$—звичайна скалярна функція від t; робота виражається скалярним інтегралом

$$W=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t)\,dt. \tag{1}$$

Цей скалярний характер підінтегрального диференціала й самого інтеграла можна відзначити ще так. Елемент путі можна розглядати як нескінченно малий вектор $\overrightarrow{MM_1}$, що йде від точки M (рис. 99) до дуже близької точки M'; відповідно до цього його можна позначити через **ds**. Якщо **F** є діюча на точку M сила, тобто самий силовий вектор, то $F\cos\theta\, ds$ є не що інше, як скалярний добуток **F ds** векторів **F** і **ds** (див. „Дифер. числення", рубр. 114, формула 13), тобто це є нескінченно малий скаляр. Робота виражається інтегралом

$$W=\int \mathbf{F}\,\mathbf{ds}, \tag{2}$$

узятим уздовж траекторії рухомої матеріальної точки. Якщо F_x, F_y, F_z є числові значення складових сили по осях координат, тобто координати вектора **F**, то за формулою 13 (стор. 156„ Дифер. числення")

$$\mathbf{F}\mathbf{ds}=F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz,$$

тому що координати нескінченно малого вектора **ds** дорівнюють dx, dy, dz. Відповідно до цього й інтеграл (2) можна подати так:

$$W=\int(F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz) \qquad (3)$$

Інтеграл цього роду зветься *криволінійним інтегралом*. Для його обчислення треба виразити координати точки кривої, по якій виконують інтегрування, в функції одного параметра; інтеграл зведеться тоді до звичайного виду (1); за границі інтегрування правлять значення параметра в початковій і кінцевій точках дуги, по якій виконують інтегрування.

Інтеграли виду (2) або (3) зустрічаються не тільки при обчисленні роботи. Кожного разу, як уздовж кривої в кожній точці її прикладено деякий вектор **F**, ми можемо розбити криву на елементи, взяти скалярний добуток вектора **F** в якійнебудь точці цього елемента на самий елемент, розглядуваний як нескінченно малий вектор, і просумувати ці добутки; границя цієї суми, коли всі лінійні елементи прямують до нуля, і є криволінійний інтеграл (2), який можна також подати в формі (3). Крива інтегрування може іноді бути замкненою.

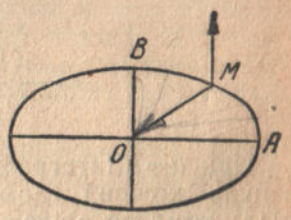

Рис. 100.

Приклад 1. В кожній точці еліпса

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta$$

прикладено вектор **F**, що має сталу довжину F і паралельний осі y-ів (сталий вектор). Обчислити криволінійний інтеграл (2) вздовж дуги еліпса AB, що лежить в першому квадранті, від точки A до B (рис. 100). В цьому випадку

$$F_x=F_z=0,\quad F_y=F,\quad dy=b\cos\theta\,d\theta.$$

Шуканий інтеграл

$$W=\int \mathbf{F}d\mathbf{s}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} Fb\cos\theta\,d\theta=Fb.$$

Приклад 2. На тому самому еліпсі в кожній точці M прикладений вектор $F=\overrightarrow{MO}$, напрямлений до центра еліпса (отже, рівний довжиною, але протилежний радіусу-вектору точки M, $\mathbf{F}=-\mathbf{R}$). Обчислити значення інтеграла (2) або (3), взятого 1) по тій самій дузі AB, як і в попередньому прикладі, 2) по всьому еліпсі.

В цьому випадку

$$F_x = -R_x = -x, \quad F_y = -R_y = -y, \quad F_z = 0,$$

тобто

$$F_x = -a\cos\theta, \quad F_y = -b\sin\theta, \quad F_z = 0,$$

$$dx = -a\sin\theta\, d\theta, \quad dy = b\cos\theta\, d\theta, \quad dz = 0.$$

Разом з тим перший інтеграл

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{a^2 - b^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\, d\theta =$$

$$= -\frac{a^2 - b^2}{4}\left[\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

При $a = b$ інтеграл обертається в нуль, тому що обертається в нуль кожний елемент інтегрування (інтегрований диференціал), тому що еліпс обертається в коло, радіус-вектор **R** перпендикулярний до елеменга дуги **ds** і їхні скалярні добутки дорівнюють нулеві.

Другий інтеграл, взятий по всьому еліпсі,

$$W_2 = \int_0^{2\pi} (a^2 - b^2)\sin\theta\cos d\theta = 0.$$

57. Циркуляція. При обчисленні криволінійного інтеграла посутню роль відіграє напрям, в якому ми інтегруємо. Якщо ми змінюємо напрям інтегрування на протилежний, то змінюється знак нескінченно малого вектора **ds**, а разом з тим змінюється знак усього інтеграла. Тому, коли ми інтеґруємо по тій самій кривій один раз від точки A до точки B, а другий раз від точки B до точки A, то

$$\int_{AB} \mathbf{F}\, d\mathbf{s} = -\int_{BA} \mathbf{F}\, d\mathbf{s}. \tag{4}$$

Цілком ясно також, що

$$\int_{AB} \mathbf{F}\, d\mathbf{s} = \int_{AC} \mathbf{F}\, d\mathbf{s} + \int_{CB} \mathbf{F}\, d\mathbf{s}, \tag{5}$$

якщо точка C лежить між точками A і B.

Ця рівність буває і в тому випадку, коли точка C лежить на кривій інтегрування поза інтегралом AB (рис. 102). Справді, на підставі співвідношення (5)

$$\int_{AB} \mathbf{F}\,ds + \int_{BC} \mathbf{F}\,ds = \int_{AC} \mathbf{F}\,ds.$$

Тому, на підставі співвідношення (4),

$$\int_{AB} \mathbf{F}\,ds = \int_{AC} \mathbf{F}\,ds - \int_{BC} \mathbf{F}\,ds = \int_{AC} \mathbf{F}\,ds + \int_{CB} \mathbf{F}\,ds.$$

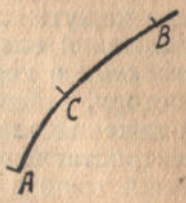

Рис. 101.

Криволінійний інтеграл виду (2), взятий по замкнутій кривій, зветься *циркуляцією вектора* **F** по цій кривій. З попереднього ясно, що циркуляція змінює знак, коли ми, інтегруючи, обходимо ту саму криву в протилежному напрямі.

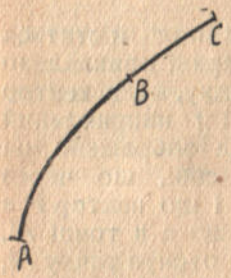

Рис. 102.

Якщо в замкнутій кривій $ABCD$ (див. рис. 103) ми сполучимо дві її точки B і D будьякою кривою BD і утворимо два замкнутих контура $ABDA$ і $BCDB$, то

$$\int_{BCDAB} \mathbf{F}\,ds = \int_{BDAB} \mathbf{F}\,ds + \int_{BCDB} \mathbf{F}\,ds,$$

тобто інтеграл по всьому контуру $ABCDA$ дорівнює сумі інтегралів, узятих по двох складових контурах $ABDA$ і $BCDB$, які проходять в тому самому напрямі. Це випливає з того, що

$$\int_{BDAB} \mathbf{F}\,ds = \int_{BD} \mathbf{F}\,ds + \int_{DAB} \mathbf{F}\,ds$$

$$\int_{BCDB} \mathbf{F}\,ds = \int_{DB} \mathbf{F}\,ds + \int_{BCD} \mathbf{F}\,ds.$$

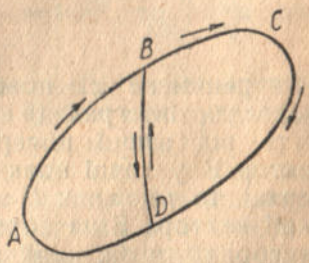

Рис. 103.

Якщо ми складемо ці дві рівності почленно, то з правого боку перші два інтеграла, узяті по вітці BD в обидві сторони, взаємно знищуються; інші два інтеграла дають разом інтеграл по замкнутій кривій $ABCDA$.

58. Визначаючи криволінійний інтеграл, ми припускали, що в кожній точці кривої прикладено певний вектор. У прикладних дисциплинах часто доводиться розглядати частину простору (іноді навіть увесь простір), у кожній точці якої при-

кладено певний вектор **F**; така частина простору зветься *векторним полем*. Вектор **F** зветься *вектором поля* в даній його точці. Тому що векторне поле характеризується вектором **F**, то часто кажуть: „векторне поле **F**". Наприклад, якщо діелектрик заряджений електрикою в статичному стані, то електричне *напряження* в кожній його точці виражається вектором; частина простору, зайнята цим тілом, є векторне поле; якщо провідник заряджений електрикою в статичному стані, то він створює електростатичне поле у всьому навколишньому просторі: у кожній точці простору прикладено вектор, який виражає електричне напруження поля; увесь простір, що оточує провідника, є векторне поле. Якщо замкнута крива лежить у векторному полі, то можна говорити про *циркуляції по цій кривій у нашому векторному полі*.

59. Векторний потік. В певному векторному полі міститься обмежена поверхня *ABCD*. В кожній точці поверхні прикладено вектор **F**—це вектор поля. Почнемо з того випадку, коли вектор у кожній точці лежить нормально до поверхні і напрямлений в один бік від неї, як це зображено на рис. 104. Якщо ми уявимо собі, що через дану поверхню тече рідина і що вектор **F** є скорість рідинної частинки, що є в точці *M*, а $d\sigma$ є елемент площі, який оточує точку *M*, то $Fd\sigma$ є об'єм рідини, яка протікає за одиницю часу через цей елемент поверхні. У наслідок цього об'єм рідини, що протікає через цю поверхню за одиницю часу, виражається подвійним інтегралом

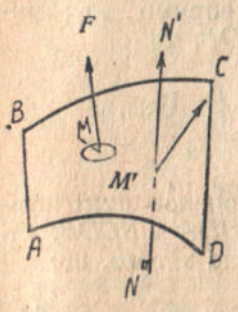

Рис. 104.

$$\iint F\,d\sigma, \tag{6}$$

поширеним на всю поверхню. Керуючись цією гідродинамічною моделлю, інтеграл (6) звуть *векторним потоком*, який відходить від нашої поверхні в розглядуваному полі. Якщо ж вектор **F** у точці поля *M'*, напрямлено не по нормалі до поверхні, то множник *F* заміняється числовим значенням F_n проекції вектора **F** на нормаль *M'N'*. Отже в загальному випадку векторний потік, який проходить через нашу поверхню, виражається інтегралом

$$\iint F_n\,d\sigma, \tag{7}$$

узятим по всій поверхні. Тут треба зауважити, що нормаль, на яку ми проектуємо вектор, можна провести в один або в другий бік (*M'N'* або *M'N''*). Згідно з тим інтеграл (7) є *векторний потік, який відходить від поверхні в той бік, у який ми направляємо нормаль*. Якщо ми змінюємо напрям нормалі,

то векторний потік змінить знак на супротивний, бо змінить знак число F_n.

В прикладаннях найбільший інтерес являє собою той випадок, коли поверхня, через яку проходить потік, замкнена. Якщо ми в даному випадку в усіх точках поверхні напрямляємо нормаль всередину поверхні, то інтеграл (7) виражає *векторний потік, що вступає в поверхню*; якщо ж той самий інтеграл узяти в припущенні, що нормаль, на яку проектується вектор, напрямлена зовні, то інтеграл виражає *векторний потік, що виходить з поверхні.*

Приклад 1. На початку координат O є електричний додатний заряд e, що обумовлює в його однорідному середовищі електростатичне поле. Напруження поля в кожній точці M виражається вектором, напрямленим по прямій OM від центра і завдовжки (за законом Кулона) $k\frac{e}{r^2}$, де k—діелектрична стала середовища, а r—віддаль точки M від $O\left(F=k\frac{e}{r^2}\right)$. Чому дорівнює потік, який виходить із сфери радіуса R?

У точці M на сфері елемент потоку дорівнює

$$k\frac{e\,d\sigma}{R^2}.$$

Тому що множник $k\frac{e}{R^2}$ залишається на всій сфері сталим, то ввесь потік, який виходить із сфери, дорівнює $k\frac{e}{R^2}\sigma$, де σ є поверхня всієї сфери. Через те, що $\sigma=4\pi R^2$, то потік дорівнює $4\pi ke$.

Приклад 2. Чому дорівнює векторний потік, який вступає в замкнену поверхню в *однорідному* полі, тобто в такому полі, в кожній точці якого прикладено той самий вектор **F**?

Якщо уявити собі, що простір, як той, що є всередині поверхні, так і той, що оточує її, заповнено однорідною рідиною, яка рухається з скорістю **F**, то потік, що вступає в поверхню, виражає об'єм рідини, яка вступає в поверхню за одиницю часу. Але при умовах завдання, коли всі частинки рідини, яка охоплює і заповнює поверхню, рухаються з однаковою скорістю **F**, об'єм рідини, яка фактично вступає всередину поверхні, дорівнює об'ємові рідини, що виходить з поверхні. Увесь потік, який вступає всередину поверхні, значить, дорівнює нулеві.

Обчислити векторний потік, не вдаючись до гідродинамічної моделі, для будьякої поверхні не так просто. Цікава теорема Гаусса, викладена в дальших рубриках, часто спрощує це обчислення.

60. Теорема Гаусса. Зупинімося на тому випадку, коли поверхня, через яку йде векторний потік, обмежує прямокутний паралелепіпед, ребра якого паралельні осям координат.

Обчислимо спочатку потік, який виходить з поверхні, через грані паралелепіпеда, паралельні площині XY. Для цього на одній із цих граней виділимо площу $d\sigma$ і на ній збудуємо циліндрик, який на протилежній грані виріже таку саму площу.

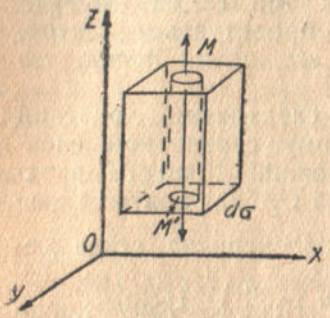

Рис. 105.

На верхній площі зовнішня нормаль не тільки паралельна додатній осі z-ів, а й напрямлена в той самий бік. Проекція на неї вектора **F** числово дорівнює значенню його координати F_z у точці M площі $d\sigma$; ми позначимо це значення через $F_z(M)$ або через $F_z(x_0, y_0, z_0)$, якщо x_0, y_0, z_0 є координати точки M. Потік, що виходить через цю площу, дорівнює $d\sigma F_z(M)$. Якщо ми візьмемо точку M' на нижній грані, протилежну M, то тут зовнішня нормаль до поверхні буде напрямлена в протилежний бік у від'ємному напрямі осі z-ів; тому проекція на неї вектора нашого поля дорівнює $-F_z(M')$, а потік, що виходить через нижню площу $d\sigma$, дорівнює

$$-d\sigma F_z(M') = -d\sigma F(x_0, y_0, z_0'),$$

бо в точці M' координати x і y мають ті самі значення, що і в M, але координата z має друге значення (z_0' замість z_0). Отже, потік, який виходить через обидві площі $d\sigma$, дорівнює

$$d\sigma F_z(M) - d\sigma F_z(M') = d\sigma \{F_z(x_0, y_0, z_0) - F_z(x_0, y_0, z_0')\}.$$

На прямій MM' координати x і y залишаються сталими, тому значення $F_z(x, y, z)$ на цій прямій залежать тільки від z. На підставі теореми про середнє значення („Дифер. числ.", рубр. 141):

$$F_z(x_0, y_0, z_0) - F_z(x_0, y_0, z_0') = (z_0 - z_0') \frac{\partial F_z}{\partial z} (x_0, y_0, z_1) =$$

$$= \frac{\partial F_z}{dz} (M_1) \cdot (z_0 - z_0'),$$

де z_1 є значення, що є між z_0 і z_0', а M_1 (x_0, y_0, z_1) точка прямо MM', яка лежить між M і M', значить усередині нашого циліндричного стовпчика. Через те, що $(z_0 - z_0')$ є висота стовпчика то $d\sigma(z_0 - z_0')$ є його об'єм dv. Разом з тим приходимо до висновку, що потік, який виходить через основи стовпчика, дорівнює $dv \frac{\partial F_z}{\partial z} (M_1)$, де M_1—точка всередині стовпчика. Якщо ос-

нови нашого паралелепіпеда поділимо зазначеним способом на елементи, то так само виразиться потік, який виходить через кожні дві протилежно розміщені площі. Потік, який виходить через верхню й нижню грані нашого паралелепіпеда, виразиться сумою

$$\sum dv \frac{\partial F_z}{\partial z} (M_1). \tag{8}$$

Тому, якщо, через p і q позначимо найбільше й найменше значення похідної $\frac{\partial F_z}{\partial z}$ в границях нашого паралелепіпеда, то сума буде між

$$\sum dv\, p = p \sum dv = pV \quad \text{і} \quad \sum dv\, q = q \sum dv = qV,$$

де V об'єм паралелепіпеда. Тому ця сума дорівнює kV, де число k є між p і q. *Якщо похідна* $\frac{\partial F_z}{\partial z}$ *неперервна в границях нашого паралелепіпеда*, то

$$k = \frac{\partial F_z}{\partial z} (\overline{M}), \tag{9}$$

де $\overline{M}$ є певна точка паралелепіпеда. Отже, *векторний потік, який виходить через верхню й нижню стінку паралелепіпеда дорівнює*

$$V \frac{\partial F_z}{\partial z} (\overline{M}),$$

тобто добуткові з об'єму паралелепіпеда на значення похідної $\frac{\partial F_z}{\partial z}$ *у певній точці паралелепіпеда.*

Ясно, що потоки, які виходять через бічні стінки, так само виразяться добутками:

$$V \frac{\partial F_x}{\partial x} M') \quad \text{і} \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} (M''),$$

де M' і M'' також точки в нашому паралелепіпеді. Трохи спрощуючи позначення, можна сказати, що потік, який виходить з паралелепіпеда через усі його стінки, дорівнює

$$V \left\{ \frac{\partial F_x}{\partial x} (M') + \frac{\partial F_y}{\partial y} (M'') + \frac{\partial F_z}{\partial z} (M''') \right\}. \tag{10}$$

де M', M'' і M''' є певні точки паралелепіпеда.

61. Щоб від цієї формули перейти до теореми Гаусса, доведемо допоміжне твердження, цілком аналогічне тому, яке для циркуляції було доведено в рубриці 57.

Якщо певний об'єм, обмежений замкненою поверхнею, поділити на дві частини січною поверхнею, то векторний потік, який виходить з усього об'єму через його поверхню, дорівнює сумі потоків, що виходять з двох частин, на які ми цей об'єм поділили.

Довід базується на тих самих міркуваннях, на яких побудовано довід твердження 57. Коли ми складаємо потоки, що виходять з двох частин, на які об'єм поділено, то потоки, які йдуть від січної поверхні в обидва боки, взаємно знищуються; залишається потік, який виходить з початкової поверхні.

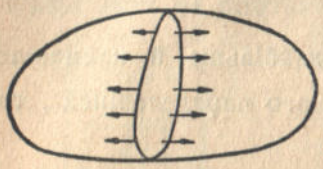

Рис. 106.

Повторюючи кілька разів той самий спосіб, ми узагальнимо цю теорему: *якщо об'єм, обмежений замкненою поверхнею, поділимо на яке завгодно число частин, то векторний потік, який виходить з усього об'єму, дорівнює сумі потоків, що виходять з усіх частин.*

62. Припустімо тепер, що нам треба обчислити векторний потік, який виходить з певної замкненої поверхні. Сіттю площин, паралельних площинам координат, ми поділимо об'єм, обмежений нашою поверхнею, на дуже малі паралелепіпеди, до яких прилучаються зрізані паралелепіпеди у зовнішній поверхні. Потік, який виходить з заданої поверхні, дорівнює сумі потоків T, що виходять з елементарних паралелепіпедів, і потоків t, що виходять із зрізаних паралелепіпедів, які прилягають до поверхні

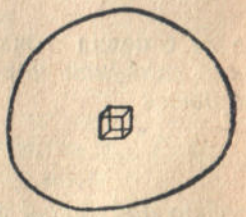

Рис. 107.

$$J = \sum T + \sum t.$$

Коли сіть згущається і об'єми всіх паралелепіпедів прямують до нуля, то й друга сума прямує до нуля; а тому

$$J = \lim \sum T.$$

Позначаючи об'єм елементарного паралелепіпеда через dv і виражаючи елементарний потік за формулою (10), добудемо:

$$J = \lim \sum dv \left\{ \frac{\partial F_x}{\partial x}(M) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(M') + \frac{\partial F_z}{\partial z}(M'') \right\} =$$

$$= \int dv \left\{ \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right\} =$$

$$= \iiint dx\,dy\,dz \left\{ \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right\}; \qquad (11)$$

потрійний інтеграл треба взяти по всьому об'єму.

63. Дивергенція. Множник при диференціалі dv є число, скаляр, який звуть *дивергенцією* векторного поля в даній його точці; його позначають символом $\operatorname{div}\mathbf{F}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{12}$$

Разом з тим теорему Гаусса формулюють так:

$$J=\iint F_n\,d\sigma=\iiint \operatorname{div}\mathbf{F}\,dv.$$

Кратні інтеграли в позначенні часто заміняють простими:

$$J=\int F_n\,d\sigma=\int \operatorname{div}\mathbf{F}\,dv;$$

при цьому мають на увазі, що інтегрування по поверхні по суті є подвійне інтегрування, а інтегрування по об'єму—потрійне.

Отже, *потік, який виходить у векторному полі з замкненої поверхні, виражається інтегралом від елемента об'єму, помноженого на значення дивергенції поля в будьякій точці цього елемента, узятим по всьому об'єму, обмеженому цією поверхнею.*

З погляду суто аналітичного, теорема Гаусса є правило, за яким деякі подвійні інтеграли можна перетворювати на потрійні, і навпаки. З цього саме погляду до цього твердження прийшов російський математик Остроградський, незалежно від Гаусса. Тому це твердження часто звуть *теоремою Гаусса-Остроградського.*

64. До доведеного твердження треба додати два посутні зауваження. Поперше, вже при виводі співвідношення (9) було зазначено, що воно посутньо припускає неперервність похідних $\frac{\partial F_z}{\partial z}$; те саме стосується, звичайно, до похідних $\frac{\partial F_x}{\partial x}$, $\frac{\partial F_y}{\partial y}$. Якщо якась з похідних зазнає розриву всередині розглядуваної частини простору, то співвідношення (11) може вже не мати місця. Зауважимо при цьому, що теорема залишається справедливою і в тому випадку, коли об'єм обмежений багатозв'язною поверхнею, або такою, що складається з окремих не зв'язаних між собою частин. Наприклад, заштрихований об'єм на рис. 108 обмежений, по суті, трьома замкненими поверхнями; але теорема Гаусса залишається справедливою, якщо тільки у виділюваній цими поверхнями частині простору похідні $\frac{\partial F_x}{dx}$, $\frac{\partial F_y}{dy}$, $\frac{\partial F_z}{dz}$ залишаються неперервними.

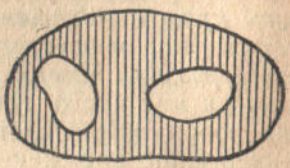

Рис. 108.

Друге зауваження полягає ось у чому. Дивергенція векторного поля визначена співвідношенням (12). Але права частина цієї рівності виражена через координати вектора **F** у певній системі ортогональних координат. Чи не залежить права частина рівності, а, виходить, і все визначення дивергенції від вибраної частини координат? Інакше кажучи, якщо ми від первісних ортогональних осей OX, OY, OZ перейдемо до ортогональних же осей OX', OY', OZ', і координати вектора **F** в новій системі будуть $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{z'}$, то чи буде

$$\frac{\partial F_{x'}}{\partial x'}+\frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}+\frac{\partial F_{z'}}{\partial z'}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}. \qquad (13)$$

Тільки в тому випадку, коли ця рівність завжди має місце, визначення, виражене співвідношенням (12), не ставить поняття про дивергенцію в залежність від системи координат.

Отже, припустімо, що векторне поле віднесено до будьякої системи ортогональних координат і дивергенція в цих координатах визначена співвідношенням (12). Оточимо довільну точку поля M невеликою замкненою поверхнею. Потік J, що виходить з цієї поверхні, за теоремою Гаусса (11), міститься між vp і vq, де v — обмежений поверхнею об'єм, p — найменше, q — найбільше значення дивергенції в цьому об'ємі. Через те, що дивергенція в границях об'єму неперервна, то можна сказати, що $J=vk$, де k — значення дивергенції в певній точці об'єму (що міститься між p і q). Інакше кажучи, відношення $J:v$ є значення дивергенції в певній точці об'єму. Якщо поверхня, якою ми оточували точку, необмежено зменшується, тоді число k неминуче прямує до значення дивергенції в точці M. Виходить, *дивергенція векторного поля в заданій точці M є границя, до якої прямує відношення потоку, що виходить з невеликої поверхні, яка оточує точку, до об'єму, цією поверхнею обмеженого, коли розміри поверхні необмежено зменшуються.* Але це твердження має чисто геометричний характер, не залежить зовсім від координатної системи і тому встановлює, що й визначення дивергенції, виражене співвідношенням (12), від вибору координат не залежить. Зауважимо, що співвідношення (13), яке виражає інваріантність дивергенції, можна легко довести, перетворюючи координати.

65. Застосуємо теорему Гаусса-Остроградського до двох прикладів.

Приклад 1. Вектор, прикладений до кожної точки поля, є його радіус-вектор: **F**=**R**. Обчислити потік, який виходить із сфери радіуса r, що має центр в початку координат.

В цьому випадку вектор **F** у кожній точці поверхні напрямлений по зовнішній нормалі, а його проекція на зовнішню нор-

маль по всій сфері дорівнює радіусу сфери r. Тому векторний потік обчислюється безпосередньо:

$$J = r \cdot 4\pi r^2 = 4\pi r^3 = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 3v,$$

де v — об'єм, обмежуваний нашою сферою.

Припустимо тепер, що в тому самому полі взято зовсім довільно замкнену поверхню. Обчислити векторний потік, що з неї виходить, безпосередньо буде важко. Скористаємося теоремою Гаусса. В цьому випадку

$$F_x = x, \quad F_y = y, \quad F_z = z; \quad \frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1; \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = 3.$$

Теорема Гаусса дає:

$$J = 3\int dv = 3v.$$

Результат, добутий для сфери, дуже просто поширюється на всяку поверхню.

Приклад 2. Замкнена поверхня міститься в однорідному векторному полі (рубр. 59, прикл. 2). Чому дорівнює векторний потік, що з неї виходить?

Через те, що координати F_x, F_y, F_z вектора $\mathbf{F}$ мають сталі значення, то $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, а тому дорівнює нулеві і векторний потік, який виходить з цієї поверхні. Теорему, для виводу якої ми користалися в рубр. 59 гідродинамічною моделлю, за теоремою Гаусса доводять чисто аналітично.

66. Соленоідальне поле. Ньютонове поле. Векторне поле, дивергенція якого в усіх точках поля дорівнює нулеві, через аналогії, запозичені з теоретичної фізики, іноді звуть *незаряджeним,* іноді *соленоідальним* полем. Якщо замкнена поверхня оточує незаряджене векторне поле, то потік, що з неї виходить, дорівнює нулеві. Дуже велике значення має так зване *Ньютонове* поле, що стосується до цього типу. В точці міститься центр притягання, що обумовлює силове поле за законом Ньютона. Сила поля $\mathbf{F}$ у цьому випадку є вектор, напрямлений до центра O і має довжину $\frac{k}{r^2}$, де r — віддаль точки від початку, а k є стала; при належному доборі $k = 1$, що ми й припускаємо нижче. Напрямні косинуси вектора в цьому випадку дорівнюють

$$-\frac{x}{r}, \quad -\frac{y}{r}, \quad -\frac{z}{r};$$

Тому

$$F_x=-\frac{x}{r^3},\quad F_y=-\frac{y}{r^3},\quad E_z=-\frac{z}{r^3}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{\partial F_y}{\partial y}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y}{r^4}\frac{\partial r}{\partial r},\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z}{r^4}\frac{\partial r}{\partial z},$$

$$r=\sqrt{x+y^2+z^2},\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}.$$

Виходить

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}\left(1-\frac{3x^2}{r^2}\right),\quad \frac{\partial F_y}{\partial y}=-\frac{1}{r^3}\left(1-\frac{3y^2}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial z}=-\frac{1}{r^3}\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right).$$

Ці похідні залишаються неперервними тільки в тій частині простору, в якій нема центра притягання O, бо в точці O $r=0$ і всі три похідні зазнають розриву. У всякій же іншій точці

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=-\frac{3}{r^3}\left\{1-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right\}=0.$$

В Ньютоновому полі дивергенція дорівнює нулеві у всіх точках, крім центра притягання. Тому в Ньютоновому полі силовий потік, який виходить з поверхні, всередині якої нема центра притягання, дорівнює нулеві.

67. Ньютонове поле має ще одну дуже важливу властивість. В рубриці 41, у прикладі 3 було обчислено роботу сили поля на певній путі AB; при цьому виявилося, що робота ця залежить тільки від початкової й кінцевої точки, а не від самої путі. Висловлюючись геометрично, це означає, що узятий по будьякій лінії поля інтеграл (2) має значення, яке залежить тільки від початкової й кінцевої точки кривої, по якій ми інтегруємо, а не від самої кривої. В такому полі інтеграл по замкненій кривій дорівнює нулеві. Справді, якщо замінити криву $ABCDA$ (рис. 109), поділити на частини ABC і CDA, то

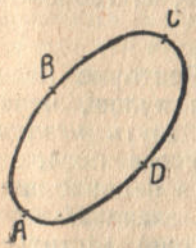

Рис. 109.

$$\int_{ABCDA}\mathbf{F}\,d\mathbf{s}=\int_{ABC}\mathbf{F}\,d\mathbf{s}+\int_{CDA}\mathbf{F}\,d\mathbf{s}=\int_{ABC}\mathbf{F}\,d\mathbf{s}-\int_{ADC}\mathbf{F}\,d\mathbf{s}.$$

А через те, що за умовою

$$\int_{ADC}\mathbf{F}\,d\mathbf{s}=\int_{ABC}\mathbf{F}\,d\mathbf{s},$$

то інтеграл по замкненій путі дорівнює нулеві. Так само, очевидно, легко довести, що інтеграл не залежить від путі інтегрування, якщо в цьому полі циркуляція по будьякій замкненій путі дорівнює нулеві. Тому ми розв'яжемо питання, при яких умовах інтеграл (2) в даному векторному полі не залежить від путі інтегрування або, що те саме, при яких умовах циркуляція у векторному полі завжди дорівнює нулеві.

68. Випадок повного диференціала. Отже, припустімо, що векторне поле $\mathbf{F}(x, y, z)$ таке, що в ньому інтеграл

$$\int \mathbf{F}\,d\mathbf{s} = \int F\cos\theta\,ds = \int F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \qquad (15)$$

(θ кут між вектором $\mathbf{F}$ і елементом дуги $d\mathbf{s}$) залежить лише від початкової і кінцевої точки путі інтегрування, а не від самої путі. Виберемо певну початкову точку M_0 і обчислимо значення інтеграла

$$\int_{M_0}^{M} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = \int_{M_0 M} \mathbf{F}\,d\mathbf{s},$$

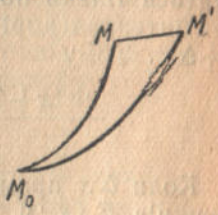

Рис. 110.

взятого від цієї спільної початкової точки M_0, до довільної точки поля M. Ясно, що значення цього інтеграла залежатиме від кінцевої точки $M(x, y, z)$, тобто являтиме собою функцію від координат цієї точки, яку позначимо через $\Phi(x, y, z)$. Виходить

$$\Phi(x, y, z) = \int_{M_0(x_0, y_0, z_0)}^{M(x, y, z)} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$$

Покажемо, що

$$F_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \qquad (16)$$

Для цього, вибравши точку $M(x, y, z)$, візьмемо потім точку $M'(x+\Delta x, y, z)$. Тоді

$$\Phi(x+\Delta x, y, z) = \int_{M_0}^{M'} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$$

Точки M і M' мають спільні координати y і z, тому прямолінійний відрізок MM' паралельний осі x-ів. Через те, що інтеграл, взятий від точки M_0 до точки M, не залежить від путі інтегрування, то

$$\int_{M_0}^{M'} = \int_{M_0}^{M} + \int_{M}^{M'} \quad \text{або} \quad \int_{M_0}^{M'} - \int_{M_0}^{M} = \int_{M}^{M'}$$

Інакше кажучи,

$$\Phi(x+\Delta x,\ y,\ z)-\Phi(x,\ y,\ z)=\int\limits_{M}^{M'} F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz.$$

Але на путі інтегрування MM' координати y і z зберігають сталі значення, тобто $dx=dz=0$. Криволінійний інтеграл обертається тому в простий інтеграл:

$$\Phi(x+\Delta x,\ y,\ z)-\Phi(x,\ y,\ z)=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} F_x(x,\ y,\ z)\,dx,$$

де змінні y і z зберігають свої значення, а інтегрування виконується тільки по змінній x. Згідно з формулою III, рубр. 23, цей інтеграл дорівнює $\Delta x\,F_x(x',\ y,\ z)$, де число x' є між x і $x+\Delta x$. Тому

$$\frac{\Phi(x+\Delta x,\ y,\ z)-\Phi(x,\ y,\ z)}{\Delta x}=F_x(x',\ y,\ z).$$

Коли Δx прямує до нуля, то x' прямує до x. Тому, якщо функція $F_x(x,\ y,\ z)$ неперервна в нашому полі, що ми по суті припускаємо, то остання рівність при переході до границі ($\Delta x\to 0$) дає:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=F_x(x,\ y,\ z).$$

Аналогічно добуваємо й решту співвідношень (16). *Підінтегральний вираз у даному випадку є повний диференціал.*

69. Вихровий вектор. Виходить, коли інтеграл (15) не залежить від путі інтегрування, то мають місце співвідношення (16). Але тоді

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y},\quad \frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z},$$

а тому

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial z};$$

так само доведемо, що

$$\frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x},\quad \frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial y}.$$

Ці рівності можна написати так:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=0;\qquad (17)$$

вони являють собою умови, потрібні для того, щоб значення інтеграла (15) не залежало від путі інтегрування. Цей результат можна виразити інакше. Якщо ми позначимо різниці, які становлять ліві частини рівностей (17), через C_x, C_y, C_z, тобто припустимо

$$C_x=\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z},\quad C_y=\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x},\quad C_z=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y},\qquad (18)$$

то числа C_x, C_y, C_z ми можемо розглядати як координати певного вектора **C**. Цікаво, що цей вектор у кожній точці цілком визначається векторним полем **F**, тобто не залежить від вибору ортогональних координат, в яких виражені функції F_x, F_y, F_z — координати вектора **F**. Це буде доведено нижче; тепер же, залишаючись при певній системі координат, будемо звати вектор **C** *вихровим вектором поля* в кожній його точці. В літературі вживають подвійне позначення вихрового вектора:

$$\mathbf{C}=\operatorname{curl}\mathbf{F}\qquad\text{або}\qquad\mathbf{C}=\operatorname{rot}\mathbf{F}.$$

Перше позначення містить англійське слово „curl" — завиток; друге містить скорочення слова „rotor" — обертальний вектор; обидві назви пояснюються уживанням цього вектора в гідродинаміці. Твердження, доведене в попередній рубриці, можна тому виразити так.

Шоб у даному векторному полі криволінійний інтеграл (15) залежав тільки від початкової й кінцевої точки, а не від путі інтегрування, або, що те саме,— щоб циркуляція в полі дорівнювала нулеві, яка б не була замкнена крива, необхідно, щоб вихровий вектор обертався в нуль у кожній точці поля.

Ця умова не тільки необхідна, а й достатня.

Довід цього твердження грунтується на дуже цікавій теоремі, що зветься ім'ям англійського геометра Стокса. Раніше, ніж подати це твердження, треба навести деякі міркування.

70. Властивості вихрового поля. Координати вихрового поля визначаються формулами (18), а тому

$$\frac{\partial C_x}{\partial x}=\frac{\partial^2 F_z}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial^2 F_y}{\partial z\,\partial x},$$

$$\frac{\partial C_y}{\partial y}=\frac{\partial^2 F_x}{\partial z\,\partial y}-\frac{\partial^2 F_z}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{\partial C_z}{\partial z}=\frac{\partial^2 F_y}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2 F_x}{\partial y\,\partial z}.$$

Складаючи ці рівності почленно, маємо:

$$\frac{\partial C_x}{\partial x}+\frac{\partial C_y}{\partial y}+\frac{\partial C_z}{\partial z}=0.$$

Кожному векторіальному полю відповідає друге поле, утворюване вихровими векторами першого поля. Остання рівність свідчить, що дивергенція вихрового поля дорівнює нулеві у всьому полі, тобто що вихрове поле є соленоідальне, або незаряджене поле (рубр. 66).

У вихровому полі від кожної площі в кожну сторону відходить потік вихрових векторів, як кажуть, „вихровий потік" цього поля. Він виражається інтегралом типу (7), який тепер має вид:

$$\iint C_n \, d\sigma.$$

Дивергенція вихрового вектора дорівнює нулеві, а тому вихровий потік, що виходить з будьякої замкненої поверхні, в якій вихровий вектор не зазнає ніяких розривів, завжди дорівнює нулеві. Цей результат можна формулювати інакше.

71. Теорема Стокса. У векторіальному полі **F**, якому відповідає вихрове поле **C**, візьмемо замкнену криву L і на ній установимо певний напрям обходу (на рис. 111 — відмічений стрілкою). Через цю криву перекинемо поверхню Σ так, щоб крива L цю поверхню обмежувала. В кожній точці поверхні виберемо певний напрям нормалі, скерувавши її так, щоб для спостері-

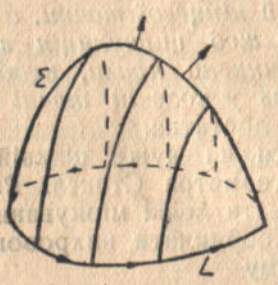

Рис. 111.

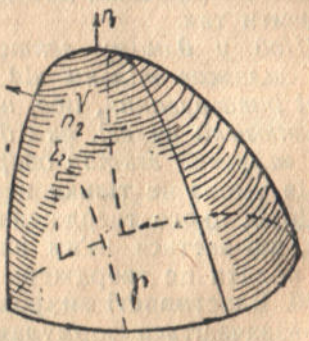

Рис. 112.

гача, який стоїть в цьому напрямі, здавалося, що обхід по кривій L в установленому на ній напрямі йде проти годинникової стрілки (як додатне обертання). Такий напрям нормалі ми зватимемо *спряженим з напрямом кривої* і позначимо буквою n.

Тепер припустимо, що через криву L перекинуті дві поверхні Σ_1 і Σ_2 (рис. 112), які разом обмежують певний об'єм V. Напрям нормалі, спряжений з обходом контура L, в точці першої поверхні позначимо через n_1, в точці другої поверхні через n_2. Якщо, як на нашому рисунку, напрям нормалі n_1 виходить з об'єму V зовні, то напрям n_2 обернений усередину цього

об'єму. Тому вихровий потік, який виходить з об'єму V, виражається різницею інтегралів:

$$\int\int_{\Sigma_1} C_{n_1} d\sigma - \int\int_{\Sigma_2} C_{n_2} d\sigma,$$

з яких перший поширюється по поверхні Σ_1, другий — по поверхні Σ_2. Тому що цей потік дорівнює нулеві, то

$$\int\int_{\Sigma_1} C_{n_1} d\sigma = \int\int_{\Sigma_2} C_{n_2} d\sigma.$$

Теорема Стокса полягає в тому, що загальне значення цих вихрових потоків дорівнює циркуляції по кривій L в установленому на ній напрямі в основному векторному полі. Отже ця теорема виражається такою рівністю:

$$\int_L F\cos\theta\, ds = \int\int_\Sigma C_n\, d\sigma. \tag{19}$$

Словесно цю теорему можна виразити так:

Циркуляція по замкненій кривій у векторному полі дорівнює вихровому потокові, який відходить від будьякої поверхні, що через цю криву перекинута і нею обмежена, в сторону, спряжену з напрямом циркуляції.

Довід теореми Стокса ми можемо розгорнути лише поступово. Ми будемо його здійснювати в порядку перетворення лівої частини рівності (19) в праву.

72. Почнемо з обчислення циркуляції по периферії прямокутника, що міститься в площині XY або в паралельній їй площині так, що сторони його паралельні осям координат. Припустімо спочатку, що периферію цього прямокутника $ABCD$ ми обходимо в напрямі, спряженому з додатним напрямом осі z-ів. Нехай x_0, y_0, z_0 будуть координати точки A; l і m довжини сторін прямокутника: $AB=l$, $BC=m$. На відрізку AB координати y і z зберігають сталі значення y_0, z_0: на ньому $dy=dz=0$. Криволінійний інтеграл, узятий вздовж цього відрізка, набирає виду:

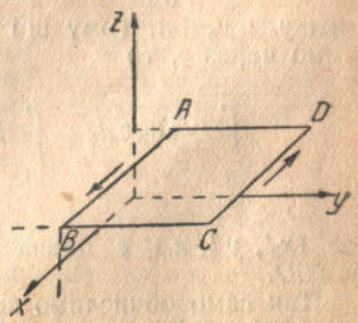

Рис. 113.

$$\int_{AB} F\cos\theta\, ds = \int_{AB} F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = \int_{x_0}^{x_0+l} F_x(x_0, y_0, z_0)\, dx.$$

Так само по відрізку CD той самий криволінійний інтеграл набирає виду:

$$\int_{x_0+l}^{x_0} F_x(x,\ y_0+m,\ z_0)\,dx,$$

бо координати y і z зберігають на цьому відрізку сталі значення y_0+m і z_0. Тому

$$\int_{AB} F\cos\theta\,ds+\int_{CD} F\cos\theta\,ds=\int_{x_0}^{x_0+l} F_x(x,\ y_0,\ z_0)\,dx+$$

$$+\int_{x_0+l}^{x_0} F_x(x,\ y_0+m,\ z_0)\,dx=\int_{x_0}^{x_0+l} F_x(x,\ y_0,\ z_0)\,dx-$$

$$-\int_{x_0}^{x_0+l} F_x(x,\ y_0+m,\ z_0)\,dx=$$

$$=-\int_{x_0}^{x_0+l}\{F_x(x,\ y_0+m,\ z_0)-F_x(x,\ y_0,\ z_0)\}\,dx=$$

$$=-m\int_{x_0}^{x+l}\frac{\partial F_x}{\partial y}(x,\ y_0',\ z_0)\,dx,$$

де y_0' при всякому значенні x є між y_0 і y_0+m. (Дифер. чисел., рубр. 144). Останній інтеграл на підставі формули III, рубр. 23, дорівнює $-\frac{\partial F_x}{\partial y}(x_0',\ y_0',\ z_0)$, де число x_0' є між x_0 і x_0+l, а y_0'— між y_0 і y_0+m. Тому що ml є площа прямокутника, яку позначимо через σ, то

$$\int_{AB} F\cos\theta\,ds+\int_{CD} F\cos\theta\,ds=-\sigma\frac{\partial F_x}{\partial y}(x_0',\ y_0',\ z_0),\qquad(20)$$

де $(x_0',\ y_0',\ z_0)$ є певна точка, яка належить прямокутникові $ABCD$.

Так само обчислимо значення інтегралів, узятих по відрізках BC і DA:

$$\int_{BC} F\cos\theta\,ds+\int_{DA} F\cos\theta\,ds=$$

$$=\int_{y_0}^{y_0+m} F_y(x_0+l,\ y,\ z_0)\,dy+\int_{y_0+m}^{y_0} F_y(x_0,\ y,\ z_0)\,dy=$$

$$=\int_{y_0}^{y_0+m} \{F_y(x_0+l,\ y,\ z_0)-F_y(x_0,\ y,\ z_0)\}\,dy=$$

$$=\int_{y_0}^{y_0+m} l\cdot\frac{\partial F_y}{\partial x}(x_0'',\ y,\ z_0)\,dy=lm\frac{\partial F_y}{\partial x}(x_0'',y_0'',z_0)=$$

$$=\sigma\frac{\partial F_y}{\partial x}(x_0'',\ y_0'',\ z_0), \tag{21}$$

де $(x_0'',\ y_0'',\ z_0)$ є певна точка прямокутника $ABCD$. Сполучаючи рівності (20) і (21), добудемо:

$$\int_{ABCD} F\cos\theta\,ds=\sigma\left\{\frac{\partial F_y}{\partial x}(x_0'',\ y_0'',\ z_0)-\frac{\partial F_x}{\partial y}(x_0',\ y_0',\ z_0)\right\}, \tag{22}$$

де $(x_0',\ y_0',\ z_0)$ і $(x_0'',\ y_0'',\ z_0)$ є точки, які лежать у границях прямокутника $ABCD$.

73. Цим результатом ми скористаємося для обчислення циркуляції по будьякій замкненій кривій, уміщеній у площині, паралельній площині XY. Ми припустимо й тут, що крива обходиться в напрямі, спряженому з додатним напрямом осі z-ів, як це позначено на нашому рисунку. У рубриці 57 ми показали, що циркуляція по замкненій кривій дорівнює сумі циркуляцій по двох контурах, які добудемо, розсікаючи дану криву поперечною лінією. Можна сказати: якщо ми площу, яку обгинає замкнена крива на будьякій поверхні, поділимо на дві частини, то циркуляція навколо всієї площі дорівнює сумі циркуляцій навколо двох складових площ, аби вона виконувалась в тому самому напрямі обходу. Ясно, що кожну частину ми знову можемо поділити на частини і продовжувати це довільне число разів: циркуляція навколо всієї площі дорівнює сумі циркуляцій навколо складових площ, аби ми зберігали напрям обходу.

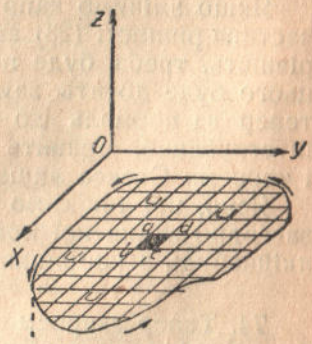

Рис. 114.

Керуючись цим, поділимо нашу площу на дуже малі квадрати прямими, паралельними осям x-ів і y-ів. До цих квадратів і обвідної кривої прилучаться зрізані квадрати — уступи, як це звичайно буває. Циркуляція по нашій кривій L дорівнює

сумі циркуляцій навколо окремих квадратів і уступів. Вилучимо один із квадратів $abcd$: якщо x, y, z є координати вершини a, то циркуляція навколо цього квадрата, за формулою (22), дорівнює

$$\Delta\sigma\left\{\frac{\partial F_y}{\partial x}(x', y', z)-\frac{\partial F_x}{\partial y}(x'', y'', z)\right\},$$

де $\Delta\sigma$ — площа квадрата, а (x', y', z) і (x'', y'', z) дві точки, у границях цього квадрата розміщені. Циркуляція на зовнішній кривій L дорівнює сумі циркуляцій навколо всіх квадратів і уступів,

$$\int_L F\cos\theta\, d\theta=\sum\left\{\frac{\partial F_y}{\partial x}(x', y', z)-\frac{\partial F_x}{\partial y}(x'', y'', z)\right\}\Delta\sigma+R,$$

де R — сума циркуляцій по уступах.

Коли перейдемо до границі, припускаючи, що сторони всіх квадратів прямують до нуля, то й R прямуватиме до нуля, а $\sum$ матиме границею два інтеграла:

$$\int_L F\cos\theta\, ds=\iint d\sigma\,\frac{\partial F_y}{\partial x}-\iint d\sigma\,\frac{\partial F_x}{\partial y}=\iint C_z\, d\sigma, \qquad (23)$$

де C_z є значення проекції вихрового вектора на додатний напрям осі z-ів. Ця рівність виражає теорему Стокса для того випадку, коли крива L розміщена в площині, паралельній площині XY, і обходиться в напрямі, спряженому з додатним напрямом осі z-ів.

Якщо змінимо напрям, по якому обходимо криву, то ліва частина рівності (23) змінить знак на супротивний. Щоб зберегти рівність, треба буде перемінити знак у правій частині, а для цього буде досить замінити C_z через $-C_z$. Але через те, що тепер за нормаль до площини кривої, спряженої з напрямом інтегрування, править від'ємний напрям осі z-ів, то $C_n=-C_z$ і теорема Стокса лишається в силі.

Ясно, що так само теорему Стокса можна довести для якої завгодно замкненої кривої, розміщеної в площині, паралельній якійнебудь з координатних площин.

74. Тепер звернемося до найзагальнішого випадку. Нехай L буде довільна замкнена крива, Σ — поверхня, нею обмежувана.

Наша задача полягає в тому, щоб виявити, що циркуляція по кривій L дорівнює вихровому потокові, який відходить від поверхні в належну сторону. Для цього проведемо сіть площин паралельних площинам ZX і ZY, які розріжуть нашу поверхню на ряд криволінійних прямокутників виду $ABCD$. Потік, що відходить від нашої поверхні, дорівнює сумі потоків, які відходять від усіх цих прямокутників, а циркуляція по кривій L дорівнює сумі циркуляцій навколо цих прямокутників в тому самому напрямі.

Площини, що вирізують прямокутник $ABCD$, утворюють разом з цим прямокутником і його проекцією $abcd$ на площину XY зрізаний паралелепіпед $ABCDabcd$. Припустімо, що периферія прямокутника $ABCD$ обходиться в такому напрямі, що спряжена нормаль до поверхні в якійнебудь його точці напрямлена відносно паралелепіпеда зовні; виходить, треба довести, що циркуляція по периферії прямокутника дорівнює вихровому потокові, який виходить через площу $ABCD$ з паралелепіпеда. Але, в наслідок соленоідального характеру вихрового поля, потік, що виходить з паралелепіпеда через верхню основу, дорівнює сумі потоків, які вступають в нього через нижню основу і бокові грані. Але все це є площі, паралельні тій або тій з координатних площин; теорема Стокса, виходить, справедлива відносно кожної з них. Так, вихровий потік, що вступає в паралелепіпед через грань $ABba$, дорівнює циркуляції по його периферії $ABbaA$. Схематично зобразимо це так:

$$[ABba]=(AB)+(Bb)+$$
$$+(ba)+(aA).$$

Ліва частина виражає потік що вступає через грань, кожний же член правої частини — інтеграл по відповідній лінії. Так само

$$[BCcb]=(BC)+(Cc)+$$
$$+(cb)+(bB).$$

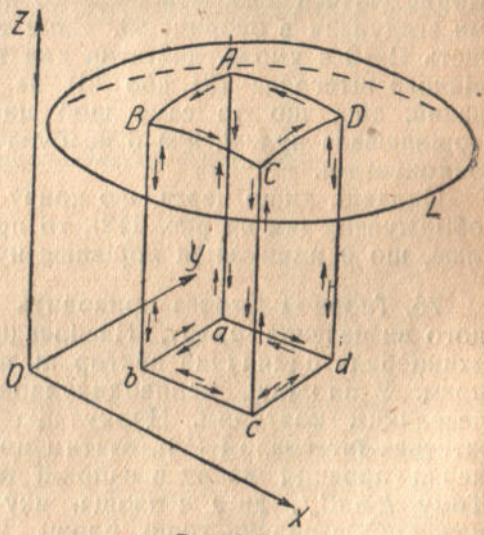

Рис. 115.

$$[CDdc]=[CD]+(Dd)+(dc)+(cC).$$

$$[DAad]=(DA)+(Aa)+(ad)+(dD).$$

Нарешті, напрям нормалі, в якому потік вступає в паралелепіпед через нижню основу, спряжений з обходом його в напрямі $abcd$. Значить

$$[abcd]=(ab)+(bc)+(cd)+(da).$$

Якщо складемо всі ці рівності почленно, то здобудемо зліва потік, що вступає в паралелепіпед через нижню основу і бічні грані; він дорівнює потокові $[ABCD]$, який виходить з паралелепіпеда через верхню основу $ABCD$. У правій частині інтеграли,

взяті по одній лінії в протилежних напрямах, взаємно знищуються. Дістанемо рівність

$$[ABCD]=(AB)+(BC)+(CD)+(DA),$$

що виражає теорему Стокса для криволінійного прямокутника $ABCD$. Підсумовуючи потоки, що виходять через всі елементи, на які розбилася площа, яку обгинає крива L, і переходячи до границі, коли всі елементи прямують до нуля (при цьому інтеграли по уступах обернуться в нуль), добудемо теорему Стокса відносно вихідної кривої L і площі, яку вона обгинає.

75. Прикладання теореми Стокса надзвичайно різноманітні. Користуючись нею, можна легко довести твердження, про яке ми згадували в рубриці 69. Саме тепер легко довести, що рівність $\mathbf{C}=0$ є умова, достатня для того, щоб значення криволінійного інтеграла (2) або (3) не залежало від путі інтегрування, або, що те саме, щоб циркуляція у векторному полі дорівнювала нулеві, яка б не була замкнена крива, по якій вона виконується.

Справді, якщо через цю криву перекинути поверхню, нею обмежувану (як на рис. 112), то при $\mathbf{C}=0$ рівність (19) встановлює, що й циркуляція дорівнює нулеві.

76. Теорема Стокса приводить також до чисто геометричного визначення вихру. Насправді — через точку M проведемо якийнебудь одиничний вектор $\mathbf{m}$, який встановлює певний напрям. У площині, перпендикулярній до $\mathbf{m}$, обведемо точку M невеликим контуром. Циркуляція k по цьому контуру виражається інтегралом (19), взятим по площі; при цьому C_n є значення проекції вихру в напрямі $\mathbf{m}$ у відповідній точці площі. Тому $k=sC_n'$, де s є площа, яку обгинає контур, а C_n' значення C_n в певній точці площі. Ясно тому, що значення C_n у точці M є границя, до якої прямує відношення $k:s$, коли s прямує до нуля. Отже *вихор у кожній точці векторного поля є вектор, проекція якого на який завгодно напрям* $\mathbf{m}$, *що з точки M виходить, дорівнює границі відношення циркуляції по контуру, що оточує точку M у площині, перпендикулярній до* $\mathbf{m}$, *до величини площі, яку обгинає контур, коли остання прямує до нуля.* Цим визначенням усувається яке б не було значення вибору координат при визначенні вихру. Це можна, звичайно, виявити й чисто аналітично; але це потребує обчислень, хоч і нескладних.

Вправи

1. В сталому векторному полі $\mathbf{F}$ на круглому циліндрі, твірні якого паралельні векторові $\mathbf{F}$, проведено гвинтову лінію. Визначити значення криволінійного інтеграла (2) або (3), [рубр. 56], взятого вздовж одного завитка цієї кривої.

2. В сталому векторному полі F у площині, що містить вектор F, розміщена циклоїда, основа якої перпендикулярна до вектора F. Обчислити криволінійний інтеграл (3) [рубр. 56], взятий по дузі циклоїди від основи до верхньої її точки (тобто по дузі, що становить половину однієї вітки кривої).

3. Вектор поля $\mathbf{F} = [\mathbf{AR}]$, де $\mathbf{A}$ — сталий вектор, а $\mathbf{R}$ — радіус-вектор поля. Обчислити циркуляцію по колі, центр якого збігається з початком, а площина перпендикулярна до вектора $\mathbf{A}$, в напрямі додатного обертання відносно спостерігача, який стоїть у центрі вздовж вектора $\mathbf{A}$.

4. Вектор поля F в кожній його точці дорівнює радіусу-вектору. Обчислити векторний потік, що виходить з круглого циліндра через його бокову поверхню, якщо відомо, що вісь циліндра проходить через початок.

5. При умовах попередньої задачі обчислити векторний потік, що виходить, з циліндра через кожну з його основ.

6. Перевірити на циліндрі, про який іде мова в двох попередніх задачах, результат, установлений в прикладі 1, рубр. 65.

7. Векторне поле зветься *центрованим*, якщо вектор F напрямлений по радіусу-вектору (в ту чи ту сторону), а довжина його являє собою функцію довжини радіуса-вектора, так що:

$$\mathbf{F} = f(R).$$

Визначити дивергенцію центрованого поля.

8. В якому випадку центроване поле буде соленоїдальним?

9. Показати, що

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{F}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \operatorname{grad} \varphi$$

якщо $\varphi(x, y, z)$ є скаляр.

10. Показати, що

$$\operatorname{div}(\mathbf{FG}) = \mathbf{G} \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \operatorname{rot} \mathbf{G}.$$

11. Показати, що в Ньютоновому полі $\mathbf{F} = \frac{m}{R^2}\mathbf{R}$ з двох поверхень Σ_1 і Σ_2 (рис. 116), що містяться одна всередині другої і містять центр притягання O, виходить один векторний потік.

12. Чому дорівнює векторний потік, який виходить в Ньютоновому полі $\mathbf{F} = \frac{m}{R^2}\mathbf{R}$ з поверхні, всередині якої є центр притягання.

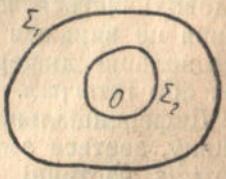

Рис. 116.

13. Обчислити дивергенцію градієнта функції $\varphi(x, y, z)$.

14. Якщо $\varphi(x, y, z)$ є функція, що припускає в деякій суцільній області перші й другі похідні, а Σ є замкнена поверхня, яка в цій області міститься і обмежує об'єм V, то

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int_{v} \nabla \varphi \, dV,$$

де $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ є похідна від φ у точці поверхні Σ, взята у напрямі зовнішньої нормалі, а

$$\nabla \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$