

Азізов Т. Н., д.т.н., професор (Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини), **Кочкарьов Д. В., д.т.н., професор** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

РОЗРАХУНОК ЗАЛІЗОБЕТОННИХ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ З ВРАХУВАННЯМ ТРІЩИНОУТВОРЕННЯ

У статті запропоновано спосіб ітераційного розрахунку залізобетонних конструкцій, сутність якого полягає в тому, що при утворенні тріщин жорсткість у елементі зменшується раз і назавжди. Надалі, на наступній ітерації ця жорсткість не збільшується, навіть якщо згинальний момент менше за момент тріщиноутворення. Це відповідає фізичній сутності залізобетонного елемента, адже після утворення тріщини його жорсткість не може збільшуватись. Завдяки такому прийому ітераційний процес стабільно сходиться, а кількість ітерацій суттєво зменшується.

Ключові слова: залізобетонний елемент; жорсткість; тріщина; кручення; прогин; ітерації.

Аналіз досліджень і постановка задачі. Відомо, що в статично невизначених системах зусилля між окремими елементами розподіляються залежно від співвідношення їх жорсткісних характеристик. Відомо також, що в залізобетонних конструкціях осьова, згинальна і крутильна жорсткості залежать від утворення тріщин.

Розрахунки статично невизначених залізобетонних конструкцій проводяться зазвичай за допомогою апарата лінійної будівельної механіки з використанням ітераційних процесів [1; 2; 4; 10]. При цьому вважається, що навіть на етапах, що передують руйнуванню, геометрична схема не змінюється [2], а також вважається справедливим принцип можливих переміщень [2; 3; 6].

При застосуванні методу послідовних наближень ітерації проводиться або тільки для уточнення жорсткостей, або з послідовним збільшенням навантаження з уточненням жорсткостей на кожному кроці збільшення навантаження. При цьому часто виходить, що іте-

раційний процес не сходиться, а розходиться. Це пов'язано з фактом, що після першої ітерації в найбільш жорсткому елементі з'являються найбільші зусилля, в результаті чого його жорсткість на наступному кроці ітерації різко зменшується. Тому на наступній ітерації в цьому елементі зусилля тепер різко зменшуються і так далі. В результаті між парними і непарними наближеннями відбувається розкачка, яка збільшується. Вказані труднощі в [2] пропонується здолати за допомогою прийому, що на кожному кроці ітерацій враховується не поточне значення зусиль, а середнє арифметичне з усіх парних і непарних попередніх ітерацій. Однак, як показують розрахунки, і такий спосіб не завжди призводить до збігу ітераційного процесу. Крім цього, це доволі ускладнює процес розрахунку, особливо для систем з багатьма невідомими.

Зважаючи на вищесказане, метою даної статті є розроблення методики розрахунку статично невизначених залізобетонних систем, яка дозволяє отримати стабільне сходження ітераційного процесу.

Викладення основного матеріалу

Фізичну суть процесу навантаження, зміни зусиль і жорсткостей розглянемо на прикладі стрижневої системи (це може бути рамна система, перехресно-стрижнева система та ін.). На малих етапах навантаження при його поступовому збільшенні згинальні моменти в окремих елементах досягають значень моментів тріщиноутворення. В цих елементах утворюються тріщини і їх жорсткість зменшується. В результаті в програмі розрахунку на наступній ітерації зазвичай зменшаться моменти, і як наслідок знову збільшиться жорсткість, бо зменшений момент може бути меншим за момент тріщиноутворення. Але дійсна жорсткість елемента, в якому утворилася тріщина, не може знову збільшитися. Тому, враховуючи, що від попереднього етапу ітерацій по навантаженням (коли тріщина ще не була утворена в даному елементі) до поточної ітерації, навантаження збільшилося не на багато, будемо вважати, що жорсткість елемента, в якому утворилася тріщина більше не буде збільшуватися. На наступній ітерації згинальні моменти в цьому елементі зменшаться і при традиційному розрахунку якщо значення поточного моменту стане меншим за момент утворення тріщин, то в цьому елементі знову буде прийнята початкова (пружна) жорсткість. Натомість, в дійсності (зважаючи на малі кроки навантаження) тріщина там вже з'явилася і жорсткість не може бути прийнята за пружну. Тому, якщо в елементі з'явилася тріщина, то його жорсткість не будемо збільшувати. При наступному

збільшенні навантаження (на наступному кроці зовнішніх ітерацій) зусилля будуть зростати і, якщо в якомусь елементі з'являється момент більший за момент тріщиноутворення, то в ньому також зменшуємо жорсткість. Таким чином, процес змінення жорсткостей проводиться тільки в сторону зменшення жорсткостей при досягненні моменту тріщиноутворення.

В загальному випадку жорсткість елемента змінюється за схемою, яка показана на рис. 1.

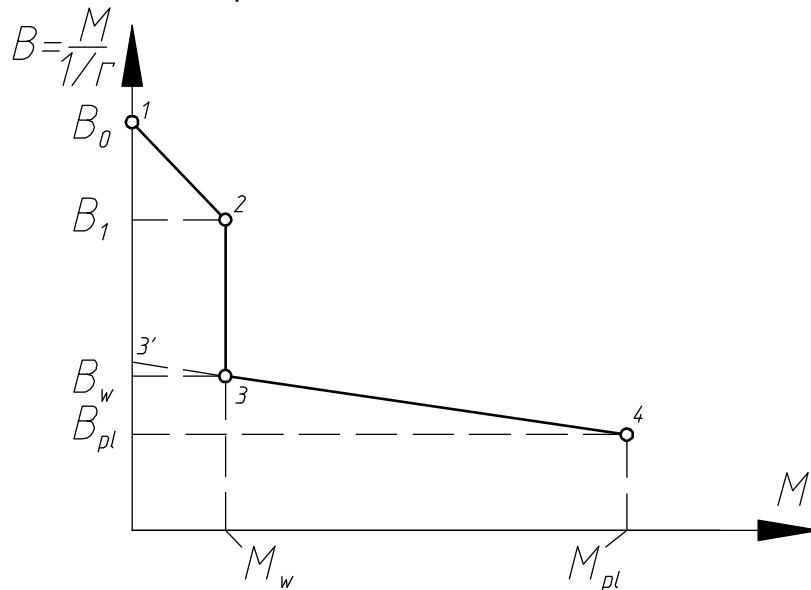


Рис. 1. Схема змінення жорсткості залізобетонного стрижневого елемента

На рис. 1 через B_0 позначена початкова (пружна) жорсткість; B_1 – жорсткість безпосередньо перед утворенням тріщини; B_w – жорсткість при утворенні тріщини; B_{pl} – жорсткість безпосередньо перед початком текучості в арматурі.

Слід зазначити, що в таких системах, як перехресно-стрижневі залізобетонні конструкції може статися, що на високих рівнях навантаження в окремих елементах на початкових стадіях внутрішніх ітерацій можуть з'являтися згинальні моменти, за яких настає текучість арматури, але ці моменти ще не перевищують несучу здатність перерізу $[M]$. При цьому на етапах $M_{pl} < M < [M]$ жорсткість B буде знову зменшуватись. В такому випадку графік зміни жорсткостей буде мати вигляд, показаний на рис. 2, де через B_{min} позначено жорсткість безпосередньо перед руйнуванням.

Спочатку за методикою [4; 5], або за будь-якою іншою апробованою методикою слід зробити розрахунки для визначення жорсткості на всіх стадіях роботи перерізу (B_1 , B_w , B_{pl} , B_{min}), а також визначити крутильні жорсткості D_1 , $D_{срс}$, D_{pl} , D_{min} за методикою [8]. Знаючи ці параметри, проводиться розрахунок перехресно-стрижневої системи з прийняттям ітераційних жорсткостей, як наведено вище за графіками на рис. 1 та 2. Слід зазначити, що графіки зміни жорсткостей можна прийняти у вигляді нелінійних функцій, але, як показують дослідження [5], для практичних розрахунків цілком достатньо прийняття лінійних залежностей за рис. 1, 2.

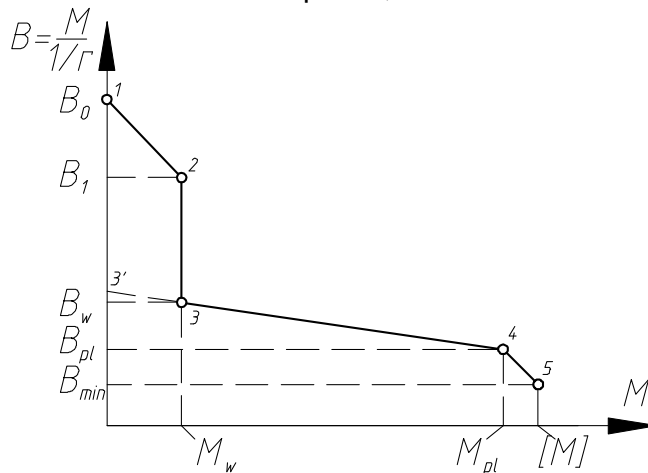


Рис. 2. Схема змінення жорсткості залізобетонного стрижневого елемента з урахуванням роботи після текучості арматури

Чисельні розрахунки показують, що цілком достатньо замість використання змінної жорсткості приймати дискретне значення чотирьох типів жорсткостей: до утворення тріщин – значення B_1 – як пружна жорсткість з модулем пружності рівним $E_b = 0.85 \cdot E_0$; після утворення тріщин – значення B_w ; після досягнення напружень в арматурі межі текучості – значення B_{pl} ; при досягненні несучої здатності перерізу – значення B_{min} . При цьому точність незначно погіршується, але алгоритмізація і процес розрахунку значно спрощуються. Також можливо використовувати середні значення жорсткостей на певних ділянках.

Допущення прийняття мінімальної жорсткості B_{min} має під собою цілком логічне пояснення. Досягнення в одному або декількох перерізах елемента несучої здатності ще не є досягненням несучої здатності всієї статично невизначеної системи. Так, наприклад, якщо

в плиті перекриття зробити отвір певних розмірів, то це не може бути ознакою руйнування всієї плити. Тому руйнування одного або декількох скінчених елементів в розрахунковій схемі плити перекриття не повинно означати руйнування всієї конструкції, що повинно бути враховано в розрахункових програмах. Але допущення досягнення в окремих перерізах несучої здатності повинно бути суттєво обґрунтованим при практичному застосуванні. Крім цього, це можна допустити при проведенні ітерацій, тобто на проміжних етапах розрахунку. Якщо після сходження всіх ітерацій з'являються елементи з моментами, які досягли несучої здатності перерізу, то розрахунок слід скорегувати.

Вищесказане пояснюється також простим прикладом розрахунку залізобетонної балки, жорстко закладеної з обох сторін. Відомо, що при рівномірно розподіленому навантаженні q на опорах такої балки виникає згинальний момент $q \cdot l^2/12$, а в прольоті – момент $q \cdot l^2/24$. Якщо, наприклад, опорний перерізармований на момент, менший за $q \cdot l^2/12$, то при проведенні ітерацій виявиться, що поточний момент більший за несучу здатність. Тому жорсткість елементів, в яких з'являється такий момент, зменшується до V_{\min} і ітераційний розрахунок продовжується.

При попередньому визначенні жорсткісних параметрів V_1 , V_w , V_{pl} , V_{\min} може статися, що значення моменту M_{pl} виявиться більшим за значення моменту $[M]$. Це легко перевірити проводячи розрахунок за нелінійною методикою [4]. Цей факт також слід враховувати при проведенні розрахунків.

В перехресно-стрижневих системах перерозподіл зусиль між окремими елементами залежить як від їх згинальних, так і від крутильних жорсткостей. Крім того, в таких системах, як правило, з'являється таке співвідношення згинальних і крутильних моментів, що в стрижнях утворюються лише нормальні тріщини [7; 8]. При цьому змінюється як згинальна, так і крутильна жорсткість елементів системи. З огляду на це, крутильна жорсткість також повинна змінюватись в залежності від утворення нормальних тріщин за схемами, які показані на рис. 1 та 2. Можливо також на графіках рис. 1 та 2 замість значення M_w прийняти значення напружень розтягнення $\sigma_{срс}$, які залежать не тільки від згинальних, а й від крутильних моментів. Однак значення V_{pl} та V_{\min} слід приймати по відповідним значенням згинальних моментів.

Для вивчення впливу зміни крутильних жорсткостей на пере-

розподіл зусиль в перехресно-стрижневих системах було розглянуто просту систему. На рис. 3 показана схема перехресно-стрижневої системи, опертої по кутах. Переріз внутрішніх балок 70x120 мм; балок, розташованих по периметру – 70x300 мм (розміри взяті з експерименту, що планується).

Система завантажена зосередженими силами в місцях перетину перпендикулярних стрижнів. Розрахунок проведено за методом переміщень зі зміною жорсткостей стрижнів за схемою, що наведена вище (дискретне прийняття жорсткостей; якщо на певному кроці ітерації жорсткість елемента зменшена, то на наступних кроках вона не збільшується). Максимальний прогин в середині системи при врахуванні зміни крутильних жорсткостей від утворення нормальних тріщин виявився більшим за прогин без врахування зміни крутильних жорсткостей у 1,5 рази при навантаженні близькому до руйнуючого.

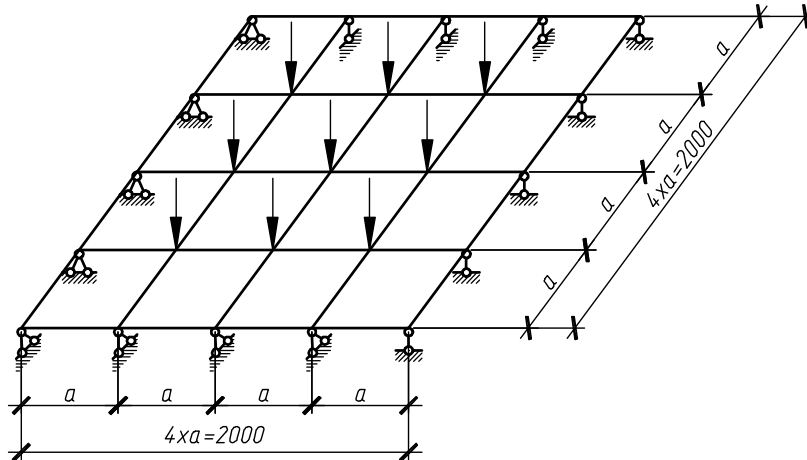


Рис. 3. Схема перехресно-стрижневої системи

Аналіз розрахунків показав, що на різницю в зусиллях і переміщеннях системи при врахуванні зміни крутильних жорсткостей і без такого врахування впливає декілька факторів. Позначимо через ξ відношення максимального прогину в системі з врахуванням зміни крутильних жорсткостей елементів до максимального прогину без такого врахування. Аналіз показує, що ξ тим більше, чим більший рівень навантаження. Це пов'язано з фактом, що чим вище рівень навантаження, тим більше перерізів системи приймають жорсткість B_{\min} і B_w , D_{\min} і D_w . Наступним фактором впливу на ξ є різниця між початковими жорсткостями B_1 , D_1 і жорсткостями після утворення тріщин B_w , D_w . Причому слід мати на увазі, що крутильна жорсткість D_w

може відрізнитись від початкової D_1 більше ніж аналогічні згинальні жорсткості. Якщо позначити $K_w = B_1/B_w$ і $K_{t_w} = D_1/D_w$, то чим більшим буде відношення K_{t_w}/K_w , тим більше буде величина ξ . Теж саме спостерігається при збільшенні відношень початкових жорсткостей до мінімальних.

Тому задача правильного визначення зусиль і переміщень в таких системах потребує рішення декількох попередніх задач. Це визначення залежно від класу бетону та схеми армування згинальних B_1 , B_w , B_{pl} , B_{min} жорсткостей; визначення крутильних D_1 , D_w , D_{pl} , D_{min} жорсткостей для кожного типу стрижня, який входить в перехресно-стрижневу систему; ітераційний розрахунок з зовнішніми (по навантаженню) і внутрішніми (по корегуванню жорсткостей) ітераціями з метою визначення впливу зміни згинальних і крутильних жорсткостей на переміщення і зусилля системи; остаточний розрахунок після коригування усіх параметрів.

При представленні суцільного перекриття у вигляді перехресно-стрижневої системи ширина балок приймається рівною їх кроку [9]. В такому випадку вплив зміни крутильних жорсткостей стає ще вагомим і результати розрахунків без врахування зміни крутильних жорсткостей стають взагалі неприйнятними.

Висновки і перспективи досліджень

Розрахунки статично невизначених залізобетонних конструкцій проводять зазвичай за допомогою ітерацій. При цьому нерідко виходить, що ітераційний процес не сходиться. У статті запропоновано спосіб ітераційного розрахунку залізобетонних конструкцій, сутність якого полягає в тому, що при утворенні тріщин жорсткість у елементі зменшується раз і назавжди. Надалі, на наступній ітерації ця жорсткість не збільшується, навіть якщо згинальний момент буде меншим за момент утворення тріщин. Завдяки такому прийому ітераційний процес стабільно сходиться, а кількість ітерацій суттєво зменшується.

При розрахунку залізобетонних перехресно-стрижневих систем важливим є врахування зміни крутильної жорсткості. На різницю розрахунку без врахування зміни крутильних жорсткостей та з врахуванням цієї зміни впливає кілька факторів. Це відношення початкової згинальної жорсткості до жорсткості після утворення тріщин; відношення початкової згинальної жорсткості до жорсткості при течучості арматури; аналогічні відносини крутильної жорсткості; рівень навантаження.

У перспективі передбачається експериментальна перевірка пропонуваного методу.

1. Бамбура А. М., Гурківський О. Б., Безбожна М. С. Деформаційна модель та алгоритм визначення напружено-деформованого стану розрахункового перерізу залізобетонних елементів. *Строительство, материаловедение, машиностроение* : сб. научн. тр. Днепропетровск : ПГАСА, 2009. Вып. 50. С. 19–25. 2. Бондаренко В. М., Бондаренко С. В. Инженерные методы нелинейной теории железобетона. М. : Стройиздат, 1982. 286 с. 3. Карпенко Н. И. Теория деформирования железобетона с трещинами. М. : Стройиздат, 1976. 208 с. 4. ДСТУ Б В.2.6-156:2010. Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. К. : Мінрегіонбуд, 2010. 166 с. 5. Кочкаръов Д. В. Нелінійний опір залізобетонних елементів і конструкцій силовим впливам. Рівне : О. Зень, 2015. 384 с. 6. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М. : Машиностроение, 1975. 399 с. 7. Яременко А. Ф., Чучмай А. М. Инженерная методика определения крутильной жесткости железобетонных балок с нормальными трещинами. *Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури*. Одеса : Зовніш-рекламсервіс, 2009. Вип. 33. С. 146–151. 8. Azizov T., Jurkowska N., Kochkarev D. Basis of calculation on torsion for reinforced concrete structures with normal cracks. *Concrete – Innovations in Materials, Design and Structures* : Proceedings of the fib Symposium 2019. 2019. Pp. 1718–1725. 9. Azizov T., Pereiras R. Consideration of Torsional Rigidity in the Calculation of Plates Using Beam Approximation. *Sciences of Europe*. 2022. Vol. 1. № 87(2022). P. 58–61. DOI: 10.24412/3162-2364-2022-87-1-58-61. 10. EN 1992: Eurocode 2: Design of concrete structures. *General rules and rules for buildings*. Part 1. Brussels, 2002. 230 p.

REFERENCES:

1. Bambura A. M., Hurkivskiy O. B., Bezbozhna M. S. Deformatsiina modelta alhorytm vyznachennia napruzhenno-deformovanoho stanu rozrakhunkovoho pererizu zalizobetonnykh elementiv. *Stroitelstvo, materialovedenie, mashinostroenie* : sb. nauchn. tr. Dnepropetrovsk : PGASA, 2009. Vyip. 50. S. 19–25. 2. Bondarenko V. M., Bondarenko S. V. Injenernyye metodyi nelineynoy teorii jelezobetona. M. : Stroyizdat, 1982. 286 s. 3. Karpenko N. I. Teoriya deformirovaniya jelezobetona s treschinami. M. : Stroyizdat, 1976. 208 s. 4. DSTU B V.2.6-156:2010. Konstruktsii budynkiv i sporud. Betonni ta zalizobetonni konstruktsii z vazhkoho betonu. K. : Minrehionbud, 2010. 166 s. 5. Kochkarov D. V. Neliniinyi opir zalizobetonnykh elementiv i konstruktsii sylovym vplyvam. Rivne : O. Zen, 2015. 384 s. 6. Malinin N. N. Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti. M. : Mashinostroenie, 1975. 399 s.

7. Yaremenko A. F., Chuchmay A. M. Injenernaya metodika opredeleniya krutilnoy jstкости jelezobetonnyih balok s normalnymi treschinami. *Visnyk Odeskoi derzhavnoi akademii budivnytstva ta arkhitektury*. Odesa : Zovnishreklamservis, 2009. Vyp. 33. S. 146–151. 8. Azizov T., Jurkowska N., Kochkarev D. Basis of calculation on torsion for reinforced concrete structures with normal cracks. *Concrete – Innovations in Materials, Design and Structures : Proceedings of the fib Symposium 2019*. 2019. Pp. 1718–1725. 9. Azizov T., Pereiras R. Consideration of Torsional Rigidity in the Calculation of Plates Using Beam Approximation. *Sciences of Europe*. 2022. Vol. 1. № 87(2022). P. 58–61. DOI: 10.24412/3162-2364-2022-87-1-58-61. 10. EN 1992: Eurocode 2: Design of concrete structures. *General rules and rules for buildings*. Part 1. Brussels, 2002. 230 p.

Azizov T. N., Doctor of Engineering, Professor (Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Uman), **Kochkarov D. V., Doctor of Engineering, Professor** (National University of Water and Environment Engineering, Rivne)

CALCULATION OF REINFORCED CONCRETE STATICALLY INDETERMINATE SYSTEMS TAKING INTO ACCOUNT FORMATION OF CRACKS

In statically indeterminate systems, forces are distributed between individual elements depending on the ratio of their stiffness characteristics. In reinforced concrete structures, the stiffness depends on the formation of cracks. The calculation of statically indeterminate reinforced concrete structures is usually carried out using iterations. In this case, it often turns out that the iterative process does not converge. This is due to the fact that after the first iteration, the most rigid element has the highest forces. Therefore, the rigidity of this element decreases at the next iteration. As a result, in this element, the efforts also decrease. As a result, the iterative process often does not converge. The article proposes a method for iterative calculation of reinforced concrete structures. The essence of the method is that when cracks form, the stiffness in the element under consideration decreases once and for all. Further, at the next iteration, this stiffness does not increase, even if the bending moment is less than the cracking moment. In this case, external iterations should be carried out to increase the load. Due to the small step of increasing the

load, the once reduced stiffness no longer increases. Thanks to this technique, the iterative process converges stably, and the number of iterations is significantly reduced. It is shown that when calculating reinforced concrete cross-rod systems, it is important to take into account changes in torsional stiffness. This fact must be taken into account when designing. Several factors affect the difference between the calculation without taking into account the change in torsional stiffness and taking into account this change. This is the ratio of the initial flexural stiffness to the stiffness after cracking; the ratio of the initial bending stiffness to the yield stiffness of the reinforcement; similar torsional stiffness ratios; the ratio of changes in torsional stiffness to changes in bending stiffness; load level.

***Keywords:* reinforced concrete element; stiffness; crack; torsion; deflection; iterations.**
