

**Гомон П. С., к.т.н., доцент** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

### **ВИЗНАЧЕННЯ ПРОГИНІВ ДЕРЕВ'ЯНИХ ЗГИНАЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТІВ З УРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНОСТІ ДЕФОРМУВАННЯ ДЕРЕВИНИ**

**Проведено аналіз літератури за даною тематикою і розроблено нову методику визначення прогинів дерев'яних згинальних елементів. Наведено розрахунок та приклади епюр, які утворюються при згині дерев'яних елементів. Проведено теоретичний аналіз та наведено отримані результати при моделюванні роботи дерев'яної балки прямокутного перерізу. Встановлено, що граничний стан для більшості дерев'яних балок, настає раніше за другою групою – від прогину, а не від руйнування балки за несучою здатністю.**

**Ключові слова:** дерев'яний елемент; несуча здатність; напружено-деформований стан; прогини; згин.

Постановка проблеми та аналіз останніх публікацій. Деревина – це один найважливіших матеріалів на нашій планеті. Її часто застосовують в різних галузях промисловості. Однією з цих галузей є будівельна. Деревина використовується як для оздоблення будівель та споруд, так і в ролі несучих конструкцій. Деревина може використовуватись для влаштування перекриттів, покрівлі, стін, палевих фундаментів та ін. Найчастіше застосовується в якості несучих згинальних елементів в покрівлях та перекриттях у вигляді балок, стержнів ферм, крокв та іншого. На несучі дерев'яні елементи діють різного виду та тривалості навантаження. Ці елементи є надійними та довговічними, якщо забезпечити для них нормальні умови експлуатації, проте, щоб забезпечити нормальну експлуатацію та спрогнозувати її роботу необхідно визначити граничні значення несучої здатності та можливий граничний прогин елемента. Саме це забезпечить надійність конструкції. Такими дослідженнями займалися Демчина Б. Г. [1], Сурмай М. І. [2] та багато інших [3–8].

В попередніх роботах було детально описано визначення напружено-деформованого стану дерев'яного згинального елемента з підсиленням та без підсилення, а також описано особливості побудови

графіків «момент – кривина», а також їх актуальність використання в моделюванні роботи конструкцій з використанням деревини як основного матеріалу [9–12].

В цій роботі ми зупинимось на питанні визначення прогинів дерев'яних згинальних елементів з використанням уже існуючих графіків «момент – кривина», які враховують нелінійність деформування деревини [13].

Метою роботи є розроблення методики з визначення прогинів дерев'яного згинального елемента з врахуванням нелінійності деформування деревини як матеріалу.

Методика досліджень. Для встановлення граничного прогину балки використаємо нормативне значення, а саме співвідношення прогину до прольоту  $f_{гран} \approx \frac{l}{150}, \frac{l}{250}, \frac{l}{300}$ . Щоб пов'язати значення згинального моменту з прогином балки слід припустити різні варіанти завантаження (рис. 1).

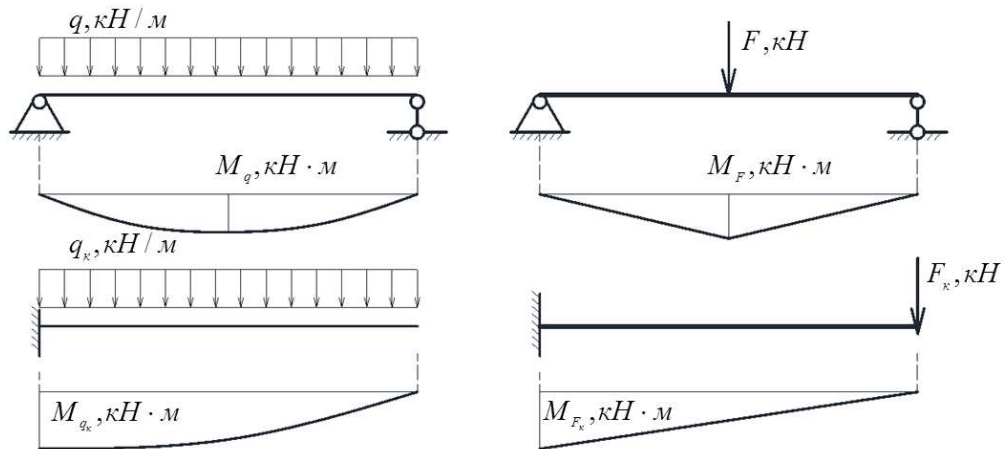


Рис. 1. Варіанти завантаження балок для визначення взаємовідношення максимального моменту до прогину

Розрахунок прогинів виконуємо в такій послідовності:

1) знаходимо зовнішню епюру моментів, що діють по довжині балки (рис. 1) за допомогою основних принципів опору матеріалів в залежності від максимальних моментів  $M_F, M_{F_k}, M_q, M_{q_k}$ ;

2) визначаємо кривину за раніше описаним графіком «момент – кривина» від максимальних моментів  $M_F, M_{F_k}, M_q, M_{q_k}$ . За цим же

принципом можна визначити кривину по всій довжині балки та побудувати її епюру;

3) знаходимо поворот балки, при цьому можна використати два методи: перший варіант – це метод скінченних елементів, розбивши згинальний елемент на скінченну кількість елементів та визначивши поворот кожної з них; другий – інтегруючи функцію зміни кривини по довжині балки. Обидва варіанти дозволяють отримати значення кута повороту балки до початкового положення. На наш погляд, другий варіант простіший, тому саме його розглянемо в нашій роботі.

Якщо дерев'яний згинальний елемент розділити на рівні частини і визначити на краях цих проміжків кривину, то можна встановити середнє значення кривини на всій ділянці. Припустимо, що ми маємо  $i$ -ту ділянку згинального елемента довжиною, в якій в кожній точці по довжині виникає кривина. Кут повороту двох країв цієї ділянки дерев'яної балки буде рівним

$$\alpha_i = \frac{l_i}{r_i}, \quad (1)$$

де  $\alpha_i$  – кут повороту на ділянці згинального дерев'яного елемента;  $l_i$  – довжина ділянки балки;  $r_i$  – радіус повороту балки.

Відомо, що кривина для такої ділянки дерев'яної балки буде оберненою величиною радіуса, а саме

$$\xi_i = \frac{1}{r_i}, \quad (2)$$

де  $\xi_i$  – кривина на  $i$ -ій ділянці.

З врахуванням формули (1) та формула (2) набуде вигляду

$$\alpha_i = \xi_i l_i. \quad (3)$$

Кут повороту  $n$ -ої ділянки, виходячи з центру балки, можна визначити за формулою

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k + \alpha_0, \quad (4)$$

де  $\alpha_n$  – кут повороту на  $n$  ділянках;  $n$  – кількість ділянок балки;  $\alpha_0$  – початковий кут повороту (нульовий).

При варіанті диференціювання по довжині балки ми отримаємо, що елементарний кут повороту згинального елемента рівний елементарній довжині згинального елемента помноженого на кривину, яка діє на даній елементарній ділянці

$$d\alpha = \xi(l) dl. \quad (5)$$

Звідси слідує, що кут повороту на ділянці згинального елемента, який накопичується в балці рівний інтегральному виразу

$$\alpha = \int \xi(l) dl, \quad (6)$$

де  $\alpha$  – кут повороту нейтральної лінії до початкової нейтральної лінії згинального елемента;  $\xi(l)$  – функція залежності кривини по довжині балки на ділянці згинального елемента;

4) Визначаємо відхилення від початкового положення, при цьому також можна використати два методи, перший варіант – це метод скінченних елементів, розбивши згинальний елемент на скінченну кількість елементів та визначивши поворот кожної з них або проінтегрувати функцію зміни кривини по довжині балки.

Для визначення прогину згинальних елементів слід задатися початковими умовами: так, для балки з симетричним навантаженням вихідними даними будуть відомі положення нейтральної лінії або початкові кути повороту.

Тоді визначення прогину балки буде включати визначення кутів повороту ділянок балки, а також визначення прогинів на кожній ділянці цієї балки.

Прогин балки з симетричним навантаженням буде дорівнювати, сумі всіх прогинів ділянок з постійною кривиною, а також з початковим прогином точки, з якої ведеться визначення прогину

$$f_n = f_0 + \sum_1^n f_i. \quad (7)$$

Визначити прогин для  $i$ -ої ділянки можна за формулами

$$f_i = \rho_i \cos \left( \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k \right) - \rho_i \cos \left( \sum_{k=0}^i \alpha_k \right), \quad (8)$$

$$f_i = \frac{1}{\chi_i} \cos \left( \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k \right) - \frac{1}{\chi_i} \cos \left( \sum_{k=0}^i \alpha_k \right). \quad (9)$$

При цьому слід виконувати визначення прогинів з точки, де відоме значення початкового кута повороту балки  $\alpha_0$ .

Було змодельовано декілька варіантів роботи деревини з різними варіантами завантаження: балка на двох опорах з зосередженим навантаженням (рис. 2), консольна балка (рис. 3), балка з зоною чистого згину (рис. 4). В результаті отримано максимальні можливі значення прогинів, які виникають при дії максимального моменту.

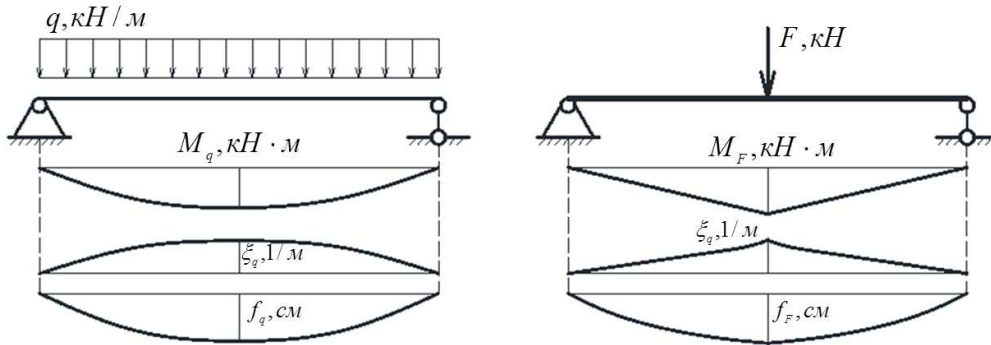


Рис. 2. Епюра згинальних моментів, кривини та прогинів балки на двох опорах від дії максимального згинального моменту, яку може сприйняти переріз

З рис. 2 видно вплив графіку «момент – кривина» на побудову епюри кривини та згинального моменту, особливо вираження впливу прослідковується в епюрах від дії точкового зусилля (рис. 2, рис. 3 та рис. 4).

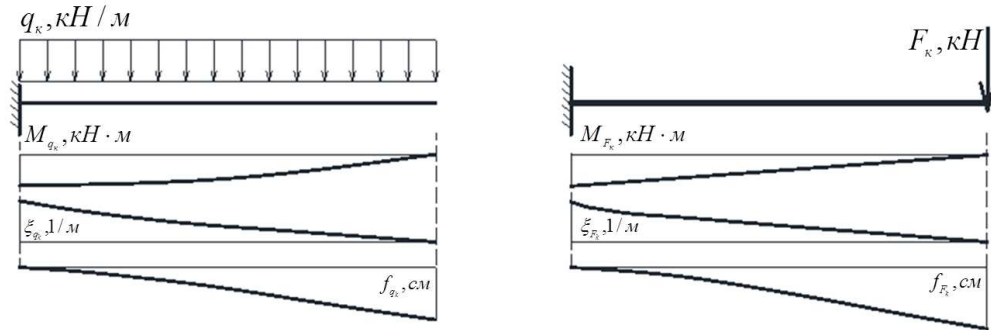


Рис. 3. Епюра згинальних моментів, кривини та прогинів консольної балки від дії максимального згинального моменту, яку може сприйняти переріз

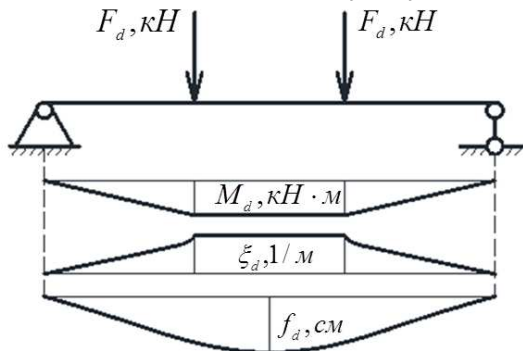


Рис. 4. Епюра згинальних моментів, кривини та прогинів балки з зоною чистого згину

Підставивши однакове максимальне значення завантаження, що може сприйняти поперечний переріз згинального елемента та граничний прогин, можна побудувати графік одночасного досягнення граничних станів – несучої здатності за нормальними перерізами та прогинами в залежності від відношення ширини перерізу та довжини балки до висоти розрахункового перерізу (рис. 5). Перший графік виконаний для згинального елемента на двох опорах з прикладеним рівномірно-розподіленим навантаженням, а другий – з точковим прикладеним навантаженням. Графік одночасного досягнення граничних станів розділяє на дві зони граничний стан елемента. За геометричних характеристик, які попадають нижче кривої зображеної на графіку, згинальний елемент буде досягати граничного стану за першою групою за нормального поперечного розрахункового перерізу, а за співвідношень над графіком – досягатимуть раніше граничного стану по забезпеченню жорсткості. З графіку також зрозуміло, що найефективнішою буде балка з деревини, якщо переріз буде в межах співвідношень ширини до висоти перерізу  $b_w = 0,2h_w \dots 0,4h_w$  та довжиною  $l_w = 10h_w \dots 20h_w$ .

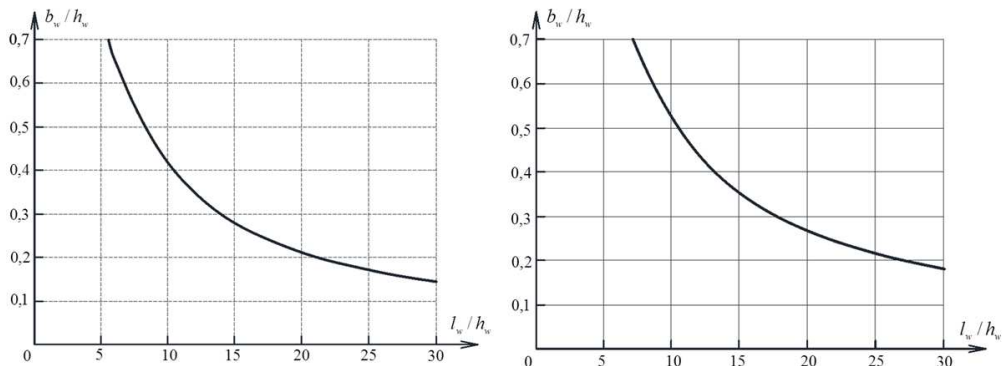


Рис. 5. Графік оптимізації (співпадіння) руйнування по двох граничних станах в залежності від співвідношення геометричних розмірів балки

Враховуючи те, що дерев'яні елементи, які працюють на згин як з цільної деревини, так і клеєні, проєктуються з обмеженою висотою перерізу, то в таких елементах граничний стан за другою групою (прогини) настає раніше ніж за несучою здатністю.

### Висновки

1. Розроблено нову методику з визначення прогину з врахуванням нелінійності деформування деревини.

2. Визначено епюри прогинів для дерев'яних балок з різних видом завантаженням та різним видом закріплення.

3. Встановлено, що форма епюр кривини та прогинів суттєво відрізняється від епюр, які на цей час використовуються для розрахунку прогинів.

4. Встановлено залежності одночасного досягнення граничних станів по першій групі (несуча здатність) та другій (прогини) від співвідношення геометричних розмірів дерев'яних балок.

1. Експериментальне дослідження роботи дощатоклеєних балок армованих металевою та неметалевою арматурою / Демчина Б. Г., Орешкин Д. О., Сурмай М. І., Кравз А. Р., Бляхар Т. Й. *Вісник НУЛП. Теорія і практика будівництва*. Львів : НУЛП, 2010. № 697. С. 87–92. 2. Результати дослідження зчеплення металевої, базальтопластикової та склопластикової арматури з клеєною деревиною / Сурмай М. І., Сурмай Б. І., Кравз А. Р., Бляхар Т. Й., Іленков Ю. А. *Матеріали IV Міжнародної конференції молодих вчених GAC-2011*. Львів : НУЛП, 2011. С. 90–91. 3. De la Rosa García P., Cobo Escamilla A., Nieves González García M. Bending Reinforcement of Timber Beams with Composite Carbon Fiber and Basalt Fiber Materials. *Compos. Part B Eng.*, 2013. 55, Pp. 528–536. 4. Гомон С. С., Павлюк А. П. Жорсткість балок з цільної деревини за косою згину в залежності від характеру обпирання і прикладання навантаження. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. Рівне, 2014. Вип. 32. С. 143–149. 5. McConnell E., McPolin D., Taylor S. Post-Tensioning Glulam Timber Beams with Basalt FRP Tendons. *Proc. ICE Constr. Mater.* 2015. 168, 232–240. 6. Wdowiak A., Brol J. Effectiveness of Reinforcing Bent Non-Uniform Pre-Stressed Glulam Beams with Basalt Fibre Reinforced Polymers Rods. *Materials*. 2019. 12, 3141. 7. Donadon B. F., Mascia N. T., Vilela R., Trautwein L. M. Experimental Investigation of Glued-Laminated Timber Beams with Vectran-FRP Reinforcement. *Eng. Struct.* 2020. 202, 109818. 8. Deformability of Glued Laminated Beams with Combined Reinforcement / Sobczak-Piąstka J., Gomon S. S., Polishchuk M., Gomon S., Gomon P. and Karavan V. *Buildings*. 2020. 10, 92. 9. Gomon S., Karavan V., Gomon P. and Sobczak-Piąstka J. Complete deflections of glued beams in the conditions of oblique bend for the effects of low cycle loads. *AIP Conference Proceedings 2077*. 2019. 020021. 10. Гомон С. С., Гомон П. С., Поліщук М. В. Напружений стан балок із клеєної деревини з комбінованим армуванням. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. Рівне, 2021. Вип. 39. С. 47–56. 11. Гомон Св. Св., Гомон П. С. Побудова дійсних діаграм механічного стану деревини « $\sigma$ - $\epsilon$ » суцільного перерізу ялини та берези за жорсткого режиму випробувань. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. Рівне, 2020. Вип. 38. С. 321–330. 12. Гомон П. С.,

Савицький В. В., Поліщук М. В. Розрахунок напружено-деформованого стану підсилених дерев'яних балок прямокутного перерізу. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. Рівне, 2021. Вип. 39. С. 221–229.

13. Гомон П. С. Особливості побудови діаграми «момент – кривина» підсилених балок з деревини прямокутного перерізу. *Вісник НУВГП. Технічні науки* : зб. наук. праць. Рівне, 2021. Вип. 3(95). С. 128–138.

## REFERENCES:

1. Eksperymentalne doslidzhennia roboty doshchatokleienykh balok armovanykh metalevoiu ta nemetalevoiu armaturoiu / Demchyha B. H., Oreshkyn D. O., Surmai M. I., Kravz A. R., Bliakhar T. Y. *Visnyk NULP. Teoriia i praktyka budivnytstva*. Lviv : NULP, 2010. № 697. S. 87–92.
2. Rezultaty doslidzhennia zchepлення metalevoi, bazaltoplastykovoї ta skloplastykovoї armatury z kleienoїu derevynoiu / Surmai M. I., Surmai B. I., Kravz A. R., Bliakhar T. Y., Ilenkov Yu. A. *Materialy IV Mizhnarodnoi konferentsii molodykh vchenykh GAC-2011*. Lviv : NULP, 2011. S. 90–91.
3. De la Rosa García P., Cobo Escamilla A., Nieves González Garcia M. Bending Reinforcement of Timber Beams with Composite Carbon Fiber and Basalt Fiber Materials. *Compos. Part B Eng.*, 2013. 55, Pp. 528–536.
4. Homon S. S., Pavliuk A. P. Zhorstkist balok z tsilnoi derevyny za kosoho zghynu v zalezhnosti vid kharakteru obpyrannia i prykladannia navantazhennia. *Resursoekonomni materialy, konstruktsii, budivli ta sporudy*. Rivne, 2014. Vyp. 32. S. 143–149.
5. McConnell E., McPolin D., Taylor S. Post-Tensioning Glulam Timber Beams with Basalt FRP Tendons. *Proc. ICE Constr. Mater.* 2015. 168, 232–240.
6. Wdowiak A., Brol J. Effectiveness of Reinforcing Bent Non-Uniform Pre-Stressed Glulam Beams with Basalt Fibre Reinforced Polymers Rods. *Materials*. 2019. 12, 3141.
7. Donadon B.F., Mascia N. T., Vilela R., Trautwein L. M. Experimental Investigation of Glued-Laminated Timber Beams with Vectran-FRP Reinforcement. *Eng. Struct.* 2020. 202, 109818.
8. Deformability of Glued Laminated Beams with Combined Reinforcement / Sobczak-Piastka J., Gomon S. S., Polishchuk M., Homon S., Gomon P. and Karavan V. *Buildings*. 2020. 10, 92.
9. Gomon S., Karavan V., Gomon P. and Sobczak-Piastka J. Complete deflections of glued beams in the conditions of oblique bend for the effects of low cycle loads. *AIP Conference Proceedings 2077*. 2019. 020021.
10. Homon S. S., Homon P. S., Polishchuk M. V. Napruzhenyi stan balok iz kleienoїu derevyny z kombinovanyim armuvanniam. *Resursoekonomni materialy, konstruktsii, budivli ta sporudy*. Rivne, 2021. Vyp. 39. S. 47–56.
11. Homon Sv. Sv., Homon P. S. Pobudova diisnykh diaqram mekhanichnoho stanu derevyny « $\sigma$ - $u$ » sutsilnoho pererizu yalyny ta berezy za zhorstkoho rezhymu vyprobuvan. *Resursoekonomni materialy, konstruktsii, budivli ta sporudy*. Rivne, 2020. Vyp. 38. S. 321–330.
12. Homon P. S., Savytskyi V. V.,



Polishchuk M. V. Rozrakhunok napruzhenno-deformovanoho stanu pidsylenykh derevianykh balok priamokutnoho pererizu. *Resursoekonomni materialy, konstruktsii, budivli ta sporudy*. Rivne, 2021. Vyp. 39. S. 221–229.

13. Homon P. S. Osoblyvosti pobudovy diahramy «moment – kryvyna» pidsylenykh balok z derevyny priamokutnoho pererizu. *Visnyk NUVHP. Tekhnichni nauky* : zb. nauk. prats. Rivne, 2021. Vyp. 3(95). S. 128–138.

---

**Gomon P. S., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor**  
(National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

### **DETERMINATION OF DEFLATIONS OF WOODEN BENDING ELEMENTS TAKING INTO ACCOUNT THE NONLINEARITY OF WOOD DEFORMATION**

**In this work, we will focus on the issue of determining the deflections of wooden bending elements using the existing "moment – curvature" graphs, which take into account the nonlinearity of wood deformation.**

**Calculation of deflections is performed in the following sequence: 1) We find the external diagram of moments acting along the length of the beam using the basic principles of resistance of materials depending on the maximum moments; 2) We determine the curvature according to the previously described "moment – curvature" graph from the maximum moments. According to the same principle, you can determine the curvature along the entire length of the beam and build its outline; 3) We find the rotation of the beam, and two methods can be used: the first option is the finite element method, dividing the bending element into a finite number of elements and determining the rotation of each of them; the second – by integrating the function of changing the curvature along the length of the beam. In our opinion, the second option is simpler, so we will consider it in this paper; 4) We determine the deviation from the initial position, while it is also possible to use the same two methods.**

**A new technique has been developed for determining deflection taking into account the nonlinearity of wood deformation. Deflection diagrams for wooden beams with different types of loading and different types of fastening are determined. It was established that the shape of curves and sags graphs is significantly different from the graphs that are currently used to calculate deflections.**

**The dependence of the simultaneous achievement of the limit states of the first group (bearing capacity) and the second (deflections) on the ratio of the geometric dimensions of the wooden beams was established.**

***Keywords:* wooden element; bearing capacity; stressed-deformed state; deflections; bending.**

---