КУРС
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
ЧАСТИНА IV

ПРОФ. Н. К. БАРІ

ТЕОРІЯ РЯДІВ

ДЕРЖАВНЕ
УЧБОВО-ПЕДАГОГІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО
«РАДЯНСЬКА ШКОЛА»

КУРС
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ЧАСТИНА ЧЕТВЕРТА

ДЕРЖАВНЕ
УЧБОВО-ПЕДАГОГІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО
„РАДЯНСЬКА ШКОЛА"
КИЇВ · 1936 · ХАРКІВ

Проф. Н. К. БАРІ

ТЕОРІЯ РЯДІВ

ПІДРУЧНИК ДЛЯ ВИЩИХ ПЕДАГОГІЧНИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

ПЕРЕКЛАД З РОСІЙСЬКОГО ВИДАННЯ, ЗАТВЕРДЖЕНОГО НАРКОМОСОМ РСФРР

Затверджено НКО УСРР

ДЕРЖАВНЕ
УЧБОВО-ПЕДАГОГІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО
„РАДЯНСЬКА ШКОЛА"
КИЇВ · 1936 · ХАРКІВ

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літописі Укр. Друку“, „Картковому репертуарі“ та інших покажчиках Української Книжкової Палати

Редактор *Зандберг*

Техредактор *Гінзбург*
Коректор *Супрун*

„Радшкола“. Видання № 426. Уповноваж. Головліту № 5406. Зам. № 2960. Тираж 7.200. Формат 62 $\times$ 94. Папер. арк. $4^{5}/_{8}$. Друк. арк. $9^{1}/_{4}$. Знаків в 1 папер. арк. 109.000. Здано до виробництва 3/XI 1936 р. Підписано до друку 13/XII 1936 р.

Ціна книги 1 крб. 85 коп. Оправа 75 коп.

Книжкова ф-ка ДВРШ ім. Г. І. Петровського. Харків.

ЧИСЛОВІ РЯДИ.

§ 1. Нескінченні послідовності.

Найрізноманітніші питання Аналізу приводять нас до необхідності вивчати *нескінченні послідовності* чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

тобто сукупності чисел, розміщених у певному порядку, і такі, що за кожним числом послідовності поставлене ще число. Це буває, наприклад, у послідовності всіх цілих чисел:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots .$$

Нескінченну послідовність чисел ми вважаємо заданою, якщо дано спосіб обчислити будьякий її член, коли вказане те місце в послідовності, на якому він стоїть, тобто дано спосіб обчислити a_n при заданому n, наприклад, послідовності

$$1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots,$$

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots,$$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots,$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \dots$$

є заданими.

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ можна розглядати як значення якоїсь змінної величини, що змінюється разом із зміною номера n. Ця змінна величина послідовно приймає значення a_1, потім a_2, потім a_3 і т. д.

З теорії границь ми знаємо, що змінна величина може змінюватись найрізноманітнішими способами, але один з найважливіших випадків той, коли змінна величина *прямує до якоїсь границі*.

З теорії границь ми знаємо, що число A буде границею змінної величини a_n, якщо з як завгодно малим додатним числом ε можна завжди зіставити таке ціле число p, що різниця між A і a_n за абсолютною величиною менша ε, як тільки n перевищує p, тобто

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad n > p.$$

Якщо n-й член a_n послідовності $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ має своєю границею число A, то ми коротко говоритимемо, *що послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ має границею A, або послідовність збігається до числа A.*

Інакше кажучи, яке б мале не було число ε, всі члени послідовності, починаючи з члена a_{p+1}, лежать між $A-\varepsilon$ і $A+\varepsilon$; членів послідовності, які менші $A-\varepsilon$ або більші $A+\varepsilon$, є лише скінченне число, і ці члени не впливають ні на існування границі, ні на її величину.

Наприклад, з написаних вище послідовностей друга і третя мають границі, бо $\frac{1}{n^2}$ прямує до 0, а $\frac{2^n-1}{2^n}$ прямує до 1, коли n необмежено зростає.

Якщо ми відзначимо на осі OX (рис. 1) точки з абсцисами $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, то у випадку, коли послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ має границею число A, всі точки нашої послідовності, починаючи з a_{p+1}, будуть від A на віддалі меншій, ніж ε.

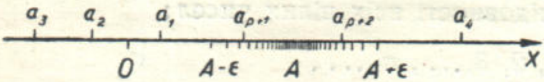

Рис. 1.

Інакше кажучи, всі ці точки кінець-кінцем попадуть в інтервал з центром у точці A і як завгодно малої довжини; поза цим інтервалом лежить лише скінченне число точок нашої послідовності.

Якщо послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ має A своєю границею, то всі її члени, починаючи з якогось, лежать між $A-\varepsilon$ і $A+\varepsilon$; отже, якщо A не дорівнює нулеві, то всі члени послідовності, починаючи з якогось, матимуть той же знак, як і A, в чому можна переконатись, узявши ε меншим, ніж абсолютна величина A. Навпаки, якщо в послідовності немає від'ємних членів або їх тільки скінченне число, то A не може бути від'ємним, бо коли б воно було від'ємним, то всі члени, починаючи з якогось, були б від'ємними. Отже, якщо всі члени послідовності або всі, крім скінченного числа, додатні або дорівнюють нулеві, то і границя може бути тільки додатною або дорівнювати нулеві. Так само, якщо всі члени послідовності, крім, можливо, скінченного числа, від'ємні або дорівнюють нулеві, то і границя може бути тільки від'ємною або дорівнювати нулеві. Взагалі, якщо члени послідовності не перевищують якогонебудь числа B, то і границя її не може перевищувати B.

Якщо ми знаємо, що послідовність збігається до A, тобто

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,$$

то при досить великому n можна розглядати a_n як наближену величину для A; цю наближену величину ми можемо обчислити, коли послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ задана. Часто буває, що не можна інакше обчислити A, як тільки розглядати його як границю заданої послідовності. Тоді члени цієї послідовності дають для A наближені значення, при чому ці значення як завгодно близькі до A, якщо тільки ми братимемо досить далекі члени в нашій послідовності. Саме таким способом в елементарній геометрії обчисляють наближено довжину кола для круга даного радіуса. Для цього обчисляють периметр вписаного в це коло або описаного навколо нього правильного многокутника з дуже великим числом сторін.

§ 2. Про границю послідовності.

Коли послідовність задана, надзвичайно важливо встановити, чи має вона границю, навіть коли ми не вміємо обчислити цю границю.

Розглянемо деякі випадки, коли існування границі встановлюється легко.

Припустимо, що члени послідовності йдуть весь час зростаючи або хоча б не спадаючи, тобто

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots.$$

Така послідовність називається *зростаючою.*

Якщо зображати числа цієї послідовності у вигляді точок, що лежать на прямій, то ці точки рухаються весь час вправо, бо кожна точка, за умовою, або правіше попередньої, або з нею зливається.

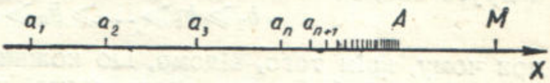

Рис. 2.

Можуть бути два випадки: або a_n необмежено зростає при необмеженому зростанні n, тобто яке б не було число N, всі члени нашої послідовності, починаючи з якогось, перевищують N. Так буде, наприклад, у випадку послідовності всіх цілих чисел: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. Абож усі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ менші якогось сталого числа M. У цьому випадку послідовність називається *обмеженою зверху.*

Можна довести, що **всяка зростаюча послідовність, обмежена зверху, має границю *.**

Доведення цього твердження ми наводити не будемо. Але для пояснення зауважимо, що геометрично зростаюча послідовність, що обмежена зверху, представляється у вигляді послідовності точок, що рухаються вправо, але залишаються весь час лівіше деякої сталої точки M; тому з погляду інтуіції цілком природно, що ці точки кінець-кінцем скупчуються навколо якоїсь точки A, що лежить теж лівіше M або зливається з M (рис. 2).

---

* Див. проф. Жегалкін і доц. Слудська, „Вступ в аналіз, ч. I, Курс математичного аналізу для педвузів", розд. XI, § 93.

У випадку ж, коли a_n необмежено зростає разом з n, точки рухаються вправо, необмежено віддаляючись; у цьому випадку можна умовно писати

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Прикладом *зростаючої* послідовності, обмеженої зверху, може бути послідовність периметрів вписаних у коло правильних многокутників із зростаючим числом сторін; кожний з цих периметрів менший, ніж, наприклад, периметр будьякого многокутника, описаного навколо цього ж кола. Довжина кола і є границя цієї послідовності периметрів.

Цілком аналогічно ми назвемо послідовність *спадною*, якщо

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots .$$

Якщо всі члени послідовності перевищують якесь число L, ми назвемо її *обмеженою знизу*, і можна довести, що **всяка спадна послідовність, обмежена знизу, має границю**. У випадку, коли для всякого від'ємного числа N усі члени послідовності, починаючи з якогось, будуть менші N, як, наприклад, для $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$, то можна умовно писати

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Часто доводиться розглядати водночас дві послідовності, з яких одна зростаюча

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots,$$

а друга спадна

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots,$$

при чому, крім того, відомо, що кожний член першої послідовності менший будьякого члена другої послідовності, тобто

$$a_n < b_p \text{ для будьяких } n \text{ і } p.$$

В цьому випадку перша послідовність повинна мати границю A, бо вона зростаюча і обмежена зверху, а друга повинна мати границю B, бо вона спадна і обмежена знизу (рис. 3). Зрозуміло, що для будьяких n і p ми маємо $a_n \leqslant A \leqslant b_p$ і $a_n \leqslant B \leqslant b_p$. Неважко переконатись, що $A \leqslant B$. Коли б ми мали $A > B$, то, взявши n і p досить великими для того, щоб a_n відрізнялось від A менше ніж на ε, а b_p відрізнялося б від B менше ніж на ε, ми дістали б

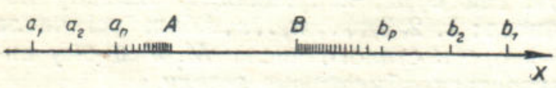

Рис. 3.

$$a_n - b_p > (A - \varepsilon) - (B + \varepsilon) = A - B - 2\varepsilon,$$

а через те що ε як завгодно мале, то звідси випливало б, що $a_n - b_p > 0$ і, отже, $a_n > b_p$, що суперечить умові; таким чином, $A \leqslant B$. Особливо цікавий випадок, коли відомо, що

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Тоді різниця $B - A$, яка має бути меншою від $b_n - a_n$, при всякому n, необхідно рівна нулеві, тобто $A = B$. В цьому випадку числа a_n дають наближення числа A з недостачею, а числа b_n — наближення з надвишкою з будьяким степенем точності.

Саме так буває, коли ми хочемо обчислити якенебудь ірраціональне число, наприклад $\sqrt{2}$, і беремо для цього десяткові дроби, припиняючи обчислення на першому, потім на другому, ..., на n-му десятковому знакові. Через те що ми кожного разу можемо взяти наближення з недостачею або з надвишкою, то ми дістаємо дві послідовності:

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ 1{,}414213;\ \ldots,$$
$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ 1{,}41422;\ 1{,}414214;\ \ldots,$$

з яких перша зростає і обмежена зверху, друга спадає і обмежена знизу, крім того, кожний член першої послідовності менший кожного члена другої послідовності, а різниця між n-м членом другої послідовності і першої послідовності є $\frac{1}{10^{n-1}}$, а тому вона прямує до нуля при необмежено зростаючому n.

Розглянемо тепер послідовності, які не мають границь. Такі, наприклад, послідовності:

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots,$$

$$2,\ -4,\ +8,\ \ldots,\ (-1)^{n+1}\cdot 2^n,\ \ldots,$$

$$-1,\ +1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ \ldots,$$

$$\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ (-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{n+1},\ \ldots.$$

Такі послідовності іноді називають *розбіжними*. Послідовність може не мати границі тому, що її n-й член a_n необмежено зростає, як, наприклад, у випадку $a_n = n^2$. І хоч у цьому випадку умовно пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, але слід вважати, що послідовність не має границі. Відсутність границі може, як у другому прикладі, де $a_n = (-1)^{n+1}\cdot 2^n$, бути викликана тим, що a_n *за абсолютною величиною* необмежено зростає. У прикладах третьому і четвертому n-й член послідовності лишається обмеженим за абсолютною величиною: в третьому прикладі $|a_n| = 1$ при всякому n, у четвертому $|a_n| < 1$ при всякому n. Проте, обидві ці послідовності не мають границь, бо при необмеженому зростанні n числа a_n замість того, щоб наближатись до одного числа, виявляються навперемінно то близько до -1, то близько до $+1$ (або в самих цих точках, як у третьому прикладі).

В двох останніх прикладах послідовність можна розглядати як складену з двох послідовностей, з яких одна має границею -1, а друга $+1$. Але, зрозуміло, можна придумати набагато складніші випадки розбіжності. Так, наприклад, у послідовності

$$\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^n},\ \frac{3}{2^n},\ \frac{5}{2^n},\ \ldots,\ \frac{2^n-1}{2^n},\ \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

не тільки немає ніякої границі, але для будьякого числа x, що лежить між 0 і 1, і для всякого додатного ε можна знайти в нашій послідовності число a_n, яке відрізняється від x менше ніж на ε. Для цього досить узяти m настільки великим, щоб $\frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon$; тоді наше число x або збігатиметься з одним з чисел $\frac{1}{2^m}$, $\frac{3}{2^m}, \ldots, \frac{2^m-1}{2^m}$, або лежатиме між двома сусідніми з цих чисел, а через те що віддаль між такою парою сусідніх чисел $= \frac{2}{2^m} = \frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon$, то, позначаючи через a_n одне з цих чисел, яке найближче до x, ми бачимо, що $|a_n - x| < \varepsilon$.

Геометрично можна сказати, що в прикладі

$$\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{4}{5},\ldots,\ +(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1},\ldots$$

точки послідовності групувались поблизу двох точок: -1 і $+1$, а в тількищо розглянутому прикладі вони групуються поблизу будьякої точки відрізка (0, 1) (на рис. 4 показане розміщення перших 7 точок нашої послідовності).

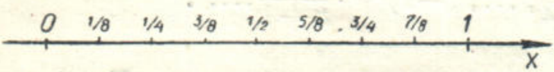

Рис. 4.

§ 3. Критерій Коші.

Повне розв'язання питання про те, коли послідовність має границю, дається такою теоремою Коші:

Для того щоб послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ мала границю, необхідно і досить, щоб кожному додатному числу ε відповідало таке ціле число p, що $|a_n - a_m| < \varepsilon$ для всіх цілих чисел n і m, більших від p.

Доведення необхідності цієї умови надзвичайно просте. Якщо послідовність має границю A, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, отже, всі члени послідовності, починаючи з якогось, наприклад, $p+1$-го, лежать в інтервалі $(A-\eta,\ A+\eta)$, а тому різниця будьяких двох з цих членів менша 2η; досить узяти $\eta < \frac{\varepsilon}{2}$, щоб переконатись у справедливості нерівності $|a_n - a_m| < \varepsilon$ для $n > p$ і $m > p$.

Доведення достатності цієї умови ми наводити не будемо, а дамо лише деяке пояснення. Якщо умову виконано, то всі члени послідовності, починаючи з a_{p+1}, належать інтервалові $(a_p - \varepsilon, a_p + \varepsilon)$, довжина якого як завгодно мала. Якщо числа a_n розглядати як точки, то можна передбачити, що точки $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ згрупуються навколо якоїсь точки A (див. рис. 1).

§ 4. Поняття про ряд.

Якщо дано нескінченну послідовність чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, то, сполучаючи їх у тому порядку, в якому вони дані, знаком плюс, так само, як і при додаванні, ми дістанемо символ

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

що має назву *ряду*; числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ називаються *членами* ряду.

Через те що фактично виконати додавання безлічі чисел не можна, то ми й розглядаємо написаний вище вираз лише як якийсь символ і повинні з'ясувати собі тепер, у яких випадках цьому символові можна надати числової суті.

Припустимо, що

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

тобто розглянемо суму n перших членів нашого ряду і назвемо її *частинною сумою* ряду.

Коли n змінюється, то змінюється і s_n. Можливі два випадки: або s_n при необмеженому зростанні n прямує до якогось числа S; у цьому випадку ряд називається *збіжним* і число S називається *сумою* ряду; абож s_n не прямує ні до якої границі; в цьому випадку ряд називається *розбіжним* і не має суми.

Числа $s_1 = u_1$, $s_2 = u_1 + u_2, \ldots$, $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \ldots$ утворюють послідовність

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots .$$

Порівнюючи дане вище означення збіжності послідовності з означенням збіжності ряду, ми можемо сказати, що *ряд називається збіжним, якщо збігається послідовність його частинних сум.* Подібно до того як ми брали члени послідовності для наближеного обчислення її границі, так і для знаходження суми ряду ми будемо брати його частинні суми як наближення.

Як перший приклад на розв'язання питання про збіжність ряду розглянемо геометричну прогресію

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

з першим членом a і знаменником r. Тут можна суму n перших членів записати так:

$$s_n = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - a\frac{r^n}{1 - r},$$

і треба розрізняти такі випадки:

1°. Якщо $|r|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$,

а тому

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r}-\lim_{n\to\infty} a\frac{r^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}.$$

Таким чином ми бачимо, що ряд збігається і його сума S дорівнює

$$S=\frac{a}{1-r}.$$

У випадку, коли $|r|<1$, прогресія називається спадною, бо тоді абсолютна величина кожного наступного члена менша абсолютної величини попереднього. Таким чином, ми довели, що спадна геометрична прогресія є збіжний ряд.

2°. Якщо $|r|>1$, то $|r|^n$ необмежено зростає при необмеженому зростанні n, а отже, необмежено зростає і $\left|a\frac{r^n}{r-1}\right|$, але

$$s_n=a\frac{r^n}{r-1}-\frac{a}{r-1},$$

а тому $|s_n|$ необмежено зростає і, отже, не прямує до скінченної границі, тому ряд розбігається.

У випадку, коли $|r|>1$, прогресія називається зростаючою, бо тоді кожний її член за абсолютною величиною більший від попереднього. Отже, ми довели, що зростаюча геометрична прогресія є розбіжний ряд.

3°. Якщо $r=1$, то ряд приймає вигляд

$$a+a+a+\ldots+a+\ldots.$$

Зрозуміло, що в цьому випадку $s_n=na$, а тому, якщо $a\neq 0$, то $|s_n|$ необмежено зростає при необмеженому зростанні n, отже, ряд розбігається.

4°. Якщо $r=-1$, то ряд прийме вигляд

$$a-a+a-a+\ldots,$$

а тому $s_n=a$ для непарного n і $s_n=0$ для парного n. Отже, s_n не прямує ні до якої границі, і ряд розбігається.

Остаточно можна сказати, що при $|r|<1$ геометрична прогресія є збіжний, при $|r|\geqslant 1$ — розбіжний ряд.

§ 5. Залишковий член ряду.

Якщо ми розглянемо два ряди

$$u_1+u_2+\ldots+u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\ldots$$
$$u_{p+1}+u_{p+2}+\ldots,$$

з яких другий утворюється, коли беруть члени першого, починаючи з u_{p+1}, то обидва ряди або водночас збігаються або водночас розбігаються.

Справді, якщо s_p є сума p перших членів першого, а S_n є сума n перших членів другого ряду, то зрозуміло, що

$$s_{p+n} = (u_1 + u_2 + \ldots + u_p) + (u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+n}) = s_p + S_n.$$

Якщо перший ряд збігається, то s_{p+n} прямує до певної границі S, коли n, а отже, і $p+n$ необмежено зростають, але через те що $S_n = s_{p+n} - s_p$, то, отже, S_n прямує до границі $S - s_p$, тобто другий ряд збігається.

Навпаки, якщо другий ряд збігається і має сумою число σ, значить, S_n прямує до σ при необмеженому зростанні n; отже, при необмеженому зростанні n і s_{n+p} прямує до границі, що дорівнює $\sigma + s_p$, тобто перший ряд збігається.

Якщо один з двох рядів розбігається, то другий не може збігатись, бо інакше збігався б і перший.

У випадку, коли обидва ряди збігаються, сума другого ряду називається залишковим членом першого ряду, при чому для того щоб вказати, що другий ряд починається з члена u_{p+1}, прийнято говорити, що його сума є p-й залишковий член і позначати його через R_p. Через те що сума першого ряду дорівнює сумі його перших p членів, доданої до залишкового члена, то можна написати

$$S = s_p + R_p.$$

Інакше кажучи, p-й залишковий член є та *помилка*, яку ми зробимо, якщо замість суми ряду братимемо суму його p перших членів. Через те що

$$R_p = S - s_p,$$

то зрозуміло, що при необмеженому зростанні p залишковий член R_p прямує до нуля.

Так, наприклад, у спадній геометричній прогресії ми бачили, що

$$s_n = \frac{a}{1-r} - a\frac{r^n}{1-r}, \quad S = \frac{a}{1-r},$$

а тому

$$R_n = a\frac{r^n}{1-r}.$$

В багатьох випадках у нас немає іншого способу обчислити якесь число, крім розглядання ряду, сумою якого воно є. Тоді наближеним значенням цього числа є сума n перших членів ряду. Ряд буде тим зручніший для обчислень, чим меншою буде зроблена помилка, тобто чим менший залишковий член. Іноді R_n дуже швидко спадає із зростанням n; у цих випадках про ряд можна сказати, що він швидко розбігається; такий ряд особливо зручний для обчислень.

§ 6. Простіші операції над рядами.

З визначення суми ряду і з основних теорем про границі ми дістаємо одразу такі твердження:

1°. Якщо C є стале число, а

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

є збіжний ряд із сумою S, то ряд

$$Cu_1 + Cu_2 + \ldots + Cu_n + \ldots$$

також збігається і має суму CS.

2°. Якщо два ряди

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$
$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

збігаються і мають сумами S_1 і S_2, то ряд

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots$$

збігається і має сумою $S_1 + S_2$.

Це твердження можна довести і для будьякого скінченного числа рядів.

Теорема, зрозуміло, справедлива і для різниці двох рядів.

3°. Якщо ряд збігається, то він буде збіжним і після того, як ми змінимо якесь скінченне число його членів; сума одержаного при цьому ряду дорівнюватиме сумі даного ряду плюс сума різниць між зміненими членами і тими, що були раніш.

4°. Якщо обидва ряди

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

і

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

збігаються і якщо ми маємо для всякого n нерівність $u_n \leqslant v_n$, то для сум S_1 і S_2 цих рядів ми також маємо $S_1 \leqslant S_2$, при чому неодмінно буде $S_1 < S_2$, якщо, при умові $u_n \leqslant v_n$, є хоч одне n, для якого $u_n < v_n$. Справді, $S_2 - S_1$ є сума ряду

$$(v_1 - u_1) + (v_2 - u_2) + \ldots + (v_n - u_n) + \ldots,$$

в якому всі члени додатні або дорівнюють нулеві, отже, сума n перших членів цього ряду при всякому n або додатна або дорівнює нулеві, а тому вона не може мати від'ємну границю при необмеженому зростанні n. Коли ж хоч при одному n маємо $u_n < v_n$, значить, в останньому ряді є додатний член, а всі інші не можуть бути від'ємними; тому $S_2 - S_1$ додатне і $S_1 < S_2$.

Наведені вище теореми вказували на можливість *у деяких випадках* поводитись із збіжними рядами як із *скінченними сумами. Але було б великою помилкою вважати, що всі закони, справедливі для скінченних сум, дійсні і для збіжних рядів.* Наприклад, ми знаємо, що сума скінченного числа доданків не залежить від їх порядку; проте, потім ми побачимо, що в збіжних рядах не можна переставляти члени як завгодно: це можна робити лише при деяких обмежувальних умовах, у загальному ж випадку від цього не тільки може змінитись сума ряду, але він може стати навіть розбіжним.

Далі, якщо в сумі скінченного числа членів деякі члени згруповані докупи, що позначено дужкою, то знищення дужок, сполучених знаком плюс, є цілком законною операцією, тоді як для рядів цього, взагалі кажучи, не можна робити. Пояснимо прикладом.

Ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

є геометрична прогресія із знаменником $\frac{1}{2}$ і першим членом $\frac{1}{2}$, тому для нього

$$s_n=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n},$$

отже, сума $S=1$.

Ми можемо тому сказати, що ряд

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{7}{8}\right)+\ldots+\left(1-\frac{2^n-1}{2^n}\right)+\ldots$$

збігається і має суму, рівну 1. Але коли ми знищимо дужки, то дістанемо ряд

$$1-\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}+1-\frac{7}{8}+\ldots+1-\frac{2^n-1}{2^n}+\ldots,$$

і неважко показати, що він розбігається.

Справді, якщо ми позначимо через s_n суму n перших його членів, то треба буде розрізняти два випадки: коли n парне і коли воно непарне. Якщо n парне, тобто $n=2m$, то

$$s_n=1-\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}+\ldots+1-\frac{2^m-1}{2^m}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^m}=1-\frac{1}{2^m};$$

коли ж n непарне, тобто $n=2m+1$, то

$$s_n=1-\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}+\ldots+1-\frac{2^m-1}{2^m}+1=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^m}+1=1-\frac{1}{2^m}+1=2-\frac{1}{2^m}.$$

Звідси випливає, що при n досить великому і парному s_n дуже близьке до 1, а при n досить великому і непарному s_n дуже близьке до 2. Це показує, що s_n не прямує ні до якої границі при необмеженому зростанні n, отже, ряд розбігається.

Цей приклад вказує на необхідність обережно поводитись із рядами: не можна поводитись із усяким збіжним рядом так, як ми поводилися б із скінченною сумою.

§ 7. Необхідна ознака збіжності.

Надзвичайно важливо вміти встановити, чи є даний ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

збіжним чи ні; це питання еквівалентне питанню про те, чи прямує сума s_n перших n членів ряду до деякої границі, коли n необмежено зростає. Неважко одразу дістати *необхідну* умову для збіжності. Для цього досить зауважити, що коли ряд збігається, то s_n прямує до певної границі S при необмеженому зростанні n, але через те що

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n,$$
$$s_{n-1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1},$$

то

$$u_n = s_n - s_{n-1}.$$

Якщо n необмежено зростає, то і $n-1$ також зростає необмежено, а тому s_n і s_{n-1} прямують до границі S. Звідси випливає, що u_n прямує до нуля, отже, ми можемо висловити таке твердження:

Для того щоб ряд збігався, необхідно, щоб n-й член його прямував до нуля при необмеженому зростанні n.

Отже, якщо n-й член ряду не прямує до нуля, ряд повинен розбігатись. Наприклад, розбіжність розглянутого в § 6 ряду

$$1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{4} + \ldots + 1 - \frac{2^m - 1}{2^m} + \ldots$$

можна було б довести, користуючись тількищо одержаною ознакою.

Проте, одержана ознака, будучи необхідною, не є достатньою, бо такий ряд може бути розбіжним навіть і тоді, коли його n-й член прямує до нуля. Наприклад, ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

що має назву гармонічного, має n-й член $u_n = \frac{1}{n}$, а тому u_n прямує до нуля при необмеженому зростанні n. Проте, цей ряд, як ми зараз побачимо, розбігається.

582

Щоб переконатись у цьому, зауважимо, що коли б ряд збігався, його залишковий член

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+p}+\ldots$$

повинен був би прямувати до нуля при необмеженому зростанні n, а проте, якщо ми розглянемо суму

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n},$$

то переконаємось, що кожний її член, крім останнього, більший $\frac{1}{2n}$, а останній дорівнює $\frac{1}{2n}$; число членів є n, тому розглянута сума більша $\frac{n}{2n}$, тобто більша $\frac{1}{2}$, а це показує, що

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}+\ldots$$

не може прямувати до нуля, коли n необмежено зростає, і, отже, гармонічний ряд розбігається.

§ 8. Теорема Коші.

Існує теорема Коші, яка дозволяє, як і у випадку питання про границю послідовності, розв'язати остаточно питання про збіжність ряду:

Для того щоб ряд збігався, необхідно і досить, щоб, яке б не було додатне число ε, можна було знайти таке ціле число N, що для всіх n, більших N, і для всіх цілих p частинні суми ряду задовольняли нерівність

$$|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon.$$

Необхідність цієї умови зовсім очевидна, бо якщо ряд збігається, то s_n прямує до деякої границі S при n необмежено зростаючому, а тоді при досить великому n як s_n, так і s_{n+p} відрізняються від S менше ніж на $\frac{\varepsilon}{2}$, тому вони відрізняються один від одного менше ніж на ε.

Доведення достатності ми не наводитимемо.

Слід зауважити, що хоч теорема Коші і дає повне розв'язання питання про збіжність, але прикладати її на практиці майже неможливо. Інакше кажучи, якщо дано якийсь індивідуальний ряд, то, користуючись ознакою Коші, ніяк не легше встановити, чи збігається він чи ні, ніж просто перевірити, чи має сума s_n його перших n членів якунебудь границю при необмеженому зростанні n. Тому, хоч ознака Коші і має величезне теоретичне значення, дозволяючи доводити багато теорем про ряди, але для практичного розв'язання питання про збіжність того чи іншого ряду прикладають інші ознаки, хоч не такі загальні, але зате простіші. До відшукання таких ознак ми тепер і перейдемо, але спочатку зробимо одне загальне зауваження.

На підставі того, що говорилось у § 5, ми можемо при розв'язанні питання про збіжність або розбіжність ряду нехтувати будьяким числом його перших членів. Це зауваження зручне в тих випадках, коли в перших членах є деяка іррегулярність*.

Далі ми спинимось на вивченні одного окремого класу рядів, а саме таких, у яких кожний член або додатний, або дорівнює нулеві. Цей клас рядів тим важливіший, що, знайшовши для нього критерій збіжності, ми з його допомогою матимемо можливість часто розв'язувати питання і про збіжність рядів, члени яких можуть бути як додатні, так і від'ємні.

Якщо в якомусь ряді всі члени додатні або дорівнюють нулеві, то, відкидаючи рівні нулеві члени, ми не порушимо збіжності, якщо вона була, і не змінимо суми ряду. Тому все зводиться до вивчення рядів з додатними членами.

§ 9. Ряди з додатними членами.

Нехай

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

є ряд, усі члени якого додатні. Зрозуміло, що коли s_n є сума n перших його членів, то при всякому n маємо $s_{n+1} > s_n$; отже, послідовність частинних сум нашого ряду буде зростаючою. Але тоді можливі тільки два випадки: або s_n необмежено зростає разом із n, і тоді ряд розбігається; абож при всякому n числа s_n лишаються менші якогось числа M; у цьому випадку послідовність обмежена зверху, а через те що вона зростаюча, то (§ 2) вона прямує до певної границі S, яка не більша M, тобто ряд збігається і має суму $S \leqslant M$.

Звідси зрозуміло, що коли ряд з додатними членами збігається, то збігатиметься і всякий ряд, одержаний викиданням з нього будьякого скінченного числа членів абож безлічі членів, при чому сума нового ряду менша суми первісного.

Але можна одержати набагато загальніший результат, якщо порівнювати два ряди між собою.

Нехай

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

і

$$(v) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

---

* Хай, наприклад, ми маємо $u_n = n$ для $n = 1, 2, 3$ і $u_n = \frac{1}{2^n}$ для $n = 4, 5, 6, \ldots$. Тоді, відкидаючи три перші члени ряду, ми зводимо питання про його збіжність до питання про збіжність спадної геометричної прогресії.

два ряди, відносно яких відомо, що при всякому n ми маємо $u_n \leqslant v_n$. Тоді, якщо ряд (v) збігається, збігатиметься і ряд (u); якщо ряд (u) розбігається, то розбігається і ряд (v).

Справді, через те що $u_n \leqslant v_n$ при всякому n, то сума s'_n перших n членів ряду (u) не перевищує суми s''_n перших n членів ряду (v) також при всякому n. Але тоді, позначаючи через S'' суму ряду (v), ми бачимо, що $s'_n \leqslant s''_n$ при всякому n, отже, зростаюча послідовність s'_n прямує до границі, і ряд (u) має суму $S' \leqslant S''$.

Коли ж ряд (u) розбігається, то s'_n необмежено зростає разом з n, а через те що $s''_n > s'_n$, то звідси випливає, що s''_n вже напевне необмежено зростає разом з n, а тому ряд (v) розбігається.

Приклад 1. Розглянемо ряд

$$(u) \qquad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

Якщо ми порівняємо його з рядом

$$(v) \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,$$

то побачимо, що кожний член ряду (u), починаючи з другого, менший від того члена ряду (v), що стоїть на тому ж місці. Але ряд (v) збігається як спадна геометрична прогресія, тому і ряд (u) збігається.

Приклад 2. Розглянемо ряд

$$(v) \qquad \frac{1}{\lg 2}+\frac{1}{\lg 3}+\ldots+\frac{1}{\lg (n+1)}+\ldots.$$

Якщо ми порівняємо його з рядом

$$(u) \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}+\ldots,$$

то побачимо, що кожний член ряду (u) менший відповідного члена ряду (v). При цьому ряд (u) розбігається, бо його одержують з гармонічного ряду відкиданням першого члена цього ряду, а розбіжність гармонічного ряду була нами доведена. Таким чином, ми бачимо, що ряд (v) теж повинен розбігатись.

Корисно зауважити, що в цій теоремі немає потреби вимагати, щоб нерівність $u_n \leqslant v_n$ (або $u_n \geqslant v_n$) здійснювалась неодмінно для всіх n; якщо вона здійснюється для всіх, починаючи з якогось, то теорема лишається справедливою, бо ми знаємо, що скінченне число членів ряду не впливає на питання про його збіжність.

Наприклад, коли б ми повинні були встановити, чи збігається ряд

$$\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2}{(k+2)^2}+\frac{3}{(k+3)^2}+\ldots+\frac{n}{(k+n)^2}+\ldots,$$

де k — якесь ціле число, ми могли б міркувати так: коли $n>k$, то

$$\frac{n}{(k+n)^2}>\frac{n}{(n+n)^2}=\frac{1}{4n}.$$

Отже, кожний член ряду, який вивчається, починаючи з $k+1$-го, більший відповідного члена ряду

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{4\cdot n}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\right),$$

а цей останній розбігається, тому і заданий ряд також розбігається.

§ 10. Ознаки Даламбера і Коші.

Спосіб порівнювання рядів приводить нас до двох дуже простих і зручних для прикладання ознак збіжності. Ми дістаємо їх, якщо, як ряд (v), з яким порівнюємо заданий ряд (u), візьмемо геометричну прогресію.

Ознака Даламбера. Якщо в ряді

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

відношення $n+1$-го члена до n-го прямує до певної границі l при необмеженому зростанні n

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l,$$

то у випадку, коли $l<1$, ряд збігається; якщо $l>1$, ряд розбігається.

Щоб довести цю теорему, зауважимо насамперед, що коли відношення $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ має своєю границею число l, то, яке б мале не було ε, при досить великому n, наприклад, при $n\geqslant p$, ми матимемо

$$l-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon.$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $l<1$. Ми можемо взяти ε настільки малим, щоб $l+\varepsilon$ було все ще менше 1. Взявши ε

таким способом, позначимо через r суму $l+\varepsilon$. Отже, $r=l+\varepsilon$ і $r<1$.

Для всіх значень $n \geqslant p$ ми маємо

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r, \quad \text{або} \quad u_{n+1} < ru_n,$$

отже,

$$\begin{aligned}
&u_{p+1} < ru_p,\\
&u_{p+2} < ru_{p+1} < r^2u_p,\\
&u_{p+3} < ru_{p+2} < r^3u_p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{p+k} < ru_{p+k-1} < r^ku_p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Але коли $u_{p+k} < r^ku_p$ при всякому цілому k, то, отже, члени досліджуваного ряду, починаючи з u_{p+1}, менші членів геометричної прогресії

$$ru_p + r^2u_p + r^3u_p + \ldots + r^ku_p + \ldots,$$

причому, через те що $r<1$, ця прогресія спадна і, отже, є збіжним рядом. Звідси випливає, що і даний ряд збігається.

Розглянемо тепер випадок, коли $l>1$. Ми можемо взяти ε настільки малим, що $l-\varepsilon$ все ще більше 1. Покладемо $q=l-\varepsilon$, тоді $q>1$.

Для всіх значень n, починаючи з деякого p, ми маємо

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > q, \quad \text{або} \quad u_{n+1} > qu_n,$$

отже,

$$\begin{aligned}
&u_{p+1} > qu_p,\\
&u_{p+2} > qu_{p+1} > q^2u_p,\\
&u_{p+3} > qu_{p+2} > q^3u_p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{p+k} > qu_{p+k-1} > q^ku_p.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Тому члени нашого ряду, починаючи з u_{p+1}, більші членів геометричної прогресії

$$qu_p + q^2u_p + q^3u_p + \ldots + q^ku_p + \ldots,$$

а через те що $q>1$, то ця прогресія зростаюча і, отже, є розбіжним рядом. Звідси ми робимо висновок, що і досліджуваний ряд розбігається.

Приклад 1. Розглянемо ряд

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} + \ldots.$$

Ми маємо

$$u_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n};\quad u_{n+1}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot(n+1)},$$

тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

а через те що $0<1$, то на підставі ознаки Даламбера ми робимо висновок, що ряд збігається.

Ми побачимо далі, що коли до суми цього ряду додати 1, то дістанемо неперове число e — основу системи натуральних логарифмів.

Приклад 2. Розглянемо ряд

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots.$$

Ми маємо

$$u_n=\frac{2^n}{n};\quad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1},$$

тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}2\,\frac{n}{n+1}=2,$$

а через те що $2>1$, то згідно з ознакою Даламбера робимо висновок, що ряд розбігається.

Цілком природно запитати, що можна сказати про ряд, для якого

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1?$$

На це запитання доводиться відповісти так: при виконанні зазначеної вище умови ряд може як збігатись, так і розбігатись. Переконаємось у цьому на прикладах.

Ми вже знаємо, що гармонічний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

є ряд розбіжний. Проте, для нього

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

З другого боку, якщо ми розглянемо ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,$$

то і для нього також маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1.$$

Проте, цей ряд, як ми зараз доведемо, збігається. Щоб переконатись у цьому, зауважимо, що

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

а тому суму s_n перших n членів розглядуваного ряду можна записати у вигляді

$$s_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Розкриваючи дужки і виконуючи скорочення, ми переконаємось, що

$$s_n=1-\frac{1}{n+1},$$

звідки безпосередньо зрозуміло, що при необмеженому зростанні n s_n прямує до границі (рівній 1), тобто ряд збігається.

Друга ознака збіжності рядів, що грунтується, як і ознака Даламбера, на порівнюванні з геометричною прогресією і що належить Коші, полягає в такому твердженні:

Ознака Коші, Якщо для ряду

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

границя кореня n-го степеня з n-го члена існує і дорівнює якомусь числу

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,$$

то у випадку $l<1$ ряд збігається, а при $l>1$ ряд розбігається.

Справді, якщо l є границя $\sqrt[n]{u_n}$, то, яке б мале не було ε, починаючи з деякого p, матимемо

$$l-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<l+\varepsilon,\quad n\geqslant p.$$

Якщо $l<1$, ми можемо припустити ε настільки малим, що $l+\varepsilon$ все ще менше 1. Покладаючи $l+\varepsilon=r$, маємо, отже, $r<1$ і

$$\sqrt[n]{u_n}<r,\quad n\geqslant p,$$

а це означає, що

$$u_p<r^p,\quad u_{p+1}<r^{p+1},\quad u_{p+2}<r^{p+2},\ldots,$$

отже, члени нашого ряду, починаючи з p-го, менші членів геометричної прогресії

$$r^p + r^{p+1} + r^{p+2} + \dots .$$

Але ця прогресія є збіжний ряд, бо $r<1$; звідси випливає, що і досліджуваний нами ряд також збігається.

У випадку, коли $l>1$, ми можемо взяти ε настільки малим, що $l-\varepsilon$ все ще більше 1. Покладаючи $q=l-\varepsilon$, маємо, отже,

$$q>1.$$

Через те що

$$\sqrt[n]{u_n}>q,$$

то ми маємо

$$u_p>q^p, \quad u_{p+1}>q^{p+1}, \quad u_{p+2}>q^{p+2}, \dots,$$

отже, члени нашого ряду, починаючи з p-го, більші членів геометричної прогресії

$$q^p+q^{p+1}+q^{p+2}+\dots,$$

яка є розбіжним рядом, бо $q>1$. З цього робимо висновок, що наш ряд теж розбігається.

Приклад 1. Розглянемо ряд

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{n^n}+\dots .$$

Приклавши до нього ознаку Коші, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

а тому ряд збігається.

Приклад 2. Розглянемо ряд

$$\frac{3}{1}+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\right)^3+\dots+\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n+\dots$$

Зрозуміло, що

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2,$$

а тому ряд є розбіжним.

Зауважимо, що, так само як і для ознаки Даламбера, випадок

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$$

є сумнівним, тобто при виконанні цієї умови ряд може як збігатись, так і розбігатись. Справді, для гармонічного ряду ми маємо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Позначаючи $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=a_n$, ми маємо

$$\lg a_n=\frac{1}{n}\lg\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{\lg n}{n},$$

а тому $\lim\limits_{n\to\infty}\lg a_n=0$, в чому можна переконатись, користуючись хоча б правилом Лопіталя. Отже, $\lg a_n$ прямує до нуля, а тому саме a_n прямує до 1, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1.$$

Таким чином, ми переконались, що коли

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1,$$

то ряд може бути розбіжним.

Але, з другого боку, наприклад, для ряду

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

маємо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1,$$

бо $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$ прямує до 1, а проте, досліджуваний ряд збігається, бо коли відкинути перший член, то в ряді, що лишиться, члени менші відповідних членів ряду

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,$$

у збіжності якого ми переконались, розглядаючи приклади на застосування ознаки Даламбера.

Таким чином, ми бачимо, що при виконанні умови

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$$

ряд може бути як збіжним, так і розбіжним.

§ 11. Інтегральна ознака Коші.

Для рядів, до яких ознаки Даламбера і Коші не можна прикласти, доводиться шукати інших способів, щоб з'ясувати питання про їх збіжність. Ми вкажемо один метод, що прикладається, правда, лише до рядів з *монотонноспадними* членами, але що є надзвичайно зручним. Він грунтується на порівнюванні даного ряду з деяким інтегралом, верхня границя якого нескінченна.

Нагадаємо, що інтеграл

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

називається *збіжним* або таким, що *має суть*, якщо $\int_a^b f(x)\,dx$ прямує до певної границі, коли b необмежено зростає. В цьому випадку ми умовляємось цю границю позначати через $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Отже,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

у тому випадку, коли ця границя існує; коли ж границі немає, то про інтеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ говорять, що він *не має суті* або що він *розбігається*.

Теорема Коші, яка дозволяє порівнювати ряди з інтегралами, читається так:

Хай $f(x)$ додатна функція, спадна і неперервна, починаючи з деякого значення $x=a$.

При цих умовах ряд

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+\ldots$$

збігається, якщо збігається інтеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$, і розбігається, якщо цей інтеграл розбігається.

Для того щоб довести цю теорему, розглянемо графік функції $f(x)$. За умовою ця функція додатна і спадає, починаючи з $x=a$. Крім того, починаючи з a, вона неперервна. Функція $f(x)$ може бути лівіше точки a навіть розривною, наприклад, необмежено зростати навколо якоїсь точки c, як це зображено на рисунку (рис. 5). Для нас важливо, що правіше a функція $f(x)$ спадає і неперервна.

Відмітимо на осі абсцис точки $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ з координатами $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, і нехай k є найменше ціле число, більше a або рівне йому (на рисунку $k=3$). У точках $M_k, M_{k+1}, \ldots, M_n, \ldots$ поставимо перпендикуляри до осі абсцис до перетину їх з кривою $y=f(x)$. Хай A_n є точка на кривій з абсцисою M_n; тоді її ордината дорівнює $f(n)$. Проведемо з точки A_n паралель до осі абсцис до перетину з ординатою, поставленою в точці M_{n+1}; хай B_n — точка перетину. Зрозуміло, що прямокутник $M_nA_nB_nM_{n+1}$ містить площу, обмежену кривою, ординатами, проведеними в M_n і M_{n+1}, і віссю абсцис, бо за умовою крива $y=f(x)$ спадає, і, отже, максимальна її ордината на відрізку M_nM_{n+1} буде в точці M_n. Тому, через те що висота розглядуваного прямокутника дорівнює $f(n)$, а основа — одиниці і, отже, площа його дорівнює $f(n)$, ми маємо

$$\int_{M_n}^{M_{n+1}} f(x)\,dx < f(n).$$

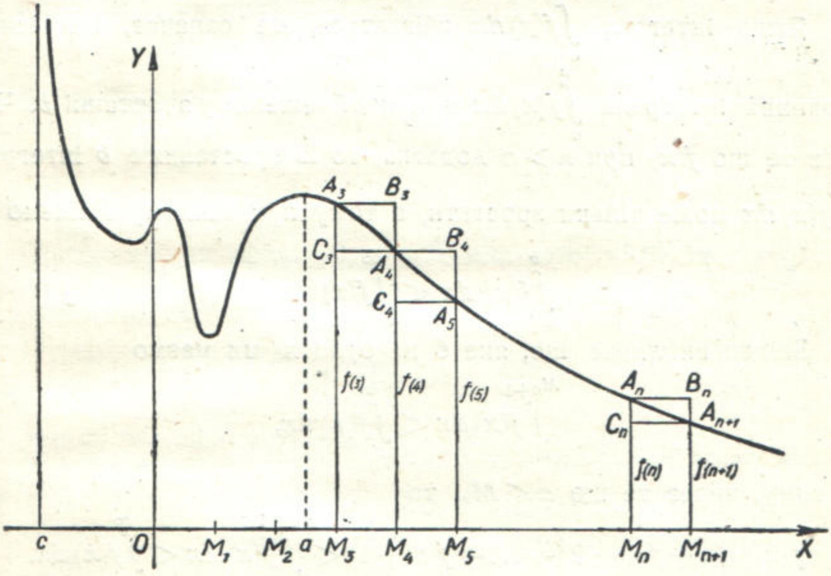

Рис. 5.

Якщо додамо всі такі прямокутники, починаючи від точки M_k і до точки M_{n+1}, то дістанемо

$$\int_{M_k}^{M_{n+1}} f(x)\,dx < f(k)+f(k+1)+\ldots+f(n).$$

Але, з другого боку, якщо з точки A_{n+1} проведемо паралель до осі абсцис до перетину з ординатою, поставленою в точці M_n, то дістанемо якусь точку C_n, і зрозуміло, що прямокутник $M_nC_nA_{n+1}M_{n+1}$ через ту ж монотонність функції $f(x)$ міститься всередині площі, обмеженої кривою, віссю абсцис і ординатами в точках M_n і M_{n+1}. Тому, зауваживши, що висота розглядуваного прямокутника є $f(n+1)$, а основа знову дорівнює 1, знайдемо

$$f(n+1) < \int_{M_n}^{M_{n+1}} f(x)\,dx.$$

Додаючи ці нерівності, дістанемо аналогічно до попереднього

$$f(k+1)+f(k+2)+\ldots+f(n+1) < \int_{M_k}^{M_{n+1}} f(x)\,dx.$$

Після цих попередніх розглядань перейдемо до доведення теореми Коші.

Якщо інтеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ збігається, це означає, що існує границя інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ при необмеженому зростанні b. Через те що $f(x)$ при $x > a$ додатна, то із зростанням b інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ може тільки зростати, а тому при всякому b маємо

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Звідси випливає, що, яке б не було n, ми маємо

$$\int_a^{M_{n+1}} f(x)\,dx < \int_a^\infty f(x)\,dx,$$

а тому, через те що $a \leqslant M_k$, то

$$f(k+1)+f(k+2)+\ldots+f(n+1) < \int_{M_k}^{M_{n+1}} f(x)\,dx < \int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Звідси випливає, що у ряду

$$f(k+1)+f(k+2)+\ldots+f(n)+\ldots,$$

всі члени якого додатні, частинні суми лишаються обмеженими, а це, як ми знаємо, забезпечує його збіжність. Отже, і ряд

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(k)+\ldots+f(n)+\ldots,$$

що відрізняється від попереднього додаванням скінченного числа доданків, теж збігається. Таким чином, перша половина теореми Коші доведена.

Припустимо тепер, що $\int_a^\infty f(x)\,dx$ не має суті. Через те що $f(x)$ додатна, то $\int_a^b f(x)\,dx$ зростає разом з b. Якщо $\int_a^\infty f(x)\,dx$ не має суті, це означає, що $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ необмежено зростає разом з b, бо коли б він, зростаючи, лишався обмеженим, то повинен був би прямувати до певної границі. Звідси ми робимо висновок, що $\int\limits_a^{M_{n+1}} f(x)\,dx$, а отже, і $\int\limits_{M_k}^{M_{n+1}} f(x)\,dx$, що відрізняється від нього на скінченну величину, повинен необмежено зростати при необмеженому зростанні n. А через те що

$$f(k)+f(k+1)+\ldots+f(n)>\int\limits_{M_k}^{M_{n+1}} f(x)\,dx,$$

то частинні суми ряду

$$f(k)+f(k+1)+\ldots+f(n)+\ldots$$

необмежено зростають, а тому ряд розбігається, отже, і первісний ряд

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(k)+\ldots+f(n)+\ldots$$

також розбігається.

Таким чином теорема Коші цілком доведена.

Покажемо на прикладі, як її прикладати до дослідження збіжності деякого даного ряду.

Хай дано ряд

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots,$$

де p — стале додатне число.

Зауважимо, що ознака Даламбера в цьому випадку нічого не дає, бо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1.$$

Так само і ознака Коші нічого не дає, бо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=1.$$

Спробуємо прикласти тут тількищо доведену теорему Коші. Для цього доберемо функцію $f(x)$, що задовольняє умовам теореми і таку, щоб $f(n)=\frac{1}{n^p}$. Якщо ми розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{x^p}$, то побачимо, що вона додатна для всіх додатних значень x, неперервна всюди, крім точки $x=0$, і спадає при зростанні x (бо $p>0$ за умовою).

Ми бачимо, що за a можна прийняти будьяке додатне число, наприклад, $a=1$, і тоді функція задовольняє всім умовам теореми.

Звідси випливає, що розглядуваний ряд збігається або розбігається, залежно від того, збігається чи розбігається інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

Тут доведеться розглянути окремо два випадки: коли $p=1$ і коли $p \neq 1$.

Якщо $p=1$, ми маємо справу з інтегралом

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}.$$

Але через те що

$$\int_1^{b} \frac{dx}{x} = \ln b, \text{ то } \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} = +\infty,$$

а тому $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$, що цікавить нас, розбігається. Звідси випливає, що і наш ряд при $p=1$ розбігається. Це цілком погоджується з раніше відомими нам фактами, бо при $p=1$ ряд перетворюється в уже відомий нам гармонічний:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

розбіжність якого була раніше доведена.

Розглянемо тепер випадок $p \neq 1$. В цьому випадку ми маємо

$$\int_1^{b} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \left. \frac{1}{x^{p-1}} \right|_1^b = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right).$$

Для того щоб дізнатись, чи прямує цей вираз до границі, коли b необмежено зростає, розглянемо окремо випадок $p>1$ і випадок $p<1$.

Якщо $p>1$, то $\frac{1}{b^{p-1}}$ прямує до нуля при необмеженому зростанні b, і, отже,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}.$$

Отже, в цьому випадку інтеграл збігається, а тому і ряд

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

збігається при $p>1$.

Коли ж $0 < p < 1$, то $\frac{1}{b^{p-1}} = b^{1-p}$ необмежено зростає при необмеженому зростанні b, а тому інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ розбігається, а отже, і ряд

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

розбігається при $0 < p < 1$.

До цього можна додати, що коли $p \leqslant 0$, то n-й член ряду не прямує до нуля при n необмежено зростаючому, і тому ряд теж розбігається.

Резюмуючи все сказане, можемо зробити такий висновок: **ряд**

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

збігається при всякому $p > 1$ і розбігається при всякому $p \leqslant 1$.

Тепер ми можемо набагато ширше прикладати теорему про порівнювання рядів, бо маємо в своєму розпорядженні безліч рядів, поведінка яких відома: справді, надаючи числу p різних значень, ми дістаємо різні ряди, з членами яких часто буває легко порівняти члени даного ряду.

Наприклад, розглянемо ряд

$$\frac{\ln 1}{\sqrt{1}} + \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{\ln n}{\sqrt{n}} + \ldots.$$

Ні ознака Даламбера, ні ознака Коші не дозволяють судити про його збіжність. Але коли ми порівняємо його з рядом

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots,$$

то побачимо, що він повинен розбігатись, бо

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}, \quad n > 2,$$

а ряд

$$\frac{1}{1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \ldots + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} + \ldots$$

повинен розбігатись у наслідок тількищо доведеного, бо тут $p = \frac{1}{2}$.

Подібно до цього легко довести, що ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$$

збігається, бо члени його менші членів збіжного ряду

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots,$$

бо тут $p=3$.

Наведемо ще один приклад на безпосереднє прикладання теореми Коші. Хай дано ряд

$$\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots.$$

Якщо ми покладемо $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, то функція $f(x)$ для значень x, більших 1, буде додатною, неперервною і спадною. Поклавши, наприклад, $a=2$, ми можемо на підставі теореми Коші твердити, що ряд зазнаватиме змін так само, як інтеграл

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}.$$

Але

$$\int_2^b \frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_2^b=\ln\ln b-\ln\ln 2,$$

а тому при необмеженому зростанні b він необмежено зростає, і, отже, $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$ не має суті. Звідси випливає, що розглядуваний ряд розбігається.

§ 12. Про переставляння членів ряду.

Для рядів з додатними членами дійсне таке надзвичайно важливе твердження:

Сума збіжного ряду з додатними членами не залежить від порядку членів ряду, або, інакше, два ряди з додатними членами, що відрізняються тільки порядком своїх членів, мають одну й ту ж суму.

Насамперед нам треба з'ясувати, що саме ми розуміємо під словами: „два ряди

(u) $\qquad u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$

(v) $\qquad v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots$

відрізняються тільки порядком своїх членів“. Для цього насамперед зауважимо, що коли в одному з цих рядів є безліч однaкових членів, відмінних від нуля, то такий ряд повинен розбігатись, бо тоді його n-й член не прямує до нуля при необмеженому зростанні n. Тому якщо за умовою теореми розглядаються тільки збіжні ряди, то ми маємо право вважати, що кожний ряд може мати тільки скінченне число відмінних від нуля однакових членів. Щодо членів, рівних нулеві, то їх можна відкинути, бо вони не впливають ні на збіжність ряду, ні на його суму.

Встановивши це, ми можемо сказати, що два ряди (u) і (v) відрізняються лише порядком своїх членів, якщо кожне число, яке є членом першого ряду, входить також і в другий ряд, і до того стільки ж разів; і навпаки, всяке число, що є членом другого ряду, фігурує і в першому, і до того знову стільки ж разів.

Нам треба довести, що коли ряд (v) збігається, то ряд (u), який відрізняється від нього лише порядком членів, також збігається і має ту ж суму.

Справді, хай s_n є сума n перших членів ряду (u). Через те що кожний з цих членів неодмінно є якимсь членом ряду (v), то, взявши досить велике число, хай m, перших членів цього ряду, ми досягнемо того, що серед них будуть усі перші n членів ряду (u). Якщо σ_m є сума m перших членів ряду (v), то ми, таким чином, бачимо, що при досить великому m

$$s_n < \sigma_m.$$

Але ряд (v) за умовою збігається; хай V — його сума. Через те що всі члени ряду (v) додатні, то $\sigma_m < V$ при всякому m, а тому

$$s_n < V.$$

Ми переконалися, що всі частинні суми ряду (u) обмежені і не більші V, тому ряд збігається, і його сума U повинна бути менша або дорівнювати V. Але через те що ми могли б провести всі ті ж міркування для ряду (v), ми переконалися б, що $V \leqslant U$. Звідси випливає, що $U = V$.

§ 13. Про абсолютну і умовну збіжність.

Досі ми розглядали тільки ряди, всі члени яких додатні. Все, що було про них сказано, можна було б повторити для рядів з від'ємними членами, але це було б зовсім даремно, бо один з цих випадків зводиться до другого шляхом множення всіх членів на -1; від цього ні збіжність, ні розбіжність не зміняться, тільки сума змінить знак. Розгляд рядів, у яких усі члени одного знака, крім деяких, при скінченному числі, теж не дасть нічого нового, бо при розв'язанні питання про збіжність або розбіжність зважати на ці члени не доведеться. Якщо пропонований ряд збігається і якщо, наприклад, усі його члени, крім скінченного числа, додатні, то суму ряду дістаємо, якщо відняти з ряду, складеного з самих тільки додатних членів, суму абсолютних величин від'ємних членів.

Таким чином, істотно нове ми можемо одержати тільки тоді, коли будемо розглядати ряди, що містять безліч додатних і безліч від'ємних членів.

Ряди такого роду поділяються на два класи, істотно відмінних один від одного, до розгляду яких ми зараз і перейдемо.

Хай ми маємо ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots .$$

Розглянемо водночас із ним ряд, складений з абсолютних величин членів даного ряду, тобто

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots .$$

Цей ряд з додатними членами може як збігатись, так і розбігатись. Введемо таке означення, яке далі відіграватиме важливу роль.

Ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots ,$$

складений з абсолютних величин його членів.

Коли ж даний ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

збігається, тоді як ряд, складений з абсолютних величин його членів, розбігається, то розглядуваний ряд називається умовно збіжним.

Насамперед ми повинні виправдати назву „абсолютно збіжний", тобто довести, що ряд, якому ми зараз дали таку назву, насамперед є збіжним у раніше вказаному розумінні, інакше кажучи, що у такого ряду сума n перших членів прямує до певної границі, коли n необмежено зростає.

Щоб переконатись у цьому, скористаємось з теореми Коші, яку, хоч і без доведення, ми дали в § 8.

Для того щоб ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

був збіжним, необхідно і досить, щоб, яке б мале не було додатне число ε, можна було знайти таке число N, що для всіх $n \geqslant N$ і для всіх цілих p

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon.$$

Тут s_n — сума n перших членів розглядуваного ряду, а тому

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}.$$

Маємо

$$|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}|.$$

Якщо ми через σ_n позначимо суму n перших членів ряду

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots,$$

то, отже,

$$|s_{n+p}-s_n|\leqslant|\sigma_{n+p}-\sigma_n|.$$

Але останній ряд, за умовою, збігається, бо даний ряд є ряд абсолютно збіжний, а це означає, що збігається ряд $|u_1|+|u_2|+ +\ldots+|u_n|+\ldots$. Тому на підставі теореми Коші можна стверджувати, що коли ε дане, то знайдеться таке N, що $|\sigma_{n+p}-\sigma_n|<\varepsilon$ для всякого $n\geqslant N$ і для всякого цілого p. Але тоді

$$|s_{n+p}-s_n|\leqslant|\sigma_{n+p}-\sigma_n|<\varepsilon,$$

а це й доводить, що досліджуваний ряд збігається.

Таким чином, ми переконалися, що **всякий абсолютно збіжний ряд є ряд збіжний.**

Проте, обернене твердження неправильне: існують ряди, що збігаються без того, щоб збігатись абсолютно. Саме цим рядам ми й даємо назву умовно збіжних рядів. Щоб переконатись в існуванні таких рядів, ми вивчимо так звані знакопочережні ряди.

§ 14. Знакопочережні ряди.

Ряд називається знакопочережним, якщо його члени почережно то додатні, то від'ємні; таким буде ряд

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots,$$

де всі члени $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ додатні.

Відносно знакопочережних рядів можна довести таку теорему, що належить Лейбніцові.

Якщо в знакопочережному ряді

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots$$

ми маємо

$$u_1\geqslant u_2\geqslant\ldots\geqslant u_n\geqslant\ldots$$

і

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0,$$

то такий ряд збігається.

Справді, припустимо, що ці умови виконані, і розглянемо суму s_{2n} перших $2n$ членів ряду. Ми можемо її записати в двох виглядах:

$$s_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots+(u_{2n-1}-u_{2n})$$

і

$$s_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}.$$

В кожній з цих рівностей усі дужки додатні в наслідок умови $u_k \geqslant u_{k+1}$ при всякому k. З першої рівності зрозуміло, що

$$s_{2n} \geqslant 0$$

і що

$$s_{2n} = s_{2n-2} + (u_{2n-1} - u_{2n}) \geqslant s_{2n-2},$$

тобто що послідовність величин s_{2n} є зростаюча послідовність додатних чисел; з другої формули видно, що вона обмежена зверху, бо $s_{2n} \leqslant u_1$. Отже, при необмеженому зростанні n сума s_{2n} прямує до певної границі S, додатної або рівної нулеві. Але рівність

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1},$$

в якій u_{2n+1} прямує до нуля при необмеженому зростанні n, показує, що s_{2n+1} прямує до тієї ж границі S при необмеженому зростанні n. Кінець-кінцем ми можемо сказати, що s_n прямує до S при необмеженому зростанні n, отже, ряд збігається і має число S своєю сумою. Ми, крім того, переконалися, що $0 \leqslant S \leqslant u_1$. Випадок, коли $S = 0$ — тривіальний; у цьому випадку

$$u_1 = u_2, \quad u_3 = u_4, \quad \ldots, \quad u_{2n-1} = u_{2n}, \ldots .$$

Якщо ми візьмемо перші n членів ряду, то остача ряду є $(-1)^n r_n$, де

$$r_n = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots .$$

Ми бачимо, що ряд для r_n є знову знакопочережний і такий, що задовольняє всім умовам теореми. Тому ми можемо сказати, що $0 \leqslant r_n \leqslant u_{n+1}$, при чому $r_n = 0$ тоді, коли $u_{n+1} = u_{n+2}$, $u_{n+3} = u_{n+4}, \ldots$. Цей випадок через його тривіальність можна відкинути. Отже, $0 < r_n \leqslant u_{n+1}$, тому рівність

$$S = s_n + (-1)^n r_n$$

показує, що, замінивши S через s_n, ми беремо наближення з недостачею або з надвишкою, залежно від того, чи буде останній з невідкинутих членів від'ємним чи додатним абож перший з відкинутих членів буде додатним чи від'ємним.

Помилка, яку ми робимо, коли заміняємо S через s_n за абсолютною величиною менша, ніж перший з відкинутих членів і одного знака з ним. Сума S більша від будьякої суми s_n з парним індексом і менша, ніж будьяка сума s_n з непарним індексом.

Як приклад розглянемо ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots .$$

За теоремою Лейбніца він збігається, бо

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots,$$

і

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Якщо ми захочемо наближено обчислити суму цього ряду, то, взявши перші n його членів, ми дістанемо наближену величину суми з точністю до $\frac{1}{n+1}$, при чому якщо n парне, то наближення взяте з недостачею, а якщо непарне, то з надвишкою. Наприклад, ми можемо сказати, що сума S цього ряду більша $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ і менша ніж $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

Цей приклад цікавий тим, що показує нам існування умовно збіжних рядів. Справді, ми переконалися, що попередній ряд збігається; але ряд, складений з абсолютних величин його членів, є

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

Це гармонічний ряд, і ми знаємо, що він розбігається.

Розглянемо другий приклад. Хай дано ряд

$$1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots.$$

До цього ряду можна прикласти теорему Лейбніца, але довести його збіжність можна й інакше: якщо ми розглянемо ряд, складений з абсолютних величин його членів

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots,$$

то переконаємося, що цей ряд збігається; довести збіжність можна хоча б прикладанням ознаки Даламбера (ми вже розглядали цей ряд у § 10). Тому заданий ряд є абсолютно збіжний. Протилежно рядові, розглянутому в попередньому прикладі, він збігається дуже швидко, тобто треба взяти лише невелике число членів, щоб одержати добре наближення. Справді, на підставі викладеного вище про знакопочережні ряди ми можемо стверджувати, що, взявши замість суми ряду суму його n перших членів, ми робимо помилку, не більшу абсолютної величини $n+1$-го члена. Наприклад, узявши суму перших 6 членів, ми зробимо помилку меншу ніж

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=\frac{1}{5040}.$$

§ 15. Про достатні ознаки збіжності рядів.

Ми переконалися, що ряд може іноді збігатись не тому, що члени його швидко прямують до нуля, а тільки завдяки інтерференції додатних і від'ємних членів. У цьому останньому випадку, якщо тільки ряд не є знакопочережним і таким, до якого можна прикласти теорему Лейбніца, немає ніяких загальних прийомів, що дозволяють судити про його збіжність або розбіжність: доводиться для кожного ряду окремо шукати тих чи інших методів розв'язання цього питання.

Навпаки, для рядів, у яких збіжність викликана швидким прямуванням до нуля їх членів, справа стоїть дуже просто: ми переконуємося в їх збіжності завдяки тому, що збігається ряд з абсолютних величин їх членів. Наприклад, ряд

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{\sin 3\frac{\pi}{4}}{2^2}-\frac{\sin 5\frac{\pi}{4}}{2^3}-\ldots+\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{4}}{2^n}+\ldots$$

не є знакопочережним, бо в ньому два перші члени додатні, два дальші від'ємні, потім знову два додатні і т. д. Отже, теорему Лейбніца до нього не можна прикладати. Але коли ми розглянемо ряд, складений з абсолютних величин його членів, то це буде ряд

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{2^2\cdot\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{2^n\cdot\sqrt{2}}+\ldots,$$

який одержуємо з геометричної прогресії із знаменником $\frac{1}{2}$ шляхом множення всіх членів на $\frac{1}{\sqrt{2}}$; отже, останній ряд збігається, і, таким чином, заданий ряд збігається абсолютно.

Отже, в багатьох випадках питання про збіжність ряду, члени якого як додатні, так і від'ємні, можна звести до питання про збіжність ряду з самими тільки додатними членами.

Для більшої ясності ми зараз сформулюємо деякі теореми, що дозволяють судити про збіжність ряду і що є простими висновками вже відомих нам теорем про ряди з додатними членами.

Якщо члени ряду

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

за абсолютною величиною менші або рівні відповідним членам збіжного ряду

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots,$$

де всі $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ додатні, то даний ряд збігається, і до того абсолютно.

Справді, за умовою маємо

$$|u_n|\leqslant a_n \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ldots.$$

Тому ряд з додатними членами

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$$

на підставі принципу порівнювання рядів (§ 9) повинен збігатись, бо ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ за умовою збігається, а це означає, що даний ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

збігається абсолютно.

Приклад. Розглянемо ряд

$$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^2}+\ldots,$$

де x — будьяке стале число. Через те що $|\sin nx|\leqslant 1$, які б не були n і x, то

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

Але ряд

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

є, як ми знаємо, збіжний, тому даний ряд збігається абсолютно.

Так само ознаки Даламбера і Коші дозволяють нам у деяких випадках розв'язати питання про збіжність ряду, навіть коли його члени не додатні. Наприклад, ми можемо довести такі дві теореми:

Якщо для ряду

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho,$$

при чому $\rho<1$, то ряд збігається, і до того абсолютно; коли ж $\rho>1$, то ряд розбігається,
і аналогічно:

Якщо для ряду

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

маємо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho,$$

де $\rho<1$, то ряд збігається, і до того абсолютно; коли ж $\rho>1$, то ряд розбігається.

Справді, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$, де $\rho<1$, то за ознакою Даламбера ряд

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$$

збігається. Те саме буде на підставі ознаки Коші, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho, \text{ де } \rho<1.$$

Тому досліджуваний ряд в обох цих випадках є абсолютно збіжний.

Щоб довести, що ряд розбігається при $\rho>1$, не можна просто послатись на те, що в цьому випадку за ознакою Даламбера або Коші ряд, складений з абсолютних величин, є розбіжний: може бути, що ряд, який ми вивчаємо, збігається, але умовно. Проте, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho, \text{ де } \rho>1,$$

то, починаючи з деякого p, ми завжди матимемо

$$|u_{n+1}|>|u_n|, \quad n\geqslant p,$$

а це показує, що члени ряду, починаючи з якогось моменту, зростають за абсолютною величиною, і, отже, n-й член ряду не може прямувати до нуля при необмеженому зростанні n; таким чином, ряд повинен розбігатись.

Аналогічно, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho, \text{ де } \rho>1,$$

то $\sqrt[n]{|u_n|}>1$, починаючи з деякого n, а тому і $|u_n|>1$, тобто знову таки члени ряду не можуть прямувати до нуля; отже, він розбігається.

Приклад 1. Ряд

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{3}+\frac{\cos 3\frac{\pi}{4}}{3^2}+\ldots+\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}{3^n}+\ldots$$

збігається, бо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}\cdot 3^n}{\sqrt{2}\cdot 3^{n+1}}=\frac{1}{3}<1.$$

Приклад 2. Ряд

$$\frac{3}{1}-\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\right)^3-\ldots+(-1)^{n-1}\left(\frac{2n-1}{n}\right)^n+\ldots$$

розбігається, бо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n}\right)=2>1.$$

§ 16. Властивості абсолютно і умовно збіжних рядів.

Припустимо, що в якомусь ряді

$$(u) \qquad u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

частина членів додатна, а частина від'ємна.

Хай

$$(p) \qquad p_1+p_2+\ldots+p_n+\ldots$$

є ряд, складений з усіх додатних членів ряду (u), а

$$(q) \qquad q_1+q_2+\ldots+q_n+\ldots$$

є ряд, складений з абсолютних величин усіх від'ємних членів ряду (u).

Доведемо таку теорему:

Якщо ряд (u) збігається абсолютно, то обидва ряди (p) і (q), складені з його додатних членів і з абсолютних величин його від'ємних членів, збігаються; коли ж ряд (u) збігається умовно, то обидва ряди (p) і (q) розбігаються.

Справді, якщо ряд (u) збігається абсолютно, то ряд

$$(|u|) \qquad |u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$$

збігається. Коли ж з цього ряду викреслити всі члени, що є модулями додатних членів ряду (u), то ряд, що лишився, збіжиться з рядом (q). Але він повинен збігатись, бо коли в збіжному ряді, всі члени якого додатні, усунути будьякі члени, то ряд, що лишився, завжди збігатиметься. Отже, ряд (q) збігається. Але так само, якщо з ряду

$$(|u|) \qquad |u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$$

усунути всі члени, що є модулями від'ємних членів ряду (u), то дістанемо ряд (p), і так само, як у попередньому випадку, ми бачимо, що він збігається.

Припустимо тепер, що ряд (u) збігається, але умовно. Це означає, що ряд $(|u|)$ розбігається. Через те що всі члени його додатні, то розбіжність його викликана тим, що його частинні суми необмежено зростають. Хай σ_n — сума n перших членів цього ряду і s_n — сума n перших членів первісно даного ряду (u). Серед членів ряду $(|u|)$ знайдеться якась кількість, хай m, додатних, що входять у σ_n, і якась кількість, хай k, від'ємних, що також входять у σ_n. Ми маємо тоді, позначаючи через P_m і Q_k суми m і k перших членів рядів (p) і (q):

$$\sigma_n=P_m+Q_k,$$

при чому $m+k=n$.

З другого боку,

$$s_n=P_m-Q_k,$$

бо серед n перших членів ряду (u) буде m додатних і k від'ємних, при чому ці останні входять у ряд (u) вже разом із своїм знаком.

Коли n починає необмежено зростати, то m і k також необмежено зростають, інакше в ряді було б лише скінченне число додатних або лише скінченне число від'ємних членів, а тоді він не міг би збігатись без того, щоб збігатись абсолютно.

Звідси випливає, що m і k зростають разом з n. Але через те що

$$P_m = \frac{\sigma_n + s_n}{2},$$

і

$$Q_k = \frac{\sigma_n - s_n}{2},$$

при чому σ_n необмежено зростає разом з n, а s_n прямує до певної границі S, бо ряд (u) збігається, то звідси випливає, що P_m і Q_k необмежено зростають при необмеженому зростанні m і k, а тому ряди (p) і (q) розбігаються.

Таким чином, ми бачимо, що коли на абсолютно збіжний ряд можна дивитись як на різницю двох збіжних рядів з додатними членами, то для умовно збіжних рядів це вже буде неправильним.

З цією теоремою найщільніше пов'язане питання про переставляння членів ряду.

Доведемо таке важливе твердження:

Якщо ряд збігається абсолютно, то його сума не залежить від порядку його членів, або, інакше кажучи, два абсолютно збіжні ряди, що відрізняються один від одного лише порядком своїх членів, мають однакову суму.

Справді, ми тількищо довели, що абсолютно збіжний ряд можна розглядати як різницю двох рядів з додатними членами. Якщо ми почнемо переставляти яким завгодно способом члени ряду, то відбуватимуться переставляння в цих рядах. Але в § 12 ми бачили, що в ряді, всі члени якого додатні, можна змінювати порядок членів як завгодно, не змінюючи його суми. Таким чином обидва розглядувані ряди після переставляння матимуть усе ті самі суми, а отже, і даний ряд, що є їх різницею, збереже ту ж суму.

Цією теоремою можна користуватись для зручнішого обчислення суми ряду.

Наприклад, якщо дано ряд

$$(1)\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots,$$

то ми переконуємося в його абсолютній збіжності, бо

$$(2)\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots$$

є ряд, одержуваний із спадної геометричної прогресії шляхом переставляння кожного члена, що стоїть на непарному місці, на сусіднє праворуч парне, і навпаки. Але в рядах з додатними членами переставляти члени можна, і збіжність при цьому не порушиться. Таким чином, ряд (2) збігається, а тому ряд (1) збігається абсолютно. Це дозволяє нам переставити його члени як завгодно, зокрема перетворити його в ряд

$$(3)\qquad -\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\ldots+(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots,$$

а цей ряд є геометрична прогресія із знаменником $-\frac{1}{2}$ і першим членом $-\frac{1}{2}$. Отже, сума ряду (3), а отже, і ряду (1) є

$$\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3}.$$

Звернемо увагу на те, що при доведенні теореми ми користались абсолютною збіжністю даного ряду. Покажемо, що теорема вже не буде правильна, якщо ряд збігається тільки умовно. Інакше кажучи, переконаємося, що в умовно збіжному ряді від переставляння членів сума може змінитись.

Це можна бачити з такого прикладу.

Розглянемо ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots.$$

Ми вже бачили (§ 14), що він збігається, але збігається умовно. Позначимо через S його суму.

Зробимо тепер у цьому ряді таке переставляння членів: за кожним додатним членом поставимо дальші два від'ємні; ми дістанемо ряд

$$(1)\qquad 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots,$$

або, інакше,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\ldots.$$

Виконуючи віднімання в кожній дужці, знайдемо

$$(2)\qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots.$$

Якщо тут винести $\frac{1}{2}$ за дужки, то в дужках дістанемо первісний ряд (1), а тому сума нового ряду (2) дорівнює $\frac{1}{2}S$. Таким чином завдяки переставлянню членів ми зменшили суму ряду вдвоє.

Не слід вважати, що такий на перший погляд надзвичайно парадоксальний результат ми одержали завдяки тому, що ми спеціально взяли „невдалий" ряд. Ріман довів, що властивість змінювати свою суму від переставляння членів має будьякий умовно збіжний ряд. Більше того, переставляючи відповідним способом члени умовно збіжного ряду, можна одержати будьяку суму. Теорема Рімана формулюється так:

Якщо ряд збігається умовно, то можна так переставити його члени, щоб заново одержаний ряд мав будьяку наперед задану суму; можна також добитись того, щоб новий ряд був розбіжним.

Щоб довести це, розглянемо умовно збіжний ряд

$$(u) \qquad u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots .$$

Хай

$$(p) \qquad p_1+p_2+\ldots+p_n+\ldots$$

є ряд, складений з додатних членів ряду (u), і

$$(q) \qquad q_1+q_2+\ldots+q_n+\ldots$$

є ряд, складений з абсолютних величин від'ємних членів ряду (u).

Ми вже бачили, що для ряду, який збігається умовно, обидва ряди (p) і (q) розбігаються.

Хай M — будьяке число; доведемо, що, взявши належним чином порядок членів у ряді (u), ми можемо добитись того, щоб його сума дорівнювала M.

Для певності припустимо, що M — додатне число. Візьмемо в ряді (p) стільки перших членів, скільки потрібно для того, щоб їх сума була більша числа M. Це завжди можливо, бо ряд (p) розбігається, а тому його частинні суми необмежено зростають разом із зростанням числа їх членів. Ми будемо стежити за тим, щоб членів було взято точно стільки, скільки потрібно, щоб перевищити M, але не більше. Інакше кажучи, ми візьмемо перші k членів у ряді (p), при чому

$$p_1+p_2+\ldots+p_k>M,$$

але коли б ми взяли тільки $k-1$ членів, то мали б ще

$$p_1+p_2+\ldots+p_{k-1}\leqslant M.$$

Візьмемо тепер у ряді

$$(-q) \qquad -q_1-q_2-\ldots-q_n-\ldots$$

стільки перших членів, хай m, скільки потрібно для того, щоб, додавши їх до суми $p_1+p_2+\ldots+p_k$, ми одержали

$$p_1+p_2+\ldots+p_k-q_1-q_2-\ldots-q_m<M.$$

Це завжди можливо, бо частинні суми ряду $(-q)$ необмежено зростають за абсолютною величиною. При цьому ми подбаємо про те, щоб узяти число m мінімальним, тобто щоб при меншому числі членів ряду $(-q)$ попередня нерівність ще не була виконана, інакше кажучи, щоб

$$p_1+p_2+\ldots+p_k-q_1-q_2-\ldots-q_{m-1}\geqslant M.$$

Після цього знову візьмемо в ряді (p) (з якого вже усунуті перші k членів) стільки членів, скільки потрібно, щоб, додавши їх до суми $p_1+p_2+\ldots+p_k-q_1-q_2-\ldots-q_m$, ми одержали число, більше від M, при чому подбаємо, як і в перший раз, щоб для цього було взято не більше членів, ніж потрібно для виконання цієї нерівності. Припустимо, що цих членів l, тоді

$$p_1+p_2+\dots+p_k-q_1-q_2-\dots-q_m+p_{k+1}+p_{k+2}+\dots+p_{k+l}>M,$$

але

$$p_1+p_2+\dots+p_k-q_1-q_2-\dots-q_m+p_{k+1}+p_{k+2}+\dots+p_{k+l-1}\leqslant M.$$

Тепер знову братимемо з ряду $(-q)$ стільки членів, скільки потрібно, щоб додавання їх до суми $p_1+p_2+\dots+p_k-q_1-q_2-\dots-q_m+p_{k+1}+p_{k+2}+$ $+\dots+p_{k+l}$ змусило цю суму стати $<M$, і т. д.

Ми по черзі братимемо члени з ряду (p) і з ряду $(-q)$, стежачи кожного разу, щоб: 1) не вживати членів, які вже були взяті, 2) брати точно стільки членів, скільки потрібно, щоб одержати шукану нерівність, але не більше.

Процес побудови встановлений. Доведемо, що побудований ряд збігається і має своєю сумою задане число M. Справді, якщо ми візьмемо суму n перших членів побудованого нами ряду, хай σ_n, і віднімемо з неї M, то різниця σ_n-M нескінченно багато разів змінює знак; у тих випадках, коли вона додатна, вона менша, ніж останній додатний член, що міститься в сумі σ_n, бо, коли б цього не було, це показувало б, що ми взяли підряд надто багато додатних членів; коли ж різниця σ_n-M від'ємна, то її абсолютна величина менша, ніж абсолютна величина останнього від'ємного числа, що міститься в σ_n. Але через те що члени рядів (p) і $(-q)$ прямують до нуля в міру зростання їх індекса, бо вони є членами ряду (u), збіжного за умовою, то звідси випливає, що із зростанням n абсолютна величина σ_n-M прямуватиме до нуля, а це показує, що ряд збігається і має число M своєю сумою.

Так само можна було б змусити ряд розбігатись. Для цього досить узяти в ряді (p) стільки членів, скільки потрібно, щоб їх сума була більша 1, потім узяти один член з ряду $(-q)$, потім у ряді (p) стільки членів, щоб, додавши їх до вже одержаної суми, одержати результат, більший 2, потім узяти один член з ряду $(-q)$ і т. д. В ряді (p) треба брати стільки членів, скільки необхідно, щоб перевищити n, де n послідовно пробігатиме всі цілі значення. Зрозуміло, що одержаний ряд буде розбіжним, бо можна знайти такі значення $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$, для яких $s_{n_1}, s_{n_2}, \dots, s_{n_k}, \dots$ необмежено зростають, а тому не прямують ні до якої скінченної границі.

Для кращого розуміння методу, яким доведена теорема Рімана, розглянемо конкретний приклад. Припустимо, що потрібно в ряді

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\dots$$

так переставити члени, щоб сума його дорівнювала числу $\frac{5}{4}$.

Покажемо кілька початкових кроків того процесу, з допомогою якого ми доб'ємось мети. Для цього розглянемо два ряди:

(1) $$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n-1}+\dots$$

і

(2) $$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\dots-\frac{1}{2n}-\dots,$$

складені з самих додатних і самих від'ємних членів даного ряду.

В ряді (1) треба взяти два перші члени, бо коли б узяли тільки один член, то одержали б 1, що менше $\frac{5}{4}$, але сума двох перших членів є $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}>\frac{5}{4}$. Не треба брати більшого числа членів, бо двох уже досить для того, щоб одержати суму, більшу $\frac{5}{4}$. Таким чином два перші члени ряду, який ми будуємо дадуть

$$1+\frac{1}{3}.$$

Візьмемо тепер у ряді (2) спочатку один член, тоді

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}<\frac{5}{4}.$$

Отже, одного члена досить, щоб сума була вже менша $\frac{5}{4}$. Візьмемо знову з ряду (1) члени, починаючи з $\frac{1}{5}$. Через те що додавання тільки $\frac{1}{5}$ ще не дає числа, більшого $\frac{5}{4}$, бо $\frac{5}{6}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}$, то додамо ще $\frac{1}{7}$, тоді дістанемо

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{247}{210};$$

але й це все ще $<\frac{5}{4}$; додамо ще $\frac{1}{9}$; через те що

$$\frac{247}{210}+\frac{1}{9}=\frac{811}{630}>\frac{5}{4},$$

то більше додатних членів брати не будемо.

Тепер знову почнемо додавати від'ємні члени. Досить додати тільки член $-\frac{1}{4}$, бо тоді вже маємо

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}<\frac{5}{4}.$$

Принцип обчислень зрозумілий.

§ 17. Арифметичні операції над рядами.

В § 6 ми бачили, що коли два ряди

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

і

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{2}$$

збігаються, то збігаються і ряди

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots+(u_n+v_n)+\ldots \tag{3}$$

і

$$(u_1-v_1)+(u_2-v_2)+\ldots+(u_n-v_n)+\ldots, \tag{4}$$

при чому сума ряду (3) є $U+V$, сума ряду (4) є $U-V$, де U і V — суми рядів (1) і (2).

Тепер, коли введено поняття абсолютної збіжності, цю теорему можна доповнити так:

Якщо ряди (1) і (2) збігаються абсолютно, то і ряди (3) і (4) збігаються абсолютно.

Справді, ми маємо

$$|u_n+v_n|\leqslant|u_n|+|v_n| \quad n=1, 2,\ldots$$

і також

$$|u_n-v_n|\leqslant|u_n|+|v_n| \quad n=1, 2,\ldots.$$

Але через те що ряди (1) і (2) за умовою абсолютно збігаються, то ряд

$$|u_1|+|v_1|+\ldots+|u_n|+|v_n|+\ldots$$

є збіжний, звідки й випливає абсолютна збіжність рядів (3) і (4).

Тепер вивчимо для абсолютно збіжних рядів нову операцію — операцію множення.

При множенні двох многочленів треба кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого многочлена і результати додати. За аналогією з цим можна перемножити ряди. „Добутком" двох рядів природно назвати такий ряд, який одержимо, коли кожний член одного ряду помножити на кожний член другого ряду і з одержаних добутків скласти ряд. Але, для того щоб не виконувати цих дій безсистемно, що призвело б до неможливості встановити закон складання членів нового ряду, ми зробимо так.

Хай

$$(u) \qquad u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

і

$$(v) \qquad v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots$$

два дані ряди.

Покладемо:

$$w_1=u_1v_1, \quad w_2=u_1v_2+u_2v_1, \quad w_3=u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1$$

і взагалі

$$w_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+u_3v_{n-2}+\ldots+u_nv_1$$

і розглянемо ряд

$$(w) \qquad w_1+w_2+\ldots+w_n+\ldots.$$

Ряд w назвемо добутком рядів (u) і (v).

Для абсолютно збіжних рядів маємо теорему:

Якщо ряди (u) і (v) збігаються абсолютно, то їх добуток є абсолютно збіжний ряд, при чому сума W цього ряду дорівнює добуткові UV сум U і V рядів (u) і (v).

Для доведення позначимо через U_n, V_n і W_n відповідно суми n перших членів рядів (u), (v) і (w).

Зауважимо, що W_n містить добуток будьяких двох членів рядів (u) і (v), у яких сума індексів дорівнює $n+1$. Тому сума W_n перших n членів ряду (w) містить добуток будьяких двох членів рядів (u) і (v), у яких сума індексів менша або дорівнює $n+1$. Але коли б ми розглянули добуток U_nV_n, то знайшли б, що він містить як усі ці члени, так і ще інші, у яких сума індексів більша $n+1$ (але не більша $2n$). Але, з другого боку, якщо ціле число p дано, то можна взяти настільки велике n, що всі добутки, які входять в U_pV_p, фігуруватимуть також у W_n; для цього досить узяти $n+1>2p$.

Встановивши це, припустимо спочатку, що всі U_n і V_n додатні, тоді будуть додатними і всі W_n; в наслідок попередніх зауважень матимемо

$$W_n < U_n V_n.$$

Але через те що U_n прямує до U, зростаючи, і V_n прямує до V, зростаючи, то $U_n V_n < UV$, а тому

$$W_n < UV.$$

Звідси випливає, що частинні суми ряду (w) обмежені, а тому ряд (w) збігається, і його сума $W \leqslant UV$. Лишається довести, що вона не може бути $< UV$.

Для цього зауважимо, що через те що $U_n V_n$ прямує до UV, то можна взяти таке велике p, що

$$U_p V_p > UV - \varepsilon,$$

де ε — як завгодно мале додатне число. Але ми знаємо, що при $n+1 > 2p$ ми маємо

$$W_n > U_p V_p > UV - \varepsilon,$$

тому

$$W_n > UV - \varepsilon,$$

а через те що ε як завгодно мале, то звідси випливає, що границя W_n не може бути $< UV$. Таким чином,

$$W = UV.$$

Отже, для випадку, коли члени рядів (u) і (v) додатні, теорема доведена.

Припустимо тепер, що члени рядів (u) і (v) мають довільні знаки. Але через те що ряди (u) і (v) за умовою збігаються абсолютно, то ряди

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$
$$|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n| + \ldots$$

є збіжними рядами з додатними членами; хай U' і V' — їх суми і U'_n, V'_n — суми n перших членів цих рядів.

Якщо ми складемо ряд

$$(w') \qquad w'_1 + w'_2 + \ldots + w'_n + \ldots$$

де

$$w'_n = |u_1||v_n| + |u_2||v_{n-1}| + \ldots + |u_n||v_1|,$$

то в наслідок тількищо доведеної теореми цей ряд збігається, і сума його $W' = U'V'$. Позначимо через W'_n суму перших n членів цього ряду.

Але зрозуміло, що

$$|W_n| \leqslant W'_n,$$

бо абсолютна величина суми менша або дорівнює сумі абсолютних величин доданків, тому із збіжності ряду (w') випливає, що ряд (w) збігається абсолютно. Лишається довести, що його сума дорівнює добуткові UV.

Розглянемо вираз $U_n V_n - W_n$. У нього входять усі ті члени добутку $U_n V_n$, які не зустрічаються в W_n, тобто члени вигляду $U_k V_i$, де $k+i > n+1$, але $k+i \leqslant 2n$. Зрозуміло тому, що вираз $U'_n V'_n - W'_n$ одержується з $U_n V_n - W_n$, якщо всі числа u_1, $u_2, \ldots, v_1, v_2, \ldots$ замінити їх абсолютними величинами. Тому

$$|U_n V_n - W_n| \leqslant U'_n V'_n - W'_n,$$

бо і в цьому випадку можна застосувати теорему: абсолютна величина суми менша суми абсолютних величин доданків. Але коли n необмежено зростає, то U'_n і V'_n прямують до U' і V', а W'_n прямує до W'; ми ж знаємо, що $W = UV$, тому $U'_n V'_n - W'_n$ прямує до нуля. Звідси випливає, що

$$|UV - W| \leqslant 0,$$

але через те що модуль усякого числа або додатний, або дорівнює нулеві, то звідси випливає, що

$$UV = W,$$

що і треба було довести.

Розглянемо приклад. Хай потрібно перемножити ряди

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$
$$1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} x^n + \ldots,$$

де x — якесь стале число, таке, що $|x| < 1$.

Через те що кожний з розглядуваних рядів є геометрична прогресія, то з $|x| < 1$ випливає їх абсолютна збіжність. Складемо за вказаним вище правилом члени ряду, що є добутком цих двох рядів:

$$w_1 = 1 \cdot 1 = 1,$$
$$w_2 = 1 \cdot (-x) + x \cdot 1 = -x + x = 0,$$
$$w_3 = 1 \cdot x^2 + x \cdot (-x) + x^2 \cdot 1 = x^2 - x^2 + x^2 = x^2,$$
$$w_4 = 1 \cdot (-x^3) + x \cdot x^2 + x^2(-x) + x^3 \cdot 1 = -x^3 + x^3 - x^3 + x^3 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_{2n-1} = 1 \cdot x^{2n-2} + x(-x^{2n-3}) + x^2(x^{2n-4}) + \ldots + x^{2n-2} \cdot 1 = x^{2n-2};$$

через те що членів $2n-1$, тобто непарне число, кожний з них дорівнює або x^{2n-2}, або $-x^{2n-2}$, і до того знаки чергуються, тому всі члени попарно скорочуються, крім одного, а це й дає $w_{2n-1} = x^{2n-2}$.

$$w_{2n} = 1 \cdot (-x^{2n-1}) + x \cdot x^{2n-2} + x^2(-x^{2n-3}) + \ldots + x^{2n-1} \cdot 1 = 0;$$

через те що членів $2n$, тобто парне число, кожний з них дорівнює або $-x^{2n-1}$, або x^{2n-1}, і знаки чергуються. Тому добуток наших рядів є ряд

$$1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}+\ldots.$$

З загальної теорії ми знаємо, що цей ряд повинен збігатись абсолютно при $|x|<1$ і що його сума повинна дорівнювати добуткові сум заданих рядів. На даному прикладі це легко перевірити. Справді, перший ряд є геометрична прогресія із знаменником x і першим членом 1, тому його сума дорівнює $\frac{1}{1-x}$. Другий ряд є геометрична прогресія з першим членом 1 і знаменником $-x$, тому його сума дорівнює $\frac{1}{1+x}$. Отже, добуток повинен мати суму

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-x^2}.$$

Але добуток цей самий є геометрична прогресія з першим членом 1 і знаменником x^2. Через те що $|x|<1$, то $|x^2|<1$, звідки видно, що цей ряд справді абсолютно збігається, і за формулою для суми геометричної прогресії видно, що його сума дійсно дорівнює

$$\frac{1}{1-x^2}.$$

Покажемо тепер на прикладі, що теорема про множення рядів уже не може бути прикладена до *умовно* збіжних рядів. Для цього покажемо, що добуток двох умовно збіжних рядів може розбігатись.

Візьмемо ряд

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

і піднесемо його до квадрата, тобто помножимо його само на себе; дістанемо

$$w_n=1\cdot\left[(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left[(-1)^{n-2}\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right]+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left[(-1)^{n-3}\frac{1}{\sqrt{n-2}}\right]+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot 1,$$

тому

$$|w_n|=1\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot 1.$$

Неважко довести, що цей вираз не прямує до нуля, коли n необмежено зростає. Справді, в цій сумі n доданків, при чому кожний з них має вигляд $\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}}$, де k пробігає значення від 1 до n. Вираз $x(n-x+1)$ досягає свого максимуму при $x=\frac{n+1}{2}$, звідки зрозуміло, що при n непарному найменшим з доданків буде член

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-\frac{n+1}{2}+1}}=\frac{2}{n+1},$$

а при n парному таких доданків буде 2, а саме:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-\frac{n}{2}+1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-\left(\frac{n}{2}+1\right)+1}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n(n+2)}}>\frac{2}{n+2}.$$

Звідси випливає, що при будьякому n маємо

$$|w_n|>n\cdot\frac{2}{n+2},$$

отже, w_n не прямує до нуля при необмеженому зростанні n, таким чином, ряд розбігається.

Лишається розглянути ще одну операцію, а саме *ділення* рядів. Поділити ряд

(*w*) $$w_1+w_2+\ldots+w_n+\ldots$$

на ряд

(*u*) $$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

означає знайти такий ряд

(*v*) $$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots,$$

щоб добуток рядів (*u*) і (*v*) становив ряд (*w*).

Але коли ряд (*w*) є таким добутком, то

$$w_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_nv_1.$$

Звідси випливає, що коли можна буде знайти такі числа $v_1, v_2, \ldots, v_n \ldots$, що

$$\begin{aligned}&u_1v_1=w_1,\\&u_1v_2+u_2v_1=w_2,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_nv_1=w_n,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

де числа $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$ і $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ відомі, то ряд (*v*) можна розглядати як частку від ділення ряду (*w*) на ряд (*u*). При цьому, якщо ряди (*w*) і (*u*) були абсолютно збіжними і якщо знайдений ряд (*v*) буде теж абсолютно збіжним, то можна стверджувати, що його сума є частка від ділення суми ряду (w) на суму ряду (u). Це — безпосередній висновок раніше доведеної теореми про множення рядів.

Покажемо на прикладі, як знаходиться частка від ділення двох рядів. Для цього будемо поділяти ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

на ряд

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}+\ldots.$$

Обидва ряди абсолютно збіжні. Щоб знайти члени $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ ряду, одержуваного в результаті ділення, ми пишемо:

$$\frac{1}{2}v_1=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}v_2-\frac{1}{2^2}v_1=\frac{1}{2^2},$$

$$\frac{1}{2}v_3-\frac{1}{2^2}v_2+\frac{1}{2^3}v_1=\frac{1}{2^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2}v_n-\frac{1}{2^2}v_{n-1}+\frac{1}{2^3}v_{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}v_1=\frac{1}{2^n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Перша з цих рівностей дає

$$v_1=1.$$

Підставляючи цей результат у другу рівність, знайдемо

$$v_2=1.$$

Підставляючи v_1 і v_2 в третю рівність, знайдемо

$$v_3=\frac{1}{2}.$$

Четверта рівність

$$\frac{1}{2}v_4-\frac{1}{2^2}v_3+\frac{1}{2^3}v_2-\frac{1}{2^4}v_1=\frac{1}{2^4}$$

дає

$$v_4=\frac{1}{2^2}.$$

Намічається такий закон складання членів ряду:

$$v_n=\frac{1}{2^{n-2}}\quad \text{для } n=2, 3, 4, \ldots.$$

Перевіримо, чи правильний вказаний закон; ми переконалися, що він правильний для $n=2, 3, 4$; припустивши, що він правильний для будьякого цілого n, не більшого $m-1$, покажемо, що він правильний і для $n=m$.

Але

$$\frac{1}{2}v_m-\frac{1}{2^2}v_{m-1}+\frac{1}{2^3}v_{m-2}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{1}{2^m}v_1=\frac{1}{2^m}$$

і якщо

$$v_n=\frac{1}{2^{n-1}}\quad \text{для } n=2, 3, \ldots, m-1,$$

то

$$\frac{1}{2}v_m-\frac{1}{2^2}\,\frac{1}{2^{m-3}}+\frac{1}{2^3}\,\frac{1}{2^{m-4}}-\ldots+(-1)^{m-2}\frac{1}{2^{m-1}}+(-1)^{m-1}\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^m},$$

або

$$\frac{1}{2}v_m=\frac{1}{2^{m-1}}-\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{1}{2^{m-1}}+(-1)^m\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}.$$

Коли m парне, то доданки, крім двох останніх, попарно знищуються, два останні дають $\frac{2}{2^m}=\frac{1}{2^{m-1}}$, а тому

$$\frac{1}{2}v_m=\frac{1}{2^{m-1}},\quad v_m=\frac{1}{2^{m-2}}.$$

Коли ж m непарне, то доданки, крім першого, попарно знищуються, тому

$$\frac{1}{2}v_m=\frac{1}{2^{m-1}},\quad v_m=\frac{1}{2^{m-2}}.$$

Таким чином, помічений нами закон правильний. Ряд, одержаний від ділення, має вигляд

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots.$$

Він збігається абсолютно, і його сума дорівнює 1 плюс сума прогресії

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,$$

звідки випливає, що його сума дорівнює 3.

Але ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

мав суму 1, а ряд

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\,\frac{1}{2^n}+\ldots$$

мав суму $\frac{1}{3}$, а тому частка від їх ділення, згідно з загальною теорією, повинна мати суму, рівну 3, у чому ми й переконались безпосередньо.

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ.

§ 18. Загальне поняття про функціональний ряд і його збіжність.

Досі ми розглядали тільки ряди, членами яких були сталі числа. Але в переважній більшості питань Аналізу доводиться мати справу з такими рядами, члени яких є функції деякої змінної величини x.

Розглянемо послідовність функцій

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots,$$

кожна з яких означена на деякому відрізку (a, b). Ми назвемо *функціональним рядом* вираз

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots.$$

Так само, як і для числових рядів, тут насамперед повстає питання, якої суті надавати цьому „додаванню" нескінченної кількості доданків. Для числових рядів ми робили так: брали суму n перших членів ряду і досліджували, чи прямує вона до певної границі, коли n необмежено зростає; якщо так, то ми називали ряд збіжним і границю суми ряду називали сумою ряду. Коротше кажучи, операцію нескінченного додавання ми розуміли так: додається скінченне число доданків і береться границя (якщо вона існує) цієї суми, припускаючи число доданків необмежено зростаючим.

Для рядів функціональних ми робитимемо аналогічно. Розглянемо суму n перших членів ряду; через те що кожний член є функція x, то і сума їх — функція x; позначимо її через $s_n(x)$, тобто покладемо

$$s_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x).$$

Розглянемо тепер деяке певне значення x на відрізку (a, b). Хай $x=x_0$. Припустимо, що $s_n(x_0)$ прямує до певної границі $S(x_0)$, коли n необмежено зростає. Це означає, що числовий ряд

$$f_1(x_0)+f_2(x_0)+\ldots+f_n(x_0)+\ldots$$

збігається і має число $S(x_0)$ своєю сумою. Ми умовимось говорити, що даний *функціональний ряд збігається для значення* $x=x_0$ *або в точці* x_0 *і його сума дорівнює* $S(x_0)$.

Якщо функціональний ряд збігається для всіх значень x на відрізку (a, b), то це означає, що для всякого x на відрізку (a, b) вираз $s_n(x)$ прямує до певної границі; через те що ця границя залежить від x, ми її позначаємо через $S(x)$. Умовимось говорити, що *ряд збігається на відрізку* (a, b) *до функції* $S(x)$.

Наприклад, якщо ми розглянемо ряд

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

і припускатимемо, що x пробігає деякий відрізок $(-r, +r)$, де $r<1$, то для кожного значення x на цьому відрізку ряд, будучи спадною геометричною прогресією, збігається; його сума для заданого x є $\frac{1}{1-x}$. Змушуючи x змінюватись від $-r$ до $+r$, можемо сказати, що наш функціональний ряд збігається на відрізку $(-r, +r)$ до функції $\frac{1}{1-x}$, і можемо писати

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots.$$

Якщо взагалі ряд $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$ збігається до деякої функції $F(x)$ на якомусь відрізку (a, b), то говорять, що функція $F(x)$ *розкладена в ряд*

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots,$$

і пишуть

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots.$$

Проблема розкладу функцій у ряди є одна з важливіших проблем Аналізу. Не уточняючи покищо питання, вкажемо тільки на те, що коли $F(x)$ є сума якогось ряду на відрізку (a, b), то для всякого значення x на (a, b) можна обчислити величину $F(x)$ як завгодно точно, взявши досить велике число членів ряду. Тому ряди служать для наближеного обчислення величин функцій, значення яких ми в деяких випадках і не можемо знайти ніяким іншим способом. Потім ми покажемо, що саме теорія рядів дозволила скласти таблиці логарифмів, а також натуральних величин тригонометричних функцій. Зараз ми будемо вивчати деякі загальні властивості функціональних рядів, а потім перейдемо до рядів спеціального виду і вже тоді поставимо питання про те, як знайти розклад даної функції в ряд, зручний для наближеного обчислення її значень.

§ 19. Неперервність суми ряду.

Одним з питань, з яким весь час доводиться стикатись в Аналізі, є таке: припустимо, що члени ряду є неперервними функціями і ряд збігається для всіх значень x на відрізку (a, b); в яких випадках можна стверджувати, що сума ряду буде також неперервною функцією?

Ми знаємо, що сума *скінченного* числа неперервних функцій є функція неперервна, але ми не маємо ніяких підстав поширити цю теорему на ряди: вже при вивченні числових рядів ми переконалися, що з рядом не можна поводитись як із скінченною сумою. Покажемо на прикладі, що **ряд, членами якого є неперервні функції, може збігатись до функції розривної.**

Розглянемо ряд

$$x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\ldots+(x^n-x^{n-1})+\ldots,$$

при чому припустимо, що ми розглядаємо його збіжність на відрізку (0, 1).

Складемо суму n перших членів ряду; маємо

$$s_n(x)=x+(x^2-x)+\ldots+(x^n-x^{n-1}),$$

або, розкриваючи дужки,

$$s_n(x)=x^n.$$

Якщо $x\neq 1$, то $0\leqslant x<1$, а тому $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=0$. Коли ж $x=1$, то $s_n(1)=1$, а тому $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(1)=1$.

Отже, якщо суму ряду, в збіжності якого на (0, 1) ми переконались, позначимо через $S(x)$, то маємо

$$\begin{aligned} S(x)&=0 \qquad 0\leqslant x<1\\ S(x)&=1 \qquad x=1. \end{aligned}$$

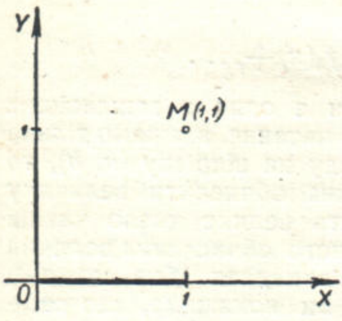

Рис. 6.

Функцію $S(x)$ можна представити геометрично як кусок осі абсцис між 0 і 1 і одну „відірвану" точку $M(1, 1)$ (рис. 6). Це яскраво показує, що $S(x)$ є розривна функція, хоч усі члени ряду були неперервні.

Зауважимо, що члени досліджуваного ряду є дуже прості неперервні функції, тому річ, очевидно, не в тому, що „складний вигляд" доданків привів до розривності суми.

Ми не даватимемо необхідної і достатньої умови для того, щоб сума ряду неперервних функцій була неперервною, бо ця умова порівняно складна, але ми вкажемо тут один випадок, надзвичайно простий і такий, що весь час зустрічається на практиці, коли можна стверджувати неперервність суми. Для цього введемо поняття про *мажорований ряд.*

Функціональний ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$$

ми назвемо мажорованим на відрізку (a, b), *якщо існує такий числовий ряд*

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\ldots$$

з додатними членами і збіжний, що для всіх значень x на (a, b) маємо

$$|f_n(x)| \leqslant \alpha_n \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Інакше кажучи, якщо кожний член функціонального ряду за абсолютною величиною не перевищує відповідного члена збіжного ряду з додатними членами, ми назвемо функціональний ряд мажорованим.

Насамперед зрозуміло, що **ряд, мажорований на відрізку (a, b), збігається абсолютно в кожній точці цього відрізка,** бо для будьякого x_0 на цьому відрізку числовий ряд

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \ldots + f_n(x_0) + \ldots$$

має члени, за абсолютною величиною не більші членів ряду $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$, а тоді цей ряд збігається абсолютно (§ 15).

Доведемо тепер таке важливе твердження:

Якщо члени ряду

$$(f) \qquad f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

неперервні на (a, b) і ряд на цьому відрізку мажорований, то його сума також неперервна на (a, b).

Насамперед ми маємо право говорити про суму, бо тільки-що бачили, що мажорований ряд повинен неодмінно збігатись (і навіть абсолютно) в кожній точці (a, b).

Позначимо через $F(x)$ суму нашого ряду; щоб переконатись у її неперервності в точці x_0 на відрізку (a, b), треба довести, що, яке б не було число ε, можна знайти таке δ, що

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| < \varepsilon,$$

якщо тільки $|h| < \delta$ і, зрозуміло, якщо $x_0 + h$ так само, як і x_0, належить до (a, b).

Позначимо через $s_n(x)$ суму n перших членів ряду (f) і через $R_n(x)$ залишковий член цього ряду, тобто суму ряду

$$f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots ,$$

який, як ми знаємо, збігається абсолютно, коли x належить відрізкові (a, b).

Ми маємо для всякого x на відрізку (a, b) і для всякого n

$$F(x) = s_n(x) + R_n(x).$$

Позначимо тепер через r_n залишковий член збіжного ряду

$$(\alpha) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots ,$$

тобто покладемо

$$r_n = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots .$$

Через те що, за умовою, кожний член ряду (f) за абсолютною величиною не більший відповідного члена ряду (α), то

$$|R_n(x)| \leqslant r_n \quad \begin{matrix} a \leqslant x \leqslant b \\ n = 1, 2, 3, \ldots . \end{matrix}$$

Припускаючи тільки, що x_0 і $x_0 + h$ належать до (a, b), маємо

$$\begin{gathered} |F(x_0+h) - F(x_0)| = \\ = |[s_n(x_0+h) + R_n(x_0+h)] - [s_n(x_0) + R_n(x_0)]| = \\ = |s_n(x_0+h) - s_n(x_0) + \\ + R_n(x_0+h) - R_n(x_0)| \leqslant |s_n(x_0+h) - s_n(x_0)| + \\ + |R_n(x_0+h) - R_n(x_0)| \leqslant |s_n(x_0+h) - s_n(x_0)| + \\ + |R_n(x_0+h)| + |R_n(x_0)| \leqslant \\ \leqslant |s_n(x_0+h) - s_n(x_0)| + 2r_n. \end{gathered}$$

Але через те що ряд (α) збігається, то можна взяти n настільки великим, щоб мати $r_n < \frac{\varepsilon}{3}$. Взявши таким способом n, фіксуємо його і більше вже не змінюватимемо. В такому випадку $s_n(x)$, будучи сумою n неперервних функцій (n — стале), сама буде неперервною функцією. Отже, можна знайти таке δ, що як тільки h стане за абсолютною величиною менше δ, $|h| < \delta$, і якщо при цьому $x_0 + h$ належить до (a, b), то

$$|s_n(x_0+h) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Але через те що

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| \leqslant |s_n(x_0+h) - s_n(x_0)| + 2r_n,$$

то

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отже, кожного разу як $|h| < \delta$ і $x_0 + h$, як і x_0, належать до (a, b), ми маємо

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| \leqslant \varepsilon,$$

а це й доводить неперервність $F(x)$ у точці x_0.

Наприклад, ряд

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$$

є мажорований на всій осі абсцис, бо при всякому x

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2},$$

а ряд

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

є, як ми знаємо, збіжний (§ 11).

Тому можемо сказати, що сума заданого ряду буде неперервною функцією на всякому відрізку, бо на будьякому відрізку члени його неперервні і ряд мажорований.

§ 20. Інтегрування рядів.

Ми знаємо, що інтеграл суми скінченного числа доданків дорівнює сумі інтегралів від цих доданків. Проте, ми не маємо ніяких підстав стверджувати, що це правило може бути поширене на безліч доданків, інакше кажучи, на нескінченні ряди. Неважко переконатись на прикладі, що ряд може збігатись у кожній точці, мати неперервну суму і, проте, бути таким, що інтеграл від цієї суми зовсім не дорівнює сумі інтегралів, узятих від окремих членів ряду. Іншими словами, якщо, як кажуть, „формально" проінтегрувати почленно заданий ряд, тобто обчислити інтеграли від його окремих членів, можна одержати ряд, який має суму, відмінну від інтеграла суми первісного ряду. Отже, формальне інтегрування не завжди є інтегруванням по суті справи. Переконаємось у цьому на прикладі.

Для цього розглянемо ряд

$$xe^{-x}+x\,[2^2e^{-2x}-1^2e^{-x}]+x\,[3^2e^{-3x}-2^2e^{-2x}]+\ldots+$$
$$+x\,[n^2e^{-nx}-(n-1)^2e^{-(n-1)x}]+\ldots.$$

Зауважимо, що сума n перших членів цього ряду, яку ми позначимо через $s_n(x)$, дорівнює

$$s_n(x)=xn^2e^{-nx},$$

бо, взявши в цьому ряді n перших членів і розкривши дужки, бачимо, що всі доданки попарно знищуються, крім xn^2e^{-nx}.

Якщо $x=0$, то $s_n(x)=0$, а тому при необмежено зростаючому n маємо

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=0.$$

Якщо $x\neq 0$, то

$$s_n(x)=\frac{xn^2}{e^{nx}},$$

а тому за правилом Лопіталя знаходимо

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{xn^2}{e^{nx}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2nx}{e^{nx}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{e^{nx}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{e^{nx}x}=0.$$

Отже, при всякому x

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=0.$$

Таким чином, розглядуваний ряд збігається при всіх значеннях x і його сума

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)=0.$$

Звідси випливає, що інтеграл від $S(x)$ у всяких межах (a, b) повинен дорівнювати нулеві, зокрема, наприклад,

$$\int_0^1 S(x)\,dx = 0.$$

Переконаємось тепер, що коли б ми формально проінтегрували почленно наш ряд у тих же межах, то вже не одержали б нуля. Справді, розглянемо ряд, складений з інтегралів від членів первісного ряду. Маємо

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx + \int_0^1 x\,[2^2e^{-2x} - 1^2e^{-x}]\,dx + \ldots +$$
$$+ \int_0^1 x\,[n^2e^{-nx} - (n-1)^2\,e^{-(n-1)x}]\,dx + \ldots.$$

Якщо розглянемо суму σ_n перших n членів цього ряду, то, позначаючи, як і раніше, через $s_n(x)$ суму n перших членів первісного ряду, знайдемо

$$\sigma_n = \int_0^1 s_n(x)\,dx = \int_0^1 xn^2e^{-nx}\,dx.$$

Але в такому випадку

$$\sigma_n = n^2\int_0^1 xe^{-nx}\,dx,$$

або, інтегруючи частинами,

$$\sigma_n = n^2\,\frac{xe^{-nx}}{-n}\Big|_0^1 + n\int_0^1 e^{-nx}\,dx =$$

$$= -ne^{-n} + n\,\frac{e^{-nx}}{-n}\Big|_0^1 = -ne^{-n} - e^{-n} + 1 = -(n+1)\,e^{-n} + 1,$$

звідки

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 1,$$

і ми переконались, що почленно проінтегрований у межах (0, 1) ряд збігається до одиниці замість того, щоб збігатись до нуля.

Це показує, що не в усіх випадках можна інтегрувати ряд почленно. Тим цікавіше відзначити, що існують ряди, які допускають почленне інтегрування, тобто такі, для яких, формально виконавши інтегрування, ми знаходимо інтеграл суми ряду. Зокрема, це має місце для мажорованих рядів. Маємо таку теорему:

Якщо ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

мажорований на відрізку ($a \leqslant x \leqslant b$), то його можна інтегрувати почленно в межах від a до x ($a \leqslant x \leqslant b$), одержаний ряд буде знову мажорованим на (a, b), і його сума дорівнюватиме інтегралові в межах від a до x від суми первісного ряду.

Щоб довести це, нагадаємо, що ряд називається мажорованим на відрізку (a, b), якщо існує такий збіжний ряд з додатними членами

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots,$$

що

$$|u_n(x)| \leqslant \alpha_n \qquad \begin{matrix} a \leqslant x \leqslant b \\ n = 1, 2, 3, \ldots . \end{matrix}$$

Ми бачили в попередньому параграфі, що коли ряд мажорований на якомусь відрізку, то він збігається абсолютно в кожній точці цього відрізка, і його сума $S(x)$ буде неперервною функцією на тому ж відрізку.

Звідси випливає, що розглядуваний нами ряд має на (a, b) неперервну суму $S(x)$.

Позначаючи через $s_n(x)$ і $R_n(x)$ відповідно суму n перших членів нашого ряду

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

і залишковий член його

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots,$$

дістанемо

$$S(x) = s_n(x) + R_n(x).$$

Тому, яке б не було число x, аби воно лежало на відрізку (a, b), маємо

$$\int_a^x S(x)\,dx = \int_a^x s_n(x)\,dx + \int_a^x R_n(x)\,dx.$$

Через те що за умовою розглядуваний ряд мажорований на відрізку (a, b), то

$$|u_n(x)| \leqslant \alpha_n \qquad \begin{matrix} a \leqslant x \leqslant b \\ n = 1, 2, 3, \ldots . \end{matrix}$$

Звідси насамперед робимо висновок, що ряд, одержаний почленним інтегруванням, мажорований на (a, b). Справді, для членів цього ряду

$$\int_a^x u_1(x)\,dx + \int_a^x u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^x u_n(x)\,dx + \ldots$$

ми маємо

$$\left|\int_a^x u_n(x)\,dx\right| \leqslant \alpha_n (x - a) \leqslant \alpha_n (b - a),$$

тобто члени цього ряду менші членів збіжного ряду з додатних чисел

$$(b-a)\alpha_1+(b-a)\alpha_2+\ldots+(b-a)\alpha_n+\ldots.$$

Крім того, з мажорованості первісного ряду можна зробити висновок, що коли r_n є залишковий член ряду з α, тобто

$$r_n=\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\ldots,$$

то

$$|R_n(x)|\leqslant r_n \qquad \begin{matrix} a\leqslant x\leqslant b \\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \end{matrix}$$

Але через те що ряд, спільний член якого є α_n, за умовою збігається, то, яке б мале не було ε, можна знайти настільки велике n, що

$$r_n<\varepsilon,$$

а тому

$$|R_n(x)|<\varepsilon \qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

Через те що $(a,\ x)$ міститься в $(a,\ b)$, то на цьому відрізку попередня нерівність є виконаною, а тому

$$\left|\int_a^x R_n(x)\,dx\right|<\varepsilon\,(x-a)\leqslant\varepsilon\,(b-a).$$

Через те що ε ми можемо взяти як завгодно малим, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x R_n(x)\,dx=0,$$

і, отже,

$$\int_a^x S(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^x s_n(x)\,dx.$$

Але

$$\int_a^x s_n(x)\,dx=\int_a^x u_1(x)\,dx+\int_a^x u_2(x)\,dx+\ldots+\int_a^x u_n(x)\,dx,$$

тому

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^x u_1(x)\,dx+\int_a^x u_2(x)\,dx+\ldots+\int_a^x u_n(x)\,dx\right]=\int_a^x S(x)\,dx.$$

Це означає, що сума n перших членів ряду

$$\int_a^x u_1(x)\,dx+\int_a^x u_2(x)\,dx+\ldots+\int_a^x u_n(x)\,dx+\ldots$$

прямує до границі, що дорівнює $\int_a^x S(x)\,dx$, тобто цей ряд збігається і має $\int_a^x S(x)\,dx$ своєю сумою, що й доводить законність почленного інтегрування заданого мажорованого ряду

Приклад. Розглянемо ряд

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

і будемо обмежуватись значеннями x, вміщеними на відрізку $\left(-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$. В цьому відрізку ряд буде мажорований, бо

$$|x^n|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},$$

а ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

збігається. Тому його можна інтегрувати почленно в будьякому відрізку (a, b), що лежить на $\left(-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$, зокрема і на відрізку $(0, x)$, де $x\leqslant\frac{1}{2}$.

Через те що сума нашого ряду є $\frac{1}{1-x}$, то це дає

$$\int_0^x\frac{dx}{1-x}=\int_0^x 1\cdot dx+\int_0^x x\,dx+\ldots+\int_0^x x^n\,dx+\ldots,$$

звідки

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots.$$

Зокрема при $x=\frac{1}{2}$ ми знайдемо

$$-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=\ln 2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots.$$

§ 21. Диференціювання рядів.

Ми бачили в попередньому параграфі, що почленне інтегрування ряду не завжди є законним. Ще гірша справа з диференціюванням рядів. Навіть мажоровані ряди, для яких ми довели законність почленного інтегрування, в загальному випадку не допускають почленного диференціювання. Наприклад, ряд

$$\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 2^2x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin 2^nx}{2^n}+\ldots$$

є мажорований ряд на всій осі абсцис, бо для будьякого x маємо

$$\left|\frac{\sin 2^n x}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

Але коли його продиференціювати почленно, то одержимо ряд

$$\cos 2x + \cos 2^2x + \ldots + \cos 2^nx + \ldots ,$$

який не є навіть усюди збіжним. Наприклад, при $x = 0$ він перетворюється в розбіжний ряд $1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$.

В деяких випадках, проте, почленне диференціювання все таки є законним. Один практично зручний спосіб впевнитись у можливості почленного диференціювання грунтується на такій теоремі:

Якщо ряд (u')

$$(u') \qquad u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots ,$$

одержаний шляхом почленного диференціювання з ряду

$$(u) \qquad u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots ,$$

мажорований на відрізку (a, b), то його сума є похідна від суми ряду (u).

Справді, якщо ряд (u') є, за умовою, мажорований на (a, b), то на підставі теореми попереднього параграфа ми маємо право його інтегрувати почленно на будьякому відрізку (a, x), де $a \leqslant x \leqslant b$. Якщо $S(x)$ є сума ряду (u'), то на підставі результатів попереднього параграфа ми маємо

$$\int_a^x S(x)\,dx = \int_a^x u_1'(x)\,dx + \int_a^x u_2'(x)\,dx + \ldots + \int_a^x u_n'(x)\,dx + \ldots =$$
$$= u_1(x)\Big/_a^x + u_2(x)\Big/_a^x + \ldots + u_n(x)\Big/_a^x + \ldots .$$

Але ряд (u), що є результатом інтегрування ряду (u'), як ми бачили в попередньому параграфі, повинен бути мажорований на (a, b), отже, він збігається в кожній точці цього відрізка, зокрема і в точках a і x. Тому, позначаючи через $\sigma(x)$ його суму, ми можемо сказати, що

$$u_1(x)\Big/_a^x + u_2(x)\Big/_a^x + \ldots + u_n(x)\Big/_a^x + \ldots = \sigma(x) - \sigma(a),$$

а тому

$$\int_a^x S(x)\,dx = \sigma(x) - \sigma(a).$$

Але тоді, диференціюючи обидві частини рівності, ми знайдемо

$$\sigma'(x) = S(x),$$

що й треба було довести.

Приклад. Дано геометричну прогресію

$$(1) \qquad 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots .$$

Розглянемо, наприклад, відрізок $\left(-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$. На цьому відрізку дана прогресія збігається і має суму $\frac{1}{1-x}$. Розглянемо ряд, одержуваний почленним диференціюванням цієї прогресії:

(2) $$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots.$$

Неважко бачити, що він мажорований на відрізку

$$\left(-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right),$$

бо

$$|nx^{n-1}| \leqslant n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

а ряд

$$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$$

збігається, в чому можна впевнитись хоча б з допомогою ознаки Даламбера.

Звідси випливає, що сума ряду (2) на відрізку $\left(-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$ дорівнює похідній від суми ряду (1), а тому на $\left(-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$ маємо рівність

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots.$$

§ 22. Неперервна функція без похідної.

Ми вже бачили в попередньому параграфі, що почленне диференціювання ряду, навіть мажорованого, може привести до ряду, вже не обов'язково збіжного. Так у розглянутому в § 21 прикладі ми прийшли до ряду, розбіжного в точці $x=0$. Але можна піти ще далі і побудувати такий мажорований ряд, сума якого не має скінченної похідної вже ні в якій точці. А через те що сума мажорованого ряду є завжди неперервна функція, то ми, таким чином, переконуємось в існуванні неперервних функцій, позбавлених похідної. Це відкриття належить Вейерштрассові.

Вейерштрасс дав такий дуже цікавий і простий приклад неперервної функції, що не має ні в якій точці скінченної похідної. Хай дано ряд

(1) $$1+b\cos(a\pi x)+b^2\cos(a^2\pi x)+\ldots+b^n\cos(a^n\pi x)+\ldots,$$

де $0 < b < 1$ і a — деяке непарне ціле число. Цей ряд мажорований для всіх значень x, бо

$$|b^n \cos(a^n \pi x)| \leqslant b^n,$$

при чому ряд

$$1 + b + b^2 + \ldots + b^n + \ldots$$

збігається, бо $0 < b < 1$.

Звідси випливає, що ряд (1) збігається для всіх значень x і його сума $F(x)$ є неперервна функція. Маємо:

$$F(x) = 1 + b\cos(a\pi x) + b^2 \cos(a^2\pi x) + \ldots + b^n \cos(a^n \pi x) + \ldots . \tag{2}$$

Ряд, одержаний почленним диференціюванням даного, має вигляд

$$-\pi ab \sin(a\pi x) - \pi a^2 b^2 \sin(a^2 \pi x) - \ldots - \pi a^n b^n \sin(a^n \pi x) - \ldots . \tag{3}$$

Коли б ми припустили, що $ab < 1$, то цей ряд був би мажорованим, бо

$$|-\pi a^n b^n \sin(a^n \pi x)| \leqslant \pi a^n b^n,$$

а ряд

$$\pi ab + \pi a^2 b^2 + \ldots + \pi a^n b^n + \ldots$$

при $ab < 1$ є збіжний.

У цьому випадку, за теоремою попереднього параграфу, ряд (3) збігався б і мав сумою $F'(x)$, звідки випливало б, що $F(x)$ не тільки має в кожній точці похідну, але що ця похідна неперервна (як сума мажорованого ряду).

Все це ми б одержали, коли б ми припускали $ab < 1$. Вейерштрасс, навпаки, взяв a і b так, щоб

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2}. \tag{4}$$

Покажемо, що при цій умові функція $F(x)$ уже не може мати скінченної похідної ні в якій точці.

З цією метою розглянемо відношення

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Якщо ми переконаємось, що воно при всякому x і при h, яке прямує до нуля, не може прямувати до скінченної границі, це й доводитиме, що $F(x)$ ніде не має скінченної похідної.

Але з формули (2) випливає:

$$F(x+h) = 1 + b\cos[a\pi(x+h)] + b^2 \cos[a^2 \pi (x+h)] + \ldots +$$
$$+ b^n \cos[a^n \pi (x+h)] + \ldots,$$

тому

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=b\frac{\cos[a\pi(x+h)]-\cos(a\pi x)}{h}+\ldots+$$
$$+b^n\frac{\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos(a^n\pi x)}{h}+\ldots.$$

Якщо ми позначимо через $s_m(x, h)$ суму $m-1$ перших членів цього ряду і через $R_m(x, h)$ його залишковий член, тобто якщо покладемо

$$s_m(x, h)=b\frac{\cos[a\pi(x+h)]-\cos(a\pi x)}{h}+\ldots+$$
$$+b^{m-1}\frac{\cos[a^{m-1}\pi(x+h)]-\cos(a^{m-1}\pi x)}{h},$$
$$R_m(x, h)=b^m\frac{\cos[a^m\pi(x+h)]-\cos(a^m\pi x)}{h}+$$
$$+b^{m+1}\frac{\cos[a^{m+1}\pi(x+h)]-\cos(a^{m+1}\pi x)}{h}+\ldots,$$

то

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=s_m(x, h)+R_m(x, h).$$

Але за теоремою Лагранжа про скінченний приріст маємо

$$\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos(a^n\pi x)=-a^n\pi h\sin[a^n\pi(x+\theta h)]\quad 0<\theta<1,$$

тому

$$|\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos(a^n\pi x)|\leqslant a^n\pi\,|h|,$$

звідки випливає, що

$$|s_m(x, h)|\leqslant ba\pi+b^2a^2\pi+\ldots+b^{m-1}a^{m-1}\pi=\pi\frac{a^mb^m-ab}{ab-1},$$

а через те що ми припустили $ab>1$, то й напевне

$$|s_m(x, h)|<\pi\frac{a^mb^m}{ab-1}.$$

Перейдемо тепер до оцінки $R_m(x, h)$. Якщо x даний, то a^mx є якесь число, ціле або дробове. Позначимо через α_m найближче до нього (взяте з недостачею або з надвишкою) ціле число, тоді

$$a^mx=\alpha_m+\xi_m,$$

де ξ_m міститься між $-\frac{1}{2}$ і $+\frac{1}{2}$. Покладемо

$$h'_m = \frac{1-\xi_m}{a^m} \quad \text{і} \quad h''_m = \frac{-1-\xi_m}{a^m}.$$

Зрозуміло, що $h'_m > 0$ і $h''_m < 0$, бо $-\frac{1}{2} \leqslant \xi_m \leqslant +\frac{1}{2}$. Крім того, маємо

$$|h'_m| < \frac{3}{2a^m} \quad \text{і} \quad |h''_m| < \frac{3}{2a^m},$$

знову тому, що ξ_m міститься між $-\frac{1}{2}$ і $+\frac{1}{2}$.

Через те що a — деяке непарне ціле число, нерівне одиниці (бо $ab > 1$, але $b < 1$), то a^m необмежено зростає при необмеженому зростанні m. Тому числа h'_m, лишаючись додатними, прямують до нуля, а числа h''_m, лишаючись від'ємними, також прямують до нуля при необмеженому зростанні m.

Далі, ми маємо

$$a^n\pi(x + h'_m) = a^{n-m}a^m\pi(x + h'_m) = a^{n-m}\pi(a^m x + a^m h'_m) =$$
$$= a^{n-m}\pi[(\alpha_m + \xi_m) + (1 - \xi_m)] = a^{n-m}\pi(\alpha_m + 1),$$

і аналогічно

$$a^n\pi(x + h''_m) = a^{n-m}\pi(\alpha_m - 1).$$

Через те що α_m — ціле, то $\alpha_m + 1$ і $\alpha_m - 1$ — цілі числа; обидва вони водночас парні або непарні. Якщо $n \geqslant m$, то a^{n-m} є ціле непарне число, а тому добутки $a^{n-m}(\alpha_m + 1)$ і $a^{n-m}(\alpha_m - 1)$ будуть парними, якщо $\alpha_m + 1$ і $\alpha_m - 1$ парні, і непарними, якщо $\alpha_m + 1$ і $\alpha_m - 1$ непарні. Звідси випливає, що

$$\left.\begin{array}{l} \cos a^n\pi(x + h'_m) = \cos[a^{n-m}\pi(\alpha_m + 1)] = (-1)^{\alpha_m+1} \\ \text{і аналогічно} \\ \cos a^n\pi(x + h''_m) = \cos[a^{n-m}\pi(\alpha_m - 1)] = (-1)^{\alpha_m-1}) = (-1)^{\alpha_m+1} \end{array}\right\} n \geqslant m,$$

бо $\cos k\pi = (-1)^k$, яке б не було ціле число k.

Крім того, ми маємо

$$\cos(a^n\pi x) = \cos(a^{n-m}a^m\pi x) = \cos[a^{n-m}\pi(\alpha_m + \xi_m)] =$$
$$= \cos(a^{n-m}\pi\alpha_m)\cos(a^{n-m}\pi\xi_m) - \sin(a^{n-m}\pi\alpha_m)\sin(a^{n-m}\pi\xi_m) =$$
$$= \cos(a^{n-m}\pi\alpha_m)\cos(a^{n-m}\pi\xi_m),$$

бо $\sin(a^{n-m}\pi\alpha_m) = 0$, через те що α_m і a^{n-m} — цілі при $n \geqslant m$.

Але

$$\cos(a^{n-m}\pi\alpha_m) = (-1)^{\alpha_m},$$

бо $a^{n-m}\alpha_m$ водночас парне або непарне з α_m, тому маємо

$$\cos(a^n\pi x) = (-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\pi\xi_m).$$

Звідси при $n \geqslant m$ маємо

$$\cos[a^n\pi(x+h'_m)] - \cos(a^n\pi x) = (-1)^{\alpha_m+1} - (-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\pi\xi_m) = \\ = (-1)^{\alpha_m+1}[1+\cos(a^{n-m}\pi\xi_m)]$$

і аналогічно

$$\cos[a^n\pi(x+h''_m)] - \cos(a^n\pi x) = (-1)^{\alpha_m+1}[1+\cos(a^{n-m}\pi\xi_m)].$$

Звідси випливає, що

$$R_m(x, h'_m) = \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h'_m}\{b^m[1+\cos(\pi\xi_m)] + b^{m+1}[1+\cos(a\pi\xi_m)] + \\ + \ldots + b^{m+k}[1+\cos(a^k\pi\xi_m)] + \ldots\},$$

і аналогічну рівність маємо для $R_m(x, h''_m)$, заміняючи тільки в правій частині рівності h'_m через h''_m.

Але у ряду, що стоїть у фігурних дужках, усі члени додатні або дорівнюють нулеві, тому сума цього ряду не менша, ніж його перший член

$$b^m[1+\cos(\pi\xi_m)],$$

а через те що $-\frac{1}{2} \leqslant \xi_m \leqslant +\frac{1}{2}$, то $\cos\pi\xi_m \geqslant 0$, а тому сума ряду більша або дорівнює b^m.

Звідси випливає, що

$$|R_m(x, h'_m)| \geqslant \frac{b^m}{h'_m},$$

і аналогічно

$$|R_m(x, h''_m)| \geqslant \frac{b^m}{h''_m}.$$

Але, пригадавши, що

$$|h'_m| < \frac{3}{2a^m} \quad \text{і} \quad |h''_m| < \frac{3}{2a^m}$$

знайдемо

$$|R_m(x, h'_m)| > \frac{2}{3}(ab)^m \quad \text{і} \quad |R_m(x, h''_m)| > \frac{2}{3}(ab)^m.$$

Пригадаємо, що ми умовились брати a і b так, щоб

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2},$$

тому

$$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1},$$

і ми можемо написати

$$c = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}, \quad \text{де } c > 0.$$

Але ми бачили вище, що при будьяких x і h маємо

$$|s_m(x, h)| < \pi \frac{(ab)^m}{ab-1}.$$

Звідси випливає, що

$$\left|\frac{F(x+h'_m)-F(x)}{h'_m}\right| > |R_m(x, h'_m)| - |s_m(x, h'_m)| > \frac{2}{3}(ab)^m - \pi\frac{(ab)^m}{ab-1} =$$
$$= (ab)^m\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right) = c\,(ab)^m.$$

Подібно до цього

$$\left|\frac{F(x+h''_m)-F(x)}{h''_m}\right| > c\,(ab)^m.$$

Але через те що при необмеженому зростанні m права частина необмежено зростає, то, отже, і ліва частина також необмежено зростає. Таким чином, ми бачимо, що вирази

$$\frac{F(x+h'_m)-F(x)}{h'_m} \quad \text{і} \quad \frac{F(x+h''_m)-F(x)}{h''_m}$$

необмежено зростають за абсолютною величиною разом з m. Це показує, що $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ не може прямувати до скінченної границі при h, що прямує до нуля, навіть і тоді, коли h лишається весь час додатним, а також і тоді, коли h лишається весь час від'ємним (бо всі h'_m додатні, h''_m від'ємні, при чому як ті, так і другі прямують до нуля). Отже, функція $F(x)$ не може мати скінченної похідної ні при якому значенні x.

Вейерштрасс вважав, що його функція взагалі не має ніякої похідної для будьякого x.

Пізніші дослідження показали, що в його прикладі функція $F(x)$ все ж має похідну в безлічі точок, але ця похідна нескінченна. Можна, проте, побудувати такі неперервні функції, які вже не мають ні скінченної, ні нескінченної похідної ні в якій точці (такий приклад уперше був даний Безіковичем). Слід зауважити, що приклади неперервних функцій без похідної тепер будуються переважно геометричним шляхом. Цей спосіб добрий тим, що дає наочне уявлення, чому саме дана функція не має похідної або, інакше кажучи, чому крива, яка зображує її, не має дотичної. В прикладі Вейерштрасса цієї наочності немає. Якщо ми, проте, навели тут саме приклад Вейерштрасса, то це було зроблено з метою показати, до яких на перший погляд зовсім несподіваних висновків можна прийти, намагаючись диференціювати ряд почленно.

СТЕПІННІ РЯДИ.

§ 23. Вступ.

Серед рядів, члени яких є неперервними функціями x, найзначнішу роль в Аналізі відіграють ряди вигляду

$$(1)\qquad a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — сталі числа, що називаються *коефіцієнтами* ряду; самий ряд має назву *степінного*; степінний ряд *заданий*, якщо дано послідовність його коефіцієнтів.

Коли ряд (1) заданий, то може трапитись, що він розбігається для всіх значень x, крім $x=0$.

Наприклад, ряд

$$1+x+(2x)^2+\ldots+(nx)^n+\ldots$$

розбігається для всякого x, відмінного від нуля, бо за ознакою Коші маємо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}|nx|=+\infty.$$

Так само поводить себе і ряд

$$1\cdot x+1\cdot 2\cdot x^2+1\cdot 2\cdot 3\cdot x^3+\ldots+1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot x^n+\ldots.$$

Справді, за ознакою Даламбера знаходимо для $x\neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}|(n+1)x|=+\infty.$$

Точка $x=0$ завжди буде точкою збіжності, бо при $x=0$ степінний ряд має всі члени рівними 0, крім, можливо, члена a_0.

Далі, може трапитись, що ряд збігається для всіх без винятку значень x. Такий, наприклад, буде ряд

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}+\ldots.$$

Справді, на підставі ознаки Даламбера знаходимо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|=0$$

для всіх значень x. Отже, ряд збігається, і до того абсолютно, для всіх значень x.

Ми бачили, що степінний ряд може розбігатись для всіх значень x (крім $x=0$) і може збігатись для всіх значень x. Покажемо тепер, що він може збігатись для одних і розбігатись для інших значень x. Таким рядом є, наприклад, геометрична прогресія

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots.$$

Ми знаємо, що при $|x|<1$ вона є збіжним, а при $|x|\geqslant 1$ розбіжним рядом. Ми могли б це виразити так: для всіх точок x інтервалу $(-1, +1)$ ряд збігається, для кінців інтервалу і для точок, що лежать поза цим інтервалом, ряд розбігається.

§ 24. Інтервал збіжності.

Доведемо таку просту, але надзвичайно важливу теорему, що належить Абелеві:

Якщо степінний ряд збігається при деякому значенні x_0, то він збігається абсолютно при всякому значенні x, для якого $|x|<|x_0|$.

Справді, якщо ряд

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n+\ldots$$

збігається, то його члени із зростанням n повинні прямувати до нуля. Звідси випливає існування такого числа M, що

$$|a_nx_0^n|<M \quad n=0, 1, 2, \ldots.$$

Справді, коли б такого числа не було, то серед членів ряду знайшлись би числа як завгодно великі за абсолютною величиною, а тому вони не могли б прямувати до нуля із зростанням n.

Зауваживши це, візьмемо тепер ряд

$$(a) \qquad a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

і припускатимемо $|x|<|x_0|$. Для всякого n маємо:

$$|a_nx^n|=|a_n||x^n|=|a_n||x_0|^n\left|\frac{x}{x_0}\right|^n<M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

але через те що $|x|<|x_0|$, то $\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$, а тому ряд

$$M+M\left|\frac{x}{x_0}\right|+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+\ldots+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+\ldots$$

є спадна геометрична прогресія і, отже, збіжний ряд. Через те що члени ряду (a) за абсолютною величиною менші членів цього збіжного ряду, то ряд (a) збігається абсолютно, що й треба було довести.

Ця важлива теорема Абеля дозволяє одразу скласти собі уявлення про те, як розміщені точки збіжності і точки розбіжності ряду. Справді, якщо x_0 є точка збіжності, то весь інтервал від $-x_0$ до $+x_0$ заповнений точками збіжності і навіть абсолютної збіжності, бо для всіх точок цього інтервалу $|x|<|x_0|$; навпаки, якщо x_0 є точка розбіжності, то вся нескінченна півпряма від $+x_0$ до нескінченності вправо і вся півпряма від $-x_0$ до нескінченності вліво складається з точок розбіжності. Справді, коли була б хоч одна точка збіжності x_1, для якої $|x_1|>|x_0|$, то за теоремою Абеля точка x_0 теж була б точкою збіжності.

Таким чином, ідучи від початку координат вправо, ми маємо спочатку виключно точки абсолютної збіжності, а починаючи з деякого моменту, виключно точки розбіжності. Позначимо через R точку, що є границею між областю збіжності і областю розбіжності, тобто таку точку, що для всіх точок з додатною абсцисою, які лежать лівіше R, ряд збігається абсолютно, а для точок правіше R ряд розбігається. Тепер ми, природно, приходимо до поняття інтервалу збіжності:

Інтервалом збіжності степінного ряду називається такий інтервал $(-R, +R)$, що для всякої точки x, яка лежить усередині цього інтервалу, ряд збігається, і до того абсолютно, а для точок x, що лежать поза ним, ряд розбігається.

Слово „усередині“ тут розуміється у вузькому розумінні, тобто мова йде лише про точки інтервалу, що не є ні його лівим, ні його правим кінцем. У кінцях же інтервалу ряд може і розбігатись, і збігатись умовно, і збігатись абсолютно — це залежить від розглядуваного ряду.

Рис. 7.

Попередні міркування показують, що для всякого степінного ряду може спостерігатись тільки один з трьох випадків:

1) ряд розбігається для всіх значень x, крім $x=0$;

2) ряд збігається для всіх значень x;

3) ряд має деякий певний інтервал збіжності $(-R, +R)$.

Справді, ми бачили, що коли не має місця ні перший, ні другий випадок, то знайдеться таке додатне число R, яке поділяє всі точки з додатною абсцисою на два класи: ті, що лежать лівіше R, є точками збіжності, і навіть абсолютної, правіше — точками розбіжності. Щодо точок з від'ємними абсцисами, то тут відбувається *обернене* явище відносно точки $-R$, тобто точки правіше $-R$ є точками абсолютної збіжності, а лівіше — точками розбіжності (рис. 7). Усе це, як ми бачили, є безпосередній висновок теореми Абеля.

Випадки 1 і 2 прийнято включати в цей останній випадок, вважаючи, що в першому з них інтервал збіжності „виродився“ в одну точку 0, а в другому — „перетворився“ в усю пряму.

Число R умовимось називати *радіусом збіжності*; коли інтервал вироджується в точку, то $R=0$, коли ж він перетворюється в усю пряму, то ми вважаємо $R=+\infty$.

В багатьох випадках радіус збіжності степінного ряду буває легко визначити. Це буває тоді, коли існує

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, як завжди,— коефіцієнти степінного ряду.

Справді, в цьому випадку, покладаючи

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

маємо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L|x|,$$

а тому, на підставі ознаки Коші (див. § 10), ряд збігається абсолютно при $L|x| < 1$ і розбігається при $L|x| > 1$. Отже, якщо $L \neq 0$, то

для $|x| < \frac{1}{L}$ ряд збігається абсолютно,

для $|x| > \frac{1}{L}$ ряд розбігається.

Ці співвідношення показують, що число $\frac{1}{L}$ і є саме те число, яке відокремлює точки збіжності від точок розбіжності, тобто радіус збіжності.

Отже,

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Зауважимо, що коли $L = 0$, то при всякому x маємо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = 0,$$

а тому ряд збігається для всіх значень x, тобто радіус збіжності R слід вважати нескінченним.

Могло б трапитись, що $\sqrt[n]{|a_n|}$ необмежено зростає із зростанням n. Тоді при всіх значеннях x, крім $x = 0$, і вираз $\sqrt[n]{|a_n x^n|}$ необмежено зростає, а тому ряд розбігається для всіх значень x, крім $x = 0$. В цьому випадку радіус збіжності $R = 0$.

Для зручності запам'ятовування можна вважати, що завжди

$$R = \frac{1}{L},$$

якщо тільки умовитись, що символ $\frac{1}{0}$ ми розумітимемо як ∞, а символ $\frac{1}{\infty}$ як 0. Але, зрозуміло, реальна математична суть цих символів полягає тільки в тому, як уже вище говорилось, що при $L=0$ ряд усюди збігається, а при $L=\infty$ ряд усюди розбігається, крім $x=0$.

Перед тим як переходити до прикладів, покажемо ще, що радіус збіжності можна визначати й інакше, користуючись замість ознаки Коші ознакою Даламбера.

Справді, припустимо, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Позначимо цю границю знову буквою L.

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L|x|.$$

Тепер, на підставі ознаки Даламбера, абсолютно так само, як вище на підставі ознаки Коші, робимо висновок, що

при $|x|<\frac{1}{L}$ ряд збігається абсолютно,

при $|x|>\frac{1}{L}$ ряд розбігається.

Отже,

$$R=\frac{1}{L},$$

і при цьому знову при $L=0$ ряд збігається всюди, а при $L=+\infty$ ряд розбігається всюди, крім $x=0$.

Звідси ми, між іншим, бачимо, що коли обидві границі

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

існують, то вони рівні між собою *.

Таким чином, ми тепер маємо два способи знаходження радіуса збіжності степінного ряду. Ми прикладатимемо кожного разу саме той з них, що зручніший для даного ряду, подібно до того, як прикладали при різних випадках різні ознаки збіжності.

Розглянемо деякі приклади на визначення радіуса збіжності степінних рядів і вивчимо їх поведінку в кінцях інтервалу збіжності.

---

* Можливий випадок, коли другої з цих границь немає, а перша існує; тут, проте, ми цього не показуватимемо.

П р и к л а д 1. Візьмемо ряд

$$1+2x+2^2x^2+\ldots+2^nx^n+\ldots.$$

Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n}=2,$$

тому

$$R=\frac{1}{2},$$

таким чином, інтервал збіжності є $\left(-\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2}\right)$. Дослідимо, як поводить себе ряд у кінцях цього інтервалу. Маємо для $x=\frac{1}{2}$ ряд

$$1+2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+2^n\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots,$$

тобто ряд

$$1+1+1+\ldots+1+\ldots;$$

цей ряд, зрозуміло, розбігається. Так само для $x=-\frac{1}{2}$ знайдемо

$$1-2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{2^2}-\ldots+(-1)^n2^n\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$$

або

$$1-1+1-1+\ldots;$$

цей ряд теж розбігається, бо його члени не прямують до нуля.

Таким чином, цей ряд у кінцях інтервалу збіжності розбігається.

П р и к л а д 2. Дано ряд

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots.$$

Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

тому

$$R=\frac{1}{1}=1.$$

Інтервал збіжності є $(-1, +1)$. У правому кінці цього інтервалу, тобто при $x=1$, одержуємо

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots.$$

Цей ряд, як ми знаємо, збігається, але не абсолютно (§ 14).

В лівому кінці інтервалу збіжності, тобто при $x=-1$, дістанемо

$$-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots.$$

Цей ряд розбігається, бо відрізняється від гармонічного лише тим, що всі його члени помножені на -1.

Таким чином, може трапитись, що в одному кінці інтервалу збіжності ряд збігається, а в другому розбігається.

Приклад 3. Дано ряд

$$\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots.$$

Тут маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=1.$$

Отже, знову $(-1, +1)$ є інтервал збіжності. Але цього разу ряд збігається, і до того абсолютно, в обох кінцях інтервалу збіжності. Справді, маємо при $x=1$:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

а при $x=-1$

$$-\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2}+\ldots;$$

перший з цих рядів збігається (§ 11), а отже, другий не тільки збігається, але й абсолютно збігається.

Таким чином, ряд може збігатись, і навіть абсолютно, в обох кінцях інтервалу збіжності.

§ 25. Неперервність суми степінного ряду.

Розглянемо степінний ряд

$$(a)\qquad a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

і хай $(-R, +R)$ є його інтервал збіжності.

Доведемо насамперед, що **в усякому інтервалі $(-\rho, +\rho)$, який лежить весь усередині інтервалу збіжності, сума $F(x)$ степінного ряду є неперервна функція.**

Справді, якщо інтервал $(-\rho, +\rho)$ лежить весь усередині інтервалу $(-R, +R)$, то це означає, що $\rho<R$. Візьмемо якенебудь число ρ', що лежить між ρ і R, тобто $\rho<\rho'<R$. Через те що точка з абсцисою ρ' лежить усередині інтервалу збіжності, то в ній ряд (a) збігається, і до того абсолютно. Це означає, що ряд

$$|a_0|+|a_1|\rho'+|a_2|\rho'^2+\ldots+|a_n|\rho'^n+\ldots$$

є збіжний ряд. Але через те що $\rho < \rho'$, то для всякої точки x інтервалу $(-\rho, +\rho)$ маємо

$$|x| \leqslant \rho < \rho'$$

і, отже,

$$|a_n x^n| < |a_n| \rho'^n.$$

Це показує, що на $(-\rho, +\rho)$ ряд (a) має члени менші, ніж відповідні члени деякого збіжного ряду з додатних чисел. Ряди, що мають цю властивість, ми умовились називати мажорованими, і в § 19 було доведено, що сума такого ряду є неперервна функція. Таким чином наше твердження доведене.

Корисно зауважити, що ми таким чином переконались у неперервності суми степінного ряду в усякій точці, яка лежить усередині інтервалу збіжності, бо кожну таку точку можна помістити в якийсь інтервал $(-\rho, +\rho)$, що весь лежить у $(-R, +R)$.

Але не можна говорити про неперервність суми в кінцях інтервалу хоча б тому вже, що такої суми може не бути: ряд може розбігатись.

§ 26. Диференціювання степінного ряду.

Ми довели, що сума степінного ряду є неперервна функція $F(x)$ в усякій точці, що лежить, точно всередині інтервалу збіжності. Доведемо зараз щось більше, а саме, що в тому ж інтервалі функція $F(x)$ неодмінно має похідну, при чому знайти цю похідну можна просто почленним диференціюванням степінного ряду, подібно до того як похідну суми скінченного числа доданків знаходять з допомогою додавання похідних від кожного доданку окремо. Цей факт, що вказує на подібність між степінними рядами і, наприклад, звичайними многочленами, є висновком такої теореми:

Якщо степінний ряд

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

має $(-R, +R)$ інтервалом збіжності і функцію $F(x)$ своєю сумою, то ряд, одержаний шляхом його почленного диференціювання, тобто ряд

$$(2) \qquad a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$

має той же інтервал збіжності і суму, що дорівнює похідній $F'(x)$ від функції $F(x)$.

Щоб впевнитись у цьому, доведемо насамперед, що ряд (2) мажорований на всякому інтервалі $(-\rho, +\rho)$, що весь лежить усередині інтервалу збіжності.

Справді, якщо ξ є така точка, що $\rho < \xi < R$, то ряд (1) у цій точці збігається, тому n-й член $a_n \xi^n$ прямує до нуля при необмеженому зростанні n. Отже, можна вказати таке число M, що

$$|a_n \xi^n| < M \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Якщо $|x| \leqslant \rho$, то

$$|na_n x^{n-1}| \leqslant |na_n \rho^{n-1}| = n|a_n \xi^{n-1}| \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{n-1} < n\frac{M}{\xi} q^{n-1},$$

де $q = \frac{\rho}{\xi} < 1$, бо $\rho < \xi$ за умовою. Тому, якщо ми переконаємось у збіжності ряду

$$\frac{M}{\xi}(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots)$$

з додатними членами, то тим самим буде доведено, що ряд (2) мажорований на $(-\rho, +\rho)$. У збіжності ж останнього ряду можна переконатись, хоча б прикладаючи ознаку Даламбера, бо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nq^{n-1}}{(n-1)\,q^{n-2}} = q < 1.$$

Отже, ми бачимо, що на будьякому відрізку $(-\rho, +\rho)$, який лежить весь усередині інтервалу збіжності $(-R, +R)$, ряд (2) мажорований. У такому випадку, прикладаючи теорему § 21, ми бачимо, що цей ряд (2) збігається на $(-\rho, +\rho)$ і має сумою похідну $F'(x)$ від функції $F(x)$. Отже, ми переконались у законності почленного диференціювання степінного ряду в усякій точці, що лежить усередині інтервалу збіжності.

Через те що в інтервалі, де ряд мажорований, він є абсолютно збіжним (§ 19), то ми переконуємось, що ряд (2) збігається абсолютно всередині інтервалу збіжності ряду (1). Доведемо тепер, що поза цим інтервалом ряд (2) розбігається. Справді, коли б у якійсь точці ξ, такій, що $|\xi| > R$, ряд (2) був би збіжним, то для всякого x, $|x| < \xi$, цей ряд збігався б абсолютно. Отже, знайшлося б таке x', $|x'| > R$, при якому ряд

$$|a_1| + 2|a_2||x'| + 3|a_3||x'|^2 + \ldots + n|a_n||x'|^{n-1} + \ldots$$

збігається. Але тоді збігається і ряд, одержаний множенням усіх членів попереднього ряду на $|x'|$, тобто ряд

$$|a_1||x'| + 2|a_2||x'|^2 + 3|a_3||x'|^3 + \ldots + n|a_n||x'|^n + \ldots,$$

а тому тим більше повинен збігатись і ряд

$$|a_1||x'| + |a_2||x'|^2 + |a_3||x'|^3 + \ldots + |a_n||x'|^n + \ldots,$$

бо

$$|a_n||x'|^n < n|a_n||x'|^n.$$

Звідси випливає, що ряд (1) збігається в точці x', що неможливо, бо $|x'| > R$, тобто точка x' лежить поза інтервалом збіжності ряду (1). З одержаної суперечності ми робимо висновок, що ряд (2) повинен розбігатись усюди поза $(-R, +R)$.

Ми переконались, таким чином, що обидва ряди (1) і (2) мають один і той же інтервал збіжності, а це й закінчує доведення пропонованої теореми.

Додамо до цього, що в самих кінцях інтервалу збіжності ряди (1) і (2) можуть поводити себе не однаково: може трапитись, що даний ряд збігається, а продиференційований розбігається. Це має місце, наприклад, для ряду

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

який при $x=-1$ збігається, тоді як продиференційований ряд

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots$$

у цій точці розбігається.

Розглянемо приклад на диференціювання степінного ряду. Хай дано ряд

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^n+\ldots.$$

Цей ряд є геометрична прогресія із знаменником $-x$. Його інтервал збіжності є $(-1, +1)$. Сума $F(x)$ цього ряду є

$$F(x)=\frac{1}{1+x}.$$

Прикладаючи тількищо доведену теорему, ми бачимо, що ряд, одержаний почленним диференціюванням, тобто ряд

$$-1+2x-3x^2+\ldots+(-1)^n nx^{n-1}+\ldots,$$

має той же інтервал збіжності $(-1, +1)$, при чому його сума повинна дорівнювати

$$F'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}.$$

§ 27. Ряд Маклорена. Єдиність розкладу функції в степінний ряд.

Ми бачили в попередньому параграфі, що коли степінний ряд

(1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

має інтервал збіжності $(-R, +R)$ і суму $F(x)$, то ряд

(2) $$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots,$$

одержаний почленним диференціюванням даного ряду, має той же інтервал збіжності і суму $F'(x)$, що дорівнює похідній від $F(x)$.

Але ряд (2) є *знову* степінний ряд, тому до нього можна прикласти ту саму теорему і переконатись, що ряд

$$1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+\ldots+(n-1)\,na_nx^{n-2}+\ldots$$

має інтервалом збіжності інтервал $(-R, +R)$ і суму $F''(x)$, що дорівнює похідній $F'(x)$, тобто другій похідній від $F(x)$.

Повторюючи це міркування, приходимо до такого висновку:

Якщо степінний ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

збігається до функції $F(x)$ і має інтервал збіжності $(-R, +R)$, то функція $F(x)$ має всередині цього інтервалу похідні всіх порядків, при чому для знаходження цих похідних досить диференціювати заданий ряд почленно стільки разів, який порядок похідної; всі одержувані при цьому ряди мають той же інтервал збіжності $(-R, +R)$.

Таким чином, можна написати:

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$
$$F'(x)=1\cdot a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots,$$
$$F''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+\ldots+(n-1)\,na_nx^{n-2}+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F^{(p)}(x)=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot pa_p+2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p+1)a_{p+1}x+\ldots+$$
$$+(n-p+1)(n-p+2)\cdot\ldots\cdot na_nx^{n-p}+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Кожний з цих рядів збігається на інтервалі $(-R, +R)$. Зокрема, поклавши в цих рядах $x=0$, ми бачимо, що кожний ряд збігається до одного свого сталого члена

$$F(0)=a_0,\quad F'(0)=a_1,\quad F''(0)=1\cdot 2a_2,\ldots$$
$$F^{(p)}(0)=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot pa_p,\ldots.$$

Це показує, що коефіцієнти степінного ряду виражаються цілком певним способом через величину функції $F(x)$ і її похідних у точці 0, а саме

$$a_0=F(0),\ a_1=\frac{F'(0)}{1},\quad a_2=\frac{F''(0)}{1\cdot 2},\ \ldots,\quad a_p=\frac{F^{(p)}(0)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot p},\ldots.$$

Таким чином, якщо функція $F(x)$ може бути розкладена в степінний ряд, тобто **якщо існує степінний ряд, що збігається до $F(x)$ в якомусь інтервалі, то такий ряд тільки один, а саме ряд**

$$F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}F''(0)+\ldots+$$
$$+\frac{x^p}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot p}F^{(p)}(0)+\ldots.$$

Зрозуміло, що не всяку функцію можна розкласти в степінний ряд: як показує попередня формула, для цього насамперед необхідно, щоб вона мала похідні всіх порядків у точці $x=0$, і, як показують детальніші дослідження, тільки цього ще недосить. Проте, для всіх простих функцій і таких, що весь час зустрічаються в Аналізі, такий розклад можливий, і ми тепер знаємо, як його знайти — для цього досить знайти похідні від нашої функції в точці $x=0$ і потім скласти ряд

$$F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}F''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}F^{(n)}(0)+\ldots.$$

Цей ряд має назву ряду Маклорена і відіграє надзвичайно важливу роль в Аналізі. Ми розглянемо далі цілий ряд прикладів розкладу функцій у ряд Маклорена, але тепер нам потрібно спинитись ще на одному питанні, що природно повстає після того, як ми переконались у можливості диференціювати степінний ряд. Це питання про інтегрування цих рядів. Лише після того, як це питання буде розглянуте, у нас будуть усі засоби для розкладу функцій у ряди.

§ 28. Інтегрування степінних рядів.

Хай степінний ряд

$$(1)\qquad a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

має інтервал збіжності $(-R, +R)$ і хай $F(x)$ є його сума. Розглянемо ряд, одержуваний почленним інтегруванням даного ряду:

$$(2)\qquad a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots.$$

Доведемо, що він збігається абсолютно в кожній точці всередині інтервалу збіжності. Справді, хай x_0 така точка; тоді ряд

$$(3)\qquad |a_0|+|a_1|\,|x_0|+\ldots+|a_n|\,|x_0|^n+\ldots$$

збігається, а тому і ряд, одержаний відкиданням члена $|a_0|$ і множенням усіх членів на $|x_0|$, тобто ряд

$$(4)\qquad |a_1|\,|x_0|^2+|a_2|\,|x_0|^3+\ldots+|a_n|\,|x_0|^{n+1}+\ldots,$$

теж збігається. Але члени досліджуваного ряду (2) за абсолютною величиною менші членів тількищо одержаного ряду (4), тому він також збігається абсолютно в точці x_0.*

Таким чином, ми переконались, що ряд (2) збігається абсолютно в кожній точці всередині $(-R, +R)$. Отже, інтервал збіжності цього ряду повинен містити $(-R, +R)$ або збігатися з ним. Покажемо, що можливий тільки останній випадок, тобто інтервал збіжності проінтегрованого ряду повинен бути знову інтервалом $(-R, +R)$. Справді, коли б цей інтервал був $(-R', +R')$, де $R'>R$, то на підставі теореми § 26 ряд (1), одержаний почленним диференціюванням ряду (2), мав би також інтервалом збіжності $(-R', +R')$, що неправильно, бо його інтервал збіжності є $(-R, +R)$.

---

* Законність почленного інтегрування степінного ряду можна було б вивести і з властивостей мажорованих рядів.

Таким чином, проінтегрований ряд має той самий інтервал збіжності, як і даний.

Позначимо через $\Phi(x)$ суму ряду (2). Через те що даний ряд (1) має суму $F(x)$ і за теоремою про диференціювання рядів ми повинні мати $\Phi'(x)=F(x)$, то звідси випливає, що $\Phi(x)$ є примітивна функція для $F(x)$ або, точніше кажучи, одна з примітивних для $F(x)$, бо ми знаємо, що примітивних функцій існує безліч, будьяка $\Phi_1(x)$, що відрізняється від $\Phi(x)$ лише на сталє, буде також примітивною для $F(x)$. Можна додати, що $\Phi(x)$ є та з примітивних для $F(x)$, яка перетворюється в 0 при $x=0$, бо ряд (2) має при $x=0$ суму, що дорівнює нулеві.

Підсумовуючи сказане, можна формулювати таку теорему:

Якщо степінний ряд

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

збігається на $(-R, +R)$ і має суму $F(x)$, то ряд, одержаний формальним інтегруванням його почленно, тобто ряд

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots,$$

має той же інтервал збіжності, і його сума є та з примітивних для $F(x)$, яка перетворюється в 0 при $x=0$.

Наприклад, ми знаємо, що ряд

$$1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots,$$

який можна розглядати як геометричну прогресію із знаменником $-x^2$, збігається для $x^2<1$ і розбігається для $x^2\geqslant 1$, тобто його інтервал збіжності є $(-1, +1)$. Сума цього ряду є $\frac{1}{1+x^2}$. Тому ряд, одержаний почленним інтегруванням даного ряду, повинен мати сумою примітивну для $\frac{1}{1+x^2}$, що перетворюється в 0 при $x=0$. Такою примітивною буде $\operatorname{arc\,tg} x$, а тому ми одержуємо рівність

$$\operatorname{arc\,tg} x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,$$

справедливу при всіх таких x, для яких $-1<x<+1$.

Можна було б довести, що ця рівність продовжує зберігати силу і при $x=+1$, але з попереднього доведення це не випливає. При $x=+1$ формула дає

$$\operatorname{arc\,tg} 1=\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\ldots$$

і дозволяє наближено обчисляти число π. Ми не спинятимемось на цьому, бо для π можна знайти значно кращі розклади, тобто ряди, що збігаються набагато швидше, а тому дозволяють легко обчислити число π з великою точністю.

§ 29. Ряди Тейлора і Маклорена.

Ми бачили в § 27, що коли функція $F(x)$ допускає розклад у степінний ряд, то це повинен бути ряд

$$F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0)+\ldots,$$

що має назву ряду Маклорена. Але, як показує вже сама ця формула, для розкладності функції в ряд Маклорена потрібно, щоб вона в точці $x=0$ мала похідні всіх порядків. Між тим функція може бути диференційованою скільки завгодно разів, але в точці 0 або сама вона, або її похідні стають нескінченними. Наприклад, функція $\ln x$ для всіх значень x, крім $x=0$, має скінченну похідну $\frac{1}{x}$, скінченну другу похідну $\frac{-1}{x^2}$, взагалі скінченні похідні всіх порядків, але при $x=0$ значення і самої функції і всіх її похідних перестають бути скінченними.

В цьому випадку можна шукати розкладу такої функції в степінний ряд, розміщений уже не за степенями x, а за степенями $x-a$, де a — якенебудь стале число, для якого вже сама функція і всі її похідні скінченні. Справді, якщо ми в точку a перенесемо початок координат, поклавши $x=a+h$, де h — нове змінне, то $F(x)=F(a+h)$ стане якоюсь функцією від h; позначимо її через $\varphi(h)$, тобто покладемо

$$\varphi(h)=F(a+h).$$

Тоді

$$\varphi'(h)=F'(a+h),\quad \varphi''(h)=F''(a+h),\ \ldots,\ \varphi^{(n)}(h)=F^{(n)}(a+h),\ldots.$$

Через те що при $h=0$ ми одержуємо

$$\varphi(0)=F(a),\quad \varphi'(0)=F'(a),\quad \varphi''(0)=F''(a),\ \ldots,\quad \varphi^{(n)}(0)=F^{(n)}(a),\ \ldots,$$

то для функції $\varphi(h)$ можна скласти ряд Маклорена:

$$\varphi(0)+\frac{h}{1}\varphi'(0)+\frac{h^2}{2!}\varphi''(0)+\ldots+\frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(0)+\ldots,$$

або

$$F(a)+\frac{h}{1}F'(a)+\frac{h^2}{2!}F''(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(a)+\ldots.$$

Помічаючи тепер, що $a+h=x$, а отже, $h=x-a$, ми дістаємо степінний ряд, розміщений за степенями різниці $x-a$:

$$F(a)+\frac{x-a}{1}F'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}F''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)+\ldots.$$

Цей ряд має назву *ряду Тейлора* для $F(x)$.

Таким чином, **якщо функція $F(x)$ допускає розклад у ряд за степенями різниці $x-a$, то цей розклад повинен одержу-**

ватись у вигляді ряду Тейлора. Це твердження випливає з того факту, що коли функція може розкладатись у степінний ряд, то тільки одним способом, і ми тепер бачимо, яким саме способом.

Проте ми не маємо ніяких підстав стверджувати, що, взявши функцію $F(x)$, яка має похідні всіх порядків, і склавши для неї розклад у ряд за формулою Маклорена або за формулою Тейлора, ми дістанемо ряд, який збігається і до того має сумою $F(x)$. Зважаючи на надзвичайну важливість питання, ми ще раз спинимось на ньому.

Ми бачили (§ 27), що коли $F(x)$ є сума якогось степінного ряду, що збігається на інтервалі $(-R, +R)$, то можна стверджувати, що коефіцієнти цього степінного ряду

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

повинні одержуватись за формулами

$$a_0 = F(0), \quad a_1 = \frac{F'(0)}{1}, \ldots, \quad a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}, \ldots .$$

Тому, якщо *за умовою* ряд збігається до $F(x)$, то ми можемо писати в інтервалі його збіжності рівність

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{2!} F''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} F^{(n)}(0) + \ldots .$$

Подібно до цього ми зараз переконались, що *коли* $F(x)$ є сума ряду, розміщеного за зростаючими степенями $x - a$, і *коли* він збігається, то це має бути ряд Тейлора, і ми тоді можемо писати

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{1} F'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} F''(a) + \ldots +$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{n!} F^{(n)}(a) + \ldots .$$

Проте, з усього сказаного ще не випливає, що, взявши якусь функцію $F(x)$, яка має всі похідні, і склавши для неї ряд за формулою Маклорена або за формулою Тейлора, ми можемо бути певні в його збіжності до $F(x)$; може виявитись, що цей ряд розбігається або збігається, але не до функції $F(x)$.

Хай, наприклад,

$$F(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

Маємо

$$F'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}},$$

$$F''(x) = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x}},$$

$$F'''(x) = \left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Неважко бачити, що при всякому n

$$F^{(n)}(x)=P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}},$$

де $P\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлен відносно $\frac{1}{x}$.

Якщо покласти $x=0$, то добуток у правій частині останньої рівності стає неозначеним виразом вигляду $\infty\cdot 0$. Щоб знайти його справжню суть, напишемо

$$\lim_{x\to 0}P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\infty}P(y)\,e^{-y}=\lim_{y\to\infty}\frac{P(y)}{e^{y}}.$$

Прикладаючи правило Лопіталя, знайдемо

$$\lim_{y\to\infty}\frac{P(y)}{e^{y}}=\lim_{y\to\infty}\frac{P'(y)}{e^{y}}=\lim_{y\to\infty}\frac{P''(y)}{e^{y}}=\ldots=\lim_{y\to\infty}\frac{k}{e^{y}}=0,$$

де k — стале число, бо, продиференціювавши многочлен $P(y)$ стільки разів, який його степінь, ми дістанемо сталу величину.

Таким чином,

$$F(0)=F'(0)=F''(0)=\ldots=F^{n}(0)=\ldots=0,$$

а тому ряд Маклорена для функції $F(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ має вигляд

$$0+0\cdot\frac{x}{1}+0\cdot\frac{x^{2}}{2!}+\ldots+0\cdot\frac{x^{n}}{n!}+\ldots,$$

тобто збігається до 0 для всіх x, а між тим $e^{-\frac{1}{x}}$ ні при якому скінченному значенні x не дорівнює нулеві.

Тому, коли хотять розкласти задану функцію $F(x)$ у степінний ряд, то роблять так: насамперед формально складають для неї ряд Маклорена, якщо вона має скінченні похідні всіх порядків при $x=0$, або ряд Тейлора, якщо для точки $x=0$ це неможливо, а для деякого $x=a$ можливо, при чому формально скласти ряд — це означає просто обчислити його коефіцієнти. Далі починають досліджувати, чи збігається цей ряд; якщо виявиться, що він збігається в деякому інтервалі, то не можна ще одразу стверджувати, що його сума є дана функція $F(x)$. Існують два методи, з допомогою яких можна дізнатись, чи сума ряду дорівнюватиме $F(x)$. Один з них штучний, але звичайно легший, полягає в тому, що, користуючись властивостями вже одержаного з допомогою диференціювання і інших операцій ряду, намагаються встановити, чи є дана функція його сумою; як це зробити, найзручніше з'ясувати на прикладах, бо тут немає загального прийому, придатного для всіх рядів. Другий метод безпосередній, але здебільшого дуже важко прикладальний, полягає в тому, що різниця між $F(x)$ і першими n членами її ряду Тейлора починають вивчати безпосередньо і намагаються встановити, коли вона прямує до нуля із зростанням n. Другий метод ми вивчимо далі, коли покажемо, як цю різницю, тобто так званий залишковий член ряду Тейлора, зображати в зручній формі, а зараз вкажемо, який вигляд мають ряди Маклорена для функцій, що найчастіше зустрічаються в Аналізі функцій, і з допомогою першого методу виявимо їх збіжність до цих функцій.

§ 30. Розклад у ряд для функції e^x.

Поставимо собі завданням розкласти в ряд функцію e^x. Маємо

$$\begin{aligned} F(x) &= e^x, \\ F'(x) &= e^x, \\ F''(x) &= e^x, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F^{(n)}(x) &= e^x, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

тому

$$F(0) = F'(0) = F''(0) = \ldots = F^{(n)}(0) = \ldots = 1.$$

Отже, ряд Маклорена може бути написаний; він має вигляд

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Тепер треба дослідити, чи збігається цей ряд, і якщо збігається, то чи буде e^x його сумою. В § 23 ми довели, що цей ряд збігається при всіх значеннях x. Позначимо через $f(x)$ суму цього ряду; маємо, отже,

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Але ми ще не знаємо, чи буде $f(x) = e^x$. Для розв'язання цього питання насамперед зауважимо, що всякий степінний ряд можна диференціювати почленно в тому інтервалі, де він збігається, при чому продиференційований ряд має суму, що дорівнює похідній від суми даного ряду. Це дозволяє нам написати

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Ми бачимо, що продиференційований ряд збігається з первісним, а тому і суми їх рівні між собою, отже,

$$f'(x) = f(x).$$

Звідси випливає, що

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1,$$

а через те що $\frac{f'(x)}{f(x)}$ є похідна від $\ln f(x)$, то

$$[\ln f(x)]' = 1,$$

отже,

$$\ln f(x) = x + C,$$

де C — стале. Звідси

$$f(x) = e^{x+C}.$$

Лишається ще зауважити, що при $x = 0$ всі члени досліджуваного ряду, крім вільного члена, перетворюються в 0, а тому

$$f(0) = 1.$$

Але коли

$$f(x) = e^{x+C}$$

і

$$f(0) = 1,$$

то, отже,

$$e^{C} = 1,$$

а тому

$$f(x) = e^{x}e^{C} = e^{x}$$

що й треба було довести.

Таким чином, ми маємо

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

при чому ця рівність справедлива при всіх значеннях x. Зокрема, при $x = 1$ маємо ряд, що дозволяє обчислити величину e:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots.$$

Цей ряд надзвичайно швидко збігається, і тому величину e можна знайти з дуже великою точністю, взявши порівняно невелике число членів цього ряду. Справді, позначаючи через R_n залишковий член ряду, тобто покладаючи

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots,$$

маємо

$$R_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right].$$

Через те що кожний член ряду, що стоїть у дужках, менший, ніж відповідний член геометричної прогресії

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots,$$

то

$$0 < R_n < \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}.$$

Це означає, що, замінивши e через

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

ми припускаємо помилку меншу, ніж $\frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}$.

Зокрема, наприклад, при $n = 8$ помилка буде менша, ніж

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{322560}.$$

Якщо, виконавши обчислення, ми при перетворенні звичайних дробів у десяткові уриватимемо обчислення на п'ятому десятковому знакові, то знайдемо, зупиняючись на восьмому члені,

$$e = 2{,}71825,$$

де перші 4 десяткові знаки правильні.

§ 31. Розклад у ряд функцій $\sin x$ і $\cos x$.

Для того щоб скласти ряди для цих функцій, треба насамперед знайти всі їх похідні; покладаючи $F(x) = \sin x$ і $\Phi(x) = \cos x$, маємо

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sin x, & \Phi(x) &= \cos x,\\
F'(x) &= \cos x, & \Phi'(x) &= -\sin x,\\
F''(x) &= -\sin x, & \Phi''(x) &= -\cos x,\\
F'''(x) &= -\cos x, & \Phi'''(x) &= \sin x,\\
F^{(IV)}(x) &= \sin x, & \Phi^{(IV)}(x) &= \cos x,\\
&\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Через те що для обох функцій четверта похідна збігається з самою функцією, то закон одержання похідних зрозумілий: ми маємо

$$F^{(4n)}(x) = F(x), \quad F^{(4n+1)}(x) = F'(x), \quad F^{(4n+2)}(x) = F''(x),$$
$$F^{(4n+3)}(x) = F'''(x)$$

для будьякого цілого n і аналогічно для $\Phi(x)$.

Через те що

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 1, \quad F''(0) = 0, \quad F'''(0) = -1,$$

то

$$F^{(4n)}(0)=0,\quad F^{(4n+1)}(0)=1,\quad F^{(4n+2)}(0)=0,$$
$$F^{(4n+3)}(0)=-1.$$

Таким чином, ряд Маклорена для функції $F(x)=\sin x$ має вигляд

$$(1)\qquad \frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots .$$

Аналогічно для $\cos x$, зауваживши, що

$$\Phi(0)=1,\quad \Phi'(0)=0,\quad \Phi''(0)=-1,\quad \Phi'''(0)=0,$$

знайдемо ряд

$$(2)\qquad 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots .$$

Обидва ці ряди збігаються при всіх значеннях x; справді, за ознакою Даламбера знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{2n(2n+1)}=0$$

і аналогічно

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n}}{(2n)!}\frac{(2n-2)!}{x^{2n-2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n-1)2n}=0.$$

Тепер треба показати, що ці всюди збіжні ряди мають як суми саме функції $\sin x$ і $\cos x$.

Позначаючи через $\varphi(x)$ суму ряду (1) і помічаючи, що ряд (2) є результатом почленного диференціювання ряду (1), робимо висновок, що сума другого ряду є $\varphi'(x)$:

$$(1)\qquad \varphi(x)=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots,$$

$$(2)\qquad \varphi'(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots .$$

Диференціюючи тепер почленно ряд (2), дістанемо

$$\varphi''(x)=-\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots,$$

але цей ряд збігається з першим рядом, якщо всі знаки в ньому змінити на супротивні; звідси робимо висновок, що

$$(3)\qquad \varphi''(x)=-\varphi(x).$$

Зауважимо, крім того, що

(4) $$\varphi(0)=0, \quad \varphi'(0)=1,$$

в чому ми переконуємось простим підставлянням $x=0$ в ряди (1) і (2).

Співвідношень (3) і (4) досить для того, щоб довести, що $\varphi(x)=\sin x$. Не маючи можливості вдаватись до результатів, які одержуємо з загальної теорії диференціальних рівнянь і які дозволяють безпосереднім шляхом прийти до цього висновку*, ми скористуємось таким штучним способом: насамперед переконаємось, що

$$\varphi(x)\cos x-\varphi'(x)\sin x$$

є стала величина. Справді, її похідна дорівнює нулеві, бо

$$\varphi'(x)\cos x-\varphi(x)\sin x-\varphi''(x)\sin x-\varphi'(x)\cos x=0,$$

через те що $\varphi(x)=-\varphi''(x)$. Покладаючи $x=0$ і користуючись рівністю (4), бачимо, що

(5) $$\varphi(x)\cos x-\varphi'(x)\sin x=0,$$

бо ліва частина стала і перетворюється в нуль при $x=0$.

Покажемо тепер, що

(6) $$\varphi(x)\sin x+\varphi'(x)\cos x=1.$$

Справді, у функції $\varphi(x)\sin x+\varphi'(x)\cos x$ похідна дорівнює нулеві, бо

$$\varphi'(x)\sin x+\varphi(x)\cos x+\varphi''(x)\cos x-\varphi'(x)\sin x=0$$

в наслідок рівності $\varphi(x)=-\varphi''(x)$. Отже, розглядувана функція $\varphi(x)\sin x+\varphi'(x)\cos x$ стала, а через те що вона дорівнює 1 при $x=0$ у наслідок $\varphi'(0)=1$, то рівність (6) доведена.

Але тоді з рівності (5) і (6), розглядаючи їх як рівняння для визначення $\varphi(x)$ і $\varphi'(x)$, одразу знаходимо

$$\varphi(x)=\sin x, \quad \varphi'(x)=\cos x.$$

Це дає можливість остаточно написати

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots.$$

Спосіб, яким ми довели, що $\varphi(x)=\sin x$, не може не викликати деякого почуття незадоволеності. Справді, він є абсолютно

---

* Функція $\varphi(x)$ є розв'язок диференціального рівняння $y''+y=0$; його загальний інтеграл є $y=A\cos x+B\sin x$, де A і B — довільні сталі; зауважуючи, що $\varphi(0)=0$ і $\varphi'(0)=1$, знаходимо: $A=0$, $B=1$, звідки $\varphi(x)=\sin x$.

точним, але в той же час надто штучним. Правда, можна дати деяке пояснення, чому ми стали доводити справедливість рівностей (5) і (6): передбачаючи, що наша функція $\varphi(x)$ дорівнюватиме $\sin x$, ми намагались, власне, довести тотожності

$$\sin x \cos x - \cos x \sin x = 0.$$

і

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

але таке пояснення навряд чи може цілком примирити з цим способом.

Крім того, що є важливіше, приклади розкладу функції e^x у ряд і розкладу $\sin x$ і $\cos x$ показують, що способи тут для кожного випадку окремі. Подивившись, як ми переконуємось у тому, що ряд Маклорена збігається саме до тієї функції, для якої він був складений, ми зовсім не знаємо ще, як це буде доводитись в інших випадках. Тому в наступному параграфі ми перейдемо до вивчення так званих залишкових членів ряду Тейлора або Маклорена, бо дістанемо тоді можливість, не вдаючись до штучних способів, безпосередньо розв'язувати питання про збіжність цих рядів до заданих функцій. Перед тим як переходити до цього питання, спинимось ще на одержаних рядах для $\sin x$ і $\cos x$. Ми вже бачили, що ці ряди збігаються для всіх значень x. Зауважимо, що збігаються вони дуже швидко. Але для того щоб обчислення з допомогою цих рядів стали якнайпростіші, намагаються ще посилити їх збіжність; зрозуміло, що чим менше x, тим ряди збігаються швидше; тому, замість того, щоб обчисляти, наприклад, $\sin x$ при даному x, ми з допомогою елементарних формул тригонометрії зводимо це до обчислення sin або cos від дуги, що лежить між 0 і $\frac{\pi}{4}$, а через те що $\frac{\pi}{4} = 0{,}785\ldots$, то можна розглядати наші ряди лише для значень x, менших ніж 1. У цьому випадку наші ряди будуть знакопочережними рядами, члени яких монотонно спадають, а тому, за теоремою § 14, якщо ми урвемо ряд на n-му члені, то зробимо помилку, абсолютна величина якої менша абсолютної величини $n+1$-го члена.

Наприклад, хай нам потрібно обчислити $\sin\alpha$, де α задовольняє нерівність $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$; насамперед ми напишемо

$$\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$$

і, позначаючи $\pi - \alpha$ через β, зауважимо, що $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$. Тепер, узявши, наприклад,

$$\sin\beta = \frac{\beta}{1} - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!},$$

ми робимо помилку, абсолютна величина якої менша ніж

$$\frac{\beta^7}{7!} < \frac{\pi^7}{4^7 \cdot 5040}.$$

Через те що $\frac{\pi}{4} = 0{,}785\ldots < 0{,}8$, то навіть найгрубіший підрахунок показує, що помилка буде менша ніж 0,0001. Таким чином, тільки трьох членів ряду досить, щоб уже дуже точно обчислити величину sin або cos. Саме цим способом і складаються таблиці натуральних величин тригонометричних функцій.

§ 32. Формули Тейлора і Маклорена. Залишковий член у формі Лагранжа.

Припустимо, що функція $F(x)$ є сума якогось збіжного степінного ряду; ми вже знаємо, що в цьому випадку ряд буде рядом Маклорена, і можемо написати

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0) + \ldots .$$

Запитаємо себе, якою буде помилка, яку ми допустимо, якщо замінимо величину функції $F(x)$ через суму n перших членів збіжного до неї ряду. Ця помилка, яку ми позначатимемо через $R_n(x)$, є, отже, різниця

$$R_n(x) = F(x) - \left[F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0)\right].$$

Щоб оцінити величину цієї помилки, ми введемо одну загальну формулу, яку прийнято називати **формулою Маклорена***; її можна прикладати не тільки до функцій, що допускають розклад у збіжний степінний ряд, але й до ширшого класу функцій.

Отже, відійдемо покищо від рядів і просто розглядатимемо функцію $F(x)$, відносно якої відомо, що вона має неперервні похідні до $n+1$-го порядку.

Розглянемо якусь точку $x = x_0$ і з'ясуємо, що можна сказати про величину

$$F(x_0) - \left[F(0) + \frac{x_0}{1}F'(0) + \ldots + \frac{x_0^n}{n!}F^{(n)}(0)\right].$$

Ця величина нам невідома, і ми намагатимемось оцінити її наближено. З цією метою запишемо цю величину у вигляді $M\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}$, де M — невідоме нам покищо стале число, тобто покладемо

$$F(x_0) - \left[F(0) + \frac{x_0}{1}F'(0) + \ldots + \frac{x_0^n}{n!}F^{(n)}(0)\right] = \frac{Mx_0^{n+1}}{(n+1)!}.$$

---

* Власне кажучи, така назва, так само як і назва „формула Тейлора", хоч і дуже вживана, але неправильна, бо Тейлор і Маклорен користувались лише нескінченними рядами, а формулу з залишковим членом уперше вивів Лагранж.

Записана формула не містить ніякого твердження; вона просто є визначенням невідомої нам покищо величини M. Щождо того, чому ми не просто позначили однією буквою різницю, що стоїть у лівій частині останньої рівності, а дали перевагу тому, щоб писати її у вигляді $\frac{Mx_0^{n+1}}{(n+1)!}$ і розглядати як невідоме число M, то це легко пояснити. Справді, коли б $F(x)$ була сумою ряду Маклорена, то в точці x_0 ми мали б

$$F(x_0)-\left[F(0)+\frac{x_0}{1}F'(0)+\ldots+\frac{x_0^n}{n!}F^{(n)}(0)\right]=\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(0)+$$
$$+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}F^{(n+2)}(0)+\ldots,$$

звідки

$$F(x_0)-\left[F(0)+\frac{x_0}{1}F'(0)+\ldots+\frac{x_0^n}{n!}F^{(n)}(0)\right]=$$
$$=\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}\left[F^{(n+1)}(0)+\frac{x_0}{n+2}F^{(n+2)}(0)+\ldots\right]=\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}M,$$

де M є сума ряду, що стоїть у квадратних дужках у правій частині рівності.

В загальному випадку, коли невідомо, чи може $F(x)$ бути сумою збіжного ряду Маклорена, ми шукаємо вираз для різниці

$$F(x_0)-\left[F(0)+\frac{x_0}{1}F'(0)+\ldots+\frac{x_0^n}{n!}F^{(n)}(0)\right]$$

у тій же формі $\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}M$, і оцінка величини M дає нам можливість встановити, можна чи не можна $F(x)$ розкласти в ряд.

Повернемось до формули

$$F(x_0)-\left[F(0)+\frac{x_0}{1}F'(0)+\ldots+\frac{x_0^n}{n!}F^{(n)}(0)\right]=\frac{Mx_0^{n+1}}{(n+1)!},$$

де M — покищо невідома величина, і намагатимемось оцінити цю величину.

З цією метою введемо допоміжну функцію $\varphi(x)$, яку визначають рівністю

$$\varphi(x)=F(x)-F(0)-\frac{x}{1}F'(0)-\ldots-\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0)-\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!},$$

де M — те ж число, як і в попередній формулі. Порівнюючи цю формулу з попередньою, ми бачимо, що $\varphi(x_0)=0$. Крім того, зрозуміло, що $\varphi(0)=0$, бо у формулі, що визначає $\varphi(x)$, при підставлянні 0 замість x усі члени, крім, можливо, двох перших, перетворюються в нуль, а два перші взаємно знищуються.

Зауважимо, що $\varphi(x)$ відрізняється від $F(x)$ лише на многочлен степеня $n+1$, тому якщо $F(x)$, за припущенням, мала похідні до $n+1$-го порядку, то це буде справедливим і для $\varphi(x)$. Обчисливши ці похідні для $\varphi(x)$, матимемо

$$\varphi'(x) = F'(x) - F'(0) - \frac{x}{1} F''(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(0) - \frac{Mx^n}{n!},$$

$$\varphi''(x) = F''(x) - F''(0) - \frac{x}{1} F'''(0) - \ldots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} F^{(n)}(0) - \frac{Mx^{n-1}}{(n-1)!},$$

. . . .

$$\varphi^{(n)}(x) = F^{(n)}(x) - F^{(n)}(0) - \frac{Mx}{1},$$

$$\varphi^{(n+1)}(x) = F^{(n+1)}(x) - M.$$

Але ми вже говорили, що $\varphi(0)=0$ і $\varphi(x_0)=0$. Звідси, за теоремою Ролля, робимо висновок, що знайдеться така точка x_1, що міститься між 0 і x_0, для якої $\varphi'(x_1)=0$. З другого боку, з самої формули, яка виражає $\varphi'(x)$, видно, що $\varphi'(0)=0$. Прикладаючи знову теорему Ролля, робимо висновок, що знайдеться така точка x_2 між 0 і x_1, в якій похідна від $\varphi'(x)$, тобто $\varphi''(x)$, перетворюється в нуль, отже, $\varphi''(x_2)=0$. Але, з другого боку, $\varphi''(0)=0$, як показує формула для $\varphi''(x)$.

Знову прикладаємо теорему Ролля і т. д. Побачимо, нарешті, що $\varphi^{(n)}(x)$ перетвориться в нуль у якійсь точці x_n і в точці 0; звідси, востаннє прикладаючи теорему Ролля, виведемо, що $\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})=0$, де x_{n+1} лежить між 0 і x_n, а отже, між 0 і x_0.

Але $\varphi^{(n+1)}(x_{n+1}) = F^{(n+1)}(x_{n+1}) - M$, а тому з $\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})=0$ випливає, що

$$M = F^{(n+1)}(x_{n+1}).$$

Саме цю оцінку ми й хотіли одержати. Таким чином, ми тепер можемо написати:

$$F(x_0) = F(0) + \frac{x_0}{1} F'(0) + \ldots + \frac{x_0^n}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(x_{n+1}),$$

де про число x_{n+1} нам відомо тільки те, що воно лежить між 0 і x_0.

Через те що ця формула справедлива для будьякої точки x_0, то індекс 0 можна тепер знищити, аби тільки $F(x)$ мала похідні до $n+1$-го порядку для всякого з розглядуваних значень x.

Тоді знайдемо

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta x),$$

де θ є число, що лежить між 0 і 1 (бо в цьому випадку θx лежить між 0 і x).

Ця формула має назву *формули Маклорена*, при чому вираз

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta x)$$

є так званий *залишковий член* цієї формули, взятий *у формі Лагранжа* (ми побачимо далі, що іноді залишковий член записують і в інших формах).

Коли б функція $F(x)$ була просто многочленом n-го степеня, то ми мали б $F^{(n+1)}(x)=0$ при всіх значеннях x, і тоді попередня формула прийняла б вигляд

$$F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0).$$

В загальному ж випадку, коли $F(x)$ не є многочлен, зрозуміло, що залишковий член не дорівнює нулеві. Але коли похідна $n+1$-го порядку лишається обмеженою навколо точки $x=0$, то можна сказати, що поблизу 0 функція $F(x)$ поводить себе майже як многочлен.

У цьому випадку попередня формула дає дуже прості наближені вирази для $F(x)$ при x, наближеному до 0, а саме

$$F(0),\quad F(0)+\frac{x}{1}F'(0),\quad F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0),\ \ldots.$$

Бажано, звичайно, мати аналогічну формулу, яка дозволить знаходити наближені вирази для функції поблизу від деякої точки $x=a$. Таку формулу легко одержати. Припускаючи, що $F(x)$ має похідні до $n+1$-го порядку включно в деякому інтервалі, що містить точку a, і приймаючи $x=a+h$, розглядатимемо h як нове змінне і величину $F(x)=F(a+h)$ як функцію від h. Якщо

$$f(h)=F(a+h),$$

то

$$f'(h)=F'(a+h),\quad f'(0)=F'(a),$$
$$f''(h)=F''(a+h),\quad f''(0)=F''(a),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(h)=F^{(n)}(a+h),\quad f^{(n)}(0)=F^{(n)}(a),$$
$$f^{(n+1)}(h)=F^{(n+1)}(a+h),\quad f^{(n+1)}(\theta h)=F^{(n+1)}(a+\theta h),$$

а тому, прикладаючи до $f(h)$ формулу Маклорена

$$f(h)=f(0)+\frac{h}{1}f'(0)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta h),$$

знайдемо

$$F(a+h)=F(a)+\frac{h}{1}F'(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(a)+$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(a+\theta h),$$

де, як і раніше, маємо $0<\theta<1$.

Ця формула має назву *формули Тейлора*, а вираз

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(a+\theta h)$$

є ***залишковий член*** цієї формули, взятий ***у формі Лагранжа***.

Ми можемо повторити тут те, що раніше говорилося про формулу Маклорена: можна, якщо $F^{(n+1)}(x)$ лишається обмеженою в сусідстві з точкою $x=a$, заміняти $F(a+h)$ наближено через

$$F(a),\quad F(a)+\frac{h}{1}F'(a),\quad F(a)+\frac{h}{1}F'(a)+\frac{h^2}{2!}F''(a),\ \ldots\ .$$

Образно кажучи, $F(a+h)$ поблизу точки a поводить себе майже як многочлен, розміщений за степенями h.

Формулу Тейлора записують часто в інших формах. Наприклад, заміняючи $a+h$ через x, тобто h через $x-a$, дістанемо

$$F(x)=F(a)+\frac{x-a}{1}F'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)+$$
$$+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}[a+\theta(x-a)].$$

Якщо в цій останній формулі покласти $a=0$, можна знову одержати формулу Маклорена.

Нарешті, цікаво відзначити, що формулу Тейлора можна розглядати як узагальнення теореми Лагранжа про скінченний приріст. Якщо x дорівнює якомусь сталому числу $x=b$, то

$$F(b)=F(a)+\frac{b-a}{1}F'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}F''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)+$$
$$+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}[a+\theta(b-a)].$$

Ця формула справедлива при всякому n, якщо тільки функція має похідні до $n+1$-го порядку. Зокрема, при $n=0$ вона дає

$$F(b)=F(a)+\frac{b-a}{1}F'[a+\theta(b-a)].$$

Але через те що $0<\theta<1$, то $a+\theta(b-a)$ є число, що лежить між a і b. Позначаючи це число через ξ, маємо

$$F(b)-F(a)=(b-a)F'(\xi),$$

а це є звичайна форма теореми Лагранжа про скінченний приріст; тут $a<\xi<b$.

Повертаючись до формули

$$F(a+h)=F(a)+\frac{h}{1}F'(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(a)+$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(a+\theta h),$$

зауважимо, що в ній a може бути будьяким числом, аби у функції $F(x)$ існували похідні до $n+1$-го порядку в сусідстві з точкою a. Заміняючи тому a через x, можемо формулу Тейлора писати у вигляді

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x)+$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(x+\theta h)$$

або

$$F(x+h)-F(x)=\frac{h}{1}F'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x)+$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(x+\theta h).$$

В цій формі формула Тейлора показує, що приріст функції розміщений за зростаючими степенями приросту її аргумента.

Формула Тейлора має численні і різноманітні прикладання. Крім теорії рядів, для якої ми її вивели, вона дуже цінна і в багатьох інших питаннях. Зокрема, далі ми побачимо її прикладання до задачі про відшукання максимуму і мінімуму функції.

Тепер, щоб не віддалятись від теорії рядів, не будемо розглядати цих прикладань формули Тейлора. Зате ми знайдемо ще один вираз для залишкового члена цієї формули, бо для теорії рядів однієї Лагранжевої форми залишкового члена недосить.

§ 33. Залишковий член у формі Коші.

Візьмемо формулу попереднього параграфа:

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x)+$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Ми бачимо, що різниця

$$F(x+h)-\left[F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x)\right]$$

є якась функція від x; позначаючи її через $R_n(x)$, ми хочемо знайти для неї тепер трохи інший вираз, бо форма, якої їй надав Лагранж, не зважаючи на всю її спрощеність, іноді є незручна.

Таким чином, покладаючи

$$R_n(x)=F(x+h)-\left[F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x)\right],$$

шукатимемо інших оцінок для $R_n(x)$.

Хай $x+h=x_0$ і, отже, $h=x_0-x$.

Розглядаючи x_0 як стале, а x як змінне, можна сказати, що $R_n(x)$ є функція x, визначувана рівністю

$$R_n(x)=F(x_0)-\left[F(x)+\frac{x_0-x}{1}F'(x)+\ldots+\frac{(x_0-x)^n}{n!}F^{(n)}(x)\right].$$

Але ця функція перетворюється в нуль у точці x_0, в чому можна переконатись, безпосередньо підставляючи x_0 в попередню рівність.

Далі, похідна від $R'_n(x)$ виражається так:

$$R'_n(x)=-F'(x)+F'(x)-\frac{x_0-x}{1}F''(x)+\frac{x_0-x}{1}F''(x)-\ldots+$$
$$+\frac{(x_0-x)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n)}(x)-\frac{(x_0-x)^n}{n!}F^{(n+1)}(x).$$

Цей вираз ми дістанемо, якщо зауважимо, що кожний член у квадратній дужці є добуток двох співмножників і похідна від $\frac{(x_0-x)^k}{k!}F^{(k)}(x)$ є

$$-\frac{(x_0-x)^{k-1}}{(k-1)!}F^{(k)}(x)+\frac{(x_0-x)^k}{k!}F^{(k+1)}(x)\quad k=1,\ 2,\ldots,n.$$

Зауважимо тепер, що у формулі, яка виражає $R'_n(x)$, усі члени, крім останнього, попарно скорочуються, в наслідок чого

$$R'_n(x)=-\frac{(x_0-x)^n}{n!}F^{(n+1)}(x).$$

За теоремою Лагранжа про скінченний приріст можна написати

$$R_n(x_0)-R_n(x)=(x_0-x)\,R'_n(\xi),$$

де ξ є число, що лежить між x і x_0.

Але ми вже бачили, що $R_n(x_0)=0$, тому

$$-R_n(x)=(x_0-x)\,R'_n(\xi),$$

або

$$R_n(x)=(x_0-x)\frac{(x_0-\xi)^n}{n!}F^{(n+1)}(\xi).$$

Зауважимо, що число ξ можна записати у вигляді $x+\theta h$, де $0<\theta<1$, бо тоді воно лежить між x і $x+h=x_0$, тому $x_0-\xi=$ $=x_0-x-\theta h=h-\theta h=h(1-\theta)$. Отже,

$$\xi=x+\theta h,\quad x_0-\xi=h\,(1-\theta),\quad x_0-x=h.$$

Ці співвідношення дозволяють переписати попередню формулу у вигляді

$$R_n(x) = h\,\frac{[h(1-\theta)]^n}{n!}\,F^{(n+1)}(x+\theta h)$$

або остаточно

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}\,F^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Це і є *залишковий член формули Тейлора у формі Коші.*

Нагадаємо, що у формі Лагранжа залишковий член мав вигляд

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\,F^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Ми бачимо, що у формі Лагранжа знаменник є $(n+1)!$, а не $n!$, тому знаменник швидше зростає при зростанні n, але зате у формі Коші чисельник містить вираз $(1-\theta)^n$, де $0<\theta<1$, тобто вираз, що прямує до нуля при n необмежено зростаючому. Тому при розв'язанні питання про те, чи $R_n(x)$ прямуватиме до нуля із зростанням n, ні одна з форм залишкового члена не може бути наперед визнана кращою; ми побачимо далі, що залежно від вигляду досліджуваних функцій доводиться користуватись то однією, то другою формулою.

Цілком аналогічно і для формули Маклорена можна знайти залишковий член уже не в формі Лагранжа, а у формі Коші. За формулою Маклорена маємо

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0) + R_n(x),$$

де, за Лагранжем, залишковий член виражається у вигляді

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,F^{(n+1)}(\theta x).$$

У формі Коші $R_n(x)$ слід записати так:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}\,F^{(n+1)}(\theta x).$$

Справді, якщо різниця

$$F(a+h) - \left[F(a) + \frac{h}{1}F'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}F^{(n)}(a)\right]$$

у формі Коші повинна бути записана у вигляді

$$\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}\,F^{(n+1)}(a+\theta h),$$

то, заміняючи h через x, знайдемо для різниці

$$F(a+x)-\left[F(a)+\frac{x}{1}F'(a)+\ldots+\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(a)\right]$$

вираз

$$\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}F^{(n+1)}(a+\theta x)$$

і, нарешті, покладаючи $a=0$, прийдемо до шуканого виразу для залишкового члена ряду Маклорена у формі Коші:

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}F^{(n+1)}(\theta x).$$

§ 34. Прикладання формули Тейлора до задачі про відшукання максимуму і мінімуму.

Ми знаємо, що точка a називається точкою максимуму для функції $f(x)$, якщо існує такий інтервал з центром у точці a, що для кожної точки x цього інтервалу

$$f(x)<f(a).$$

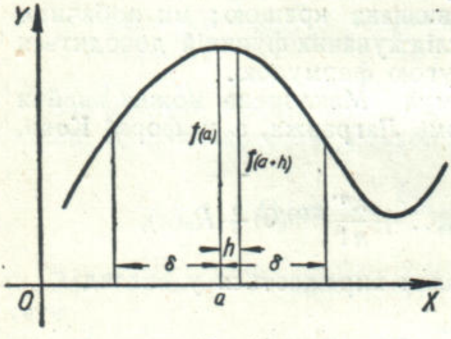

Рис. 8.

Інакше кажучи, існує таке число δ, що для всякого h по модулю, меншому ніж δ, ми маємо

$$f(a+h)<f(a).$$

Так само точка a називається точкою мінімуму для функції $f(x)$, якщо знайдеться таке δ, що для всякого h, $|h|<\delta$ маємо

$$f(a+h)>f(a).$$

Ми бачили („Диференціальне числення“, розд. IX, § 80), що для знаходження тих точок, де $f(x)$ має максимум або мінімум, треба розв'язати рівняння

$$f'(x)=0$$

і, якщо a є один з коренів цього рівняння, підставити величину $x=a$ в другу похідну $f''(x)$ даної функції. Якщо при цьому дістанемо $f''(a)<0$, то a є точка максимуму, якщо $f''(a)>0$, то a є точка мінімуму для $f(x)$, і, нарешті, якщо $f''(a)=0$, то питання лишається нерозв'язаним, бо $f(x)$ у точці a може мати максимум або мінімум, або не мати ні того, ні другого.

Тепер, коли ми ознайомилися з формулою Тейлора, ми можемо знову повернутись до цієї задачі і маємо можливість розв'язати її до кінця.

Зауважимо насамперед, що все зводиться до вивчення знака різниці $f(a+h)-f(a)$ для досить малих значень h.

Справді, може a priori для заданої функції $f(x)$ і для всякої точки a спостерігатись тільки один з трьох випадків:

1) при всіх досить малих значеннях h різниця $f(a+h)-f(a)$ від'ємна;

2) при всіх досить малих значеннях h різниця $f(a+h)-f(a)$ додатна;

3) яке б мале не було h, різниця $f(a+h)-f(a)$ не зберігає знака, тобто може мати і додатні і від'ємні значення.

В першому випадку a є точка максимуму.

Справді, якщо

$$f(a+h)-f(a)<0$$

при всіх досить малих значеннях h, то це означає, що знайдеться таке δ, при якому для всіх $|h|<\delta$ попередня різниця від'ємна, тобто

$$f(a+h)<f(a) \qquad |h|<\delta.$$

Але це і є нерівність, що характеризує точку максимуму.

В другому випадку, міркуючи зовсім аналогічно, переконуємось, що a є точка мінімуму.

Нарешті, в третьому випадку в точці a немає ні максимуму, ні мінімуму, бо коли було б те або друге, то знайшлося б таке δ, при якому для всіх $|h|<\delta$ різниця $f(a+h)-f(a)$ зберігала б знак, чого немає за нашим припущенням.

Таким чином, ми переконались, що питання зводиться до вивчення знака різниці:

$$f(a+h)-f(a).$$

Якщо припускати, що функція $f(x)$ має похідні до $n+1$-го порядку, то цю різницю за формулою Тейлора ми можемо писати у вигляді

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+$$
$$+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h),$$

де $0<\theta<1$.

Скористаємось цією формулою для розв'язання питання про знак $f(a+h)-f(a)$. Насамперед приймемо $n=0$, тобто напишемо формулу Тейлора у вигляді

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h}{1}f'(a+\theta h).$$

Якщо $f'(a)\neq 0$, то при досить малому h і $f'(a+\theta h)$ також $\neq 0$ і має той же знак, що й $f(a)$ (бо $f'(x)$ неперервна). Тому вираз

$hf'(a+\theta h)$ має той же знак, що й $hf'(a)$, а через те що $f'(a)$ стале, то $hf'(a)$ змінює знак, коли h змінює знак, переходячи через нуль. Звідси випливає, що різниця $f(a+h)-f(a)$ не може зберігати знака, яке б мале не було h, а тому в точці a не може бути ні максимуму, ні мінімуму. Таким чином, якщо $f'(a)\neq 0$, то в точці a немає ні максимуму, ні мінімуму.

Отже, **для того, щоб функція $f(x)$ мала максимум або мінімум у точці a, необхідно, щоб**

$$f'(a)=0.$$

Інакше кажучи, точки максимуму або мінімуму треба шукати серед коренів рівняння

$$f'(x)=0.$$

Припустимо, що $f'(a)=0$, і напишемо знову формулу Тейлора, але вже прийнявши $n=1$. Тоді

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h).$$

Зауваживши, що

$$f'(a)=0,$$

дістанемо

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h).$$

Якщо $f''(a)\neq 0$, то і $f''(a+\theta h)\neq 0$ при досить малому h, при чому знак $f''(a+\theta h)$ збігається із знаком $f''(a)$ (бо $f''(x)$ неперервна). Через те що множник $\frac{h^2}{2!}$ додатний при всіх значеннях h, то знак різниці $f(a+h)-f(a)$ буде той самий, що і знак $f''(a)$. Тому, якщо $f''(a)<0$, то $f(a+h)-f(a)<0$, і, отже, ми маємо точку максимуму. Так само, якщо $f''(a)>0$, то $f(a+h)-f(a)>0$ при всіх досить малих h, тобто ми маємо точку мінімуму.

Отже, якщо $f'(a)=0$ і $f''(a)<0$, то ми маємо максимум, якщо $f'(a)=0$ і $f''(a)>0$, то маємо мінімум.

У випадку, якщо $f'(a)=0$ і $f''(a)=0$, ми напишемо формулу Тейлора, взявши вже $n=2$, тобто

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta h).$$

Міркуючи так само, як і раніше, ми бачимо, що при досить малому h, якщо тільки $f'''(a)\neq 0$, знак $f'''(a+\theta h)$ збігається із знаком $f'''(a)$, а через те що h^3 змінює знак, коли h проходить через нуль, то і весь вираз у правій частині, а разом з ним і різниця $f(a+h)-f(a)$ змінює знак, тому **в точці a немає ні максимуму, ні мінімуму.**

Тепер ми можемо перейти до розгляду питання в загальному вигляді. Припустимо, що $f'(a)=0$, $f''(a)=0, \ldots$, $f^{(n-1)}(a)=0$, але $f^{(n)}(a) \neq 0$. В такому випадку формула Тейлора дасть $f(a+h)-f(a)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)$, бо всі члени, що йдуть перед членом $\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)$, перетворились у нуль.

Через те що ми припустили, що $f^{(n)}(a) \neq 0$, то при досить малому h вираз $f^{(n)}(a+\theta h)$ має той же знак, що й $f^{(n)}(a)$ (ми ж припускали, що $f(x)$ має похідні до $n+1$-го порядку, отже, $f^{(n)}(x)$ неперервна). Далі доведеться розрізняти два випадки: коли n парне і коли воно непарне. Якщо n парне, то h^n завжди додатне, а тому знак правої частини збігається із знаком $f^{(n)}(a)$. Звідси випливає, що при досить малому h різниця $f(a+h)-f(a)$ додатна при $f^{(n)}(a)>0$ і від'ємна при $f^{(n)}(a)<0$. Отже, якщо тільки $f^{(n)}(a)<0$, то маємо максимум, а при $f^{(n)}(a)>0$ маємо мінімум.

Коли ж n непарне, то h^n змінює знак разом з h, а тому і різниця $f(a+h)-f(a)$ змінює знак, тобто в точці a немає ні максимуму, ні мінімуму.

Резюмуючи все сказане вище, ми приходимо до такого висновку:

Для того щоб знайти точки, де функція $f(x)$ має максимум або мінімум, треба розв'язати рівняння

$$f'(x)=0.$$

Хай a — один з коренів цього рівняння. Якщо в послідовності $f''(a)$, $f'''(a), \ldots, f^{(k)}(a), \ldots$ перше число, відмінне від нуля, є $f^{(n)}(a)$, то, у випадку якщо n непарне, в точці a немає ні максимуму, ні мінімуму, коли ж n парне, то при $f^{(n)}(a)<0$ маємо максимум, а при $f^{(n)}(a)>0$ — мінімум.

Приклад 1. Знайти максимум або мінімум функції

$$f(x)=(a^2-x^2)^3.$$

Маємо

$$f'(x)=-6(a^2-x^2)^2 x.$$

Корені цього рівняння

$$x=0, \quad x=+a \quad \text{і} \quad x=-a.$$

Для дослідження цих коренів обчислимо, згідно з загальним правилом, $f''(x)$. Знайдемо

$$f''(x)=-6(a^2-x^2)(a^2-5x^2).$$

Звідси ми безпосередньо бачимо, що при $x=0$

$$f''(0)=-6a^4<0,$$

а тому точка $x=0$ є точка максимуму.

Але точки $x = +a$ і $x = -a$ для другої похідної дають значення, рівні нулеві:

$$f''(+a) = f''(-a) = 0.$$

Тому треба перейти до третьої похідної

$$f'''(x) = -6\,[-12a^2x + 20x^3],$$

звідки

$$f'''(+a) = -48a^3,$$
$$f'''(-a) = +48a^3.$$

В тому і другому випадках f''' буде відмінною від нуля, а тому немає ні максимуму, ні мінімуму.

Приклад 2. Знайти максимум або мінімум для функції

$$f(x) = x^4 e^{-x^2}.$$

Маємо

$$f'(x) = e^{-x^2}(4x^3 - 2x^5).$$

Через те що $e^{-x^2} \neq 0$, то рівняння

$$f'(x) = 0$$

зводиться до рівняння

$$4x^3 - 2x^5 = 0,$$

корені якого

$$x = 0, \quad x = +\sqrt{2} \quad \text{і} \quad x = -\sqrt{2}.$$

Знайдемо $f''(x)$; маємо:

$$f''(x) = e^{-x^2}(4x^6 - 16x^4 + 12x^2).$$

При $x = \pm\sqrt{2}$ $x^2 = 2$, а тому

$$f''(+\sqrt{2}) = f''(-\sqrt{2}) = -8e^{-2} < 0.$$

Отже, в точках $x = +\sqrt{2}$ і $x = -\sqrt{2}$ функція має максимум.
При $x = 0$ ми маємо

$$f''(0) = 0,$$

тому треба дослідити $f'''(x)$. Маємо:

$$f'''(x) = e^{-x^2}(-8x^7 + 56x^5 - 88x^3 + 24x);$$

через те що $f'''(0) = 0$, то доведеться дослідити $f^{(IV)}(x)$. Дістанемо:

$$f^{(IV)}(x) = -2xe^{-x^2}(-8x^7 + 56x^5 - 88x^3 + 24x) + \\ + e^{-x^2}(-56x^6 + 280x^4 - 264x^2 + 24).$$

Тепер уже при $x=0$ ми маємо

$$f^{(IV)}(0)=24,$$

а тому в точці 0 маємо мінімум.

§ 35. Збіжність рядів Тейлора і Маклорена.

Повернемось до рядів і, маючи в своєму розпорядженні формули Тейлора і Маклорена, судитимемо по вигляду їх залишкових членів про збіжність рядів Тейлора і Маклорена.

Справді, хай $F(x)$ є якась функція, що має похідні всіх порядків у точці $x=0$. Обчисляючи величини цієї функції і її похідних у точці $x=0$, ми можемо формально написати її ряд Маклорена:

$$F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0)+\ldots.$$

Але, як уже говорилося в § 29, навіть коли ми переконались у тому, що він збігається в деякому інтервалі, ми ще не маємо права звідси зробити висновку, що його сума дорівнює $F(x)$.

Щоб дізнатись, чи збігається ряд Маклорена до функції $F(x)$, міркуватимемо так: із самого означення збіжності функціонального ряду випливає, що коли ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

збігається до деякої функції $S(x)$ на будьякому інтервалі, то це означає, що для кожної точки x цього інтервалу ми маємо

$$\lim_{n\to\infty}\{S(x)-[u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)]\}=0,$$

тобто різниця між $S(x)$ і сумою n перших членів розглядуваного ряду повинна прямувати до нуля при необмеженому зростанні n.

Таким чином, якщо $F(x)$ є сума ряду Маклорена

$$F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}F^n(0)+\ldots$$

на деякому інтервалі, то це означає, що

$$F(x)-\left[F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0)\right]$$

повинно прямувати до нуля при необмеженому зростанні n. Навпаки, якщо ця різниця прямує до нуля при необмеженому зростанні n при деяких x, то можна сказати, що $F(x)$ є сума розглядуваного ряду Маклорена для цих значень x.

Але розглядувану різницю ми назвали залишковим членом і позначили символом $R_n(x)$. Отже, питання про те, чи збігається ряд Маклорена до функції $F(x)$ для даного значення x, еквівалентне питанню про те, чи прямує $R_n(x)$ до нуля при необмеженому зростанні n. Для $R_n(x)$ ми маємо дві зручні оцінки: форму Лагранжа

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta x)$$

і форму Коші

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}F^{(n+1)}(\theta x).$$

Ці вирази дозволяють у більшості випадків розв'язати питання про збіжність ряду до даної функції, як ми це побачимо далі на багатьох прикладах. Зауважимо, наприклад, що коли у розглядуваної функції похідні всіх порядків для будьякого значення x у деякому інтервалі лишаються за абсолютною величиною менші якогось сталого додатного числа M, то ряд збігається до $F(x)$ для всіх значень x на цьому інтервалі. Справді, тоді з форми Лагранжа маємо:

$$|R_n(x)|<\frac{M\,|x^{n+1}|}{(n+1)!}.$$

Але $\frac{M\,|x^{n+1}|}{(n+1)!}$ прямує до нуля при $n\to\infty$ для всіх значень x, бо $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ є член абсолютно збіжного для всіх значень x ряду (§ 23).

Це просте зауваження дозволить, наприклад, заново довести, що ряд

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$$

збігається до $\sin x$, в чому ми вже переконались у § 31. Справді, розглядуваний ряд є, як ми бачили, ряд Маклорена для функції $\sin x$, а через те що похідна будьякого порядку від $\sin x$ є або $\cos x$, або $-\sin x$, або $-\cos x$, або $\sin x$, то всі ці похідні обмежені (не більше 1) для всякого значення x, а отже, на підставі попереднього зауваження для цього ряду $|R_n(x)|<\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$, тобто прямує до нуля для всіх значень x.

Цілком так само доводиться, що ряд

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$$

збігається до функції $\cos x$.

Перед тим як переходити до інших, уже нових, прикладів розкладів функцій у ряд Маклорена, зауважимо, що все сказане для ряду Маклорена можна дослівно повторити для ряду Тейлора.

Отже, для того щоб ряд

$$F(a)+\frac{x-a}{1}F'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)+\ldots$$

збігався до $F(x)$, необхідно і досить, щоб залишковий член його, тобто

$$R_n(x)=F(x)-\left[F(a)+\frac{x-a}{1}F'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)\right],$$

прямував до нуля. Але цей залишковий член можна виразити у формі Лагранжа

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]$$

або у формі Коші

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}F^{(n+1)}[a+\theta(x-a)].$$

Ці вирази дають можливість судити про прямування до нуля залишкового члена в цілому ряді важливих випадків.

§ 36. Розклад у ряд $\ln(1+x)$.

Ми вже відзначили в § 29, що розкласти $\ln x$ у ряд Маклорена не можна, бо функція і її похідні не будуть скінченними в точці $x=0$, але функцію $\ln(1+x)$ можна розкласти в ряд Маклорена. Справді, покладаючи

$$F(x)=\ln(1+x),$$

знайдемо

$$F'(x)=\frac{1}{1+x},\qquad F^{(IV)}(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4},$$

$$F''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

$$F'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Тому

$$F(0)=0,\quad F'(0)=1,\quad F''(0)=-1,\quad F'''(0)=2!,$$

$$F^{(IV)}(0)=-3!,\ \ldots,\ F^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

Отже, ряд Маклорена для цієї функції має вигляд

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots.$$

Насамперед, зауважимо, що інтервал збіжності цього ряду є $(-1, +1)$, в чому можна переконатись, хоча б зауваживши, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

(див. про інтервал збіжності § 24).

Звідси випливає, що для значень x, для яких $|x|>1$, взагалі не може бути мови про збіжність ряду. Якщо $|x|<1$, ряд напевне збігається, але треба ще показати, що саме до $\ln(1+x)$, і, нарешті, треба дослідити, що відбувається в кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x=+1$ і при $x=-1$.

Якщо $x=-1$, то наш ряд перетворюється в ряд

$$-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots,$$

який розбігається, бо відрізняється від гармонічного лише тим, що всі його члени помножені на -1.

Тому випадок $x=-1$ ми можемо не розглядати.

Тепер вивчимо значення x, для яких $-1<x\leqslant 1$, і подивимось, чи збігається для них наш ряд до $\ln(1+x)$.

З цією метою напишемо його залишковий член як у формі Лагранжа

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(-1)^n\,n!}{(1+\theta x)^{n+1}}=$$
$$=\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1},$$

так і у формі Коші

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}F^{(n+1)}(\theta x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n(-1)^n\,n!}{n!\,(1+\theta x)^{n+1}}=$$
$$=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Для значень x, таких, що $0\leqslant x\leqslant 1$, ми маємо $0\leqslant\dfrac{x}{1+\theta x}\leqslant 1$, а тому з форми Лагранжа знайдемо

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{n+1},$$

і, отже, $R_n(x)$ прямує до нуля, коли n необмежено зростає. Для значень x, що лежать між -1 і 0, форма Лагранжа не дозволяє судити про прямування $R_n(x)$ до нуля, бо вираз $1+\theta x$ може бути як завгодно малим при x, близькому до -1. Та зате форма Коші дає відповідь на питання. Якщо $-1<x\leqslant 0$

то можна знайти таке додатне число r, що $0 > x > -r > -1$; тоді

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{r^{n+1}}{1-r},$$

бо

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$$

і

$$1 + \theta x > 1 - r.$$

Ми знову бачимо, що $R_n(x)$ прямує до нуля при необмеженому зростанні n, бо з $0 > -r > -1$ випливає $0 < r < 1$, а тому r^{n+1} прямує до нуля при необмеженому зростанні n.

Таким чином ми переконались, що розглядуваний ряд дійсно збігається до $\ln(1+x)$, якщо тільки $-1 < x \leqslant 1$, і ми можемо писати

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad -1 < x \leqslant 1.$$

Зокрема, при $x = +1$ ми одержуємо дуже цікаву рівність:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots .$$

З рядом, що стоїть у правій частині цієї рівності, ми вже зустрічались у § 14; ми бачили, що він збігається, але не абсолютно; тепер ми знаємо, що його сума є $\ln 2$.

§ 37. Складання таблиць логарифмів.

Формула

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots ,$$

виведена в попередньому параграфі, справедлива лише для значень x, що задовольняють нерівність $-1 < x \leqslant 1$, проте, ми зуміємо скористатись нею для обчислення логарифмів усіх цілих чисел.

З цією метою насамперед зауважимо, що, заміняючи в попередній рівності x на $-x$, ми одержимо нову формулу

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots ,$$

яка буде справедлива при $-1 < -x \leqslant 1$, тобто, інакше кажучи, при $-1 \leqslant x < 1$.

Через те що різниця двох збіжних рядів є знову збіжний ряд, при чому його сума є різниця між сумами двох заданих рядів, то ми можемо писати

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left[\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right],$$

при чому ця рівність буде справедлива для значень x в інтервалі $-1<x<+1$, але вже не придатна ні при $x=-1$, ні при $x=+1$.

Хай n є якесь ціле число; ми завжди можемо визначити x з рівності

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}.$$

Справді, тоді $x=\frac{1}{2n+1}$ і, отже, $0<x<1$. Тому для знайденого значення x тількищо написана формула для $\ln\frac{1+x}{1-x}$ правильна, і ми можемо написати

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots\right],$$

звідки випливає, що

$$\ln(n+1)=\ln n+\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{3(2n+1)^3}+\frac{2}{5(2n+1)^5}+\ldots.$$

Таким чином, знаючи вже, чому дорівнює натуральний логарифм якогось цілого числа n, ми можемо за цією формулою знайти, чому дорівнює $\ln(n+1)$.

Ця формула дуже зручна для обчислень; справді, якщо в ній спинитися на члені

$$\frac{2}{2p-1}\,\frac{1}{(2n+1)^{2p-1}},$$

то остача буде додатним числом, меншим ніж

$$\frac{2}{2p+1}\left[\frac{1}{(2n+1)^{2p+1}}+\frac{1}{(2n+1)^{2p+3}}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{2}{2p+1}\,\frac{\frac{1}{(2n+1)^{2p+1}}}{1-\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2}=\frac{1}{(2p+1)(2n+1)^{2p-1}\,2n(n+1)}.$$

Наприклад, якщо ми хочемо цим способом обчислити $\ln 2$, нам досить покласти $n=1$ в рівності, що виражає $\ln(n+1)$ через $\ln n$, і ми знайдемо

$$\ln 2 = 2\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\ldots,$$

при чому помилка, яку ми зробимо, якщо спинимось на члені

$$\frac{2}{2p-1}\,\frac{1}{3^{2p-1}},$$

буде менша ніж

$$\frac{1}{4(2p+1)\,3^{2p-1}}.$$

Наприклад, якщо ми хочемо обчислити $\ln 2$ з сімома десятковими знаками, то треба в попередньому ряді дійти до восьмого члена $\frac{2}{15\cdot 3^{15}}$; при цьому, згідно з попереднім, ми зробимо помилку меншу, ніж

$$\frac{1}{4\cdot 17\cdot 3^{15}}<\frac{11}{10^{10}};$$

якщо ми кожний з узятих восьми членів ряду перетворимо в десятковий дріб і обчислимо до дев'ятого десяткового знака, то помилка при обчисленні кожного з членів $<\frac{1}{10^9}$, отже, при обчисленні їх суми вона $<\frac{8}{10^9}$, і, додавши до цього $\frac{11}{10^{10}}$, ми бачимо, що вся помилка буде $<\frac{1}{10^8}$, тобто не вплине на сьомий десятковий знак. Таким чином, ми одержуємо

$$\ln 2 = 0{,}6931471,$$

при чому ці сім знаків правильні.

Важливо зауважити, що із зростанням n величина $\frac{1}{2n+1}$ спадає, тому помилка при обчисленні стає все менша і менша. Таким чином, викладки, дуже втомні спочатку, стають потім усе легші і легші, бо виявляється, що можна нехтувати вже третім і, нарешті, навіть другим членом ряду.

Зауважимо, нарешті, що тут ми говорили про обчислення натуральних логарифмів цілих чисел, але для практики зручно мати логарифми при основі 10. Але перехід від одних логарифмів до інших дуже легкий. Справді, якщо y є десятковий логарифм x, тобто логарифм x при основі 10, то це означає, що

$$10^y = x.$$

Взявши натуральні логарифми від обох частин цієї рівності, дістанемо

$$y \ln 10 = \ln x.$$

Отже,

$$\lg x \cdot \ln 10 = \ln x,$$

або

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Число $M = \frac{1}{\ln 10}$ іноді називають модулем десяткової системи логарифмів. Воно дорівнює

$$M = 0{,}43429\ldots .$$

Ми можемо, отже, сказати, що для одержання десяткового логарифма якогось числа досить знайти його натуральний логарифм і помножити його на модуль M:

$$\lg x = M \ln x.$$

Навпаки, коли б ми хотіли перейти від десяткових логарифмів до натуральних, то досить було б написати

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x,$$

при чому

$$\frac{1}{M} = 2{,}30258\ldots .$$

Таким чином, ми бачимо, що теорія рядів дозволяє скласти таблиці логарифмів. Зараз побачимо, що вона дає можливість пояснити, як у цих таблицях виконувати інтерполяцію.

Ми знаємо, що коли треба обчислити десятковий логарифм якогось числа, наприклад, $A + \alpha$, у якого ціла частина A лежить між 1000 і 10 000, то роблять так: знаходять у звичайних п'ятизначних таблицях логарифмів цілих чисел від 1 до 10 000 десятковий логарифм числа A і сусіднього з ним числа $A + 1$, потім беруть різницю $\lg(A+1) - \lg A$ і, нарешті, умовляються вважати, що

$$\lg(A+\alpha) = \lg A + \alpha[\lg(A+1) - \lg A].$$

Подивимось, як можна пояснити таке правило. Ми бачили, що

$$\lg x = M \ln x,$$

тому

$$\lg(A+\alpha) = M \ln(A+\alpha),$$

і аналогічно

$$\lg A = M \ln A, \quad \lg(A+1) = M \ln(A+1).$$

Отже, ми повинні пояснити, чому ми користуємось рівністю

$$\ln(A+\alpha)=\ln A+\alpha[\ln(A+1)-\ln A].$$

Встановимо, яку помилку ми робимо, коли приймаємо, що число, яке стоїть у лівій частині, дорівнює числу, що стоїть у правій частині. Ми маємо

$$\ln(A+\alpha)-\ln A-\alpha[\ln(A+1)-\ln A]=$$
$$=\ln\left(1+\frac{\alpha}{A}\right)-\alpha\ln\left(1+\frac{1}{A}\right)=\left(\frac{\alpha}{A}-\frac{\alpha^2}{2A^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha^3}{3A^3}-\ldots\right)-\alpha\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{2A^2}+\frac{1}{3A^3}-\ldots\right)=$$
$$=\frac{\alpha(1-\alpha)}{2A^2}-\frac{\alpha(1-\alpha^2)}{3A^3}+\frac{\alpha(1-\alpha^3)}{4A^4}-\ldots.$$

Ряд, що стоїть у правій частині цієї рівності, є знакопочережний і з монотонно спадними членами, бо $0<\alpha<1$; тому (§ 14) його сума менша ніж $\frac{\alpha(1-\alpha)}{2A^2}$, а через те що $0<\alpha<1$, то добуток $\alpha(1-\alpha)=\frac{1}{4}-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2$ не більше $\frac{1}{4}$, а тому сума ряду $\leqslant\frac{1}{8A^2}<\frac{10^{-6}}{8}$, бо ми припустили, що A лежить між 1000 і 10000.

Таким чином, прийнявши, що ліва частина останньої рівності дорівнює 0, ми робимо помилку $<\frac{10^{-6}}{8}$, а тому можна вважати цілком виправданим те правило, яке вчить нас приймати

$$\lg(A+\alpha)=\lg A+\alpha[\lg(A+1)-\lg A].$$

Аналогічно можна було б виправдати те правило інтерполяції, з допомогою якого по даному логарифму відшукується число, якщо цього числа немає в таблицях логарифмів (як це звичайно й буває).

§ 38. Біноміальний ряд.

Розглянемо розклад у ряд Маклорена для функції

$$F(x)=(1+x)^m,$$

де m — яке завгодно стале число. Коли б m було додатним цілим числом, то ми мали б за формулою бінома Ньютона:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\ldots+x^m.$$

Зараз побачимо, що коли m є або ціле від'ємне, або дробове число, розклад $(1+x)^m$ представляється вже не у вигляді скінченної суми, а у вигляді ряду, але його коефіцієнти матимуть такий же вигляд, як у формулі бінома Ньютона. Справді, покладаючи

$$F(x)=(1+x)^m,$$

ми знайдемо

$$F'(x)=m(1+x)^{m-1}, \qquad F'(0)=m,$$
$$F''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}, \quad F''(0)=m(m-1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F^{(n)}(x)=m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$
$$F^{(n)}(0)=m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1).$$

Тому ряд Маклорена для функції $(1+x)^m$ має вигляд

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\ldots.$$

Цей ряд, що природно уривається на члені x^m, коли m — число ціле, бо всі наступні коефіцієнти тоді дорівнюють нулеві, для m дробового або цілого, але від'ємного, вже є нескінченним рядом. Дослідимо питання про його збіжність і про те, чи є $(1+x)^m$ його сумою для тих значень x, для яких він збігається. Насамперед зрозуміло, що інтервал збіжності цього ряду є $(-1, +1)$, бо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n+1)}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}\right|=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|1-\frac{m+1}{n+1}\right|=1.$$

Отже, ряд напевне розбігається при $|x|>1$ і збігається при $|x|<1$; щодо точок $x=+1$ і $x=-1$, то треба провадити окреме дослідження.

Розглянемо залишковий член цього ряду у формі Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n+1)}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}.$$

Якщо $0<x<1$, то $1+\theta x>1$, а тому при $n+1>m$ маємо:

$$(1+\theta x)^{m-n-1}=\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1-m}}<1.$$

Отже,

$$|R_n(x)|<\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n+1)}x^{n+1} \qquad n>m-1.$$

Але в такому випадку при $n>m-1$ $|R_n(x)|$ менше $n+1$-го члена ряду, збіжність якого при $-1<x<+1$ ми тількищо довели, а тому $R_n(x)$ прямує до нуля при $0 \leqslant x < 1$ і при необмеженому зростанні n.

Подібно до цього, представляючи $R_n(x)$ у формі Коші

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} x^{n+1} (1+\theta x)^{m-n-1} (1-\theta)^n =$$

$$= \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} x^{n+1} (1+\theta x)^{m-1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n,$$

помічаємо, що коли $-1 < x \leqslant 0$, то

$$|R_n(x)| < \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} |x^{n+1}|.$$

Але й цей вираз прямує до нуля при $n \to \infty$ і при $-1 < x \leqslant 0$, бо його можна розглядати як $n+1$-й член деякого ряду, який збігається, бо

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\,|x|^{n+1}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\,|x|^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x| \left| \frac{m-n}{n} \right| = |x| < 1.$$

Таким чином, бачимо, що розглядуваний біноміальний ряд

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} x^n + \ldots$$

не тільки збігається при $-1 < x < 1$, але й має сумою функцію $(1+x)^m$, тобто

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} x^n + \ldots$$

при $(-1 < x < 1)$.

Щодо точок $x = +1$ і $x = -1$, то для них ми не станемо досліджувати збіжність ряду, бо це дослідження досить складне (доводиться розрізняти випадок $m > 0$, випадок $-1 < m \leqslant 0$ і випадок $m \leqslant -1$), і обмежимось вказівкою на те, що при додатному m біноміальний ряд лишається збіжним і для $x = +1$ і для $x = -1$, при $-1 < m \leqslant 0$ він збігається для $x = +1$, але розбігається для $x = -1$, і, нарешті, при $m \leqslant -1$ ряд розбігається як при $x = +1$, так і при $x = -1$.

Тепер прикладемо одержані результати до розкладу в ряд інших функцій, безпосередньо або посередньо одержуючи ці ряди з біноміального ряду.

§ 39. Розклад у ряд $\arcsin x$.

Якщо ми у формулі бінома покладемо $m = -\frac{1}{2}$ і замінимо x через x^2, то дістанемо

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}x^{2n} + \ldots ,$$

при чому ця формула, за доведеним, справедлива при $x^2 < 1$, тобто при $-1 < x < 1$ (можна було б довести, що вона лишається справедливою і при $x = \pm 1$).

В § 28 було доведено, що степінні ряди можна почленно інтегрувати в інтервалі їх збіжності. Інтегруючи наш ряд, дістанемо

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots .$$

Ця формула знову буде справедлива для $-1 < x < +1$ (і можна було б довести, що і для $x = \pm 1$).

Зокрема, якщо припускати, що формула доведена і для $x = +1$, то, зауважуючи, що $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, дістанемо

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\frac{1}{(2n+1)} + \ldots .$$

Ця формула дає можливість наближено обчислити число π.

Проте, чим x менше, тим ряд збігається швидше, тому зручнішою для обчислення могла б бути, наприклад, така формула, одержувана з розкладу $\arcsin x$, де $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \ldots .$$

§ 40. Обчислення еліптичних інтегралів з допомогою теорії рядів.

З інтегрального числення відомо, що для обчислення довжини дуги деякої кривої, заданої в параметричній формі

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

прикладається формула

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

де t_1 і t_2 — деякі значення параметра t, а x' і y' знаходяться з рівняння кривої.

Зокрема, коли б ми захотіли обчислити за цією формулою довжину дуги еліпса, рівняння якого можна записати у вигляді

$$x = a\sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi,$$

то, приймаючи за початок відліку дуг точку B, тобто верхній кінець малої осі, мали б для довжини дуги BM

$$s = \int_0^\varphi \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Якщо покласти $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, то $k^2 < 1$ і

$$s = \int_0^\varphi \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

або

$$s = a\int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Останній інтеграл має назву *еліптичного інтеграла* і, не зважаючи на всю свою зовнішню спрощеність, не може бути виражений через елементарні функції в скінченному числі. Інакше кажучи, цей інтеграл, як прийнято говорити, „не береться“, тобто його не можна обчислити ні одним з тих способів, якими користується звичайно інтегральне числення (як, наприклад, інтегрування через підставляння, частинами і інші аналогічні способи).

Рис. 9.

Коли ж ми все таки хочемо вміти обчисляти, хоча б наближено, довжини дуг еліпса, ми змушені звернутись до теорії рядів.

Для цього зауважимо, що вираз $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, де $k^2 < 1$, може бути розкладений у ряд за формулою бінома, якщо в ній покласти $m = \frac{1}{2}$ і $x = -k^2\sin^2\varphi$. Ми знайдемо

$$\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi - \ldots.$$

Легко бачити, що цей ряд збігається при всіх значеннях φ і допускає почленне інтегрування. Справді, $\sin\varphi$ не більший 1 за абсолютною величиною, тому члени нашого ряду за абсолютною величиною менші членів ряду

$$1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}k^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}k^6 + \ldots,$$

а цей останній ряд збігається, бо його члени менші членів прогресії

$$1+k^2+k^4+k^6+\ldots,$$

знаменник якої $k^2<1$.

Таким чином, наш ряд є *мажорований* (§ 19), а тому його можна інтегрувати почленно (§ 20), і ми знайдемо

$$s=a\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=a\left(\varphi-\frac{1}{2}k^2\int_0^{\varphi}\sin^2\varphi\,d\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}k^4\int_0^{\varphi}\sin^4\varphi\,d\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}k^6\int_0^{\varphi}\sin^6\varphi\,d\varphi-\ldots\right).$$

Кожний з цих інтегралів обчисляється зовсім елементарно. Обмежимось обчисленням для випадку, коли $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Позначивши через σ периметр еліпса, маємо

$$\sigma=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Отже, довжину дуги еліпса можна обчислити, користуючись раніше виведеним рядом:

$$\sigma=4a\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}k^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,d\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}k^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi\,d\varphi-\ldots\right).$$

Обчислимо, чому дорівнює

$$J_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi\qquad n=1,\,2,\,3,\ldots.$$

Маємо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\varphi\sin\varphi\,d\varphi.$$

Інтегруємо частинами, приймаючи $\sin\varphi\,d\varphi$ за dv і $\sin^{2n-1}\varphi$ за u; знайдемо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi=-\sin^{2n-1}\varphi\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi.$$

Отже,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = (2n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= (2n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi\,(1-\sin^2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= (2n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi\, d\varphi - (2n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi.$$

Через те що ми позначили $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi$ через J_{2n}, то

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi\, d\varphi$$

повинен бути позначений через J_{2n-2}, і попередню формулу можна переписати так:

$$J_{2n} = (2n-1)\,J_{2n-2} - (2n-1)\,J_{2n},$$

звідки

$$2nJ_{2n} = (2n-1)\,J_{2n-2},$$

або

$$J_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\,J_{2n-2}.$$

Через те що це співвідношення справедливе при всякому n, то

$$J_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2}\,J_{2n-4},$$

$$J_{2n-4} = \frac{2n-5}{2n-4}\,J_{2n-6},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$J_4 = \frac{3}{4}\,J_2.$$

Але

$$J_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Перемножуючи почленно всі попередні рівності, ми знайдемо

$$J_{2n}\cdot J_{2n-2}\cdot J_{2n-4}\cdot\ldots\cdot J_4 = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\,J_{2n-2}\cdot J_{2n-4}\cdot\ldots\cdot J_2,$$

звідки, скорочуючи на $J_4 \cdot J_6 \cdot \ldots \cdot J_{2n-2}$, дістанемо

$$J_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2)\, 2n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Підставляючи цей результат у раніше одержану формулу для виразу периметра еліпса, знайдемо:

$$\sigma = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \ldots\right].$$

Цей ряд збігається тим швидше, чим k менше, а через те що $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, то він збігається тим швидше, чим менше розрізняються між собою осі еліпса. Зокрема, коли еліпс перетворюється в коло, ми маємо $a = b$, $k = 0$, всі члени ряду, крім першого, перетворюються в нуль, і

$$\sigma = 2\pi a,$$

як і треба було чекати для кола радіуса a.

§ 41. Інші приклади обчислення інтегралів з допомогою рядів.

Метод, яким ми в попередньому параграфі обчисляли еліптичний інтеграл, є загальним способом, що дозволяє обчисляти інтеграли, які „не можна взяти", тобто інтеграли, що не виражаються в елементарних функціях. Такі інтеграли доводиться зустрічати досить часто. До числа їх відносяться, наприклад, так званий гауссів інтеграл

$$\int e^{-x^2}\, dx,$$

що завжди зустрічається в теорії імовірностей і математичній статистиці, інтегральний синус

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

інтегральний логарифм

$$\int \frac{dx}{\ln x}$$

і інші. Покажемо, як обчислити такі інтеграли з допомогою теорії рядів.

Візьмемо функцію e^{-x^2}. Ми знаємо, що e^x розкладається в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

збіжний абсолютно для всіх значень x. Заміняючи в цій формулі x через $-x^2$, знайдемо

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots.$$

Цей ряд також збігатиметься абсолютно для всіх значень x. Якщо ми хочемо обчислити, наприклад,

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx,$$

де a — яке завгодно додатне число, нам досить зауважити, що попередній ряд ми маємо право інтегрувати почленно в границях від 0 до a, бо степінні ряди допускають почленне інтегрування в усякому інтервалі, що лежить усередині інтервалу збіжності (§ 28). Тому ми маємо

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx=\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{2!5}-\ldots\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1\cdot 3}+\frac{a^5}{2!5}-\frac{a^7}{3!7}+\ldots$$

і, отже, можемо обчислити з будьяким наперед заданим степенем точності величину розглядуваного інтеграла.

Подібно до цього можна обчислити інтегральний синус. Ми маємо

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots.$$

Цей ряд теж збігається для всіх значень x. Припускаючи, що $x\neq 0$ і поділяючи всі члени цього ряду на x, ми знайдемо

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots.$$

Одержаний ряд знову збігається для всіх значень x, у чому можна переконатись хоча б з допомогою ознаки Даламбера. А через те що всякий степінний ряд допускає почленне інтегрування всередині інтервалу збіжності, то ми знайдемо

$$\int_0^x\frac{\sin x}{x}\,dx=x-\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}-\frac{x^7}{7!7}+\ldots.$$

Цей ряд, що збігається для всіх значень x, дозволяє як завгодно точно обчислити $\int_0^x\frac{\sin x}{x}\,dx$ при будьякому x.

Звертаємось, нарешті, до інтеграла

$$\int \frac{dx}{\ln x}.$$

Будемо його обчислювати, виконавши спочатку заміну змінного

$$x = e^t;$$

це дає

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \int \frac{e^t\,dt}{t} = \int \frac{1 + e^t - 1}{t}\,dt = \int \frac{dt}{t} + \int \frac{e^t - 1}{t}\,dt,$$

звідки

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \ln t + \int \frac{e^t - 1}{t}\,dt.$$

Але ми знаємо, що

$$e^t = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots,$$

тому, віднімаючи по 1 з обох частин рівності і поділяючи потім усі члени його на t, знайдемо

$$\frac{e^t - 1}{t} = 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \ldots + \frac{t^{n-1}}{n!} + \ldots.$$

Цей ряд знову абсолютно збігається для всіх значень t, а тому його можна інтегрувати почленно в будьякому інтервалі, і ми знайдемо

$$\int \frac{e^t - 1}{t}\,dt = \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!\,2} + \frac{t^3}{3!\,3} + \ldots + \frac{t^n}{n!\,n} + \ldots.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \ln t + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!\,2} + \frac{t^3}{3!\,3} + \ldots + \frac{t^n}{n!\,n} + \ldots,$$

а через те що $x = e^t$, або $t = \ln x$, то

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \ln \ln x + \frac{\ln x}{1} + \frac{(\ln x)^2}{2!\,2} + \frac{(\ln x)^3}{3!\,3} + \ldots + \frac{(\ln x)^n}{n!\,n} + \ldots.$$

Ця формула буде справедлива при будьякому додатному x, бо для всякого такого x можна знайти $t = \ln x$; для $x = 0$ або $x < 0$ вона, зрозуміло, втрачає свою суть.

РЯДИ ФУР'Є.

§ 42. Поняття про тригонометричний ряд.

Тригонометричним рядом прийнято називати ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+$$
$$+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots$$

або, коротше,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

де a_0, a_n, b_n $(n=1, 2, \ldots)$ — сталі числа, що називаються *коефіцієнтами* ряду.

До вивчення тригонометричних рядів привела поставлена ще на початку XVIII ст. славетна проблема про звучащу струну. Ця проблема, над розв'язанням якої працювали найвидатніші математики, як, наприклад, Іоанн Бернуллі, Ейлер, Даламбер, Даніїл Бернуллі, привела до необхідності поставити таку задачу: дано функцію $f(x)$. Чи можна знайти тригонометричний ряд, який збігається і має своєю сумою функцію $f(x)$?

Нам уже доводилось розв'язувати аналогічну задачу при вивченні степінних рядів: потрібно було для заданої функції $f(x)$ знайти степінний ряд, що збігається до неї. Ми бачили (§ 27), що коли цю задачу взагалі можна розв'язати, то таким рядом є ряд Тейлора. Але ми знаємо, що не для всякої функції можна скласти ряд Тейлора. Крім того, якщо й можливо для заданої функції скласти ряд Тейлора, ряд може розбігатись або збігатись не до цієї функції.

Природно тому і для тригонометричних рядів розчленити поставлене запитання, сформулювавши його так: 1) Для яких функцій $f(x)$ можна знайти збіжні до них тригонометричні ряди? 2) Як знайти такі ряди? 3) Якщо ми знайшли необхідні умови, при яких ряд *може* збігатись до даної функції, чи *повинен* він до неї збігатись?

Розв'язання цих питань, а також надзвичайно численні і різноманітні прикладання теорії тригонометричних рядів привели до глибоких і широких досліджень у цій галузі. В нашому короткому курсі ми змушені обмежитись лише найелементарнішими відомостями, та й то в дуже вузьких рамках.

§ 43. Визначення коефіцієнтів за формулами Фур'є.

Якщо ми хочемо, щоб функція $f(x)$ могла бути сумою тригонометричного ряду, ми насамперед повинні вимагати, щоб вона була *періодичною з періодом* 2π, тобто при всякому x

$$f(x+2\pi)=f(x).$$

Справді, через те що $\sin nx$ і $\cos nx$ є періодичними функціями з періодом 2π $(n=1, 2, 3, \ldots)$, то в рівності

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

після заміни x через $x+2\pi$ права частина не зміниться, отже, не повинна змінитись і ліва.

Тому в дальшому ми завжди розглядатимемо лише функції періодичні з періодом 2π, бо тільки для них поставлена проблема про тригонометричний ряд допускає розв'язання.

Припустимо тепер, що функція $f(x)$ є сумою тригонометричного ряду. Точніше говорячи, ми *припустимо, що існує тригонометричний ряд, збіжний усюди на* $(-\pi, +\pi)$ *до функції* $f(x)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx \qquad -\pi\leqslant x\leqslant+\pi.$$

Запитуємо, як знайти коефіцієнти цього ряду, знаючи функцію $f(x)$? Цю задачу розв'язав Фур'є. Перед тим як викладати його метод, нам потрібно буде обчислити деякі означені інтеграли.

Розглянемо інтеграли

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx\cos nx\,dx, \quad \int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx\sin nx\,dx, \quad \int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx\sin nx\,dx,$$

де m і n — цілі числа.

Для обчислення цих інтегралів скористуємось відомими з тригонометрії формулами:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Поклавши в них

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=mx, \quad \frac{\alpha-\beta}{2}=nx,$$

звідки

$$\alpha=(m+n)x, \quad \beta=(m-n)x,$$

знайдемо

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx \sin nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}[\sin(m+n)x-\sin(m-n)x]\,dx.$$

Якщо $m\neq n$, то

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(m+n)x\,dx-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(m-n)x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{-\cos(m+n)x}{m+n}\Bigg/_{-\pi}^{+\pi}-\frac{1}{2}\frac{-\cos(m-n)x}{m-n}\Bigg/_{-\pi}^{+\pi}=0,$$

бо $\cos(m+n)x$ має при $x=-\pi$ і $x=+\pi$ однакові значення; це саме справедливе і для $\cos(m-n)x$.

Таким чином, при $m\neq n$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx \sin nx\,dx=0.$$

Але досліджуваний інтеграл дорівнює нулеві і при $m=n$, бо в цьому випадку, якщо $n\neq 0$,

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx \sin nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin 2nx\,dx=-\frac{1}{2}\frac{\cos 2nx}{2n}\Bigg/_{-\pi}^{+\pi}=0.$$

Якщо $n=0$, то інтеграл також дорівнює нулеві, бо підінтегральна функція тотожно дорівнює нулеві.

Таким чином, які б не були цілі m і n, додатні або рівні нулеві, відмінні один від одного або ні, завжди

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx \sin nx\,dx=0.$$

Перейдемо до обчислення двох інших інтегралів. Маємо

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx \cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m+n)x\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m-n)x\,dx.$$

Якщо $m \neq n$, то

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m+n)x\,dx=\frac{1}{2}\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\Big/_{-\pi}^{+\pi}=0,$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m-n)x\,dx=\frac{1}{2}\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\Big/_{-\pi}^{+\pi}=0.$$

Таким чином,

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0, \qquad \text{якщо } m\neq n.$$

У випадку ж, коли $m=n$, ми маємо ($n\neq 0$)

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}(1+\cos 2nx)\,dx=\pi+\frac{1}{2}\frac{\sin 2nx}{2n}\Big/_{-\pi}^{+\pi}=\pi,$$

а якщо $n=0$, то $\cos^2 nx=1$, і

$$\int_{-\pi}^{+\pi}1\cdot dx=2\pi.$$

Нарешті,

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx\sin nx\,dx=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m+n)x\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m-n)x\,dx,$$

тому при $m\neq n$ знаходимо

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m+n)x\,dx=\frac{1}{2}\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\Big/_{-\pi}^{+\pi}=0,$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m-n)x\,dx=\frac{1}{2}\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\Big/_{-\pi}^{+\pi}=0,$$

отже,

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0, \qquad m\neq n.$$

Якщо $m=n$, то маємо ($n\neq 0$)

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}(1-\cos 2nx)\,dx=\pi-\frac{1}{2}\frac{\sin 2nx}{2n}\Big/_{-\pi}^{+\pi}=\pi.$$

Коли ж $n=0$, то інтеграл дорівнює нулеві.

Підсумовуючи все сказане вище, знаходимо:

$$\text{(I)} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0 \qquad m \neq n \begin{cases} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots . \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0 \qquad m = n \begin{cases} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots . \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi \qquad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Зокрема перша з формул (I) при $m = 0$ дає

$$\text{(IV)} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx\, dx = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \dots,$$

а формула (II) при $m = 0$ дає

$$\text{(V)} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx\, dx = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Встановивши ці формули, повернемось до методу Фур'є. Ми маємо, за умовою, всюди на $(-\pi, +\pi)$

$$\text{(A)} \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Йдучи за Фур'є, проінтегруємо цей ряд почленно в межах $(-\pi, +\pi)$. Ми знаємо, що далеко не завжди інтегрування ряду законне. Інакше кажучи, ми не можемо поручитись за те, що інтеграл від нашої функції $f(x)$ збігається з результатом суто формально проведеного інтегрування ряду. Не спиняючись покищо на питанні про те, коли почленне інтегрування тригонометричного ряду законне, вивчимо спочатку ті висновки, до яких приводить це інтегрування в тих випадках, коли ми маємо право його виконувати. Маємо тоді:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0}{2}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} a_n \cos nx\, dx + \int_{-\pi}^{+\pi} b_n \sin nx\, dx.$$

Через те що

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{a_0}{2}\,dx=a_0\pi,$$

а на підставі формул (IV) і (V) маємо

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}a_n\cos nx\,dx=a_n\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx\,dx=0\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}b_n\sin nx\,dx=b_n\int_{-\pi}^{+\pi}\sin nx\,dx=0\end{array}\right\}\ n=1,\ 2,\ 3,\ldots,$$

то в результаті інтегрування знайдемо

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,dx=a_0\pi,$$

звідки

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,dx.$$

Так само коли б ми до інтегрування помножили обидві частини рівності (А) на $\cos mx$, а потім проінтегрували його, ми знайшли б

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos mx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx\cos nx\,dx+$$

$$+b_n\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx\sin nx\,dx.$$

Але на підставі формул (I), (II) і (III) всі інтеграли в правій частині рівності дорівнюють нулеві, крім інтеграла, в якому $m=n$, а цей останній на підставі (III) дорівнює π, тому

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos mx\,dx=a_m\pi,$$

звідки

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos mx\,dx.$$

В цій рівності m може бути будьяким цілим числом ($m=1$, 2, 3, ...).

Якщо обидві частини рівності (A) помножимо не на $\cos mx$, а на $\sin mx$, аналогічними міркуваннями прийдемо до такої формули:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin mx\,dx \qquad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Отже, якщо функція $f(x)$ може бути сумою тригонометричного ряду, то його коефіцієнти визначаються за формулами Фур'є:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

(F)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(при $n = 0$ ми маємо $\cos nx = 1$, і тому формула $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx$ може розглядатись як окремий випадок формули

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx\Big).$$

Ці величини (F) мають назву коефіцієнтів Фур'є, а тригонометричний ряд, у якому коефіцієнти складені за формулами Фур'є, називається *рядом Фур'є* для даної функції $f(x)$.

Таким чином, **якщо функція $f(x)$ є сума деякого тригонометричного ряду, то цей ряд повинен бути її рядом Фур'є.**

§ 44. Про функції, зображувані рядами Фур'є.

При виведенні формул Фур'є ми допустили можливість інтегрувати тригонометричний ряд, який, за умовою, збігається до $f(x)$.

Тепер поставимо питання так: дано функцію $f(x)$, періодичну з періодом 2π. Припускатимемо її або неперервною на $(-\pi, +\pi)$ або такою, що має на цьому відрізку не більше ніж скінченне число точок розриву першого роду*. При цих припущеннях ми вміємо обчислити інтеграл від функції $f(x)$. Тому, обчисливши

* Точку x_0 називають точкою розриву першого роду для функції $f(x)$, якщо при наближенні точки x до x_0 зліва $f(x)$ прямує до певної границі (йдучи за Діріхле, цю границю позначають $f(x_0 - 0)$) і при наближенні x до x_0 справа $f(x)$ також прямує до певної границі (її позначають $f(x_0 + 0)$), але при цьому $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ (див. рис. 10).

за формулами (F) § 43 величини a_n і b_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ і склавши з їх допомогою ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

ми будемо говорити, що знайшли розклад функції $f(x)$ в ряд Фур'є. Але, зрозуміло, суто формальні операції, які ми виконали, щоб знайти ряд Фур'є для $f(x)$, не дають нам права стверджувати, що ми одержали ряд збіжний, і тим більше збіжний саме до функції $f(x)$. Щодо цього ми маємо повну аналогію з випадком степінних рядів: якщо для функції $f(x)$ можна знайти всі її похідні в якійсь точці $x=a$, то можна скласти для неї ряд Тейлора, але не можна ще стверджувати, що ряд збігається, а якщо і збігається, то саме до $f(x)$.

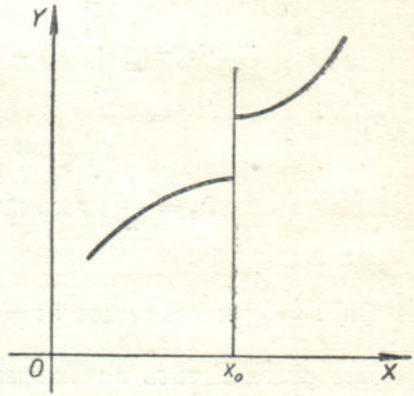

Рис. 10.

Тому треба твердо пам'ятати, що коли ми знайшли для $f(x)$ її ряд Фур'є або, як кажуть, розклали її в ряд Фур'є, то це ще не означає, що ми знайшли ряд, збіжний до $f(x)$. Якщо тригонометричний ряд збігається до $f(x)$ і якщо він допускає почленне інтегрування, то він є рядом Фур'є, але звідси ні в якому разі не випливає, що ряд Фур'є повинен збігатись, і можна показати на прикладах, що навіть неперервні функції можуть мати ряди Фур'є, розбіжні в безлічі точок на $(-\pi, +\pi)$.

§ 45. Приклади розкладу функцій у ряд Фур'є.

Ми зараз покажемо на прикладах, як знаходити ряд Фур'є для заданої функції $f(x)$, лишаючи покищо зовсім осторонь питання про збіжність цих рядів.

П р и к л а д 1. Хай $f(x)$ — періодична з періодом 2π, рівна -1, на $-\pi<x<0$; рівна $+1$ на $0<x<+\pi$; рівна 0 в точках $-\pi$, 0, $+\pi$ (рис. 11).

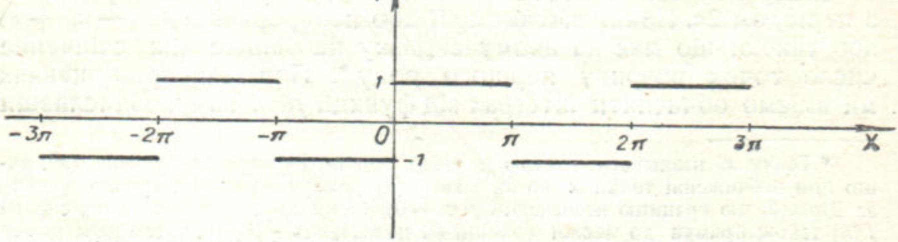

Рис. 11.

Ця функція має в точках $-\pi$, 0 і $+\pi$ розриви першого роду. Для того щоб написати її розклад у ряд Фур'є, обчислимо коефіцієнти a_n і b_n за формулами Фур'є. Маємо для $n \neq 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\pi}(+1)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{-\sin nx}{n}\Big/_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big/_{0}^{+\pi} = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\pi}(+1)\,dx = -\frac{1}{\pi}\pi + \frac{1}{\pi}\pi = -1 + 1 = 0.$$

Далі,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\pi}(+1)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big/_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\frac{-\cos nx}{n}\Big/_{0}^{+\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos n\pi}{n} - \frac{1}{\pi}\frac{\cos n\pi - 1}{n} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Через те що при n парному $\cos n\pi = 1$, а при n непарному $\cos n\pi = -1$, то звідси випливає:

$$b_n = 0 \text{ при } n \text{ парному},$$

$$b_n = \frac{4}{n\pi} \text{ при } n \text{ непарному}.$$

Тому ряд Фур'є для нашої функції має вигляд

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + \ldots\right).$$

Приклад 2. Хай $f(x)$ — періодична з періодом 2π, рівна $-x$ на $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ і рівна $+x$ на $0 \leqslant x \leqslant \pi$ (рис. 12).

Ця функція неперервна на всій нескінченній прямій.

Знайдемо її коефіцієнти Фур'є.

Маємо

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\pi}(+x)\cos nx\,dx;$$

якщо ми в першому інтегралі замінимо $-x$ на t, а потім переставимо границі інтеграції, то дістанемо

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{+\pi}^{0}t\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\pi}t\cos nt\,dt,$$

отже, другий інтеграл дорівнює першому, а тому

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi}x\cos nx\,dx.$$

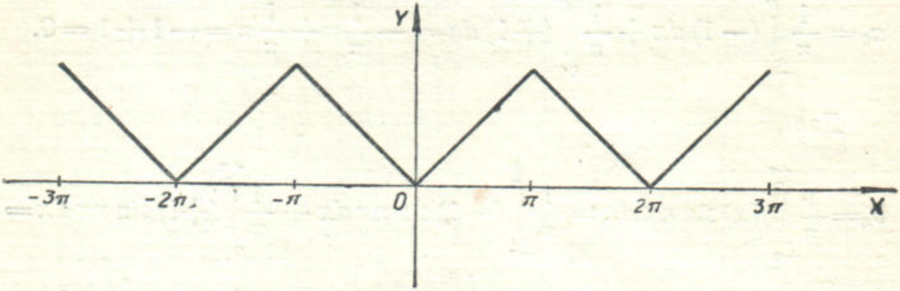

Рис. 12.

Інтегруючи частинами, знайдемо для $n\neq 0$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\frac{x\sin nx}{n}\Big/_{0}^{+\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{+\pi}\sin nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big/_{0}^{+\pi}=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1).$$

Якщо n парне, то $\cos n\pi=1$, а тому $a_n=0$; якщо n непарне, то $\cos n\pi=-1$ і $a_n=-\frac{4}{n^2\pi}$.

Для $n=0$ маємо

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big/_{0}^{+\pi}=\pi.$$

Нарешті, для b_n знайдемо

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\pi}(+x)\sin nx\,dx;$$

але, заміняючи в першому інтегралі $-x$ на t і переставляючи границі інтеграції, знайдемо

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{+\pi}^{0}t\sin nt\,dt=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\pi}t\sin nt\,dt,$$

тому перший інтеграл дорівнює другому за абсолютною величиною, але має обернений знак, звідки

$$b_n = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Таким чином, ряд Фур'є

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

для розглядуваної функції матиме вигляд

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \ldots\right).$$

§ 46. Збіжність рядів Фур'є в простіших випадках.

Ми показали, яким чином для даної функції скласти її ряд Фур'є. Ми повинні тепер вивчити питання про те, в яких випадках цей ряд збігається і має своєю сумою дану функцію. Ми обмежимось при доведенні тільки дуже простим випадком, а саме, ми припустимо, що

1) $f(x)$ періодична з періодом 2π, неперервна і $f(-\pi) = f(+\pi)$;
2) $f'(x)$ і $f''(x)$ неперервні на $(-\pi, +\pi)$.

В цьому випадку, обчисляючи коефіцієнти ряду Фур'є, ми маємо (інтегруючи частинами двічі):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi} f(x)\frac{\sin nx}{n}\Bigg/_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{n\pi} f'(x)\,\frac{\cos nx}{n}\Bigg/_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f''(x)\cos nx\,dx.$$

Через те що $f'(x)$ і $f''(x)$ неперервні і, отже, обмежені на відрізку $(-\pi, +\pi)$, то можна знайти таке стале число A, що

$$|f'(x)| < A \quad \text{і} \quad |f''(x)| < A \qquad -\pi \leqslant x \leqslant +\pi.$$

Але через те що $\cos nx$ за абсолютною величиною не більший 1, то знаходимо:

$$|a_n| < \frac{1}{n^2\pi}(|f'(\pi)| + |f'(-\pi)|) + \frac{A}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dx < \frac{2A}{n^2\pi} + \frac{2A}{n^2} < \frac{4A}{n^2}.$$

Подібно до цього маємо

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi} f(x)\,\frac{-\cos nx}{n}\Bigg/_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\cos nx\,dx.$$

Через те що за умовою $f(+\pi)=f(-\pi)$, то проінтегрований член дорівнює нулеві, тому

$$b_n=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}f'(x)\frac{\sin nx}{n}\Big/_{-\pi}^{+\pi}-\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f''(x)\sin nx\,dx.$$

Проінтегрований член дорівнює нулеві, бо $\sin n\pi=0$. Помічаючи знову, що $|f''(x)|<A$, знаходимо

$$|b_n|<\frac{2A}{n^2}.$$

З одержаних нерівностей робимо висновок, що

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|<\frac{6A}{n^2},$$

бо $|\cos nx|\leqslant 1$ і $|\sin nx|\leqslant 1$ при всякому n.

Але ми знаємо (розд. I, § 11), що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

збігається, отже, збігається і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6A}{n^2}=6A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Тому в зроблених припущеннях відносно $f(x)$ ряд Фур'є

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

є мажорованим рядом (§ 19) на $(-\pi, +\pi)$, і, отже, він збігається абсолютно в кожній точці цього відрізка і має своєю сумою неперервну функцію на $(-\pi, +\pi)$.

Проте, ми не маємо права без дальших досліджень зробити висновок, що ця неперервна функція повинна неодмінно збігатись із функцією $f(x)$, для якої ряд Фур'є був побудований. Ми ж довели тільки, що ряд збігається до деякої неперервної на $(-\pi, +\pi)$ функції. Маємо, отже,

$$\varphi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

де $\varphi(x)$ позначає суму ряду. Як довести, що $\varphi(x)\equiv f(x)$?

Для цього насамперед зауважимо, що з мажорованості розглядуваного ряду випливає (§ 20) законність його почленного інтегрування. Пригадаємо тепер, що в § 43 ми довели таке твердження: якщо тригонометричний ряд збігається до деякої функції і допускає почленне інтегрування, то його коефіцієнти визначаються через дану функцію за формулами Фур'є.

Це дозволяє нам стверджувати, що

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\cos nx\, dx \qquad n=0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\sin nx\, dx \qquad n=1,\ 2,\ 3, \ldots .$$

Але через те що ті ж величини a_n і b_n визначаються формулами

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\, dx \qquad n=0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\, dx \qquad n=1,\ 2,\ 3, \ldots,$$

то питання про те, чи повинна $\varphi(x)$ збігатися з $f(x)$, може бути замінене питанням: чи можуть існувати дві різні функції, у яких ряди Фур'є тотожні, тобто мають при однакових членах однакові коефіцієнти?

Позначаючи різницю між $f(x)$ і $\varphi(x)$ через $D(x)$

$$D(x) = f(x) - \varphi(x),$$

ми бачимо, що $D(x)$ є неперервна функція. Неважко переконатись, що всі її коефіцієнти Фур'є дорівнюють нулеві. Справді,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} D(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\, dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\cos nx\, dx =$$

$$= a_n - a_n = 0$$

$(n=0,\ 1,\ 2, \ldots)$, і аналогічно доводиться, що

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} D(x)\sin nx\, dx = 0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

Ми побачимо далі (§ 49), що коли якась функція має всі коефіцієнти Фур'є рівними нулеві, то вона повинна тотожно дорівнювати нулеві. Отже, $f(x)-\varphi(x)\equiv 0$, тобто

$$\varphi(x)\equiv f(x).$$

Таким чином ми переконались, що для функції $f(x)$ ряд Фур'є збігається абсолютно на $(-\pi, +\pi)$ і має своєю сумою цю функцію $f(x)$, якщо $f(x)$ періодична з періодом 2π, неперервна на $(-\pi, +\pi)$ разом із своїми двома першими похідними і така, що $f(-\pi)=f(+\pi)$.

§ 47. Теорема Діріхле.

Умови, при яких у попередньому параграфі була доведена збіжність ряду Фур'є, є надзвичайно обмежувальними. Треба зауважити, що коли навіть сама функція $f(x)$ і її дві перші похідні неперервні на $(-\pi, +\pi)$, але $f(-\pi)\neq f(+\pi)$, то ряд Фур'є вже не буде мажорованим рядом.

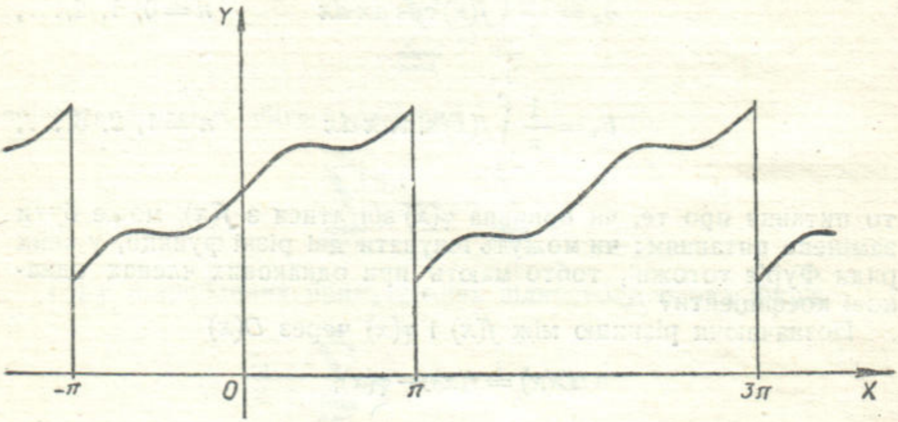

Рис. 13.

Справді, якщо $f(x)$ періодична з періодом 2π, то нерівність $f(-\pi)\neq f(+\pi)$ показує, що в точках $-\pi$ і $+\pi$ функція має розрив (див. рис. 13), а це неможливо у випадку, якщо вона є сумою мажорованого ряду неперервних функцій. Проте, збіжність ряду Фур'є вдається довести в куди ширших умовах, правда, іншими методами. Ми тут наведемо без доведення теорему Діріхле, що дозволяє розв'язати питання про збіжність у надзвичайно загальних припущеннях.

Теорема Діріхле. Якщо $f(x)$ обмежена на $(-\pi, +\pi)$, має в цьому інтервалі не більше ніж скінченне число точок розриву першого роду і не більше ніж скінченне число максимумів і мінімумів, то її ряд Фур'є збігається в кожній точці,

при чому в точках неперервності сума ряду дорівнює $f(x)$, а в точках розриву вона дорівнює

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},$$

тобто середньому арифметичному граничних значень $f(x)$ зліва і справа.

В обох прикладах, розглянутих нами в § 45, функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Діріхле, а тому знайдені нами ряди Фур'є для цих функцій збігаються. Цікаво уявити собі наочно, як із збільшенням числа доданків частинна сума ряду все ближче і ближче підходить до функції $f(x)$. Розглянемо це на першому прикладі.

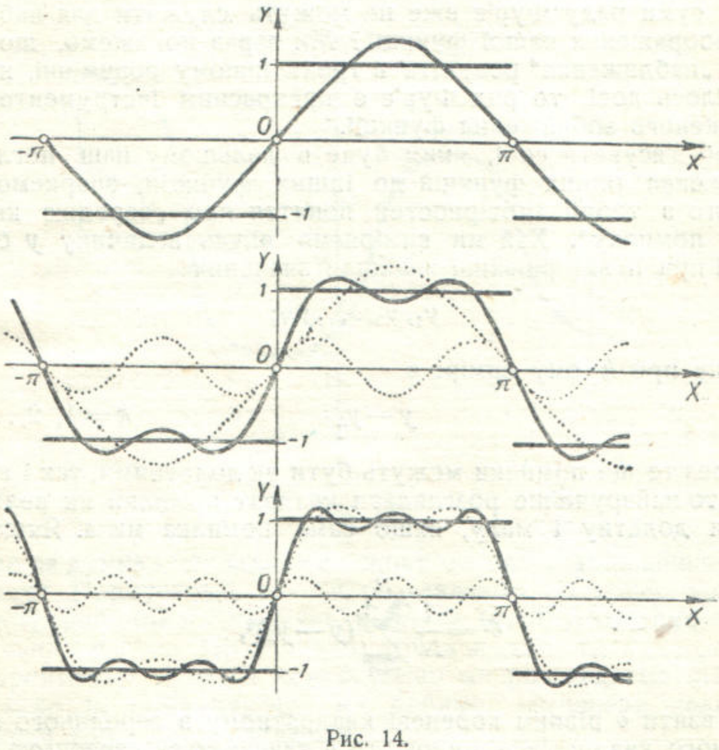

Рис. 14.

На рисунку 14 представлені спочатку перший член нашого ряду

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right),$$

потім перший і другий члени пунктиром, а їх сума — суцільною лінією, нарешті, сума двох перших членів і третій член пунктиром, а сума всіх трьох — суцільною лінією. Ми бачимо, як наближуюча неперервна крива все ближче і ближче підходить до основної розривної кривої, що дорівнює -1 на $-\pi < x < 0$ і $+1$ на $0 < x < +\pi$.

§ 48. Середнє квадратичне відхилення тригонометричного многочлена від заданої функції.

Якщо функція $f(x)$ навіть не має розривів, але у неї на $(-\pi, +\pi)$ є безліч максимумів і мінімумів, то теорема Діріхле вже неприкладальна. І справді, можна побудувати неперервні функції, у яких ряд Фур'є має точки розбіжності в усякому інтервалі δ, який би малий не був цей інтервал і де б він не містився на $(-\pi, +\pi)$.

Чи треба звідси зробити висновок, що в цьому випадку частинні суми ряду Фур'є вже не можуть служити для наближеного зображення нашої функції? Ми зараз покажемо, що коли слово „наближення" розуміти в трохи іншому розумінні, ніж це розумілось досі, то ряд Фур'є є прекрасним інструментом для наближеного зображення функції.

Щоб з'ясувати собі, яким буде в дальшому наш погляд на наближення одних функцій до інших функцій, звернемось до відомого з теорії імовірностей поняття про „середню квадратичну помилку". Хай ми виміряємо якусь величину y багато разів і при її вимірюванні знайшли значення

$$y_1, y_2, \ldots, y_N;$$

помилка при k-ому вимірі є

$$y - y_k \qquad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Через те що помилки можуть бути як додатними, так і від'ємними, то найзручніше розглядати квадрат помилки як величину завжди додатну і малу, якщо сама помилка мала. Якщо покласти

$$\delta^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (y - y_k)^2,$$

тобто взяти δ рівним кореневі квадратному з середнього арифметичного квадратів помилок, то δ називається *середньою квадратичною помилкою*. При обробці результатів спостережень цю помилку намагаються зробити найменшою.

Припустимо тепер, що ми не вимірюємо якусь сталу величину y, а розглядаємо якусь криву $y = f(x)$ і хочемо оцінити помилку, яку ми робимо, заміняючи цю криву якоюсь іншою кривою $y = \varphi(x)$. Можна розглядати різницю $|f(x) - \varphi(x)|$ як відхилення однієї кривої від іншої. Коли ми говорили в теорії рядів, що $s_n(x)$, тобто сума n перших членів ряду, є наближенням до суми $S(x)$ ряду, ми мали на увазі саме той факт, що для всякого x

різниця $|S(x)-s_n(x)|$, тобто відхилення $s_n(x)$ від $S(x)$, прямує до нуля із зростанням n. Проте, бувають випадки, коли куди природніше розглядати замість цього простого відхилення середнє квадратичне відхилення. Пояснимо цю думку рисунком (рис. 15). Хай жирна лінія зображує задану криву $y=f(x)$, пунктирні лінії зображують криві, які наближаються до неї. Зрозуміло, що пунктирна лінія *1* ні в якій точці не відхиляється від кривої $y=f(x)$ на такі великі віддалі, на які в деяких точках відхиляється від неї лінія *2*; але коли не турбуватись про те, що в деяких (вузьких) проміжках лінія *2* сильно відхиляється від $y=f(x)$, а розглянути, як вона себе поводить на всьому відрізку, то доводиться визнати, що вона куди ближче характеризує функцію $f(x)$, тобто є для неї кращим наближенням, ніж лінія *1*.

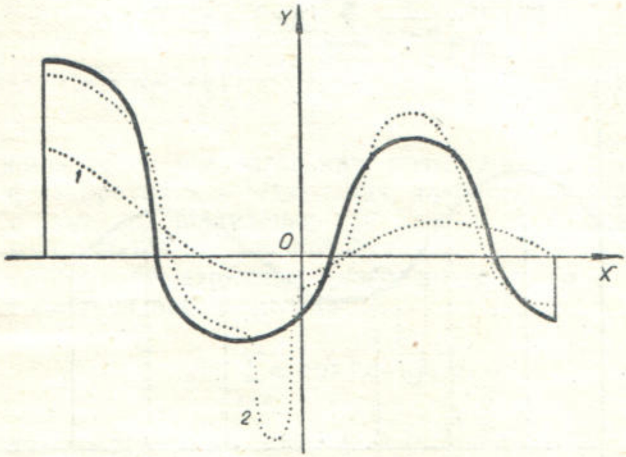

Рис. 15.

Саме ця думка і покладена в основу методу „наближення в середньому“. Припустимо, що ми розглядаємо дві криві: $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ (рис. 16) на якомусь відрізку (a, b). Поділимо (a, b) на n рівних частин. Позначивши точки поділу $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}$, приймаємо $x_0=a$ і $x_n=b$. Якщо ми розглядаємо різницю $f(x_i)-\varphi(x_i)$ як помилку, яку ми робимо, заміняючи величину $f(x_i)$ через $\varphi(x_i)$, то, покладаючи

$$\delta^2=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)-\varphi(x_i)]^2,$$

ми могли б назвати δ середньою квадратичною помилкою при заміні $f(x)$ через $\varphi(x)$. Проте, цілком зрозуміло, що ця помилка залежить не тільки від функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$, але й від того, в яких точках x_i ми розглядали різницю їх ординат. Цілком очевидно, що чим більше ми братимемо точок при поділі (a, b) на частини, тим краще ми зможемо схарактеризувати „середнє" відхилення $\varphi(x)$ від $f(x)$. Умовимось називати *середнім квадратичним відхиленням* функції $\varphi(x)$ від функції $f(x)$ ту границю, до якої прямує вираз δ, коли число точок поділу (a, b) необмежено зростає. Неважко зміркувати, як знайти цю границю. Через те що ми поділяли відрізок (a, b) на n рівних частин, то кожна з віддалей $x_i - x_{i-1}$ повинна дорівнювати $\frac{b-a}{n}$; тому, покладаючи $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ми маємо

$$\frac{1}{n} = \frac{\Delta x_i}{b-a} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

і, отже,

$$\delta^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2 \Delta x_i.$$

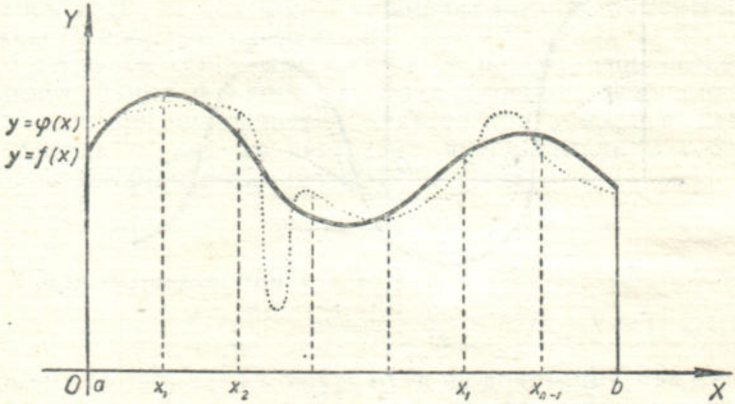

Рис. 16.

Але сума, що стоїть у правій частині, має своєю границею означений інтеграл від $[f(x) - \varphi(x)]^2$ на відрізку (a, b), тому

$$\delta^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 \, dx.$$

Ця величина δ і є середнє квадратичне відхилення функції $\varphi(x)$ від функції $f(x)$. Цілком зрозуміло, що коли

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon,$$

то

$$\delta^2 < \frac{\varepsilon^2}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon^2,$$

отже,

$$|\delta| < \varepsilon,$$

звідки випливає, що коли відхилення в звичайному розумінні слова мале, то мале й середнє квадратичне відхилення. Але обернене вже не буде правильним. Справді, (рис. 17) хай, наприклад, $f(x) \equiv 0$, *а* $\varphi(x) = 1 - \frac{x}{\varepsilon}$ на $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$, $\varphi(x) \equiv 0$ на $\varepsilon \leqslant x \leqslant 1$.

Зрозуміло, що $\varphi(x)$ не може бути названа наближуючою кривою для $f(x)$ у звичайному розумінні цього слова, бо, наприклад, при $x = 0$ маємо

$$|f(0) - \varphi(0)| = |0 - 1| = 1.$$

Але $\varphi(x)$ при малих ε дає добре наближення в середньому до $f(x)$, бо

$$\int_0^1 [f(x) - \varphi(x)]^2\, dx = \int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx = -\frac{\varepsilon}{3}\left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right)^3 \Big/_0^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Перейдемо тепер від загальних розглядів, що стосуються середнього квадратичного відхилення, до спеціального питання, а саме до відхилення так званих тригонометричних многочленів від заданої функції.

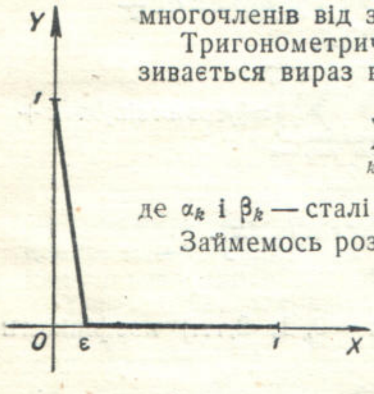

Рис. 17.

Тригонометричним многочленом n-го порядку називається вираз вигляду

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx,$$

де α_k і β_k — сталі числа ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Займемось розв'язанням такої проблеми: серед усіх тригонометричних многочленів порядку n знайти той, що дає „найкраще наближення в середньому" до даної функції $f(x)$, тобто той, для якого середнє квадратичне відхилення від $f(x)$ буде найменшим.

Функцію $f(x)$, як завжди, припускатимемо періодичною з періодом 2π; будемо розглядати той випадок, коли $f(x)$ або неперервна або має тільки скінченне число точок розриву першого роду (це припущення робиться для того, щоб ми могли цю функцію інтегрувати, не розширяючи поняття інтеграла)*.

Ми повинні розв'язати питання про те, як треба дібрати коефіцієнти α_k, β_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) тригонометричного многочлена

* Розглядуваний у всьому цьому курсі інтеграл є інтеграл Коші; якщо користуватись поняттям інтеграла Лебега, вся теорія тригонометричних рядів стає значно повнішою, і теореми набувають більшої загальності.

для того, щоб його середнє квадратичне відхилення від $f(x)$ було найменшим, тобто для того, щоб вираз

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right]^2 dx$$

мав найменше з можливих своїх значень.

Для розв'язання цього питання обчислимо величину δ_n^2. Маємо:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left[f(x)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right] dx +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left[\sum_{k=0}^{n}\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right]^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx -$$

$$-\left[\sum_{k=0}^{n}\alpha_k \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx + \beta_k\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx\right] +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left[\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\alpha_k^2\cos^2 kx\,dx + \sum_{k=0}^{n}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\beta_k^2 \sin^2 kx\,dx +\right.$$

$$+2\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\sum_{j=0}^{n}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\alpha_k\alpha_j \cos kx\cos jx\,dx + 2\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\alpha_k\beta_j \cos kx \sin jx\,dx +$$

$$\left.+2\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\sum_{j=0}^{n}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\beta_k\beta_j \sin kx\sin jx\,dx\right].$$

Але, позначаючи через a_n і b_n $(n=0, 1, 2,\ldots)$ коефіцієнти Фур'є для $f(x)$, ми бачимо, що

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k, \quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx = b_k.$$

Крім того, на підставі формул (I), (II) і (III) § 43 ми бачимо, що три останні суми в квадратних дужках дорівнюють нулеві, бо дорівнює нулеві кожний з інтегралів, що входять у них, а в двох перших сумах інтеграли після винесення за дужку сталих множників дорівнюють π (для $k\neq 0$), тому

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx - \alpha_0 a_0 - \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \alpha_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Додаючи і віднімаючи з правої частини рівності одну й ту ж кількість

$$\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

знайдемо

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx+\left(\frac{a_0}{2}-\alpha_0\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2]-$$

$$-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).$$

Зауважимо тепер, що в правій частині рівності дужки $\left(\frac{a_0}{2}-\alpha_0\right)^2$, $(\alpha_k-a_k)^2$ і $(\beta_k-b_k)^2$ є величини, які можуть бути тільки додатні або дорівнювати нулеві, а всі інші члени не залежать від вибору чисел α_0, α_k, β_k. Звідси випливає, що, для того, щоб δ_n^2 мало найменше із своїх можливих значень, необхідно і досить, щоб кожна із згаданих вище дужок перетворювалась у нуль, тобто

$$\alpha_0=\frac{a_0}{2},$$

$$\alpha_k=a_k,$$

$$\beta_k=b_k \qquad k=1,\ 2,\ldots,\ n.$$

Звідси випливає справедливість такої теореми: **серед усіх тригонометричних многочленів порядку n найменше середнє квадратичне відхилення від функції $f(x)$ має той многочлен, коефіцієнти якого є коефіцієнтами розкладу $f(x)$ у ряд Фур'є.**

Отже, сума n перших членів ряду Фур'є для $f(x)$ хоч і не повинна прямувати до $f(x)$ (бо ряд Фур'є, як ми знаємо, не завжди збігається), але все таки наближає в середньому функцію $f(x)$ краще, ніж усякий інший тригонометричний многочлен з такою ж кількістю членів.

§ 49. Рівність Парсеваля. Теорема єдиності.

Ми бачили в попередньому параграфі, що тригонометричний многочлен n-го порядку наближає в середньому $f(x)$ найкраще, якщо його коефіцієнтами є коефіцієнти Фур'є для $f(x)$. Але постає посутнє питання: чи можна взагалі говорити про те, що ми маємо справу з „наближенням" $f(x)$? Може бути величина середньої квадратичної помилки дуже велика навіть і тоді, коли ми беремо число членів тригонометричного многочлена дуже великим?

Відповідь на це запитання можна дати в такій формі:

При заміні $f(x)$ тригонометричним многочленом n-го порядку з коефіцієнтами, що дорівнюють коефіцієнтам Фур'є від $f(x)$, середня квадратична помилка прямує до нуля при необмеженому зростанні n.

Ми не даватимемо тут доведення цього цікавого твердження і обмежимось лише деякими загальними вказівками. Насамперед зауважимо, що коли у формулі попереднього параграфа покласти $\alpha_0 = \frac{a_0}{2}$, $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то ми знайдемо

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)\right]^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Звідси випливає, що доведення рівності

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n^2 = 0$$

рівносильне твердженню

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx.$$

Помножуючи обидві частини цієї рівності на 2 і помічаючи, що збіжність деякого ряду до якогось числа A є не що інше як прямування до A суми n перших членів цього ряду, знайдемо

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx.$$

Ця цікава рівність має назву *рівності Парсеваля.*

Таким чином ми бачимо, що коли вдається довести прямування до нуля виразу δ_n^2 при $n\to\infty$, то звідси випливає рівність Парсеваля; але й навпаки, коли б вдалося довести рівність Парсеваля, то з неї випливало б прямування до нуля середньої квадратичної помилки.

Відзначимо один надзвичайно цікавий висновок з рівності Парсеваля.

Припустимо, що функція $f(x)$ має всі коефіцієнти Фур'є рівними нулеві, тобто

$$a_0 = 0, \quad a_n = b_n = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Тоді з рівності Парсеваля випливає:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx = 0.$$

Але через те що підінтегральна функція не від'ємна, то інтеграл може дорівнювати нулеві тільки при умові

$$f(x) \equiv 0.$$

Отже, ми маємо теорему, що має назву *теореми єдиності:*

Не існує двох різних функцій, у яких однакові всі їх коефіцієнти Фур'е, бо коли б такі функції існували, їх різниця була б відмінна від нуля, але мала б усі коефіцієнти Фур'е рівними нулеві.

Цією теоремою ми вже користувались у § 46.

ЗМІСТ