

**ЗАГАЛЬНА МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ БАГАТОРІВНЕВОГО  
УТВОРЕННЯ НОРМАЛЬНИХ ТРІЩИН В ЗАЛІЗОБЕТОННИХ  
ЕЛЕМЕНТАХ**

**GENERAL METHOD OF CALCULATION OF MULTILATERAL  
FORMATION OF NORMAL CRACKS IN REINFORCED CONCRETE  
ELEMENTS**

**Ромашко-Майструк О. В., ст. викладач, ORCID: 0000-0003-3353-2268**  
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

**Romashko-Maistruk O. V., senior lecturer** (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

**Розроблено загальну методику розрахунку багаторівневого утворення нормальних тріщин, яка дозволяє з єдиних позицій: встановлювати момент появи нормальних тріщин незалежно від рівня їх утворення, визначати відстані між суміжними тріщинами та обчислювати ширину їх розкриття за схемою послідовного нерівномірного накопичення взаємних зміщень бетону і арматури.**

**A general methodology for the calculation of multilevel formation and the detection of normal cracks has been developed. It allows from a single methodological standpoint: to establish the moment of normal cracks occurrence regardless of their level of formation, to determine the distances between adjacent cracks and to calculate the width of their opening according to the scheme of consistent uneven accumulation of mutual displacements of concrete and reinforcement. It is based on a generalized model of adhesion of reinforcement to concrete, so it remains acceptable for any stage of reinforced concrete elements deformation and can be equally successful in both engineering and software methods of calculating reinforced concrete elements and structures.**

**In the framework of the generalized model of reinforcement with concrete coupling, a universal criterion is proposed, corresponding to the appearance of not only the first crack, but also all other cracks without exception. In terms of physical content, this criterion is characterized by an imbalance between the maximum forces in the stretched concrete and the maximum efforts of the active adhesion of the reinforcement to the concrete in the area between adjacent cracks. This criterion made it possible to relate the distance between the cracks directly to the average adhesion stresses of the**

reinforcement with concrete and to determine them on the basis of the equality of the reinforcement with concrete adhesion forces on either side of the intended crack of a certain level. It is proposed to calculate the width of the normal crack opening according to a simplified scheme, but from the standpoint of consistent accumulation of concrete and reinforcement mutual displacements (Thomas's hypothesis).

The technique of calculation of normal cracks multilevel formation is developed in accordance with the basic provisions of the deformation-force model of the reinforced concrete elements resistance to force influences. Therefore, it is also based on the generally recognized system of static, geometric and physical relationships of the mechanics of a deformed solid.

**Ключові слова:**

Залізобетон, елементи, тріщини, критерії, крок, ширина розкриття  
Reinforced concrete, elements, cracks, criteria, step, width of disclosure

**Вступ.** В теорії деформування залізобетонних елементів і конструкцій особлива увага завжди відводилась питанням тріщиностійкості, оскільки поза ними оцінити дійсний напружено-деформований стан зазначених елементів в експлуатаційних стадіях просто неможливо. Однак відтворення реального стану залізобетонних елементів у відповідних розрахунках і досі залишається доволі складним завданням. Проблема полягає не тільки в тому, що довжина окремих блоків, на які розділяється залізобетонний елемент тріщинами в процесі його деформування, є різною та залежить від дуже багатьох факторів. Запровадження деформаційних моделей з використанням дійсних діаграм деформування матеріалів в сучасну практику проектування залізобетонних елементів і конструкцій теж не гарантує достовірного відтворення реальних процесів багаторівневого утворення та розкриття тріщин.

Оскільки реальний процес утворення та розкриття нормальних тріщин в залізобетонних елементах є багаторівневим та супроводжується порушенням взаємодії арматури з бетоном, то вкрай важливо, щоб загальна методика розрахунку тріщин будувалась на основі деякої універсальної моделі зчеплення арматури з бетоном.

**Аналіз останніх досліджень.** Проблемі тріщиностійкості залізобетонних елементів і конструкцій присвячено дуже багато робіт вітчизняних та закордонних вчених. Однак методик, що дозволяли б розраховувати основні параметри реального багаторівневого утворення нормальних тріщин, на сьогодні практично не існує. Лише в окремих роботах [1, 2] пропонується побудова таких методик на основі моделювання процесів зчеплення арматури з бетоном.

Відтворити в методиках розрахунку процесу зчеплення арматури з бетоном за допомогою діаграм їх взаємного зміщення вкрай складно, оскільки такі діаграми в процесі деформування залізобетонних елементів

постійно змінюються [3, 4, 5, 6] і їх безпосереднє інтегрування стає практично неможливим. Тому в методиках розрахунку взаємодію арматури з бетоном моделюють у найпростіший спосіб – за допомогою середніх напруження зчеплення. Однак реалізація цього способу в дослідженнях [2] викликає серйозне застереження щодо лінійності зв'язку між середніми напруженнями зчеплення арматури з бетоном та крайовими нормальними напруженнями в арматурному стержні незалежно від рівня деформування залізобетонного елемента.

Методика розрахунку багаторівневого утворення нормальних тріщин за допомогою «двохконсольного» елемента [1] на сьогодні залишається вкрай складною для реалізації навіть за допомогою спеціальних програмних комплексів. Крім того, виникають певні застереження щодо трактування появи стискаючих напружень в зоні навколо досліджуваної тріщини.

Загалом розрахунок багаторівневого утворення нормальних тріщин можна було б виконувати числовими ітераційними способами [7, 8, 9, 10], що реалізуються тільки програмно за допомогою методу скінчених елементів. Але їх інженерна осяжність, як правило, втрачається, оскільки повністю або частково нівелюється фізична сутність процесів зчеплення арматури з бетоном та рівнів утворення тріщин в залізобетонному елементі.

**Постановка мети і задач досліджень.** Дані дослідження спрямовані на розробку загальної методики розрахунку послідовного багаторівневого утворення нормальних тріщин, яка була б справедливою для будь-якої стадії деформування залізобетонних елементів і конструкцій. Тому до вирішення поставлені наступні завдання:

- формування чітких критеріїв появи не тільки першої тріщини, але й всіх наступних тріщин за умови їх стадійного утворення;
- визначення відстані між суміжними тріщинами на найбільш напружених ділянках залізобетонного елемента;
- розрахунок ширини розкриття нормальних тріщин з позицій послідовного нерівномірного накопичення взаємних зміщень бетону і арматури.

**Методика досліджень.** В основу пропонованої методики розрахунку багаторівневого утворення нормальних тріщин покладається математичне моделювання процесів деформування залізобетонних елементів і конструкцій з урахуванням загальних закономірностей зчеплення арматури з бетоном.

**Результати досліджень.** Загалом появу першої тріщини доцільно визначати за граничними деформаціями розтягнутого бетону  $\varepsilon_{ctw}$ , які слід фіксувати лише за екстремальним критерієм його міцності  $dN_{ct} / d\varepsilon_{ct} = 0$ , що впливає з критерію Ферма  $dM_{ct} / d(1/r) = 0$ . Згідно чинних норм [11, 12] їх також можна приймати рівними  $\varepsilon_{ctw} = 2f_{ctk} / E_{c0}$ . Що ж до виразу  $dM_w / d\varepsilon = 0$  [2], то він не наділений якимось фізичним змістом, а тому не може слугувати критерієм взагалі.

Але універсальним критерієм, що відповідає появі не тільки першої тріщини, але й всіх інших без виключення, є порушення рівноваги максимальних зусиль в розтягнутому бетоні та зусиль активного зчеплення арматури з бетоном на ділянці між суміжними тріщинами

$$N_{ct,max} = N_{bd,max} \quad (1)$$

Зазначене зусилля активного зчеплення пропонується обчислювати за нелінійною функцією середніх напружень цього зчеплення, обґрунтовану в [13, 14] наступним степеневим виразом

$$\tau_{bmi} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot f_{ctk} \cdot (\sigma_{si} / \sigma_y)^{1-1/\eta_s}, \quad (2)$$

де  $\eta_1$  – коефіцієнт, що враховує профіль арматури [15] за критерієм Рема;

$\eta_2$  – коефіцієнт, що враховує вплив діаметру арматури [11, 12];

$f_{ctk}$  – характеристичне значення міцності бетону на розтяг;

$\sigma_{si}$  – напруження в арматурі у перерізі з тріщиною відповідного рівня;

$\sigma_y$  – граничні напруження в арматурі ( $\sigma_y = f_{yk}$ );

$1/\eta_s$  – параметр інтенсивності зчеплення (для арматури періодичного профілю  $\eta_s = \eta_1$ , для арматури гладкого профілю  $\eta_s = 6 \cdot \eta_1$ ).

Тоді, виходячи з (1) та (2), відстань між суміжними тріщинами першого рівня на рівні центру ваги розтягнутої арматури, при напруженнях в ній  $\sigma_{si} = \varepsilon_{ctu} \cdot E_s$ , можна визначити за формулою

$$s_{r1} = \frac{\varnothing_s}{4 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot f_{ctk} \cdot (\varepsilon_{ctu} \cdot E_s / \sigma_y)^{1-1/\eta_s}} \cdot \frac{N_{ct,cr}}{A_s} \quad (3)$$

Для центрально розтягнутих елементів відстань між вказаними тріщинами стає обернено пропорційною до коефіцієнта його армування  $\rho_{l,t} = A_s / A_{ct,cr}$ .

Коли зважити, що відстані між тріщинами другого рівня зменшаться вдвічі  $s_{r2} = s_{r1} / 2$ , то середні напруження, за яких почнуть утворюватися ці тріщини, можна визначити за виразом

$$\sigma_{s2} = f_{yk} \cdot \left( \frac{\varnothing_s}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot s_{r1} \cdot \rho_{l,t}} \right)^{\frac{\eta_s}{\eta_s-1}} \quad (4)$$

Залежність (2) залишається справедливою і для згинальних елементів, але максимальні зусилля в бетоні розтягнутої зони  $N_{ct,cr} = f(\varepsilon_{ctu})$  необхідно розраховувати за допомогою загально визначеної системи рівнянь МДТТ [16]

$$\left. \begin{aligned} & \bullet \text{ статичних } M = f(\varepsilon_c, \varepsilon_{ct}, \varepsilon_s), \quad N = f(\varepsilon_c, \varepsilon_{ct}, \varepsilon_s); \\ & \bullet \text{ геометричних } 1/r = f(\varepsilon_c, \varepsilon_{ct}, \varepsilon_s); \\ & \bullet \text{ фізичних } \sigma_c = f(\varepsilon_c), \quad \sigma_{ct} = f(\varepsilon_{ct}), \quad \sigma_s = f(\varepsilon_s) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

з доповненням її аналітичною залежністю діаграми стану залізобетонного

елемента  $M - 1/r$  та функцією граничних деформацій стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu} = f(\varepsilon_{si}, \rho_{li}, x_{si}, m_h, m_b)$ .

Загалом для більшості згинальних елементів нормальні напруження в арматурі уздовж ділянок між тріщинами переважно є змінними. Тому середні напруження зчеплення на вказаних ділянках завжди будуть різними, як і різнитимуться між собою відстані між тріщинами наступних та попередніх рівнів. Універсальність критерію порушення зчеплення арматури з бетоном (1) якраз і полягає в тому, що він дозволяє пов'язати відстань між тріщинами безпосередньо з середніми напруженнями зчепленнями арматури з бетоном.

Наприклад, відстань між суміжними тріщинами другого та першого рівнів (рис. 1, а) можна визначити за нижченаведеними виразами

$$s_{r2,1} = \frac{s_{r1,1} \cdot \tau_{bm2,2}}{\tau_{bm2,1} + \tau_{bm2,2}}; \quad s_{r2,2} = \frac{s_{r1,1} \cdot \tau_{bm2,1}}{\tau_{bm2,1} + \tau_{bm2,2}}, \quad (6)$$

що є адекватними рівності зусиль зчеплення арматури з бетоном по обидві сторони від ймовірної тріщини другого рівня

$$s_{r2,1} = s_{r2,2} \cdot \tau_{bm2,2} / \tau_{bm2,1}. \quad (7)$$

Аналогічним чином пропонується визначити і всі інші відстані між суміжними тріщинами попередніх та наступних рівнів їхнього утворення. При цьому, деформування більшості згинальних залізобетонних елементів можна обмежувати 3-ма рівнями утворення тріщин (рис. 1, б).

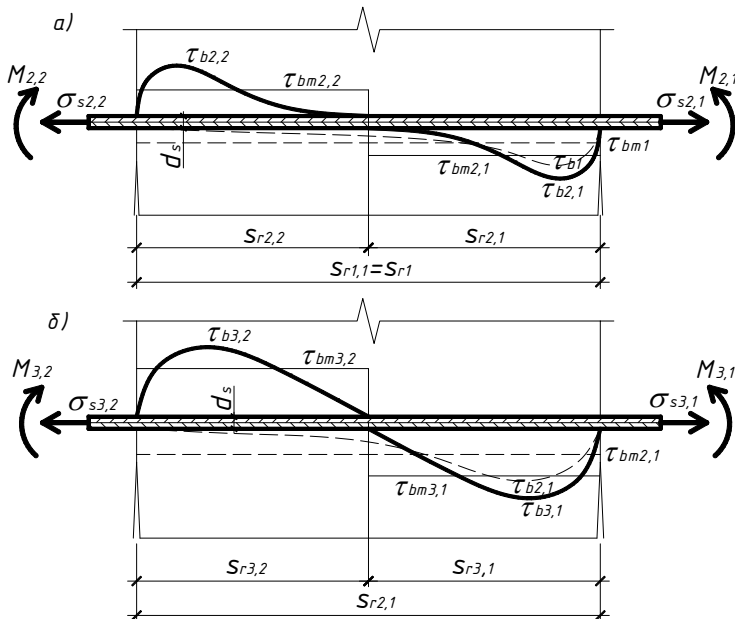


Рис. 1. Схема зміни напружень зчеплення арматури з бетоном після утворення тріщин першого (а) та другого (б) рівнів

У більшості випадків реальний розрахунок ширини розкриття нормальних тріщин в залізобетонних елементах за відомою гіпотезою Томаса, з позицій послідовного накопичення взаємних зміщень бетону і арматури

$$w_k = 2 \int_i^{0,5s_r} \varepsilon_\tau(z) dz, \quad (8)$$

і досі залишається декларативним.

Справа в тому, що пряме інтегрування виразу (8) здійснити практично неможливо, оскільки залежність взаємних зміщень арматури і бетону  $\varepsilon_\tau(z) = \varepsilon_s(z) - \varepsilon_{ct}(z)$  є доволі складною та не може бути описана єдиною функцією. Тому розрахунок ширини розкриття нормальних тріщин пропонується виконувати за спрощеною схемою, залишаючись на позиціях послідовного накопичення взаємних зміщень бетону і арматури.

Коли зважити, що в експлуатаційній стадії можуть утворюватися тріщини лише 1...2-го рівнів, то загальну ширину розкриття найбільш небезпечної нормальної тріщини пропонується обчислювати за формулою

$$w_k = s_{r1,1} \cdot (\varepsilon_{sm,1} + \varepsilon_{sm,2} + \Delta\varepsilon_{sm,2} - \varepsilon_{ctm}) - s_{r2,1} \cdot (\varepsilon_{sm,2} + \Delta\varepsilon_{sm,2} - \varepsilon_{ctm}), \quad (9)$$

де  $\varepsilon_{sm,1}$  – приріст середніх відносних деформацій розтягнутої арматури на

ділянці між суміжними тріщинами від початку завантаження до моменту утворення другої (наступної) тріщини першого рівня;

$\varepsilon_{sm,2}$  – теж саме від появи другої (наступної) тріщини першого рівня до моменту утворення тріщини другого рівня;

$\Delta\varepsilon_{sm,2}$  – теж саме від появи тріщини другого рівня до моменту досягнення експлуатаційного навантаження.

Варто зауважити, що в основу методики розрахунку багаторівневого утворення нормальних тріщин, як і в основу самої деформаційно-силової моделі [16], закладається загально визнана система рівнянь МДТТ (5). Тому розрахунок багаторівневого утворення та розкриття тріщин рекомендується виконувати в наступній послідовності.

1. Граничні деформації розтягнутого бетону  $\varepsilon_{ctu}$ , що відповідають появі першої тріщини першого рівня, розраховують за допомогою екстремального критерію його міцності  $dN_{ct} / d\varepsilon_{ct} = 0$  [16].

2. За деформаціями  $\varepsilon_{ctu}$  визначають максимально можливі зусилля в розтягнутому бетоні  $N_{ct,max}$  [16] та обмежують ними максимальні зусилля зчеплення арматури з бетоном  $N_{bd,max}$  [17].

3. Визначають середні напруження зчеплення арматури з бетоном на ділянці між першою та ймовірною другою (суміжною) тріщиною першого рівня за (2).

4. За формулою (3) обчислюють відстані між вищевказаними тріщинами першого рівня.

5. Відстані між суміжними тріщинами 1-го та 2-го рівнів розраховують за виразами (6). За необхідності аналогічним чином обчислюють відстані між суміжними тріщинами 2-го та 3-го рівнів.

6. Середні деформації арматури  $\varepsilon_{sm,i}$  на ділянках між суміжними тріщинами визначають в елементах: центрально розтягнутих – на підставі середніх напружень (4); згинальних – на підставі діаграм стану  $M - 1/r$  за кривою в осередненому перерізі  $\varepsilon_{sm,i} = f(1/r)$ .

7. Середні деформації розтягнутого бетону на ділянках між суміжними тріщинами  $\varepsilon_{ctm}$  обчислюють за [16].

8. Повну ширину дворівневого розкриття найбільш небезпечної тріщини розраховують за (9) або в загальному випадку за [17].

**Висновки.** Таким чином, розроблений метод розрахунку дозволяє з єдиних методологічних позицій встановлювати момент появи тріщин незалежно від рівня їх утворення, визначати відстані між суміжними тріщинами та обчислювати ширину їх розкриття за схемою послідовного нерівномірного накопичення взаємних зміщень бетону і арматури. А оскільки в його основу покладено узагальнену модель зчеплення арматури з бетоном, то він залишається прийнятним для будь-якої стадії деформування залізобетонних елементів та може з однаковим успіхом реалізовуватись як в інженерних, так і в програмних методиках розрахунку залізобетонних елементів і конструкцій.

1. Бондаренко В. М., Колчунов В. И. Расчётные модели силового сопротивления железобетона: монография. Москва: «АСВ», 2004. 472 с.

Bondarenko V. M., Kolchunov V. I. Raschyotny'e modeli silovogo soprotivleniya zhelezobetona: monografi`ya. Moskva: «ASV», 2004. 472 s.

2. Кочкаръов Д. В. Нелінійний опір залізобетонних елементів і конструкцій силовим впливам: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.01. Полтава, 2018. 44 с.

Kochkarov D. V. Neliniyniy opir zalizobetonnykh elementiv i konstruktstii sylovyum vplyvam: avtoref. dys. ... d-ra tekhn. nauk: 05.23.01. Poltava, 2018. 44 s.

3. Mirza S. A. and Houde J. Study of Bond-Slip Relationships in Reinforced Concrete. *ACI Journal*. January 1979. Vol. 76, No.1. P. 19-46.

4. Eligehausen R., Popov E. P. and Bertero V. V. Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations: Report No. UCB/EERC-83/23. Berkeley: Earthquake Engineering Research Center of California University, 1983. 169 p.

5. Shima H., Chou L.-L. and Okamura H. Micro and macro models for bond in reinforced concrete. *Journal of the Engineering Faculty of Tokyo University*. 1987. Vol. XXXIX, No. 2. P. 133-194.

6. Harajli M. H., Hout M.A. and Jalkh W. Local bond stress-slip behavior of reinforced bars embedded in plain and fiber concrete. *ACI Materials Journal*. 1995. Vol. 92, No. 4. P. 343-353.

7. Карпенко Н. И. Общие модели механики железобетона. Москва: Стройиздат, 1996. 416 с.

Karpenko N. I. Obshhie modeli mekhaniki zhelezobetona. Moskva: Strojizdat, 1996.

8. Веселов А. А. Нелинейная теория сцепления арматуры с бетоном и ее приложения: дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.01 / Санкт-Петербургский гос. арх.-строит. ун-т. Санкт-Петербург, 2000. 320 с.

Veselov A. A. Nelinejnaya teoriya sčepleniya armatury` s betonom i ee prilozheniya: dis. ... d-ra tekhn. nauk: 05.23.01 / Sankt-Peterburgskij gos. arkh.-stroit. un-t. Sankt-Peterburg, 2000. 320 s.

9. Конечно-элементное моделирование процессов неупругого деформирования и разрушения элементов железобетонных конструкций / А. В. Бенин и др. *Морские интеллектуальные технологии*. 2011. №3. С. 105-108.

Konechno-e`lementnoe modelirovanie processov neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya e`lementov zhelezobetonny`kh konstrukcij / A. V. Benin i dr. *Morskie intelektual`ny`e tekhnologii*. 2011. No. 3. S. 105-108.

10. Process of cracking in reinforced concrete beams (simulation and experiment) / I. N. Shardakov et al. *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2016. Vol. 38. P. 339-350.

11. ДСТУ Б В.2.6-156: 2010. Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування. [Чинний від 01.06.11]. Київ: Міністерство будівництва України, 2011. 123 с. (Національний стандарт України).

DSTU B V.2.6-156: 2010. Konstruktsii budynkiv i sporud. Betonni ta zalizobetonni konstruktsii z vazhkoho betonu. Pravyla proektuvannia. [Chynnyi vid 01.06.11]. Kyiv: Minrehionbud Ukrainy, 2011. 123 s. (Natsionalnyi standart Ukrainy).

12. EN 1992-1-1. Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings. [Final Draft, December 2004]. Brussels: CEN. 2004. 225 p. (Європейський стандарт).

13. Ромашко О. В., Ромашко В. М. Щодо оцінювання зчеплення арматури з бетоном. *Зб. наук. праць УДУЗТ*. 2018. Вип. 179. С. 92-99.

Romashko O. V., Romashko V. M. Shchodo otsiniuvannia zchepлення armatury z betonom. *Zb. nauk. prats UDUZT*. 2018. Vyp. 179. S. 92-99.

14. Ромашко В. М., Ромашко О. В. Розрахунок тріщиностійкості залізобетонних елементів з урахуванням рівнів утворення нормальних тріщин. *Зб. наук. праць УДУЗТ*. 2018. Вип. 181. С. 58-65.

Romashko V. M., Romashko O. V. Rozrakhunok trishchynostiikosti zalizobetonnykh elementiv z urakhuvanniam rivniv utvorennia normalnykh trishchyn. *Zb. nauk. prats UDUZT*. 2018. Vyp. 181. S. 58-65..

15. Rehm G. The fundamental law of bond. *Proceedings of the symposium on bond and crack formation in reinforced concrete*. Stockholm: RILEM. 1957. Vol. 2. P. 491-498.

16. Ромашко В. М. Деформаційно-силова модель опору бетону і залізобетону: монографія. Рівне: О. Зень, 2016. 424 с.

Romashko V. M. Deformatsiino-sylova model oporu betonu i zalizobetonu: monohrafiia. Rivne: O. Zen, 2016. 424 s.

17. Ромашко О. В., Ромашко В. М., Журавський О. Д. Узагальнена модель зчеплення арматури з бетоном. *Ресурсоекономічні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць*. Рівне: НУВГП, 2019. Вип. 37. С. 214-221.

Romashko O. V., Romashko V. M., Zhuravskiy O. D. Uzahalnena model zchepлення armatury z betonom. *Resursoekonomni materialy, konstruktsii, budivli ta sporudy: zb. nauk. prats*. Rivne: NUVHP, 2019. Vyp. 37. S. 214-221.