517
Ж-46

КУРС
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
ЧАСТИНА III

П 517
Ж-46

ПРОФ. І. І. ЖЕГАЛКІН
ДОЦ. М. І. СЛУДСЬКА

ІНТЕҐРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

3553

ДЕРЖАВНЕ
УЧБОВО-ПЕДАГОГІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО
«РАДЯНСЬКА ШКОЛА»

3553

КУРС
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ЧАСТИНА ТРЕТЯ

ДЕРЖАВНЕ
УЧБОВО-ПЕДАГОГІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО
„РАДЯНСЬКА ШКОЛА"
КИЇВ • 1936 • ХАРКІВ

Проф. І. І. ЖЕГАЛКІН і доц. М. І. СЛУДСЬКА

517
Ж-46

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

ПІДРУЧНИК
ДЛЯ ВИЩИХ ПЕДАГОГІЧНИХ
НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

ПЕРЕКЛАД З РОСІЙСЬКОГО ВИДАННЯ,
ЗАТВЕРДЖЕНОГО НКО РСФРР

Затверджено НКО УСРР

Педагогічний інститут і Київ
проверено 1966 г.

ДЕРЖАВНЕ
УЧБОВО-ПЕДАГОГІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО
„РАДЯНСЬКА ШКОЛА"
КИЇВ · 1936 · ХАРКІВ

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літописі Укр. Друку“, „Картковому репертуарі“ та інших покажчиках Української Книжкової Палати

перевірено
1992 г.

Редактор *Центер І. М.* Коректор *Драгоманова*
Технічний редактор *Гінзбург У.*

„Радянська школа“. Видання № 369. Уповноважений Головліту № 4573. Замовл. № 2725. Тираж 6.200. Формат 62×94/16. Папер. арк. 14 3/4. Друк. арк. 28 3/4. Знаків в 1 папер. арк. 105.000. Здано до виробництва 15/IX 1936 р. Підписано до друку 28/X 1936 р. Ціна книги 5 крб. 75 коп. Оправа 1 крб. 25 коп.

Книжкова ф-ка ДВРШ ім. Г. І. Петровського. Харків.

ДВІ ЗАДАЧІ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ.

В тісному і нерозривному зв'язку з диференціальним численням, будучи його природним продовженням, стоїть так зване інтегральне числення.

Подібно до того, як на виникнення диференціального числення сильний вплив мали дві задачі: задача про дотичну і задача про швидкість,— так само і інтегральне числення виникло з двох задач.

§ 1. Перша задача інтегрального числення.

До числа тих задач, які природно виникли при самому початку зародження геометрії як науки, належить насамперед задача про обчислення площ. Причина очевидна. Ця задача має не тільки теоретичний, але й практичний інтерес. І не випадково начала геометрії були закладені в Єгіпті. Щорічні бурхливі розливи Ніла, змиваючи межі земельних ділянок і змінюючи їх форму, тим самим ставили на порядок денний питання про обчислення площ.

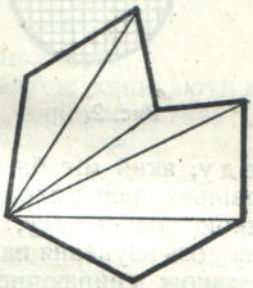

Рис. 1.

Метод, що його стародавні геометри вживали при обчисленні площ, полягав ось у чому: вони намагались побудувати квадрат, рівновеликий площі даної фігури. Якщо це їм вдавалося, то задачу вважали розв'язаною. Завдяки ж цьому їх методові і тепер задачу про обчислення площі даної фігури звичайно називають задачею про квадратуру цієї площі.

З аналогічної причини об'єм даного тіла називається його кубатурою, бо стародавні геометри, для того щоб обчислити об'єм даного тіла, намагались побудувати рівновеликий йому куб.

Задача про квадратуру площ є перша задача інтегрального числення.

За наших часів уже в елементарній геометрії обчисляються площі найпростіших фігур, як, наприклад, трикутника і трапеції. Вміючи ж обчисляти площу трикутника, ми можемо обчислити і площу всякого многокутника. Для цього досить поділити його на систему трикутників, що можна зробити дуже різноманітними способами, проводячи, наприклад, всякі можливі діагоналі з однієї якоїнебудь його вершини (рис. 1).

Але якщо, таким чином, ми не зустрічаємо ніяких особливих теоретичних труднощів при обчисленні площ, обмежених відрізками прямих ліній, то зовсім інакше виглядає справа, як тільки до числа меж даної фігури входять не тільки відрізки прямих, але й дуги кривих ліній. Уже задача про квадратуру круга розв'язується в елементарній геометрії з великими труднощами, вимагаючи для свого розв'язання поняття про границю. Ці труднощі зростають, якщо межами фігури є складніші криві. Легко бачити причину цього.

Якщо ми хочемо виміряти площу, обмежену кривими лініями (рис. 2), то ми повинні дізнатись, скільки і яких частин квадрата, прийнятого за одиницю міри, можна укласти в даній площі. Але на які б малі квадрати ми не поділили квадрат, прийнятий за одиницю, і скільки б і як би ми не укладали ці малі квадрати, ми завжди будемо одержувати фігуру, обмежену не кривою лінією, а ламаною. Отже, площа, обмежена кривими лініями, ніколи не може бути цілком заповнена частинами квадрата.

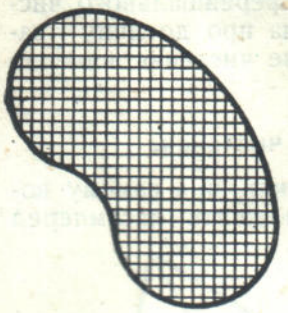

Рис. 2.

Так само зрозуміло, що тіло, обмежене кривими поверхнями, не може бути заповнене ніякими частинами куба.

Стародавні геометри не спроможні були подолати труднощів, що випливають з цього факту. Хоч вони і обчислювали площі та об'єми більш або менш складних фігур, але вони не мали загального методу, який міг би бути застосований для обчислення будьякої довільно даної площі. Цей метод був вироблений тільки математикою нового часу, яка в понятті границі набула могутньої зброї для розв'язування найважчих задач. Користуючись цим поняттям, а також спираючись на поняття координат і функції, стало можливим виразити в аналітичній формі геометричну задачу про квадратуру площі. Перетворена таким способом, ця задача привела до поняття означеного інтеграла. Створився новий відділ математики під назвою теорії означених інтегралів. Задачі про квадратуру і кубатуру є тепер тільки окремими випадками прикладання цієї теорії. Але тим цікавіше відзначити той факт, що, тільки виражаючи в аналітичній формі геометричну задачу про квадратуру, можна легко й природно прийти до поняття про означений інтеграл, бо з геометричного погляду теорія означених інтегралів є не що інше, як замаскована задача про квадратуру площі. Ця задача, поставлена ще в глибокій давнині, є предметом постійного дослідження і новітніх математиків, але тепер її геометрична суть часто буває глибоко прихована під тими аналітичними формами, в які її прибирають.

Розглянемо тепер, у чому полягає друга задача інтегрального числення.

§ 2. Друга задача інтегрального числення.

Ця задача могла виникнути тільки за новітніх часів, бо вона щільно зв'язана з поняттям похідної.

Всяка функція, похідна якої дорівнює даній функції, називається первісною, або інтегралом, даної функції.

Від останнього терміну походить і назва інтегрального числення.

Так, наприклад, як відомо,

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

Отже, синус є первісна косинуса. В свою чергу косинус є первісна мінус-синуса.

Функція $\arcsin x$ є інтегралом, або первісною, для $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, бо

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Через те що

$$\frac{de^x}{dx} = e^x,$$

показникова функція e^x є первісною для самої себе.

Як тільки введено поняття функції, одразу ж виникають дві задачі, обернені одна одній. З одного боку, виникає задача:

знайти похідну даної функції,

з другого боку, задача:

знайти інтеграл даної функції.

Обидві ці задачі можуть бути поставлені відносно всякої функції. Так, наприклад, якщо нам дано функцію x^5, то, з одного боку, ми можемо шукати її похідну, і це буде задача диференціального числення. Як відомо,

$$\frac{dx^5}{dx} = 5x^4.$$

Але, з другого боку, ми можемо шукати функцію, похідна якої дорівнювала б саме цій даній функції x^5, тобто можемо шукати таку функцію u, яка задовольняла б рівнянню:

$$\frac{du}{dx} = x^5.$$

В даному випадку неважко зміркувати, що це рівняння задовольняється функцією $\frac{x^6}{6}$. Дійсно,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^6}{6}\right) = x^5.$$

Отже, функція $\frac{x^6}{6}$ є інтеграл функції x^5.

Задача про обчислення інтегралів даної функції і є друга задача інтегрального числення.

Таким чином, ми бачимо, що задача знайти похідну даної функції є задача диференціального числення; задача ж знайти інтеграл даної функції уже є задачею інтегрального числення.

Всякий процес переходу від даної функції до її похідної називається *диференціюванням*. Так само всякий перехід від даної функції до її інтеграла називається *інтегруванням*.

Легко бачити, що дія інтегрування обернена дії диференціювання. Справді, припустимо, що маємо дві функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, відносно яких відомо, що

$$\varphi'(x) = \psi(x).$$

Можливі два випадки. Нам може бути дана функція $\varphi(x)$, при чому треба обчислити функцію $\psi(x)$. Це — задача диференціального числення.

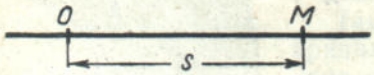

Рис. 3.

Або нам може бути дана функція $\psi(x)$, треба ж обчислити функцію $\varphi(x)$. Це вже задача інтегрального числення.

Зрозуміло, що задача інтегрального числення обернена задачі диференціального числення.

Поняття дій диференціювання і інтегрування показують, що Аналіз, подібно до елементарної алгебри, вивчає різні дії, але, відмінно від алгебри, він вивчає дії не над числами, а над функціями.

До обчислення інтегралів приводить безліч задач. Розглянемо одну з них.

Нехай по прямій, яку приймемо за вісь X, рухається точка M (рис. 3). Якщо через s позначимо так званий шлях точки M, тобто, точніше, її абсцису, то s буде якоюсь функцією часу t. Нехай

$$s = f(t).$$

Як відомо, швидкість точки, яку позначимо через v, дорівнює похідній від s по t:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

Отже, якщо відома залежність s від t, то обчислення швидкості точки зводиться до обчислення похідної, тобто до задачі диференціального числення. Але припустимо, що залежність шляху s від часу нам невідома і що потрібно саме знайти її, знаючи швидкість точки в кожний момент, а саме, нехай

$$v = \varphi(t), \qquad (1)$$

де $\varphi(t)$ — дана відома функція. Переписавши цю рівність у такій формі:

$$\frac{ds}{dt} = \varphi(t),$$

ми бачимо, що s є інтеграл функції $\varphi(t)$, а тому задача про обчислення шляху, що його проходить точка, із швидкості точки є задача інтегрального числення.

В загальному випадку до обчислення відповідних інтегралів зводиться всяка задача, в якій потрібно знайти закон зміни самої величини, знаючи закон, за яким змінюється її швидкість.

§ 3. Дві задачі інтегрального числення.

Отже, ми маємо дві задачі, які привели до виникнення інтегрального числення: задачу про обчислення площ і задачу про обчислення первісних.

Як ми бачимо, ці дві задачі за своїм змістом глибоко різні. Тому цілком природно, що вони повели до двох віток інтегрального числення: з першої розвинулась та вітка, яка має назву „теорії означених інтегралів"; друга задача дала вітку, відому як теорія неозначених інтегралів. Але хоч коріння цих віток глибоко різне, проте, подекуди вони настільки тісно переплітаються між собою, що становлять майже одне нерозрізнюване ціле.

Ми почнемо з вивчення першої задачі. Побачимо, що розв'язування її тісно зв'язане з розв'язуванням другої задачі, до вивчення якої після цього ми природно й перейдемо.

§ 4. Висновок.

Інтегральне числення виникло з двох задач: задачі про квадратуру площ і задачі про обчислення первісних.

ПЕРША ЗАДАЧА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ: КВАДРАТУРА ПЛОЩ.

Загальний метод для обчислення площ, як було зазначено, міг бути вироблений тільки на основі ідей математики нового часу. Викладові його і присвячений цей розділ.

§ 5. Крива трапеція.

Крива трапеція має деяку подібність до звичайної трапеції, тому ми називатимемо криволінійною або кривою трапецією,

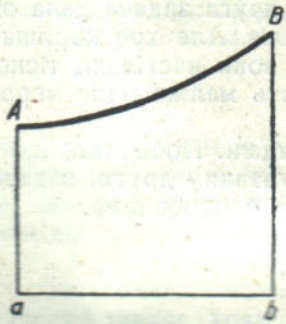

Рис. 4.

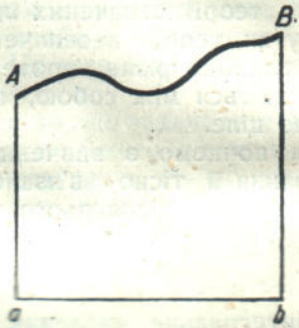

Рис. 5.

або навіть просто трапецією всяку фігуру, обмежену з трьох боків прямими, перпендикулярними до однієї з них, а з четвертого боку — даною кривою (рис. 4).

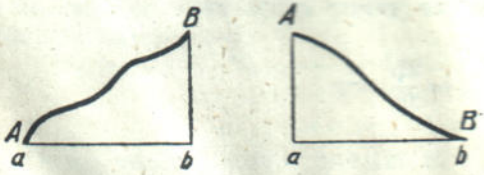

Рис. 6.

Рис. 7.

Відрізок ab назвемо нижньою основою трапеції, криву ж AB — її верхньою основою; перпендикуляри aA і bB природним буде назвати сторонами трапеції.

Якщо замість монотонної кривої ми матимемо хвилясту (рис. 5), то дістанемо фігуру, яка дуже мало нагадує трапецію. Не зважаючи на це, ми і цю фігуру будемо називати кривою або криволінійною трапецією. Взагалі

кривою трапецією називають усяку фігуру, обмежену з трьох боків прямими, з них дві перпендикулярні до третьої, і з четвертого боку якоюсь кривою.

В окремому випадку точка A може зливатись із точкою a, або точка B з точкою b (рис. 6). Одержувані при цьому фігури називають кривими трикутниками. Але ми їх також називатимемо і кривими трапеціями, розглядаючи їх як граничний випадок, коли у трапеції одна сторона зникла. Також і фігуру

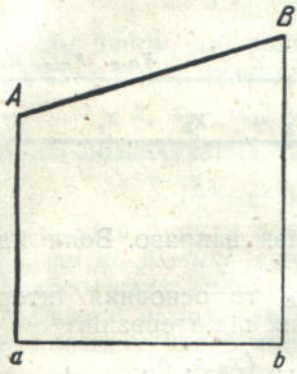

Рис. 8.

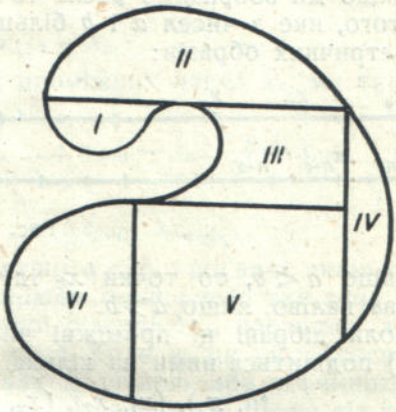

Рис. 9.

на рисунку 7 ми розглядатимемо як окремий випадок кривої трапеції, у якої обидві сторони зникли. Отже, з цього погляду половина круга є крива трапеція, основою якої є діаметр круга.

В окремому випадку, коли крива AB перетворюється в пряму (рис. 8), ми маємо звичайну трапецію. Елементарна геометрія відрізки aA і bB називає не сторонами, а основами. Отже, наша термінологія не збігається з термінологією елементарної геометрії.

Поняття про криву трапецію має велике значення, бо всяку дану плоску фігуру завжди можна поділити на кілька кривих трапецій, сума площ яких дає нам площу даної фігури. Так, наприклад, фігура на рисунку 9 поділена на шість трапецій. Тому з теоретичного погляду, щоб уміти обчисляти площу будьякого типу, досить знайти загальний метод, придатний для обчислення площі будьякої кривої трапеції.

§ 6. Позначення.

Умовимося щодо вживання деяких позначень, користуватись якими нам доведеться дуже довго.

Під a і b будемо розуміти два довільно взяті нерівні числа.

Можливі два випадки: або $a < b$, або $a > b$. В тому і другому випадку між ними ми можемо вставити ряд теж довільно дібраних проміжних чисел:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-1}, \tag{1}$$

що йдуть від a до b. Ці числа називатимемо числами x_k і для симетрії приймемо, що

$$a = x_0,\ b = x_n.$$

Кожне з чисел x_k, так само, як і число їх $n-1$, береться цілком довільно, з єдиним обмеженням: ряд (1) повинен давати ряд зростаючих чисел, якщо $a < b$, і ряд спадних, якщо $a > b$. Отже, це є так званий монотонний ряд чисел.

Якщо ми зобразимо числа точками на осі абсцис, то, залежно від того, яке з чисел a і b більше, ми дістанемо один з таких геометричних образів:

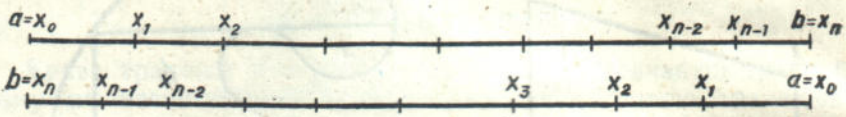

Рис. 10.

Якщо $a < b$, то точки x_k ідуть зліва направо. Вони йдуть справа наліво, якщо $a > b$.

Коли дібрані ці проміжні числа x_k, то основний інтервал $(a,\ b)$ поділиться ними на кілька менших підінтервалів:

$$(a,\ x_1),\ (x_1,\ x_2),\ (x_2,\ x_3),\ \ldots,\ (x_{n-1},\ b),$$

які називатимемо *елементарними інтервалами*. В кожному з них виберемо, теж зовсім довільно, якенебудь число. Те число, яке вибране в проміжку $(x_k,\ x_{k+1})$, позначимо символом ξ_k. Дістанемо систему чисел:

$$\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{n-2},\ \xi_{n-1}.$$

Кожне число ξ_k необхідно повинно бути проміжним між x_k і x_{k+1}, але не виключається можливість, що воно збігається з тим або з другим із них.

Взаємне співвідношення між числами x_k і ξ_k можна схематично показати так:

$$a_{\xi_0}\, x_{1\xi_1}\, x_2 \ldots x_{k\xi_k}\, x_{k+1} \ldots x_{n-1\xi_{n-1}}\, b,$$

або такими геометричними образами:

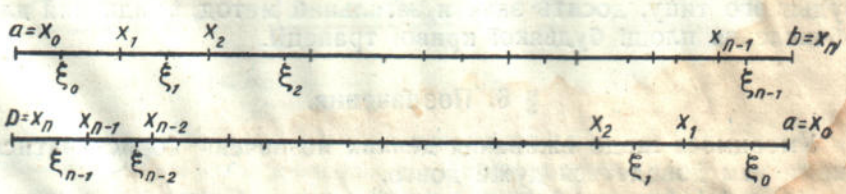

Рис. 11.

Через це ми називатимемо числа x_k точками поділу і будемо говорити, що точки x_k поділяють основний інтервал (a, b) на підінтервали (x_k, x_{k+1}). Висловлюючись геометричною мовою, ми можемо сказати, що добір чисел x_k і ξ_k відбувається таким чином: основний інтервал (a, b) поділяється довільними точками поділу x_k на якесь число підінтервалів, на кожному з яких потім відмічається, теж зовсім довільно, яканебудь точка ξ_k.

Уявимо тепер, що змінна величина x переходить від значення a до значення b, приймаючи послідовно значення, рівні дібраним проміжним числам $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Коли x переходить від значення x_k до значення x_{k+1}, то він набуває приросту, який дорівнює різниці $x_{k+1} - x_k$. Цю різницю ми позначатимемо символом

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k.$$

Таким чином, дібравши ряд проміжних чисел x_k, ми тим самим дістаємо ряд різниць:

$$x_1 - a,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2,\ \ldots,\ x_{n-1} - x_{n-2},\ b - x_{n-1},$$

коротше позначуваних так:

$$\Delta x_0,\ \Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_{n-2},\ \Delta x_{n-1}.$$

Ці різниці будуть додатні, якщо $a < b$, і від'ємні, якщо $a > b$. Отже, *всі ці різниці завжди мають один і той же знак*, при чому абсолютна величина кожної різниці Δx_k, очевидно, дорівнює довжині підінтервалу (x_k, x_{k+1}). Коли ж ми умовимося вважати довжину цього підінтервалу додатною або від'ємною, залежно від того, лежить точка x_{k+1} правіше чи лівіше від точки x_k, то довжина інтервалу (x_k, x_{k+1}) дорівнюватиме саме Δx_k.

Абсолютну довжину найбільшого підінтервалу позначимо через λ.

§ 7. Елементарні прямокутники.

Нехай маємо якунебудь криву трапецію $aABb$ (рис. 12). Інтервал (a, b), що є її основою, назвемо основним інтервалом. Поділивши його на довільне число n частин з допомогою довільно взятих точок $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, дістанемо підінтервали:

$$(a, x_1),\ (x_1, x_2),\ (x_2, x_3),\ \ldots,\ (x_{n-1}, b). \qquad (1)$$

В окремому випадку ми можемо взяти точки поділу на рівних віддалях одну від одної. Тоді всі підінтервали (1) будуть рівні. Але в загальному випадку ці підінтервали можуть бути і не рівні між собою.

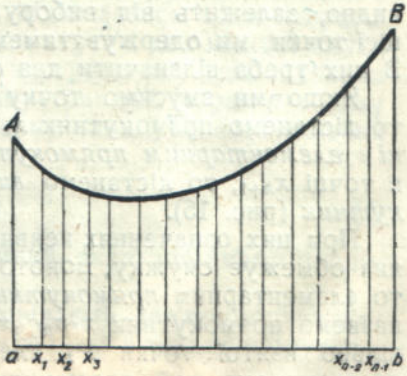

Рис. 12.

Поставивши в усіх точках поділу ординати, ми поділимо ними площу трапеції на частини, які назвемо *елементарними смужками*. Очевидно, що кожна елементарна смужка в свою чергу є крива трапеція, і площа даної трапеції дорівнює сумі площ усіх елементарних смужок.

Дібравши точки поділу і поділивши ними основний інтервал на підінтервали, ми в кожному підінтервалі відзначимо, теж зовсім довільно, якунебудь точку. Точку, дібрану в підінтервалі (x_k, x_{k+1}), позначимо символом ξ_k.

Розглянемо елементарну смужку, яка стоїть на інтервалі (x_k, x_{k+1}) (рис. 13), і нехай P_k — та точка на кривій, абсциса якої дорівнює ξ_k. Проведемо через P_k пряму, паралельно основі, до перетину її в точках p_k і q_k з крайніми ординатами смужки.

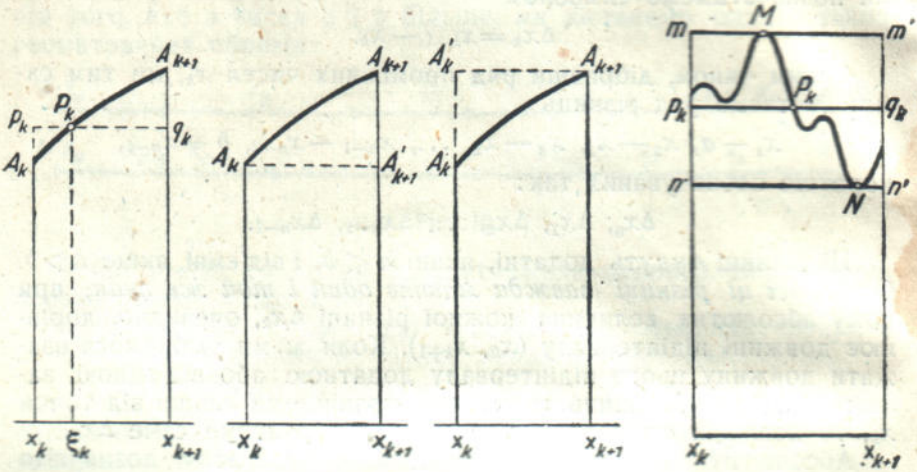

Рис. 13. Рис. 14. Рис. 15. Рис. 16.

Дістанемо прямокутник $x_k p_k q_k x_{k+1}$, який називатимемо *елементарним прямокутником загального типу*. Висота його, очевидно, залежить від вибору точки ξ_k, і, змінюючи положення цієї точки, ми одержуватимемо різні елементарні прямокутники. З них треба відзначити два окремі випадки.

Якщо ми змусимо точку ξ_k злитися з точкою x_k (рис. 14), то дістанемо прямокутник $x_k A_k A'_{k+1} x_{k+1}$, який назвемо *внутрішнім елементарним прямокутником*. Коли ж точку ξ_k помістимо в точці x_{k+1}, то дістанемо *виступаючий елементарний прямокутник* (рис. 15).

При цих означеннях неявно припускалося, що частина кривої, яка обмежує смужку, монотонна. Коли ж вона хвиляста (рис. 16), то елементарним *прямокутником* загального типу, як і раніше, назвемо прямокутник $x_k p_k q_k x_{k+1}$, висотою якого є ордината довільно взятої точки P_k, але внутрішнім прямокутником уже називатимемо той прямокутник $x_k nn' x_{k+1}$, висотою якого є ордината найнижчої точки N; навпаки, прямокутник $x_k mm' x_{k+1}$,

висотою якого є ордината точки M, найдальшої від основи, дасть нам виступаючий прямокутник. Отже,

внутрішнім і виступаючим прямокутниками називаються прямокутники, висотами яких є відповідно найменша і найбільша з ординат тієї частини кривої, яка обмежує смужку. Прямокутник, висотою якого є ордината довільно взятої точки на дузі кривої, є елементарний прямокутник загального типу.

Побудуємо для кожної елементарної смужки відповідні елементарні прямокутники. Залежно від того, чи будуть ці прямокутники всі загального типу, або ж усі внутрішні, або всі виступаючі, ми дістанемо один з таких геометричних образів (див. рис. 17).

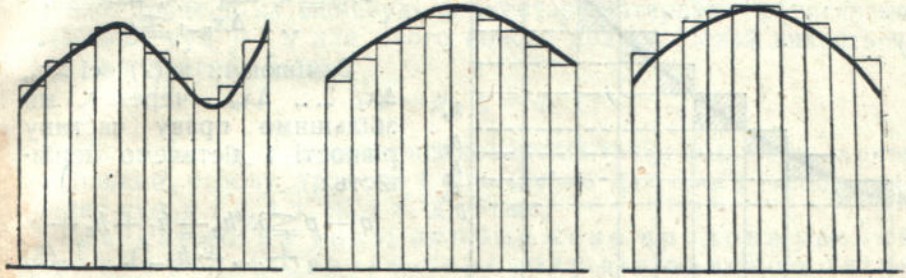

Рис. 17.

Безпосередньо очевидно, що

площа даної трапеції менша суми площ усіх виступаючих прямокутників і більша суми площ усіх внутрішніх прямокутників.

Цей простий геометричний факт буде для нас вихідним пунктом для встановлення методу, придатного для обчислення площі будьякої трапеції.

§ 8. Площа трапеції.

Приймемо основу трапеції за вісь X і припустимо, що крива, яка обмежує трапецію, монотонно піднімається зліва направо.

Поділимо трапецію на елементарні смуги і для кожної смуги побудуємо як внутрішній, так і виступаючий прямокутники (рис. 18). Позначимо через u площу трапеції, через p — суму площ усіх внутрішніх, а через q — суму площ усіх виступаючих прямокутників.

Зрозуміло, що

$$p < u < q. \qquad (1)$$

Запитуємо: яку ми зробимо помилку, якщо приймемо площу u рівною p або q?

Всякій елементарній смужці відповідають два прямокутники: внутрішній і виступаючий. Різниця між ними є теж прямокутник. Ми назвемо його граничним*.

* На рисунку 18 усі граничні прямокутники заштриховані.

Очевидно, що сума всіх граничних прямокутників дорівнює $q-p$. Обчислимо її хоча б тільки приблизно.

Позначимо висоти граничних прямокутників за порядком їх зліва направо через $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$. Через те, що основи їх відповідно рівні $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_{n-1}$, то

$$q-p=h_0\Delta x_0+h_1\Delta x_1+h_2\Delta x_2+\ldots+h_{n-1}\Delta x_{n-1}. \qquad (2)$$

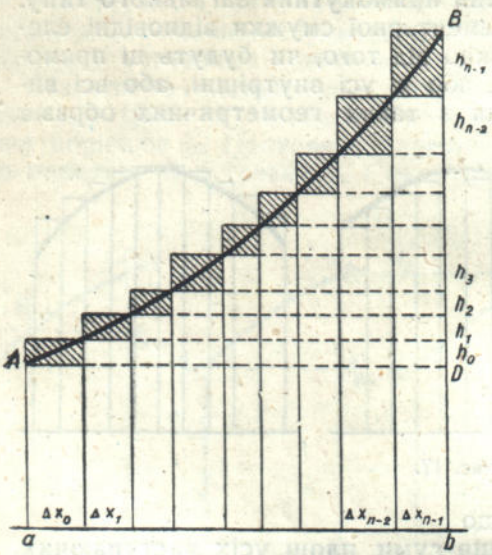

Рис. 18.

Нехай λ — найбільший з тих елементарних підінтервалів, на які поділена основа трапеції. Отже,

$$\Delta x_0 \leqq \lambda,\ \Delta x_1 \leqq \lambda,\ \Delta x_2 \leqq \lambda, \ldots,\ \Delta x_{n-1} \leqq \lambda.$$

Замінюючи в (2) всі $\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}$ через λ, ми збільшимо праву частину рівності і дістанемо нерівність:

$$q-p \leqq \lambda(h_0+h_1+h_2+\ldots+h_{n-1}). \qquad (3)$$

Продовжимо* основи граничних прямокутників вправо до перетину їх з крайньою ординатою bB. Одержимо систему паралельних ліній, які поділять ординату bB на відрізки, відповідно рівні висотам граничних прямокутників. Цією побудовою ми ніби переносимо висоти $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ на ординату bB. Геометрично зрозуміло, що

$$h_0+h_1+h_2+\ldots+h_{n-1}=DB=bB-aA.$$

Позначаючи через c різницю між крайніми ординатами трапеції: $c=bB-aA$, ми з (3) одержуємо основне для нас співвідношення:

$$q-p \leqq \lambda c. \qquad (4)$$

Це співвідношення цікаве ось чим: очевидно, що суми p і q, тобто суми внутрішніх і виступаючих прямокутників, залежать від того, як дібрані *всі* точки поділу $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Якщо ми змінимо хоч одну з них, то кожна з цих сум, взагалі кажучи, зміниться.

Отже, ліва частина нерівності (4) залежить від добору всіх точок поділу.

Але права частина не залежить від добору всіх точок поділу. Вона залежить тільки від величини λ найбільшого з тих еле-

* На рисунку пунктирними лініями.

ментарних підінтервалів, на які поділена основа трапеції. Тому, якщо ми змінюватимемо точки поділу так, щоб найбільший підінтервал зберігав одне й те ж значення, то ліва частина нерівності змінюватиметься, права ж — ні.

Уявімо тепер такий процес. Поділивши якнебудь основу трапеції на елементарні інтервали і побудувавши для цього поділу внутрішні і виступаючі елементарні прямокутники, обчислимо значення суми p і q. Нехай виявиться, що

$$p = p_1, \; q = q_1.$$

Після цього, знищивши всі точки поділу, ми знову поділяємо основу трапеції на якінебудь елементарні інтервали і обчисляємо значення сум p і q для цього нового поділу. Нехай виявиться, що при другому поділі

$$p = p_2, \; q = q_2.$$

Після цього, знищивши всі попередні точки поділу, ми втретє поділяємо основу трапеції і обчисляємо для цього поділу значення сум p і q, і т. д., і т. д. Отже,

ми маємо на увазі необмежено продовжуваний процес послідовного переходу від одного поділу трапеції до дальшого поділу.

Ми припустимо, що цей процес відбувається так, що довжина λ найбільшого елементарного інтервалу нескінченно маліє* і, отже, в границі перетворюється в нуль.

Очевидно, що такі процеси можливі. Один з простіших такий: ми поділяємо в перший раз основу трапеції пополам, потім кожну половину знову пополам і т. д., кожного разу при переході до нового поділу поділяючи пополам усі інтервали попереднього поділу. Зрозуміло, що при такому процесі $\lim \lambda = 0$.

Отже, нехай процес переходу від одного поділу до дальшого відбувається так, що λ нескінченно маліє.

Але при всякому поділі, як ми тількищо довели,

$$q - p \leqq \lambda c.$$

Тому, якщо згідно з припущенням $\lim \lambda = 0$, то

$$\lim (q - p) = 0, \tag{5}$$

і одержуємо таку теорему:

Теорема. **Границя суми граничних прямокутників дорівнює нулеві.**

Але коли u — площа трапеції, то геометрично зрозуміло, що

$$u - p < q - p, \quad q - u < q - p,$$

* Нескінченно маліючою величиною ми називаємо всяку змінну величину, границя якої дорівнює нулеві. Отже, модуль цієї величини (не вона сама) в процесі зміни стає і лишається, починаючи з деякого моменту, меншим від усякої наперед заданої як завгодно малої додатної величини.

а тому згідно з (5)

$$\lim(u-p)=0,\ \lim(q-u)=0,$$

тобто

$$u=\lim p=\lim q,$$

і ми одержуємо теорему:

Площа кривої трапеції дорівнює границі суми або тільки внутрішніх або тільки виступаючих елементарних прямокутників.

Легко тепер одержати загальніший результат. Поділивши трапецію на елементарні смуги, побудуємо елементарні прямокутники загального типу (рис. 19), суму площ яких позначимо через s. Очевидно, що

$$p<s<q.$$

Переходячи до границі, дістаємо

$$\lim p \leqq \lim s \leqq \lim q,$$

і, через те що крайні члени дорівнюють u,

$$u=\lim s.$$

Отже, площа трапеції дорівнює границі суми площ елементарних прямокутників будьякого типу.

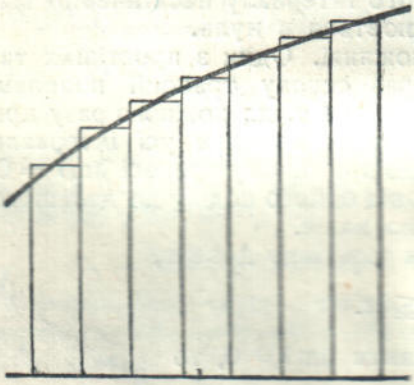

Рис. 19.

Покищо ми припускали, що ординати кривої йдуть зліва направо, зростаючи. Але теорема, очевидно, справедлива і тоді, коли ордината кривої є спадною функцією абсциси. Справді, досить змінити напрям осі X на протилежний, щоб ордината як функція абсциси перетворилась із спадної на зростаючу.

Отже, теорема справедлива для всякої трапеції, обмеженої зверху будьякою монотонною кривою.

Коли ж трапеція обмежена хвилястою кривою (рис. 20), то, побудувавши елементарні прямокутники, сума площ яких, як і раніше, нехай буде s, ми поділимо трапецію на кілька частин, кожна з яких буде обмежена вже монотонною кривою. Нехай $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ — площі цих частин. Якщо u — площа всієї трапеції, то

$$u=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n. \tag{6}$$

Позначимо через $s_1, s_2, \ldots, s_n$ суми площ тих елементарних прямокутників, які належать відповідно трапеціям $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

За доведеним

$$\lim s_1 = u_1,\ \lim s_2 = u_2,\ \lim s_3 = u_3, \ldots, \lim s_n = u_n.$$

Але

$$s = s_1 + s_2 + \ldots + s_n,$$

а тому

$$\lim s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

тобто

$$u = \lim s.$$

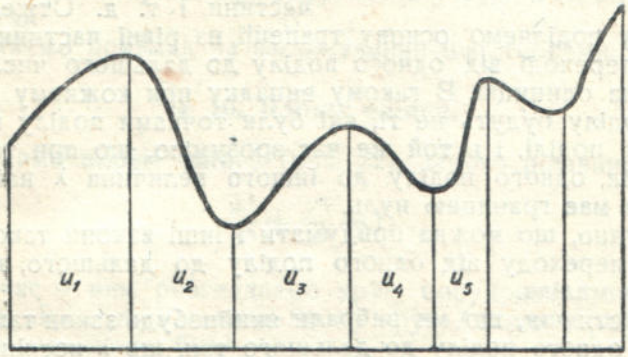

Рис. 20.

Отже,

якщо ми розумітимемо нескінченний процес послідовного переходу від одного поділу трапеції на елементарні прямокутники до дальшого поділу за таким законом, що довжина найбільшого з підінтервалів, на які поділяється основа трапеції, нескінченно маліє, то границя суми площ елементарних прямокутників дорівнює площі трапеції.

Коротше ж цю теорему ми формулюємо так:

Площа трапеції дорівнює границі суми площ елементарних прямокутників.

Ця теорема для нас основна. При її прикладаннях надзвичайно важливим є те, що способи поділу трапеції можуть бути дуже різноманітні. Часто вдається дібрати такий спосіб поділу, при якому сума s і її границя, а отже, і площа трапеції легко обчисляються.

§ 9. Про перехід до границі.

Ми довели: площа трапеції дорівнює *границі* суми площ елементарних прямокутників.

При цьому ми повинні розуміти, що процес, який нас приводить до границі суми s, відбувається так, що величина λ найбільшого підінтервалу нескінченно маліє.

Такі процеси можуть бути дуже різноманітні. Простіший, як було зазначено, полягає в тому, що від усякого поділу ми переходимо до дальшого, поділяючи інтервали попереднього поділу пополам. Але ми можемо переходити від одного поділу до даль-

шого, поділяючи підінтервали попереднього поділу не пополам, а на яке завгодно число частин, як рівних, так і нерівних. Нарешті, ми можемо переходити від старого поділу до нового, не залишаючи ні однієї точки старого поділу. Так, наприклад, ми можемо в перший раз поділити основу трапеції пополам, потім при другому поділі ми поділимо основу на три рівні частини, при третьому — на чотири рівні частини і т. д. Отже, ми кожного разу поділяємо основу трапеції на рівні частини, але так, що при переході від одного поділу до дальшого число частин зростає на одиницю. В такому випадку при кожному поділі всі точки поділу будуть не ті, які були точками поділу при попередньому поділі, і в той же час зрозуміло, що при такому переході від одного поділу до іншого величина λ найбільшого проміжка має границею нуль.

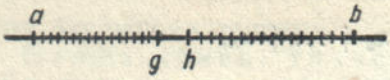

Рис. 21.

Очевидно, що можна придумати і інші закони такого послідовного переходу від одного поділу до дальшого, щоб λ нескінченно маліла.

Припустивши, що ми вибрали якийнебудь закон такого переходу від одного поділу до дальшого так, що λ нескінченно маліє, звернемо увагу на таку обставину: коли ми поділяємо основу трапеції на підінтервали, то, чим менша довжина λ найбільшого підінтервалу, тим, взагалі кажучи, більше число самих підінтервалів, а отже, тим більше і число точок поділу. Тому, якщо при переході від одного поділу до дальшого величина λ нескінченно маліє, то, очевидно, число точок поділу нескінченно зростає. І ось на перший погляд здається, що вимогу нескінченного маління величини λ можна замінити вимогою нескінченного зростання числа точок поділу. Але легко бачити, що така заміна неможлива. Справді, поділивши, наприклад, основний інтервал на три частини точками g і h (рис. 21), ми могли б потім переходити від кожного поділу до дальшого, поділяючи пополам, *за винятком інтервалу* (g, h), кожний інтервал попереднього поділу.

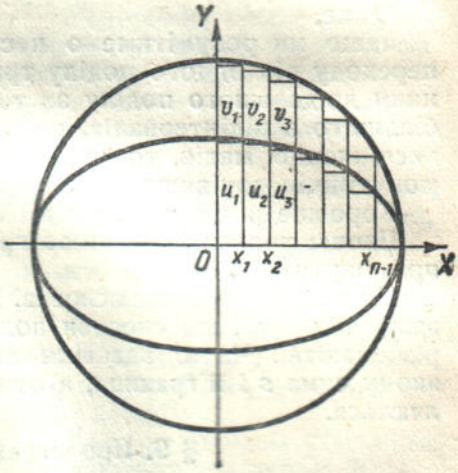

Рис. 22.

При цьому, очевидно, число точок поділу нескінченно зростатиме, але для всякого поділу інтервал (g, h) буде найбільшим, і, отже, величина λ, рівна його довжині, не буде нескінченно маліти. Через це нашу теорему можна формулювати так:

Площа криволінійної трапеції дорівнює границі суми площ елементарних прямокутників, якщо припустити, що число точок поділу нескінченно зростає так, що довжина найбільшого проміжка між ними нескінченно маліє.

Але в такому випадку площі елементарних прямокутників теж нескінченно малітимуть, а тому ми можемо нашу теорему коротше формулювати і так:

Площа трапеції дорівнює границі суми площ нескінченно маліючих елементарних прямокутників у нескінченно зростаючому числі.

Розглянемо приклад на застосування цієї теореми.

§ 10. Площа еліпса.

Обчислимо площу еліпса (рис. 22), даного рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Водночас з ним розглядаємо круг, побудований на великій осі як на діаметрі. Рівняння цього круга, якщо через z позначимо його ординату, буде

$$x^2+z^2=a^2. \qquad (2)$$

З (1) і (2) випливає, що

$$\frac{y}{z}=\frac{b}{a}, \qquad (3)$$

тобто ордината еліпса відноситься до відповідної ординати круга як мала вісь до великої.

Поділяємо точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ велику піввісь еліпса на підінтервали і будуємо внутрішні елементарні прямокутники як для еліпса, так і для круга. Нехай

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}$$

— площі елементарних прямокутників, що належать еліпсові, і s — їх сума. Через σ позначимо суму площ елементарних прямокутників, що належать кругові, і нехай

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$$

— їх площі.

Площі двох прямокутників з рівними основами відносяться як їх висоти, а тому

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{b}{a}, \quad \frac{u_2}{v_2}=\frac{b}{a}, \quad \frac{u_3}{v_3}=\frac{b}{a}, \ldots,$$

звідки

$$u_1=\frac{b}{a}v_1, \quad u_2=\frac{b}{a}v_2, \quad \ldots, \quad u_{n-1}=\frac{b}{a}v_{n-1}.$$

Додаючи ці рівності, дістанемо:

$$s = \frac{b}{a}\sigma.$$

Переходячи до границі, маємо:

$$\lim s = \frac{b}{a}\lim\sigma.$$

Отже, якщо E — площа еліпса, то

$$\frac{1}{4}E = \frac{b}{a}\,\frac{\pi a^2}{4},$$

звідси робимо висновок, що $E = \pi ab$.

При $a = b$ одержимо формулу площі круга.

§ 11. Зауваження про користування книгою.

Книга надрукована двома шрифтами, звичайним і жирним. Надруковане жирним шрифтом у своїй сукупності становить своєрідний конспект до книги. Читачеві рекомендується, вивчивши кожний параграф, звертати особливу увагу на те, що надруковано в ньому жирним шрифтом. Вивчивши весь розділ, обов'язково перечитати все, надруковане в ньому жирним шрифтом.

Через те що при викладі ми намагались по можливості нічого не лишити нез'ясованим, самий виклад подекуди вийшов трохи довгий. Тому кожний розділ має висновок, у якому вміщено те, що міцно й твердо має бути засвоєне і затримане в пам'яті. Не можна переходити до дальшого розділу, не опанувавши цілком змісту висновку до попереднього розділу.

Прикладом того, наскільки висновок навіть до довгого розділу може бути короткий, є саме висновок до даного розділу.

§ 12. Висновок.

Площа трапеції дорівнює границі сум площ її елементарних прямокутників.

ІНТЕГРАЛ ЯК ГРАНИЦЯ СУМИ.

Ми довели, що площа кривої трапеції дорівнює границі суми площ нескінченно маліючих елементарних прямокутників. Якщо ми цей геометричний факт переведемо на аналітичну мову, то природно прийдемо до основного поняття інтегрального числення, до поняття інтеграла як границі суми.

§ 13. Аналітичний вираз суми площ елементарних прямокутників.

Нехай, як і раніше, $aABb$ — трапеція, обмежена зверху кривою $y=f(x)$ (рис. 23).

Поділивши основу трапеції на підінтервали точками x_k і дібравши в одержаних підінтервалах точки ξ_k, будуємо елементарні прямокутники, висотами яких є ординати точок ξ_k.

Перший елементарний прямокутник має основою відрізок, довжина якого дорівнює x_1-a; висота ж його дорівнює значенню функції $f(x)$ при $x=\xi_0$, а тому площа його дорівнює

$$f(\xi_0)(x_1-a).$$

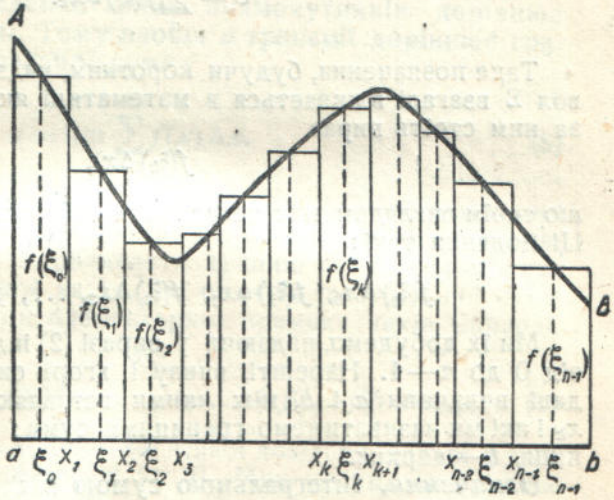

Рис. 23.

Основа другого елементарного трикутника дорівнює x_2-x_1, висота ж його дорівнює $f(\xi_1)$, а тому площа його дорівнює

$$f(\xi_1)(x_2-x_1)$$

і т. д. Взагалі очевидно, що висота якогонебудь прямокутника, основою якого є інтервал (x_k, x_{k+1}), дорівнює $f(\xi_k)$, а тому площа його дорівнює

$$f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k).$$

Останній прямокутник має основою інтервал (x_{n-1}, b); його площа дорівнює

$$f(\xi_{n-1})(b - x_{n-1}).$$

Тому, якщо S — сума площ усіх елементарних прямокутників, то

$$S = f(\xi_0)(x_1 - a) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + f(\xi_2)(x_3 - x_2) + \ldots$$
$$\ldots + f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) + \ldots + f(\xi_{n-1})(b - x_{n-1}). \qquad (1)$$

Цю суму назвемо *інтегральною сумою*. Трохи коротше її можна представити в такій формі:

$$S = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Але звичайно ми позначатимемо її так:

$$S = \sum_a^b f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k),$$

або так

$$S = \sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Таке позначення, будучи коротким, надзвичайно зручне. Символ Σ взагалі вживається в математиці як символ суми. Слідом за ним стоїть вираз

$$f(\xi_k)\Delta x_k, \qquad (2)$$

що своїм виглядом має нагадувати доданки розглядуваної суми. Ці доданки такі:

$$f(\xi_0)\Delta x_0,\ f(\xi_1)\Delta x_1,\ f(\xi_2)\Delta x_2,\ \ldots,\ f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Ми їх добудемо, надаючи у виразі (2) індексові k всіх значень від 0 до $n-1$. Нарешті, внизу і вгорі символа суми стоять ті дані величини a і b, між якими вставляються проміжні числа x_k і які ми називатимемо границями суми; з них a — нижня границя, b — верхня.

Означення. **Інтегральною сумою від функції $f(x)$, взятої від нижньої границі a до верхньої границі b, називається сума**

$$S = \sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k, \qquad (3)$$

складена так: даний інтервал (a, b) поділяється на підінтервали довільно дібраними точками поділу, потім довжина кожного підінтервалу Δx_k помножується на значення $f(\xi_k)$ даної функції в якійнебудь теж довільно взятій точці ξ_k цього підінтервалу і береться сума всіх одержаних таким способом добутків.

Це означення може бути прикладене не тільки до неперервних функцій, але також і до перервних.

Загальний тип доданків інтегральної суми, як ми бачили, такий:

$$f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

тобто кожний доданок дорівнює добуткові якогось значення функції на якийсь приріст аргумента. Отже, щоб дістати якийнебудь доданок, треба у виразі

$$f(x)\,\Delta x$$

надати x і Δx якихось певних значень. Тому ми можемо сказати, що сума S є сума доданків типу $f(x)\,\Delta x$, і, отже, можемо замінити рівність (3) такою:

$$S=\sum_a^b f(x)\,\Delta x, \tag{4}$$

що треба читати так: *S є сума доданків типу $f(x)\,\Delta x$.*

Через те, що S є сума площ усіх елементарних прямокутників, то, отже:

Сума площ усіх елементарних прямокутників дорівнює якійсь інтегральній сумі. Тому площа u трапеції дорівнює границі відповідної інтегральної суми:

$$u=\lim\sum_a^b f(x)\,\Delta x. \tag{5}$$

Ми бачимо, що геометрична задача про обчислення площ перетворюється в таку аналітичну: ми повинні знайти методи, які давали б можливість обчисляти границі інтегральних сум. Але звернемо тепер увагу на те, що поняття інтегральної суми ширше, ніж поняття суми елементарних прямокутників. Справді, інтегральна сума

$$S=f(\xi_0)(x_1-a)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_{n-1})(b-x_{n-1}) \tag{6}$$

може бути побудована з допомогою всякої довільно взятої функції $f(x)$, неперервної в інтервалі (a, b). Між іншим, ця функція може бути функцією, яка приймає як додатні, так і від'ємні значення. Але коли ми говоримо про суму елементарних прямокутників трапеції, обмеженої зверху кривою $y=f(x)$, то ми тим самим припускаємо, що функція $f(x)$ може приймати тільки додатні значення. Отже, твердження, що інтегральна сума дорівнює сумі площ елементарних прямокутників, справедливе тільки тоді, коли функція $f(x)$ додатна. Тому постає питання, яке ж значення інтегральної суми і її границі в тому випадку, коли функція може приймати не тільки додатні, але й від'ємні значення? Ми повинні розглянути також і той випадок, коли a не менше b, як ми до цього часу припускали, а більше.

§ 14. Геометричне значення інтегральної суми і її границі.

Нехай $f(x)$ — довільно взята неперервна функція, яка може приймати в інтервалі (a, b) як додатні, так і від'ємні значення, і нехай, як і раніше,

$$S = f(\xi_0)\,\Delta x_0 + f(\xi_1)\,\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\,\Delta x_{n-1}, \qquad (1)$$

або коротше

$$S = \sum_a^b f(x)\,\Delta x. \qquad (2)$$

Припускаючи спочатку, що $a < b$, будуємо криву і відповідні елементарні прямокутники (рис. 24). Одні з них лежатимуть вище осі X, інші нижче.

Доданки суми

$$S = \sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

можна поділити на два класи: на додатні і від'ємні.

Нехай

$$f(\xi_h)\,\Delta x_h$$

— один з додатних доданків. Через те що $a < b$, то Δx_h додатне; отже, і перший множник $f(\xi_h)$ теж додатний, а тому величина доданку, очевидно, дорівнює площі елементарного прямокутника, який весь розміщений вище осі X.

Отже, *сума всіх додатних доданків дорівнює сумі площ усіх тих елементарних прямокутників, які розміщені вище осі X.*

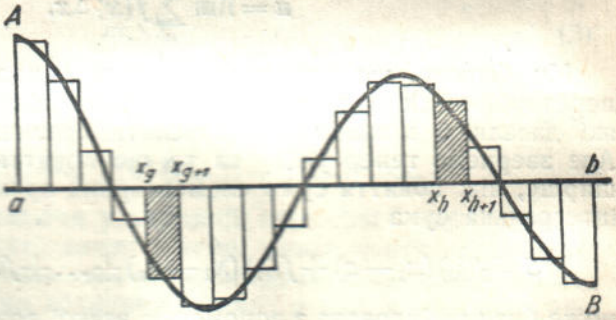

Рис. 24.

Розглянемо тепер якийнебудь від'ємний доданок

$$f(\xi_g)\,\Delta x_g,$$

у якого, отже, множник $f(\xi_g)$ від'ємний.

Прямокутник, основою якого є відрізок (x_g, x_{g+1}), розміщений нижче осі X, і висота його як геометрична величина дорівнює $-f(\xi_g)$, а тому площа його дорівнює

$$-f(\xi_g)\,\Delta x_g.$$

Отже, абсолютна величина всякого від'ємного доданку суми S дорівнює площі елементарного прямокутника, розміщеного нижче осі X. Очевидно, що *сума всіх від'ємних доданків теж від'ємна і дорівнює абсолютною величиною сумі площ елементарних прямокутників, розміщених нижче осі X.*

Тепер зрозуміло, що коли ми через S_1 позначимо суму площ усіх тих елементарних прямокутників, які лежать вище осі X, а через S_2 — суму тих, що лежать нижче осі X, то

$$S = S_1 - S_2,$$

а тому, якщо припустимо, що число проміжних точок нескінченно зростає, так що λ — найбільший проміжок між ними — нескінченно маліє, то

$$\lim S = \lim S_1 - \lim S_2.$$

Але S_1 є сума площ елементарних прямокутників, що лежать вище осі X; тому її границя дорівнює сумі всіх тих площ, які обмежені знизу віссю X, а зверху — тими частинами даної кривої, які лежать вище осі X.

Також зрозуміло, що границя суми S_2 дорівнює сумі площ, обмежених віссю X і тими частинами кривої, які лежать нижче осі X.

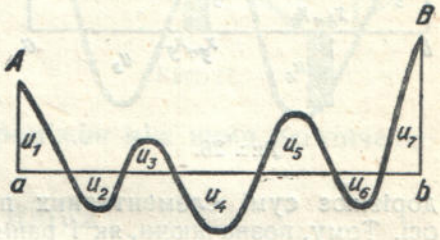

Рис. 25.

Тому, якщо через u_1, u_3, u_5, ... позначимо ті площі, обмежені кривою, які лежать вище осі X, а через u_2, u_4, u_6, ... — ті, що лежать нижче (рис. 25), то

$$\lim S_1 = u_1 + u_3 + u_5 + \ldots; \quad \lim S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \ldots,$$

а тому

$$\lim S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \ldots$$

Цю рівність легко виразити в словесній формі, якщо ввести умову, що напрошується сама собою: *будемо вважати від'ємними ті площі, що лежать нижче осі X.* Ординати тих частин кривої, які обмежують ці площі, від'ємні, тому, отже, ми вважаємо площі додатними або від'ємними залежно від того, додатні чи від'ємні ординати точок цих площ.

Ще наочніше цю умову можна формулювати так: уявимо рухому точку, що рухається по кривій зліва направо, захоплюючи з собою свою ординату. Ми вважатимемо додатними ті площі, що їх пробігають додатні ординати, і від'ємними ті, що їх пробігають від'ємні ординати.

Прийнявши цю умову, ми можемо зробити такий висновок: границя суми S дорівнює алгебричній сумі тих площ, що пробігаються ординатою кривої.

Таким чином, ми не тільки довели, що сума S має границю, але й знайшли, чому ця границя дорівнює. Проте, цього ми досягли, припускаючи, що $a < b$. Нехай же тепер $a > b$ (рис. 26).

В даному випадку всі різниці Δx_k будуть від'ємні, бо числа

$$a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ b$$

утворюють спадний ряд. Тому якийнебудь доданок суми, наприклад, доданок

$$f(\xi_h)\,\Delta x_h,$$

буде додатним тільки тоді, коли множник $f(\xi_h)$ від'ємний. Отже, відповідний елементарний прямокутник буде розміщений нижче осі X. Якщо ж ми візьмемо якийнебудь від'ємний доданок

$$f(\xi_g)\,\Delta x_g,$$

то відповідний елементарний прямокутник уже лежатиме вище осі X.

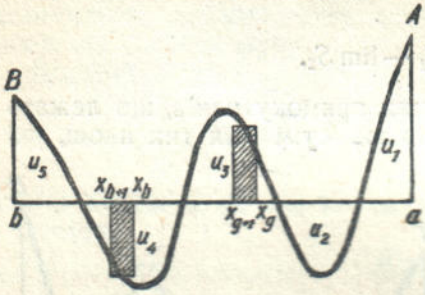

Рис. 26.

Таким чином, у розглядуваному випадку сума додатних доданків дорівнює сумі елементарних прямокутників, що лежать нижче осі X; абсолютна ж величина суми від'ємних доданків дорівнює сумі елементарних прямокутників, розміщених вище осі. Тому, позначаючи, як і раніше, через S_1 і S_2 суми площ елементарних прямокутників, відповідно розміщених вище і нижче осі X, ми в розглядуваному випадку маємо:

$$S = -S_1 + S_2,$$
$$\lim S = -\lim S_1 + \lim S_2,$$

і, отже,

$$\lim S = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + \ldots$$

Ми бачимо, що з площ, обмежених частинами даної кривої, тепер вигідно умовитись вважати від'ємними ті, що лежать вище осі X, а додатними — ті, що лежать нижче осі X, тобто вигідно ввести умови, очевидно, протилежні раніше прийнятим. Але зауважимо, що тепер початок кривої A лежить правіше кінця її B. Тому при русі точки по кривій від її початку до кінця ордината її рухається не зліва направо, як це було раніше, а справа наліво.

Раніше ми умовились вважати площі додатними або від'ємними залежно від того, чи описуються вони додатними чи від'ємними ординатами, але при цьому припускалося, що сама ордината рухається зліва направо, тобто в додатному напрямі осі X.

Тепер ми до цієї умови додамо нову: ми будемо вважати, що коли ордината рухається справа наліво, то тоді площа, яку описує додатна ордината, від'ємна, а площа, яку описує від'ємна ордината, додатна. При такій умові і в тому разі, коли $a > b$,

ми можемо сказати, що **границя суми S дорівнює алгебричній сумі площ, що їх описує ордината кривої.**

Висновок той самий: відміна тільки в тому, що коли $a < b$, то ордината рухається в додатному напрямі осі X, а коли $a > b$, то рух ординати відбувається в бік від'ємного напряму осі X. Взагалі ж усі умови відносно знака площ зрозумілі з рисунка 27, де стрілка вказує напрям руху ординати.

В словесній формі ці умови можна формулювати так:

Площу вважають додатною, якщо її пробігає додатна ордината, яка рухається в додатному напрямі, при умові змінювати знак площі, якщо змінюються або знак ординати або напрям її руху.

Надалі алгебричну суму площ, що їх пробігає ордината, ми будемо просто називати площею, яку описує дана ордината.

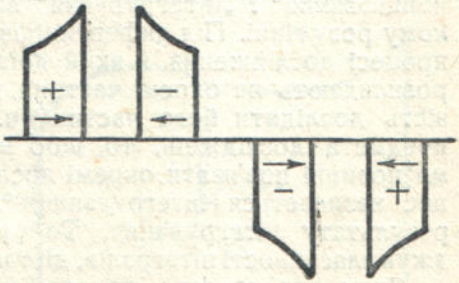

Рис. 27.

При цих умовах дійсна така основна

Теорема. **Якщо число проміжних точок x_k нескінченно зростає так, що найбільший проміжок між ними нескінченно маліє, то інтегральна сума**

$$S = \sum_{a}^{b} f(x)\,\Delta x$$

прямує до єдиної цілком означеної границі, яка дорівнює площі, що її пробігає в напрямі від a до b ордината кривої, рівняння якої $y = f(x)$.

Отже, ця теорема дає нам два факти: перший — сума S має границю, другий — ця границя не залежить ні від добору точок x_k, ні від добору точок ξ_k, аби найближчий проміжок у границі дорівнював нулеві.

Границя інтегральної суми завжди обчисляється в припущенні, що найбільший проміжок між точками поділу нескінченно маліє. Тому,

коли говорять про границю інтегральної суми, то звичайно говорять просто про її границю, не вказуючи того, що при переході до границі найбільший проміжок між точками поділу повинен прямувати до нуля.

Не вказується тому, що це завжди само собою розуміється.

§ 15. Інтеграл як границя суми.

Означення. **Границя інтегральної суми**

$$S = \sum_{a}^{b} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

називається інтегралом від функції $f(x)$; границі ж інтегральної суми, тобто a і b, називаються границями інтеграла: a — нижньою, b — верхньою. Інтервал (a, b) називається інтервалом інтеграції.

Отже якщо

$$A = \lim \sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

то A є інтеграл від функції $f(x)$.

Відносно терміна „інтеграл" зауважимо, що терміни „диференціювання" і „інтегрування" вживають у науці в дуже широкому розумінні. Під диференціюванням розуміють той момент у процесі дослідження, в який досліджуваний предмет або явище розкладають на окремі частини, щоб тим самим дістати можливість дослідити його частинами. Після того як окремі частини предмета досліджені, то, щоб мати поняття про весь предмет, ми повинні пов'язати окремі дослідження в одне ціле. Цей процес називається інтегруванням*. Звідси термін „інтеграл" для результату інтегрування. Той відділ математики, який досліджує властивості інтегралів, дістав назву інтегрального числення.

Якщо встановлено поняття про інтеграл, то постає питання про його позначення.

Тепер для означеного інтеграла прийнято символ, що добре нагадує походження цього поняття. Нехай, як і раніше,

$$A = \lim \sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k, \tag{1}$$

або коротше

$$A = \lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x. \tag{2}$$

Через те що байдуже, на які підінтервали поділяти основний інтервал, то припустимо, що поділ провадиться на рівні підінтервали. Тоді в (2) під символом Δx можна розуміти загальну довжину цих підінтервалів.

Пригадавши, що диференціал незалежного змінного дорівнює приростові його, ми можемо уявити рівність (2) в такому вигляді:

$$A = \lim \sum_a^b f(x)\,dx.$$

Введемо тепер останнє спрощення: в правій частині цієї рівності ми пропустимо символ „lim" і замість символа Σ будемо писати символ $\int$, що має назву знака інтеграла і є не що інше, як стародавнє здовжене латинське S**. Тоді дістанемо:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx,$$

---

* Від латинського кореня integer (цілий).

** Початкова буква слова summa (сума).

що буквально треба читати так: A дорівнює границі суми, доданки якої типу $f(x)\,dx$.

Інтеграл від функції $f(x)$ між нижньою границею a і верхньою границею b позначається так:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

що читається: інтеграл від функції $f(x)$ від a до b.

Функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією.

Таким чином, ми маємо таку основну рівність, яка по суті є не що інше, як позначення інтеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x.$$

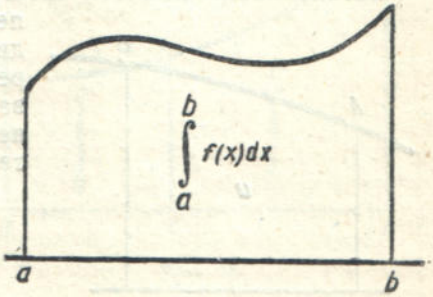

Рис. 28.

Пригадавши, що границя інтегральної суми дорівнює площі, яку пробігає ордината кривої, ми бачимо (рис. 28):

Геометрично інтеграл дорівнює площі, що її пробігає ордината кривої, яка зображає підінтегральну функцію, при зміні аргумента функції від нижньої границі інтеграла до верхньої.

Отже, границю всякої інтегральної суми ми назвали інтегралом. Але, як ми бачили раніше, інтегралом від даної функції називається також і всяка її первісна. Отже, термін „інтеграл" вживають у двох зовсім різних розуміннях. Тому

треба чітко відрізняти інтеграл як границю суми від інтеграла як первісної.

В цьому розділі поняття інтеграла вживатиметься виключно в першому розумінні.

§ 16. Інтеграл з рівними границями.

До цього часу ми припускали, що границі інтеграла a і b не рівні між собою. Але нерідко доводиться розглядати інтеграли з рівними границями. Очевидно, що для таких інтегралів попереднє означення не придатне хоча б тому, що коли a дорівнює b, то між ними не можна вставити проміжних чисел. Треба ввести нове означення, яке в той же час було б тісно пов'язане з попереднім. Цього ми досягнемо, якщо скористуємося геометричною інтерпретацією інтеграла, згідно з якою інтеграл

$$u = \int_a^b f(x)\,dx,$$

поки a не дорівнює b, геометрично представляється площею трапеції $aABb$ (рис. 29). Ця площа, якщо b наближатиметься до a, і, нарешті, зіллється з a, перетвориться в нуль, а тому:

якщо границі інтеграла рівні, то інтеграл за означенням приймається рівним нулеві.

Отже, яке б не було c, завжди

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0.$$

Встановивши поняття інтеграла, ми, природно, повинні тепер поставити питання про методи його обчислення. Але щоб перейти до цього, як побачимо, дуже важкого питання, спочатку розглянемо деякі основні властивості інтеграла.

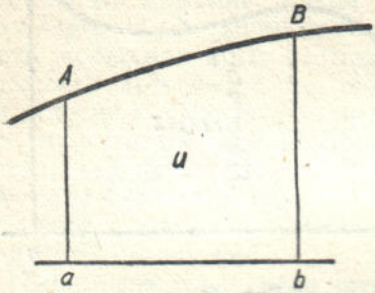

Рис. 29.

§ 17. Три теореми.

Спираючись на означення інтеграла і його геометричне значення, ми легко доведемо три такі прості теореми.

Теорема про винесення сталого множника. **Сталий множник можна виносити спід знака інтеграла. Отже,**

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (1)$$

де A — стале.

Ті суми, границями яких є інтеграли

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ і } \int_a^b Af(x)\,dx,$$

позначимо відповідно через s і σ. Отже,

$$s = f(\xi_0)\,\Delta x_0 + f(\xi_1)\,\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\,\Delta x_{n-1}.$$

Замінюючи ж $f(x)$ через $Af(x)$, матимемо

$$\sigma = Af(\xi_0)\Delta x_0 + Af(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + Af(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Зрозуміло, що

$$\sigma = As,$$

тобто, що

$$\sum_a^b Af(\xi_k)\,\Delta x_k = A\sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Переходячи до границі, дістанемо

$$\lim \sum_a^b Af(\xi_k)\,\Delta x_k = A \lim \sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

тобто

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx,$$

і теорема доведена.

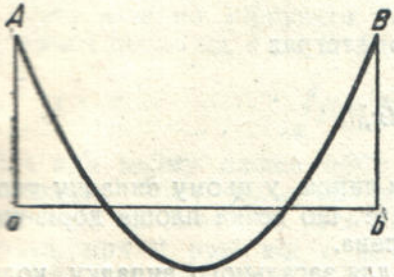

Рис. 30.

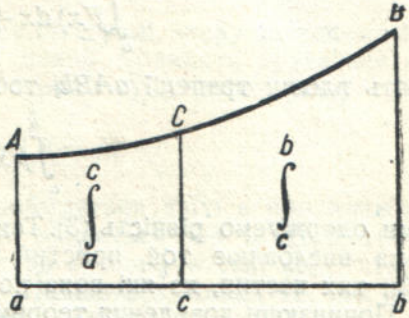

Рис. 31.

Теорема про переставляння границі. **Якщо переставити між собою границі інтеграла, то інтеграл змінить знак:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Інтеграл

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

геометрично дорівнює площі, яку пробігає ордината, що рухається в напрямі від a до b (рис. 30). Інтеграл

$$B = \int_b^a f(x)\,dx$$

дорівнює тій же площі, але ця площа пробігається в зворотному напрямі. Отже, $B = -A$, і теорема доведена.

Теорема про поділ інтервалу інтеграції. **Завжди**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad (3)$$

лише б не було c, але при умові, що функція неперервна в кожному інтервалі інтеграції.

Ця теорема очевидна для того випадку, коли $a < b$ і функція $f(x)$ приймає в інтервалі (a, b) тільки додатні значення, і, отже, крива $y = f(x)$ лежить вище осі X (рис. 31). Щодо точки c,

то вона лежить між a і b. В цьому випадку інтеграл $\int_a^c f(x)\,dx$ зображується площею трапеції $aACc$, а інтеграл $\int_c^b f(x)\,dx$ — площею трапеції $cCBb$. Сума їх

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

дасть площу трапеції $aABb$, тобто інтеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

і ми одержуємо рівність (3). Таким чином, у цьому випадку теорема висловлює той простий факт, що всяка площа дорівнює сумі тих частин, на які вона поділена.

Починаючи доведення теореми для загального випадку, коли функція $f(x)$ може приймати і від'ємні значення, приймемо для скорочення писання

$$G = \int_a^b f(x)\,dx,\ H = \int_a^c f(x)\,dx,\ K = \int_c^b f(x)\,dx$$

і будемо спочатку вважати, що $a < b$.

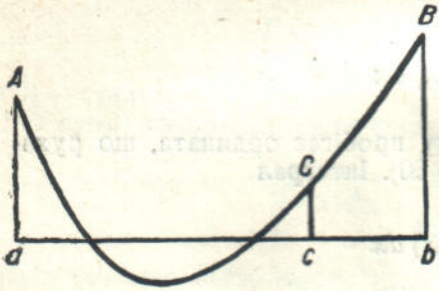

Рис. 32.

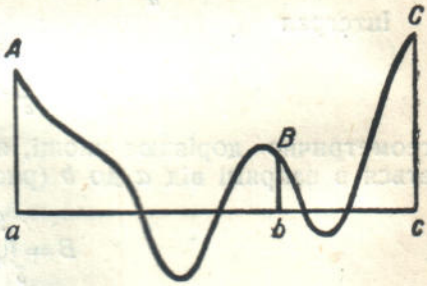

Рис. 33.

Точка c може лежати або всередині, або поза інтервалом (a, b).

Якщо c лежить між a і b, то при русі від a до b ордината описує площу, рівну G (рис. 32). При цьому вона спочатку описує площу $aACc$, рівну H, до якої потім додається площа $cCBb$, рівна K, а тому

$$G = H + K, \tag{4}$$

і ми маємо рівність (3).

Якщо c лежить правіше b, то b лежить між a і c (рис. 33).

За доведеним

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

звідки

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx.$$

Змінюючи границі в останньому інтегралі, знову дістанемо (3).

Або можемо міркувати так: нехай ордината рухається від a до c і потім від c до b. Вона опише суму площ, рівну

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (5)$$

Але при цьому площа $bBCc$ пробігається двічі в протилежних напрямах. Тому, коли ордината рухається від a до c, то те, що вона пробігає при русі від b до c, знищується, ніби стирається, при її русі від c до b. Лишається тільки те, що вона описує при русі від a до b, тобто лишається площа, рівна

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Прирівнюючи цей інтеграл сумі (5), знову дістанемо рівність (3), і теорема доведена для випадку, коли c лежить правіше b. Якщо c лівіше a (рис. 34), то рухаємо ординату від a до c, а потім від c до b. Вона опише суму площ, рівну

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Але при цьому площа $aACc$ пробігається двічі в протилежних напрямах, тому лишається тільки площа $aABb$, і ми знову одержуємо рівність (3).

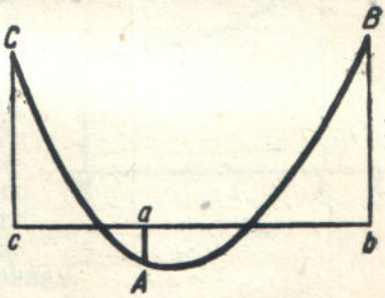

Рис. 34.

Тепер теорема остаточно доведена для випадку $a < b$. Але коли $a > b$, то $b < a$ і за доведеним

$$\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx.$$

Переставляння границь дає

$$-\int_a^b f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx,$$

тобто знову маємо рівність (3), і теорема остаточно доведена.

§ 18. Висновок.

1. Означення. Інтегральною сумою від неперервної функції $f(x)$, взятої між нижньою і верхньою границями a і b, називається сума всіх доданків, які одержують від множення довжини кожного підінтервалу на значення функції в якійнебудь його точці.

Границя інтегральної суми в припущенні, що всі підінтервали нескінченно маліють, називається інтегралом:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x.$$

Інтеграл з рівними границями приймається рівним нулеві.

2. Геометрично інтеграл дорівнює площі, що пробігається ординатою кривої при зміні абсциси від нижньої границі інтеграла до верхньої.

3. Теореми:

$$1)\ \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

$$2)\ \int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$3)\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

МЕТОД БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА. ІНТЕГРАЛ ЯК ФУНКЦІЯ СВОЇХ ГРАНИЦЬ.

Встановивши поняття інтеграла як границі суми, ми перейдемо тепер до питання про фактичне обчислення його.

§ 19. Геометричне обчислення інтеграла.

Оскільки інтеграл

$$u=\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

геометрично зображається площею трапеції $aABb$, обмеженої зверху кривою $y=f(x)$ (рис. 35), то, з одного боку, щоб знати числове значення цієї площі, ми повинні обчислити інтеграл (1). Але, з другого боку, якщо ми якимнебудь іншим шляхом зуміємо знайти числовий вираз площі трапеції, то тим самим ми знатимемо і значення інтеграла (1).

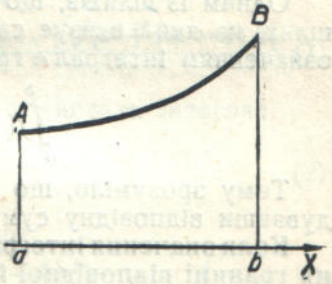

Рис. 35.

Якщо інтеграл обчисляється так, що з якихнебудь міркувань знаходиться числовий вираз площі відповідної йому трапеції, то таке його обчислення назвемо обчисленням його з геометричних міркувань, або, коротше, геометричним його обчисленням.

Нехай, наприклад, треба обчислити інтеграл

$$u=\int_{-1}^{+1}(2-\sqrt{1-x^2})\,dx. \tag{2}$$

Будуємо криву, яка зображає підінтегральну функцію, тобто криву

$$y=2-\sqrt{1-x^2}. \tag{3}$$

З цієї рівності випливає рівняння

$$x^2+(y-2)^2=1. \tag{4}$$

Це — рівняння кола, радіус якого дорівнює одиниці і центр якого лежить у точці K на осі Y, при чому $OK=2$ (рис. 36).

Але крива (3) не є все це коло, а тільки нижня його половина ACB. Отже, інтеграл (2) дорівнює площі трапеції $aACBb$, де $a=-1$, $b=+1$, а оскільки ця площа дорівнює $4-\frac{\pi}{2}$, то

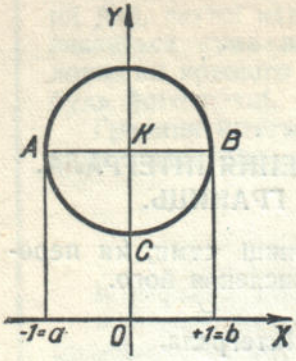

Рис. 36.

$$\int_{-1}^{+1}(2-\sqrt{1-x^2})\,dx=4-\frac{\pi}{2},$$

і інтеграл обчислений.

Яким простим не є цей спосіб обчислення, він застосовується, проте, очевидно, виключно в рідких випадках, а саме, в тих, коли трапеція може бути складена з частин, площі яких уже відомі. Тому треба шукати інших шляхів для обчислення інтеграла, тим більше, що поняття інтеграла ми ввели не для того, щоб знаходити його значення через площу відповідної трапеції, а для того, щоб через нього дістати можливість обчисляти площі.

§ 20. Метод безпосереднього обчислення інтеграла.

Одним із шляхів, що ведуть до обчислення інтеграла, є той шлях, на який вказує саме означення поняття інтеграла. За цим означенням інтеграл є границя суми, названої нами інтегральною:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim\sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Тому зрозуміло, що інтеграл буде обчислений, якщо, побудувавши відповідну суму, ми зуміємо обчислити її границю.

Коли значення інтеграла визначається з допомогою обчислення границі відповідної йому інтегральної суми, то говорять, що інтеграл обчисляється методом безпосереднього інтегрування.

При цьому намагаються скористатись тим, що при побудові інтегральної суми

$$S=f(\xi_0)\,\Delta x_0+f(\xi_1)\,\Delta x_1+\ldots+f(\xi_{n-1})\,\Delta x_{n-1}$$

можна довільно добирати як точки x_k, так і точки ξ_k. Цією довільністю іноді вдається скористатись так, що сама сума S і її границя легко обчисляються.

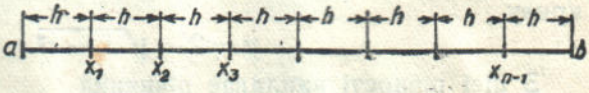

Рис. 37.

В окремому випадку поділ інтервалу точками x_k і добір точок ξ_k ми можемо провести так: поділяємо інтервал (a, b) на n рівних частин (рис. 37). Якщо спільну величину цих частин позначимо через h, то очевидно, що

$$x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)h,\ b = a + nh,$$

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Щодо точок ξ_k, то за кожну з них приймемо лівий кінець відповідного підінтервалу, тобто приймемо $\xi_k = x_k$. Тоді будемо мати:

$$\xi_0 = a,\ \xi_1 = a + h,\ \xi_2 = a + 2h, \ldots, \xi_{n-1} = a + (n-1)h,$$

і оскільки зрозуміло, що всі Δx_k дорівнюють h:

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_{n-1} = h = \frac{b-a}{n},$$

то при такому доборі точок x_k і ξ_k сума S прийме вигляд:

$$S = h\{f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f[a + (n-1)h]\} =$$

$$= (b-a)\frac{f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f[a + (n-1)h]}{n}.$$

Перехід до границі полягатиме в тому, що n прямуватиме до ∞. Отже,

інтегральну суму S, границею якої є даний інтеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim S,$$

завжди можна представити в такій формі:

$$S = (b-a)\frac{f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f[a + (n-1)h]}{n}. \quad (1)$$

Розглянемо приклад. Нехай потрібно обчислити інтеграл

$$G = \int_0^l x^2\,dx. \quad (2)$$

Вважаючи, що в (1) $a = 0$, $b = l$, маємо:

$$S = l\,\frac{f(0) + f(h) + f(2h) + \ldots + f[(n-1)h]}{n}, \quad h = \frac{l}{n}.$$

І через те що тепер $f(x) = x^2$, то

$$f(0) = 0,\ f(h) = h^2,\ f(2h) = 2^2h^2,\ f(3h) = 3^2h^2, \ldots,$$

а тому

$$S = \frac{lh^2}{n}\{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (n-1)^2\}, \quad h = \frac{l}{n}. \quad (3)$$

Оскільки *

$$\{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} =$$

$$= \frac{n}{6}(2n^2 - 3n + 1), \quad (4)$$

* Див. „Вступ до аналізу", § 109, формула (8).

то

$$S=\frac{l^3}{6}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

Зрозуміло, що коли $n\to\infty$, то

$$\lim S=\frac{l^3}{3},$$

а тому

$$\int_0^l x^2\,dx=\frac{l^3}{3}. \tag{5}$$

Прикладаючи теорему про поділ інтервалу інтеграції, маємо:

$$\int_a^b x^2\,dx=\int_a^0 x^2\,dx+\int_0^b x^2\,dx=\int_0^b x^2\,dx-\int_0^a x^2\,dx,$$

а тому згідно з (5)

$$\int_a^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}. \tag{6}$$

Розглянемо ще приклад. Обчислимо інтеграл

$$G=\int_a^b e^{mx}\,dx, \tag{7}$$

де m — стале число. Вважаючи, що в (1)

$$f(x)=e^{mx},$$

маємо

$$S=(b-a)\cdot\frac{e^{ma}+e^{m(a+h)}+e^{m(a+2h)}+\ldots+e^{m[a+(n-1)h]}}{n}.$$

Прикладаючи до чисельника формулу суми геометричної прогресії, знайдемо

$$S=\frac{b-a}{n}\cdot\frac{e^{m(a+nh)}-e^{ma}}{e^{mh}-1}=\frac{h}{e^{mh}-1}(e^{mb}-e^{ma}).$$

Переходимо до границі, припускаючи, що $h\to 0$. Правило Лопіталя дає

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^{mh}-1}=\frac{1}{m},$$

а тому

$$\lim S=\frac{1}{m}(e^{mb}-e^{ma}),$$

і, отже,

$$\int_a^b e^{mx}dx=\frac{1}{m}e^{mb}-\frac{1}{m}e^{ma}. \tag{8}$$

Розглянуті два приклади, особливо перший, яскраво показують, що метод безпосереднього інтегрування взагалі пов'язаний з досить довгими обчисленнями. Крім того, відзначимо, що фактично цей метод з успіхом може бути застосований у дуже небагатьох випадках. Тому питання про фактичне обчислення означених інтегралів покищо лишається відкритим.

§ 21. Про роль задач в інтегральному численні.

Задачі в інтегральному численні відограють значно більшу роль, ніж у диференціальному. Побачимо, що деякі відділи інтегрального числення для справжнього їх засвоєння вимагають, щоб було розв'язано більше або менше число відповідних задач.

У цьому курсі там, де є потреба, будуть відзначені номери відповідних задач із задачника, складеного авторами цієї книги*. Звичайно, яке саме число із зазначених задач обов'язково повинно бути розв'язане, відносно цього можна дати тільки найзагальнішу вказівку: стільки, скільки їх потрібно, щоб читач відчув, що він цілком оволодів відповідним методом. Але коли відносно яких-небудь задач буде сказано, що їх рекомендується розв'язати, то, звичайно, вони повинні бути розв'язані. Зауважимо, що в задачнику ті задачі, які мають особливий теоретичний або практичний інтерес, надруковані жирним шрифтом або відзначені зіркою**.

§ 22. Змінне інтеграції.

Перед тим, як піти далі, ми повинні спинитись на деяких моментах поняття інтеграла.

Аргумент усякої функції обов'язково має бути позначений якимсь символом, яким звичайно є буква.

Символ, яким позначений аргумент підінтегральної функції, називається змінним інтеграції.

Отже, якщо

$$u = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

то x — змінне інтеграції.

Звернемо тепер особливу увагу на те, що інтеграл ні в якому разі не є функція змінного інтеграції x, хоч x і фігурує явно в правій частині (1). Але роль його своєрідна. Справді, пригадавши, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim S,$$

---

* Повний його заголовок: І. Жегалкін і М. Слудська, „Систематический сборник задач по интегральному исчислению", Учпедгиз, 1934 р.

** До методу безпосереднього інтегрування відносяться задачі № 401 і 402. Цей метод рекомендується розв'язати задачу № 401. До методу геометричного обчислення відносяться задачі № 403 — 406.

де

$$S=f(\xi_0)(x_1-a)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+f(\xi_2)(x_3-x_2)+\ldots+f(\xi_{n-1})(b-x_{n-1}),$$

ми добре бачимо, що у вираз суми S аргумент x якраз не входить; S залежить не від x, а тільки від проміжних чисел x_k і ξ_k. Отже, і границя суми S не може бути функцією x. Ми ж знаємо, крім того, що ця границя не залежить і від добору проміжних значень x_k і ξ_k. Таким чином,

інтеграл не є функція змінного інтеграції. У виразі

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

вся роль змінного x полягає тільки в тому, щоб вказати, з допомогою якої функції складений даний інтеграл.

Тому замість x ми цілком могли б написати й іншу букву, наприклад, y або z, і мали б, що

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(y)\,dy=\int_a^b f(z)\,dz.$$

Так, наприклад, ми знайшли, що (стор. 40)

$$\int_a^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3},\quad \int_a^b e^x\,dx=e^b-e^a. \tag{2}$$

Ми бачимо: в правих частинах цих рівностей немає x, а тому й інтеграли не є функції його. Тому ж замість рівностей (1) ми можемо також написати, що

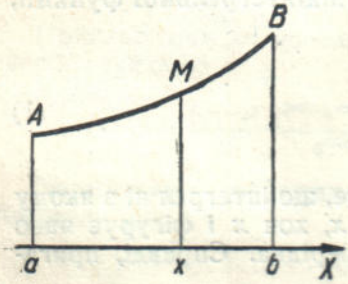

Рис. 38.

$$\int_a^b z^2\,dz=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3},\quad \int_a^b e^z\,dz=e^b-e^a,$$

або

$$\int_a^b t^2\,dt=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3},\quad \int_a^b e^t\,dt=e^b-e^a.$$

Тепер зрозуміло, що

$$\int_a^b x^2\,dx=\int_a^b y^2\,dy=\int_a^b z^2\,dz.$$

Усе це стає цілком очевидним, коли ми згадаємо геометричне значення інтеграла. Якщо

$$u=\int_a^b f(x)\,dx,$$

то u — площа трапеції $aABb$. Зрозуміло, що ця площа цілком залежить від форми кривої, яка обмежує її зверху. Але вона зовсім не залежить від абсциси x довільно взятої точки M на цій кривій. Тому і інтеграл залежить не від x, а від виду функції $f(x)$. Він залежить від f, від характеристики функції, а не від її аргумента.

§ 23. Про границі інтеграла.

Нехай $f(x)$ — функція, неперервна в інтервалі (α, β), і нехай, як і раніше,

$$u = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Запитуємо: які значення ми можемо брати для границь інтеграла a і b? Зрозуміло, що можемо брати будьякі значення в інтервалі неперервності (α, β). Якщо ми змінюватимемо ці значення, то тим самим змінюватиметься і значення інтеграла. Так, наприклад, якщо ми збільшуватимемо b, то для рисунка 39 ордината bB рухатиметься вправо, а тому площа трапеції збільшуватиметься. Вона збільшуватиметься також, коли ми зменшуватимемо нижню границю a.

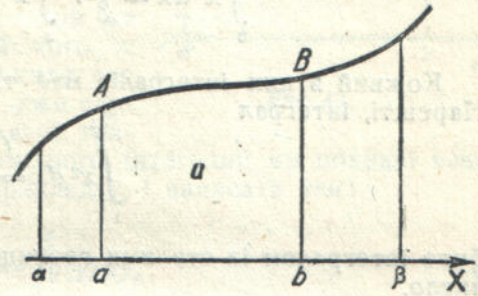

Рис. 39.

Але коли в (1) ми можемо надавати границям a і b різних значень, то на них ми повинні дивитись як на змінні. Отже, **границі інтеграла можуть бути змінними величинами.**

Але коли a і b — змінні, то кожного разу, як ми надамо їм деяких значень, інтеграл u набуде деякого певного значення, а тому u є функція a і b. Отже,

якщо границі інтеграла — змінні величини, то інтеграл, не будучи функцією змінного інтеграції, є функція своїх границь.

Так, наприклад, ми знаємо, що

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Якщо a і b — змінні, то права частина рівності є функція їх, а тому і ліва частина, тобто інтеграл, теж функція a і b, але не функція x.

Звичайно, якщо ми одній із границь, наприклад, нижній, надамо якогонебудь значення і не змінюватимемо його, то інте-

грал стане функцією тільки верхньої границі. Коли ж ми обом границям надамо сталих значень, то інтеграл стане сталою величиною. Взагалі

границі інтеграла можуть бути або обидві змінними, або обидві сталими, або одна з них може бути змінною, друга — сталою.

Так, наприклад, якщо z і t — змінні, то інтеграл

$$\int_z^t x^2\,dx = \frac{t^3}{3} - \frac{z^3}{3}$$

є інтеграл з двома змінними границями.

Вважаючи, що або $z=0$, або $t=0$, знайдемо

$$\int_0^t x^2\,dx = \frac{t^3}{3}, \quad \int_z^0 x^2\,dx = -\frac{z^3}{3}.$$

Кожний з цих інтегралів має тільки одну змінну границю. Нарешті, інтеграл

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}$$

буде інтегралом із сталими границями. Він уже не функція, а число.

На особливу увагу заслуговують інтеграли, у яких нижня границя стала, а верхня змінна. Таким буде, наприклад, інтеграл

$$\int_0^z x^2\,dx = \frac{z^3}{3}.$$

Інтеграл із змінною верхньою границею і сталою нижньою границею, тобто інтеграл типу

$$\int_a^z f(x)\,dx,$$

де a — стале, z — змінне, називається інтегралом як функція верхньої границі.

Звичайно, замість z верхньою границею може бути будьяка змінна величина. Так, наприклад, усі інтеграли

$$\int_a^t f(x)\,dx, \quad \int_1^v f(x)\,dx, \quad \int_2^y f(x)\,dx$$

— інтеграли як функції своїх верхніх границь.

Дуже часто доводиться розглядати інтеграли із сталою нижньою границею, при чому верхньою границею є саме аргумент функції. Так, наприклад (рис. 40), виберемо на кривій $y=f(x)$, хоч і довільно, але раз назавжди, точку A з абсцисою a. Отже, a позначатиме сталу величину. Ординату aA назвемо початком відліку площ, і нехай M — змінна точка на кривій з абсцисою x. Якщо через u позначимо площу трапеції $aAMx$, то зрозуміло, що u є функція x, бо із зміною x змінюється і u, але кожного разу, як x приймає певне значення, u теж приймає певне значення. Зрозуміло, що u представиться інтегралом, нижня границя якого дорівнює a, верхня ж x. Але написати

$$u=\int_a^x f(x)\,dx \qquad (1)$$

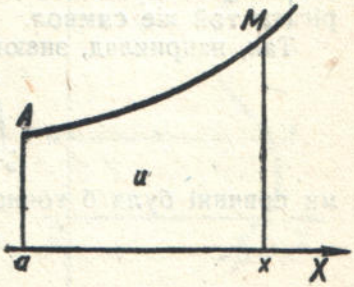

Рис. 40.

у цьому випадку вже не можна, бо, як загальне правило, один і той же символ протягом одного й того ж міркування не повинен служити для різних цілей. Отже, якщо x уже служить для позначення верхньої границі, то для позначення змінного інтеграції ми повинні взяти іншу якунебудь букву, наприклад y, і написати так:

$$u=\int_a^x f(y)\,dy, \qquad (2)$$

або, вдаючись до букви z, так:

$$u=\int_a^x f(z)\,dz \qquad (3)$$

і т. д.

Але введення значного числа різних символів часто створює незручності. Тому стало звичаєм замість правильних позначень (2) і (3) писати:

$$\int_a^x f(x)\,dx,$$

при чому в даному випадку x відограє ніби подвійну роль: роль границі і роль змінного інтеграції. Необхідність розрізняти ці дві його ролі стає особливо яскравою, якщо ми змінному x як границі приписуємо якенебудь числове значення, наприклад $x=3$. Тоді інтеграл (4) приймає значення, яке зображається так:

$$\int_a^3 f(x)\,dx,$$

тобто ми повинні замінити x його значенням не всюди, а тільки у верхній границі. Підставити ж замість x його значення також і в підінтегральний вираз, тобто написати вираз

$$\int_a^3 f(3)\,d3,$$

це означало б написати нісенітницю. Таким чином,

коли символ аргумента функції є верхньою границею інтеграла, то прийнято для позначення змінного інтеграції зберігати той же символ.

Так, наприклад, знаючи, що

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3},$$

ми повинні були б точно написати або так:

$$\int_0^x z^2\,dz = \frac{x^3}{3},$$

або взяти замість z іншу будьяку букву, крім x. Але звичайно пишуть так:

$$\int_0^x x^2\,dx = \frac{x^3}{3}.$$

При цьому подвійна роль x у лівій частині стає зрозумілою, якщо ми приймемо $x = 3$. Тоді дістанемо

$$\int_0^3 x^2\,dx = 9.$$

§ 24. Трапеція з основою на осі Y.

До цього часу ми розглядали трапеції, основи яких збігалися з віссю X. Але зрозуміло, що відрізок всякої прямої може бути основою трапеції. Між іншим, основа трапеції може збігатися з віссю Y (рис. 41).

Припустимо взагалі, що ми маємо якусь криву PQ, для якої x — однозначна функція y (рис. 41):

$$x = \psi(y). \tag{1}$$

Взявши на цій кривій дві точки A і B з ординатами α і β, опустимо з них перпендикуляри $A\alpha$ і $B\beta$ на вісь Y. Одержимо трапецію $\alpha AB\beta$, площу якої позначимо через v. Зрозуміло, що

$$v = \int_\alpha^\beta \psi(y)\,dy, \tag{2}$$

бо вся відміна від попереднього тільки в тому, що тепер y відограє роль x.

На рисунку 41 крива лежить справа від осі Y. Коли ж вона лежить по обидві сторони цієї осі (рис. 42), то інтеграл (2) дорівнюватиме сумі площ, що їх пробігає абсциса точки M при русі її від A до B при умові вважати ті з площ v_1, v_2, $v_3, \ldots$, які лежать справа від осі Y, додатними, а зліва — від'ємними.

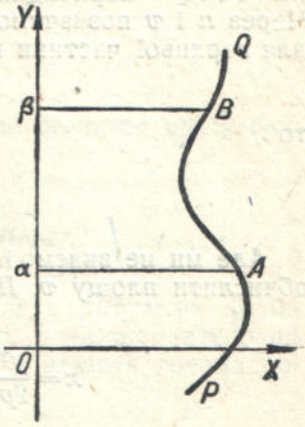

Рис. 41.

Помітивши це, обчислимо з геометричних міркувань інтеграл

$$u = \int_1^x \ln x\, dx. \qquad (3)$$

Будуємо криву (рис. 43)

$$y = \ln x. \qquad (4)$$

Вона перетинає вісь абсцис у точці $x = 1$. Нехай M — точка на ній з координатами x і y. Інтеграл (3) дорівнює площі AMP. Щоб обчислити цю площу, обчислимо спочатку площу v трапеції $OAMQ$. Оскільки з (4)

$$x = e^y,$$

то за формулою (2)

$$v = \int_0^y e^y dy.$$

Ми знаємо (стор. 40), що

$$\int_a^b e^{mx} dx = \frac{1}{m}(e^{mb} - e^{ma}).$$

Тому

$$v = e^y - e^0 = x - 1,$$

і через те, що $u = xy - v = x \ln x - x + 1$, то остаточно

$$\int_1^x \ln x\, dx = x \ln x - x + 1,$$

і інтеграл (3) обчислений.

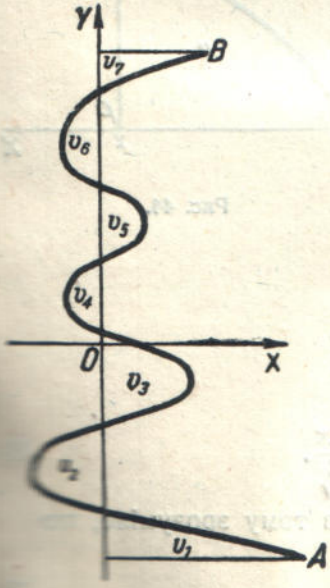

Рис. 42.

Розглянемо ще приклад. Нехай $M(x, y)$ — точка на верхній частині параболи

$$y^2 = 2px, \tag{5}$$

MP і MQ — перпендикуляри з неї на осі координат (рис. 44). Через u і v позначимо площі фігур OMP і OMQ. Через те, що для верхньої частини параболи

$$y = +\sqrt{2px},$$

то

$$u = \int_0^x \sqrt{2px}\, dx.$$

Але ми не знаємо інтеграла в правій частині. Тому спробуємо обчислити площу v. Для неї маємо:

$$x = \frac{y^2}{2p},\ v = \int_0^y \frac{y^2}{2p}\, dy = \frac{1}{2p}\int_0^y y^2\, dy.$$

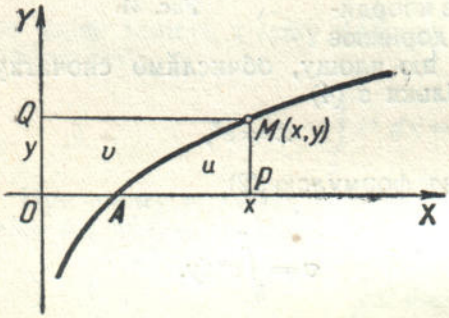

Рис. 43.

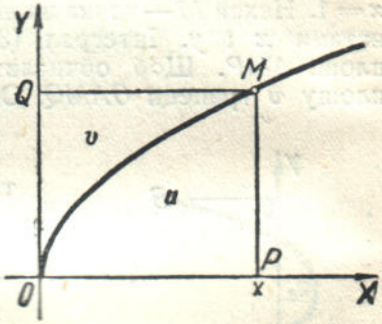

Рис. 44.

Пригадавши, що

$$\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3},$$

робимо висновок:

$$v = \frac{y^3}{6p} = \frac{y \cdot y^2}{6p} = \frac{yx}{3}. \tag{6}$$

Але xy — площа прямокутника $OPMQ$, а тому зрозуміло, що

$$u = \frac{2xy}{3}, \tag{7}$$

і площа u обчислена. З (6) і (7) випливає, що $u = 2v$.

Отже, парабола поділяє прямокутник $OPMQ$ на такі дві частини, з яких одна вдвоє більша другої.

§ 25. Висновок.

1. Інтеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

не є функція змінного інтеграції x, але функція своїх границь a і b. Тому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(t)\,dt.$$

2. Якщо верхньою границею інтеграла є аргумент функції, то прийнято цю границю інтеграла і змінне інтеграції позначати однією і тією ж буквою. Тому замість точних позначень вигляду

$$\int_a^x f(z)\,dz, \quad \int_a^x f(t)\,dt$$

прийнято писати

$$\int_a^x f(x)\,dx.$$

ВИРАЖЕННЯ ІНТЕГРАЛА ЧЕРЕЗ ЗНАЧЕННЯ ПЕРВІСНОЇ.

Для фактичного обчислення інтеграла метод безпосереднього інтегрування, як було зазначено, абсолютно непридатний. Тому хоч задача про квадратуру площі і була поставлена ще в далекій давнині, проте, протягом довгого часу не було зроблено ні одного значного кроку для її розв'язання. Цей крок був зроблений тільки за новітніх часів, коли було введено поняття похідної і коли виявилося, що між інтегралом даної функції і її первісною існує щільний зв'язок. До з'ясування цього зв'язку ми тепер і перейдемо.

§ 26. Символи підставляння.

Щоб потім не переривати порядку викладу, введемо спочатку поняття про символи підставляння.

Щоб показати, що в даному математичному виразі $\Phi(x)$ треба змінне x замінити через c, пишуть

$$\Big/^{x=c} \Phi(x).$$

Символ

$$\Big/^{x=c},$$

що складається з трохи похилої прямої риси, називається символом простого підставляння. Отже, за означенням

$$\Big/^{x=c} \Phi(x) = \Phi(c).$$

Так, наприклад, маємо:

$$\Big/^{x=5} \frac{1+x^2}{2+x} = \frac{1+5^2}{2+5} = \frac{26}{7},$$

$$\Big/^{x=\frac{\pi}{2}} (x+\cos^2 x) = \frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Але дуже часто доводиться у функції $\Phi(x)$ заміняти x спочатку через a, потім через b і після того перший результат віднімати від другого, тобто доводиться складати різницю

$$\Phi(b)-\Phi(a).$$

Для вказівки на цей процес користуються символом

$$\Big|_{x=a}^{x=b},$$

який називається символом подвійного підставляння, і пишуть

$$\Big|_{x=a}^{x=b}\Phi(x)=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Цю рівність можна переписати в такій формі:

$$\Big|_{x=a}^{x=b}\Phi(x)=\Big|^{x=b}\Phi(x)-\Big|^{x=a}\Phi(x).$$

Звідси символічна рівність:

$$\Big|_{x=a}^{x=b}=\Big|^{x=b}-\Big|^{x=a}.$$

Величини a і b називаються *нижньою* і *верхньою* границями підставляння.

Наприклад, маємо

$$\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}x^2\operatorname{tg}x=\frac{\pi^2}{16}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-0^2\operatorname{tg}0=\frac{\pi^2}{16}.$$

Але часто користуються і іншим позначенням, а саме, часто пишуть так:

$$[\Phi(x)]_{x=a}^{x=b}=\Phi(b)-\Phi(a),$$

беручи даний вираз у квадратні дужки. Наприклад,

$$\left[\frac{1+x^3}{1+x}\right]_{x=0}^{x=2}=\frac{1+8}{1+2}-\frac{1}{1}=2.$$

Іноді ще коротше пишуть так:

$$[\Phi(x)]_a^b.$$

Отже, для вказівки на подвійне підставляння вживаються такі позначення:

$$\Big|_{x=a}^{x=b} \Phi(x) = [\Phi(x)]_{x=a}^{x=b} = [\Phi(x)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

§ 27. Вираження інтеграла через значення первісної.

Первісною, або інтегралом даної функції, ми назвали всяку функцію, похідна якої дорівнює даній функції.

Отже, якщо $\Phi'(x) = f(x)$, то функція $\Phi(x)$ є інтеграл, або первісна, даної функції $f(x)$.

Ми бачимо, що слово „інтеграл" вживається в двох глибоко різних розуміннях. Треба чітко розрізняти інтеграл як границю суми від інтеграла як первісної.

Інтеграл як границя суми позначається так:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Інтеграл як первісну позначатимемо так:

$$\int f(x)\,dx.$$

Відміна між позначеннями очевидна. В тому і другому випадку ми маємо один і той же знак інтеграла, але в другому випадку при ньому немає символів границь, які обов'язково повинні бути в першому випадку.

Через те, що вживати одне й те ж слово в двох різних розуміннях, поки не набуто до того звички, трохи важко, то в цьому розділі під інтегралом ми будемо виключно розуміти тільки інтеграл як границю суми. Інтеграл же як первісну будемо просто називати первісною.

Запам'ятавши це, припустимо, що треба обчислити інтеграл

$$G = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

від якоїсь функції $f(x)$, неперервної в інтервалі (a, b). Цей інтеграл є границя інтегральної суми

$$S = f(\xi_0)(x_1 - a) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_{n-1})(b - x_{n-1}), \tag{2}$$

при побудові якої ми можемо довільно брати не тільки всі точки x_k, але також у кожному підінтервалі (x_k, x_{k+1}) і точку ξ_k. Цією довільністю ми тепер і скористуємося.

Припустимо, що будьяким шляхом ми знайшли первісну для даної функції $f(x)$. Нехай це буде функція $\Phi(x)$. Отже,

$$\Phi'(x) = f(x). \tag{3}$$

Тоді інтеграл G і сума S можуть бути переписані в такій формі:

$$G = \int_a^b \Phi'(x)\,dx,$$

$$S = \Phi'(\xi_0)(x_1 - a) + \Phi'(\xi_1)(x_2 - x_1) + \ldots + \Phi'(\xi_{n-1})(b - x_{n-1}). \quad (3')$$

Відзначимо ще раз, що кожна з точок ξ_k може бути взята довільно у відповідному їй підінтервалі.

Прикладаючи тепер теорему Лагранжа до функції $\Phi(x)$ для інтервалу (x_k, x_{k+1}), маємо рівність:

$$\Phi(x_k) - \Phi(x_{k+1}) = \Phi'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k),$$

і через те, що $\Phi'(x) = f(x)$, то

$$\Phi(x_k) - \Phi(x_{k+1}) = f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Написавши таку рівність для всякого підінтервалу, одержимо систему рівностей:

$$\begin{aligned}
\Phi(x_1) - \Phi(a) &= f(\xi_0)(x_1 - a),\\
\Phi(x_2) - \Phi(x_1) &= f(\xi_1)(x_2 - x_1),\\
\Phi(x_3) - \Phi(x_2) &= f(\xi_2)(x_3 - x_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Phi(x_{n-1}) - \Phi(x_{n-2}) &= f(\xi_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2}),\\
\Phi(b) - \Phi(x_{n-1}) &= f(\xi_{n-1})(b - x_{n-1}).
\end{aligned} \quad (4)$$

Тут числа $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ беруться вже не довільно. Навпаки, всякий символ ξ_k позначає якесь, хоч нам і невідоме, але цілком певне число в інтервалі (x_k, x_{k+1}). Навпаки, в рівності (3) кожне ξ_k в тому ж інтервалі ми можемо брати довільно.

Але якщо в (3) числа ξ_k можуть бути взяті довільно, то візьмемо їх так, щоб їх значення були відповідно рівні саме тим значенням, які вони мають у рівностях (4). При такому доборі їх, додаючи всі рівності (4), дістаємо рівність

$$\Phi(b) - \Phi(a) = S.$$

Отже,

$$\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Бачимо, що при проведеному доборі точок ξ_k ліва частина не залежить навіть від добору чисел x_k. Вона — величина стала. Але границя сталої величини дорівнює їй самій, а тому

$$\lim \sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k = \Phi(b) - \Phi(a),$$

тобто

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{5}$$

Цю рівність, користуючись тим або іншим символом підставляння, звичайно записують так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_{x=a}^{x=b} \Phi(x) = [\Phi(x)]_{x=a}^{x=b}$$

і читають: інтеграл дорівнює підставлянню від a до b від функції $\Phi(x)$. Одержуємо надзвичайно цікаву теорему:

Теорема. **Інтеграл дорівнює різниці значень первісної підінтегральної функції в точках верхньої і нижньої границь інтеграла. Отже, якщо $\Phi'(x) = f(x)$, то**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_{x=a}^{x=b} \Phi(x) = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{6}$$

Нехай, наприклад, треба обчислити інтеграл

$$\int_a^b \cos x\,dx.$$

Пригадуючи, що

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x,$$

робимо висновок: $\sin x$ є первісна для $\cos x$, а тому пишемо:

$$\int_a^b \cos x\,dx = \Big|_{x=a}^{x=b} \sin x = \sin b - \sin a, \tag{7}$$

і інтеграл обчислений *. Так само, знаючи, що

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x,$$

робимо висновок, що для $\sin x$ первісною є $-\cos x$, а тому, наприклад,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} -\cos x = 1,$$

$$\int_{-\pi}^{+2\pi} \sin x\,dx = \Big|_{x=-\pi}^{x=2\pi} -\cos x = -2.$$

---

* Порівняти цей метод з методом задачі № 401 (3).

Відзначимо, що рівність (6), де в правій частині немає x, яскраво показує, що інтеграл є функція своїх границь a і b, але не функція змінного інтеграції. Коли ж замість b напишемо x, то дістанемо:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \Big|_{x=a}^{x=x} \Phi(x) = \Phi(x) - \Phi(a), \tag{8}$$

і подвійну роль x особливо яскраво видно у верхній границі підставляння, де стоїть рівність $x = x$. Тут у лівій частині цієї рівності x є змінне інтеграції, але в правій частині тієї ж рівності буква x уже є границя інтеграла. Якщо замість x як змінного інтеграції ми напишемо z, то дістанемо:

$$\int_a^x f(z)\,dz = \Big|_{z=a}^{z=x} \Phi(z) = \Phi(x) - \Phi(a). \tag{9}$$

Порівнення (8) і (9) яскраво показує подвійну роль x у рівності (8).

Так, наприклад, нехай потрібно знайти інтеграл

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}.$$

Пригадуючи, чому дорівнює похідна від $\operatorname{arc\,tg} x$, пишемо

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arc\,tg} x]_{x=0}^{x=x} = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Взагалі можна розв'язати дуже багато задач, знаходячи безпосередньо, шляхом здогаду, первісну підінтегральної функції. Обчислимо, наприклад, площу u трапеції $1AMx$ (рис. 45), обмеженої зверху гіперболою

$$y = \frac{1}{x}.$$

Точка A — її вершина. Її координати $x = 1$, $y = 1$. Маємо

$$u = \int_1^x y\,dx = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx.$$

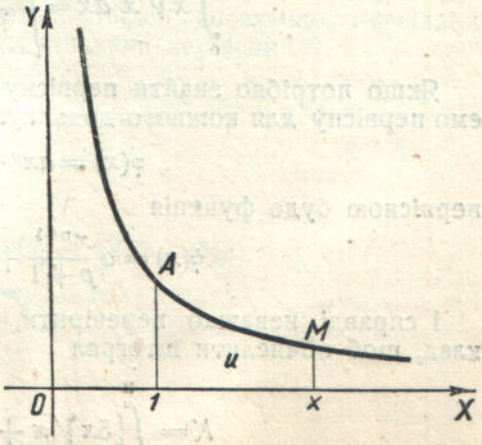

Рис. 45.

Пригадуючи, що $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$, робимо висновок

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \Big|_{x=1}^{x=x} \ln x = \ln x.$$

Отже,

$$u = \ln x.$$

Таким чином, площа u точно дорівнює логарифмові по основі e. Через те, що це — площа гіперболи, і неперові логарифми називаються **гіперболічними**.

Цілий ряд цікавих геометричних задач можна розв'язати, знаючи первісну від степінної функції. Через те, що

$$x^m = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right),$$

то можна дати таке правило:

щоб обчислити інтеграл як первісну від степінної функції x^m, треба показник її збільшити на одиницю і одержану функцію поділити на новий показник.

Зауважимо, що це правило можна застосувати і для тих випадків, коли показник m від'ємний або дробовий. Тому ми можемо обчислити первісні і від таких функцій, як, наприклад, $x\sqrt{x}$. Помічаючи, що $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$, робимо висновок, що шуканою первісною буде функція

$$\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}},$$

а тому, наприклад,

$$\int_0^1 x\sqrt{x}\, dx = \Big|_{x=0}^{x=1} \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}.$$

Якщо потрібно знайти первісну для суми функцій, то шукаємо первісну для кожного доданку. Так, наприклад, для функції

$$\varphi(x) = ax^p + bx^q$$

первісною буде функція

$$\psi(x) = a\frac{x^{p+1}}{p+1} + b\frac{x^{q+1}}{q+1}.$$

І справді, неважко перевірити, що $\psi'(x) = \varphi(x)$. Так, наприклад, щоб обчислити інтеграл

$$K = \int_1^2 \left(5x\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) dx,$$

представляємо підінтегральну функцію в такій формі:

$$5x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}};$$

легко переконуємося, що функція

$$\psi(x)=2x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{1}{3}}$$

буде її первісною. Справді,

$$\psi'(x)=5x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

Тому пишемо

$$\int_1^2\left(5x\sqrt{x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=\Big|_{x=1}^{x=2}(2x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{1}{3}})=8\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}-3.$$

З розглянутих прикладів зрозуміло, що коли ми знаємо первісну підінтегральної функції, то обчислення інтеграла не являє ніяких труднощів. І взагалі зрозуміло, що доведена теорема

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a)$$

зводить задачу про обчислення означених інтегралів до задачі про обчислення первісних, тобто до другої задачі інтегрального числення, до детального вивчання якої ми скоро й перейдемо. Покищо ж відзначимо, що при сучасному стані науки, крім надзвичайно рідких винятків, ми фактично можемо обчислити виключно тільки ті інтеграли, для яких можемо обчислити первісні їх підінтегральних функцій. Звідси зрозуміло, наскільки важливо знайти методи для обчислення первісних *.

§ 28. Висновок.

Якщо $\Phi'(x)=f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big|_{x=a}^{x=b}\Phi(x)=\Phi(b)-\Phi(a).$$

* Перед тим, як іти далі, читачеві рекомендується розв'язати задачі № 38—43.

ГЕОМЕТРИЧНІ ПРИКЛАДАННЯ ІНТЕГРАЛА.

Хоч до поняття інтеграла як границі суми ми прийшли із задачі про квадратуру площі, але по суті поняття інтеграла і поняття площі — це два зовсім незалежні одне від одного поняття. І справді, за означенням інтеграл є границя суми, побудованої за якимсь цілком певним законом, і тільки:

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Щоб зрозуміти це означення, треба знати, що таке сума, функція, границя, але зовсім не треба знати не тільки, що таке площа, а і взагалі можна нічого не знати з геометрії. Вся роль задачі про квадратуру площ полягала тільки в тому, що вона природно привела нас до поняття інтеграла. Але, хоч саме по собі поняття інтеграла суто аналітичне, проте, його значення дуже добре зображається значенням площі відповідної трапеції, а також різні властивості його теж добре відображаються у відповідних властивостях площі. Тому при теоретичному вивченні властивостей інтеграла завжди дуже корисно геометрично представляти його зображеним площею трапеції, але через те, що саме поняття інтеграла не залежить від поняття площі, то цілком природно, що коли воно введене, то його можна прикладати до обчислення не тільки площ, але й цілого ряду інших величин.

У цьому розділі ми розглянемо деякі геометричні прикладання поняття інтеграла.

§ 29. Об'єм тіла обертання.

Нехай, як і раніше, $aABb$ — трапеція (рис. 46), обмежена зверху кривою $y = f(x)$, що лежить усіма точками вище осі X. Якщо ця трапеція обертатиметься навколо осі X, то вона при своєму обертанні опише тіло, яке називається *тілом обертання*. Крива AB при цьому опише деяку поверхню, яка називається *поверхнею обертання*.

Поставимо собі задачу обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням трапеції навколо осі X. Цей об'єм позначимо через v.

При обертанні трапеції кожна ордината кривої описує площину, перпендикулярну до осі X. Тому зрозуміло, що об'єм v

є об'єм тіла, обмеженого поверхнею, утвореною обертанням кривої AB, і двома площинами, перпендикулярними до осі X у точках a і b.

Щоб обчислити цей об'єм, зробимо так.

Поділивши, як і раніше, трапецію на елементарні смужки (рис. 47) і побудувавши прямокутники як внутрішні, так і виступаючі, обертаємо трапецію навколо осі X. Тоді разом з нею обертаються і всі прямокутники. Зрозуміло, що при цьому кожний прямокутник опише якийсь циліндр, що його назвемо елементарним. Залежно від того, яким прямокутником, виступаючим чи внутрішнім, описаний даний елементарний циліндр, ми називатимемо його виступаючим або внутрішнім.

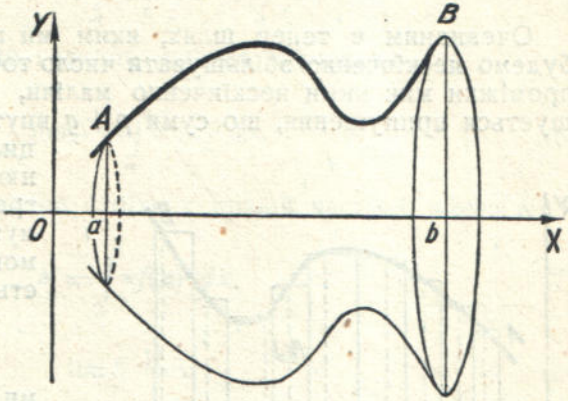

Рис. 46.

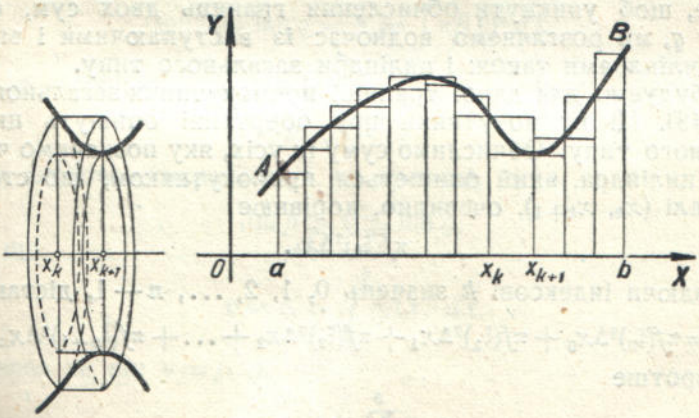

Рис. 47.

Кожна елементарна смужка при обертанні теж опише якесь тіло, що його назвемо елементарним шаром. Кожний такий шар менший від циліндра, описаного виступаючим прямокутником, що належить тій же смужці, але більший від циліндра, описаного відповідним до неї внутрішнім прямокутником. Звідси робимо висновок, що об'єм v всього тіла обертання менший суми об'ємів усіх виступаючих циліндрів і більший суми об'ємів усіх

внутрішніх циліндрів. Тому, якщо через p ми позначимо суму об'ємів усіх внутрішніх елементарних циліндрів, а через q — суму об'ємів усіх виступаючих, то матимемо співвідношення

$$p < v < q. \tag{1}$$

Очевидним є тепер шлях, яким ми повинні йти. Якщо ми будемо нескінченно збільшувати число точок поділу x_k так, щоб проміжки між ними нескінченно маліли, то само собою напрошується припущення, що суми p і q внутрішніх і виступаючих циліндрів при цьому змінюватимуться так, що границі їх дорівнюватимуть саме шуканому об'ємові v, тобто напрошується припущення, що

$$v = \lim p = \lim q. \tag{2}$$

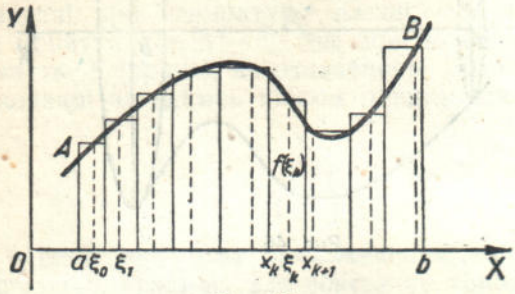

Рис. 48.

Щоб це точно довести, ми повинні довести рівність границь сум p і q. Справді, якщо ми доведемо, що

$$\lim p = \lim q,$$

то з (1), переходячи до границі, ми одразу одержимо (2).

Але, щоб уникнути обчислення границь двох сум, суми p і суми q, ми розглянемо водночас із виступаючими і внутрішніми циліндрами також і циліндри загального типу.

Побудуємо для даної трапеції прямокутники загального типу (рис. 48). Ці прямокутники при обертанні опишуть циліндри загального типу. Обчислимо суму їх усіх, яку позначимо через S. Об'єм циліндра, який опишеться прямокутником, що стоїть на інтервалі (x_k, x_{k+1}), очевидно, дорівнює

$$\pi f(\xi_k)^2 \Delta x_k.$$

Надаючи індексові k значень 0, 1, 2, ..., $n-1$, дістанемо

$$S = \pi f(\xi_0)^2 \Delta x_0 + \pi f(\xi_1)^2 \Delta x_1 + \pi f(\xi_2)^2 \Delta x_2 + \ldots + \pi f(\xi_{n-1})^2 \Delta x_{n-1},$$

або коротше

$$S = \sum_a^b \pi f(\xi_k)^2 \Delta x_k. \tag{3}$$

Для ясності позначимо

$$\pi f(x)^2 = \psi(x). \tag{4}$$

Тоді (3) перепишеться так:

$$S = \sum_a^b \psi(\xi_k) \Delta x_k. \tag{5}$$

У правій частині стоїть інтегральна сума, побудована з допомогою функції $\psi(x)$. Тому, через те, що

$$\lim \sum_a^b \psi(x_k)\,dx = \int_a^b \psi(x)\,dx = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx,$$

то з (3), переходячи до границі, робимо висновок:

$$\lim S = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx. \tag{6}$$

Позначимо інтеграл, що стоїть у правій частині, через K:

$$K = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx. \tag{7}$$

Тоді матимемо:

$$\lim S = K. \tag{8}$$

Ми знайшли границю суми S. Виявляється, що ця границя лишається однією й тією ж, як саме ми б не добирали точок x_k і точок ξ_k. Але суми p і q об'ємів внутрішніх і виступаючих циліндрів — це окремі випадки суми S при відповідному доборі точок ξ_k. Тому з (8) випливає, що також і

$$\lim p = \lim q = K = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx. \tag{9}$$

Тепер із співвідношення (1):

$$p < v < q$$

робимо висновок, переходячи до границі, що

$$\lim p \leqq v \leqq \lim q,$$

тобто що

$$v = K = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx$$

або, через те що $y = f(x)$,

$$v = \int_a^b \pi y^2\,dx.$$

Теорема. **Об'єм v тіла, обмеженого двома площинами, перпендикулярними до осі X у точках a і b, і поверхнею, утвореною обертанням кривої $y = f(x)$ навколо осі X, визначається за формулою:**

$$v = \int_a^b \pi y^2\,dx. \tag{10}$$

Бачимо, що обчислення об'єму тіла обертання, як і обчислення площі трапеції, зводиться до обчислення деякого означеного інтеграла.

Якщо замість трапеції $aABb$ ми розглянемо трапецію $aAMP$ (рис. 49), де абсциса точки M дорівнює x, то зрозуміло, що об'єм, утворений обертанням цієї трапеції, дорівнюватиме

$$\int_a^x \pi y^2\,dx.$$

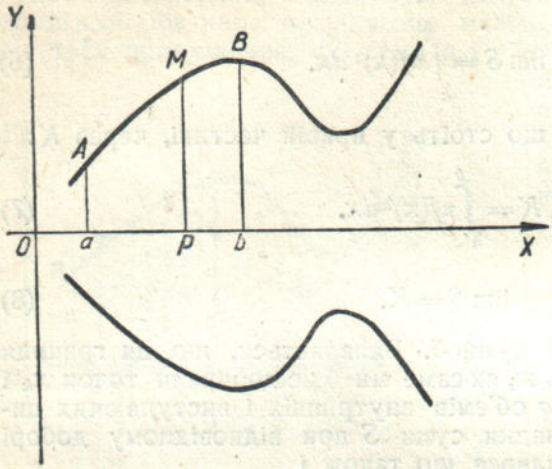

Рис. 49.

Нехай крива AB монотонна (рис. 50). Тоді її абсциса буде однозначна функція ординати. Нехай

$$x = \varphi(y).$$

Опустивши з A і B перпендикуляри $A\alpha$ і $B\beta$ на вісь Y, ми дістанемо трапецію $\alpha AB\beta$, основа якої збігається з віссю Y. Очевидно, що для неї x і y міняються своїми ролями. Тепер y відограє ту роль, яка раніше належала x, і навпаки. Тому зрозуміло, що площа трапеції $\alpha AB\beta$ дорівнює

$$\int_\alpha^\beta \varphi(y)\,dy = \int_\alpha^\beta x\,dy,$$

а об'єм, одержаний від її обертання навколо осі Y, дорівнює

$$\int_\alpha^\beta \pi x^2\,dy = \int_\alpha^\beta \pi\varphi(y)^2\,dy. \tag{11}$$

Як приклад, обчислимо об'єм v, утворений обертанням еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{12}$$

навколо осі X (рис. 51). Для верхньої його половини

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{13}$$

Тому за формулою (10)

$$v = \int_{-a}^{+a} \pi y^2\,dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\,dx.$$

Первісною для підінтегральної функції є функція

$$\omega(x) = a^2x - \frac{x^3}{3}.$$

І справді, $\omega'(x)$ дорівнює підінтегральній функції. Тому

$$\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\,dx = \Bigg/_{x=-a}^{x=+a} \left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{4}{3}a^3.$$

Отже, об'єм еліпсоїда обертання навколо більшої осі дорівнює $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

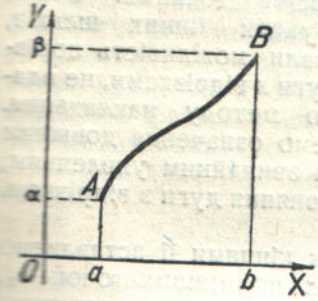

Рис. 50.

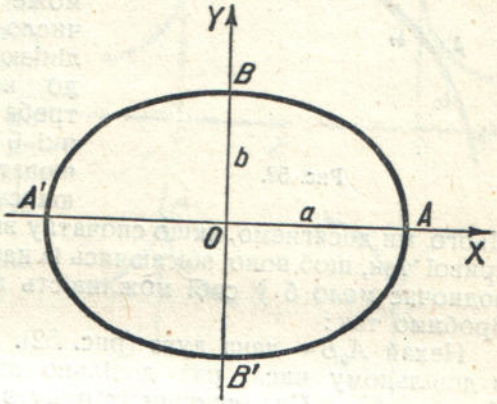

Рис. 51.

При $a = b$ одержимо як окремий випадок об'єм кулі.

Обчислимо об'єм v', утворений обертанням того ж еліпса навколо малої осі. Тепер ролі x і y міняються. З (12) для правої половини еліпса

$$x = +\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

а тому за формулою (11):

$$v' = \int_{-b}^{+b} \pi x^2\,dy = \frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^{+b} (b^2 - y^2)\,dy = \frac{\pi a^2}{b^2}\Bigg/_{y=-b}^{y=+b} \left(b^2y - \frac{y^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Отже,

$$v = \frac{4}{3}\pi ab^2, \qquad v' = \frac{4}{3}\pi a^2 b\,*.$$

* До цього параграфа задачі 44 — 47, 87 — 89, 94.

§ 30. Довжина дуги.

Хоч з уявленням усякої дуги у нас нерозривно зв'язується і уявлення про її довжину, проте, ввести точне логічне поняття про довжину дуги кривої лінії далеко не так просто, як це здається на перший погляд. Справді, щоб знайти числовий вираз дуги кривої, треба виміряти її, тобто порівняти її з відрізком, прийнятим за одиницю міри. Для цього ми повинні знайти, скільки і яких частин одиниці міри вкладається в даній дузі. Але тут ми одразу ж стикаємося з одним утрудненням. Щоб виміряти відрізок прямої лінії, ми накладаємо на нього відрізок, прийнятий за одиницю міри. Але цей метод накладання не можна застосувати до вимірювання кривої дуги, бо всякий відрізок може мати більше або менше число точок, спільних з кривою лінією, але не може приставати до неї всіма точками. Отже, треба шукати інших шляхів, які б давали можливість порівнювати дуги з відрізками, не вдаючись до методу накладання.

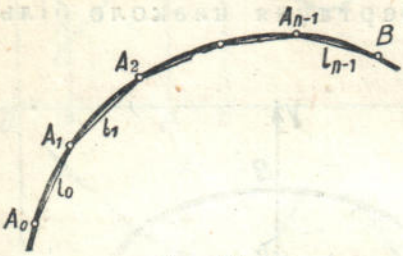

Рис. 52.

Цього ми досягнемо, якщо спочатку введемо означення довжини кривої так, щоб воно, збігаючись із нашим звичайним уявленням, водночас мало б у собі можливість порівняння дуги з відрізком. Зробимо так:

Нехай A_0B — дана дуга (рис. 52). Між кінцями її вставляємо в довільному числі ряд довільно взятих проміжних точок A_1, A_2, ..., A_{n-1}. Сполучивши їх одну з одною хордами, одержимо деяку ламану лінію. Довжину її, яку будемо також називати її периметром, позначимо через P. Хорду, яка сполучає точки A_k і A_{k+1}, позначимо через l_k. Отже сторони, або ланки, цієї ламаної послідовно дорівнюватимуть l_0, l_1, l_2, ..., l_{n-1}, а тому

$$P = l_0 + l_1 + l_2 + \ldots + l_{n-2} + l_{n-1},$$

що коротше запишемо так:

$$P = \sum l_k.$$

Надаючи індексові k всіх значень від 0 до $n-1$, ми одержимо всі доданки суми, що стоїть у правій частині.

В нашому уявленні, чим густіше лежать проміжні точки, тим менше ламана відрізняється від дуги. Тому уявімо собі якийнебудь закон, за яким число проміжних точок нескінченно зростає, так що віддалі між ними нескінченно маліють. Тоді ламана все менше і менше відрізнятиметься від дуги, а тому введемо таке

Означення. **Довжиною дуги кривої лінії називається границя периметра вписаної в неї ламаної в припущенні, що**

число ланок цієї ламаної нескінченно зростає так, що самі ланки нескінченно маліють.

Проти цього означення можна навести таке заперечення. Через те, що проміжні точки A_k беруться довільно і через те, що число їх можна збільшувати за найрізноманітнішими законами, то постає питання: чи не буде границя периметра ламаної залежати від того закону, за яким зростає число її ланок? Покищо ми маємо право припустити, що, добираючи для вершин ламаної різні точки і збільшуючи число їх за різними законами, ми для границі периметра одержуватимемо різні значення, і, коли б у дійсності було так, то тоді довжині однієї й тієї ж дуги ми повинні були б приписувати різні значення. Це нам показало б, що наведене означення непридатне, бо всякій дузі ми приписуємо єдине цілком певне значення довжини, і що тому треба шукати нових означень. Ми побачимо, що відповідь на це питання вийде сама собою при виведенні формули для обчислення довжини дуги.

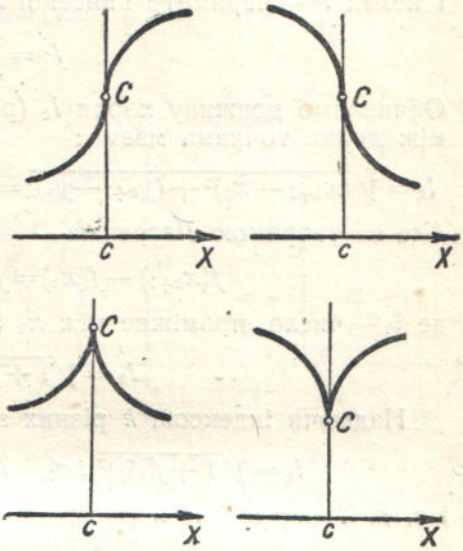

Рис. 53.

Нехай крива AB дана рівнянням

$$y = f(x),$$

де не тільки сама функція $f(x)$, але і її похідна неперервні в деякому інтервалі (a, b).

Розглянемо, що означає геометрично вимога, щоб похідна була неперервна. Припустимо, що ця умова не додержана і що похідна $f'(x)$ у якійсь точці c нескінченна:

$$f'(c) = \infty.$$

Нехай C — точка на кривій; c — її абсциса. Дотична в цій точці перпендикулярна до осі X, а тому неважко переконатися, що крива в області точки C має одну з форм рисунка 53, тобто що точка C є або точка перегину, або точка звороту з дотичною, перпендикулярною до осі X. Таким чином,

вимога, щоб похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ була неперервна, рівносильна вимозі, щоб крива $y = f(x)$ не мала ні точок перегину, ні точок звороту з дотичними, перпендикулярними до осі X.

Після всіх цих попередніх зауважень перейдемо до виведення формули для обчислення довжини дуги кривої $y = f(x)$, де $f(x)$ і $f'(x)$ неперервні на інтервалі (a, b). Ми легко її дістанемо,

якщо точно будемо йти тим шляхом, що його нам підказує дане означення довжини дуги.

Координати точок

$$A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots, A_{n-1}$$

позначимо через

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3), \ldots,\ (x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Хорди, які сполучають їх, нехай, як і раніше,

$$l_1,\ l_2, \ldots,\ l_{n-1}$$

і нехай P — периметр вписаної ламаної:

$$P = \sum l_k. \tag{1}$$

Обчислимо довжину хорди l_k (рис. 54). За формулою для віддалі між двома точками маємо:

$$l_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}.$$

Але за теоремою Лагранжа

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k),$$

де ξ_k — число, проміжне між x_k і x_{k+1}, а тому

$$l_k = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\ \Delta x_k. \tag{2}$$

Надаючи індексові k різних значень, матимемо:

$$l_1 = \sqrt{1 + f'(\xi_1)^2}\ \Delta x_1, \quad l_2 = \sqrt{1 + f'(\xi_2)^2}\ \Delta x_2, \ldots$$

і т. д. Тепер згідно з (1)

$$P = \sum_a^b \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\ \Delta x_k. \tag{3}$$

Внесемо для ясності позначення:

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \Phi(x). \tag{4}$$

Тоді (3) перепишеться в такій простій формі:

$$P = \sum_a^b \Phi(\xi_k)\ \Delta x_k. \tag{5}$$

В правій частині стоїть інтегральна сума, складена для інтервалу (a, b) з допомогою функції $\Phi(x)$. Якщо ми тепер припустимо, що не тільки дана функція $f(x)$, але і її похідна неперервні, тоді в (5) ми маємо інтегральну суму від неперервної функції $\Phi(x)$, а тому, переходячи до границі, дістаємо:

$$\lim P = \int_a^b \Phi(x)\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \tag{6}$$

Ми бачимо, що границя периметра P не залежить від вибору точок x_k, а тому і від вибору точок A_k. Одержуємо теорему:

Теорема. **Якщо ланки ламаної, вписаної в дану дугу, нескінченно маліють, то її периметр прямує до якоїсь єдиної границі, яка лишається однією і тією ж при всякому законі нескінченного маління ланок ламаної.**

Точно кажучи, тільки довівши цю теорему, ми можемо визначити довжину дуги як границю периметра вписаної в неї ламаної. Тоді, позначаючи довжину дуги AB так: $\breve{AB}$, з (6) дістаємо:

$$\breve{AB} = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Теорема. **Довжина дуги кривої**

$$y = f(x),$$

кінцями якої є точки з абсцисами a і b, визначається за формулою:

$$\breve{AB} = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx \quad (7)$$

при умові, що $a < b$ і що похідна y' неперервна в інтервалі (a, b).

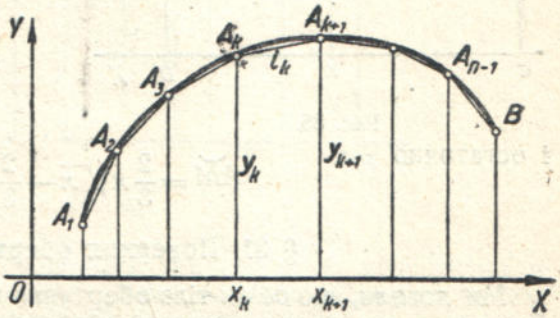

Рис. 54.

Ми бачимо, що обчислення дуги кривої зводиться до обчислення якогось інтеграла.

Якщо ми на кривій візьмемо точку M з абсцисою x (рис. 55), то довжина дуги AM визначиться, очевидно, за формулою

$$\breve{AM} = \int_a^x \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Як приклад розглянемо криву (рис. 56)

$$y^2 = \frac{4}{9}(x-1)^3.$$

Точка A з координатами (1, 0) є точкою звороту. Сама крива складається з двох віток, симетричних відносно осі X*. На верхній вітці, для якої

$$y = +\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}, \quad y' = (x-1)^{\frac{1}{2}},$$

* Це стає очевидним, якщо перенести початок у точку A. Тоді рівняння кривої прийме вигляд:

$$y^2 = \frac{4}{9}x^3, \quad y = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

візьмемо точку $M(x, y)$ і обчислимо дугу AM. За формулою (7) маємо:

$$\breve{AM} = \int_1^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_1^x \sqrt{x}\,dx = \Big|_{x=1}^{x=x} \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},$$

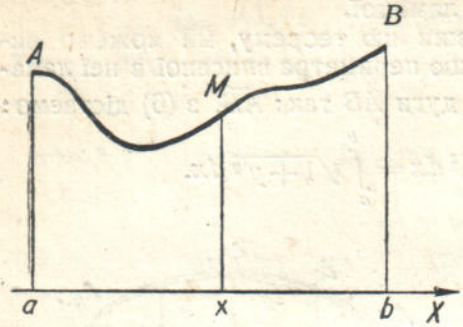

Рис. 55.

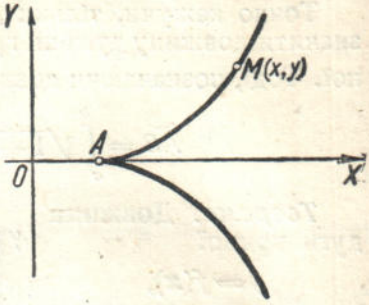

Рис. 56.

і остаточно

$$\breve{AM} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{3}.$$

§ 31. Поверхня обертання.

Ми довели, що об'єм тіла обертання виражається інтегралом. Доведемо, що площа поверхні обертання теж може бути виражена деяким інтегралом. Для цього ми спочатку доведемо, що довжину дуги можна розглядати не тільки як границю периметра вписаної в цю дугу ламаної, але також як границю периметра деякої описаної навколо неї *перервної* ламаної лінії.

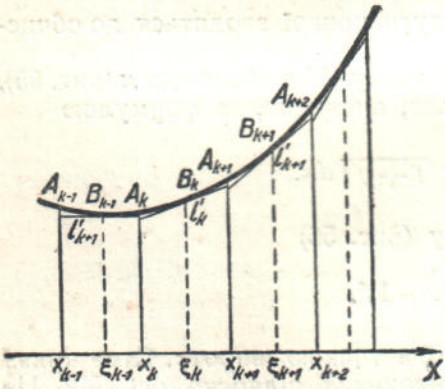

Рис. 57.

Нехай AB — дуга кривої, рівняння якої

$$y = f(x),$$

де функція $f(x)$ неперервна разом із своєю похідною в інтервалі (a, b).

Як і раніше, довільно взятими точками x_k поділяємо інтервал (a, b) на підінтервали і в кожному підінтервалі (x_k, x_{k+1}) беремо, покищо теж довільно, точку ξ_k (рис. 57). Нехай $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ — точки на кривій з абсцисами $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$. Через $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ позначимо точки з абсцисами $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$.

У кожній точці B_k проводимо дотичну до кривої. Її відрізок між ординатами точок A_k і A_{k+1} позначимо через l_k. Побуду-

вавши такі відрізки, дотичні до кривої в усіх точках B_k, дістанемо систему відрізків

$$l'_0,\ l'_1,\ l'_2, \ldots, l'_{n-1}.$$

Через те що кожний з них дотикається кривої, але в той же час, як правило, кінець його не збігається з початком даль-

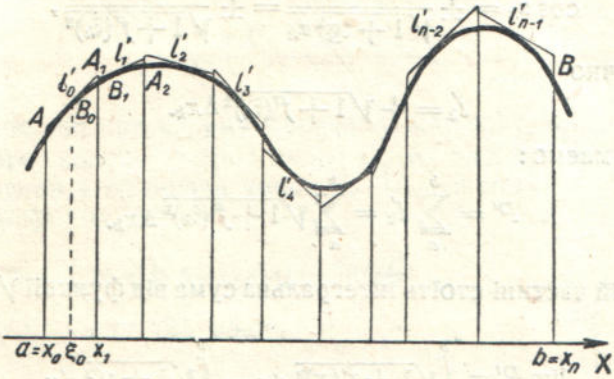

Рис. 58.

шого (рис. 58), то ми умовимося сукупність їх усіх називати *перервною* ламаною, описаною навколо кривої. Суму ж їх назвемо периметром цієї ламаної і позначимо його через P':

$$P' = l'_0 + l'_1 + l'_2 + \ldots + l'_{n-1}.$$

Теорема. **Границя периметра перервної ламаної, описаної навколо дуги, дорівнює довжині дуги.**

Щоб довести цю теорему, ми обчислимо довжину кожного відрізка l'_k, потім візьмемо суму їх P' і знайдемо, чому дорівнює її границя.

Позначимо через α_k кут відрізка l'_k з віссю X. Цей кут є кут нахилу дотичної в точці B_k, а тому

$$\operatorname{tg} \alpha_k = f'(\xi_k).$$

При цьому можливі два випадки: кут α_k може бути або гострий, або тупий. Якщо він гострий, то (рис. 59, *I*)

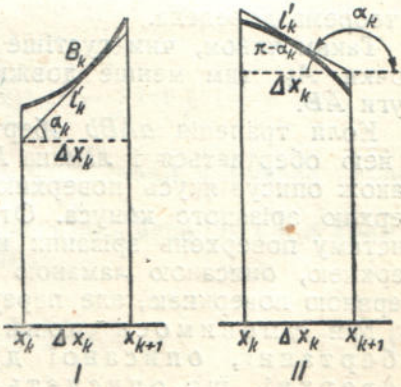

Рис. 59.

$$\Delta x_k = l'_k \cos \alpha_k. \qquad (1)$$

Якщо ж він тупий, то (рис. 59, *II*)

$$\Delta x_k = l'_k \cos(\pi - \alpha_k) = -l'_k \cos \alpha_k.$$

Отже, завжди

$$l'_k = \frac{\Delta x_k}{|\cos \alpha_k|},$$

і через те що

$$\cos \alpha_k = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_k}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}},$$

то остаточно

$$l'_k = + \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\, \Delta x_k. \qquad (2)$$

Тепер маємо:

$$P' = \sum_a^b l'_k = \sum_a^b \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\, \Delta x_k.$$

У правій частині стоїть інтегральна сума від функції $\sqrt{1 + f'(x)^2}$, а тому

$$\lim P' = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Пригадавши тепер, що за доведеним

$$\breve{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

робимо висновок, що

$$\lim P' = \breve{AB},$$

і теорема доведена.

Таким чином, чим густіше і ближче одна до однієї лежать точки A_k, тим менше довжина ламаної P' відрізняється від дуги AB.

Коли трапеція $aABb$ обертається навколо осі X, то разом з нею обертається і ламана P'. При цьому всякий відрізок l'_k також описує якусь поверхню, а саме, як неважко бачити, поверхню зрізаного конуса. Отже, вся ламана P' опише якусь систему поверхень зрізаних конусів. Цю систему назвемо поверхнею, описаною ламаною лінією P'. Вона не буде неперервною поверхнею, але перервною.

Ми умовимося приймати за площу поверхні обертання, описаної дугою AB, границю площі поверхні, що описується обертанням перервної ламаної P', тобто границю суми площ поверхень, описаних кожним з відрізків $l'_0, l'_1, \ldots, l'_{n-1}$ при обертанні їх навколо осі X. Але при цьому всяку точку ξ_k не будемо брати, як до цього часу, довільно, але візьмемо її якраз посередині відрізка $x_k x_{k+1}$.

Ми зараз побачимо, чому її вигідно так узяти.

Позначимо через p_k площу тієї поверхні, яку опише відрізок l'_k при своєму обертанні навколо осі X, через η_k — ординату точки B_k (рис. 60). Зрозуміло, що

$$\eta_k = f(\xi_k),$$

і через те що точку ξ_k взято саме по середині відрізка $x_k x_{k+1}$, то

$$\eta_k = \frac{x_k C_k + x_{k+1} C_{k+1}}{2}. \qquad (3)$$

Очевидно, що при своєму обертанні відрізок l'_k опише поверхню зрізаного конуса, твірна якого l'_k, а радіусами нижньої і верхньої основ є ординати точок C_k і C_{k+1}, а тому за відомою формулою

$$p_k = \pi l'_k (x_k C_k + x_{k+1} C_{k+1}) = 2\pi \eta_k l'_k.$$

Беручи до уваги (2), маємо

$$p_k = 2\pi f(\xi_k) \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\, \Delta x_k.$$

Кожний з відрізків l'_k опише свою поверхню зрізаного конуса p_k. Взявши суму їх усіх, маємо

$$\sum p_k = \sum_a^b 2\pi f(\xi_k) \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\, \Delta x_k.$$

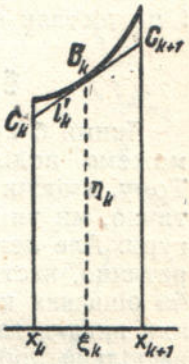

Рис. 60.

У правій частині стоїть інтегральна сума, складена з допомогою функції $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}$. Тому, переходячи до границі, дістанемо:

$$\lim \sum p_k = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Через те що ліва частина за означенням є шукана площа поверхні обертання, то

Теорема. **Площа S поверхні обертання навколо осі X кривої $y = f(x)$ визначається за формулою**

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \qquad (4)$$

Ми бачимо, що і в цьому випадку ми знову стикаємося з означеним інтегралом.

Як приклад розглянемо площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі X дуги AB кола

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Очевидно, що ця поверхня є половина сфери (рис. 61). Через те що для дуги BA

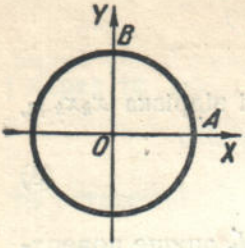

Рис. 61.

$$y = +\sqrt{a^2 - x^2},\ y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

то

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

і за формулою (4) маємо:

$$S = \int_0^a 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi a \int_0^a 1 \cdot dx = 2\pi a^2,$$

і ми дістали формулу для поверхні половини сфери радіуса a.

§ 32. Площа в полярних координатах.

Якими б кривими дана площа не була обмежена, ми завжди можемо поділити її на суму кількох криволінійних трапецій. Тому, вміючи обчисляти площі таких трапецій, міркуючи теоретично, ми тим самим можемо обчислити і площу будьякої фігури. Але легко бачити, що наскільки це є справедливим теоретично, настільки це не завжди можна здійснити практично, бо рівняння кривої приймає більш або менш простий або складний вигляд залежно від вибору системи координат, і звичайно наскільки простим буває рівняння кривої в якійнебудь одній системі координат, настільки воно приймає складну форму в іншій системі. Між іншим, багато кривих, рівняння яких надзвичайно прості в полярних координатах, у декартових координатах представляються рівняннями складної структури. Природним тому буде поставити задачу: знайти формулу для обчислення площ, обмежених кривими, рівняння яких дані в полярних координатах.

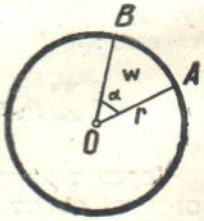

Рис. 62.

Коли крива віднесена до декартових координат, то криволінійна трапеція, природно, є основним типом, до якого зводяться всі інші типи. Але в системі полярних координат доцільніше прийняти за основний тип кривий сектор.

Нехай w — площа сектора AOB круга радіуса r (рис. 62). Через s позначимо довжину дуги AB, через α — кут сектора, виміряний радіаном. Зрозуміло, що s у стільки разів менше довжини всього кола, у скільки α менше 2π. Також очевидно, що відношення площі сектора до площі круга дорівнює відношенню кута сектора до повного кута. Отже, маємо:

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{\alpha}{2\pi},\ \frac{w}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi},$$

а тому

$$s = r\alpha, \quad w = \frac{1}{2} r^2 \alpha. \tag{1}$$

Ці формули показують, що

довжина дуги кола дорівнює добуткові радіуса на кут, стягуваний дугою;

площа кругового сектора дорівнює половині добутку квадрата радіуса на кут сектора.

З (1) неважко вивести, що

$$w = \frac{1}{2} rs. \tag{2}$$

Отже, **площа кругового сектора дорівнює половині добутку радіуса на дугу сектора, а тому з погляду обчислення площі круговий сектор можна розглядати як трикутник, висотою якого є радіус, а основою — дуга сектора.**

Перейдемо до так званих кривих секторів.

Нехай у полярних координатах дано криву AB рівнянням

$$r = f(\omega).$$

Фігуру OAB, обмежену цією кривою і двома радіус-векторами OA і OB, назвемо кривим сектором (рис. 63). Обчислимо площу її, яку позначимо через w.

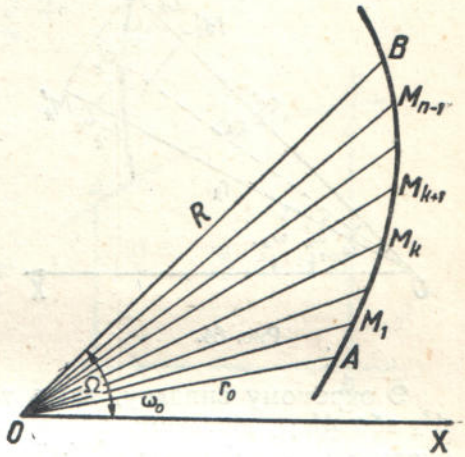

Рис. 63.

Для обчислення цієї площі ми діятимемо зовсім аналогічно до того, як діяли при обчисленні криволінійної трапеції. Починаємо з того, що між точками A і B вставляємо довільний ряд точок $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, число яких потім нескінченно збільшуватимемо так, щоб віддалі між ними нескінченно маліли. Всі ці проміжні точки сполучаємо прямими з полюсом O, завдяки чому дана площа w поділиться на частини, які ми назвемо елементарними секторіальними смугами. Водночас із нескінченним зростанням точок M_k нескінченно зростатиме і число секторіальних смуг, при чому площі їх нескінченно малітимуть. Границя суми всіх цих елементарних смуг дає площу сектора w.

Нехай (r_0, ω_0) і (R, Ω) — полярні координати точок A і B. Через

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-1}$$

і

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}$$

позначимо полярні кути і радіус-вектори точок

$$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{n-1}.$$

Отже, взагалі

$$r_k = f(\omega_k).$$

Розглянемо секторіальну смужку OM_kM_{k+1} (рис. 64). На дузі M_kM_{k+1} візьмемо довільно точку N_k, полярні координати якої позначимо через r'_k і ω'_k. Опишемо радіусом r'_k дугу C'_kC_k. Дістанемо елементарний круговий сектор $OC_kC'_k$ загального типу. Площу його позначимо через v_k. Зрозуміло, що

$$v_k = \frac{1}{2} r'^2_k (\omega_{k+1} - \omega_k) = \frac{1}{2} r'^2_k \Delta\omega_k. \tag{3}$$

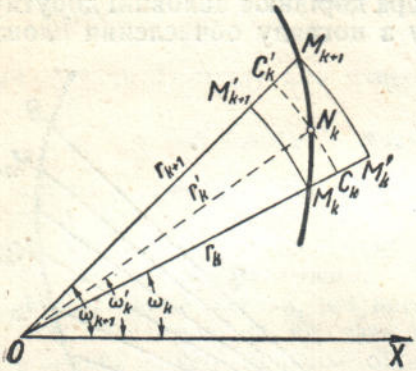

Рис. 64.

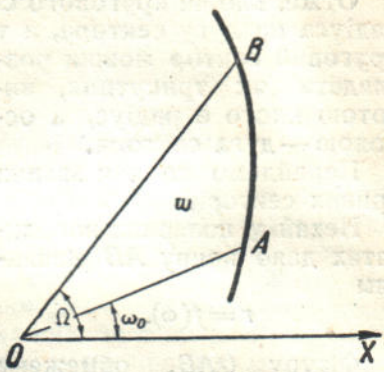

Рис. 65.

В окремому випадку, якщо точка N_k зливається з точкою M_k або M_{k+1}, дістанемо або внутрішній круговий сектор, площу якого позначимо через v'_k, або виступаючий, площу якого позначимо через v''_k. Нехай p' — сума всіх перших площ, а p'' — сума всіх других:

$$p' = \sum v'_k, \quad p'' = \sum v''_k.$$

Площа w всього сектора лежить між ними:

$$p' < w < p''. \tag{4}$$

Доведемо, що при нескінченному зростанні числа точок M_k так, що ці точки нескінченно наближаються одна до однієї, завжди

$$\lim p' = \lim p''.$$

Для цього розглянемо суму

$$S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} = \sum v_k.$$

Згідно з (3) маємо:

$$S = \sum_0^{\Omega} \frac{1}{2} f(\omega'_k)^2 \Delta\omega_k.$$

В правій частині стоїть інтегральна сума, складена з допомогою функції $\frac{1}{2} f(\omega)^2$, а тому

$$\lim S = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} f(\omega)^2 \, d\omega.$$

Ми бачимо, що сума S має одну й ту ж границю, як саме не брати точки N_k. Отже, і суми p' і p'' мають ту ж границю. Але в такому разі з (4) випливає, що

$$\lim w = \lim p' = \lim p'' = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} f(\omega)^2 \, d\omega = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} r^2 \, d\omega;$$

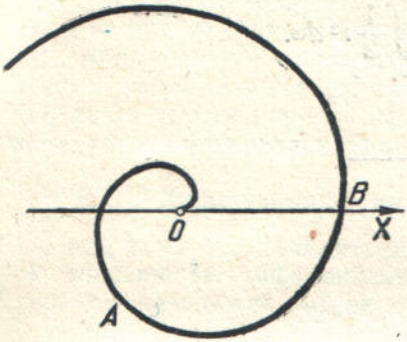

Рис. 66.

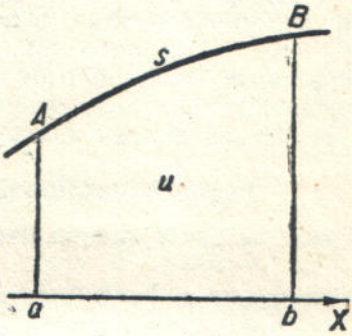

Рис. 67.

звідси

Теорема. **Площа w кривого сектора, обмеженого кривою**

$$r = f(\omega)$$

і радіус-векторами $\omega = \omega_0$ і $\omega = \Omega$, визначається за формулою

$$\omega = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} r^2 \, d\omega.$$

Розглянемо архімедову спіраль (рис. 66)

$$r = a\omega.$$

Щоб одержати площу w одного її завитка OAB, треба змінювати кут ω від 0 до 2π. Тому маємо

$$w = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \omega^2 \, d\omega = \frac{4\pi^3 a^2}{3}.$$

§ 33. Висновок.

Якщо u — площа трапеції $aABb$ (рис. 67), обмеженої кривою $y=f(x)$, і якщо s, v і S — дуга, об'єм і поверхня обертання, то

$$u=\int_a^b y\,dx, \quad s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$v=\int_a^b \pi y^2\,dx, \quad S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Площа кривого сектора в полярних координатах

$$w=\int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} r^2\,d\omega.$$

ДРУГА ЗАДАЧА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ. ІНТЕГРАЛ ЯК ПЕРВІСНА.

Функція може мати точки перервності, тому, щоб уникнути повторення одного й того ж, умовимося, що

в дальшому всяка дана функція завжди розглядається тільки в такому інтервалі, на якому вона неперервна. Тому для скорочення ми звичайно будемо просто говорити про функції, пропускаючи прикметник „неперервна“.

Та сама умова стосується, звичайно, і похідних даних функцій, які, якщо тільки явно не відзначено супротивного, повинні в розглядуваних інтервалах припускатись неперервними.

§ 34. Диференціал і диференціальний вираз.

Далі нам весь час доведеться мати справу з так званою основною властивістю диференціала.

Якщо x — незалежне змінне, то за означенням диференціала

$$df(x) = f'(x)\,\Delta x,$$

а тому $dx = \Delta x$ і

$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

Отже, диференціал даної функції завжди може бути представлений у вигляді добутку якоїсь функції, а саме, похідної даної функції на диференціал незалежного змінного. Таке представлення диференціала назвемо *нормальним*.

Основна властивість диференціала полягає ось у чому.

Якщо

$$y = f(x),$$

то рівність

$$dy = f'(x)\,dx \tag{1}$$

буде не тільки при x незалежному, але й при всякому виборі незалежного змінного.

Тому, якщо $\varphi(t)$ — яка завгодно неперервна функція і якщо, розглядаючи t як незалежне змінне, ми приймемо $x = \varphi(t)$ і в цьому випадку і y стає функцією від t, то рівність (1) лишається дійсною. Замінюючи ж у ній x через $\varphi(t)$, дістанемо

$$dy = f'(\varphi(t))\,d\varphi(t).$$

Приймаючи $f'(\varphi(t)) = \omega(t)$, матимемо

$$dy = \omega(t)\, d\varphi(t).$$

В правій частині тепер стоїть добуток однієї функції на диференціал другої. Отже,

диференціал функції може представлятись не тільки у вигляді добутку функції на диференціал незалежного змінного, але і у вигляді добутку однієї функції на диференціал другої.

Саме з таким його представленням часто доводиться зустрічатись в інтегральному численні. В зв'язку з цим

всякий добуток однієї функції на диференціал другої функції, тобто всякий вираз вигляду

$$\psi(x)\, d\varphi(x) \tag{2}$$

умовимося називати диференціальним виразом.

Точно кажучи, диференціальним виразом називається всякий вираз, у який входять диференціали, наприклад, такий:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Але в цій книзі під диференціальним виразом ми будемо розуміти тільки вирази типу (2).

В окремому випадку, якщо в (2) прийняти $\psi(x) = 1$, то одержимо $d\varphi(x)$; а якщо прийняти $\varphi(x) = x$, то матимемо $\psi(x)\, dx$. Отже, кожний з виразів

$$d\varphi(x),\ \psi(x)\, dx$$

є окремий випадок диференціального виразу.

§ 35. Друга задача інтегрального числення.

Другою задачею інтегрального числення ми назвали задачу про обчислення інтеграла як первісної даної функції.

Інтегралом, або первісною даної функції, називається всяка функція, похідна якої дорівнює даній функції.

Отже, якщо u — інтеграл функції $f(x)$, то

$$\frac{du}{dx} = f(x), \tag{1}$$

звідки

$$du = f(x)\, dx. \tag{2}$$

Навпаки, з цієї рівності випливає перша. Тому задачу інтегрального числення:

знайти функцію, знаючи її похідну,

можна формулювати і так:

знайти функцію, знаючи її диференціал.

Друге формулювання, зважаючи на властивості диференціала, має перевагу перед першим. Справді, коли ми ставимо задачу: знайти функцію u, похідна якої дорівнює $f(x)$, і пишемо

$$\frac{du}{dx}=f(x), \tag{1}$$

то тим самим неявно вже припускається, що незалежним змінним є x. Але рівність

$$du=f(x)\,dx \tag{2}$$

лишається дійсною вже при всякому виборі незалежного змінного. Тому вона й має перевагу перед рівністю (1).

Зважаючи ж на це, ми остаточно скажемо:

друга задача інтегрального числення — знайти функцію, знаючи її диференціал.

Тому ж, хоч далі ми часто будемо ставити задачу так: знайти функцію u, похідна якої дорівнювала б даній функції $f(x)$, але записувати це майже завжди будемо так:

$$du=f(x)\,dx.$$

§ 36. Позначення інтеграла.

Позначення відограє в математиці велику роль. Історія вчить, що часто вдалий добір позначення дуже впливає на прогрес науки.

Всяку функцію u, що задовольняє рівняння

$$du=f(x)\,dx,$$

тобто всякий інтеграл функції $f(x)$, позначають так:

$$\int f(x)\,dx,$$

де знак $\int$ називається знаком інтеграла. Тому дану функцію називають підінтегральною функцією, добуток же $f(x)\,dx$ називається підінтегральним виразом.

Це означення тільки попереднє. Ми незабаром змушені будемо трохи видозмінити його і доповнити.

Вираз

$$\int f(x)\,dx$$

точно треба читати так: інтеграл від добутку $f(x)$ на dx. Але звичайно його коротше читають так: інтеграл від функції $f(x)$, не згадуючи, для скорочення, про множник dx; але

пропускати при писанні під знаком інтеграла множник dx не можна.

Як побачимо, таке пропускання в деяких випадках може призвести до помилкових висновків.

Згідно з означенням, якщо ми знаємо, що

$$\Phi'(x) = f(x),$$

тобто, що $\Phi(x)$ — інтеграл від $f(x)$, то ми маємо право написати, що

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x). \tag{1}$$

Звідси випливає таке практичне правило: щоб обчислити інтеграл, треба знайти функцію, похідна якої дорівнювала б підінтегральній функції.

Знайти ж цю функцію часто вдається дуже просто, завдяки тому, що наша пам'ять зберігає запас похідних від цілого ряду елементарних функцій. Так, наприклад, знаючи, що $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, ми одразу ж робимо висновок, що

$$\int \cos x\,dx = +\sin x, \quad \int \sin x\,dx = -\cos x. \tag{2}$$

Візьмемо трохи складніший випадок, на якому ознайомимося з одним дуже простим методом обчислення первісних. Нехай треба обчислити інтеграл

$$A = \int \cos(3x+7)\,dx. \tag{3}$$

Беручи до уваги (2), можна припустити, що

$$\int \cos(3x+7)\,dx = \sin(3x+7). \tag{4}$$

Перевіряємо це припущення, для чого беремо похідну від правої частини. Через те що

$$\frac{d\sin(3x+7)}{dx} = 3\cos(3x+7),$$

то ця похідна не дорівнює підінтегральній функції. Отже, припущення (4) неправильне. Ми маємо зайвий множник. Але тепер очевидно, що замість (4) ми повинні написати, що

$$\int \cos(3x+7)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x+7).$$

Справді, взявши похідну від правої частини, переконуємося, що вона дорівнює підінтегральній функції.

Ми обчислили інтеграл (3), припустивши спочатку рівність (4) і потім, після перевірки, виправивши первісне припущення.

Коли з зовнішнього вигляду підінтегрального виразу спочатку роблять припущення про форму, в якій може бути представлений шуканий інтеграл, потім перевіряють припущення диференціюванням і, на випадок потреби, виправивши його, знаходять правильний вираз інтеграла, то говорять, що

даний інтеграл обчислений методом безпосереднього інтегрування.

Як бачимо, цей метод, власне, є просто метод більш або менш вдалого здогаду. Як такий, він може вживатись тільки в дуже простих випадках. На практиці такі випадки бувають дуже часто.

Задача. Знайти методом безпосереднього інтегрування такі інтеграли:

$$1)\ \int x^2\,dx;\ 2)\ \int x^5\,dx;\ 3)\ \int e^{5x}\,dx;\ 4)\ \int \frac{dx}{x+2}.$$

Відповіді: 1) $\frac{x^3}{3}$; 2) $\frac{x^6}{6}$; 3) $\frac{1}{5}e^{5x}$; 4) $\ln|x+2|$.

§ 37. Визначення шляху точки за її прискоренням.

До обчислення інтегралів як первісних призводить безліч задач. Розглянемо деякі з них.

Нехай s — прямолінійний шлях, пройдений точкою; точніше, s — абсциса рухомої точки.

Всяка рухома точка в кожний момент має не тільки швидкість, але й прискорення, що дорівнює похідній від швидкості за часом. Тому, позначаючи швидкість і прискорення через v і a, маємо рівності:

$$v=\frac{ds}{dt},\ a=\frac{dv}{dt}.$$

Нехай дано задачу: обчислити залежність шляху s, що його проходить точка, від часу, якщо відоме прискорення точки в кожний момент. Нехай

$$a=\psi(t),$$

де $\psi(t)$ — дана відома функція. Переписавши цю рівність у такій формі:

$$\frac{dv}{dt}=\psi(t),$$

маємо

$$dv=\psi(t)\,dt,$$

а тому v — інтеграл від функції $\psi(t)$:

$$v=\int\psi(t)\,dt.$$

Припустимо, що ми обчислили цей інтеграл і знайшли, що

$$\int\psi(t)\,dt=\varphi(t).$$

Тоді маємо:

$$v=\frac{ds}{dt}=\varphi(t),$$

$$ds=\varphi(t)\,dt,$$

а тому s — інтеграл функції $\varphi(t)$:

$$s = \int \varphi(t)\,dt = \int \left\{ \int \psi(t)\,dt \right\} dt.$$

Ми бачимо, що коли прискорення дане як функція часу, то, щоб обчислити шлях s, ми повинні обчислити два інтеграли: спочатку інтеграл

$$\int \psi(t)\,dt,$$

а потім інтеграл від цього інтеграла.

§ 38. Диференціал площі трапеції.

Задача про квадратуру площі привела нас до поняття інтеграла як границі суми. Але та сама задача, розглядувана з трохи іншої точки зору, може так само природно привести до поняття інтеграла як первісної. Розглянемо її з цієї нової точки зору.

Нехай $y = f(x)$ — взагалі додатна функція, неперервна в якомусь інтервалі. Вона зобразиться кривою, що лежить усіма своїми точками вище осі X (рис. 68). Виберемо на кривій, хоч

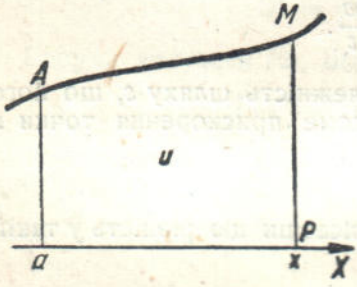

Рис. 68.

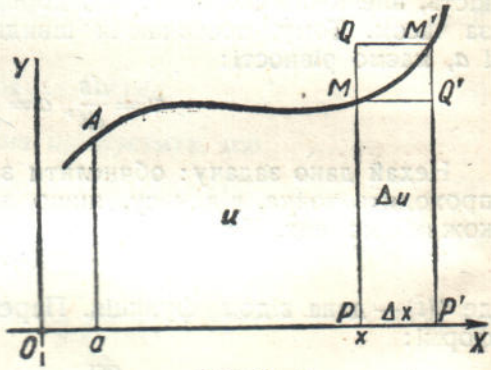

Рис. 69.

і довільно, але раз назавжди, нерухому точку A, абсцису якої позначимо через a. Її ординату aA назвемо початком відліку площ. Праворуч від A відмітимо змінну точку M з абсцисою x. Опустивши перпендикуляр MP на вісь X, одержимо криву трапецію $aAMP$, площу якої позначимо через u. Чому дорівнює ця площа u?

Очевидно, що u — функція x. Справді, якщо x збільшується, то ордината PM рухається вправо, а тому u теж збільшується. Навпаки, якщо u зменшується, то x теж зменшується і перетворюється в нуль при $x = a$. Коли ж ми надамо x якогонебудь певного значення, то ордината MP займе цілком певне положення, а тому u матиме цілком певне значення. Отже, кожному значенню x відповідає значення для u, а тому u — функція x. Якого виду ця функція — це інше питання.

Поставимо задачу: обчислити похідну від u як функції x.

На перший погляд може здатись дивною постановка такої задачі. Як можна обчислити похідну функції, не знаючи самої функції? Але виявляється, що наскільки в більшості випадків важко буває обчислити саму функцію u, настільки легко обчислити її похідну.

Припустимо спочатку, що ординати кривої зростають вправо від M, і надамо x довільного додатного приросту Δx, який нехай зобразиться відрізком PP' (рис. 69). Ордината MP при цьому займе нове положення $M'P'$, а площа u дістане приріст Δu, що дорівнює площі смужки $PMM'P'$.

Ми припустимо, що Δx взяте настільки малим, що функція $f(x)$ справа від точки M монотонно зростає.

Проведемо паралельно осі X прямі MQ' і $M'Q$. Одержимо два прямокутники: внутрішній $PMQ'P'$ і виступаючий $PQM'P'$. Площа першого дорівнює $y\Delta x$ і вона менша площі смужки Δu. Площа другого дорівнює $(y+\Delta y)\Delta x$ і вона більша від Δu. Одержуємо нерівності

$$y\Delta x < \Delta u < (y+\Delta y)\Delta x.$$

Поділяючи на додатне Δx, маємо:

$$y < \frac{\Delta u}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Переходимо тепер до границі, припускаючи, що Δx нескінченно маліє. Через те що нерівності при переході до границі або зберігаються, або перетворюються в рівності, то одержимо

$$y \leqq \frac{du}{dx} \leqq y,$$

і через те що крайні члени рівні, то

$$\frac{du}{dx} = y = f(x). \qquad (1)$$

Ми обчислили похідну від u, але обчислили в припущенні, що ординати вправо від M зростають. Припустимо тепер, що вони зменшуються (рис. 70). Легко бачити, що всі попередні міркування лишаються дійсними. Трохи зміняться тільки вирази внутрішнього і виступаючого прямокутників, завдяки чому ми матимемо нерівності

$$(y+\Delta y)\Delta x < \Delta u < y\Delta x,$$

звідки

$$y + \Delta y < \frac{\Delta u}{\Delta x} < y,$$

$$y \leqq \frac{du}{dx} \leqq y,$$

і остаточно попередню рівність (1). Дістаємо теорему:

Похідна від площі кривої трапеції по абсцисі дорівнює ординаті:

$$\frac{du}{dx} = y. \qquad (1)$$

Але з (1) випливає, що

$$du = ydx = f(x)\,dx, \qquad (2)$$

а тому доведену теорему можна формулювати і так:

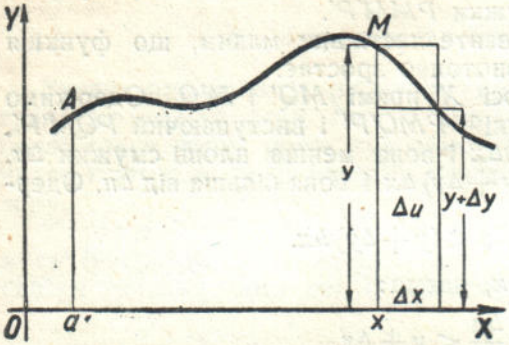

Рис. 70.

Диференціал площі трапеції дорівнює добуткові ординати на диференціал абсциси.

З (2) випливає, що u є інтеграл функції $f(x)$ і що для того, щоб обчислити площу, досить обчислити цей інтеграл. Таким чином, виявляється, що

задача про квадратуру площ, тобто задача про обчислення площ, завжди може бути зведена до задачі про обчислення первісних даних функцій.

Цей результат надзвичайно важливий. Він показує, що для сучасної математики задача про квадратуру площі як самостійна задача не існує. Вона поглинається ширшою задачею про обчислення інтегралів як первісних. Останню задачу ми повинні визнати ширшою тому, що до неї зводиться, крім задачі про квадратуру, безліч інших задач із галузі геометрії, фізики, механіки і взагалі з галузі всіх наук, що мають справу з поняттям неперервної зміни величин.

§ 39. Диференціал об'єму тіла обертання.

Нехай, як і раніше, $aAMP$ — крива трапеція, обмежена кривою $y = f(x)$ (рис. 71), і нехай x — абсциса точки M. Уявімо, що ця трапеція обертається навколо осі X; об'єм одержаного тіла позначимо через v. Зрозуміло, що v — функція x. Обчислимо її похідну. Для цього, зберігаючи попередні позначення, надаємо x додатного приросту Δx і будуємо внутрішній і виступаючий прямокутники. Нехай Δv — відпо-

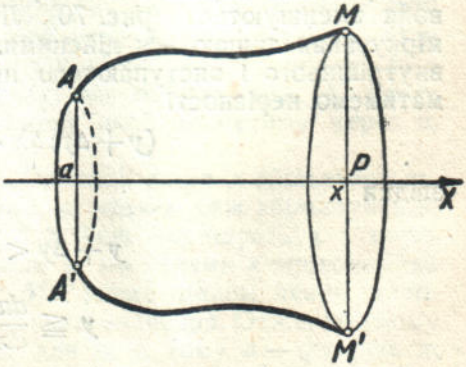

Рис. 71.

відний приріст об'єму v. Отже, Δv є об'єм, утворений обертанням смужки $PMM'P'$ навколо осі X (рис. 72).

Припускаючи спочатку, що ординати кривої вправо від M зростають, ми робимо висновок: при обертанні внутрішній прямокутник опише циліндр, об'єм якого дорівнює $\pi y^2 \Delta x$, при чому цей об'єм менший від того, який утвориться від обертання смужки Δu, тобто менший від Δv.

Виступаючий прямокутник опише циліндр, об'єм якого дорівнює $\pi (y + \Delta y)^2 \Delta x$ і який більший від Δv. Тому маємо нерівності

$$\pi y^2 \Delta x < \Delta v < \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x. \qquad (1)$$

Це в тому випадку, якщо ординати вправо від M зростають. Коли ж вони спадають, то неважко бачити, що (рис. 73) замість нерівностей (1) матимемо:

$$\pi y^2 \Delta x > \Delta v > \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x \qquad (2)$$

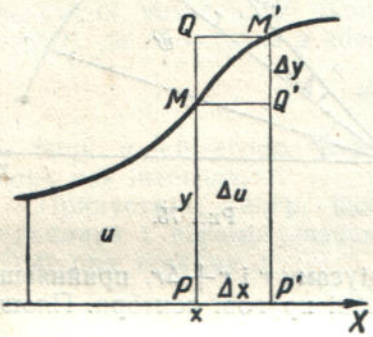

Рис. 72.

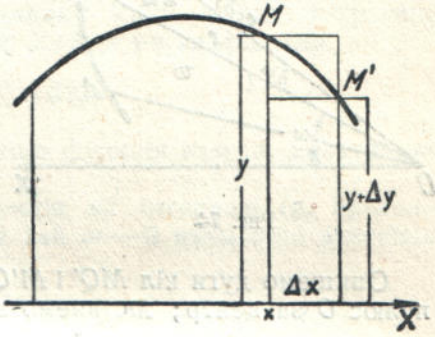

Рис. 73.

Поділяючи в тому і в другому випадку на додатне Δx, дістанемо:

$$\pi y^2 < \frac{\Delta v}{\Delta x} < \pi (y + \Delta y)^2, \text{ або } \pi y^2 > \frac{\Delta v}{\Delta x} > \pi (y + \Delta y)^2.$$

Нехай тепер Δx нескінченно маліє. Перехід до границі дає:

$$\pi y^2 \leqq \frac{dv}{dx} \leqq \pi y^2, \text{ або } \pi y^2 \geqq \frac{dv}{dx} \geqq \pi y^2.$$

Отже, в тому і другому випадку $dv = \pi y^2 dx$.

Теорема. **Якщо v — об'єм, утворений обертанням кривої трапеції навколо осі X, то**

$$dv = \pi y^2 dx.$$

Через те що $y = f(x)$, то

$$dv = \pi f(x)^2 dx,$$

а тому v — інтеграл функції $\pi f(x)^2$.

Знову ми бачимо, що задача про обчислення об'єму тіла обертання зводиться до задачі про обчислення інтеграла.

§ 40. Диференціал площі кривого сектора.

На кривій, рівняння якої в полярних координатах

$$r = f(\omega),$$

відмітимо дві точки: нерухому A і рухому $M(r, \omega)$ (рис. 74, 75). Площу кривого сектора AOM позначимо через w і обчислимо її похідну.

Надамо кутові ω додатного приросту $\Delta\omega$, завдяки чому радіус-вектор OM переміститься в OM' і, отже, w дістане приріст Δw, рівний площі кривого сектора $OM'M$.

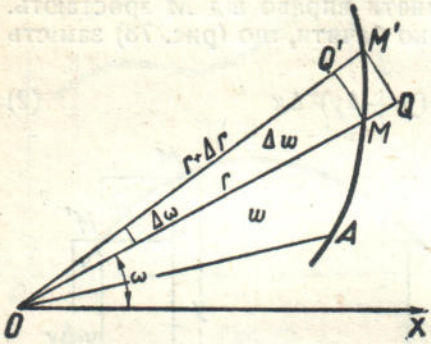

Рис. 74.

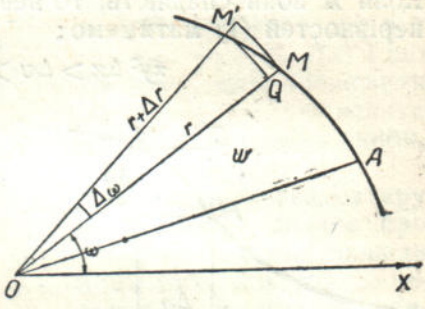

Рис. 75.

Опишемо дуги кіл MQ' і $M'Q$ радіусами r і $r+\Delta r$, прийнявши полюс O за центр; дістанемо звичайні кругові сектори. Площа сектора MOQ' дорівнює $\frac{1}{2}r^2\Delta\omega$, площа ж сектора $OM'Q$ дорівнює $\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\omega$. Очевидно, що

$$\frac{1}{2}r^2\Delta\omega < \Delta w < \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\omega, \text{ або } \frac{1}{2}r^2\Delta\omega > \Delta\omega > \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\omega,$$

звідки

$$\frac{1}{2}r^2 < \frac{\Delta w}{\Delta\omega} < \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2, \text{ або } \frac{1}{2}r^2 > \frac{\Delta w}{\Delta\omega} > \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2.$$

Перехід до границі дає

$$\frac{1}{2}r^2 \leqq \frac{dw}{d\omega} \leqq \frac{1}{2}r^2, \text{ або } \frac{1}{2}r^2 \geqq \frac{dw}{d\omega} \geqq \frac{1}{2}r^2,$$

тобто в тому і другому випадку $\frac{dw}{d\omega} = \frac{1}{2}r^2$, а тому

Теорема. **Якщо w — площа кривого сектора, то**

$$dw = \frac{1}{2}r^2\,d\omega.$$

Ця формула відома під назвою формули для площі в полярних координатах. Через те що $r = f(\omega)$, то

$$dw = \frac{1}{2} f(\omega)^2 d\omega.$$

Знову задача про обчислення площі w звелась до задачі про обчислення інтеграла від функції $\frac{1}{2} f(\omega)^2$.

§ 41. Існування інтеграла.

Як тільки введено поняття інтеграла, то, природно, постає питання, чи всяка функція має інтеграл. З геометричних уявлень легко дістати відповідь на це питання в тому випадку, коли функція зображується кривою, що лежить у розглядуваному інтервалі вище осі X, тобто коли функція не може приймати від'ємних значень. У цьому випадку існує площа u трапеції $aAMP$, де M — точка з абсцисою x. Але ми знаємо, що

$$du = f(x)\,dx,$$

а тому u — інтеграл. Отже, якщо функція взагалі додатна, то вона має інтеграл.

Припустимо тепер, що функція на інтервалі (a, b) може приймати і від'ємні значення, і хай m — її найменше значення. Тоді при всякому x

$$f(x) \geqq m,$$

а тому функція

$$f(x) - m$$

уже взагалі додатна. За доведеним вона має інтеграл. Якщо його позначимо через $\psi(x)$, то матимемо

$$\psi'(x) = f(x) - m.$$

Розглянемо тепер функцію

$$\omega(x) = \psi(x) + mx.$$

Якщо $\psi(x)$ існує, то існує і $\omega(x)$. Але зрозуміло, що

$$\omega'(x) = \psi'(x) + m,$$

тобто що

$$\omega'(x) = f(x).$$

Отже, $\omega(x)$ є інтеграл функції $f(x)$. Дістаємо теорему:
Всяка функція, неперервна на інтервалі, має інтеграл.

У зв'язку з цим доведемо таку теорему:

Всякий диференціальний вираз вигляду $\varphi(x)\,d\psi(x)$ завжди можна розглядати як диференціал якоїсь функції.

Справді,

$$\varphi(x)\,d\psi(x) = \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx.$$

Позначимо через $\omega(x)$ первісну функцію $\varphi(x)\,\psi'(x)$:

$$\omega'(x) = \varphi(x)\,\psi'(x).$$

Така первісна, як ми бачили, завжди існує. Маємо

$$\varphi(x)\,\psi'(x)\,dx = \omega'(x)\,dx = d\omega(x),$$

і даний вираз представився як диференціал якоїсь функції. Теорема доведена. В наслідок цієї теореми вирази типу

$$\varphi(x)\,d\psi(x)$$

часто називаються диференціалами.

§ 42. Про число інтегралів.

Ми довели, що всяка неперервна функція має інтеграл. Але тепер постає питання: чи має неперервна функція тільки один інтеграл, чи вона може їх мати кілька?

Нехай $\Phi(x)$ — інтеграл даної функції $f(x)$. Отже,

$$\Phi'(x) = f(x). \tag{1}$$

Припустимо, що крім цього інтеграла функція $f(x)$ має ще й інший якийнебудь інтеграл u. Тоді водночас з рівністю (1) матимемо також рівність

$$\frac{du}{dx} = f(x). \tag{2}$$

Отже, функції u і $\Phi(x)$ мають рівні похідні. Як такі вони можуть відрізнятися одна від однієї тільки на сталу величину, а тому

$$u = \Phi(x) + C, \tag{3}$$

де C — якесь стале. Отже, *якщо крім $\Phi(x)$ існує ще якийнебудь інший інтеграл, то він необхідно вигляду* (3).

З другого боку, зрозуміло, що яким би не було стале C, всяка функція вигляду (3) необхідно інтеграл, бо з (3) випливає (2).

Отже, якщо $\Phi(x)$ — інтеграл, то, додаючи до нього будьяке стале C, ми дістанемо функцію

$$\Phi(x) + C, \tag{4}$$

яка буде теж інтеграл.

Але, приписуючи у виразі (4) символові C різні сталі значення, ми одержуватимемо різні функції, наприклад, такі:

$$\Phi(x)+1,\quad \Phi(x)+2,\quad \Phi(x)+3,\ldots$$
$$\Phi(x)-1,\quad \Phi(x)+e^3,\quad \Phi(x)-\pi,\ldots$$

і кожна з них є інтеграл даної функції $f(x)$, бо похідна кожної з них дорівнює $f(x)$. Але таких функцій можна написати скільки завгодно. Отже, всяка функція має безліч інтегралів.

Так, наприклад, $\sin x$ є інтеграл від $\cos x$, бо

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x.$$

Але і кожна з функцій

$$\sin x+1,\quad \sin x+\sqrt{2},\quad \sin x-\pi,\ldots$$

і взагалі всяка функція вигляду

$$\sin x+a,$$

де a — стале, буде теж інтеграл від $\cos x$.

Те, що всяка функція має безліч інтегралів, цілком очевидно геометрично. Справді, ми знаємо, що площа u трапеції $aAMP$ є інтеграл (рис. 76). Але, щоб мати право говорити про площу u, треба спочатку вибрати початок відліку площі, тобто ординату aA. Коли ж ми замість цієї ординати візьмемо за початок відліку іншу якунебудь ординату $a'A'$ і позначимо через u_1 площу трапеції $a'A'MP$, то u_1 буде теж інтеграл функції $f(x)$.

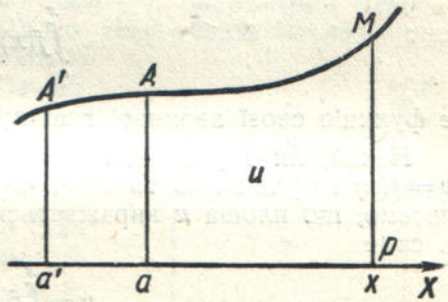

Рис. 76.

Всяку ординату можна взяти за початок відліку, тому очевидно, що всіх інтегралів є безліч.

Але, хоч їх і безліч, проте, вони пов'язані між собою дуже просто. Справді, якщо $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — два якихнебудь інтеграли функції $f(x)$, то

$$\varphi'(x)=f(x),\ \psi'(x)=f(x),$$

а тому

$$\varphi'(x)=\psi'(x)$$

і

$$\psi(x)=\varphi(x)+a, \tag{5}$$

де a — стале. Отже, будьяка пара інтегралів може відрізнятись одна від одної тільки на сталу величину, і з рівності (5) випли-

вае, що коли $\varphi(x)$ — якийнебудь інтеграл, то всякий інший інтеграл $\psi(x)$ можна одержати, додаючи до першого якесь стале.

Зводячи все викладене, ми можемо висловити таке основне положення:

Всяка функція має безліч інтегралів, але будьяка пара їх може відрізнятись одна від одної тільки на сталу величину. Тому всі інтеграли однієї і тієї ж функції можуть бути одержані, якщо додавати до одного з них різні сталі.

Факт, що всяка функція має безліч інтегралів як первісних, вносить деяке ускладнення в питання про їх позначення. На початку розділу було зазначено, що первісна функції $f(x)$ позначається так:

$$\int f(x)\,dx. \tag{6}$$

Але тепер, коли ми знаємо, що первісних є безліч, постає питання: яку ж саме первісну позначає вираз (6)? Це питання ми розглянемо в дальшому розділі.

§ 43. Інтеграл — границя суми як первісна.

Інтеграл як границя суми, якщо нижня границя його стала, а верхня дорівнює аргументові функції, тобто інтеграл типу

$$\int_a^x f(x)\,dx,$$

є функція своєї верхньої границі.

Нехай, як і раніше, u — площа трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$ і ординатою точки M з абсцисою x. З одного боку, ми знаємо, що площа u виражається інтегралом як границею суми, а саме

$$u=\int_a^x f(x)\,dx. \tag{1}$$

З другого боку, ми довели, що

$$du=f(x)\,dx. \tag{2}$$

Звідси випливає, що інтеграл (1) є первісна функції $f(x)$. Дістаємо теорему:

Інтеграл як границя суми

$$u=\int_a^x f(x)\,dx,$$

розглядуваний як функція своєї верхньої границі x, є первісна підінтегральної функції.

Замінюючи в (2) u його виразом з (1), робимо висновок:

Диференціал від інтеграла як функції верхньої границі дорівнює підінтегральному виразові:

$$d\int_a^x f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Отже, якщо

$$\psi(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

то

$$\psi'(x) = f(x).$$

Таким чином, функція $\psi(x)$ є водночас і інтеграл як границя суми, і інтеграл як первісна. Ми бачимо, що **поняття інтеграла як границі суми і інтеграла як первісної зливаються в одне поняття в тому випадку, коли інтеграл як границя суми розглядається як функція своєї верхньої границі при сталій нижній границі.**

§ 44. Диференціали площ, довжин і об'ємів.

Нехай трапеція $aAMx$, площа якої — u, обертається навколо осі X (рис. 77). Об'єм одержаного тіла обертання позначимо через v, площу поверхні обертання — через S, дугу AM — через s. Із зміною x усі ці величини теж змінюються. Кожна з них є якась функція x.

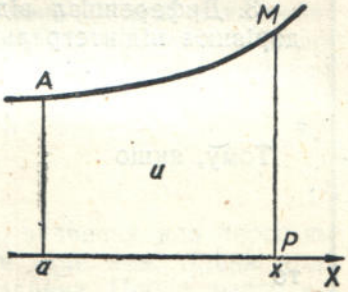

Рис. 77.

Через w позначимо площу кривого сектора AOM, де M — точка з полярними координатами (r, ω) (див. рис. 74). Із зміною ω змінюється і w. Зрозуміло, що w — функція ω.

Ми вивели диференціали площі і об'єму з геометричних міркувань (стор. 84, 85). Тепер ті самі диференціали, спираючись на попередню теорему, ми можемо вивести інакше, знаючи вирази відповідних величин через інтеграли як границі сум.

Ми маємо (стор. 76):

$$v = \int_a^x \pi y^2\,dx, \quad s = \int_a^x \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$S = \int_a^x 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx, \quad w = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{1}{2} r^2\,d\omega.$$

Користуючись теоремою, що

$$d\int_a^x f(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

робимо висновок:

Якщо площу u трапеції, об'єм v тіла обертання, площу S поверхні обертання, дугу s кривої розглядати як функції абсциси x точки даної кривої, а площу w кривого сектора як функцію полярного кута ω, то

$$du = y\,dx, \quad ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$dw = \frac{1}{2}r^2\,d\omega, \quad dv = \pi y^2\,dx,$$

$$dS = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi y\,ds.$$

Отже, кожна з цих величин є первісна від відповідної функції, що стоїть у правій частині множником при dx. Обчислення їх зводиться до обчислення інтегралів як первісних.

§ 45. Висновок.

1. Друга задача інтегрального числення може бути сформульована так: знайти функцію, знаючи її диференціал.

2. Всяка функція має безліч інтегралів, кожна пара яких відрізняється одна від одної тільки на якесь стале.

3. Диференціал від інтеграла як функції верхньої границі дорівнює підінтегральному виразові:

$$d\int_a^x f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Тому, якщо

$$u = \int_a^x f(x)\,dx,$$

то

$$du = f(x)\,dx.$$

4. Диференціали площі трапеції, дуги, об'єму і поверхні обертання, розглядуваних як функції абсциси точки на кривій, визначаються за формулами:

$$du = y\,dx, \qquad dv = \pi y^2\,dx,$$

$$dS = \sqrt{1+y'^2}\,dx, \qquad dS = 2\pi y\,ds.$$

5. Диференціал площі кривого сектора в полярних координатах визначається за формулою:

$$dw = \frac{1}{2}r^2\,d\omega.$$

ІНТЕГРАЛ ОЗНАЧЕНИЙ І НЕОЗНАЧЕНИЙ.

Поняття інтеграла як первісної далеко не таке просте, як воно здається на перший погляд. Ми змушені будемо розрізняти два роди інтегралів: означені інтеграли і неозначені.

§ 46. Функції цілком і не цілком означені.

Прикметники „означений" і „неозначений" вживаються в найрізноманітніших розуміннях. Тут ми розглянемо те, яке приписують їм у теорії інтегралів як первісних.

Назвемо неозначеним сталим усякий символ, який повинен позначати сталу величину, але значення для якого ще не дібране, ще не визначене.

В зв'язку з цим ми розрізнятимемо функції цілком означені і функції не цілком означені.

Точно кажучи, всяка функція, щоб мати право називатися функцією, повинна бути цілком означеною, тобто для кожного із значень, можливих для її аргумента, вона повинна мати певне значення. Але часто функцією називають те, що, власне, не повинно було б так називатись. Наприклад, $\sin x$ є функція, а також кожний з виразів

$$\sin x+1,\ \sin x+2,\ \sin x+3 \tag{1}$$

є функція, але вираз

$$\sin x+C, \tag{2}$$

де C — неозначене стале, тобто символ, значення для якого ще не дібране, по суті не є функція. Він стає нею тільки тоді, коли для C буде дібране якенебудь значення. Проте, часто вираз (2) теж називають функцією. І ось, щоб розрізняти, про вирази якого вигляду йде мова, ми скажемо про вирази вигляду (1), що кожний з них є цілком означена функція; про вираз же (2) будемо говорити, що він не є ще цілком означена функція, що він — функція, не цілком означена.

Для цілей практичного користування цими термінами можна дати таке просте правило:

Функція називається цілком означеною, якщо вона дається виразом, у якому немає неозначених сталих; коли ж у вираз, яким дається функція, входять неозначені сталі, то функція називається не цілком означеною.

У вираз (2) входить неозначене стале, тому цей вираз є не цілком означена функція.

§ 47. Інтеграл означений і неозначений.

Те, що раніше ми називали просто „первісною“, або „інтегралом“, тепер називатимемо „означеною первісною“, або „означеним інтегралом“, а саме:

Означеним інтегралом, або означеною первісною, називатимемо всяку цілком означену функцію, похідна якої дорівнює даній функції.

Отже, через те що

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

і тому що $\sin x$ — цілком означена функція, то $\sin x$ є означений інтеграл від $\cos x$. Так само ним буде і всяка з функцій

$$\sin x + 1, \quad \sin x + 2, \quad \sin x + 3, \ldots$$

і взагалі всяка функція

$$\sin x + a,$$

де a — означене стале. Але вираз

$$z = \sin x + C, \tag{1}$$

де C — символ ще неозначеного сталого, вже не буде цілком означеною функцією. Тому, хоч

$$\frac{dz}{dx} = \cos x,$$

тобто хоч вираз (1) і є інтеграл від $\cos x$, але його не можна назвати означеним інтегралом. Його називають неозначеним інтегралом.

Розглянемо загальний випадок. Нехай потрібно знайти функцію, відносно якої відомо тільки те, що вона задовольняє рівняння

$$du = f(x)\,dx, \tag{2}$$

і більше відносно неї нехай зовсім нічого не відомо.

Подивимося, щó в такому випадку можна говорити відносно цієї функції u.

Припустимо, що $\Phi(x)$ — одна з цілком означених первісних функцій $f(x)$. Отже,

$$\Phi'(x) = f(x),$$

а тому

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\Phi(x)}{dx},$$

і ми робимо висновок, що

$$u = \Phi(x) + C, \tag{3}$$

де C — якесь стале. Але чому саме дорівнює це C, ми нічого сказати не можемо; поки відносно u ми знаємо тільки те, що воно задовольняє рівняння (2). Не можемо ж нічого сказати саме тому, що з (3) завжди випливає (2), яким би не було стале C.

Таким чином, вираз (3) є інтеграл. Але, будучи ним, цей вираз не є цілком означена функція. Він стане нею тільки тоді, коли ми доберемо для C якенебудь цілком певне значення. Тому, поки значення для C не дібрано, поки C лишається неозначеним, то вираз (3) природно називати неозначеним інтегралом.

Цей вираз (3) складається з суми двох доданків. Один з них — неозначене стале, другий — функція $\Phi(x)$, похідна якої дорівнює даній функції $f(x)$. Ця функція $\Phi(x)$ називається функціональною частиною неозначеного інтеграла.

Все викладене дає таке

Основне означення. **Неозначеним інтегралом даної функції $f(x)$ називається всякий вираз виду**

$$\Phi(x)+C,$$

який утвориться, коли до якоїнебудь первісної $\Phi(x)$ даної функції $f(x)$ додати неозначене стале. Ця первісна $\Phi(x)$ називається функціональною частиною неозначеного інтеграла.

Позначається неозначений інтеграл так:

$$\int f(x)\,dx.$$

Отже, якщо

$$\Phi'(x)=f(x), \tag{4}$$

то за означенням

$$\int f(x)\,dx=\Phi(x)+C. \tag{5}$$

Спираючись на (4) і (5), можна дати таке

Практичне правило. **Щоб обчислити неозначений інтеграл, треба знайти якунебудь функцію, похідна якої дорівнювала б підінтегральній функції, і додати до неї неозначене стале.**

Нехай, наприклад, потрібно обчислити неозначений інтеграл

$$\int \cos x\,dx.$$

Пригадуючи, що $(\sin x)'=\cos x$, пишемо

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C.$$

Так само, пригадуючи, що

$$\frac{d\ln|x|}{dx}=\frac{1}{x},\quad \frac{d\operatorname{arc\,tg} x}{dx}=\frac{1}{1+x^2},$$

маємо

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C,$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x+C.$$

Під позначенням

$$\int f(x)\,dx \tag{6}$$

завжди розуміють неозначений інтеграл.

Якщо інтеграл обчислений, то завжди неважко перевірити, чи правильно він обчислений. Нехай, наприклад, дано рівність

$$\int \varphi(x)\,dx = \psi(x) + C$$

і треба перевірити, чи правильна вона. Для цього обчисляємо похідну від $\psi(x)$. Якщо виявиться, що $\psi'(x) = \varphi(x)$, то рівність правильна.

Перевіримо, наприклад, чи справедливе твердження, що

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{a+x^2}\right| + C. \tag{7}$$

Обчисляємо похідну від правої частини. Маємо

$$\frac{d\ln\left|x+\sqrt{a+x^2}\right|}{dx} = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{a+x^2}}}{x+\sqrt{a+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a+x^2}}.$$

У правій частині одержали підінтегральну функцію, отже, рівність (7) правильна.

Інтеграл (7) надзвичайно важливий. З ним весь час доводиться стикатись при найрізноманітніших дослідженнях як теоретичного, так і практичного характеру. Його треба запам'ятати.

Хоч треба різко відрізняти неозначений інтеграл від означеного, але коли зрозуміло, про який саме інтеграл іде мова, то звичайно прикметники пропускають і замість довгих виразів: „означений інтеграл", „неозначений інтеграл" говорять коротко: „інтеграл". Так далі часто робитимемо і ми.

§ 48. Різні вирази неозначеного інтеграла.

Ми сказали: неозначений інтеграл одержуємо, якщо додати до якогонебудь означеного інтеграла неозначене стале.

Але функція має безліч означених інтегралів, або первісних. Тому зрозуміло, що, беручи різні первісні і додаючи до них неозначені сталі, ми одержуватимемо різні вирази для неозначеного інтеграла. Так, наприклад, нехай дві особи обчисляють інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Насамперед вони повинні знайти функцію, похідна якої дорівнювала б підінтегральній функції. І ось один з них пригадав, що

$$\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

а другий зміркував, що

$$\frac{d(-\arccos x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Тому перший написав:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C,$$

а другий:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\arccos x+C,$$

і вони дістали два різні вирази для неозначеного інтеграла. Легко, проте, бачити, що ці вирази дуже просто пов'язані між собою і легко перетворюються один у другий. Справді, розглянемо загальний випадок.

Нехай ми будьяким шляхом для даної функції $f(x)$ знайшли дві первісні $\varphi(x)$ і $\psi(x)$. Отже,

$$\varphi'(x)=f(x),\ \psi'(x)=f(x),$$

а тому ми маємо право написати, що

$$\int f(x)\,dx=\varphi(x)+C \tag{1}$$

і що

$$\int f(x)\,dx=\psi(x)+C, \tag{2}$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — функціональні частини. Але через те що $\varphi'(x)=\psi'(x)$, то

$$\psi(x)=\varphi(x)+a,$$

де a — якесь *цілком означене* стале, бо $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — дві цілком означені функції. Отже,

якщо маємо два різні вирази для неозначеного інтеграла однієї і тієї ж функції, то функціональні частини їх можуть відрізнятись одна від одної тільки на якусь цілком означену сталу величину.

Завдяки ж цьому неважко перетворити їх один у другий.

Маємо

$$\int f(x)\,dx=\psi(x)+C=\varphi(x)+a+C. \tag{3}$$

Приймаємо

$$C'=a+C.$$

Через те що C довільне, C' теж є довільне стале; але тепер з (3) маємо:

$$\int f(x)\,dx=\varphi(x)+C',$$

і ми (2) перетворили в (1). Так, наприклад, ми тількищо одержали два різні вирази для інтеграла однієї і тієї ж функції: вираз

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

і вираз

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C.$$

Отже, різниця між функціональними частинами повинна дорівнювати сталій величині. І справді, ми знаємо, що

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

а тому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C = \arcsin x - \frac{\pi}{2} + C = \arcsin x + C'.$$

Таким же способом ми маємо

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

і в той же час

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arc\,ctg} x + C.$$

Це пов'язане з тим, що

$$\operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,ctg} x + \frac{\pi}{2}.\ ^*$$

§ 49. Геометричне значення неозначеного інтеграла.

Нехай u — площа трапеції, обмеженої зверху кривою $y = f(x)$, а зліва — ординатою aA, прийнятою за початок відліку площ (рис. 78). Ми знаємо, що

$$du = f(x)\,dx. \qquad (1)$$

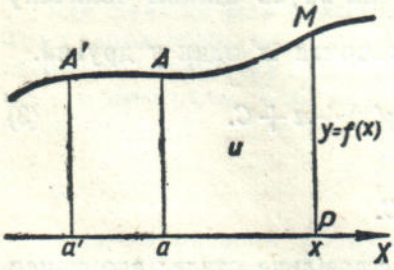

Рис. 78.

Тому на перший погляд може здаватися, що задача про обчислення площі рівносильна задачі про розв'язання рівняння (1). Проте, досить тільки фактично почати розв'язування цих двох задач, щоб одразу ж переконатися, що задача про квадратуру площі і задача про

* Рекомендується розв'язати хоч одну із задач: № 1, 2, 3.

обчислення інтеграла — це не дві тотожні задачі. Справді, з (1) випливає, що

$$u = \int f(x)\,dx,$$

і коли $\Phi'(x) = f(x)$, то

$$u = \Phi(x) + C, \tag{2}$$

де C лишається неозначеним сталим.

Рівняння (1) розв'язане і розв'язане остаточно. Але задача про обчислення площі далеко ще не розв'язана, бо площа трапеції є цілком означена величина, а вираз (2) має неозначене стале. Щоб обчислити площу, ми повинні ще знайти, яким треба дібрати C.

Але коли ми будемо користуватись тільки одним рівнянням (1), то ми не зможемо визначити C, бо u з (2) задовольняє рівняння (1), яке б не було C.

Зрозуміло тому, що площа u не тільки задовольняє рівняння (1), але й ще якусь додаткову умову.

Ця додаткова умова виявляється з тієї властивості функції u, що $u = 0$ при $x = a$. Тому в (2) приймаємо $x = a$. Маємо $0 = \Phi(a) + C$, звідки

$$C = -\Phi(a), \tag{3}$$

і C визначено. Тепер остаточно

$$u = \Phi(x) - \Phi(a), \tag{4}$$

і площа обчислена.

Але замість того, щоб площу трапеції обмежити зліва ординатою aA, ми могли б обмежити її другою ординатою $a'A'$ з абсцисою a'. Тоді під u ми повинні розуміти вже площу $a'A'MP$. Для цього u ми, як і раніше, матимемо (1) і (2). Але замість (4) вже матимемо

$$u = \Phi(x) - \Phi(a').$$

Зрозуміло тепер, що для того, щоб з рівності (3) мати можливість визначити C, ми повинні знати, яку ординату прийнято за початок відліку. Коли ж початок відліку площ ще не визначено, ще не дібрано, то і C лишається неозначеним. Тому на вираз

$$u = \Phi(x) + C$$

ми можемо дивитись як на вираз площі, початок відліку якої ще не визначений. Отже,

геометрично неозначений інтеграл можна розглядати як площу трапеції, для якої початок відліку не визначений.

В той же час

$$u = \int_a^x f(x)\,dx, \tag{5}$$

де в правій частині стоїть інтеграл як границя суми. Зрозуміло, що коли a цілком визначено, то і u визначено; коли ж a не

визначене, то і інтеграл (5) є неозначений інтеграл. Але коли нижня границя інтеграла ще не визначена, то її немає потреби й писати. Тоді дістанемо вираз

$$\int^{x} f(x)\,dx,$$

на який можна дивитись як на позначення неозначеного інтеграла. Пропускаючи і верхню границю, дістаємо загальноприйняте позначення неозначеного інтеграла.

§ 50. Інтегральні криві.

Якщо $\Phi(x)$ — одна з первісних даної функції $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C. \tag{1}$$

Надаючи символові C різних значень, ми одержуватимемо різні означені інтеграли. Так, наприклад, кожна з функцій

$$\Phi(x),\ \ \Phi(x)+1,\ \ \Phi(x)+2, \ldots \tag{2}$$

є означений інтеграл. Але всяка функція геометрично може бути зображена якоюсь кривою. Означений інтеграл є функція, а тому він теж може бути зображений відповідною кривою.

Всяка крива, яка зображає якийнебудь означений інтеграл даної функції, називається інтегральною кривою.

Отже, кожна з кривих

$$y = \Phi(x),\ \ y = \Phi(x)+1,\ \ y = \Phi(x)+2, \ldots \tag{3}$$

і взагалі крива

$$y = \Phi(x) + a, \tag{4}$$

де a — означене стале, є інтегральна крива.

Означених інтегралів є безліч, тому

інтегральних кривих є безліч; говорять, що вони в своїй сукупності утворюють сім'ю інтегральних кривих.

Усі ці інтегральні криві ми дістанемо, якщо в рівності

$$y = \Phi(x) + C \tag{5}$$

надаватимемо символові C різних сталих значень. Поки значення для C не дібрано, рівняння (5) не дає нам ніякої кривої. Але, надаючи C різних значень, ми одержуватимемо різні інтегральні криві, тому рівняння (5) ніби має в собі всі інтегральні криві. Тому говорять, що воно є рівняння сім'ї інтегральних кривих.

Переписавши (5) у такій формі:

$$y = \int f(x)\,dx, \tag{6}$$

ми бачимо, що

неозначений інтеграл геометрично зображається сім'єю інтегральних кривих.

Дослідимо детальніше властивості інтегральних кривих. Надаючи в (5) неозначеному C значення 0, дістанемо інтегральну криву

$$y = \Phi(x), \tag{7}$$

яка нехай буде крива AB на рисунку 79.

Надаючи C якогонебудь означеного сталого значення a, дістанемо нову інтегральну криву

$$y = \Phi(x) + a, \tag{8}$$

яка нехай буде крива GH.

Оскільки доводиться водночас розглядати дві криві, то для ясності позначимо ординату кривої AB, як і раніше, через y, а ординату кривої GH — через Y. Маємо

$$y = \Phi(x), \quad Y = \Phi(x) + a,$$

а тому

$$Y = y + a.$$

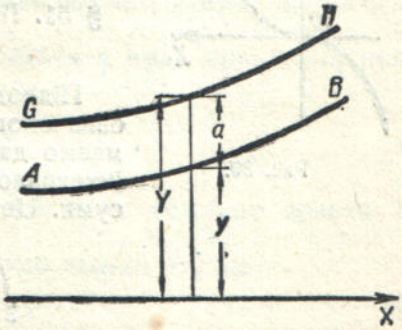

Рис. 79.

Отже, щоб одержати криву GH, досить пересунути криву AB як одне ціле так, щоб кожна точка її описала шлях однієї і тієї ж довжини a і паралельний осі Y. Таке переміщення кривої називається поступним уздовж осі Y або паралельним їй. Ми бачимо:

Різні інтегральні криві можна одержати з однієї інтегральної кривої, переміщаючи її в поступному напрямі паралельно осі Y.

Повернемося знову до рівняння:

$$y = \Phi(x) + C. \tag{9}$$

Поки C не визначено, це — рівняння сім'ї інтегральних кривих. Щоб одержати одну якунебудь інтегральну криву, треба дібрати для C якесь значення. Дуже часто добір цього значення визначають, вимагаючи, щоб інтегральна крива проходила через задану точку. Нехай, наприклад, потрібно з сім'ї (9) виділити криву так, щоб вона проходила через точку (x_1, y_1). Тоді в (9) для C треба дібрати таке значення, щоб була рівність

$$y_1 = \Phi(x_1) + C,$$

звідки

$$C = y_1 - \Phi(x_1).$$

Нехай, наприклад, із сім'ї кривих

$$y = \int 3x^2\,dx \tag{10}$$

потрібно знайти криву, що проходить через точку (2, 1). З (10) маємо

$$y = x^3 + C. \tag{11}$$

Приймаючи $C = 0$, знайдемо кубічну параболу $y = x^3$ (рис. 80). Зсовуючи її паралельно осі Y, одержимо всі криві з сім'ї.

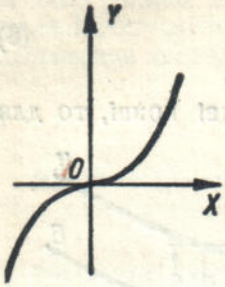

Рис. 80.

Приймаючи в (11) $x = 2$, $y = 1$, знайдемо $C = -7$, а тому $y = x^3 - 7$ — рівняння тієї кривої з сім'ї, яка проходить через точку (2, 1).

§ 51. Про терміни „означений інтеграл" і „неозначений інтеграл".

Підводячи підсумки, спинимось на понятті означеного і неозначеного інтеграла. Ми маємо два типи інтеграла. З одного боку, інтегралом називається границя інтегральної суми. Цей інтеграл позначається так:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

З другого боку, інтегралом називається всяка первісна, тобто всяка цілком означена функція, похідна якої дорівнює даній функції. Це — інтеграл як первісна.

Всіх первісних є безліч. Але кожна пара їх відрізняється одна від одної тільки на якесь стале. Тому, якщо ми кожну первісну зобразимо кривою, то дістанемо безліч інтегральних кривих, так звану сім'ю інтегральних кривих.

Нехай $\Phi(x)$ — одна з первісних. Тоді всі інші первісні ми дістанемо, якщо у виразі

$$\Phi(x) + C, \tag{1}$$

де C — символ неозначеного сталого, ми цьому символові C надаватимемо різних сталих значень. Самий вираз (1) є теж інтеграл, але він не є цілком означена функція. Він стає нею тільки тоді, коли символові C буде надано якогось значення. Таким чином, виявляється, що інтегралами як первісними можуть бути не тільки цілком означені функції, але й вирази, що містять неозначені сталі. Щоб розрізняти два роди цих інтегралів, ми всяку цілком означену функцію, похідна якої дорівнює даній функції, умовимось називати означеним інтегралом, і всякий вираз типу (1) — неозначеним інтегралом, який позначається так:

$$\int f(x)\,dx.$$

Щодо означених інтегралів, то для них само собою одержується позначення, якщо ми розглянемо такий інтеграл:

$$u = \int_a^x f(x)\,dx, \tag{2}$$

тобто інтеграл як границя суми, із сталою нижньою границею і змінною верхньою. Виявляється, що буде дуже цікавий факт: u є первісна функції $f(x)$:

$$\frac{du}{dx} = f(x), \tag{3}$$

при чому така первісна, що перетворюється в нуль при $x = a$. Тому

всяка первісна, що перетворюється в нуль при $x = a$, природно позначається так:

$$\int_a^x f(x)\,dx. \tag{4}$$

У зв'язку з цим відзначимо таке дуже важливе практичне правило:

Якщо про функцію u нам відомо тільки те, що

$$du = f(x)\,dx, \tag{5}$$

тоді ми повинні і маємо право написати, що

$$u = \int f(x)\,dx,$$

бо одним рівнянням (5) функція u не цілком визначається. Але, **коли про функцію відомо не тільки, що**

$$du = f(x)\,dx,$$

але, крім того, що $u = 0$ при $x = a$, тоді

$$u = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Отже, коли мова йде про інтеграли як первісні, то прикметники „означений", „неозначений" мають точний зміст. Але, на жаль, вираз „означений інтеграл" часто вживають в зовсім іншому розумінні. Історично склалося так, що

інтеграл як границя суми, якими б не були його границі, теж називається означеним інтегралом.

Таким чином, вираз „означений інтеграл" постійно вживається в двох розуміннях: його вживають і для позначення інтеграла як границі суми і для позначення інтеграла як цілком означеної первісної. Ці два поняття треба чітко розрізняти.

Наприклад,

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

є неозначений інтеграл, а

$$\int_a^x \cos x\,dx = \sin x - \sin a$$

є означений інтеграл, хоч, власне, якщо a не означене, то і цей інтеграл є неозначений.

Між іншим зауважимо, що

коли говорять про теорію означених інтегралів, то завжди розуміють інтеграли як границі сум; навпаки,— коли говорять про теорію неозначених інтегралів, то завжди розуміють під цим теорію інтегралів як первісних.

У цьому розділі було викладено цілий ряд тонких понять. Читачеві рекомендується уважно прочитати і твердо засвоїти викладене у висновку.

§ 52. Висновок.

1. Первісною, або означеним інтегралом даної функції називається всяка цілком означена функція, похідна якої дорівнює даній функції.

2. Неперервна функція має безліч означених інтегралів, або первісних, що відрізняються одна від одної тільки на сталі величини. Тому всі вони можуть бути одержані, якщо додавати до однієї з них різні сталі.

3. Інтеграл як функція своєї верхньої границі є первісна підінтегральної функції. Тому якщо

$$u = \int_a^x f(x)\,dx,$$

то

$$\frac{du}{dx} = f(x),$$

при чому $u = 0$ при $x = a$.

4. Неозначеним інтегралом даної функції $f(x)$, який позначається так:

$$\int f(x)\,dx,$$

називається вираз, який одержуємо, якщо до якогонебудь означеного інтеграла функції додати неозначене стале; тому, якщо $\Phi'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C,$$

де функція $\Phi(x)$ називається функціональною частиною неозначеного інтеграла.

5. Якщо для неозначеного інтеграла є два різні вирази, то функціональні частини їх можуть відрізнятись одна від одної тільки на цілком означену сталу величину. Тому, якщо

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C \quad \text{и} \quad \int f(x)\,dx = \psi(x) + C,$$

то $\varphi(x) - \psi(x) = a$, де a — цілком означене стале.

6. Всякий диференціальний вираз $\psi(x)\,d\varphi(x)$ є диференціал якоїсь функції.

7. Якщо про функцію u відомо тільки те, що

$$du = f(x)\,dx,$$

то

$$u = \int f(x)\,dx.$$

Коли ж, крім того, відомо, що $u = 0$ при $x = a$, то

$$u = \int_a^x f(x)\,dx.$$

ЗАДАЧА ТЕОРІЇ НЕОЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ. ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ.

Встановивши поняття про інтеграл, перейдемо до детального з'ясування задачі теорії неозначених інтегралів. Вона стає зрозумілою, якщо ми обчислимо інтеграл від однієї з простіших функцій — від степінної.

§ 53. Інтеграл від функції $x^m dx$.

Щоб обчислити цей інтеграл, міркуватимемо так.

Ми знаємо, що при диференціюванні степінної функції показник знижується на одиницю:

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1}.$$

Інтегрування є дія, обернена диференціюванню, тому природно припустити, що при інтегруванні степінної функції показник на одиницю підвищується. Тому припустимо, що

$$\int x^m\,dx = x^{m+1} + C, \tag{1}$$

і перевіримо, чи правильне це припущення. Для цього шукаємо похідну правої частини. Маємо

$$\frac{dx^{m+1}}{dx} = (m+1)\,x^m. \tag{2}$$

Ми не одержали підінтегральної функції, бо в правій частині маємо зайвий множник $m+1$. Але, поділяючи на нього рівність (2), одержуємо

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right) = x^m,$$

і тепер в правій частині маємо саме підінтегральну функцію, а тому

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \tag{3}$$

і інтеграл від степінної функції обчислений.

Але зауважимо, що наші міркування справедливі не при всякому m. Нуль не може стояти в знаменнику, а тому рівність (3) має зміст тільки при умові, що $m \neq -1$. Запитуємо, чому ж дорівнює інтеграл від степінної функції при $m = -1$, тобто інтеграл

$$\int \frac{dx}{x}.$$

Пригадуючи, що

$$\frac{d \ln |x|}{dx} = \frac{1}{x},$$

робимо висновок, що

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

Отже, інтеграл від степінної функції виражається з допомогою формул:

$$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1, \tag{4}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C. \tag{5}$$

Зауважимо, що в правій частині (5) треба писати $|x|$, а не просто x, бо x може бути і від'ємним.

За тією ж формулою (4) можна обчисляти інтеграли і від кореня незалежного змінного. Для цього досить, як і при обчисленні похідних, заміняти корені дробовими показниками. Наприклад,

$$\int x\sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

Задачі. Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{x^3}$, 2) $\int \sqrt[3]{x} dx$, 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Відповіді:

1) $-\frac{1}{2x^2} + C$, 2) $\frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C$, 3) $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C$, 4) $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

§ 54. Інтегровані функції.

Як відомо, елементарними функціями називаються такі функції:

1) Степінні, показникові і логарифмічні:

$$x^m, \ a^x, \ e^x, \ \ln |x|;$$

2) тригонометричні:

$$\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x;$$

3) кругові

$$\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arc\,tg} x,\ \operatorname{arc\,ctg} x,$$

— усіх дванадцять елементарних функцій.

З допомогою цих функцій і різних комбінацій з них математика намагається виразити закони залежностей між тими змінними величинами, з якими вона зустрічається при своїх дослідженнях.

Зауваживши це, розглянемо уважно рівність:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Ми бачимо: *для того, щоб виразити інтеграл від такої надзвичайно простої функції, як функція* $\frac{1}{x}$, *треба мати поняття не тільки про логарифмічну функцію, але й про число e.* Тому, якби ми вже раніше не мали поняття про цю функцію, то ми не могли б обчислити інтеграла від $\frac{1}{x}$.

Правда, тепер логарифми вивчаються вже в елементарній алгебрі, але вивчаються вони в ній тільки через їх велике значення для обчислювальної техніки. Але без усякої логічної шкоди можна було б, не вивчаючи їх, почати вивчення Аналізу. Цілком можливий, наприклад, такий план: вивчивши основні дії над числами: додавання, віднімання, множення і ділення, не вивчаючи навіть дії добування кореня, ми потім просто могли б ввести поняття про змінну величину і функцію, встановити поняття про границю і потім ввести поняття похідної і інтеграла. І ось при такому ході викладу ми не могли б обчислити інтеграла

$$\int \frac{dx}{x}.$$

Якщо ми тепер пригадаємо, що

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C,$$

то знову виявляється, що для того, щоб мати можливість обчислити інтеграли від таких простих алгебричних функцій, як функції

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ і } \frac{1}{1+x^2},$$

треба спочатку ввести поняття про такі порівняно складні трансцендентні функції, як функції

$$\arcsin x \text{ і } \operatorname{arc\,tg} x.$$

І ось природно постає питання: якщо для вираження таких простих інтегралів, як інтеграли

$$\int \frac{dx}{x}, \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \int \frac{dx}{1+x^2},$$

потрібні порівняно складні логарифмічні і кругові функції, то чи не потрібні будуть для вираження інтегралів від інших, навіть не особливо складних функцій, інші незнайомі нам функції. Інакше кажучи, постає питання: чи від усякої функції може бути виражений інтеграл через комбінації елементарних функцій?

При сучасному стані науки на це може бути дана цілком ясна відповідь.

Інтеграл не від усякої функції, навіть порівняно простої структури, може бути виражений через елементарні функції і їх комбінації в скінченному числі.

Так, наприклад, через елементарні функції і їх комбінації в скінченному числі не можуть бути виражені такі інтеграли:

$$\int e^{x^2} dx, \int \sin(x^2)\, dx, \int \cos(x^2)\, dx,$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx.$$

Тому всі функції поділяються на два великих класи: на інтегровані і неінтегровані.

Інтегрованими функціями називаються всі функції, інтеграли яких можуть бути виражені через елементарні функції і їх комбінації в скінченному числі.

Всі інші функції називаються неінтегрованими.

Зауважимо, що поняття про інтегровані функції, як його тут визначено, вживається тільки в теорії неозначених інтегралів. В інших відділах математики це поняття вживається в іншому розумінні.

Звернемо також увагу на те, що вираз „неінтегрована функція" треба розуміти не так, що вона не має інтеграла, а лише так, що цей інтеграл не може бути представлений через комбінацію елементарних функцій у скінченному числі. Це не виключає можливості, що інтеграл неінтегрованої функції може бути виражений або через комбінації тих же елементарних функцій, але в нескінченному їх числі, наприклад, через ряди, або через нові функції, які можуть бути введені саме для цього.

§ 55. Задача теорії неозначених інтегралів.

Якщо ми тепер візьмемо до уваги, що інтеграл не від усякої функції може бути виражений через комбінації в скінченному числі елементарних функцій, то стає зрозумілою така осо-

бливість інтегрального числення порівняно з диференціальним: у диференціальному численні ми маємо ряд теорем і правил, що дають можливість обчислити похідну від усякої даної функції. В інтегральному численні немає таких теорем і правил, прикладаючи які ми могли б обчислити інтеграл від будьякої функції. І їх немає не тому, що інтегральне числення менш розвинуте, менш досконале, ніж диференціальне. Їх немає, бо їх і не може бути. Не можна дати правила для обчислення того, що не може бути обчислене. Тому задача інтегрального числення — *обчислити інтеграл даної функції* — заміняється іншою: *дослідити, інтеграли яких функцій можуть бути обчислені*, і тільки для цих інтегрованих функцій дати правило обчислення їх інтегралів.

Той відділ інтегрального числення, який займається розв'язанням цієї задачі, має назву *„теорії неозначених інтегралів"*. Вона входить як складова частина в інтегральне числення.

Але дослідити всі інтегровані функції немає ніякої можливості, бо їх безліч. Тому теорія неозначених інтегралів природно обмежується тим, що або шукає більш-менш великі класи інтегрованих функцій, або розглядає найтиповіші інтеграли, тобто такі інтеграли, які цікаві або своїми теоретичними властивостями, або тим, що вони часто зустрічаються в різних прикладаннях Аналізу до геометрії, механіки і фізики.

§ 56. Основні інтеграли.

Якщо ми ставимо собі завдання: дослідити, інтеграли яких функцій можуть бути виражені через елементарні функції і їх комбінації в скінченному числі, то природно почати наші дослідження з того, щоб розглянути ті інтеграли, які виражаються тільки через одну елементарну функцію.

Інтеграли, що виражаються тільки через одну елементарну функцію, називаються основними інтегралами.

Таких основних інтегралів небагато, і їх неважко знайти. Справді, нехай інтеграл

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C$$

основний, тобто виражається через одну елементарну функцію. Отже, $\Phi(x)$ — елементарна функція, і через те що $f(x) = \Phi'(x)$, ми бачимо, що всякий основний інтеграл є інтеграл від похідної елементарної функції. Тому, щоб дістати всі основні інтеграли, ми повинні розглянути похідні від усіх елементарних функцій. Проробимо це.

Похідні від степінної і логарифмічної функцій:

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{1}{x}$$

дають нам такі вже обчислені нами два основні інтеграли:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Показникові функції, для яких

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a, \ \frac{de^x}{dx} = e^x,$$

дають основні інтеграли

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Через те що

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d\,\mathrm{ctg}\,x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

то маємо основні інтеграли:

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C.$$

Нарешті, через те що

$$\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d\arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

маємо два вирази для одного і того ж інтеграла:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

або

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C.$$

Далі звичайно ми будемо користуватись першим виразом. Останній основний інтеграл ми дістанемо із співвідношень:

$$\frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{d\,\mathrm{arc\,ctg}\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2},$$

звідки

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C,$$

або

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arc\,ctg} x + C.$$

З цими основними інтегралами треба добре освоїтись, бо, як побачимо, до них зводиться обчислення багатьох інших інтегралів.

До числа основних інтегралів відносять також і інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \ln|x+\sqrt{a+x^2}| + C,$$

справедливість якого ми перевірили (стор. 96). Він не виражається через одну елементарну функцію, а через комбінацію їх. Тому по суті він не є основний. Але він так часто зустрічається в прикладаннях, що його відносять до основних. Читач повинен його запам'ятати. Нарешті, відзначимо два інтеграли:

$$\int dx = x + C, \quad \int 0 \cdot dx = C,$$

справедливість яких очевидна.

До цього часу ми припускали, що основний інтеграл виражається через елементарну функцію незалежного змінного. Ми брали похідну від елементарної функції і від неї переходили до основного інтеграла. Наприклад, з того, що

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x,$$

ми робили висновок:

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$$

Але дуже вигідно побудувати таблицю основних інтегралів, розглядаючи елементарні функції не від незалежного змінного, а теж від функції, і беручи від них не похідні, а диференціали. Ми знаємо, що диференціал має ту надзвичайну властивість, що рівність

$$df(u) = f'(u)\, du \tag{1}$$

справедлива не тільки при u незалежному, але й тоді, коли u, своїм порядком, є функція незалежного змінного. Але з (1) випливає, що

$$\int f'(u)\, du = f(u) + C. \tag{2}$$

І ось, вважаючи u функцією x і заміняючи $f(u)$ в (2) послідовно через елементарні функції u^m, e^u, $\ln|u|$, ми дістанемо інтеграли:

$$\int u^m\, du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, \quad \int e^u\, du = e^u + C, \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

Замінюючи ж у (2) $f(u)$ через тригонометричні і колові функції, одержимо інші основні інтеграли в трохи узагальненій формі, зручнішій для прикладань. Таблиця їх наведена нижче у висновку.

§ 57. Висновок.

1. Інтегрованою функцією називається всяка функція, інтеграл якої може бути виражений через комбінації в скінченному числі елементарних функцій.

2. Основними інтегралами називаються всі ті інтеграли, які виражаються через одну елементарну функцію.

3. Таблиця основних інтегралів, де x — незалежне змінне і u — його функція, може бути представлена в двох таких формах:

1) $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$ $\quad m \neq -1;$

1') $\int u^m\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C,$ $\quad m \neq -1;$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

2') $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3) $\int e^x\,dx = e^x + C;$

3') $\int e^u\,du = e^u + C;$

4) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

4') $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

5') $\int \sin u\,du = -\cos u + C;$

6) $\int \cos x\,dx = +\sin x + C;$

6') $\int \cos u\,du = +\sin u + C;$

7) $\int \operatorname{tg} x\,dx = +\frac{1}{\cos^2 x} + C;$

7') $\int \operatorname{tg} u\,du = +\frac{1}{\cos^2 u} + C;$

8) $\int \operatorname{ctg} x\,dx = -\frac{1}{\sin^2 x} + C;$

8') $\int \operatorname{ctg} u\,du = -\frac{1}{\sin^2 u} + C;$

9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C';$

9') $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + C = -\operatorname{arc\,ctg} u + C';$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C';$

10') $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = -\arccos u + C';$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \ln|x + \sqrt{a+x^2}| + C.$

11') $\int \frac{du}{\sqrt{a+u^2}} = \ln|u + \sqrt{a+u^2}| + C.$

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ В ТЕОРІЇ НЕОЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ.

З'ясувавши задачу теорії неозначених інтегралів, перейдемо до доведення її основних теорем.

У диференціальному численні ми маємо такі теореми:

1) теорему про винесення сталого множника за знак диференціала:

$$d(Au) = Adu;$$

2) теорему про диференціал алгебричної суми:

$$d(u \pm v) = du \pm dv;$$

3) теорему про диференціал функції від функції: якщо

$$y = f(x), \text{ то } dy = f'(x)\,dx$$

при всякому доборі незалежного змінного;

4) теорему про диференціал добутку:

$$duv = udv + vdu.$$

Основними теоремами в теорії неозначених інтегралів є теореми, відповідні цим чотирьом теоремам диференціального числення.

§ 58. Основна властивість інтеграла.

Якщо u — функція, відносно якої відомо тільки те, що вона задовольняє рівняння

$$du = f(x)\,dx, \tag{1}$$

то u є неозначений інтеграл, який позначається так:

$$u = \int f(x)\,dx. \tag{2}$$

Навпаки, якщо дано (2), то це означає, що u задовольняє (1). Отже, рівності (1) і (2) нерозривно пов'язані між собою. В них виражається

Основна властивість інтеграла. Якщо

$$du = f(x)\,dx, \tag{1}$$

то

$$u = \int f(x)\,dx, \qquad (2)$$

і навпаки: якщо

$$u = \int f(x)\,dx,$$

то

$$du = f(x)\,dx.$$

Точно кажучи, рівності (1) і (2) виражають одну **й ту ж** математичну ідею, яка має тільки різні символічні форми.

Замінюючи в (1) u його виразом з (2), одержуємо теорему:

Диференціал від інтеграла дорівнює підінтегральному виразові:

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Образно цю теорему можна формулювати так:

Диференціал знищує знак інтеграла.

Подивимось тепер, що ми одержимо, якщо візьмемо інтеграл від диференціала функції.

З одного боку,

$$\int df(x) = \int f'(x)\,dx;$$

з другого боку, зрозуміло, що

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C,$$

бо очевидно, що похідна від $f(x)$ дорівнює підінтегральній функції. Отже,

$$\int df(x) = f(x) + C,$$

звідки

Теорема. **Інтеграл від диференціала функції дорівнює сумі функції і неозначеного сталого.**

Образно цю теорему можна формулювати так:

Інтеграл, знищуючи знак диференціала, додає до функції довільне стале.

В окремому випадку маємо

$$\int dx = x + C.$$

§ 59. Теорема про винесення сталого множника.

В диференціальному численні ми маємо теорему про винесення сталого множника за знак диференціала. В інтегральному численні ми маємо теорему:

Сталий множник можна як вносити, так і виносити спід знака інтеграла. Отже,

$$\int A f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx, \qquad (1)$$

де A — стале.

Справді, нехай

$$u = A\int f(x)\,dx. \tag{2}$$

Маємо

$$du = Ad\int f(x)\,dx.$$

Через те що знак диференціала знищує знак інтеграла, то

$$du = A\,f(x)\,dx,$$

а тому за основною властивістю інтеграла

$$u = \int Af(x)\,dx. \tag{3}$$

Порівнюючи (2) і (3), одержуємо (1). Наприклад,

$$\int 5\cos x\,dx = 5\int \cos x\,dx = 5\sin x + C.$$

§ 60. Інтеграл суми функцій.

У диференціальному численні ми маємо теорему: диференціал суми дорівнює сумі диференціалів доданків. В інтегральному численні маємо теорему.

Інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів доданків:

$$\int\{\pm\varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots \pm \omega(x)\}\,dx =$$

$$= \pm\int\varphi(x)\,dx \pm \int\psi(x)\,dx \pm \ldots \pm \int\omega(x)\,dx. \tag{1}$$

Доведення. Нехай

$$u = \pm\int\varphi(x)\,dx \pm \int\psi(x)\,dx \pm \ldots \pm \int\omega(x)\,dx. \tag{2}$$

Маємо

$$du = \pm\,d\int\varphi(x)\,dx \pm d\int\psi(x)\,dx \pm \ldots \pm d\int\omega(x)\,dx,$$

і оскільки знак диференціала знищує знак інтеграла, то

$$du = \{\pm\varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots \pm \omega(x)\}\,dx,$$

звідки

$$u = \int\{\pm\varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots \pm \omega(x)\}\,dx. \tag{3}$$

Порівнюючи (3) і (2), одержуємо теорему.

Ця теорема дає, наприклад, можливість знайти інтеграл від усякого многочлена. Маємо

$$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)\,dx =$$
$$= \int a_0x^n\,dx + \int a_1x^{n-1}\,dx + \ldots + \int a_{n-1}x\,dx + \int a_n dx =$$
$$= a_0\int x^n\,dx + a_1\int x^{n-1}dx + \ldots + a_{n-1}\int x\,dx + a^n\int dx,$$

і в правій частині маємо інтеграли від степінних функцій. Обчислюючи їх, знаходимо

$$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)\,dx =$$
$$= \frac{a_0x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1x^n}{n} + \frac{a_2x^{n-1}}{n-1} + \ldots + \frac{a_{n-1}x^2}{2} + a_nx + C.$$

Бачимо, що інтеграл від многочлена є теж многочлен, але степеня, на одиницю вищого.

Відносно цієї теореми треба звернути увагу на таку обставину. В правій частині рівності (1) ми маємо n інтегралів, а в лівій — тільки один. Але кожний неозначений інтеграл має в своєму виразі довільне стале. Тому в лівій частині ми маємо тільки одне довільне стале, а в правій частині їх n. Яким же чином n довільних сталих можуть бути замінені одним?

Припустимо, що ми обчислили всі інтеграли правої частини. Нехай

$$\int \varphi(x)\,dx = \Phi(x) + C_1,$$
$$\int \psi(x)\,dx = F(x) + C_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\int \omega(x)\,dx = G(x) + C_n.$$

Додаючи їх, дістаємо:

$$\int \{\pm\varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots \pm \omega(x)\}\,dx =$$
$$= \pm\Phi(x) \pm F(x) \pm \ldots \pm G(x) \pm C_1 \pm C_2 \pm \ldots \pm C_n,$$

або

$$\int \{\pm\varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots \pm \omega(x)\}\,dx =$$
$$= \pm\Phi(x) \pm F(x) \pm \ldots \pm G(x) + C,$$

де

$$C = \pm C_1 \pm C_2 \pm \ldots \pm C_n.$$

Оскільки кожне із сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ може бути взяте довільно, то і сума їх є довільне неозначене стале. Зважаючи на це, при обчисленні інтеграла суми обчисляють тільки функціо-

нальні частини інтегралів від доданків і потім до суми їх додають одне неозначене стале. Наприклад, детально маємо:

$$\int(\cos x+\sin x)\,dx=\int\cos x\,dx+\int\sin x\,dx=\sin x+C_1-\cos x+C_2$$

і остаточно

$$\int(\cos x+\sin x)\,dx=\sin x-\cos x+C.$$

Розглянемо ще приклад. Нехай треба обчислити інтеграл:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}.$$

Підінтегральну функцію не дано як суму. Але її неважко уявити у вигляді суми. Звільняючи знаменник від радикалів, маємо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\int\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{a}\,dx=\frac{1}{a}\int\sqrt{x+a}\,dx-\frac{1}{a}\int\sqrt{x}\,dx,$$

і через те що

$$\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1,$$

$$\int\sqrt{x+a}\,dx=\int(x+a)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}+C_2,$$

то остаточно

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\frac{2}{3}\{(x+a)\sqrt{x+a}-x\sqrt{x}\}+C.$$

У цьому прикладі підінтегральну функцію не дано первісно як суму. Щоб знайти інтеграл, ми її розклали на суму простіших функцій.

Коли підінтегральну функцію не дано як суму функцій, але для обчислення інтеграла її розкладають на суму функцій, то говорять, що застосовують метод розкладу.

Іноді цього розкладу досягають легко, але часто він потребує попередніх теоретичних досліджень.

§ 61. Теорема про підставляння.

Теорема про те, що

$$df(x)=f'(x)\,dx,$$

як при x незалежному змінному, так і при x — функції, дає третю теорему інтегрального числення.

Умовимось те змінне, яке в підінтегральному виразі є незалежним, називати змінним інтеграції.

Теорема про підставляння або заміну змінного інтеграції. **Змінне інтеграції можна завжди замінити будьякою неперервною функцією нового незалежного змінного при умові неперервності як її самої, так і її похідної.**

Отже, якщо $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні і якщо $x=\varphi(t)$, то

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

Нехай

$$u=\int f(x)\,dx. \tag{2}$$

Отже, u така функція x, що

$$du=f(x)\,dx. \tag{3}$$

Приймемо, що $x=\varphi(t)$. Тоді u можна розглядати як функцію t, при чому для u як функції t рівність (3) лишається дійсною і може бути представлена у формі:

$$du=f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

звідки

$$u=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{4}$$

Порівнюючи (2) і (4), одержуємо (1). Теорема доведена.

Ця теорема — одна з важливіших. Сила її полягає в тому, що дуже часто ми не можемо обчислити інтеграл

$$\int f(x)\,dx$$

як функцію x. Але приймаючи $x=\varphi(t)$ і вдало добираючи функцію $\varphi(t)$, ми можемо одержати інтеграл

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

який можемо обчислити як функцію t. Нехай, наприклад, треба обчислити інтеграл

$$\int\frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx. \tag{5}$$

Приймаючи $x=t^3$, послідовно маємо:

$$\int\frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\int\frac{(\cos t)\,3t^2\,dt}{t^2}=3\int\cos t\,dt=3\sin t+C,$$

і ми обчислимо інтеграл (5) як функцію t. Заміняючи t через $\sqrt[3]{x}$, остаточно знайдемо:

$$\int\frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=3\sin\sqrt[3]{x}+C.$$

Коли при обчисленні інтеграла користуються теоремою про підставляння, то говорять, що застосовують метод підставляння.

Теорема про підставляння яскраво показує, наскільки небезпечно пропустити в підінтегральному виразі множник dx. Справді, припустимо, що замість

$$\int f(x)\,dx$$

ми випадково написали

$$\int f(x). \tag{6}$$

Тоді, роблячи підставляння $x=\varphi(t)$, ми одержимо інтеграл

$$\int f[\varphi(t)] \tag{7}$$

замість того, щоб одержати інтеграл

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Завдяки тому, що в (6) ми пропустили множник dx, ми в (7) втратили множник $\varphi'(t)$.

Метод підставляння один з найсильніших методів. Між іншим, цим методом був обчислений Ейлером такий інтеграл, що часто зустрічається:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}. \tag{8}$$

Щоб знайти бажане підставляння, Ейлер узяв рівняння

$$\sqrt{a+x^2}=t-x. \tag{9}$$

Підносячи його спочатку до квадрата, знайдемо

$$a+x^2=t^2-2tx+x^2,$$

звідки

$$x=\frac{t^2-a}{2t}. \tag{10}$$

Це і є шукане підставляння. Заміняючи в (9) x із (10), знайдемо:

$$\sqrt{a+x^2}=\frac{t^2+a}{2t}.$$

Диференціюючи (10), маємо:

$$dx=\frac{t^2+a}{2t^2}\,dt,$$

а тому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C,$$

і оскільки з (9)

$$t = x + \sqrt{a+x^2},$$

то остаточно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \ln|x + \sqrt{a+x^2}| + C. \qquad (11)$$

Цей інтеграл треба запам'ятати.

§ 62. Теорема про інтегрування частинами.

Нехай u і v — дві функції x. Маємо

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Отже, uv — інтеграл правої частини, а тому

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du,$$

звідки

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Це і є так звана

Теорема про інтегрування частинами. **Якщо u і v — функції, то**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (1)$$

У правій частині рівності (1) добуток uv називається проінтегрованою частиною.

Нехай, наприклад, треба обчислити інтеграл

$$\int \ln x\,dx.$$

Приймаємо $u = \ln x$, $v = x$. Маємо

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C,$$

і інтеграл обчислений.

§ 63. Висновок.

1. Основна властивість інтеграла. Якщо

$$du = f(x)\,dx,$$

то

$$u = \int f(x)\,dx,$$

і навпаки: якщо

$$u = \int f(x)\,dx,$$

то

$$du = f(x)\,dx.$$

Звідси випливає, що

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx, \quad \int df(x) = f(x) + C.$$

2. Основні теореми:

Теорема про винесення сталого множника спід знака інтеграла:

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx.$$

Теорема про інтеграл суми:

$$\int \{\pm\varphi(x) \pm \ldots \pm \psi(x)\}\,dx = \pm\int \varphi(x)\,dx \pm \ldots \pm \int \psi(x)\,dx.$$

Теорема про підставляння:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \quad x = \varphi(t).$$

Теорема про інтегрування частинами:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

3. Методом підставляння обчисляється

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \ln|x + \sqrt{a+x^2}| + C.$$

ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ І ПРИКЛАДАННЯ ЇХ ДО ДЕЯКИХ ІНТЕГРАЛІВ.

В теорії неозначених інтегралів ми маємо цілий ряд методів. З них до основних звичайно відносять шість таких: 1) метод безпосереднього інтегрування, 2) метод розкладу, 3) метод підставляння, 4) метод інтегрування частинами, 5) метод зведення і 6) метод порівнювання коефіцієнтів. Чотири перших з них були розглянуті в попередніх розділах. Два останні розглянемо в цьому розділі.

Крім основних, існують і інші методи. Але кожний з них включає в себе як свою складову частину один або кілька основних.

Не можна обмежитись вивченням самої тільки теорії неозначених інтегралів. Треба набути вміння прикладати цю теорію до фактичного обчислення інтегралів, що може бути досягнуто тільки практикою, тобто розв'язанням достатнього числа відповідних задач. Треба зауважити, що в інтегральному численні роль задач незрівнянно значніша, ніж у диференціальному. Причина зрозуміла. В диференціальному численні ми маємо не таке велике число основних формул і правил, прикладання яких дає можливість обчислити похідну всякої функції. Таких правил, придатних для всіх випадків, в інтегральному численні немає і, як ми бачили, їх і не може бути. Тому обчислення інтегралів є не тільки наука, але в значній мірі мистецтво, оволодіти яким, звичайно, не можна без відповідного запасу теоретичних знань.

Зважаючи на викладене, читачеві рекомендується спочатку розв'язати деяке число задач з першого розділу систематичного задачника з інтегрального числення, при чому з кожного параграфа, принаймні, дві - три задачі. Щодо другого розділу, то в ньому слід обмежитись покищо тільки параграфом про метод розкладу. Після цього можна перейти до вивчення цього розділу.

§ 64. Метод зведення.

Щоб дістати поняття про цей метод, обчислимо інтеграл

$$u_n = \int \sin^n x\, dx, \tag{1}$$

де n — ціле додатне число. Маємо

$$\int \sin^n x\, dx = \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x\, dx = \int \underbrace{\sin^{n-1} x}_{u}\ \underbrace{d(-\cos x)}_{dv}.$$

Інтегруючи частинами, дістанемо

$$\int \sin^n x\,dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx =$$
$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,dx =$$
$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx.$$

У правій частині з'явився шуканий інтеграл. Переносячи його в ліву частину, остаточно дістанемо

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx, \qquad (2)$$

або коротше

$$u_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} u_{n-2}. \qquad (3)$$

Ми дістали формулу зведення. В правій частині стоїть інтеграл того ж типу, як і в лівій, але з показником, на дві одиниці меншим. До нього теж можна прикласти ту ж формулу (2). Заміняючи в ній n через $n-2$, дістанемо

$$\int \sin^{n-2} x\,dx = -\frac{\cos x \sin^{n-3} x}{n-2} + \frac{n-3}{n-2}\int \sin^{n-4} x\,dx.$$

До інтеграла в правій частині ми знову можемо прикласти формулу (2) і т. д. При кожному прикладанні ми одержуватимемо інтеграл з показником, на дві одиниці меншим, а тому, залежно від парності або непарності показника n, остаточно прийдемо до інтеграла з показником, рівним нулеві або одиниці, тобто до інтеграла

$$\int dx \text{ або } \int \sin x\,dx.$$

Ці інтеграли обчисляються легко, тому тим самим буде обчислений і даний інтеграл.

Так, наприклад, за формулою (2) маємо:

$$\int \sin^5 x\,dx = -\frac{\cos x \sin^4 x}{5} + \frac{4}{5}\int \sin^3 x\,dx,$$
$$\int \sin^3 x\,dx = -\frac{\cos x \sin^2 x}{3} + \frac{2}{3}\int \sin x\,dx,$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

а тому

$$\int \sin^5 x\,dx = -\frac{1}{15}(3\sin^4 x + 4\sin^2 x + 8)\cos x + C.$$

§ 65. Елементарні дроби.

Раціональною функцією називається всяка функція, яка може бути представлена у вигляді частки двох многочленів.

З раціональних функцій на особливу увагу заслуговують так звані елементарні дробові вирази, що можуть бути двох типів.

Елементарним дробом першого типу, або першого роду, називається всякий вираз виду:

$$\frac{A}{px+q},\ \frac{B}{(px+q)^2},\ \frac{C}{(px+q)^3},\ldots,\ \frac{E}{(px+q)^n},\ldots,$$

тобто всякий вираз, чисельником якого є стала величина, а знаменником якийнебудь лінійний многочлен або його цілий і додатний степінь.

Елементарним дробом другого типу називається всякий вираз виду

$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c},\ \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^2},\ldots$$

і взагалі вираз виду

$$\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n},$$

де n — ціле додатне число, тобто всякий вираз, чисельником якого є лінійний многочлен, а знаменником квадратний многочлен або його цілий і додатний степінь.

В окремому випадку лінійний многочлен у чисельнику при $M=0$ може бути сталою величиною.

В теорії інтегрування раціональних функцій елементарні дроби відограють велику роль, бо інтегрування всякої раціональної функції може бути зведене, як побачимо, до інтегрування цих дробів.

Знайти інтеграл від елементарних виразів першого роду неважко. Справді, якщо $n=1$, то маємо:

$$\int\frac{dx}{px+q}=\frac{1}{p}\ln|px+q|+C,$$

якщо $n>1$, то

$$\int\frac{dx}{(px+q)^n}=\frac{1}{p}\int\frac{d(px+q)}{(px+q)^n}=\frac{1}{p}\int\frac{dz}{z^n}=-\frac{1}{p(n-1)z^{n-1}}+C=$$

$$=-\frac{1}{p(n-1)}\cdot\frac{1}{(px+q)^{n-1}}+C.$$

Обчислення елементарних дробів другого роду виконується, як побачимо зараз, складнішим шляхом.

§ 66. Квадратний многочлен.

Многочлен другого степеня

$$ax^2+bx+c, \tag{1}$$

який коротше називатимемо квадратним тричленом, може мати всі коефіцієнти не рівними нулеві або деякі з них можуть дорівнювати нулеві.

Квадратний многочлен називається многочленом у канонічній формі, якщо його коефіцієнт при змінному в першому степені дорівнює нулеві.

Так, наприклад, многочлен

$$3x^2+7$$

є многочлен у канонічній формі.

Нехай дано якийнебудь многочлен (1). Вважаючи, що

$$x=py+q, \tag{2}$$

легко знайдемо, що

$$ax^2+bx+c=ap^2y^2+(2apq+bp)y+aq^2+bq+c. \tag{3}$$

У правій частині ми матимемо многочлен у канонічній формі, якщо $2apq+bp=0$, тобто, якщо

$$q=-\frac{b}{2a}. \tag{4}$$

Візьмемо ж у (2) q таким. Щодо p, то воно покищо лишається довільним. Бачимо, що коли

$$x=py-\frac{b}{2a}, \tag{5}$$

то

$$ax^2+bx+c=Ay^2+C, \tag{6}$$

де A і C — деякі сталі. Точно знати їх нам не потрібно. Для нас важливим є тільки те, що в правій частині немає члена з першим степенем змінного y.

З (5) маємо:

$$y=\frac{1}{2ap}(2ax+b).$$

Приймаючи для скорочення писання $k=\frac{1}{2ap}$, дістанемо:

$$y=k(2ax+b). \tag{7}$$

Виявляється, що коли x і y пов'язані між собою такою рівністю, то буде рівність (6). Досі p можна було брати довільним, тому і k в (7) довільне. Одержуємо теорему:

Теорема. **Всякий квадратний многочлен**

$$ax^2+bx+c \tag{8}$$

лінійним підставлянням

$$y=k(2ax+b), \tag{9}$$

де k може бути взяте довільне, перетворюється в многочлен у канонічній формі:

$$ax^2+bx+c=Ay^2+C. \tag{10}$$

Звичайно, A і C залежатимуть від вибору k. На практиці його беремо так, щоб підставляння (9) було по змозі простіше.

Неважко запам'ятати це підставляння: вираз у дужках дорівнює похідній даного многочлена (8).

Розглянемо приклад. Нехай дано многочлен:

$$\frac{3}{5}x^2+6x-7.$$

Похідна від нього дорівнює

$$\frac{6}{5}x+6=6\left(\frac{x}{5}+1\right).$$

Тому, приймаючи, що $k=\frac{1}{6}$, беремо

$$y=\frac{x}{5}+1, \text{ звідки } x=5(y-1),$$

і легко знайдемо, що

$$\frac{3}{5}x^2+6x-7=15y^2-22.$$

У правій частині стоїть многочлен у канонічній формі.

§ 67. Інтеграли типу $\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$.

Цей інтеграл — від елементарного дробу другого роду в тому окремому випадку, коли показник знаменника дорівнює одиниці. Щоб його обчислити, можна робити так. Беремо якенебудь лінійне підставляння

$$x=py+q, \tag{1}$$

квадратний многочлен якого в знаменнику перетворюється в канонічний, а саме, нехай

$$ax^2+bx+c=hy^2+l.$$

Виконуючи це підставляння, маємо:

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = p\int \frac{Mpy+Mq+N}{hy^2+l}\,dy =$$

$$= Mp^2\int \frac{y\,dy}{hy^2+l} + p(Mq+N)\int \frac{dy}{hy^2+l}. \qquad (2)$$

Перший інтеграл у правій частині легко обчисляється. Щоб чисельник дорівнював похідній від знаменника, в ньому невистачає тільки множника $2h$, а тому

$$\int \frac{y\,dy}{hy^2+l} = \frac{1}{2h}\int \frac{2hy\,dy}{hy^2+l} = \frac{1}{2h}\ln|hy^2+l| + C. \qquad (3)$$

Щодо другого інтеграла, тобто інтеграла

$$\int \frac{dy}{hy^2+l}, \qquad (4)$$

то в ньому можна вважати h додатним, бо коли б h було від'ємним, то ми взяли б інтеграл з оберненим знаком. Таким чином, нехай $h>0$.

Якщо l теж додатне, то інтеграл підставлянням $z=\frac{\sqrt{h}\,y}{\sqrt{l}}$ легко зводиться до основного:

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc\,tg} z + C.$$

Справді, маємо:

$$\int \frac{dy}{hy^2+l} = \frac{1}{l}\int \frac{dy}{1+\left(\frac{y\sqrt{h}}{\sqrt{l}}\right)^2} = \frac{\sqrt{l}}{l\sqrt{h}}\int \frac{d\frac{y\sqrt{h}}{\sqrt{l}}}{1+\left(\frac{y\sqrt{h}}{\sqrt{l}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{hl}}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\sqrt{hl}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y\sqrt{h}}{\sqrt{l}}\right) + C. \qquad (5)$$

Коли ж $l<0$, то інтеграл (4) обчисляємо методом розкладу. Вважаючи, що $l=-l'$, маємо:

$$\int \frac{dy}{hy^2-l'} = \int \frac{dy}{(y\sqrt{h}+\sqrt{l'})(y\sqrt{h}-\sqrt{l'})} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{l'}}\int \frac{(y\sqrt{h}+\sqrt{l'})-(y\sqrt{h}-\sqrt{l'})}{(y\sqrt{h}+\sqrt{l'})(y\sqrt{h}-\sqrt{l'})}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{l'}}\int \left(\frac{1}{y\sqrt{h}-\sqrt{l'}} - \frac{1}{y\sqrt{h}+\sqrt{l'}}\right)dy.$$

Обчисляючи інтеграли в правій частині методом безпосереднього інтегрування, знайдемо, що

$$\int \frac{dy}{hy^2 - l'} = \frac{1}{2\sqrt{hl'}} \ln \left| \frac{y\sqrt{h} - \sqrt{l'}}{y\sqrt{h} + \sqrt{l'}} \right| + C. \qquad (6)$$

Зводячи викладене, ми бачимо:

Щоб обчислити інтеграл

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx,$$

треба підставлянням типу

$$y = k(2ax + b)$$

звести обчислення його до інтеграла типу

$$\int \frac{dy}{hy^2 + l},$$

який залежно від знаків h і l або зводиться до основного

$$\int \frac{dz}{1 + z^2},$$

або обчисляється методом розкладу.

Нехай, наприклад, треба обчислити інтеграл

$$H = \int \frac{(2x + 5)\,dx}{3x^2 + 6x - 1}.$$

Робимо підставляння

$$y = k(6x + 6) = 6k(x + 1).$$

Зрозуміло, що доцільніше взяти $k = \frac{1}{6}$. Отже,

$$y = x + 1, \quad x = y - 1, \quad dx = dy.$$

Маємо

$$\int \frac{(2x + 5)\,dx}{3x^2 + 6x - 1} = \int \frac{(2y + 3)\,dy}{3y^2 - 4} = 2\int \frac{y\,dy}{3y^2 - 4} + 3\int \frac{dy}{3y^2 - 4};$$

$$\int \frac{y\,dy}{3y^2 - 4} = \frac{1}{6} \ln |3y^2 - 4| + C;$$

$$\int \frac{dy}{3y^2 - 4} = \frac{1}{4} \int \frac{(\sqrt{3}y + 2) - (\sqrt{3}y - 2)}{(\sqrt{3}y + 2)(\sqrt{3}y - 2)} dy =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}y - 2} - \frac{1}{\sqrt{3}y + 2} \right\} dy = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{y\sqrt{3} - 2}{y\sqrt{3} + 2} \right| + C.$$

Остаточно

$$\int \frac{(2x+5)\,dx}{3x^2+6x-1} = \frac{1}{3}\ln|3x^2+6x-1| + \frac{\sqrt{3}}{4}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}+\sqrt{3}-2}{x\sqrt{3}+\sqrt{3}+2}\right| + C.$$

§ 68. Інтеграли типу $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$, $n>1$.

Цей інтеграл є інтеграл від елементарного дробу другого роду загального типу. Він обчисляється досить складним шляхом. Ми маємо:

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left\{(2ax+b)^2+4ac-b^2\right\}.$$

Приймаючи, що

$$y = 2ax+b, \quad s = 4ac-b^2, \tag{1}$$

дістанемо

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}(y^2+s). \tag{2}$$

В правій частині стоїть многочлен у канонічній формі. Відзначимо, що:

1) число s додатне, якщо корені многочлена уявні;
2) воно від'ємне, якщо корені дійсні і не рівні між собою;
3) воно дорівнює нулеві, якщо корені многочлена рівні.

Отже, число s може бути будьяким дійсним числом.

Для обчислення інтеграла

$$G = \int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx \tag{3}$$

ми спочатку робимо підставляння

$$y = 2ax+b, \quad x = \frac{y-b}{2a}, \quad dx = \frac{dy}{2a}.$$

Згідно з (2) маємо:

$$G = \frac{(4a)^n}{2a}\int \frac{\frac{M}{2a}y - \frac{Mb}{2a} + N}{(y^2+s)^n}\,dy =$$

$$= \frac{(4a)^{n-1}M}{a}\int \frac{y\,dy}{(y^2+s)^n} + \frac{(4a)^{n-1}}{a}(2aN-Mb)\int \frac{dy}{(y^2+s)^n}, \tag{4}$$

і таким чином обчислення інтеграла G зводиться до обчислення двох інтегралів:

$$\int \frac{y\,dy}{(y^2+s)^n} \text{ і } \int \frac{dy}{(y^2+s)^n}. \tag{5}$$

Перший інтеграл обчисляється легко. Маємо:

$$\int \frac{y\,dy}{(y^2+s)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2+s)}{(y^2+s)^n} = \frac{1}{2}\int z^{-n}dz =$$

$$= \frac{z^{-n+1}}{2(-n+1)} + C = -\frac{1}{(2n-2)(y^2+s)^{n-1}} + C. \qquad (6)$$

Другий інтеграл обчисляється складніше. Маємо:

$$\int \frac{dy}{(y^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{(y^2+s)-y^2}{(y^2+s)^n}dy =$$

$$= \frac{1}{s}\int \frac{dy}{(y^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s}\int \frac{y^2\,dy}{(y^2+s)^n}. \qquad (7)$$

Перший інтеграл у правій частині того ж типу, як і обчислюваний, але з показником на одиницю меншим. Для другого маємо:

$$\int \frac{y^2\,dy}{(y^2+s)^n} = \int y\,\frac{y\,dy}{(y^2+s)^n} = -\frac{1}{2n-2}\int y\,d\,\frac{1}{(y^2+s)^{n-1}}.$$

Інтегруючи частинами, дістанемо:

$$\int \frac{y^2\,dy}{(y^2+s)^n} = -\frac{y}{(2n-2)(y^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{dy}{(y^2+s)^{n-1}}. \qquad (8)$$

Вставляючи в (7), остаточно маємо

$$\int \frac{dy}{(y^2+s)^n} = \frac{y}{s(2n-2)(y^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)}\int \frac{dy}{(y^2+s)^{n-1}}. \qquad (9)$$

Ми одержали формулу зведення. З допомогою її інтеграл

$$u_n = \int \frac{dy}{(y^2+s)^n} \qquad (10)$$

виражається через інтеграл

$$u_{n-1} = \int \frac{dy}{(y^2+s)^{n-1}}. \qquad (11)$$

В свою чергу u_{n-1} виразиться через u_{n-2} і т. д. Взагалі ця формула в ряді

$$u_n,\ u_{n-1},\ u_{n-2},\ \ldots,\ u_3,\ u_2,\ u_1$$

дає нам вираз кожного інтеграла через дальший за ним. Тому ми знатимемо u_n, якщо будемо знати u_1. Але

$$u_1 = \int \frac{dy}{y^2+s}.$$

Якщо $s > 0$, то

$$\int \frac{dy}{y^2+s} = \frac{\sqrt{s}}{s} \int \frac{d\frac{y}{\sqrt{s}}}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{s}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{s}} + C. \qquad (12)$$

Якщо $s = 0$, то

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + C;$$

якщо $s < 0$, то

$$\int \frac{dy}{y^2+s} = \int \frac{dy}{y^2-(\sqrt{-s})^2} = \int \frac{dy}{(y+\sqrt{-s})(y-\sqrt{-s})} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-s}} \int \left\{ \frac{1}{y-\sqrt{-s}} - \frac{1}{y+\sqrt{-s}} \right\} dy =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-s}} \ln \left| \frac{y-\sqrt{-s}}{y+\sqrt{-s}} \right| + C. \qquad (13)$$

Таким чином, інтеграл u_1 завжди може бути обчислений, а тому може бути обчислений і інтеграл u_n. При цьому з (12) і (13) випливає, що цей інтеграл виражається через колові функції, якщо $s > 0$, і логарифмічні,— якщо $s < 0$.

Зводячи все викладене в одне, ми бачимо, що:

Інтеграл

$$G = \int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} dx$$

може бути обчислений так: підставлянням

$$y = 2ax + b;$$

обчислення його зводиться до інтеграла типу

$$\int \frac{y\,dy}{(y^2+s)^n} = -\frac{1}{(2n-2)(y^2+s)^{n-1}} + C$$

і до інтеграла типу

$$\int \frac{dy}{(y^2+s)^n},$$

який може бути обчислений за формулою зведення:

$$\int \frac{dy}{(y^2+s)^n} = \frac{y}{s(2n-2)(y^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)} \int \frac{dy}{(y^2+s)^{n-1}}.$$

Залежно від знака s у вираз інтеграла G входять, крім алгебричних функцій, ще або колові, або логарифмічні.

§ 69. Інтеграли типу $\int \frac{dx}{\sqrt{a \pm bx^2}}$, $b > 0$.

Інтеграли цього типу на практиці зустрічаються весь час. У підкорінному числі b вважаємо додатним, a може бути будь-якого знака.

Обчислення інтеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a \pm bx^2}} \tag{1}$$

залежно від того, який знак перед b, легко зводиться до одного з основних:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} \text{ або } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Якщо під коренем маємо знак плюс, то, користуючись правом вносити і виносити сталий множник спід знака інтеграла і потім мислено виконуючи підставляння $x\sqrt{b} = t$, послідовно маємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{d(x\sqrt{b})}{\sqrt{a+(x\sqrt{b})^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dt}{\sqrt{a+t^2}}.$$

В правій частині стоїть основний інтеграл:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a+t^2}} = \ln\left|t+\sqrt{a+t^2}\right| + C,$$

а тому остаточно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln\left|x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}\right| + C. \tag{2}$$

Коли ж під коренем перед b стоїть знак мінус, то, вважаючи, що

$$x\sqrt{\frac{b}{a}} = t,$$

послідовно маємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{bx^2}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{d\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin\left(\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right) + C. \tag{3}$$

Отже, інтеграли типу (1) завжди можуть бути обчислені. Легко тепер бачити, що

інтеграл типу

$$G=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{4}$$

завжди може бути обчислений.

Для цього спочатку шукаємо підставляння, яке зводить підкорінний вираз до канонічної форми. Нехай, якщо

$$x=py+q, \quad \text{то} \quad ax^2+bx+c=hy^2+s.$$

Тепер маємо:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=p\int\frac{dy}{\sqrt{s+hy^2}}.$$

Інтеграл у правій частині типу (1). Через те що його можна обчислити, можна обчислити і інтеграл (4).

Обчислимо, наприклад, інтеграл

$$H=\int\frac{dx}{\sqrt{4+5x+3x^2}}.$$

Вважаючи, що

$$y=6x+5, \quad x=\frac{y-5}{6}, \quad dx=\frac{dy}{6},$$

маємо

$$3x^2+5x+4=\frac{1}{12}(y^2+23),$$

а тому

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4+5x+3x^2}}=\frac{\sqrt{12}}{6}\int\frac{dy}{\sqrt{23+y^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|6x+5+2\sqrt{3(3x^2+5x+4)}|+C.$$

§ 70. Інтеграли типу $\int\sqrt{a\pm bx^2}\,dx$.

Послідовно маємо, вважаючи, що $b>0$ і інтегруючи частинами:

$$\int\sqrt{a+bx^2}\,dx=x\sqrt{a+bx^2}-\int\frac{bx^2dx}{\sqrt{a+bx^2}}=$$

$$=x\sqrt{a+bx^2}-\int\frac{(a+bx^2)-a}{\sqrt{a+bx^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{a+bx^2}-\int\sqrt{a+bx^2}dx+a\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}.$$

В правій частині знову з'явився шуканий інтеграл. Переносячи його в ліву частину, знайдемо

$$\int \sqrt{a+bx^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a+bx^2} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}.$$

Знаючи, чому дорівнює інтеграл у правій частині (стор. 133), остаточно маємо

$$\int \sqrt{a+bx^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a+bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\ln\left|x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}\right| + C.$$

Так само маємо, інтегруючи спочатку частинами:

$$\int \sqrt{a-bx^2}\,dx = x\sqrt{a-bx^2} + \int \frac{bx^2\,dx}{\sqrt{a-bx^2}} =$$

$$= x\sqrt{a-bx^2} + \int \frac{a-(a-bx^2)}{\sqrt{a-bx^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{a-bx^2} + a\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} - \int \sqrt{a-bx^2}\,dx,$$

звідки

$$\int \sqrt{a-bx^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a-bx^2} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}},$$

і остаточно (стор. 133)

$$\int \sqrt{a-bx^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a-bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\arcsin\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + C.$$

§ 71. Інтеграли типу $\int \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$

В чисельнику стоїть многочлен, у знаменнику — корінь квадратний з квадратного многочлена.

Інтеграли цього типу можуть бути обчислені так званим методом порівнювання коефіцієнтів.

Починаємо з того, що простим диференціюванням переконуємося, що

$$dx^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{nax^n + \left(n-\frac{1}{2}\right)bx^{n-1} + (n-1)\,cx^{n-2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

Інтегруючи цю рівність і приймаючи для скорочення писання

$$R = ax^2 + bx + c,$$

знайдемо, що

$$x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} = na\int\frac{x^n dx}{\sqrt{R}} + \left(n-\frac{1}{2}\right)b\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{R}} + \\ + (n-1)c\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{R}},$$

звідки, поділяючи на na, дістанемо

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{R}} = \alpha' x^{n-1}\sqrt{R} + \alpha''\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{R}} + \alpha'''\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{R}}, \qquad (1)$$

де α', α'', α''' — деякі сталі, точне значення яких для нас байдуже. Нам досить знати тільки, що це — сталі.

Ми тепер маємо, користуючись рівністю (1):

$$\int\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{\sqrt{R}}dx = \\ = a_0\int\frac{x^n dx}{\sqrt{R}} + \int\frac{a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{\sqrt{R}}dx = a_0\alpha' x^{n-1}\sqrt{R} + \\ + \int\frac{(a_0\alpha'' + a_1)x^{n-1} + (a_0\alpha''' + a_2)x^{n-2} + \ldots + a_n}{\sqrt{R}}dx. \qquad (2)$$

Приймаючи, що

$$a_0\alpha' = \alpha_0 \text{ і } f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

ми з (2) робимо висновок, що, *який би не був многочлен $f_n(x)$ n-го степеня, завжди*

$$\int\frac{f_n(x)}{\sqrt{R}}dx = \alpha_0 x^{n-1}\sqrt{R} + \int\frac{f_{n-1}(x)}{\sqrt{R}}dx, \qquad (3)$$

де α_0 і $f_{n-1}(x)$ — *якесь стале і якийсь многочлен $(n-1)$-го степеня.* Точніше знати їх покищо немає потреби. Для нас важливо тільки те, що інтеграл лівої частини виразився через інтеграл того ж типу, але з простішим чисельником.

Тоді як у чисельнику лівої частини ми маємо многочлен n-го степеня, в правій частині степінь многочлена на одиницю менший.

Рівність (3) справедлива для будьякого многочлена, тому її можна прикласти і до інтеграла в правій частині.

Прикладаючи ж її послідовно кілька разів, дістанемо рівності:

$$\int \frac{f_n(x)}{\sqrt{R}}\,dx = \alpha_0 x^{n-1}\sqrt{R} + \int \frac{f_{n-1}(x)}{\sqrt{R}}\,dx,$$

$$\int \frac{f_{n-1}(x)}{\sqrt{R}}\,dx = \alpha_1 x^{n-2}\sqrt{R} + \int \frac{f_{n-2}(x)}{\sqrt{R}}\,dx,$$

$$\int \frac{f_{n-2}(x)}{\sqrt{R}}\,dx = \alpha_2 x^{n-3}\sqrt{R} + \int \frac{f_{n-3}(x)}{\sqrt{R}}\,dx, \qquad (4)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int \frac{f_2(x)}{\sqrt{R}}\,dx = \alpha_{n-2}\, x\sqrt{R} + \int \frac{f_1(x)}{\sqrt{R}}\,dx,$$

$$\int \frac{f_1(x)}{\sqrt{R}}\,dx = \alpha_{n-1}\sqrt{R} + \int \frac{f_0(x)}{\sqrt{R}}\,dx,$$

де $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ — невідомі сталі, а $f_{n-1}(x), \ldots, f_1(x), f_0(x)$ — невідомі многочлени, степінь кожного з яких дорівнює його індексові. Останній многочлен $f_0(x)$ як многочлен нульового степеня дорівнює якійсь сталій величині. Позначаючи її через β і додаючи всі рівності (4), одержуємо теорему:

Завжди буде дійсна рівність:

$$\int \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

$$= (\alpha_0 x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1})\sqrt{R} + \beta \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (5)$$

де $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta$ — деякі сталі величини.

Оскільки інтеграл у правій частині ми можемо обчислити (стор. 133), то інтеграл лівої частини буде обчислений, якщо ми зуміємо знайти сталі $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta$. Щоб знайти їх, роблять так: пишуть рівність (5) і потім її диференціюють. В одержаній після диференціювання рівності порівнюють коефіцієнти при однакових степенях x. Одержують рівняння, з яких знаходять невідомі $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta$. Наприклад, нехай потрібно обчислити інтеграл

$$\int \frac{2x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Згідно з теоремою пишемо

$$\int \frac{2x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = (\alpha x + \beta)\sqrt{1-x^2} + \gamma \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Диференціюючи, знаходимо

$$\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \alpha\sqrt{1-x^2} - \frac{(\alpha x+\beta)x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Помножуємо на $\sqrt{1-x^2}$:

$$2x^2 = \alpha(1-x^2) - (\alpha x + \beta)x + \gamma = \alpha + \gamma - \beta x - 2\alpha x^2.$$

Порівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x дає

$$\alpha = -1,\ \beta = 0,\ \gamma = 1,$$

а тому

$$\int \frac{2x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$$

§ 72. Висновок.

Різними методами можуть бути обчислені інтеграли типів:

1) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx,$

2) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx,\ n>1,$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a \pm bx^2}},\quad \int \sqrt{a \pm bx^2}\,dx,$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$

5) $\displaystyle\int \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$

ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ.

Ми розглянули різні методи інтегрування і застосували їх до обчислення цілого ряду інтегралів. Але коли б ці інтеграли зібрати в одну таблицю, то в своїй сукупності вони дали б нам тільки просту збірку інтегралів, не об'єднаних в одне органічне ціле спільною ідеєю. Зовні це проявилося б у тому, що кожний з них був би обчислений своїм методом, який взагалі не можна застосувати до обчислення інших інтегралів. Точно кажучи, ми досі вивчали не стільки інтеграли від різних функцій, скільки різні методи інтегрування. В результаті ж, не зважаючи на значне число розглянутих нами інтегралів, ми все таки стоїмо покищо безпорадними перед таким простим запитанням: дано інтеграл, чи можна, і якщо можна, то як його обчислити?

Щоб відповісти на це запитання, ми повинні змінити напрям наших досліджень. Ми повинні розглядати не різні методи інтегрування, а різні класи функцій і дослідити, чи можуть або чи не можуть бути проінтегровані функції того чи іншого класу, і якщо можуть, то як.

Простішими функціями є многочлени; за степенем складності за ними йдуть раціональні функції, потім алгебричні і, нарешті, трансцендентні.

Ми тепер перейдемо до систематичного розгляду різних класів функцій, інтеграли яких можуть бути обчислені. До таких класів насамперед належить клас многочленів. Через те що

$$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)\,dx =$$

$$= \frac{a_0x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1x^n}{n} + \ldots + \frac{a_{n-1}x^2}{2} + a_nx + C,$$

то, отже,

інтеграл від многочлена завжди може бути обчислений. Він дорівнює многочленові ж, степінь якого на одиницю більший від степеня інтегрованого многочлена.

За многочленами йдуть раціональні функції. Виявляється, як побачимо, інтеграл від усякої раціональної функції теж завжди може бути обчислений, але обчислення його є досить складною задачею. До поступового розв'язання її ми й перейдемо.

§ 73. Основні властивості многочлена.

При вивченні методів інтегрування раціональних функцій нам доведеться користуватись деякими властивостями много-

членів, які звичайно вивчаються у вищій алгебрі. Тому тут ми обмежимось тільки тим, що перелічимо ці властивості, не спиняючись над доведенням їх.

Усякий многочлен $f(x)$ може бути представлений у вигляді суми степінних функцій з цілими і додатними показниками:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

де n — степінь многочлена, x — його аргумент. Сталі числа a_0, $a_1, \ldots, a_n$ називаються його коефіцієнтами. Ці коефіцієнти можуть бути як дійсними, так і уявними. Але в диференціальному і інтегральному численнях ми обмежуємося галуззю тільки дійсних чисел. Тому

в дальшому ми розглядатимемо виключно тільки многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Многочлени можуть бути різних степенів.

Усякий многочлен першого степеня

$$ax + b$$

називається лінійним многочленом.

Це тому, що, як відомо з аналітичної геометрії, рівнянням

$$y = ax + b$$

представляється пряма лінія.

Всякий вираз

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

якими б не були коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_n$, є многочлен. Але в точному розумінні слова його називають многочленом n-го степеня тільки тоді, коли перший коефіцієнт a_0 не дорівнює нулеві; коли ж $a_0 = 0$, то цей вираз буде многочленом не n-го степеня, а нижчого.

В окремому випадку, якщо всі коефіцієнти, крім останнього a_n, дорівнюють нулеві, многочлен $f(x)$ перетворюється в стале:

$$f(x) = a_n.$$

З другого боку, всяке стале число C можна представити у формі многочлена

$$C = Cx^0,$$

а тому

всяке стале можна розглядати як многочлен нульового степеня.

Одним з основних понять у теорії многочленів є поняття кореня.

Коренем многочлена називається всяке число, яке перетворює многочлен у нуль.

Отже, якщо a — корінь многочлена $f(x)$, то

$$f(a)=0.$$

Навіть і в тому випадку, коли всі коефіцієнти многочлена дійсні, деякі корені його, а іноді і всі, можуть бути комплексними. Але у вищій алгебрі доводиться, що

коли

$$a=p+qi$$

— уявний корінь многочлена $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то в такому випадку число

$$b=p-qi,$$

спряжене йому, теж буде коренем многочлена.

Отже, якщо

$$f(p+qi)=0,$$

то необхідно

$$f(p-qi)=0.$$

Але це тільки при умові, що всі коефіцієнти дійсні. Коли ж серед них є хоч один уявний, то хоча б число $p+qi$ було коренем, число $p-qi$ може й не бути ним.

Нехай $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — два многочлени:

$$\varphi(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$\psi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m$$

відповідно степенів n і m. Якщо $n\geqq m$, то, виконавши ділення многочлена $\varphi(x)$ на $\psi(x)$, можна многочлен $\varphi(x)$ представити в такій формі:

$$\varphi(x)=\psi(x)\cdot\omega(x)+R(x), \qquad (1)$$

де $\omega(x)$ і $R(x)$ — якісь многочлени. З них $R(x)$ називається остачею. Степінь $R(x)$ необхідно менший степеня дільника $\psi(x)$. Степінь же многочлена $\omega(x)$, який називається часткою, дорівнює різниці $n-m$. У випадку рівності степенів n і m частка $\omega(x)$ перетворюється в многочлен нульового степеня, тобто в стале.

Якщо $n<m$, то і в цьому випадку многочлен $\varphi(x)$ можна представити у формі (1). Для цього досить прийняти $\omega(x)=0$. Тоді дістанемо

$$\varphi(x)=\psi(x)\cdot 0+R(x),$$

і остача $R(x)$ дорівнюватиме діленому $\varphi(x)$, а тому і в цьому випадку степінь його буде менший степеня дільника $\psi(x)$. Отже,

всякий многочлен $\varphi(x)$ можна поділити на будьякий многочлен $\psi(x)$, в результаті чого многочлен $\varphi(x)$ представляється у формі:

$$\varphi(x)=\psi(x)\cdot\omega(x)+R(x),$$

де $\omega(x)$ і $R(x)$ — многочлени, які називаються часткою і остачею. Степінь остачі завжди менший степеня дільника $\psi(x)$.

Степінь частки дорівнює різниці між степенями діленого і дільника, якщо степінь діленого більший або дорівнює степеневі дільника. Але коли степінь діленого менший степеня дільника, то частка дорівнює нулеві.

Розглянемо окремий випадок ділення многочлена

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

на лінійний многочлен $x - c$. Нехай

$$f(x) = (x - c)\cdot\omega(x) + R(x). \qquad (2)$$

Остача $R(x)$ повинна мати степінь, менший від степеня дільника $x - c$. Отже, він може бути тільки многочленом нульового степеня, тобто сталим. Таким чином, у рівності (2) остача $R(x)$ — необхідно якесь стале число, яке не змінюється із зміною x. Приймаючи ж $x = c$, дістанемо

$$f(c) = R(c).$$

Звідси зрозуміло, що $R = 0$ тоді і тільки тоді, коли $f(c) = 0$, тобто коли c — корінь многочлена $f(x)$. Одержуємо так звану теорему Безу.

Теорема Безу. **Многочлен $f(x)$ поділяється на одночлен $x - c$ без остачі:**

$$f(x) = (x - c)\cdot\omega(x),$$

тоді і тільки тоді, коли c — корінь многочлена.

Спираючись у зв'язку з іншими і на цю теорему, у вищій алгебрі доводиться така основна теорема:

Всякий многочлен n-го степеня має n коренів.

Кожний корінь може бути або простим, або кратним.

Якщо

$$a, b, c, \ldots, l$$

— всі не рівні між собою корені многочлена $f(x)$ і якщо

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$$

— кратності їх, то многочлен $f(x)$ може бути представлений у формі

$$f(x) = a_0(x - a)^\alpha(x - b)^\beta(x - c)^\gamma \ldots (x - l)^\lambda, \qquad (3)$$

де a_0 — коефіцієнт при першому члені многочлена.

Якщо коефіцієнти многочлена дійсні, то всяка пара його спряжених коренів має завжди один і той же порядок кратності.

Цю теорему, на яку спиратиметься весь дальший виклад, приймемо без доведення.

Рівність (3) показує, що всякий многочлен може бути представлений у вигляді добутку тільки лінійних множників.

Не зважаючи на всю простоту, розклад (3) можна застосовувати для цілей інтегрального числення не завжди, а тільки в тому випадку, коли всі корені дійсні. Тому постає запитання: чи не можна і у випадку уявних коренів перетворити розклад (3) так, щоб многочлен представився у вигляді добутку тільки дійсних множників, хоча б уже не лінійних, але все таки досить простих? Це виявляється можливим, якщо коефіцієнти многочлена $f(x)$ усі дійсні. В цьому випадку, якщо a і b — два уявні спряжені корені,

$$a = p + qi, \; b = p - qi,$$

то кратності їх, як було зазначено, необхідно рівні:

$$\alpha = \beta.$$

Виділимо в розкладі (3) окремо перші два множники. Маємо

$$(x-a)^\alpha (x-b)^\beta = [(x-a)(x-b)]^\alpha.$$

Але

$$(x-a)(x-b) = (x-p-qi)(x-p+qi) =$$
$$= (x-p)^2 - (qi)^2 = x^2 - 2px + p^2 + q^2.$$

В правій частині з'явився многочлен другого степеня, але вже з дійсними коефіцієнтами. Добуток двох уявних спряжених лінійних множників замінився одним дійсним множником, правда, вже не лінійним, але зате дійсним. Тепер розклад (3) можна переписати в такій формі:

$$f(x) = (x^2 - 2px + p^2 + q^2)^\alpha (x-c)^\gamma \ldots (x-l)^\lambda.$$

Зрозуміло, чого ми можемо досягти, якщо будемо йти і далі тим же шляхом. Маючи многочлен $f(x)$, ми його уявляємо собі розкладеним на лінійні множники у формі

$$f(x) = a_0 (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda. \qquad (4)$$

Потім у правій частині залишаємо без зміни всі дійсні множники, тобто всі множники, що відповідають дійсним кореням. Кожний же уявний множник разом із спряженим йому множником сполучаємо в один дійсний, що буде квадратним многочленом. Таким чином, у правій частині (4) всі лінійні дійсні множники залишаться, а кожна пара спряжених уявних множників дасть один дійсний. Ми бачимо:

Всякий многочлен з дійсними коефіцієнтами може бути представлений у вигляді добутку степенів лінійних многочленів і многочленів другого степеня теж з дійсними коефіцієнтами. При цьому кожному дійсному кореневі відповідає лінійний множник у степені його кратності, а кожній парі спряжених коренів відповідає квадратний многочлен у степені їх спільної кратності.

Отже, кожний многочлен може бути представлений у такій формі:

$$f(x)=(px+q)^{\alpha}(p'x+q')^{\beta}(p''x+q'')^{\gamma}\ldots(a'x^2+b'x+c')^{n}$$
$$(a''x^2+b''x+c'')^{m}(a'''x^2+b'''x+c''')^{k}\ldots,$$

де коефіцієнти множників усі дійсні. Правда, множники цього розкладу складніші, ніж множники розкладу (3), але зате всі вони вже дійсні.

§ 74. Раціональна функція.

Раціональною функцією називається всяка функція, значення якої можна одержати, виконуючи над значенням її аргумента і сталими числами тільки так звані раціональні дії, тобто дії додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до цілого степеня. Така функція після відповідних перетворень завжди може бути представлена у формі частки двох многочленів. Нижче ми припускатимемо, що ці попередні перетворення для всякої даної функції вже виконані. Отже, припускатимемо, що всяка раціональна функція нам дана у вигляді відношення

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

якихось двох многочленів

$$\varphi(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$\psi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m.$$

Усякий вираз

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \tag{1}$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — многочлени, називається правильним дробом, якщо степінь чисельника менший степеня знаменника. Він називається неправильним дробом, якщо степінь чисельника більший або дорівнює степеневі знаменника.

Отже, з виразів:

$$\frac{2x^2+1}{3x^5+7x-3},\quad \frac{5x^8+4x+9}{3x^4-12x+1},\quad \frac{8x^4+1}{9x^4-1}$$

перший є правильний дріб; два інші вирази — неправильні дроби.

Всякий вираз вигляду

$$\frac{ax+b}{px+q},$$

тобто всяка раціональна функція, представлена у вигляді відношення двох лінійних многочленів, називається дробовою лінійною функцією.

Повернемося до загального випадку. Нехай вираз

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

— неправильний дріб. Поділимо многочлен $\varphi(x)$ на многочлен $\psi(x)$. Якщо частку і остачу позначимо через $\omega(x)$ і $\varphi_1(x)$, то дістанемо рівність

$$\varphi(x) = \psi(x)\,\omega(x) + \varphi_1(x). \qquad (2)$$

Степінь остачі завжди менший степеня дільника, а тому степінь многочлена $\varphi_1(x)$ менший степеня многочлена $\psi(x)$.

З (1) маємо:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \omega(x) + \frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)}. \qquad (3)$$

У правій частині перший доданок є многочлен, а другий — правильний дріб. Отже,

всякий неправильний дріб завжди може бути представлений у вигляді суми якогось многочлена, що називається її цілою частиною, і якогось правильного дробу.

Якщо вираз $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ — правильний дріб, то і для нього дійсна рівність (3), якщо в цій рівності прийняти $\omega(x) = 0$ і $\varphi_1(x) = \varphi(x)$. Тому можна говорити про цілу частину і про правильний дріб, приймаючи, що ця ціла частина дорівнює нулеві.

В окремому випадку дробовий вираз $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, якщо його знаменник тотожно дорівнює одиниці, перетворюється в многочлен. Тому всякий многочлен є окремий випадок раціональної функції.

§ 75. Елементарні дроби.

Серед дробових виразів на особливу увагу заслуговують елементарні дроби.

Елементарним дробом першого роду називається всякий вираз вигляду

$$\frac{A}{(px+q)^n},$$

чисельником якого є стала величина, а знаменником — цілий степінь лінійного многочлена.

Елементарним дробом другого роду називається всякий вираз вигляду

$$\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n},$$

чисельником якого є лінійний многочлен або стале, а знаменником — цілий додатний степінь квадратного многочлена.

Інтегрування елементарних дробів першого типу легко зводиться до інтегрування степінної функції. Ми бачили, що хоч і складним шляхом, але й інтеграли від дробів другого типу теж можуть бути обчислені (стор. 132).

§ 76. Розклад раціональної функції на елементарні дроби першого типу.

Після всіх попередніх роз'яснень можемо перейти до доведення такої теореми, основної в теорії інтегрування раціональних функцій:

Всяка раціональна функція може бути представлена або, як прийнято говорити, може бути розкладена на суму многочлена і елементарних дробів першого типу.

Доведемо цю теорему.

Нехай $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ — дана раціональна функція, представлена як частка двох многочленів $\varphi(x)$ і $\psi(x)$. Позначимо через a якийнебудь з коренів знаменника $\psi(x)$, через n — його кратність. Тоді знаменник $\psi(x)$ може бути представлений у формі:

$$\psi(x) = (x-a)^n \psi_1(x), \tag{1}$$

де $\psi_1(x)$ — якийсь многочлен. Для дальшого важливо відзначити, що цей многочлен напевне не перетворюється в нуль при $x=a$:

$$\psi_1(a) \neq 0. \tag{2}$$

Справді, коли б він перетворювався в нуль, то число a було б коренем многочлена $\psi x)$ кратності не n, а вищої.

В окремому випадку многочлен $\psi_1(x)$ може дорівнювати сталому. В цьому випадку знаменник зводиться до цілого степеня лінійного многочлена, і дана раціональна функція буде вигляду

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}.$$

В загальному випадку ми маємо:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^n \psi_1(x)}.$$

Взявши тепер зовсім довільно якенебудь стале A, ми можемо написати рівність

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n \psi_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} - \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{\varphi(x)}{(x-a)^n \psi_1(x)}.$$

Зводячи до спільного знаменника два останні члени, дістанемо:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n \psi_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{-A\psi_1(x) + \varphi(x)}{(x-a)^n \psi_1(x)}. \tag{3}$$

Ця рівність справедлива, яким би не було A. Подивимось, чи не можна його дібрати так, щоб чисельник другого дробу, тобто многочлен

$$-A\psi_1(x)+\varphi(x), \tag{4}$$

поділявся без остачі на $x-a$. Коли б це було можливим, то дріб набрав би простішого вигляду після скорочення на $x-a$.

За теоремою Безу, щоб многочлен поділявся на $x-a$ без остачі, необхідно і досить, щоб число a було коренем цього многочлена. Отже, щоб многочлен (4) поділявся на $x-a$ без остачі, необхідно і досить дібрати A так, щоб була рівність

$$-A\psi_1(a)+\varphi(a)=0,$$

звідки

$$A=\frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}. \tag{5}$$

Ми бачимо, що бажане A можна знайти, бо $\psi_1(a)\neq 0$.

Припустимо ж, що в (3) ми взяли A не довільно, а таким, як воно визначається рівністю (5). Тоді вираз (4) поділяється на $x-a$ без остачі. Позначаючи частку через $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_1(x)=\frac{-A\psi_1(x)+\varphi(x)}{(x-a)},$$

де $\varphi_1(x)$ — якийсь многочлен, з (3) ми дістанемо таку рівність, яку формулюємо як першу лему.

Перша лема. **Якщо многочлен $\psi_1(x)$ не перетворюється в нуль при $x=a$, то завжди можна знайти таке цілком означене стале A, що**

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n\psi_1(x)}=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{n-1}\psi_1(x)}, \tag{6}$$

де $\varphi_1(x)$ — якийсь многочлен.

Але для виразу

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{n-1}\psi_1(x)}$$

ми можемо прикласти ту саму лему. Прикладаючи її, дістанемо рівність:

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{n-1}\psi_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{n-2}\psi_1(x)},$$

де A_1 — якесь стале, а $\varphi_2(x)$ — якийсь многочлен.

Тепер до виразу $\frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{n-2}\psi_1(x)}$ ми знову можемо прикласти ту ж лему.

Прикладемо ж цю лему послідовно кілька разів. Позначаючи через

$$A,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_{n-1}$$

відповідні сталі, а через

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots,\ \varphi_n(x)$$

— відповідні многочлени, ми дістанемо рівності:

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n \psi_1(x)} &= \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{n-1} \psi_1(x)}, \\
\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{n-1} \psi_1(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{n-2} \psi_1(x)}, \\
\frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{n-2} \psi_1(x)} &= \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \frac{\varphi_3(x)}{(x-a)^{n-3} \psi_1(x)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\varphi_{n-2}(x)}{(x-a)^2 \psi_1(x)} &= \frac{A_{n-2}}{(x-a)^2} + \frac{\varphi_{n-1}(x)}{(x-a) \psi_1(x)}, \\
\frac{\varphi_{n-1}(x)}{(x-a) \psi_1(x)} &= \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{\varphi_n(x)}{\psi_1(x)}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Прикладати далі нашу лему вже не можна, бо в знаменнику останнього дробу немає множника $(x-a)$.

Додамо всі рівності (7). Після очевидних скорочень дістанемо якусь рівність. Для зручності дальшого позначимо в ній многочлен $\varphi_n(x)$ через $\varphi_1(x)$. Тоді одержимо другу лему.

Друга лема. Якщо $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — многочлени і a — корінь n-ої кратності многочлена $\psi(x)$, то завжди існують такі сталі $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, що дійсна рівність

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^n \psi_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \\ + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \ldots + \frac{A_{n-2}}{(x-a)^2} + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}, \tag{8}$$

де $\varphi_1(x)$ — якийсь цілком означений многочлен.

Сталі $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$ називаються коефіцієнтами розкладу.

Вираз

$$\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{(x-a)} \tag{9}$$

називається полярною частиною даної функції $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, відповідною кореневі a.

Позначаючи цю полярну частину через P_a, рівність (8) можемо переписати в такій формі:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n\psi_1(x)}=P_a+\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}. \qquad (10)$$

Якщо тепер b — корінь кратності m знаменника $\psi_1(x)$ і, отже,

$$\psi_1(x)=(x-b)^m\psi_2(x),$$

то таким же способом ми можемо розкласти і дріб $\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$, що стоїть у правій частині (10). Тоді він представиться у формі:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}=\frac{\varphi_1(x)}{(x-b)^m\psi_2(x)}=P_b+\frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)},$$

де P_b — полярна частина, що відповідає кореневі b.

В загальному випадку припустимо, що знаменник $\psi(x)$ даного раціонального дробу має m не рівних між собою коренів

$$a,\ b,\ c,\ldots,\ k,\ l$$

відповідно кратності

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots,\ \varkappa,\ \lambda.$$

Тоді многочлен $\psi(x)$ представиться в такій формі:

$$\psi(x)=a_0(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma\ldots(x-k)^\varkappa(x-l)^\lambda.$$

Нехай для скорочення писання

$$\begin{aligned}
\psi(x)&=(x-a)^\alpha\psi_1(x),\\
\psi_1(x)&=(x-b)^\beta\psi_2(x),\\
\psi_2(x)&=(x-c)^\gamma\psi_3(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\psi_{m-2}(x)&=(x-k)^\varkappa\psi_{m-1}(x),\\
\psi_{m-1}(x)&=(x-l)^\lambda\psi_m(x),
\end{aligned}$$

де останній многочлен $\psi_m(x)$ при цьому вироджується в стале a_0. Прикладаючи кілька разів другу лему, маємо рівності

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha\psi_1(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)}+\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-b)^\beta\psi_2(x)}=\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)}+\frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)},$$

$$\frac{\varphi_2(x)}{(x-c)^\gamma\psi_3(x)}=\frac{C}{(x-c)^\gamma}+\frac{C_1}{(x-c)^{\gamma-1}}+\ldots+\frac{C_{\gamma-1}}{(x-c)}+\frac{\varphi_3(x)}{\psi_3(x)},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{\varphi_{m-2}(x)}{(x-k)^{\varkappa}\psi_{m-1}(x)}=\frac{K}{(x-k)^{\varkappa}}+\frac{K_1}{(x-k)^{\varkappa-1}}+\ldots+\frac{K_{\varkappa-1}}{(x-k)}+\frac{\varphi_{m-1}(x)}{\psi_{m-1}(x)},$$

$$\frac{\varphi_{m-1}(x)}{(x-l)^{\lambda}\psi_m(x)}=\frac{L}{(x-l)^{\lambda}}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{(x-l)}+\frac{\varphi_m(x)}{\psi_m(x)},$$

де $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ — якісь многочлени.

Додаємо всі ці рівності. Останній член

$$\frac{\varphi_m(x)}{\psi_m(x)}=\frac{\varphi_m(x)}{a_0}$$

є многочлен. В окремому випадку він може дорівнювати нулеві. Його позначимо через $F(x)$ і поставимо на перше місце. Одержуємо теорему.

Теорема. **Якщо $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — м огочлени і якщо**

$$\psi(x)=a_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda}, \tag{11}$$

то раціональна функція $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ завжди може бути представлена в такій формі:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=F(x)&+\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)}+\\&+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)}+\\&+\frac{C}{(x-c)^{\gamma}}+\frac{C_1}{(x-c)^{\gamma-1}}+\ldots+\frac{C_{\gamma-1}}{(x-c)}+\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{L}{(x-l)^{\lambda}}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{(x-l)},\end{aligned} \tag{12}$$

де $F(x)$ — многочлен, що є цілою частиною функції, яку розкладають, і

$$A, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}, B, B_1, \ldots, B_{\beta-1}, \ldots, L_{\lambda-1}$$

— сталі, які називаються коефіцієнтами розкладу.

Якщо даний дріб $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ правильний, то многочлен $F(x)$, очевидно, тотожно дорівнює нулеві.

Розклад (12) буде при всяких коренях — як дійсних, так і уявних. Коефіцієнти при x у всіх лінійних множниках (11) дорівнюють одиниці. В прикладаннях вони часто даються відмінними від одиниці.

Нехай $px+q$ — лінійний множник, що стоїть у знаменнику в якомусь степені. Тоді цьому множникові відповідає корінь $-\frac{q}{p}$, бо:

$$px+q=p\left(x+\frac{q}{p}\right).$$

Полярна частина, що відповідає цьому кореневі, складатиметься з суми дробів типу

$$\frac{A'}{\left(x+\frac{q}{p}\right)^k}=\frac{A'p^k}{(px+q)^k}.$$

Приймаючи, що $A = A'p^k$, дістанемо дріб типу:

$$\frac{A}{(px+q)^k}.$$

Отже, при розкладі раціонального дробу завжди можна знаменники полярних частин брати в тій формі, в якій вони стоять у знаменнику даної функції. Так, наприклад, якщо

$$\frac{\varphi(x)}{(3x+1)^3\cdot(2x+5)^2\cdot(7x+8)}$$

— дана раціональна функція, то згідно з теоремою завжди можна знайти такі сталі $A, B, C, \ldots$, щоб була рівність:

$$\frac{\varphi(x)}{(3x+1)^3(2x+5)^2(7x+8)}=F(x)+\frac{A}{(3x+1)^3}+\frac{B}{(3x+1)^2}+$$
$$+\frac{C}{3x+1}+\frac{D}{(2x+5)^2}+\frac{E}{(2x+5)}+\frac{K}{7x+8},$$

де $F(x)$ — многочлен, рівний цілій частині лівої частини, якщо вона є неправильний дріб, і рівний нулеві, якщо вона є правильний дріб.

§ 77. Інтегрування раціональної функції у випадку дійсних коренів знаменника.

Розкладом раціональної функції на елементарні дроби першого типу ми можемо скористатись для обчислення її інтеграла в тому випадку, коли всі корені знаменника дійсні. Справді, якщо, як і раніше:

$$\psi(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda,$$

то, як ми бачили,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=F(x)+\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{A_{\alpha-2}}{(x-a)^2}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)}+$$
$$+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\ldots+\frac{B_{\beta-2}}{(x-b)^2}+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)}+ \qquad (1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{L}{(x-l)^\lambda}+\ldots+\frac{L_{\lambda-2}}{(x-l)^2}+\frac{L_{\lambda-1}}{(x-l)}.$$

Нехай

$$\int F(x)\,dx = \Phi(x) + C.$$

Оскільки $F(x)$ — многочлен, то інтеграл $\Phi(x)$ від нього ми завжди легко можемо обчислити. За теоремою про інтеграл суми з (1) маємо:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx = \Phi(x) -$$

$$- \frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} - \ldots - \frac{A_{\alpha-2}}{(x-a)} + A_{\alpha-1}\ln|x-a| -$$

$$- \frac{B}{(\beta-1)(x-b)^{\beta-1}} - \ldots - \frac{B_{\beta-2}}{(x-b)} + B_{\beta-1}\ln|x-b| - \qquad (2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$- \frac{L}{(\lambda-1)(x-l)^{\lambda-1}} - \ldots - \frac{L_{\lambda-2}}{(x-l)} + L_{\lambda-1}\ln|x-l| + C,$$

і інтеграл від $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ обчислений. Отже,

у випадку дійсних коренів знаменника інтеграл від усякої раціональної функції завжди може бути обчислений розкладанням її на елементарні дроби першого типу.

Але навіть і для випадку дійсних коренів знаменника ми задачу про інтегрування раціональної функції не можемо ще вважати розв'язаною остаточно, бо для цього попередньо треба розкласти раціональну функцію на елементарні дроби. Очевидно, одна справа — довести можливість такого розкладу і зовсім інша справа — фактично провести такий розклад, тобто обчислити коефіцієнти $A, B, \ldots, L$.

Щоб розкласти раціональну функцію на елементарні дроби, насамперед потрібно знати корені її знаменника. Вища алгебра вчить, як їх можна обчислити в кожному випадку з бажаним степенем точності. Тому, вважаючи задачу про обчислення коренів задачею вищої алгебри, ми нижче припускатимемо, що ці корені вже відомі.

Якщо степінь чисельника $\varphi(x)$ вищий або дорівнює степеневі знаменника $\psi(x)$, то, виконавши ділення $\varphi(x)$ на $\psi(x)$ і обчисливши частку $\omega(x)$ і остачу $\varphi_1(x)$, ми дану раціональну функцію можемо представити у вигляді

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \omega(x) + \frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)},$$

де $\frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)}$ — уже правильний дріб. Тому припускатимемо, що дана раціональна функція вже зведена до правильного дробу.

Існує кілька методів для обчислення коефіцієнтів розкладу. З них тут ми розглянемо три.

§ 78. Метод диференціювання.

Нехай

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n\psi_1(x)}$$

— дана раціональна функція.

Припускаючи, що вона є правильний дріб, ми за другою лемою маємо:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n\psi_1(x)}=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{(x-a)}+\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}. \quad (1)$$

Помножуючи на $(x-a)^n$, дістаємо:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}=A+A_1(x-a)+\ldots+A_{n-1}(x-a)^{n-1}+$$
$$+(x-a)^n\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}, \quad (2)$$

де многочлен $\psi_1(x)$ не перетворюється в нуль при $x=a$.

Позначаючи ліву частину (2) через $\omega(x)$:

$$\omega(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)} \quad (3)$$

і покладаючи $x-a=h$, $x=a+h$, замінимо в (2) x через $a+h$. Дістанемо

$$\omega(a+h)=A+hA_1+h^2A_2+\ldots+h^{n-1}A_{n-1}+h^n\frac{\varphi_1(a+h)}{\psi_1(a+h)}. \quad (4)$$

В той же час за рядком Тейлора

$$\omega(a+h)=\omega(a)+h\omega'(a)+\frac{h^2\omega''(a)}{2!}+\ldots+h^{n-1}\frac{\omega^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}+$$
$$+h^n\frac{\omega^{(n)}(a+\theta h)}{n!}, \quad (5)$$

де остача взята у формі Лагранжа.

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях у h у правих частинах (4) і (5), робимо висновок, що

$$A=\omega(a),\quad A_1=\frac{\omega'(a)}{1},\ldots,A_{n-1}=\frac{\omega^{(n-1)}(a)}{(n-1)!},$$

і взагалі

$$A_k=\frac{\omega^{(k)}(a)}{k!}. \quad (6)$$

Беручи до уваги (3), ми бачимо: щоб обчислити A_k, треба вираз

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)} \quad (7)$$

продиференціювати k раз і в одержаній похідній покласти $x=a$. Тому рівність (6) можна записати так:

$$A_k=\frac{1}{k!}\left|^{x=a}\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}\right)\right.. \tag{8}$$

Ми бачимо, що

при розкладі раціональної функції

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n\,\psi_1(x)},$$

знаменник якої має a коренем кратності n, коефіцієнти полярної частини

$$\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-a},$$

відповідної цьому кореневі a, можуть бути обчислені диференціюванням відповідне число разів виразу:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)} \tag{9}$$

за формулою:

$$A_k=\frac{1}{k!}\left|^{x=a}\frac{d\left(\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}\right)}{dx^k}\right.. \tag{10}$$

Через те що a — довільно взятий корінь знаменника, таким же шляхом можуть бути обчислені і всі інші коефіцієнти розкладу.

Цей спосіб обчислення коефіцієнтів можна назвати методом диференціювання. Не зважаючи на свою теоретичну простоту, зрозуміло, що він мало придатний для фактичного обчислення, бо вже похідна першого порядку від виразу (9) досить складна:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}\right)=\frac{\psi_1(x)\,\varphi'(x)-\varphi(x)\,\psi_1'(x)}{\psi_1(x)^2}.$$

Складність другої похідної, а тим більше дальших, очевидна.

До цього ще додається те, що по суті обчислення всіх цих похідних є непродуктивною витратою часу і праці, бо кінець-кінцем нам потрібні не самі похідні, а тільки їх значення при $x=a$.

Таким чином, для практичних цілей метод диференціювання мало придатний. Треба шукати інших методів.

Метод диференціювання застосовується дуже легко тільки в двох випадках: або коли всі корені знаменника прості, або коли знаменник має тільки один корінь будьякої кратності, тобто коли дана раціональна функція вигляду

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}.$$

Розглянемо спочатку цей другий випадок. Згідно з загальною теоремою маємо:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}=F(x)+\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{(x-a)},$$

і в правій частині більше ніяких членів немає. Звідси

$$\varphi(x)=A+A_1(x-a)+\ldots+A_{n-1}(x-a)^{n-1}+(x-a)^n F(x).$$

Приймаючи $x=a+h$, дістанемо:

$$\varphi(a+h)=A+hA_1+h^2A_2+\ldots+h^{n-1}A_{n-1}+h^nF(a+h).$$

Розміщаючи ліву частину по степенях h і порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях h, обчислимо A, A_1, ..., A_{n-1} і многочлен $F(x)$.

Нехай, наприклад, потрібно обчислити інтеграл

$$\int\frac{4x^3-5x+7}{(2x-1)^{10}}\,dx.$$

Приймаючи, що

$$2x-1=h,\quad x=\frac{1}{2}+\frac{h}{2},$$

знайдемо, що

$$\frac{4x^3-5x+7}{(2x-1)^{10}}=\frac{4\left(\frac{1+h}{2}\right)^3-5\frac{1+h}{2}+7}{h^{10}}=$$

$$=\frac{10-2h+3h^2+h^3}{2h^{10}}=\frac{5}{h^{10}}-\frac{1}{h^9}+\frac{3}{2h^8}+\frac{1}{2h^7}.$$

Заміняючи знову h через $2x-1$, дістанемо

$$\frac{4x^3-5x+7}{(2x-1)^{10}}=\frac{5}{(2x-1)^{10}}-\frac{1}{(2x-1)^9}+\frac{3}{2(2x-1)^8}+\frac{1}{2(2x-1)^7},$$

а тому

$$\int\frac{4x^5-5x+7}{(2x-1)^{10}}\,dx=-\frac{5}{18(2x-1)^9}+$$

$$+\frac{1}{16(2x-1)^8}-\frac{3}{28(2x-1)^7}-\frac{1}{24(2x-1)^6}+C,$$

і інтеграл обчислений.

Розглянемо тепер випадок, коли знаменник виразу

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

має тільки прості корені. Нехай

$$\psi(x) = a_0(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l).$$

Припускаючи, що дріб правильний, маємо:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{K}{x-l}. \qquad (11)$$

Звідси

$$\frac{\varphi(x)(x-a)}{\psi(x)} = A + (x-a)\left(\frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{K}{x-l}\right).$$

Нехай x прямує до a. В границі маємо:

$$A = \lim_{x\to a} \varphi(x) \cdot \frac{x-a}{\psi(x)} = \varphi(a) \lim_{x\to a} \frac{x-a}{\psi(x)}.$$

Другий множник у границі має неозначений вигляд. Прикладаючи правило Лопіталя, знайдемо

$$A = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Очевидно, що

$$B = \frac{\varphi(b)}{\psi'(b)}, \quad C = \frac{\varphi(c)}{\psi'(c)}.$$

Тепер з (1) дістаємо

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)(x-a)} + \frac{\varphi(b)}{\psi'(b)(x-b)} + \ldots + \frac{\varphi(l)}{\psi'(l)(x-l)}, \qquad (12)$$

і ліва частина розкладена на елементарні дроби.

Нехай, наприклад, треба обчислити інтеграл

$$G = \int \frac{2x^2+1}{x^3-x}\,dx.$$

В даному випадку

$$x^3 - x = x(x-1)(x+1),$$

а тому

$$\frac{2x^2+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Покладаючи

$$\varphi(x) = 2x^2+1, \quad \psi(x) = x^3 - x, \quad \psi'(x) = 3x^2 - 1,$$

маємо

$$A = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = -1, \quad B = \frac{\varphi(1)}{\psi'(1)} = \frac{3}{2}, \quad C = \frac{\varphi(-1)}{\psi'(-1)} = \frac{3}{2},$$

а тому

$$\int \frac{2x^2+1}{x^3-x}\,dx = \int \left\{ -\frac{1}{x} + \frac{3}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x+1)} \right\} dx =$$

$$= -\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x^2-1| + C.$$

§ 79. Метод довільних значень.

Суть цього методу легко з'ясовується на прикладі. Нехай потрібно обчислити інтеграл

$$G = \int \frac{x^2+6}{(x+3)^2(2x+1)}\,dx. \qquad (1)$$

Згідно з загальною теорією пишемо:

$$\frac{x^2+6}{(x+3)^2(2x+1)} = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{(x+3)} + \frac{C}{2x+1}. \qquad (2)$$

Зводячи до спільного знаменника і прирівнюючи потім чисельників, дістаємо

$$x^2+6 = A(2x+1) + B(x+3)(2x+1) + C(x+3)^2. \qquad (3)$$

Ця рівність повинна бути при всякому x. Якщо ми в ній приймемо x рівним, наприклад, 7, то дістанемо рівняння між невідомими A, B, C. Тому, що у нас є три невідомих, надамо x довільно три якихнебудь значення. Дістанемо три рівняння першого степеня відносно A, B, C. Розв'язавши ці рівняння, знайдемо невідомі.

Звичайно, природно для x добирати такі значення, щоб обчислення були по змозі прості. В нашому випадку, приймаючи x послідовно рівним 0, 1 і -1, дістанемо три такі рівняння:

$$A + 3B + 9C = 6,$$
$$3A + 12B + 16C = 7,$$
$$-A - 2B + 4C = 7,$$

з яких знайдемо:

$$A = -3, \quad B = 0, \quad C = 1.$$

Отже,

$$\int \frac{x^2+6}{(x+3)^2(2x+1)}\,dx = \int \left\{ \frac{-3}{(x+3)^2} + \frac{1}{2x+1} \right\} dx =$$

$$= \frac{3}{x+3} + \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C,$$

і інтеграл обчислений.

Коли для визначення коефіцієнтів розкладу у відповідній рівності надають змінному стільки довільно дібраних значень, скільки є коефіцієнтів розкладу, то говорять, що застосовують метод довільних значень.

Цей метод завжди веде до мети, хоч звичайно супроводжується довгими обчисленнями. Вони скорочуються, якщо значення для x вдало дібрані. Цей добір сам собою напрошується в тому випадку, який треба відзначити, коли всі корені a_1, $a_2, \ldots, a_n$ знаменника $\psi(x)$ прості, і, отже:

$$\psi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n).$$

В цьому випадку, припускаючи, що даний дріб $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ правильний, маємо:

$$\frac{\varphi(x)}{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}. \quad (4)$$

Щоб обчислити A, помножуємо обидві частини рівності на $x - a_1$. Тоді в лівій частині цей множник у знаменнику скоротиться, і ми дістанемо рівність:

$$\frac{\varphi(x)}{(x - a_2)(x - a_3)\ldots(x - a_n)} =$$

$$= A_1 + (x - a_1)\left(\frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}\right). \quad (5)$$

Приймаючи в ній $x = a_1$, знайдемо:

$$\frac{\varphi(a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n)} = A_1,$$

і стале A_1 обчислене. На практиці рівність (5) можна, звичайно, не писати, бо, зважаючи на (4), її неважко мислено уявити.

Помножуючи мислено (4) на $x - a_2$ і приймаючи потім $x = a_2$, знайдемо:

$$\frac{\varphi(a_2)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n)} = A_2$$

і т. д. Помножуючи, нарешті, на $x - a_n$ і приймаючи $x = a_n$, дістанемо:

$$\frac{\varphi(a_n)}{(a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1})} = A_n,$$

і всі коефіцієнти розкладу обчислені.

Нехай, наприклад, треба обчислити інтеграл

$$G = \int \frac{2x + 3}{(2x - 1)(x + 1)(x - 4)}\, dx.$$

Пишемо

$$\frac{2x+3}{(2x-1)(x+1)(x-4)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-4}.$$

Помножуючи мислено на $2x-1$ і приймаючи $x=\frac{1}{2}$, знайдемо

$$A=\frac{4}{\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)}=-\frac{16}{21}.$$

Помножуючи на $x+1$ і приймаючи $x=-1$, дістанемо:

$$B=\frac{1}{-3\cdot-5}=\frac{1}{15}.$$

Таким же шляхом знайдемо:

$$C=\frac{11}{7\cdot5}=\frac{11}{35}.$$

Тепер маємо:

$$G=\int\left\{-\frac{16}{21(2x-1)}+\frac{1}{15(x+1)}+\frac{11}{35(x-4)}\right\}dx=$$
$$=-\frac{8}{21}\ln|2x-1|+\frac{1}{15}\ln|x+1|+\frac{11}{35}\ln|x-4|+C.$$

Отже, можна дати

Правило. **При обчисленні коефіцієнтів розкладу корисно змінному надавати значень, рівних кореням знаменника.**

Це корисно і в тому випадку, коли не всі корені прості. Нехай, наприклад, треба обчислити інтеграл:

$$G=\int\frac{3x^2+1}{(x-1)^3(x+1)^3}dx. \qquad (6)$$

Знаменник дорівнює $(x-1)^3(x+1)^3$, а тому пишемо:

$$\frac{3x^2+1}{(x-1)^3(x+1)^3}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)}+$$
$$+\frac{D}{(x+1)^3}+\frac{E}{(x+1)^2}+\frac{F}{(x+1)}. \qquad (7)$$

Після зведення до спільного знаменника дістанемо

$$3x^2+1=A(x+1)^3+B(x+1)^3(x-1)+C(x+1)^3(x-1)^2+$$
$$+D(x-1)^3+E(x-1)^3(x+1)+F(x-1)^3(x+1)^2. \qquad (8)$$

Приймаючи $x=+1$ і $x=-1$, знайдемо

$$A=\frac{1}{2},\quad D=-\frac{1}{2}. \tag{9}$$

Два коефіцієнти обчислені. Щоб обчислити всі інші, надаємо x значення нуль. Дістанемо рівняння:

$$A-B+C-D-E-F=1. \tag{10}$$

Треба одержати ще три рівняння.

Надати x значення нуль — означає в многочленах, що стоять у правій і лівій частинах рівності (8), порівняти вільні члени. Корисно також завжди порівнювати коефіцієнти при найвищих степенях змінного.

В правій частині рівності (8) стоїть, як неважко бачити, многочлен п'ятого степеня. Коефіцієнт при x^5 легко знайти. Прирівнюючи його до коефіцієнта при тому ж степені в лівій частині, дістанемо рівняння

$$C+F=0. \tag{11}$$

Щоб дістати ще два рівняння, можна було б просто надати x у (8) два якихнебудь значення. Але краще зробити так: продиференціюємо рівність (8) і після диференціювання приймемо x рівним одному з коренів знаменника, в нашому випадку рівним $+1$ або -1. При цьому зауважимо, що фактично немає потреби диференціювати всі члени. Справді, якщо ми маємо член вигляду:

$$(x-a)^k\omega(x),\quad k>1$$

і після диференціювання ми повинні прийняти $x=a$, то зрозуміло, що ми дістанемо нуль. Взагалі, якщо після диференціювання не буде прийнято $x=a$, то ті члени, в які $x-a$ входить у якомусь степені, можна й не писати.

Диференціюємо ж рівність (8) для того, щоб після диференціювання прийняти $x=1$. Тому при диференціюванні виписуємо тільки ті члени, в похідні яких $(x-1)$ не входить спільним множником. Дістанемо:

$$6x=3A(x+1)^2+B(x+1)^3+\ldots$$

Приймаючи тут $x=1$, знайдемо

$$12A+8B=6. \tag{12}$$

Диференціюємо тепер (8), щоб потім прийняти $x=-1$. Тому члени, що містять $x+1$ множником, не виписуємо. Знайдемо

$$6x=3D(x-1)^2+E(x-1)^3+\ldots$$

Приймаючи $x=-1$, дістанемо:

$$12D-8E=-6. \tag{13}$$

Тепер з (9), (10), (11), (12), (13) — з шести рівнянь — знайдемо

$$A=\frac{1}{2},\quad D=-\frac{1}{2},\quad B=C=E=F=0,$$

а тому

$$\int\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}dx=\int\left\{\frac{1}{2(x-1)^3}-\frac{1}{2(x+1)^3}\right\}dx=$$
$$=-\frac{1}{4(x-1)^2}+\frac{1}{4(x+1)^2}+C=-\frac{x}{(x^2-1)^2}+C. \qquad (14)$$

§ 80. Метод порівнювання коефіцієнтів.

Обчислимо інтеграл

$$G=\int\frac{4x^4+16x^3+17x^2+6x}{(2x+3)^2(x+1)}dx. \qquad (1)$$

Знаменник — третього степеня, чисельник — четвертого. Отже, ціла частина є якийсь многочлен першого степеня. Тому пишемо:

$$\frac{4x^4+16x^3+17x^2+6x}{(2x+3)^2(x+1)}=$$
$$=Ax+B+\frac{C}{(2x+3)^2}+\frac{D}{(2x+3)}+\frac{E}{x+1}. \qquad (2)$$

Зводимо до спільного знаменника і прирівнюємо чисельники:

$$4x^4+16x^3+17x^2+6x=(Ax+B)(2x+3)^2(x+1)+C(x+1)+$$
$$+D(2x+3)(x+1)+E(2x+3)^2.$$

У правій частині розкриваємо дужки і розміщаємо по степенях x:

$$4x^4+16x^3+17x^2+6x=4Ax^4+(16A+4B)x^3+$$
$$+(21A+16B+2D+4E)x^2+(9A+21B+C+5D+12E)x+$$
$$+(9B+C+3D+9E).$$

Коефіцієнти при одних і тих же степенях x у тій і другій частині повинні бути рівні. Прирівнюючи їх, дістанемо рівняння:

$$4A=4;\quad 16A+4B=16;$$
$$21A+16B+2D+4E=17;$$
$$9A+21B+C+5D+12E=6;$$
$$9B+C+3D+9E=0.$$

Числом їх стільки ж, скільки невідомих сталих. Розв'язуючи їх, знайдемо:

$$A=1,\quad B=0,\quad C=9,\quad D=0,\quad E=-1,$$

а тому

$$\int \frac{4x^4+16x^3+17x^2+6x}{(2x+3)^2(x+1)}dx = \int \left\{ x + \frac{9}{(2x+3)^2} - \frac{1}{x+1} \right\} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2(2x+3)} - \ln|x+1| + C. \qquad (3)$$

Коли для обчислення коефіцієнтів розкладу порівнюють коефіцієнти при однакових степенях невідомого, то говорять, що застосовують метод порівнювання коефіцієнтів.

Отже, інтеграл (1) обчислений методом порівнювання коефіцієнтів.

§ 81. Порівнювання методів.

Ми розглянули три методи: метод диференціювання, метод довільних значень і метод порівнювання коефіцієнтів. Якому ж із них надати переваги на практиці?

Перший метод — метод диференціювання — має велике значення при теоретичних дослідженнях, але на практиці він призводить до довгих обчислень, а тому, природно, відпадає. Його вигідно застосовувати тільки в тому окремому випадку, коли дана функція має вигляд:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}.$$

Тоді шуканий розклад дістаємо швидко. Приймаючи $x-a=h$, $x=a+h$, ми маємо:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n} = \frac{\varphi(a+h)}{h^n} = \frac{A+A_1h+\ldots+A_nh^m}{h^n},$$

і розклад одержано.

Вибір одного з двох інших методів залежить від особистого смаку. Метод порівнювання коефіцієнтів спокійний. Він вимагає тільки механічного виконання певних дій. Щодо цього метод довільних значень вимагає великого напруження уваги, але зате він не вимагає розкриття дужок. У всякому разі, якщо всі корені прості, то він має незаперечну перевагу на практиці, і в цьому випадку завжди треба користуватись ним.

Якщо дана раціональна функція — неправильний дріб, то, як правило, краще спочатку простим діленням виключити її цілу частину. Але можна робити й так, як ми зробили при обчисленні інтеграла (1) на стор. 161.

Читачеві рекомендується, щоб цілком оволодіти зазначеними методами, розв'язати кілька задач обома методами: методом довільних значень і методом порівнювання коефіцієнтів.

§ 82. Інтегрування раціональних функцій у випадку уявних коренів знаменника.

Нехай, як і раніше,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

— дана раціональна функція, але припустимо, що серед коренів її знаменника є не тільки дійсні, але й уявні, які, через те що всі коефіцієнти многочлена $\psi(x)$ дійсні, необхідно попарно спряжені в одній і тій же кратності. Ми бачили (§ 73), що в такому випадку знаменник може бути представлений у вигляді добутку лінійних множників і множників другого степеня:

$$\psi(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots\ (a'x^2+b'x+c')^{n}\ldots,$$

де кожний лінійний множник відповідає дійсному кореневі, а кожний квадратний тричлен — парі спряжених уявних коренів.

Нехай

$$x_1 = p+qi \quad \text{і} \quad x_2 = p-qi \tag{1}$$

— яканебудь пара спряжених коренів знаменника $\psi(x)$ кратності n, і нехай ax^2+bx+c — множник, відповідний цим кореням. В такому випадку

$$\psi(x) = (ax^2+bx+c)^n\,\psi_1(x), \tag{2}$$

де $\psi_1(x)$ — добуток усіх інших множників. Зрозуміло, що $\psi_1(x)$ — якийсь многочлен теж з дійсними коефіцієнтами, який напевне не перетворюється в нуль при $x=x_1$ і при $x=x_2$:

$$\psi_1(x_1) \neq 0, \quad \psi_1(x_2) \neq 0. \tag{3}$$

Зауваживши це, розглянемо дану функцію

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{(ax^2+bx+c)^n\,\psi_1(x)}. \tag{4}$$

Якими б не були сталі M і N, ми можемо написати рівність:

$$\frac{\varphi(x)}{(ax^2+bx+c)^n\,\psi_1(x)} = \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} - \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} +$$

$$+\frac{\varphi(x)}{(ax^2+bx+c)^n\,\psi_1(x)} = \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{\varphi(x)-(Mx+N)\,\psi_1(x)}{(ax^2+bx+c)^n\,\psi_1(x)}. \tag{5}$$

Подивимось, чи не можна дібрати M і N так, щоб чисельник другого дробу

$$\varphi(x)-(Mx+N)\,\psi_1(x) \tag{6}$$

поділявся націло на квадратний тричлен у дужках. Оскільки

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

то для цього досить і необхідно, щоб чисельник (6) поділявся без остачі як на $x-x_1$, так і на $x-x_2$, тобто за теоремою Безу необхідно і досить, щоб x_1 і x_2 були його коренями. Отже, ми повинні дослідити, чи можна дібрати M і N так, щоб водночас мати рівності:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1)-(Mx_1+N)\psi_1(x_1)=0, \\ \varphi(x_2)-(Mx_2+N)\psi_1(x_2)=0. \end{aligned} \tag{7}$$

Перепишемо їх у такій формі:

$$\begin{aligned} Mx_1+N=\frac{\varphi(x_1)}{\psi_1(x_1)}, \\ Mx_2+N=\frac{\varphi(x_2)}{\psi_1(x_2)}, \end{aligned} \tag{8}$$

де

$$x_1=p+qi, \quad x_2=p-qi.$$

Нехай

$$\frac{\varphi(x_1)}{\psi_1(x_1)}=\frac{\varphi(p+qi)}{\psi_1(p+qi)}=P+Qi. \tag{9}$$

Відносно P і Q нам досить тільки знати, що вони якісь дійсні числа.

Коефіцієнти многочленів $\varphi(x)$ і $\psi_1(x)$ дійсні, а тому, якщо ми у виразі $\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}$ замінимо x двома спряженими значеннями, одержані результати повинні бути теж спряжені. Тому поруч з рівністю (9) необхідно матимемо рівність:

$$\frac{\varphi(x_2)}{\psi_1(x_2)}=\frac{\varphi(p-qi)}{\psi_1(p-qi)}=P-Qi. \tag{10}$$

Тепер рівності (8) можна переписати в такій формі:

$$\begin{aligned} M(p+qi)+N=P+Qi, \\ M(p-qi)+N=P-Qi. \end{aligned}$$

Додаючи і віднімаючи їх, дістанемо:

$$\begin{aligned} Mp+N=P, \\ Mq=Q, \end{aligned}$$

звідки

$$M=\frac{Q}{q}, \quad N=P-\frac{pQ}{q}. \tag{11}$$

Виявляється, що бажані M і N можна знайти. Важливо відзначити, що одержувані для них значення дійсні.

Взявши M і N такими, як вони визначаються рівностями (11), ми з (5) дістанемо:

$$\frac{\varphi(x)}{(ax^2+bx+c)^n\psi_1(x)}=\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}+\frac{\varphi_1(x)}{(ax^2+bx+c)^{n-1}\psi_1(x)}, \quad (12)$$

де

$$\varphi_1(x)=\frac{\varphi(x)-(Mx+N)}{ax^2+bx+c}, \quad (13)$$

при чому чисельник правої частини поділяється на знаменник без остачі, а тому $\varphi_1(x)$ — многочлен. Одержуємо лему:

Лема. **Якщо $\varphi(x)$ і $\psi_1(x)$ — многочлени з дійсними коефіцієнтами і якщо квадратний тричлен ax^2+bx+c, теж з дійсними коефіцієнтами, має уявні корені, які не є коренями многочлена $\psi_1(x)$, то завжди можна знайти такі сталі M і N і до того дійсні, що**

$$\frac{\varphi(x)}{(ax^2+bx+c)^n\psi_1(x)}=\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}+\frac{\varphi_1(x)}{(ax^2+bx+c)^{n-1}\psi_1(x)},$$

де $\varphi_1(x)$ — якийсь многочлен з дійсними коефіцієнтами.

Але ту ж лему ми можемо прикласти і до другого доданку правої частини і т. д. Прикладаючи її кілька разів і позначаючи через R квадратний тричлен:

$$R=ax^2+bx+c,$$

дістанемо рівності:

$$\frac{\varphi(x)}{R^n\psi_1(x)}=\frac{Mx+N}{R^n}+\frac{\varphi_1(x)}{R^{n-1}\psi_1(x)},$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{R^{n-1}\psi_1(x)}=\frac{M_1x+N_1}{R^{n-1}}+\frac{\varphi_2(x)}{R^{n-2}\psi_1(x)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\varphi_{n-2}(x)}{R^2\psi_1(x)}=\frac{M_{n-2}x+N_{n-2}}{R^2}+\frac{\varphi_{n-1}(x)}{R\psi_1(x)},$$

$$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{R\psi_1(x)}=\frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{R}+\frac{\varphi_n(x)}{\psi_1(x)}.$$

Додамо ці рівності; одержуємо лему:

Лема. **Якщо $\psi_1(x)$ не перетворюється в нуль при коренях тричлена, то**

$$\frac{\varphi(x)}{(ax^2+bx+c)^n\psi_1(x)}=\frac{Mx+N}{R^n}+\frac{M_1x+N}{R^{n-1}}+\ldots+$$
$$+\frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{R}+\frac{\varphi_n(x)}{\psi_1(x)},$$

де $M, N, \ldots, N_{n-1}$ — сталі і $\varphi_n(x)$ — якийсь многочлен.

Ми бачимо, що кожному квадратному многочленові відповідають у розкладі елементарні дроби другого типу.

Якщо виявиться, що многочлен $\psi_1(x)$ теж містить деякий множник другого степеня:

$$\psi_1(x) = (a'x^2 + b'x + c')^m \psi_2(x),$$

то вираз $\frac{\varphi_n(x)}{\psi_1(x)}$ ми також могли б розкласти, при чому у нас з'явилися б елементарні дроби вигляду:

$$\frac{P_k x + Q_k}{(a'x^2 + b'x + c')^k}.$$

Тепер зрозуміло, що в розкладі раціональної функції кожному дійсному кореневі відповідають елементарні дроби першого роду, а кожній парі спряжених коренів — елементарні дроби другого роду, а звідси випливає така

Теорема. **Якщо**

$$\psi(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (a'x^2 + b'x + c')^n \ldots (a^{(k)}x^2 + b^{(k)}x + c^{(k)})^m,$$

то раціональна функція $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ може бути розкладена на суму якогось многочлена, її цілої частини, і елементарних дробів першого і другого типів за такою схемою:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = F(x) +$$

$$+ \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} +$$

$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-2}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{Mx + N}{(a'x^2 + b'x + c')^n} + \frac{M_1 x + N_1}{(a'x^2 + b'x + c')^{n-1}} + \ldots + \frac{M_{n-1}x + N_{n-1}}{(a'x^2 + b'x + c')} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{Px + Q}{(a^{(k)}x^2 + b^{(k)}x + c^{(k)})^m} +$$

$$+ \frac{P_1 x + Q_1}{(a^{(k)}x^2 + b^{(k)}x + c^{(k)})^{m-1}} + \ldots + \frac{P_{m-1}x + Q_{m-1}}{(a^{(k)}x^2 + b^{(k)}x + c^{(k)})}.$$

Але інтеграл від кожного доданку правої частини може бути обчислений, а тому може бути обчислений і інтеграл від лівої частини.

Пригадавши тепер, що інтеграл від елементарного дробу другого роду виражається через логарифмічні і колові функції, ми можемо висловити таке твердження, основне в теорії інтегрування раціональної функції:

Інтеграл від усякої раціональної функції може бути обчислений. У випадку тільки дійсних коренів знаменника він виражається тільки через алгебричні функції і логарифмічні, до яких, у випадку уявних коренів, приєднується колова функція аркус-тангенс.

Для фактичного обчислення інтеграла раціональної функції її насамперед треба розкласти на елементарні дроби, для чого треба обчислити коефіцієнти розкладу. Це їх обчислення, як і у випадку тільки дійсних коренів, може бути проведене або методом довільних значень, або методом порівнювання коефіцієнтів.

Нехай, наприклад, потрібно обчислити інтеграл

$$\int \frac{11x+1}{(x+3)(2x^2+x+1)}\,dx.$$

Обчислимо його методом довільних значень. Згідно з теорією пишемо:

$$\frac{11x+1}{(x+3)(2x^2+x+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{2x^2+x+1}, \tag{14}$$

де A, B, C нам покищо невідомі. Зводячи (14) до спільного знаменника, маємо:

$$11x+1 = A(2x^2+x+1) + (Bx+C)(x+3). \tag{15}$$

Ця рівність справедлива при всякому x. У нас є три невідомі A, B, C, отже, для визначення їх нам потрібні три рівняння. Тому надаємо x в (15) трьох якихнебудь значень, звичайно, таких, щоб обчислення були по можливості простіші. Приймаючи, наприклад, спочатку $x=0$, потім $x=1$ і, нарешті, $x=-1$, знайдемо три рівняння:

$$1 = A+3C; \quad 12 = 4A+4B+4C; \quad -10 = 2A-2B+2C,$$

звідки

$$A=-2; \quad B=4; \quad C=1,$$

а тому

$$\int \frac{(11x+1)\,dx}{(x+3)(2x^2+x+1)} = \int\left\{-\frac{2}{x+3} + \frac{4x+1}{2x^2+x+1}\right\}dx =$$
$$= -2\ln|x+3| + \ln|2x^2+x+1| + C.$$

Обчислимо методом порівнювання коефіцієнтів інтеграл

$$\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx.$$

Згідно з теорією пишемо

$$\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

Після зведення до спільного знаменника маємо:

$$2x^3+x^2+5x+1=(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+3).$$

Розкриваємо в правій частині дужки і потім розміщаємо по степенях x. Маємо:

$$2x^3+x^2+5x+1=(A+C)x^3+(-A+B+D)x^2+$$
$$+(A-B+3C)x+B+3D.$$

При однакових степенях x коефіцієнти правої частини дорівнюють коефіцієнтам лівої. Одержуємо рівняння:

$$A+C=2;\quad -A+B+D=1;\quad A-B+3C=5;\quad B+3D=1,$$

звідки

$$A=0,\quad B=1,\quad C=2,\quad D=0,$$

а тому

$$\int\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}dx=\int\left\{\frac{1}{x^2+3}+\frac{2x}{x^2-x+1}\right\}dx=$$
$$=\int\left\{\frac{1}{x^2+3}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}\right\}dx=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\ln|x^2-x+1|+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Нехай потрібно обчислити інтеграл

$$G=\int\frac{x^4+2x^3+x^2+x+1}{x(x^2+x+1)^2}dx.$$

Корені множника x^2+x+1 уявні. Тому пишемо

$$\frac{x^4+2x^3+x^2+x+1}{x(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Зводячи до спільного знаменника і розміщаючи праву частину по степенях x, маємо

$$x^4+2x^3+x^2+x+1=(A+D)x^4+(2A+D+E)x^3+(3A+B+$$
$$+D+E)x^2+(2A+C+E)x+A.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, знайдемо, що

$$A=1,\quad B=-2,\quad C=-1,\quad D=0,\quad E=0,$$

а тому

$$\int\frac{x^4+2x^3+x^2+x+1}{x(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

В другому інтегралі правої частини чисельник дорівнює похідній від тричлена. Тому, обчисляючи його підстановкою, остаточно знайдемо, що

$$\int \frac{x^4+2x^3+x^2+x+1}{x(x^2+x+1)^2}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{x^2+x+1} + C.$$

§ 83. *Висновок.*

Інтеграл від усякої раціональної функції може бути обчислений.

МЕТОД РАЦІОНАЛІЗАЦІЇ.

Можливість обчислити інтеграл від усякої раціональної функції дає новий метод інтегрування, так званий метод раціоналізації.

Нехай дано інтеграл

$$\int \varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Приймаючи $x=\psi(t)$, маємо

$$\int \varphi(x)\,dx=\int \varphi[\psi(t)]\cdot\psi'(t)\,dt. \tag{2}$$

Якщо ми зуміємо дібрати функцію $\psi(t)$ так, щоб підінтегральна функція в інтегралі правої частини (2) була раціональною, то тоді ми можемо обчислити цей інтеграл. Тим самим буде обчислений і інтеграл (1). У такому випадку говорять, що він обчислений методом раціоналізації. Отже,

метод раціоналізації полягає в тому, що даний інтеграл обчисляють, перетворюючи його відповідним підставлянням в інтеграл від раціональної функції.

Так, наприклад, якщо

$$G=\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)},$$

то, приймаючи $x=t^2$, маємо

$$G=2\int \frac{dt}{1+t^2}.$$

Ми одержали інтеграл від раціональної функції, а тому ми можемо йо о обчислити. Тим самим і даний інтеграл буде обчислений методом раціоналізації. Очевидно, що

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+C.$$

Нижче ми розглянемо ряд класів функцій, як алгебричних, так і трансцендентних, інтеграли від яких можуть бути обчислені методом раціоналізації.

§ 84. Попередні зауваження.

В дальшому під позначенням

$$f(u, v, \ldots, w)$$

ми весь час будемо розуміти раціональну функцію від аргументів. Отже, символ f буде символом деякої сукупності тільки раціональних дій, тобто дій додавання, віднімання, множення, ділення і підношення до цілого додатного або від'ємного степеня. При цьому, коли ми говоримо про дії, позначені символом f, то ми розуміємо ті дії, необхідні для побудування функції, які виконуються тільки над змінними або над змінними і сталими. Але ми не зважаємо на дії, які виконуються тільки над самими сталими числами, бо якщо такі дії і входять у вираз функції, то числа, одержувані в результаті їх, розглядаються як дані числа. Наприклад, якщо

$$f(u, v, w) = \frac{\sqrt{2}\cdot u + (\lg 3)\, w}{v + \sqrt{5}},$$

то $f(u, v, w)$ — раціональна функція, хоч у правій частині ми й бачимо символи добування кореня і логарифмування. Але числа

$$\sqrt{2},\ \lg 3,\ \sqrt{5}$$

розглядаються як уже дані числа, а не як числа, які ще треба знайти через відповідні дії. Якщо ми їх позначимо через a, b, c, то матимемо

$$f(u, v, w) = \frac{au + bw}{v + c},$$

і зрозуміло, що $f(u, v, w)$ — раціональна функція.

Якщо в раціональній функції

$$f(u, v, \ldots, w)$$

її аргументи замінити деякими функціями

$$\varphi(x),\quad \psi(x), \ldots, \omega(x),$$

то одержувана функція

$$f[\varphi(x),\quad \psi(x), \ldots, \omega(x)] \tag{1}$$

називається функцією, раціональною відносно функцій

$$\varphi(x),\quad \psi(x), \ldots, \omega(x).$$

Але, звичайно, функція (1), як функція змінного x, може при цьому й не бути раціональною. Так, наприклад, якщо

$$f(u, v, w) = \frac{u^2 + 2v^3}{1 + w},$$

то

$$f(\sin x,\ \cos x,\ e^x) = \frac{\sin^2 x + 2\cos^3 x}{1 + e^x}. \qquad (2)$$

Як функція від x, ця функція трансцендентна. Але вона раціональна відносно функцій

$$\sin x,\ \cos x \text{ і } e^x, \qquad (3)$$

бо для того, щоб дістати її, над величинами (3) треба виконувати тільки раціональні дії.

Для дальшого дуже важливо відзначити, що

коли як функція

$$f(u, v, \ldots, w),$$

так і функції

$$\varphi(x),\ \psi(x), \ldots, \omega(x) \qquad (4)$$

усі раціональні, то функція

$$f[\varphi(x),\ \psi(x), \ldots, \omega(x)], \qquad (5)$$

як функція від x, теж необхідно раціональна функція.

Бо для того, щоб дістати функцію (5), треба спочатку дістати функції (4). Але ці функції за умовою одержуємо тільки з допомогою раціональних дій. Потім над ними треба виконати сукупність дій, позначених символом f. Але ці дії теж раціональні. Таким чином, щоб дістати функцію (5), над x треба виконувати тільки раціональні дії. Отже, вона раціональна. Так, наприклад, якщо $f(u, v)$ — раціональна функція від u і v, то функція

$$f\left(\frac{3+\sqrt{2t}}{1-t},\ \frac{7+8t}{9-t^3}\right)$$

є теж раціональна функція t.

§ 85. Інтеграли типу *A*.

Інтегралом типу *A* ми назвемо всякий інтеграл типу

$$G = \int f(x^{\frac{h}{q}},\ x^{\frac{n'}{q'}}, \ldots, x^{\frac{r}{g}})\, dx,$$

підінтегральна функція якого є раціональна функція від дробових степенів змінного.

Нехай показники після зведення їх до спільного знаменника відповідно рівні

$$\frac{m}{n},\ \frac{s}{n}, \ldots, \frac{k}{n}.$$

Тоді маємо

$$G = \int f(x^{\frac{m}{n}},\ x^{\frac{s}{n}}, \ldots, x^{\frac{k}{n}})\, dx.$$

Якщо проведемо тепер підставляння

$$x = y^n,$$

то дістанемо

$$G = \int n y^{n-1} f(y^m, y^s, \ldots, y^k)\, dy.$$

В правій частині підінтегральна функція раціональна, а тому **інтеграли типу A завжди можуть бути обчислені методом раціоналізації.**

Нехай, наприклад, маємо

$$K = \int \frac{x^2 \sqrt{x}\, dx}{x^4 + \sqrt[3]{x^2} + 1}.$$

Зрозуміло, що для того, щоб не мати дробових показників, треба прийняти

$$x = y^6.$$

Тоді дістанемо

$$K = \int \frac{6y^{20} dy}{y^{24} + y^4 + 1},$$

і інтеграл K зведений до інтеграла від раціональної функції. Отже, його можна обчислити. Але практично це обчислення, очевидно, провести не так і легко. Скільки часу і праці треба витратити, щоб обчислити з достатнім наближенням 24 корені знаменника, а потім розкласти на елементарні дроби! З цього приводу зауважимо, що, як правило, метод раціоналізації призводить до інтегралів від складних раціональних функцій. Тому далі ми часто обмежуватимемось тільки вказівкою, як інтеграл розглядуваного типу може бути зведений до інтеграла від раціональної функції, саме ж інтегрування цієї функції або не будемо виконувати, або якщо й будемо, то на прикладах, дібраних так, щоб обчислення не були дуже довгими.

§ 86. Інтеграли типу B.

Всякий вираз вигляду

$$\frac{ax + b}{lx + k},$$

тобто всяка частка двох лінійних многочленів, називається дробово-лінійною функцією.

Інтегралом типу B ми назвемо всякий інтеграл вигляду

$$H = \int f\left[x, \left(\frac{ax+b}{lx+k}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{lx+k}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots\right] dx, \qquad (1)$$

тобто всякий інтеграл від функції, раціональної відносно змінного x і відносно дробових степенів однієї і тієї ж дробової лінійної функції.

Наприклад, інтеграл

$$\int\left[\frac{2x^3+5}{3x^7+x+4}-\sqrt[3]{\left(\frac{2x-11}{13x+q}\right)^4}\right]dx$$

є інтеграл типу B.

Інтеграли цього типу легко зводяться до інтегралів попереднього типу A. Приймаємо

$$\frac{ax+b}{lx+k}=z,$$

звідки

$$x=\frac{kz-b}{a-lz},\ dx=-\frac{(bl-ka)\,dz}{(a-lz)^2},$$

а тому

$$H=\int f\left[x,\left(\frac{ax+b}{lx+k}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{lx+k}\right)^{\frac{p}{q}}\right]dx=$$

$$=\int\frac{(ka-bl)}{(lz-a)^2}f\left(\frac{kz-b}{a-lz},\ z^{\frac{m}{n}},\ldots,z^{\frac{p}{q}}\right)dz,$$

і в правій частині — інтеграл типу A, тобто від раціональної функції від z і його дробових степенів. Тому підставлянням

$$z=y^g,$$

де g — спільний найменший знаменник показників, інтеграл H зведеться до інтеграла від раціональної функції.

В окремому випадку при $l=0$, $k=1$ інтеграл (1) дає інтеграл простішого типу

$$\int f[x,\ (ax+b)^{\frac{m}{n}},\ \ldots,\ (ax+b)^{\frac{p}{q}}]\,dx,$$

який при $a=1$ і $b=0$ перетворюється в інтеграл

$$\int f(x,\ x^{\frac{m}{n}},\ \ldots,\ x^{\frac{p}{q}})\,dx,$$

тобто в інтеграл типу A. Отже, всякий інтеграл типу A є окремий випадок інтеграла типу B.

Якщо квадратний тричлен

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

має дійсні корені α і β, то інтеграл типу

$$C=\int f(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

легко зводиться до типу B. Справді, маємо

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\pm(x-\alpha)\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}},$$

де треба взяти знак плюс, якщо $x>\alpha$, і знак мінус, якщо $x<\alpha$, а тому

$$C=\int f\left[x, \pm(x-\alpha)\left(\frac{ax-a\beta}{x-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right]dx,$$

і маємо інтеграл типу B, а саме, інтеграл від раціональної функції від x і раціонального степеня дробового степеня лінійної функції.

Обчислимо, наприклад, інтеграл

$$G=\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Маємо

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$$

Тепер приймаємо

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=y,$$

звідки

$$x=\frac{y^2-1}{y^2+1},\quad dx=\frac{4y\,dy}{(y^2+1)^2}.$$

Дістанемо:

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{y^2+1}{y^2}dy=\frac{y^2-1}{2y}+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

Але зауважимо, що цей інтеграл було б простіше обчислити підставлянням $x=\sin t$.

Справді, маємо:

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\operatorname{tg} t+C,$$

і оскільки

$$\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

то дістаємо попередній результат, але тільки швидше.

§ 87. Інтеграл типу *C*.

Інтегралом типу *C* назвемо всякий інтеграл

$$C=\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

де підінтегральна функція раціональна відносно незалежного змінного і квадратного кореня з квадратного тричлена від незалежного змінного.

Приймаючи для скорочення писання

$$R=ax^2+bx+c, \tag{1}$$

маємо

$$C=\int f(x, \sqrt{R})\,dx. \tag{2}$$

Ейлер указав три підставляння, з допомогою яких інтеграл *C* може бути перетворений в інтеграл від раціональної функції. Ці підставляння називаються підставляннями Ейлера. Щоб одержати перше з них, Ейлер приймає

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x+t \tag{3}$$

і шукає з цього рівняння вираз для x як функції t. Після піднесення до квадрата послідовно дістаємо:

$$\begin{gathered} ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}\,xt+t^2, \\ bx+c=2\sqrt{a}\,xt+t^2, \\ x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}. \end{gathered} \tag{4}$$

Це і є шукане підставляння. Справді, диференціюючи (4), знайдемо

$$dx=-2\frac{\sqrt{a}\,t^2-bt+c\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{a}\,t)^2}\,dt. \tag{5}$$

Щоб обчислити $\sqrt{R}$, було б недоцільно заміняти в підкорінному числі x його виразом через t. Ми б одержали дуже складний вираз. Простіше і природніше замінити x у правій частині (3). Виконуючи це, дістанемо:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}\,t^2-bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t-b}. \tag{6}$$

Беручи до уваги (4), (5) і (6), маємо

$$C=-\int f\left(\frac{c-t^2}{2\sqrt{a}\,t-b}, \frac{\sqrt{a}\,t^2-bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t-b}\right)\cdot 2\frac{\sqrt{a}\,t^2-bt+c\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{a}\,t)^2}\,dt.$$

У правій частині під інтегралом стоїть функція, раціональна відносно t, а тому інтеграл C може бути обчислений.

Нехай, наприклад, треба обчислити інтеграл

$$H=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Рівності (5) і (6) дають

$$H=\int\frac{2dt}{b-2\sqrt{a}\,t}=-\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|b-2\sqrt{a}\,t|+C.$$

Заміняючи t його виразом з (3) через x, остаточно одержимо:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|b+2ax-2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|+C. \qquad (7)$$

В окремому випадку, приймаючи $a=1$, $b=0$, маємо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}=-\ln|2x-2\sqrt{x^2+c}|+C=\ln\left|\frac{1}{2x-2\sqrt{x^2+c}}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+c}}{-2c}\right|+C=\ln|x+\sqrt{x^2+c}|-\ln|2c|+C.$$

Позначаючи неозначене стале $-\ln|2c|+C$ через C', дістанемо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{c+x^2}}=\ln|x+\sqrt{c+x^2}|+C'.$$

Саме в такій формі цей інтеграл ми помістили в таблиці основних інтегралів.

Можна догадуватись про той шлях, який привів Ейлера до його підставляння. Нам треба знайти таку раціональну функцію $\varphi(t)$, щоб $\sqrt{R}$ після підставляння $x=\varphi(t)$ теж виразився раціонально через t. Тому спробуємо прийняти $\sqrt{R}$ рівним простішій лінійній функції від x і t, тобто спробуємо покласти

$$\sqrt{R}=px+qt, \qquad (8)$$

звідки випливає

$$ax^2+bx+c=p^2x^2+2pqxt+q^2t^2. \qquad (9)$$

Поки це рівняння лишається квадратним, x не виражатиметься раціонально через t. Це можливо тільки тоді, коли рівняння (9) перетвориться в рівняння першого степеня, для чого необхідно, щоб члени ax^2 і p^2x^2 скоротились. Для цього треба взяти

$$p=\pm\sqrt{a},$$

що ми й зробили. Для q ж узяли простіше значення: $q=1$. Тепер зрозуміло, що в правій частині (3) можна $\sqrt{a}$ взяти і із знаком мінус. Також і t можна взяти з будьяким коефіцієнтом. Тому перше підставляння можна представити в такій найзагальнішій формі:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+qt, \tag{10}$$

де q і знак перед $\sqrt{a}$ можна брати довільно. Після піднесення до квадрата дістанемо відносно x рівняння першого степеня.

Якщо a від'ємне, то підставляння (10) вже не може прикладатись, бо $\sqrt{a}$ буде уявним числом. У цьому випадку можна скористатись другим підставлянням Ейлера. До розуміння його прийдемо так. Квадратне рівняння

$$ax^2+bx+c=0$$

зводиться до рівняння першого степеня не тільки тоді, коли $a=0$, але й тоді, коли нулеві дорівнює вільний член, бо при $c=0$ дістаємо

$$x(ax+b)=0.$$

Взявши це до уваги, ми знайдемо друге підставляння Ейлера, якщо $\sqrt{R}$ приймемо рівним такому виразові, щоб після піднесення до квадрата зник вільний член. Для цього приймаємо

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}+xt. \tag{11}$$

Після піднесення до квадрата дістаємо

$$ax^2+bx+c=c+2\sqrt{c}\,xt+x^2t^2.$$

Після скорочення спочатку на c, потім на x маємо

$$ax+b=2\sqrt{c}\,t+xt^2,$$

звідки послідовно

$$x=\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2};\quad dx=2\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}dt,$$

і з (11)

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2},$$

а тому

$$\int f(x,\sqrt{R})\,dx=$$

$$=2\int f\left(\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2},\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}\right)\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}dt,$$

і в правій частині — інтеграл від раціональної функції.

Зрозуміло тепер, що друге підставляння можна представити в такій загальній формі:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt.$$

Воно може бути прикладене тільки при $c>0$. Перше ж — якщо $a>0$. Отже, якщо водночас

$$a<0 \quad \text{і} \quad c<0,$$

то ні одне з розглянутих підставлянь не може бути прикладене.

В цьому випадку, як побачимо, може бути прикладене третє підставляння Ейлера.

Зауважимо, що коли $a<0$, то ми повинні вважати корені квадратного тричлена дійсними, бо, якщо припустимо, що вони уявні, то

$$4ac-b^2>0, \tag{12}$$

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+4ac-b^2]. \tag{13}$$

Дужка в правій частині, завдяки (12), необхідно додатна. Тому ліва частина, тобто сам квадратний тричлен, якщо $a<0$, від'ємний при всякому x. Але в такому випадку під знаком квадратного кореня буде одержано від'ємне число і тим самим з'являються уявні числа. Ми уникаємо їх, а тому випадок, коли при $a<0$ наш тричлен має уявні корені, можна не розглядати. Тому далі припустимо, що корені x_1 і x_2 тричлена дійсні. В такому випадку

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

де в правій частині дійсні лінійні многочлени.

Ми припустимо, що квадратний многочлен розкладений на множники загальнішого типу, а саме, нехай

$$ax^2+bx+c=(px+q)(mx+n).$$

Тоді третє підставляння Ейлера дістанемо, приймаючи

$$\sqrt{(px+q)(mx+n)}=(px+q)t. \tag{14}$$

Після піднесення до квадрата маємо

$$(px+q)(mx+n)=(px+q)^2t^2.$$

Скорочення на $px+q$ дає рівняння

$$mx+n=(px+q)t^2,$$

яке є першого степеня відносно x. З нього знаходимо

$$x=\frac{qt^2-n}{m-pt^2}, \tag{15}$$

а тому

$$dx = \frac{2(mq - np)t}{(m - pt^2)^2} dt, \tag{16}$$

і з (14)

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{(mq - pn)t}{m - pt^2}. \tag{17}$$

Отже,

$$\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx = \int f\left(\frac{qt^2 - n}{m - pt^2}, \frac{(mq - pn)t}{m - pt^2}\right) \cdot \frac{2(mq - np)t}{(m - pt^2)^2} dt$$

і в правій частині — інтеграл від раціональної функції.

В результаті ми бачимо, що

інтеграл типу

$$\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx,$$

де f — характеристика раціональної функції, може бути обчислений методом раціоналізації з допомогою одного з таких трьох підставлянь Ейлера:

$$1)\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}\,x \pm t, \quad a > 0;$$
$$2)\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt, \quad c > 0;$$
$$3)\ \sqrt{(px + q)(mx + n)} = (px + q)t.$$

Теоретично однаково, який знак у правих частинах брати перед $\sqrt{a}$ і $\sqrt{c}$; також і в третьому підставлянні при t можна взяти будьякий з лінійних множників. Але це тільки теоретично. На практиці вибір того чи іншого знака або того чи іншого множника призводить звичайно або до простіших обчислень, або, навпаки, дуже їх ускладнює. Взагалі ж зауважимо, що, як правило, ейлерові підставляння вимагають довгих обчислень. Тому **до ейлерових підставлянь треба вдаватись тільки в тих випадках, коли в нашому розпорядженні немає інших методів.**

§ 88. Інтеграл від диференціального бінома.

Диференціальним біномом називається всякий вираз вигляду

$$x^m (a + bx^n)^p\, dx.$$

Показники m, n, p називатимемо першим, другим і третім. Інтеграл від диференціального бінома

$$S = \int x^m (a + bx^n)^p\, dx$$

легко обчисляється в тому випадку, коли показник p — ціле і додатне число. Справді, в цьому випадку, прикладаючи біном

Ньютона, маємо

$$S=\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\int x^m\left(a^p+pa^{p-1}bx^n+\frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}b^2x^{2n}+\right.$$

$$\left.+\ldots+b^px^{np}\right)dx=a^p\int x^m dx+pa^{p-1}b\int x^{m+n}dx+$$

$$+\frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}b^2\int x^{m+2n}dx+\ldots+b^p\int x^{m+np}dx.$$

Кожний інтеграл правої частини може бути легко обчислений як інтеграл від степінної функції, а тому може бути обчислений і інтеграл S. Наприклад,

$$\int\frac{(2+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(2+x^{\frac{1}{2}}\right)^3dx=\int(8x^{-\frac{1}{2}}+12+6x^{\frac{1}{2}}+x)\,dx=$$

$$=16\sqrt{x}+12x+4x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+C.$$

Далі припускатимемо показники m, n, p раціональними. В такому випадку неважко бачити, що інтеграл

$$S=\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

може бути обчислений і в тому випадку, коли показник p — ціле від'ємне число. Справді, нехай

$$p=-p'$$

і нехай показники m і n, взагалі дробові, після зведення їх до спільного знаменника представляться у формі:

$$m=\frac{m'}{g},\quad n=\frac{n'}{g},$$

де g, m', n' — уже цілі числа, можливо, і від'ємні. Маємо

$$S=\int x^{\frac{m'}{g}}(a+bx^{\frac{n'}{g}})^{-p'}dx.$$

Приймаючи, що

$$x=z^g,$$

легко знайдемо

$$S=\int\frac{gz^{m'+g-1}dz}{(a+bz^{n'})^{p'}}.$$

Через те що підінтегральна функція тепер раціональна, інтеграл може бути обчислений. В результаті робимо висновок:

Якщо всі показники раціональні, то інтеграл

$$S=\int x^m(a+bx^n)^p\,dx \tag{1}$$

завжди може бути обчислений у тому випадку, коли показник p — ціле число, додатне або від'ємне.

Цей випадок назвемо основним. Крім цього, неважко тепер знайти ще два випадки, коли інтеграл S може бути обчислений.

Природно випробувати підставляння

$$a + bx^n = y, \tag{2}$$

звідки

$$x = \frac{(y-a)^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}; \quad dx = \frac{(y-a)^{\frac{1}{n}-1}}{nb^{\frac{1}{n}}}\,dy.$$

Легко знайдемо, що

$$S = \frac{1}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \int y^p (-a+y)^{\frac{m+1}{n}-1}\,dy. \tag{3}$$

Під інтегралом знову стоїть диференціальний біном, тільки з іншими показниками. За тількищо доведеним інтеграл (3) може бути обчислений, якщо третій показник

$$\frac{m+1}{n} - 1 \tag{4}$$

— ціле число. Але він буде таким, якщо $\frac{m+1}{n}$ — ціле число. Робимо висновок:

Інтеграл S може бути обчислений, якщо $\frac{m+1}{n}$ — ціле число.

Цей випадок назвемо другим випадком інтегрованості.

Третій випадок інтегрованості дістанемо, якщо винесемо з дужок x^n. Через те що

$$x^m (a + bx^n)^p = x^{m+pn} (ax^{-n} + b)^p,$$

то маємо

$$S = \int x^{m+pn} (b + ax^{-n})^p\,dx. \tag{5}$$

Згідно з другим випадком цей інтеграл може бути обчислений, якщо

$$\frac{m+pn+1}{n} = \frac{m+1}{n} + p \text{ є ціле число.} \tag{6}$$

Це — третій випадок інтегрованості. Згідно з (2) і (3) він зводиться до основного підставлянням:

$$b + ax^{-n} = y.$$

Ми тепер можемо висловити такий висновок:

Інтеграл

$$S = \int x^m (a + bx^n)^p\,dx,$$

якщо всі показники раціональні, може бути обчислений у таких так званих трьох випадках інтегрованості:

1) p — ціле число,

2) $\frac{m+1}{n}$ — ціле число (підставляння $a+bx^n=y$),

3) $\frac{m+1}{n}+p$ — ціле число (підставляння $ax^{-n}+b=y$).

Академік Чебишев довів, що, крім цих трьох випадків, ніяких інших немає, коли інтеграл може бути обчислений.

Зауважимо, що коли p дробове, то числа

$$\frac{m+1}{n} \quad \text{і} \quad \frac{m+1}{n}+p$$

не можуть бути одночасно обидва цілі, а тому обидва випадки — другий і третій — не можуть бути одночасно.

§ 89. Інтеграли від трансцендентних функцій.

Ми розглянули ті класи алгебричних функцій, інтеграли яких можуть бути обчислені. Число таких класів, як ми бачимо, дуже невелике. Ще гірше стоїть справа з інтегралами від трансцендентних функцій. Якихнебудь загальних вказівок відносно обчислення їх немає. Як правило, всяка трансцендентна функція належить до числа неінтегрованих, і якщо інтеграл від якоїнебудь такої функції і може бути обчислений, то береться він своїм, тільки йому властивим методом. Для практичних прикладань можна вказати тільки один спосіб: якщо в підінтегральному виразі ми зустрічаємо тільки одну елементарну функцію $\varphi(x)$, то треба випробувати підставляння

$$\varphi(x)=y.$$

Якщо після цього підставляння інтеграл зведеться до інтеграла від раціональної функції, то він може бути обчислений, якщо ні,— то, очевидно, він не може бути обчислений.

З інтегралів від трансцендентних функцій, які можуть бути завжди обчислені таким методом, відзначимо такий клас:

Методом раціоналізації можуть бути обчислені інтеграли такого типу:

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx,$$

де $f(x)$ — раціональна функція і $\varphi(x)$ — яка завгодно функція.

Справді, приймаючи

$$\varphi(x)=z,$$

звідки

$$\varphi'(x)\,dx=dz,$$

маємо

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx=\int f(z)\,dz,$$

і в правій частині — інтеграл від раціональної функції.

В окремому випадку, приймаючи за $\varphi(x)$ різні елементарні функції, ми приходимо до майже очевидного висновку:

Методом раціоналізації можуть бути обчислені інтеграли від трансцендентних функцій такого типу, при якому f — характеристика раціональної функції одного аргумента:

$$1)\ \int f(e^x)\,dx = \int \frac{f(z)}{z}\,dz, \quad z = e^x;$$

$$2)\ \int f(\ln x)\frac{dx}{x} = \int f(z)\,dz, \quad z = \ln x;$$

$$3)\ \int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(z)\,dz, \quad z = \sin x;$$

$$4)\ \int f(\cos x)\sin x\,dx = -\int f(z)\,dz, \quad z = \cos x;$$

$$5)\ \int \frac{f(\operatorname{tg} x)\,dx}{\cos^2 x} = \int f(z)\,dz, \quad z = \operatorname{tg} x;$$

$$6)\ \int \frac{f(\operatorname{ctg} x)\,dx}{\sin^2 x} = -\int f(z)\,dz, \quad z = -\operatorname{ctg} x;$$

$$7)\ \int \frac{f(\arcsin x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int f(z)\,dz, \quad z = \arcsin x;$$

$$8)\ \int \frac{f(\arccos x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int f(z)\,dz, \quad z = \arccos x;$$

$$9)\ \int \frac{f(\operatorname{arc\,tg} x)\,dx}{1+x^2} = \int f(z)\,dz, \quad z = \operatorname{arc\,tg} x;$$

$$10)\ \int \frac{f(\operatorname{arc\,ctg} x)\,dx}{1+x^2} = -\int f(z)\,dz, \quad z = \operatorname{arc\,ctg} x.$$

Справді, після відповідного підставляння, в правих частинах цієї таблиці ми маємо інтеграли від раціональних функцій.

Так, наприклад, приймаючи

$$\arcsin x = z,$$

маємо

$$\int \frac{dx}{[1+2(\arcsin x)^2]\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dz}{1+2z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(z\sqrt{2}) + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\arcsin x) + C.$$

З інших інтегралів від трансцендентних функцій заслуговують на увагу так звані тригонометричні інтеграли.

Тригонометричним інтегралом у широкому розумінні слова називається всякий інтеграл від раціональної функції, аргу-

ментами якої є тільки тригонометричні функції незалежного змінного, тобто інтеграли типу

$$\int f(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x)\,dx, \tag{1}$$

де f — характеристика раціональної функції.

Але через те що

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

то підінтегральна функція в (1) легко перетворюється в раціональну функцію тільки від двох аргументів: $\sin x$ і $\cos x$, а тому нижче ми й можемо обмежитись тільки розгляданням цього випадку.

Всякий тригонометричний інтеграл

$$\int f(\sin x,\ \cos x)\,dx \tag{1}$$

зводиться підставлянням

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z \tag{2}$$

до інтеграла від раціональної функції.

Справді, маємо

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Отже,

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2},\quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}. \tag{3}$$

Бачимо, що $\sin x$ і $\cos x$ виражаються раціонально через тангенс половини кута. Далі з (2) маємо

$$x = 2\operatorname{arc\,tg} z \pm n\pi,\quad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}. \tag{4}$$

З (3) і (4) випливає

$$\int f(\sin x,\ \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2z}{1+z^2},\ \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2\,dz}{1+z^2}, \tag{5}$$

і в правій частині маємо інтеграл від раціональної функції.

Окремим випадком інтеграла типу (5) є інтеграли типу

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}, \tag{6}$$

обчислювані підставлянням $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$. Інтеграли

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \int \frac{dx}{\cos x},$$

очевидно,— окремі випадки типу (6).

Але взагалі треба зауважити, що підставляння $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$ веде, як загальне правило, до дуже довгих обчислень, а тому до нього треба вдаватись тільки в крайньому разі, коли не видно інших шляхів. Так, наприклад, інтеграл

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

звичайно, може бути обчислений цим підставлянням. Але нехай читач спробує прикласти його.

§ 90. Інтеграли типу $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$.

Ці інтеграли у випадках цілих показників належать до класу тригонометричних. Як такі вони можуть бути обчислені підставлянням $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$. Але воно в даному випадку недоцільне.

Вважатимемо показники m і n раціональними і розглянемо, в яких випадках інтеграл

$$G = \int \sin^m x \cos^n x\, dx \tag{1}$$

може бути обчислений. Приймаючи

$$\sin x = z,$$

маємо

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x\, d\sin x = \int z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dz.$$

В правій частині з'явився інтеграл від диференціального бінома. Маємо три випадки його інтегрованості:

1) $\frac{n-1}{2}$ — ціле число,

2) $\frac{m+1}{2}$ — ціле число,

3) $\frac{m+n}{2}$ — ціле число.

Для першого випадку необхідно, щоб n було непарним числом; у другому випадку ним повинно бути m; у третьому ж випадку $m+n$ повинно бути парним. Робимо висновок:

Якщо показники раціональні, то інтеграл типу

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$$

обчислюється тільки в тому випадку, коли або один показник непарний, або сума їх парне число.

Отже, наприклад, інтеграл

$$\int \sqrt{\sin x}\, dx$$

не може бути обчислений, але інтеграл

$$\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$$

уже обчислюється через комбінацію елементарних функцій у скінченному числі, бо для нього $m+n=0$, тобто парне число.

§ 91. Висновок.

Методом раціоналізації можуть бути обчислені інтеграли таких типів, де f — характеристика раціональної функції:

1) інтеграли типу

$$A=\int f(x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})\, dx$$

підставлянням $x=y^h$, де h — спільний найменший знаменник показників;

2) інтеграли типу

$$B=\int f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots\right) dx$$

підставлянням

$$\frac{ax+b}{cx+d}=y;$$

3) інтеграли типу

$$C=\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$$

одним з трьох підставлянь Ейлера:

a) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x\pm t, \quad a>0,$

b) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt, \quad c>0,$

c) $\sqrt{(mx+n)(px+q)}=\pm(px+q)\,t;$

4) інтеграли типу

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx$$

у трьох випадках інтегрованості:

a) p — ціле,

b) $\frac{m+1}{n}$ — ціле (підставлянням: $a + bx^n = y$);

c) $\frac{m+1}{n} + p$ — ціле (підставлянням: $ax^{-n} + b = y$);

5) інтеграли типу

$$\int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx,$$

яка б не була функція $\varphi(x)$, підставлянням

$$\varphi(x) = y;$$

6) тригонометричні інтеграли

$$\int f(\sin x,\ \cos x)\, dx$$

і підставлянням

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y;$$

7) інтеграли

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

якщо один показник непарний, другий раціональний, або якщо вони обидва раціональні і сума їх дорівнює парному числу.

ЗАГАЛЬНИЙ ОГЛЯД ТЕОРІЇ НЕОЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ.

Ми пройшли довгий шлях. Протягом його розглянули значне число і інтегралів і методів інтегрування. Підведемо ж тепер загальний підсумок, щоб чітко уявити собі сукупність тих інтегралів, які можуть бути обчислені.

§ 92. Інтеграли від раціональних функцій.

До класу інтегрованих функцій належить насамперед великий клас раціональних функцій, в окремому випадку многочлени.

Інтеграл від усякої раціональної функції може бути виражений через комбінацію в скінченному числі функцій алгебричних, логарифмічних і колових.

Це положення є основним у теорії інтегрування. Інтеграл від раціональної функції можна обчислити тільки завдяки тому, що всяка раціональна функція може бути розкладена на суму многочлена і елементарних дробів, тому всякий рух уперед у теорії інтегрування, всяке удосконалення цієї теорії щільно пов'язане із спрощенням методів розкладу.

Після того як установлена можливість обчислити інтеграли від усякої раціональної функції, природно виникає метод раціоналізації. Цей метод дає ряд нових класів інтегрованих функцій, алгебричних і трансцендентних. Але, на жаль, число цих класів дуже невелике; від алгебричних функцій воно дорівнює тільки чотирьом.

§ 93. Інтеграли від алгебричних функцій.

Якщо під f розуміти характеристику раціональної функції, то інтеграли від а гебричних функцій, які можуть бути обчислені, поділяються на чотири класи, а саме:

Можуть бути обчислені такі інтеграли від алгебричних функцій:

1) інтеграли типу A, тобто типу

$$\int f(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{p}{q}}, \ldots)\,dx;$$

2) інтеграли типу B, тобто типу

$$\int f\left(x, \left(\frac{ax+b}{lx+k}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{lx+k}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots\right)dx;$$

3) інтеграли типу C, тобто типу

$$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx;$$

4) інтеграли типу

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx,$$

тобто інтеграли від диференціального бінома при раціональних показниках у трьох випадках інтегрованості.

Цими чотирма типами і вичерпуються всі інтеграли від алгебричних функцій.

§ 94. Інтеграли від трансцендентних функцій.

Якщо $f(x)$ — раціональна функція, то, яка б не була функція $\varphi(x)$, інтеграл типу

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$$

завжди може бути обчислений, бо

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(z)\,dz,\ z=\varphi(x).$$

Але коли не зважати на цей надто тривіальний випадок, то тоді можна висловити тільки таке твердження:

З класів трансцендентних функцій, інтеграли яких можуть бути обчислені, відомий тільки один досить великий клас інтегралів типу

$$\int f(\sin x,\ \cos x)\,dx,$$

так званих тригонометричних інтегралів.

До цього класу належать інтеграли типу

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c},$$

в окремому випадку інтеграли

$$\int \frac{dx}{\sin x},\quad \int \frac{dx}{\cos x}.$$

Крім цих, ніяких більш-менш великих класів інтегрованих трансцендентних функцій не знаємо.

Отже, інтеграли раціональних функцій, інтеграли типів A, B, C, інтеграли від диференціального бінома, тригонометричні інтеграли — всі досить великі класи інтегрованих функцій.

§ 95. Окремі інтеграли.

Крім інтегралів більш-менш великих класів функцій, звичайно, ми можемо обчислити ряд окремих інтегралів. Але й вони, власне, нечисленні. Це, головним чином, такі інтеграли від трансцендентних функцій:

$$\int \sin^n x\,dx, \quad \int \cos^m x\,dx, \quad \int \operatorname{tg}^n x\,dx,$$

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}\,dx, \quad \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x}$$

для цілих показників. Потім інтеграли, що стоять зовсім ізольовано:

$$\int x^n \arcsin x\,dx, \quad \int x^n \arccos x\,dx,$$

$$\int x^n \cos x\,dx, \quad \int x^n \sin x\,dx,$$

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx, \quad \int e^{ax} \sin bx\,dx,$$

легко обчислювані інтегруванням частинами, і інтеграли типу

$$\int \sin(mx+p)\cos(nx+q)\,dx,$$

обчислювані методом розкладу [1].

Звичайно, завжди неважко придумати інтеграл, який можна обчислити якимнебудь способом, що не підходить ні до яких правил. Іноді несподівано береться інтеграл від функції, відносно якої цього важко було б чекати. Так, наприклад, інтеграл

$$\int e^{\arcsin x}\,dx$$

легко обчислити або інтегруванням частинами, або підставлянням $\arcsin x = t$, $x = \sin t$. Але в той же час інтеграл

$$\int e^{\operatorname{arc\,tg} x}\,dx$$

уже не може бути обчислений.

Так само, тоді як не обчисляється інтеграл

$$\int e^{x^2}\,dx,$$

інтеграл

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx$$

легко обчисляється підставлянням $x = z^2$.

Як можна обчислити інтеграл від заданої функції, коли немає ніяких правил для обчислення його? Така думка часто

[1] Див. задачник, розд. II.

турбує початківця. Як ми тепер бачимо, турбує вона його даремно. Треба тільки знати класи інтегрованих функцій і кілька способів інтегрування.

§ 96. Дальший розвиток теорії.

Число класів інтегрованих функцій, як ми бачили, дуже невелике. Чи можна мати надію, що воно в майбутньому, з розвитком теорії, збільшиться? Цю надію можна було б мати, якби ми визнали, що тепер теорія інтегрування знаходиться тільки в процесі свого розвитку. Але в дійсності це не так. Навпаки, ми повинні визнати, що теорія неозначених інтегралів тепер є в певній мірі цілком закінченою, завершеною теорією. В майбутньому в ній можливі тільки деякі спрощення у викладі окремих її деталей — і тільки. Відкриття нових великих класів інтегрованих функцій мало ймовірне.

Часто вказують, що інтегральне числення відрізняється від диференціального тим, що тоді як інтеграл не від усякої функції може бути обчислений, похідна будьякої функції, навпаки, може бути обчислена. Але коли це твердження розуміти в точному значенні слова, то воно неправильне.

Існує небагато так званих елементарних функцій. Це такі функції:

$$x^m,\ a^x,\ e^x,\ \ln(x),$$

$$\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,$$

$$\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arc\,tg} x,\ \operatorname{arc\,ctg} x.$$

Вони лежать в основі аналізу, особливо його прикладань. З допомогою комбінацій з них у скінченному числі математик намагається виразити різні залежності між величинами, але ця мета часто від нього вислизає, бо не всяка залежність може бути виражена тільки з допомогою комбінацій у скінченному числі елементарних функцій, і, якщо буває такий випадок, то математик змушений вводити нові функції.

Коли диференціальне числення твердить, що воно може обчислити похідну від усякої функції, то при цьому неявно під усякою функцією розуміють тільки таку функцію, яка складена з комбінації в скінченному числі елементарних функцій.

Від такої функції ми завжди можемо обчислити похідну, але не завжди інтеграл.

Функції за степенем їх складності можна поділити на три великі класи: раціональні, алгебричні і трансцендентні.

Алгебричною функцією від змінного x називається всяка функція y, яка визначається рівнянням, що може бути представлене у формі многочлена від x і y, прирівняного нулеві. Якщо цей многочлен відносно y степеня n, то функція називається алгебричною класу n.

Нехай

$$z = f(x, y),$$

де y — алгебрична функція і f — раціональна. У вищій алгебрі доводиться, що z як функція x є теж алгебрична функція, тобто доводиться, що z можна розглядати теж як корінь деякого рівняння тільки між x і z, — рівняння, представленого у формі многочлена, рівного нулеві.

Найпростіший клас алгебричних функцій — це перший клас. Сказати, що y — алгебрична функція першого класу, це значить стверджувати, що вона задовольняє рівняння першого степеня відносно y, тобто рівняння вигляду

$$\varphi(x)y+\psi(x)=0,$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — многочлени. Звідси випливає, що

$$y=-\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

тобто що алгебрична функція першого класу є просто раціональна функція.

Алгебрична функція другого класу є функція, що задовольняє рівняння

$$\varphi_1(x)y^2+\varphi_2(x)y+\varphi_3(x)=0,$$

де φ_1, φ_2, φ_3 — многочлени. Тому вона може бути представлена у формі

$$y=\frac{-\varphi_2(x)\pm\sqrt{\omega(x)}}{2\varphi_1(x)},$$

де $\omega(x)$ — якийсь многочлен, тобто у формі

$$y=f(x,\sqrt{\omega(x)}),$$

де f — характеристика раціональної функції. Функції цього типу ми повинні розглядати як такі, що своєю складністю йдуть першими після раціональних функцій.

Раціональні функції належать до числа інтегрованих функцій. Після того як ми знайшли методи для їх інтегрування, природно перейти до вивчення інтегралів типу

$$y=\int f(x,\sqrt{\omega(x)})\,dx. \qquad (1)$$

Але многочлен $\omega(x)$ може бути різного степеня. Якщо він першого степеня, то ми маємо

$$y=\int f(x,\sqrt{ax+b})\,dx. \qquad (2)$$

Інтеграл цього типу зводиться до інтеграла від раціональної функції підставлянням $ax+b=t^2$, а тому на ньому спинятись нема чого.

Якщо $\omega(x)$ другого степеня, то маємо:

$$y = \int f(x, \sqrt{ax^2 + bx^2 + c})\, dx.$$

І на інтегралі цього типу нам теж не доводиться спинятись. Він може бути зведений до інтеграла від раціональної функції одним з ейлерових підставлянь. Тепер природно перейти до інтегралів типу

$$y = \int f(x, \sqrt{\omega(x)})\, dx,$$

де многочлен $\omega(x)$ третього або вищого степеня. Виявляється, що ці інтеграли вже не можуть бути виражені через скінченне число елементарних функцій. Вони є функціями нового типу і як такі вимагають самостійного вивчення.

Інтеграли типу

$$\int f(x, \sqrt{\omega(x)})\, dx, \tag{3}$$

де f — раціональна функція і $\omega(x)$ — многочлен третього або четвертого степеня, називаються еліптичними інтегралами.

Інтеграли ж типу

$$\int f(x, \sqrt{\omega(x)})\, dx,$$

де $\omega(x)$ — многочлен степеня вище четвертого, називаються ультраеліптичними.

Еліптичні інтеграли дістали свою назву тому, що до інтегралів цього типу зводиться задача про довжину дуги еліпса. Вивчення їх становить самостійний відділ математики, тісно пов'язаний з функціями, що мають два періоди.

Як еліптичні, так і ультраеліптичні інтеграли є окремим випадком алгебричних інтегралів.

Алгебричним інтегралом називається всякий інтеграл типу

$$\int f(x, y)\, dx,$$

де f — раціональна функція, y — алгебрична.

Ці інтеграли мають багато вартих уваги і дуже цікавих властивостей. Теорія їх була закладена і розвинута працями великих математиків Абеля, Коші і Рімана. Вона тісно пов'язана з теорією функцій комплексного змінного.

Ми встановили поняття похідної і інтеграла тільки для функцій дійсного змінного. Але ці поняття можуть бути перенесені і на функції комплексного змінного. Заслуга такого розширення цих понять належить французькому математикові Коші, який заклав тим самим основи теорії функцій комплексного змінного. Ця теорія є тепер одним з найцікавіших і захоплюючих відділів математики. Вона, між іншим, встановлює часто несподівані і дуже прості зв'язки між властивостями функцій, які в галузі дійсного змінного є зовсім ізольованими одна від одної.

Тільки теорія функцій комплексного змінного дала можливість створити струнку теорію алгебричних функцій.

Таким чином, з трьох великих класів функцій:

а) раціональних,

б) алгебричних і

с) трансцендентних

властивості інтегралів від перших двох класів вивчені.

Щодо інтегралів від трансцендентних функцій, то, зважаючи на необмежену різноманітність їх, немає можливості побудувати загальну теорію їх. По самій суті справи тут можливі дослідження тільки окремих випадків.

§ 97. Висновок.

Крім інтегралів від раціональних функцій можуть бути обчислені інтеграли типів:

$$1)\ \int f(x, x^{\frac{m}{q}}, \ldots, x^{\frac{p}{n}})\, dx,$$

$$2)\ \int f(x, \ldots, \left(\frac{ax+b}{bx+q}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots)\, dx,$$

$$3)\ \int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx,$$

$$4)\ \int x^m (a+bx^n)^p\, dx,$$

$$5)\ \int f(\sin x, \cos x)\, dx,$$

де f — символ раціональної функції.

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ОЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА.

Ми ввели поняття означеного інтеграла як границі суми:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

і довели, що коли

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C,$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Це співвідношення між означеним інтегралом і неозначеним дає можливість з властивостей первісної легко робити висновок і про властивості означеного інтеграла. Але первісну ми можемо обчислити тільки в рідких випадках, тому природно постає завдання про глибше вивчення властивостей означеного інтеграла, щоб дістати можливість робити висновок про властивості його тільки з властивостей підінтегральної функції, не обчисляючи її первісної. Розв'язанню цього завдання і присвячений цей розділ.

§ 98. Означення інтеграла як границі суми.

Ми ввели поняття означеного інтеграла, спираючись на поняття інтегральної суми.

Інтегральною сумою від функції $f(x)$, взятої від нижньої границі a до верхньої границі b і позначуваної так:

$$\sum_a^b f(x)\,\Delta x,$$

називається сума, складена таким чином: даний інтервал (a, b) довільно взятими точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ поділяється на підінтервали і береться сума всіх тих добутків, які матимемо, якщо довжину кожного підінтервалу (x_k, x_{k+1}) помножити на значення функції $f(x)$ у якійнебудь точці ξ_k цього підінтервалу.

Отже,

$$\sum_a^b f(x)\,\Delta x = f(\xi_0)(x_1 - a) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_{n-1})(b - x_{n-1}).$$

Наведене означення інтегральної суми можна прикласти до всякої функції, як перервної, так і неперервної. Коли ж ми припустимо дану функцію $f(x)$ неперервною і побудуємо криву трапецію, основою якої є інтервал (a, b) і яка обмежена кривою $y = f(x)$, то, як ми бачили, сама інтегральна сума дорівнює сумі елементарних прямокутників, узятих з відповідними знаками, а границя її дорівнює сумі площ, що їх пробігає ордината кривої при русі її від a до b. Отже,

якщо функція $f(x)$ неперервна в інтервалі (a, b) і якщо число проміжних точок x_k нескінченно зростає так, що найбільший проміжок між ними нескінченно маліє, то інтегральна сума має єдину цілком означену границю.

Надалі, говорячи про границю інтегральної суми, ми, не згадуючи явно про це, завжди припускатимемо, що при переході до границі довжина найбільшого проміжка між числами x_k прямує до нуля. При цьому дуже важливо відзначити, що границя інтегральної суми зовсім не залежить від вибору чисел x_k і ξ_k.

Означеним інтегралом від неперервної функції $f(x)$, взятим від нижньої границі a до верхньої границі b і позначуваним так:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

називається границя відповідної інтегральної суми $\sum_a^b f(x)\,\Delta x$.

Отже, за означенням

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x.$$

Історично міцно вкоренився звичай називати інтеграл як границю суми означеним інтегралом. Ми також часто називатимемо його „інтеграл-сума".

Якщо умовитись вважати площу додатною, коли вона пробігається додатною ординатою в додатному напрямі при відповідній зміні її знака, при зміні як знака ординати, так і напряму її руху, то, як ми бачили, **означений інтеграл**

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

дорівнює сумі площ, що їх пробігає ордината кривої $y = f(x)$ при русі її від a до b.

Наведене означення інтеграла втрачає зміст, коли $a = b$, тому ми вводимо нове

Означення. **Інтеграли з рівними границями приймаються рівними нулеві:**

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0.$$

Поставимо тепер таку задачу: вивести всі основні властивості інтеграла, спираючись тільки на означення його як границі інтегральної суми*.

Інтеграл (1) є границя суми, тому всі основні властивості означеного інтеграла є, власне, не що інше, як перетворені властивості суми.

§ 99. Теорема про переставляння границь інтеграла.

Якщо переставити між собою границі інтеграла, то інтеграл змінить знак:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Позначимо через s і σ ті суми, границями яких є інтеграли рівності (1), а саме, нехай

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim s, \quad \int_b^a f(x)\,dx = \lim \sigma. \qquad (2)$$

Якщо $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ — точки, з допомогою яких побудована сума s:

$$s = f(\xi_0)(x_1 - a) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_{n-1})(b - x_{n-1}),$$

то для побудови суми σ ми доберемо ті ж точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, але в зворотному порядку, що схематично можна зобразити так:

$$b\,\xi_{n-1}\,x_{n-1}\,\xi_{n-2}\,x_{n-2}\,\xi_{n-3}\,x_{n-3}\ldots x_3\,\xi_2\,x_2\,\xi_1\,x_1\,\xi_0\,a.$$

Тому

$$\sigma = f(\xi_{n-1})(x_{n-1} - b) + f(\xi_{n-2})(x_{n-2} - x_{n-1}) + \ldots + f(\xi_0)(a - x_1).$$

Зрозуміло, що суму σ можемо одержати, змінивши знак доданків і їх порядок у сумі s, а тому $s = -\sigma$, звідки $\lim s = -\lim \sigma$, і ми маємо (1).

Теорема доведена. Геометричний зміст її, очевидно, полягає в тому, що при зміні напряму руху ординати знак площі, яку описує ордината, теж змінюється.

---

* Тому при дальшому вивченні цього розділу читач повинен стати на той погляд, що йому про означений інтеграл нічого не відомо, крім того, що викладено в цьому параграфі, тобто що означений інтеграл є границя інтегральної суми.

§ 100. Теорема про винесення сталого множника.

Сталий множник можна виносити спід знака інтеграла, а тому і вносити:

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Справді, щоб помножити суму на якенебудь число, треба помножити на це число кожний доданок. Тому

$$A\sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_a^b Af(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Переходячи до границі, маємо

$$A\lim\sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k = \lim\sum_a^b Af(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Заміняючи границю кожної суми відповідним інтегралом, дістанемо рівність (1), і теорема доведена.

§ 101. Теорема про поділ інтервалу інтеграції.

Яким би не було c, завжди

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

при умові, що функція $f(x)$ неперервна в кожному інтервалі інтеграції.

Ми припустимо спочатку, що $a < b$ і що c — число проміжне між ними: $a < c < b$.

Коли ми вставляємо проміжні числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ між a і b, то ми їх можемо брати довільно. Будемо ж при кожному поділі інтервалу (a, b) брати серед них і число c. Нехай при якомунебудь поділі $x_h = c$. Маємо:

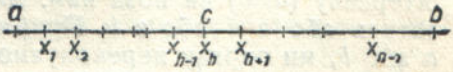

Рис. 81.

$$\sum_a^b f(x)\,dx = \{f(\xi_0)(x_1 - a) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_{h-1})(c - x_{h-1})\} +$$
$$+ \{f(\xi_h)(x_{h+1} - c) + f(\xi_{h+1})(x_{h+2} - x_{h+1}) + \ldots + f(\xi_{n-1})(b - x_{n-1})\}.$$

Цю рівність можна переписати в такій формі:

$$\sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_a^c f(\xi_k)\,\Delta x_k + \sum_c^b f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

а тому

$$\lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x = \lim \sum_a^c f(x)\,\Delta x + \lim \sum_c^b f(x)\,\Delta x,$$

тобто

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad (1)$$

і теорема доведена для випадку $a < c < b$. Але c може лежати не тільки між a і b, але або лівіше a, або правіше b. Якщо $c < a < b$, то a проміжне між c і b, а тому за доведеним

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx,$$

звідки

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Переставляючи границі a і c, знову дістанемо рівність (1). Якщо тепер $a < b < c$, то за доведеним

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

звідки знову

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Отже, ця рівність справедлива, чи буде точка c всередині інтервалу (a, b) чи поза ним. Але точка c, крім того, може зливатись або з a або з b. Приймаючи ж у рівності (1) c рівним a або b, ми одразу переконуємося, що рівність (1) справедлива і для цього випадку, бо інтеграли з рівними границями дорівнюють нулеві. Таким чином, рівність (1) доведена для будьякого положення точки c відносно точок a і b, але доведена тільки для випадку $a < b$. Але коли $a > b$, то $b < a$, а тому за доведеним

$$\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx.$$

Переставляючи в кожному інтегралі його границі, знову дістанемо рівність (1), і теорема остаточно доведена.

Якщо функція $f(x)$ додатна і $a < c < b$, то теоремою виражається простий геометричний факт, що площа всієї трапеції $aABb$ дорівнює сумі площ її частин $aACc$ і $cCBb$ (рис. 82).

Але таке ж просте геометричне значення теореми і в загальному випадку, коли функція $f(x)$ може приймати як додатні, так і від'ємні значення. Нехай, наприклад, $a < b < c$ і нехай ордината кривої рухається спочатку від a до c, а потім від c до b (рис. 83). При цьому русі вона опише площі, рівні

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{і} \quad \int_c^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

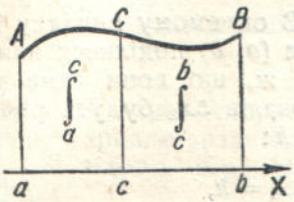

Рис. 82.

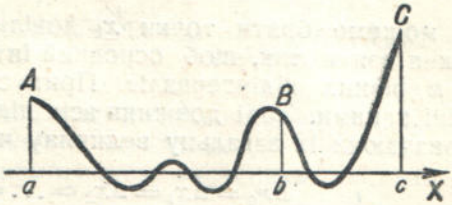

Рис. 83.

Але при русі від c до b вона наче знищить усі ті площі, які описала при русі від b до c. Тому лишиться тільки те, що вона описує при русі від a до b, тобто

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

який, отже, дорівнює сумі інтегралів (2).

Доведена теорема легко узагальнюється.

Теорема. **Якщо функція $f(x)$ неперервна на всіх відповідних інтервалах інтеграції, то**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx,$$

які б не були числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Справді, прикладаючи кілька разів попередню теорему, послідовно маємо:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{b} =$$

$$= \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \int_{c_2}^{b} =$$

$$= \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \int_{c_2}^{c_3} + \int_{c_3}^{b}.$$

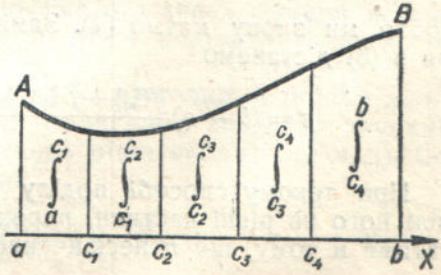

Рис. 84.

Продовжуючи таким же способом, доведемо теорему. Вона має простий, очевидний геометричний зміст, якщо функція $f(x)$

додатна і $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b$, бо виражає той факт, що всяка площа дорівнює сумі всіх тих площ, на які вона поділена.

§ 102. Теореми про середні значення функції і інтеграла.

При складанні інтегральної суми

$$s = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} \qquad (1)$$

ми можемо брати точки x_k довільно. В окремому випадку їх можна взяти так, щоб основний інтервал (a, b) поділився ними на n рівних підінтервалів. Припустимо ж, що вони саме дібрані такими. Тоді довжини всіх підінтервалів Δx_k будуть рівні. Позначаючи їх загальну величину через h:

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_{n-1} = h, \qquad (2)$$

ми можемо представити суму в такому вигляді:

$$s = h\{f(\xi_0) + f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_{n-1})\}, \qquad (3)$$

при чому h додатне, якщо $a < b$, і від'ємне, якщо $a > b$.

Якщо $a < b$, то довжина всього інтервалу (a, b) дорівнює $b - a$, а тому

$$h = \frac{b-a}{n}. \qquad (4)$$

Коли ж $a > b$, то геометрична довжина інтервалу (a, b) дорівнює $a - b$, а геометрична довжина його n-ої частини дорівнює

$$\frac{a-b}{n}.$$

Але тепер h від'ємне, тому

$$h = \frac{a-b}{n},$$

тобто ми знову маємо (4). Замінюючи ж h цим його виразом, ми з (3) дістанемо

$$s = (b-a)\frac{f(\xi_0) + f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_{n-1})}{n}. \qquad (5)$$

При такому способі поділу інтервалу (a, b), тобто при поділі його на рівні частини, перехід до границі, очевидно, полягатиме в тому, що n нескінченно зростатиме, а тому

$$\lim s = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_0) + f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_{n-1})}{n},$$

і одержуємо теорему:

Теорема. **Якщо інтервал (a, b) поділяється на n рівних підінтервалів, у кожному з яких відповідно беруться точки** $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_0)+f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_{n-1})}{n}. \qquad (6)$$

З цієї рівності випливає рівність

$$\lim\frac{f(\xi_0)+f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_{n-1})}{n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (7)$$

якою ми зараз скористаємось для доведення теореми про так зване середнє значення функції в інтервалі.

Як відомо, середнім арифметичним значенням системи величин

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

називається величина

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n},$$

яка дорівнює частці від ділення суми величин на число їх.

Нехай $f(x)$ — функція, неперервна в інтервалі (a, b), і нехай $a < b$.

У кожній точці інтервалу функція має значення. Тому постає питання про середнє арифметичне всіх значень функції в інтервалі (a, b).

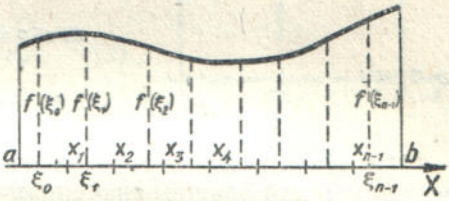

Рис. 85.

Але замість того, щоб говорити про середнє арифметичне всіх значень функції в інтервалі, прийнято коротше говорити про середнє значення функції в інтервалі.

Очевидно, що в прямому розумінні слова про це середнє значення не можна говорити, бо число значень функції нескінченне. Отже, не можна їх усі додати і поділити на число їх. Але природно напрошується таке

Означення. **Поділивши інтервал (a, b) точками поділу x_k на n рівних підінтервалів** (рис. 85), **обчислимо значення функції в довільно взятій точці ξ_k кожного підінтервалу (x_k, x_{k+1}). Середнє арифметичне цих значень**

$$f(\xi_0),\ f(\xi_1),\ f(\xi_2), \ldots, f(\xi_{n-1})$$

позначимо через σ. Отже,

$$\sigma = \frac{f(\xi_0)+f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_{n-1})}{n}. \qquad (8)$$

Границю цієї величини σ в припущенні, що n нескінченно зростає, назвемо середнім арифметичним значенням функції в інтервалі (a, b).

Якщо це середнє значення функції позначимо через A, то за означенням маємо:

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{f(\xi_0) + f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_{n-1})}{n}. \tag{9}$$

Позначимо через m і M найменше і найбільше значення функції $f(x)$ в інтервалі (a, b). Тоді при всякому x

$$m \leqq f(x) \leqq M,$$

а тому

$$m \leqq f(\xi_0) \leqq M, \; m \leqq f(\xi_1) \leqq M, \ldots, \; m \leqq f(\xi_{n-1}) \leqq M.$$

Якщо ми тепер у (8) замінимо в чисельнику кожний доданок через M, то ми збільшимо чисельник, а тому

$$\sigma \leqq \frac{nM}{n}, \quad \text{тобто } \sigma \leqq M.$$

Заміняючи ж кожний доданок у чисельнику через m, ми знайдемо $\sigma \geqq m$. Таким чином,

$$m \leqq \sigma \leqq M,$$

а тому

$$m \leqq \lim \sigma \leqq M, \text{ тобто } m \leqq A \leqq M.$$

Ми бачимо, що середнє значення функції лежить між її найменшим і найбільшим значеннями. Але неперервна функція може прийняти, при деякому значенні аргумента, будьяке значення, проміжне між її найменшим і найбільшим значенням. Тому якщо A проміжне між m і M, то функція $f(x)$ повинна при деякому значенні аргумента прийняти саме те значення, яке дорівнює A. Позначаючи це значення аргумента через ξ, матимемо рівність $A = f(\xi)$, і одержимо таку теорему:

Теорема. **Середнє значення A неперервної функції в інтервалі (a, b) дорівнює значенню функції в якійсь точці ξ цього інтервалу:**

$$A = f(\xi). \tag{10}$$

Говорячи інакше, середнє значення функції в інтервалі є одне з її значень у цьому інтервалі.

Очевидно, що ця теорема нам ще не дає можливості обчислити середнє значення, бо в рівності (10) про число ξ ми знаємо тільки те, що воно проміжне між a і b, і більше нічого про нього не знаємо. Але з порівнювання рівностей (9) і (7) одразу ж дістаємо таку теорему:

Теорема. **Середнє значення функції в інтервалі дорівнює інтегралові від функції, поділеному на довжину інтервалу:**

$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (11)$$

Обчислимо, наприклад, середнє значення $\sin x$ у проміжку від 0 до $\frac{\pi}{2}$. Позначаючи це середнє значення через p, маємо

$$p = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x = \frac{2}{\pi}.$$

З порівнювання рівностей (11) і (10) випливає така надзвичайно важлива так звана

Теорема про середнє значення інтеграла. **Інтеграл від неперервної функції дорівнює довжині інтервалу інтеграції, помноженій на значення функції в якійсь точці інтервалу. Отже,**

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi), \qquad (12)$$

де ξ — проміжне між a і b, або

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f[a+\theta(b-a)], \qquad (13)$$

де $0<\theta<1$.

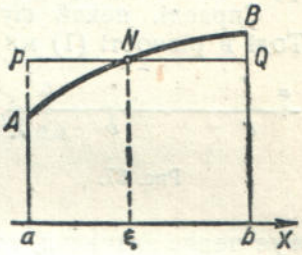

Рис. 86.

Дуже просте геометричне значення цієї теореми в тому випадку, коли $f(x)$ додатна і $a<b$ (рис. 86). Нехай N — точка на кривій з невідомою абсцисою ξ. Провівши через N пряму PQ, паралельну осі абсцис, ми матимемо:

площа прямокутника $aPQb$ дорівнює $(b-a)f(\xi)$,

площа трапеції $aABb$ дорівнює $\int_a^b f(x)\,dx$.

Отже, рівність (12) виражає той простий геометричний факт, що площа трапеції дорівнює площі прямокутника з основою, що дорівнює основі трапеції, і з висотою, проміжною між найменшою і найбільшою ординатами кривої.

§ 103. Означений інтеграл як функція своїх границь.

Той символ, що в означеному інтегралі позначений як аргумент підінтегральної функції, називається змінним інтеграції. Інтегральна сума

$$s = f(\xi_0)(x_1-a) + f(\xi_1)(x_2-x_1) + \ldots + f(\xi_{n-1})(b-x_{n-1})$$

залежить тільки від вибору чисел x_k і ξ_k, але не залежить від самого змінного x, тому отже,

означений інтеграл не є функція змінного інтеграції, а тому символ змінного інтеграції завжди може бути замінений символом будьякої змінної величини:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \ldots = \int_a^b f(z)\,dz.$$

Хоч означений інтеграл не є функція змінного інтеграції, проте, неважко бачити, що

границями означеного інтеграла

$$u = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

можуть бути змінні величини.

Якщо границі інтеграла — змінні величини, то інтеграл є функція своїх границь.

Справді, нехай функція $f(x)$ неперервна в інтервалі (α, β). Тоді в рівності (1) ми можемо розглядати a і b як змінні величини, кожна з яких може приймати будь-яке значення, що лежить на інтервалі (α, β). При такому погляді на a і b границі інтеграла будуть змінні, і оскільки зрозуміло, що кожного разу, як a і b мають деякі певні значення, u теж одержує певне значення, то, отже, u — функція a і b, і теорема доведена.

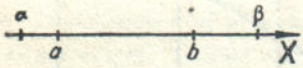

Рис. 87.

Але, звичайно, означений інтеграл є функція своїх границь тільки в тому випадку, коли границі змінні. Якщо вони обидві сталі, то і інтеграл уже буде не функція, а стала величина. Взагалі ж легко бачити, що границі інтеграла в різних випадках можуть бути або обидві змінними, або обидві сталими, або одна з них може бути змінною, друга — сталою. Так, наприклад,

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a,$$

і інтеграл, що стоїть у лівій частині, буде функцією a і b, поки a і b розглядаються як змінні. Але коли ми надамо їм яких-небудь значень, наприклад, 0 і $\frac{\pi}{2}$, то дістанемо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1,$$

і інтеграл у лівій частині вже не функція, а число.

Дослідимо властивості інтеграла як функції його границь.

Будемо розглядати нижню границю a як довільне стале, верхню ж границю b як змінне. Тоді інтеграл буде деякою функцією верхньої границі. Позначивши цю функцію через $\psi(b)$:

$$\psi(b) = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{2}$$

поставимо задачу: знайти похідну від цієї функції $\psi(b)$. Для цього ми повинні знайти границю відношення

$$\frac{\psi(b+\Delta b)-\psi(b)}{\Delta b},$$

припускаючи, що $\Delta b \to 0$. Рівність (2) дійсна при всякому b, тому

$$\psi(b+\Delta b) = \int_a^{b+\Delta b} f(x)\,dx,$$

а через це

$$\psi(\Delta b + b) - \psi(b) = \int_a^{b+\Delta b} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx.$$

Але за теоремою про поділ інтервалу інтеграції

$$\int_a^{b+\Delta b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{b+\Delta b} f(x)\,dx.$$

Отже,

$$\psi(b+\Delta b) - \psi(b) = \int_b^{b+\Delta b} f(x)\,dx.$$

Прикладаючи до правої частини теорему про середнє значення інтеграла (стор. 204), маємо

$$\psi(b+\Delta b) - \psi(b) = \Delta b\, f(b+\theta\Delta b). \tag{3}$$

Зрозуміло, що коли $\Delta b \to 0$, то границя лівої частини дорівнює нулеві, а тому

$$\lim_{\Delta b \to 0} \psi(b+\Delta b) = \psi(b).$$

Це означає, що функція $\psi(b)$ є неперервна функція. Далі з (3) маємо

$$\frac{\psi(b+\Delta b)-\psi(b)}{\Delta b} = f(b+\theta\Delta b).$$

Приймаючи, що $\Delta b \to 0$, і переходячи до границі, дістанемо $\psi'(b) = f(b)$, тобто

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b), \tag{4}$$

і ми знайшли похідну від інтеграла за верхньою границею.

Якщо ми тепер верхню границю b розглядатимемо як довільне стале, нижню ж границю a як змінне, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

В правій частині вже верхня границя змінна, а тому згідно з рівністю (4)

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x\ dx = -\frac{d}{da}\int_b^a f(x)dx = -f(a). \qquad (5)$$

З (4) і (5) випливає

Теорема. **Інтеграл є неперервна функція як своєї верхньої, так і нижньої границь.**

Щоб одержати похідну від інтеграла по верхній границі, треба в підінтегральній функції замінити змінне інтеграції верхньою границею:

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b).$$

Щоб одержати похідну від інтеграла по нижній границі, треба в підінтегральній функції замінити змінне інтеграції нижньою границею і взяти результат з оберненим знаком:

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = -f(a)\,dx.$$

Так, наприклад,

$$\frac{d}{db}\int_0^b \frac{x+\sin x}{x^2+3x}\,dx = \frac{b+\sin b}{b^2+3b},$$

$$\frac{d}{dc}\int_c^s \frac{dx}{\sqrt{2+\cos x}} = -\frac{1}{\sqrt{2+\cos c}}.$$

§ 104. Означений інтеграл як первісна.

Якщо верхньою границею інтеграла від функції $f(x)$ є саме аргумент функції, то таке його позначення:

$$\int_a^x f(x)\,dx \qquad (1)$$

по суті було б неправильне, бо в ньому буква x відограє подвійну роль, позначаючи і верхню границю і змінне інтеграції. тобто два істотно різні об'єкти думки, що видно хоча б з того,

що інтеграл є функція своєї верхньої границі, але не функція змінного інтеграції. Отже, якщо ввести позначення (1) то інтеграл буде функцією x як верхньої границі і не буде функцією x як змінного інтеграції. Тому, якщо верхньою границею є аргумент функції, то змінне інтеграції має бути позначене якоюнебудь іншою буквою, і замість (1) ми повинні написати, наприклад, так:

$$\int_a^x f(z)\,dz. \tag{2}$$

Але, не зважаючи на це,

дуже часто, коли верхньою границею інтеграла є аргумент функції, то для позначення змінного інтеграції залишають той же символ, як і для верхньої границі, а тому замість (2) пишуть (1).

Припустимо, ми маємо

$$u=\int_a^x f(x)\,dx, \tag{3}$$

або точніше

$$u=\int_a^x f(z)\,dz. \tag{4}$$

Обчислимо похідну від u за x. За тількищо доведеною теоремою

$$\frac{du}{dx}=f(x);$$

крім того, $u=0$ при $x=a$. Дістаємо теорему:

Теорема. **Інтеграл як функція верхньої границі є одна з первісних підінтегральної функції, а саме та з первісних, яка перетворюється в нуль у точці нижньої границі. Отже, якщо**

$$u=\int_a^x f(x)\,dx, \tag{5}$$

то

$$du=f(x)\,dx, \tag{6}$$

при чому $u=0$ при $x=a$. Навпаки, якщо

$$du=f(x)\,dx, \tag{7}$$

при чому відомо, що $u=0$ при $x=a$, то

$$u=\int_a^x f(x)\,dx. \tag{8}$$

Як відомо, неозначеним інтегралом називається сума будьякої первісної підінтегральної функції і неозначеного сталого. Тому

$$\int f(x)\,dx=\Phi(x)+C, \quad \text{де} \quad \Phi'(x)=f(x). \tag{9}$$

Але означений інтеграл (8) є одна з первісних, тому ми в рівності (9) за функціональну частину $\Phi(x)$ можемо прийняти саме інтеграл (8), звідки випливає

Теорема. **Неозначений інтеграл може бути представлений через означений за формулою**

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + C. \tag{10}$$

Куди більше значення має

Обернена теорема. **Якщо функціональна частина неозначеного інтеграла неперервна, то означений інтеграл дорівнює різниці між значеннями функції інтеграла в точках верхньої і нижньої границь. Тому, якщо**

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C \tag{11}$$

і $\Phi(x)$ неперервна в інтервалі (a, b), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{12}$$

Справді, якщо

$$u = \int_a^x f(x)\,dx,$$

то

$$\frac{du}{dx} = f(x)$$

і, отже,

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\Phi(x)}{dx},$$

а тому

$$u = \Phi(x) + K,$$

де K — деяке цілком означене стале. Приймаючи $u = 0$, дістанемо $0 = \Phi(a) + K$. Отже,

$$u = \Phi(x) - \Phi(a),$$

тобто

$$\int_a^x f(x)\,dx = \Phi(x) - \Phi(a). \tag{13}$$

Приймаючи $x = b$, дістанемо (12), і теорема доведена*.

У лівій частині рівності (13) змінне інтеграції і верхня границя позначені однією і тією ж буквою. В зв'язку з цим зауважимо, що

---

* Корисно порівняти це доведення з доведенням на стор. 54.

коли x — змінна величина, то замість точних позначень

$$\int_a^x f(z)\,dz, \qquad \int_x^b f(z)\,dz, \qquad \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dz$$

стало звичаєм писати

$$\int_a^x f(x)\,dx, \qquad \int_x^b f(x)\,dx, \qquad \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx.$$

Так, наприклад, при цілком точних позначеннях маємо

$$\int_{\sqrt{x}}^{x^2} z^3\,dz = \Bigg|_{z=\sqrt{x}}^{z=x^2} \frac{z^4}{4}\,dz = \frac{x^8 - x^2}{4}. \tag{14}$$

Замість цього пишуть:

$$\int_{\sqrt{x}}^{x^2} x^3\,dx = \Bigg|_{x=\sqrt{x}}^{x=x^2} \frac{x^4}{4} = \frac{x^8 - x^2}{4}. \tag{15}$$

Порівнювання (15) і (14) яскраво показують, що в (15) символ x вживається в різних розуміннях. Особливо це яскраво видно в рівностях $x = x^2$ і $x = \sqrt{x}$.

Таким же способом, якщо b — змінне, то замість

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

часто пишуть

$$\int_a^b f(b)\,db,$$

а якщо a — змінне, то також пишуть

$$\int_a^b f(a)\,da.$$

У випадку ж побоювання хоча б найменшого непорозуміння треба умовні позначення заміняти точними, тобто для позначення змінного інтеграції ввести символ, який не фігурує у виразах границь інтеграла.

§ 105. Важливе зауваження про первісну.

Хоч формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

яка виражає зв'язок означеного інтеграла з неозначеним, для фактичного обчислення означеного інтеграла може бути прикладена тільки в тих рідких випадках, коли неозначений інтеграл може бути обчислений, проте, при теоретичних дослідженнях ми нею часто можемо користуватися з великим успіхом, спираючись на таку теорему, що випливає з усього тількищо доведеного:

Всяка функція $f(x)$, неперервна в якомусь інтервалі, має в цьому інтервалі хоч одну неперервну ж первісну, а тому неозначений інтеграл від функції $f(x)$

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C$$

завжди може бути представлений у такій формі, щоб його функціональна частина в інтервалі неперервності підінтегральної функції була теж неперервна.

Справді, нехай

$$\Phi(x) = \int_c^x f(x)\,dx,$$

де c — яканебудь точка всередині інтервалу.

Якщо підінтегральна функція $f(x)$ неперервна в інтервалі (a, b), то в тому ж інтервалі неперервна і функція $\Phi(x)$. Але в той же час $\Phi'(x) = f(x)$, отже, теорема доведена.

Ще раз відзначимо, що рівність

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

буде тільки тоді, коли функція $\Phi(x)$ неперервна. Пам'ятати це надзвичайно важливо, бо

на практиці при обчисленні неозначеного інтеграла від неперервної функції дуже часто його функціональну частину одержують представленою перервною функцією.

Це звичайно відбувається тоді, коли при обчисленні неозначеного інтеграла вдаються до теореми про підставляння, згідно з якою

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \text{ де } x = \varphi(t).$$

І ось часто виявляється, що для функції $\varphi(t)$ не можна знайти такого інтервалу, при зміні в якому її аргумента t змінне x змінювалося б неперервно від a до b. В такому випадку функціональна частина даного неозначеного інтеграла представляється перервною функцією.

Пояснимо сказане прикладом. Нехай потрібно обчислити інтеграл

$$G = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 3\sin^2 x}. \qquad (1)$$

В інтервалі $(0, \pi)$ підінтегральна функція неперервна і додатна. Вона зображається кривою, що лежить над віссю X, а тому самий інтеграл напевне є додатний. В усякому разі він не дорівнює нулеві.

Обчисляємо його. Пригадуючи, що під $\operatorname{arc\,tg} x$ ми розуміємо дугу, яка лежить у першій або четвертій чверті, послідовно маємо:

$$\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,2\operatorname{tg} x}{1+(2\operatorname{tg} x)^2},$$

а тому

$$\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg} x) + C. \tag{2}$$

Отже,

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg}\pi) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} 0) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 0 - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 0 = 0.$$

В чому ж справа? Справа в тому, що функціональна частина

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg} x)$$

вийшла в нас перервною в інтервалі $(0, \pi)$. Справді, представимо її в такому вигляді:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z, \quad z = 2\operatorname{tg} x.$$

Коли x неперервно зростає від нуля до $\frac{\pi}{2}$, то z неперервно зростає від нуля до $+\infty$. Тому в інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ми повинні прийняти, що

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(+\infty) = \frac{\pi}{4}, \tag{3}$$

і функція $\Phi(x)$ неперервна на інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Змінюватимемо x від $\frac{\pi}{2}$ до π. При цій зміні z уже від'ємний, і коли x, будучи в другій чверті, наближається до $\frac{\pi}{2}$, то z прямує до $-\infty$, а тому тепер ми повинні прийняти, що $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = -\infty$.

Завдяки цьому

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(-\infty)=-\frac{\pi}{4}, \tag{4}$$

але функція $\Phi(x)$ неперервна в інтервалі $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

З (3) і (4) ми бачимо, що в точці $x=\frac{\pi}{2}$ функція $\Phi(x)$ приймає різні значення залежно від того, з якого боку наближається x до цієї точки. Отже, функція $\Phi(x)$, будучи неперервною як в інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, так і в інтервалі $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, в той же час перервна на всьому інтервалі $(0, \pi)$, а тому для цього інтервалу ми не маємо права скористатись теоремою про обчислення означеного інтервала через неозначений.

Як же бути? Дуже просто. Ми поділяємо інтервал $(0, \pi)$ на два: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ і $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Маємо

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+3\sin^2 x},$$

$$\int\frac{dx}{1+3\sin^2 x}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg} x)+C,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}=\Big/_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg} x)=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(+\infty)=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}=\Big/_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg} x)=-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(-\infty)=\frac{\pi}{4},$$

а тому остаточно

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}=\frac{\pi}{2}>0.$$

§ 106. Теорема про інтеграл алгебричної суми.

Нижче під x ми будемо розуміти аргумент підінтегральної функції, під a і b — границі інтеграла, кожна з яких може бути або сталою величиною або змінною; в окремому випадку вони можуть бути будьякою функцією від x.

Теорема. **Означений інтеграл від суми неперервних функцій дорівнює сумі інтегралів між тими ж границями від усіх доданків:**

$$\int_a^b \{\varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots \pm \omega(x)\}\, dx =$$

$$= \int_a^b \varphi(x)\, dx \pm \int_a^b \psi(x)\, dx \pm \ldots \pm \int_a^b \omega(x)\, dx. \qquad (1)$$

Перше доведення. Нехай

$$\int \varphi(x)\, dx = \Phi(x) + C, \quad \int \psi(x)\, dx = F(x) + C, \ldots, \int \omega(x)\, dx = G(x) + C,$$

де функціональні частини припускаємо неперервними, що, як ми бачимо, є завжди можливим. Маємо

$$\int \{\varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots \pm \omega(x)\}\, dx = \Phi(x) \pm F(x) \pm \ldots \pm G(x) + C,$$

а тому

$$\int_a^b \{\varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots \pm \omega(x)\}\, dx =$$

$$= \{\Phi(b) \pm F(b) \pm \ldots \pm G(b)\} - \{\Phi(a) \pm F(a) \pm \ldots \pm G(a)\} =$$

$$= \{\Phi(b) - \Phi(a)\} \pm \{F(b) - F(a)\} \pm \ldots \pm \{G(b) - G(a)\} =$$

$$= \int_a^b \varphi(x)\, dx \pm \int_a^b \psi(x)\, dx \pm \ldots \pm \int_a^b \omega(x)\, dx,$$

і теорема доведена. Її можна довести й інакше. Нехай

$$u = \int_a^x \varphi(x)\, dx \pm \int_a^x \psi(x)\, dx \pm \ldots \pm \int_a^x \omega(x)\, dx. \qquad (2)$$

Кожний інтеграл у правій частині перетворюється в нуль при $x = a$, тому

$$u = 0 \text{ при } x = a. \qquad (3)$$

Крім того, з (2) випливає, що

$$du = (\varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots \pm \omega(x))\, dx. \qquad (4)$$

З (3) і (4) робимо висновок

$$u = \int_a^x \{\varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots \pm \omega(x)\}\, dx. \qquad (5)$$

З (2) і (5) маємо

$$\int_a^x \{\varphi(x) \pm \ldots \pm \omega(x)\}\, dx = \int_a^x \varphi(x)\, dx \pm \ldots \pm \int_a^x \omega(x)\, dx.$$

Приймаючи тут $x = b$, дістанемо (1), і теорема знову доведена.

Її геометричне значення дуже просте. Нехай AB і CD — дві дані криві:

$$y=\varphi(x) \quad \text{і} \quad y=\psi(x)$$

і нехай PQ — крива, для якої

$$y=\varphi(x)+\psi(x).$$

Отже, кожна ордината кривої PQ дорівнює сумі відповідних її ординат даних кривих AB і CD. Говорять, що крива PQ утворена накладанням одна на одну кривих AB і CD. Через те що

$$\int_a^b (\varphi(x)+\psi(x))\,dx=\int_a^b \varphi(x)\,dx+\int_a^b \psi(x)\,dx,$$

то

площа $aPQb$ = площі $aABb$ + + площа $aCDb$.

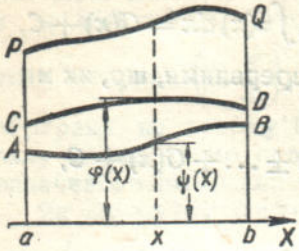

Рис. 88.

Отже, площа трапеції, обмежена кривою, утвореною накладанням даних кривих, дорівнює сумі площ трапецій, обмежених даними кривими.

Залежно від вигляду функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ крива PQ може дуже відрізнятись від форми кривих, що їх накладають. Так, наприклад, якщо накладемо одна на одну верхню і нижню половини еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то дістанемо відрізок прямої.

§ 107. Інтеграл від диференціального виразу.

Поняття інтеграла можна трохи розширити.

Якщо $f(x)$ — дана неперервна функція і якщо через $\Phi(x)$ ми позначимо якунебудь її неперервну первісну, то $\Phi'(x)=f(x)$ і

$$f(x)\,dx=d\Phi(x).$$

Отже, **всякий добуток будьякої функції на диференціал її аргумента можна завжди розглядати як диференціал якоїсь функції.**

Цей висновок можна трохи розширити. Нехай ми маємо добуток однієї функції на диференціал другої функції, тобто добуток типу

$$\psi(x)\,d\varphi(x).$$

Такий добуток ми теж можемо розглядати як диференціал якоїсь функції. Справді,

$$\psi(x)\,d\varphi(x)=\psi(x)\,\varphi'(x)\,dx,$$

і тепер зрозуміло, що коли через $\Phi(x)$ ми позначимо функцію, похідна якої дорівнює $\psi(x)\,\varphi'(x)$, то

$$\psi(x)\,d\varphi(x)=d\Phi(x).$$

Отже, **всякий добуток однієї функції на диференціал другої функції завжди можна розглядати як диференціал якоїсь функції.**

Вирази типу $\psi(x)\,d\varphi(x)$ часто називають диференціалами.

Якщо тепер $\Phi'(x)=f(x)$, то підінтегральний вираз в інтегралі

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ми можемо представити у формі: $d\Phi(x)$. Тоді самий інтеграл зобразиться так:

$$\int_a^b d\Phi(x).$$

Це і приводить до того розширення поняття про інтеграл, про який ми говорили.

Інтегралом від диференціала даної функції називається інтеграл від похідної даної функції:

$$\int_a^b d\Phi(x)=\int_a^b \Phi'(x)\,dx.$$

Інтегралом від диференціального виразу $\varphi(x)\,d\psi(x)$ називається інтеграл від функції $\varphi(x)\,\psi'(x)$:

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x)=\int_a^b \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx.$$

Ми бачимо, що це розширення поняття інтеграла не стосується суті самого поняття, а тільки тієї форми, в якій може бути представлений підінтегральний вираз.

Теорема. **Інтеграл від диференціала неперервної функції дорівнює різниці значень функції при верхній і нижній границях:**

$$\int_a^b d\Phi(x)=\Big|_{x=a}^{x=b}\Phi(x)=\Phi(b)-\Phi(a). \qquad (1)$$

Оскільки

$$\int d\Phi(x)=\int \Phi'(x)\,dx=\Phi(x)+C,$$

то маємо (1).

§ 108. Теорема про інтегрування частинами.

Завжди маємо

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x)=\varphi(b)\,\psi(b)-\varphi(a)\,\psi(a)-\int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x)=$$

$$=[\varphi(x)\,\psi(x)]_a^b-\int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x)$$

при умові неперервності функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ і їх похідних.

Послідовно маємо

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x) = \int_a^b \{d\varphi(x)\,\psi(x) - \psi(x)\,d\varphi(x)\} =$$

$$= \int_a^b d\varphi(x)\,\psi(x) - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x) = \Big|_{x=a}^{x=b} \varphi(x)\,\psi(x) - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x).$$

Вираз $\varphi(b)\,\psi(b) - \varphi(a)\,\psi(a)$ називається проінтегрованою частиною.

Приклад. Маємо

$$\int_1^\pi \cos x \ln x\,dx = \int_1^\pi \ln x\,d\sin x = [\sin x \cdot \ln x]_1^\pi - \int_1^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx =$$

$$= -\int_1^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Корисно порівняти цю теорему, позначивши $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ через u і v, з відповідною теоремою в теорії неозначених інтегралів.

§ 109. Теорема про підставляння.

Якщо $f(x)$ — функція, неперервна на інтервалі (a, b), і якщо $x = \varphi(t)$ — неперервна функція разом із своєю похідною на інтервалі (α, β) і якщо при зміні t від α до β величина x змінюється від a до b так, що

$$a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta),$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

Нехай, як і раніше,

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C,$$

де $\Phi(x)$ неперервна в інтервалі (a, b). За теоремою про підставляння для неозначеного інтеграла маємо

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(t)) + C,$$

а тому

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

і теорема доведена. Її можна довести і так: нехай

$$u = \int_a^x f(x)\,dx. \tag{2}$$

Отже, $u=0$ при $x=a$ і

$$du=f(x)\,dx. \tag{3}$$

Якщо ми приймемо $x=\varphi(t)$, то u перетвориться у функцію від t, і рівність (3) заміниться рівністю

$$du=f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt; \tag{4}$$

при цьому, через те що $x=a$ при $t=\alpha$, то u перетворюється в нуль при $t=\alpha$, а тому з (4) випливає, що

$$u=\int_{\alpha}^{t} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{5}$$

Порівнюючи з (2), маємо

$$\int_{a}^{x} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{t} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{6}$$

Приймаючи $t=\beta$, дістанемо (1), бо коли $t=\beta$, то $x=b$. Теорема доведена.

Ми бачимо, що, виконуючи в означеному інтегралі заміну змінного, ми повинні не тільки замінити старе змінне функцією нового, але також повинні змінити границі інтеграла. Новим інтервалом інтеграції буде той інтервал, у якому повинно змінитись нове змінне t, щоб старе змінне x могло пробігти весь свій інтервал.

Нехай, наприклад, потрібно обчислити площу еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Для верхньої його половини

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Тому, якщо u — площа верхньої половини еліпса, то

$$u=\frac{b}{a}\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Виконуємо підставляння $x=a\sin t$. Щоб x змінювалось від $-a$ до $+a$, треба t змінювати від $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Тому

$$u=\frac{b}{a}\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\right)a\cos t\,dt=ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=$$

$$=ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=ab\left.\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi ab}{2}.$$

Площа всього еліпса дорівнює πab.

Для теоретичних прикладань теореми про підставляння корисно запам'ятати таку її форму. Нехай

$$y = f(x).$$

Тоді, якщо $x = \varphi(t)$, то

$$y = f(\varphi(t)).$$

Маємо

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta y\,dx,$$

тобто маємо

$$\int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta y\,dx,$$

при чому в лівій частині y — функція x, а в правій частині y і x — функції t. Отже,

якщо в інтегралі

$$\int_a^b y\,dx$$

y є функція x, то величина інтеграла не зміниться, якщо ми розглядатимемо y і x як функції нового змінного t, але тільки при умові, щоб границі інтеграла a і b, між якими змінюється x, були замінені границями α і β, між якими змінюється нове змінне t:

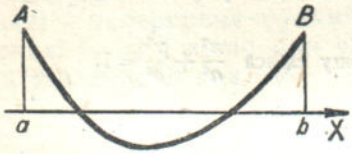

Рис. 89.

$$\int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta y\,dx.$$

Ми скористуємося цією формою теореми про підставляння для виведення формули для площі трапеції.

Ми бачили, що коли ордината кривої дана як функція абсциси: $y = f(x)$, то для площі u, яку пробігає ордината при зміні x від a до b, маємо:

$$u = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Припустимо тепер, що крива дана параметрично рівняннями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$$

і нехай початковій і кінцевій точкам кривої відповідають значення параметра, рівні t_0 і T. Отже, змінюючи t від t_0 до T, ми дістанемо всю криву AB.

Розглянемо, як виразиться в цьому випадку площа u, що пробігається ординатою при зміні t від t_0 до T.

Хоч крива нам і дана параметрично, але її ордината в усякому випадку є якась функція абсциси і, розглядаючи y як функцію x, ми маємо:

$$u = \int_a^b y\,dx, \tag{7}$$

де a і b — абсциси початкової і кінцевої точок кривої.

Але за теоремою про підставляння

$$\int_a^b y\,dx = \int_{t_0}^T y\,dx,$$

де в правій частині y і x — уже функції t. Отже,

$$u = \int_{t_0}^T y\,dx,$$

і ми дістаємо теорему:

Якщо крива дана параметрично рівняннями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то для площі, що її описує ордината при зміні параметра від t_0 до T, маємо

$$u = \int_{t_0}^T y\,dx, \tag{8}$$

де в підінтегральному виразі треба y і x розглядати як функції параметра.

Щоб з (8) одержати звичайну формулу, зауважимо, що коли крива дана рівнянням $y = f(x)$, то параметром є x. Якщо він змінюється від a до b, то згідно з (8) маємо (2).

Приклад. Нехай потрібно обчислити площу u циклоїди, рівняння якої $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Щоб дістати цю площу, треба t змінювати від 0 до 2π, а тому

$$u = \int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2\,dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= a^2 \left| \int_{t=0}^{t=2\pi} \left(\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4}\right) dt = 3\pi a^2.\right.$$

Отже, площа циклоїди в три рази більша, ніж площа твірного круга.

§ 110. Порівнювання інтегралів.

Теорема про інтеграл додатної функції. **Якщо нижня границя інтеграла менша верхньої і якщо підінтегральна функція додатна при всіх значеннях аргумента, то інтеграл додатний.**

Отже,

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0,$$

якщо $a < b$ і $f(x) > 0$ при всякому x.

За теоремою про середнє значення інтеграла маємо

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Але в правій частині за умовою теореми обидва множники $b-a$ і $f(\xi)$ додатні, а тому і добуток їх додатний.

Геометрично теорема очевидна. Справді, якщо $f(x) > 0$, то крива $y = f(x)$ лежить усіма точками вище осі X. Через те що $a < b$, інтеграл дорівнює площі, що її описує ордината, яка рухається в додатному напрямі. Отже, площа додатна, а тому додатний і інтеграл.

Теорема про порівнювання інтегралів. **Якщо $a < b$ і $\varphi(x) < \psi(x)$ при всякому x, то**

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Справді, при всякому x

$$\psi(x) - \varphi(x) > 0,$$

а тому за попередньою теоремою

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx > 0,$$

що можна переписати в такому вигляді:

$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx > 0.$$

Звідси одразу ж випливає теорема.

§ 111. Узагальнена теорема про середнє значення інтеграла.

Якщо $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ неперервні в інтервалі (a, b), при чому функція $\psi(x)$ зберігає на всьому інтервалі один і той же знак, то

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)\,dx, \qquad (1)$$

де ξ — якесь число, проміжне між a і b.

Припустимо спочатку, що $\psi(x)$ додатна при всякому x, і нехай m і M — найменше і найбільше із значень функції $\varphi(x)$ на інтервалі (a, b):

$$m \leqq \varphi(x) \leqq M. \tag{2}$$

Через те що $\psi(x) > 0$, то

$$m\psi(x) \leqq \varphi(x)\psi(x) \leqq M\psi(x); \tag{3}$$

$$m\int_a^b \psi(x)\,dx \leqq \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx \leqq M\int_a^b \psi(x)\,dx, \tag{4}$$

а тому

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = q\int_a^b \psi(x)\,dx, \tag{5}$$

де q — деяке число, проміжне між m і M*.

Але всяка неперервна функція приймає всі значення, проміжні між її найменшим значенням m і найбільшим M. Отже, повинно існувати таке ξ, проміжне між a і b, що

$$q = \varphi(\xi). \tag{6}$$

З (5) і (6) випливає (1). Але це, коли $\psi(x) > 0$. Коли ж $\psi(x)$ усюди від'ємна, то $-\psi(x)$ додатна, а тому за доведеним

$$\int_a^b \varphi(x)\cdot(-\psi(x))\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b -\psi(x)\,dx,$$

звідки знову випливає (1).

Треба пам'ятати, що теорема правильна тільки при умові, що $\psi(x)$ або всюди додатна, або всюди від'ємна. Але коли $\psi(x)$ може змінювати знак в інтервалі (a, b), то теорема може бути неправильною.

В рівності (1) можна прийняти $\psi(x) = 1$, бо в цьому випадку вона зберігає свій знак в інтервалі (a, b). Але приймаючи $\psi(x) = 1$, дістанемо

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b dx = \varphi(\xi)(b-a),$$

тобто дістанемо теорему про середнє значення інтеграла. Отже, рівність (1) справді є узагальнення цієї теореми.

---

* Якщо

$$mA \leqq z \leqq MA, \tag{1}$$

то, поділяючи на A, дістанемо

$$m \leqq \frac{z}{A} \leqq M \text{ при } A > 0 \text{ і } m \geqq \frac{z}{A} \geqq M \text{ при } A < 0. \tag{2}$$

В тому і другому випадку $\frac{z}{A}$ проміжне між m і M, а тому $\frac{z}{A} = q$, $z = qA$, де q — якесь число, проміжне між m і M.

§ 112. Висновок.

Для кращого огляду основних властивостей означеного інтеграла ми представимо їх у вигляді таблиці в трохи іншому порядку, ніж доводили їх. Пояснення позначень, а також словесне формулювання теорем пропускаємо.

1. Означення:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x,$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x) = \int_a^b \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx,$$

$$\int_a^b d\Phi(x) = \int_a^b \Phi'(x)\,dx,$$

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0.$$

Інтеграл є функція своїх границь, але не функція змінного інтеграції.

2. Умовні позначення:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x f(z)\,dz, \quad \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(z)\,dz.$$

3. Співвідношення між означеним і неозначеним інтегралами: якщо

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C$$

і $\Phi(x)$ неперервна, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

4. Теорема про похідні інтеграла по границях:

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b), \quad \frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = -f(a).$$

5. Інтеграл як функція верхньої границі: якщо

$$u = \int_a^x f(x)\,dx,$$

то

$$du = f(x)\,dx$$

і $u = 0$ при $x = a$.

6. Теорема про переставляння границь:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

7. Теорема про винесення сталого множника:

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx.$$

8. Теорема про інтеграл суми:

$$\int_a^b \{\varphi(x) \pm \psi(x)\}\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx \pm \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

9. Теорема про поділ інтервалу інтеграції:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

10. Теорема про інтеграл диференціала функції:

$$\int_a^b d\Phi(x) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

11. Теорема про інтегрування частинами:

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x) = [\varphi(x)\,\psi(x)]_a^b - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x).$$

12. Теорема про підставляння:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \quad x = \varphi(t).$$

$$\int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta y\,dx, \quad a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta).$$

13. Теореми про середнє значення інтеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi),$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)\,dx$$

при умові, що $\psi(x)$ зберігає один і той же знак в інтервалі інтеграції.

14. **Теорема про порівнювання інтегралів:** якщо

$$\varphi(x) < \psi(x) \quad \text{і} \quad a < b,$$

то

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

15. **Теорема про середнє значення функції в інтервалі:**

$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$