УЗАГАЛЬНЕНІ ІНТЕГРАЛИ.

Вводячи поняття про означений інтеграл як границю суми:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x,$$

ми припускали, що підінтегральна функція неперервна в інтервалі інтеграції і що границі інтеграла скінченні. Такі інтеграли називатимемо звичайними.

Але в прикладаннях ми весь час зустрічаємось не тільки з неперервними функціями, але і з перервними. Крім того, часто доводиться розглядати функції, аргументи яких змінюються не в якомусь скінченному інтервалі, але можуть приймати різні значення від $-\infty$ до $+\infty$. Тому природно постає питання: чи не можна розширити, або, як прийнято говорити, чи не можна узагальнити поняття означеного інтеграла так, щоб не тільки підінтегральна функція могла бути перервною, але щоб і границі інтеграла могли приймати як скінченні, так і нескінченні значення? Виявляється, що таке узагальнення можливе, і в результаті його одержуємо інтеграли, що називаються відмінно від звичайних узагальненими, або невласними, інтегралами.

§ 113. Узагальнені інтеграли першого роду.

Ідея неперервності проходить червоною ниткою через весь Аналіз. Вона ж лежить в основі узагальнення поняття інтеграла. Як відомо

функція називається неперервною в точці c, якщо її границя в цій точці скінченна і дорівнює її значенню в цій точці, тобто якщо

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

при чому права частина скінченна. Коли ж границя функції в точці c або нескінченна, або хоч і скінченна, але не дорівнює значенню функції в цій точці, або ж, нарешті, якщо її не існує, то точка c називається точкою перервності.

Функція може бути перервна або на одному кінці розглядуваного інтервалу, або на обох кінцях його, або тільки всередині його, або, нарешті, як усередині його, так і на одному, або на обох його кінцях.

Узагальненими інтегралами першого роду назвемо інтеграли від функцій, перервних тільки на одному або на обох кінцях інтервалу інтеграції, але неперервних в усіх внутрішніх точках інтервалу.

Нижня границя інтеграла може бути менша або більша верхньої границі. Але випадок, коли верхня границя менша нижньої, простим переставлянням границь зводиться до випадку, коли нижня границя менша верхньої. Тому при теоретичних міркуваннях можна обмежитись тільки розглядом випадку, коли нижня границя менша верхньої, що ми надалі звичайно й припускатимемо.

Щоб підійти до означення поняття про узагальнений інтеграл, розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли дана функція неперервна на всьому інтервалі за винятком одного з його кінців.

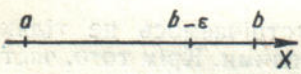

Рис. 90.

Нехай $f(x)$ — функція, неперервна в усіх точках інтервалу (a, b), крім точки b (рис. 90). В такому випадку ми не маємо права говорити про інтеграл

$$G=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Але яке б ми не взяли як завгодно мале додатне число ε, функція завжди неперервна на інтервалі $(a, b-\varepsilon)$, не виключаючи його кінців, тому ми маємо право говорити про інтеграл

$$H=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{2}$$

при всякому досить малому додатному ε.

Будемо ε нескінченно зменшувати. В границі інтервал $a, b-\varepsilon$ перетвориться в інтервал a, b, а тому, якщо при цьому інтеграл (2) має скінченну границю, то цю границю природно прийняти за інтеграл (1), тобто природно прийняти, що

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Розглянемо, наприклад, інтеграл

$$A=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3}$$

Підінтегральна функція в інтервалі (0, 1) всюди неперервна, крім правого кінця його, де вона перетворюється в ∞. Тому беремо спочатку інтеграл

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

де ε додатне і досить мале. Через те що

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1-\varepsilon),$$

то зрозуміло, що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

а тому приймаємо, що

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Ідея узагальнення зрозуміла. Якщо функція перервна тільки в точці b, то замість інтервалу (a, b) ми беремо інтервал, $(a, b-\varepsilon)$, де ε досить мале. Потім ми розглядаємо інтеграл уже в інтервалі $(a, b-\varepsilon)$ і дивимось, чому він дорівнює в границі, якщо $\varepsilon \to 0$.

Рис. 91.

Так само, якщо функція перервна тільки в точці a, то замість інтервалу (a, b) беремо інтеграл по інтервалу $(a+\varepsilon, b)$ і потім дивимось, до якої границі прямує цей інтеграл, якщо ε нескінченно малітиме. Отже, поняття про узагальнений інтеграл вводиться за допомогою таких означень:

Якщо функція $f(x)$ перервна тільки при верхній границі b, то інтегралом від a до b, який позначається так:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

називається та границя, якщо вона існує і скінченна, до якої прямує інтеграл

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

при нескінченно маліючому ε.

Якщо функція $f(x)$ перервна тільки при нижній границі a, то інтегралом від a до b, позначуваним так:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

називається та границя, якщо вона існує і скінченна, до якої при нескінченно маліючому ε прямує інтеграл

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Отже, за означенням, якщо b — точка перервності, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

а якщо a — точка перервності, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

при обов'язковій умові, що в тому і другому випадку границя в правій частині існує і скінченна.

Якщо тепер функція $f(x)$ перервна на обох кінцях інтервалу (рис. 92), то цей інтервал будьякою внутрішньою точкою c поділяється на два підінтервали, на кожному з яких функція уже перервна тільки на одному кінці, а тому природно ввести таке означення:

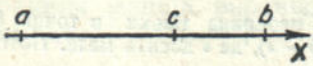

Рис. 92.

Якщо функція $f(x)$ перервна на обох кінцях інтервалу (a, b), але неперервна всередині його, і якщо обидва інтеграли

$$\int_a^c f(x)\,dx \text{ і } \int_c^b f(x)\,dx,$$

де c — внутрішня точка, існують, то за означенням

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Розглянемо кілька прикладів на ці означення.

Приклади. 1. Нехай потрібно обчислити інтеграл

$$G = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Підінтегральна функція в інтервалі (0, 1) перервна тільки в точці $x = 1$, де вона перетворюється в нескінченність. Тому за означенням пишемо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}},$$

де ε нескінченно маліє, приймаючи тільки додатні значення. Через те що

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x} + C,$$

то

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{2},$$

а тому, зменшуючи ε до нуля, дістаємо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}.$$

2. Нехай потрібно обчислити інтеграл

$$G = \int_1^2 \frac{dx}{2-x}, \tag{1}$$

в якому підінтегральна функція перервна тільки при верхній границі. Ми пишемо:

$$\int_1^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{2-x}.$$

Неважко переконатись, що

$$\int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{2-x} = -\ln \varepsilon. \tag{2}$$

Якщо ε нескінченно маліє, то права частина в границі перетворюється в нескінченність. Отже, інтеграл (2) не має скінченної границі, а тому узагальненого інтеграла (1) не існує.

3. Розглянемо інтеграл:

$$G = \int_0^1 \left(\cos \frac{\pi}{1-x}\right) \frac{dx}{(1-x)^2}, \tag{3}$$

де підінтегральна функція перервна тільки при верхній границі. Ми пишемо:

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{\pi}{1-x}}{(1-x)^2}\, dx = \lim_{\eta \to 0} \int_0^{1-\eta} \frac{\cos \frac{\pi}{1-x}}{(1-x)^2}\, dx,$$

і через те що

$$\int \frac{\cos \frac{\pi}{1-x}}{(1-x)^2}\, dx = \int \cos \frac{\pi}{1-x}\, d\frac{1}{1-x} = \frac{1}{\pi} \int \cos y\, dy = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{1-x} + C,$$

то

$$\int_0^{1-\eta} \frac{\cos \frac{\pi}{1-x}}{(1-x)^2}\, dx = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{\eta}. \tag{4}$$

Якщо η прямує до нуля, то величина $\frac{\pi}{\eta}$ нескінченно зростає, синус же її, коливаючись між -1 і $+1$, не прямує ні до якої скінченної границі. Отже, інтеграл (4) не має скінченної границі, а тому не існує і інтеграл (3).

4. Існує чи не існує інтеграл

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{5}$$

від функції, перервної на обох кінцях інтервалу $(-1, 1)$, де вона перетворюється в нескінченність?

Беремо всередині інтервалу $(-1, 1)$ якунебудь точку c і досліджуємо спочатку питання про існування інтегралів

$$\int_{c}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{і} \quad \int_{-1}^{c} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{6}$$

Через те що

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

то

$$\int_{c}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin c,$$

$$\int_{-1+\varepsilon}^{c} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin c - \arcsin(-1+\varepsilon),$$

а тому, якщо $\varepsilon \to 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin 1 - \arcsin c,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1+\varepsilon}^{c} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin c + \arcsin 1.$$

Отже, інтеграли (6) існують, а саме

$$\int_{c}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin c, \quad \int_{-1}^{c} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin c + \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Тому існує і інтеграл (5). Додаючи інтеграли (7), знайдемо, що

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

Приклади (2) і (3) яскраво показують, що узагальнені інтеграли не завжди існують.

Узагальнений інтеграл, якщо він існує, називається збіжним у точці перервності функції, а якщо не існує, — розбіжним.

§ 114. Узагальнені інтеграли другого роду.

Узагальненими інтегралами другого роду назвемо інтеграли від функцій, перервних усередині інтервалу і, можливо, на одному або обох кінцях його.

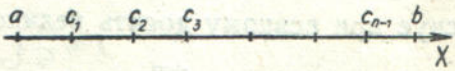

Рис. 93.

Якщо функція $f(x)$ перервна всередині інтервалу (a, b) в точках $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}$, що поділяють основний інтервал на підінтервали, всередині кожного з яких функція $f(x)$ уже неперервна, і якщо інтеграли першого роду

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx, \quad \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx, \ldots, \quad \int_{c_{n-1}}^{b} f(x)\,dx \tag{1}$$

існують, то за означенням

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_{n-1}}^{b} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Наприклад, за цим означенням

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{0}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}},$$

бо підінтегральна функція перервна всередині інтервалу тільки в точці $x = 0$. Але

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{-3\sqrt[3]{\varepsilon} + 3\right\} = 3,$$

$$\int_{0}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{3 - 3\sqrt[3]{\varepsilon}\right\} = 3,$$

тому

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 6.$$

§ 115. Інтеграли з нескінченними границями.

Інтегралами з нескінченними границями, або інтегралами третього роду, назвемо інтеграли, у яких одна або обидві границі нескінченні.

Припускатимемо, що нижня границя менша верхньої, бо до цього випадку завжди можна перейти переставлянням границь, якщо нижня границя більша верхньої.

Означення. Якщо інтеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

існує при всякому досить великому b, то за означенням

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

при умові, що границя в правій частині існує і скінченна.

Якщо інтеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

існує при всякому a, меншому від b, то за означенням

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

при умові, що границя в правій частині існує і скінченна.

Якщо інтеграли

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx \text{ і } \int_{-\infty}^c f(x)\,dx,$$

де c — якенебудь скінченне число, існують, то за означенням

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Розглянемо, чи існує, наприклад, інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \cos x\,dx. \tag{1}$$

Замість нескінченної границі беремо спочатку скінченну границю. Маємо

$$\int_0^b \cos x\,dx = \sin b.$$

Змушуємо тепер b прямувати до $+\infty$. Але в такому випадку $\sin b$ не прямує ні до якої границі. Отже, інтеграл (1) не існує.

Але розглянемо інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}. \tag{2}$$

Через те що

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$$

то

$$\int_1^c \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{c} + 1,$$

і якщо, $c \longrightarrow +\infty$, маємо

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Отже,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Розглянемо інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx \tag{3}$$

з двома нескінченними границями. Беремо якенебудь скінченне c. За означенням

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{c} xe^{-x^2} dx + \int_{c}^{+\infty} xe^{-x^2} dx,$$

якщо інтеграли в правій частині існують. Через те що

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C,$$

то, беручи спочатку замість нескінченних границь скінченні, маємо

$$\int_a^c xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-c^2} + \frac{1}{2} e^{-a^2}, \quad \int_c^b xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-b^2} + \frac{1}{2} e^{-c^2}.$$

Через те що $e^{-\infty} = 0$, то

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^c xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-c^2}, \quad \lim_{b \to +\infty} \int_c^b xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2} e^{-c^2},$$

тобто

$$\int_{-\infty}^{c} xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-c^2}, \quad \int_{c}^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2} e^{-c^2},$$

а тому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx = 0.$$

§ 116. Про зв'язок узагальненого інтеграла з неозначеним.

Якщо введено поняття про узагальнений інтеграл, то постає питання: чи лишаються справедливими для узагальнених інтегралів теореми, раніше доведені нами для звичайних інтегралів?

Усі ці теореми були нами доведені, спираючись на зв'язок означеного інтеграла з неозначеним, на зв'язок, що виражається рівністю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Тому природно буде насамперед дослідити, чи зберігається цей зв'язок і для узагальнених інтегралів.

Надалі під значенням функції в точці $+\infty$ (або $-\infty$) ми розумітимемо ту границю, якщо вона існує, до якої прямує функція $f(x)$, коли x прямує до $+\infty$ (або $-\infty$). Отже, за означенням

$$\Phi(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \Phi(x), \qquad \Phi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \Phi(x).$$

Ці рівності, якщо їх читати справа наліво, нагадують рівність

$$\lim_{x\to c} \Phi(x) = \Phi(c),$$

якою означаються неперервні функції $\Phi(x)$ у точці c при додатковій умові, щоб значення функції в точці c було скінченне. Через це,

якщо значення функції $\Phi(x)$ у точці $+\infty$ скінченне, то умовимось вважати функцію $\Phi(x)$ неперервною в точці $+\infty$.

Відповідної умови будемо додержувати і для точки $-\infty$. Зауваживши це, припустимо, що функція $f(x)$ неперервна на всьому інтервалі (a, b), не виключаючи його кінців, і нехай c — точка всередині цього інтервалу. Ми знаємо, що коли

$$\Phi(x) = \int_c^x f(x)\,dx, \quad \text{то} \quad \Phi'(x) = f(x),$$

при чому $\Phi(x)$ теж неперервна на всьому інтервалі. Отже,

функція, неперервна на всьому інтервалі, має на цьому інтервалі всюди неперервну первісну.

Доведемо, що така ж теорема дійсна і для узагальнених інтервалів.

Теорема. **Завжди, незалежно від того, чи буде кожне з чисел a і b скінченне або нескінченне, коли узагальнений інтеграл**

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

існує, то підінтегральна функція має хоч одну первісну неперервну на всьому інтервалі (a, b), а тому неозначений інтеграл

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C \tag{2}$$

можна представити так, щоб його функціональна частина була неперервна на всьому інтервалі інтеграції, не виключаючи його кінців.

Доведемо спочатку цю теорему для інтегралів першого роду. Припустимо для загальності, що функція $f(x)$ неперервна всередині інтервалу (a, b), але перервна на обох кінцях його. Нехай c — яканебудь точка всередині інтервалу. За умовою теореми інтеграл (1) існує, а тому існують і інтеграли

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{і} \quad \int_c^b f(x)\,dx, \tag{3}$$

при чому за означенням

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_c^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Розглянемо функцію

$$\Phi(x) = \int_c^x f(x)\,dx. \tag{5}$$

Якщо k — довільно взята точка всередині інтервалу (a, b), то, як би близько вона не була до одного з кінців інтервалу (a, b), завжди можна знайти такий інтервал $(\alpha\beta)$, кінці якого лежали б усередині інтервалу (a, b) і для якого точка k була б внутрішньою. Тоді функція $f(x)$, а тому і $\Phi(x)$ будуть неперервні на інтервалі $(\alpha\beta)$. Отже, функція $\Phi(x)$ неперервна в кожній *внутрішній* точці інтервалу (a, b), при чому $\Phi'(x) = f(x)$.

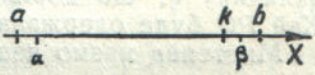

Рис. 94.

Доведемо, що функція $\Phi(x)$ неперервна також у точках a і b. Для цього треба довести, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi(a+\varepsilon) = \Phi(a), \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\Phi(b-\varepsilon) = \Phi(b),$$

тобто згідно з (5) треба довести, що дійсні рівності (4). Але ці рівності матимуть тут місце, бо інтеграли (3) існують. Отже, $\Phi(x)$ неперервна на всьому інтервалі, не виключаючи його кінців. Теорема доведена для інтегралів першого роду. Перейдемо до її доведення і для інтегралів другого роду.

Ми припустимо, що функція $f(x)$ перервна всередині інтервалу (a, b) тільки в двох точках c_1 і c_2. Ідея доведення, як побачимо, не залежить від числа точок перервності. Але коли інтеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{6}$$

існує, то за означенням існують і інтеграли

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx, \quad \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx, \quad \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx,$$

кожний з яких уже інтеграл першого роду, а тому за тількищо доведеним у кожному з інтервалів (a, c_1), (c_1, c_2) і (c_2, b) функція $f(x)$ має первісну, неперервну в ньому.

Нехай ці первісні будуть функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ і $\omega(x)$; з них

$\varphi(x)$ неперервна на інтервалі (a, c_1), при чому $\varphi'(x) = f(x)$;
$\psi(x)$ „ „ „ (c_1, c_2), „ „ $\psi'(x) = f(x)$;
$\omega(x)$ „ „ „ (c_2, b), „ „ $\omega'(x) = f(x)$.

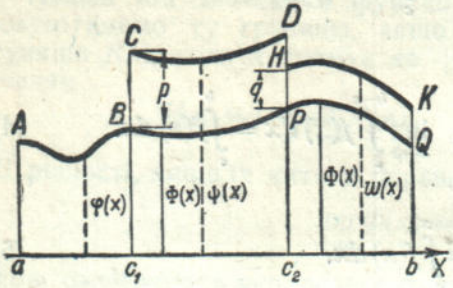

Рис. 95.

Уявімо, що кожна з цих функцій зображена в своєму інтервалі кривою. Ці криві нехай будуть AB, CD, HK (рис. 95).

Зменшимо всі ординати кривої CD на одну і ту ж величину p, що дорівнює різниці між ординатами c_1C і c_1B. Дістанемо якусь нову криву BP.

Зменшимо всі ординати кривої HK на одну і ту ж величину q, що дорівнює різниці між ординатами c_2H і c_2P. Хай PQ буде одержана крива.

Ми тепер маємо неперервну криву $ABPQ$, і якщо для неї

$$y = \Phi(x),$$

то функція $\Phi(x)$ неперервна на інтервалі (a, b), при чому

на інтервалі (a, c_1) $\Phi(x) = \varphi(x)$, а тому $\Phi'(x) = f(x)$;
„ „ (c_1, c_2) $\Phi(x) = \psi(x) - p$, „ „ $\Phi'(x) = f(x)$;
„ „ (c_2, b) $\Phi(x) = \omega(x) - q$, „ „ $\Phi'(x) = f(x)$.

Отже, на всьому інтервалі (a, b) функція $\Phi(x)$ неперервна і $\Phi'(x) = f(x)$. Теорема доведена і для інтегралів другого роду.

Перейдемо тепер до інтегралів із нескінченними границями. Нехай, як і раніше,

$$\Phi(x) = \int_c^x f(x)\,dx.$$

Якщо інтеграл

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

існує, то за означенням

$$\lim_{x \to +\infty} \int_c^x f(z)\,dz = \int_c^{+\infty} f(z)\,dz,$$

тобто

$$\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = \Phi(+\infty),$$

при чому $\Phi(+\infty)$ скінченне. Ми умовились говорити, що в цьому випадку функція $\Phi(x)$ неперервна при $x = +\infty$.

Якщо тепер інтеграл

$$\int_c^{-\infty} f(x)\,dx$$

існує і скінченний, то

$$\lim_{x\to-\infty}\int_c^x f(z)\,dz=\int_c^{-\infty} f(z)\,dz,$$

тобто

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=\Phi(-\infty),$$

а тому первісна $\Phi(x)$ неперервна і при $x=-\infty$. Теорема остаточно доведена. Вона пов'язує неперервність первісної з існуванням узагальненого інтеграла. Легко тепер довести надзвичайно важливу обернену теорему, яка часто дає можливість легко розв'язати питання про існування узагальненого інтеграла.

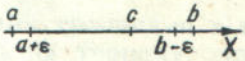

Рис. 96.

Теорема. **Чи будуть границі інтеграла a і b скінченні або нескінченні, завжди якщо неозначений інтеграл**

$$\int f(x)\,dx=\Phi(x)+C \tag{7}$$

представлений так, що його функціональна частина $\Phi(x)$ неперервна на всьому інтервалі (a, b), не виключаючи його кінців, то узагальнений інтеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{8}$$

існує, при чому

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a), \tag{9}$$

Припустимо спочатку, що функція $f(x)$ перервна тільки на кінцях інтервалу (a, b), і нехай c — точка всередині інтервалу. Функція неперервна на кожному інтервалі $(a+\varepsilon, c)$ і $(c, b-\varepsilon)$, тому

$$\begin{aligned}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx&=\Phi(c)-\Phi(a+\varepsilon),\\ \int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx&=\Phi(b-\varepsilon)-\Phi(c).\end{aligned} \tag{10}$$

Нехай $\varepsilon\to 0$. Через неперервність функції $\Phi(x)$ праві частини, а тому й ліві мають скінченні границі. Отже, інтеграли

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad\text{і}\quad \int_c^b f(x)\,dx$$

існують, при чому з (10), переходячи до границі, маємо

$$\int_a^c f(x)\,dx = \Phi(c) - \Phi(a), \quad \int_c^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(c).$$

Додаючи ці рівності, дістаємо рівність (9), і теорема доведена для інтегралів першого роду. Нехай тепер функція $f(x)$ перервна всередині інтервалу (a, b) у точках $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$. За означенням

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \int_{c_2}^{c_3} + \ldots + \int_{c_{n-1}}^{b},$$

де в правій частині всі інтеграли першого роду, а тому за тількищо доведеним

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx = \Phi(c_1) - \Phi(a),$$

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx = \Phi(c_2) - \Phi(c_1).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{c_{n-1}}^{b} f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(c_{n-1}).$$

Додаючи ці рівності, дістаємо рівність

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{11}$$

і теорема доведена для інтегралів другого роду.

Нехай у рівності (11) верхня границя прямує до $+\infty$. Переходячи до границі, дістанемо:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \Phi(+\infty) - \Phi(a). \tag{12}$$

Це — рівність (11), в якій на місці b стоїть $+\infty$. Коли ж в (11) змусимо a прямувати до $-\infty$, то дістанемо:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(-\infty). \tag{13}$$

Нарешті, маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx =$$
$$= [\Phi(+\infty) - \Phi(c)] + [\Phi(c) - \Phi(-\infty)]$$

і остаточно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \Phi(+\infty) - \Phi(-\infty). \qquad (14)$$

Теорема остаточно доведена. Згідно з нею, наприклад, маємо:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big|_{x=-1}^{x=+1} \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

§ 117. Теореми про узагальнені інтеграли.

Всі теореми про інтеграли між скінченними границями від неперервних функцій ми довели, спираючись на теорему, що коли

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C,$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \qquad (1)$$

Але ця теорема дійсна і для узагальнених інтегралів, якщо вони існують, а тому

майже всі теореми (крім деяких), доведені для інтегралів від неперервних функцій між скінченними границями, дійсні і для узагальнених інтегралів, якщо вони існують.

У цьому неважко переконатись, якщо переглянути всі доведення попереднього розділу, вважаючи, що границі a і b можуть бути і нескінченні, а підінтегральна функція перервна. Виявиться, що всі доведення спираються тільки на рівність (1) при припущенні неперервності $\Phi(x)$. При цьому одразу ж зауважимо, що будуть такі винятки.

Теорема про середнє значення інтеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a), \qquad (2)$$

а в зв'язку з нею і теорема про середнє значення функції для узагальненого інтеграла взагалі не має місця,

бо при її доведенні ми користувались теоремою Лагранжа:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(\xi)\,(b-a) = f(\xi)\,(b-a),$$

яка вимагає, щоб $\Phi'(x)$, тобто підінтегральна функція, всередині інтервалу була скінченна, а також щоб a і b теж були скінченні.

Теорема про інтеграл від диференціала функції

$$\int_a^b d\Phi(x) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

вимагає, щоб функція $\Phi(x)$ була неперервна,

бо вона доводиться, спираючись на те, що

$$\int \Phi'(x)\,dx = \Phi(x) + C,$$

а рівність (1) буде тільки при неперервності функціональної частини.

В зв'язку з цим зауважимо, що

теорема про інтегрування частинами:

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x) = [\varphi(x)\,\psi(x)]_a^b - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x)$$

вимагає неперервності функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, хоч їх похідні можуть бути перервні,

бо при доведенні ми спирались на те, що

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x) = \int_a^b d\varphi(x)\,\psi(x) - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x)$$

і на рівність

$$\int_a^b d\varphi(x)\,\psi(x) = [\varphi(x)\,\psi(x)]_a^b = \varphi(b)\,\psi(b) - \varphi(a)\,\psi(a),$$

яка, як ми тількищо бачили, правильна тільки при умові неперервності добутку $\varphi(x)\psi(x)$.

§ 118. Висновок.

1. *Означення.* Якщо $f(x)$ перервна тільки в точці b, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Якщо функція $f(x)$ перервна тільки в точці a, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Якщо функція $f(x)$ перервна як у точці a, так і в точці b, але всередині інтервалу неперервна, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Якщо функція перервна всередині інтервалу (a, b) в точках $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \ldots + \int_{c_{n-1}}^{b}.$$

2. У випадку нескінченних границь інтегралів за означенням

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Усі означення будуть дійсні при умові, що вирази, які стоять у правих частинах, скінченні.

3. *Теорема.* Якщо

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C$$

і $\Phi(x)$ неперервна на інтервалі (a, b), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

як для скінченних, так і для нескінченних a і b, як для неперервної, так і перервної функції $f(x)$.

4. Теореми про звичайні інтеграли дійсні і для узагальнених, крім теореми про середнє значення інтеграла і функції. Але при цьому теорема про інтеграл від диференціала функції і теорема про інтегрування частинами вимагають неперервності функцій, що входять у них, але не їх похідних.

ІНТЕГРАЛ ЯК ФУНКЦІЯ ПАРАМЕТРІВ. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ.

Ми досі розглядали поняття інтеграла тільки від функцій одного змінного, але його можна прикласти і до функцій багатьох змінних. Для них, подібно до поняття про частинні похідні, можна ввести поняття про частинні інтеграли, але тільки ці інтеграли звичайно називають не частинними інтегралами, а інтегралами як функції параметрів.

§ 119. Інтеграли як функції параметрів.

Нехай $f(x, y, \ldots, z)$ — функція кількох аргументів, неперервна при зміні кожного аргумента в якомусь відповідному йому інтервалі. Якщо всі її аргументи, крім x, ми розглядатимемо як довільні сталі, то вона перетвориться у функцію одного змінного, від якої, як від усякої функції одного змінного, можна взяти означений інтеграл між відповідними границями. Нехай

$$G = \int_a^b f(x, y, \ldots, z)\, dx. \tag{1}$$

Коли від функції кількох аргументів береться означений інтеграл по якомунебудь аргументу, то ті аргументи, які при цьому розглядаються як сталі, дістають назву параметрів; той же аргумент, який розглядається як змінне, називається змінним інтеграції.

Отже, інтеграл (1) взятий по x; аргументи $y, \ldots, z$ — його параметри.

Очевидно, що від функцій кількох аргументів ми можемо взяти інтеграл по кожному аргументу. Тому поруч з інтегралом (1) ми маємо і такі інтеграли:

$$\int_\alpha^\beta f(x, y, \ldots, z)\, dy, \ldots, \int_\gamma^\delta f(x, y, \ldots, z)\, dz$$

і т. д.

Зверкемо увагу на те, що коли

$$G = \int_a^b f(x, y, \ldots, z)\, dx, \tag{1}$$

то на параметри $y, \ldots, z$ ми повинні дивитись як на сталі тільки до того часу, поки ми обчисляємо інтеграл. Але в самому виразі інтеграла G на ці параметри ми можемо дивитись як на змінні, і очевидно, що значення інтеграла G цілком залежить від того, які значення ми візьмемо для a і b, а також для параметрів $y, \ldots, z$.

Означений інтеграл є функція як своїх границь, так і параметрів.

Зауважимо, що в інтегралі (1) його границі a і b можуть бути, своїм порядком, функціями параметрів. Так, наприклад, інтеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{x+y} = \ln|b+y| - \ln|a+y|$$

є функція своїх границь a, b і параметра y. Але в ньому границі a і b ми можемо прийняти рівними деяким функціям, наприклад, $a = y^2$, $b = 1 + y + y^2$, і тоді дістанемо

$$\int_{y^2}^{1+y+y^2} \frac{dx}{x+y} = \ln|1+y|^2 - \ln|y^2+y| = \ln\left|\frac{1+y}{y}\right|.$$

§ 120. Диференціювання інтеграла по параметру.

Нехай $f(x, y)$ — функція двох змінних, неперервна відносно кожного аргумента при зміні його в деякому інтервалі.

Візьмемо від неї, розглядаючи y як параметр, інтеграл по x між сталими границями a і b. Цей інтеграл буде функцією параметра y. Позначаючи її через $\psi(y)$, маємо:

$$\psi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{1}$$

Обчислимо похідну від $\psi(y)$. Через те що

$$\psi(y+h) = \int_a^b f(x, y+h)\, dx,$$

то

$$\frac{\psi(y+h) - \psi(y)}{h} = \int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}\, dx.$$

Припускаючи, що $f'_y(x, y)$ теж неперервна, за теоремою Лагранжа дістаємо

$$f(x, y+h) - f(x, y) = h f'_y(x, y+\theta h),$$

а тому

$$\frac{\psi(y+h)-\psi(y)}{h}=\int_a^b f'_y(x, y+\theta h)\,dx.$$

Нехай h нескінченно маліє. Переходячи до границі, маємо:

$$\psi'(y)=\int_a^b f'_y(x, y)\,dx.$$

Беручи до уваги (1), дістаємо теорему:

Щоб одержати похідну по параметру від означеного інтеграла із сталими границями, досить продиференціювати по параметру підінтегральну функцію. Отже,

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx \qquad (2)$$

при умові, що підінтегральна функція і її похідна по параметру неперервні.

Але ця теорема доведена тільки в припущенні, що границі інтеграла a і b сталі, тобто не змінюються із зміною параметра y. Подивимось, як виразиться похідна від інтеграла в тому випадку, коли a і b в свою чергу є функції y. Нехай взагалі

$$u=\int_a^b f(x, y)\,dx.$$

Розглядаючи a, b і y як незалежні змінні, ми матимемо u як функцію цих трьох змінних a, b, y. За тількищо доведеним

$$\frac{du}{dy}=\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx,$$

бо коли обчисляється від u похідна по y, то інші її аргументи a і b повинні розглядатись як сталі.

Щоб знайти частинні похідні від u по a і b, користаємось теоремою про похідну інтеграла по границях. Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial a}=-f(a, y), \quad \frac{\partial u}{\partial b}=+f(b, y).$$

Коли ж ми припустимо, що a і b в свою чергу функції y, то тоді за теоремою про похідну функції від функцій маємо:

$$\frac{du}{dy}=\frac{\partial u}{\partial a}\frac{da}{dy}+\frac{\partial u}{\partial b}\frac{db}{dy}+\frac{\partial u}{\partial y},$$

а тому робимо висновок, що

якщо a і b — функції y, то

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx = -f(a, y)\frac{da}{dy} + f(b, y)\frac{db}{dy} + \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx. \quad (3)$$

При прикладанні цієї теореми на практиці, якщо границі інтеграла — функції параметра, завжди треба спочатку позначити границі інтеграла окремими буквами.

Нехай, наприклад, потрібно знайти похідну по t від такого інтеграла:

$$u = \int_{\sin t}^{e^t} e^{tx^2}\,dx.$$

Ми спочатку пишемо:

$$u = \int_a^b e^{tx^2}\,dx,$$

де a і b розглядаємо як функції t:

$$a = \sin t,\ b = e^t.$$

Маємо:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = -e^{ta^2}\cdot\cos t + e^{tb^2}e^t + \int_a^b x^2 e^{tx^2}\,dx,$$

і остаточно

$$\frac{du}{dt} = -\cos t\, e^{t\sin^2 t} + e^{t(1+e^{2t})} + \int_{\sin t}^{e^t} x^2 e^{tx^2}\,dx.$$

Розглянемо ще приклад. Нехай

$$G = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-z)^n f(z)\,dz.$$

Параметром є x. Пишемо:

$$G = \frac{1}{n!}\int_0^a (x-z)^n f(z)\,dz.$$

Розглядаючи G як функцію a і x, маємо:

$$\frac{\partial G}{\partial a} = \frac{1}{n!}(x-a)^n f(a).$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^a (x-z)^{n-1} f(z)\,dz.$$

Прийнявши тепер $a = x$, знаходимо:

$$\frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial a}\frac{da}{dx} + \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial x},$$

бо $\frac{\partial G}{\partial a} = 0$ при $a = x$. Отже,

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{n!}\int_0^x (x-z)^n f(z)\,dz = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz.$$

§ 121. Інтегрування по параметру.

Якщо, маючи неперервну функцію $f(x, y)$, ми візьмемо від неї інтеграл по x між границями a і b, то цей інтеграл

$$\int_a^b f(x, y)\,dx$$

є функція y, яку ми повинні проінтегрувати по y між деякими границями α і β. Дістанемо вираз:

$$\int_\alpha^\beta \left\{ \int_a^b f(x, y)\,dx \right\} dy.$$

Тут ми спочатку інтегруємо по x, потім по y. Запитуємо: що ми дістанемо, якщо ту саму функцію $f(x, y)$ між тими ж границями проінтегруємо спочатку по y, потім по x? Відповідь на це дає так звана

Теорема про інтегрування по параметру. **Щоб проінтегрувати по параметру інтеграл від неперервної функції між границями, що не залежать від параметра, досить проінтегрувати по параметру підінтегральну функцію. Отже, результат двократного інтегрування функції двох змінних між сталими границями не залежить від порядку інтегрування.**

Треба довести, що коли a, b, α, β не залежать від x і y, то

$$\int_\alpha^\beta \left\{ \int_a^b f(x, y)\,dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy \right\} dx.$$

Нехай

$$u = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_a^b f(x, y)\,dx \right\} dy, \quad v = \int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy \right\} dx.$$

Вважатимемо, що α, β і a мають якінебудь сталі значення; щождо b, то його розглядатимемо як змінне. Тоді u і v стануть функціями b. Обчислимо їх похідні по b.

Почнемо з u. Ця величина представляється у вигляді означеного інтеграла по y від такого виразу:

$$\int_a^b f(x, y)\,dx,$$

який є функцією від b і y; позначаючи його на деякий час через $\omega(b, y)$, ми маємо:

$$u = \int_\alpha^\beta \omega(b, y)\,dy.$$

Тепер ми добре бачимо, що для того, щоб знайти похідну від u по b, треба продиференціювати означений інтеграл по параметру, роль якого відограє b. Маємо

$$\frac{du}{db}=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\frac{d}{db}\int_{a}^{b}f(x,y)\,dx\right\}dy$$

і, прикладаючи до інтеграла в дужках теорему про похідну по верхній границі, робимо висновок, що

$$\frac{du}{db}=\int_{\alpha}^{\beta}f(b,y)\,dy.$$

Знайдемо тепер похідну від v. Для цього досить прикласти теорему про похідну інтеграла по верхній границі. Маємо:

$$\frac{dv}{db}=\int_{\alpha}^{\beta}f(b,y)\,dy.$$

Ми бачимо, що похідні від u і v рівні. Тому

$$u=v+c,$$

тобто

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\int_{a}^{b}f(x,y)\,dx\right\}dy=\int_{a}^{b}\left\{\int_{\alpha}^{\beta}f(x,y)\,dy\right\}dx+C,$$

де C — стала величина, що не змінюється із зміною b. Але, приймаючи b рівним a, ми знаходимо, що $C=0$. Теорема доведена.

§ 122. Узагальнені інтеграли як функції параметрів.

Ми довели теореми про диференціювання і інтегрування по параметру, припускаючи границі інтегралів скінченними, а підінтегральну функцію неперервною. Постає питання: чи лишаються ці теореми дійсними і для узагальнених інтегралів?

Розглянемо такий інтеграл:

$$A=\int_{0}^{1}\left\{\int_{0}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right\}dy. \qquad (1)$$

Якщо від декартових координат перейдемо до полярних:

$$x=r\cos\omega,\quad y=r\sin\omega,$$

то легко знайдемо, що

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\cos 2\omega}{r^2}.$$

Якщо $x \to 0$ і $y \to 0$, то $r \to 0$, а тому права частина взагалі прямує до нескінченності. Отже, в точці (0, 0) підінтегральна функція втрачає неперервність, а тому інтеграл (1) є узагальнений інтеграл.

Його підінтегральну функцію можна одержати так: візьмемо функцію

$$u = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$$

і обчислимо її частинні похідні. Знайдемо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}. \tag{2}$$

Отже,

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right). \tag{3}$$

Інтегруємо ліву частину по x у границях від 0 до 1. Маємо:

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) dx = \Big/_{x=0}^{x=1} \frac{x}{x^2+y^2},$$

а тому

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Інтегруючи цю рівність по y теж у границях від 0 до 1, знайдемо:

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{c^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right\} dy = [-\operatorname{arc\,tg} y]_0^1 = -\frac{\pi}{4}. \tag{4}$$

Але коли ми ліву частину (3) проінтегруємо по y між тими ж границями 0 і 1, то знайдемо, що

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) dy = \frac{1}{1+x^2},$$

а тому, інтегруючи тепер по x, маємо:

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy \right\} dx = [\operatorname{arc\,tg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}. \tag{5}$$

Порівнюючи (4) і (5), ми бачимо, що, інтегруючи двічі одну й ту ж функцію спочатку по одному змінному, а потім по другому, ми одержуватимемо різні значення залежно від порядку інтегрування.

Ми бачимо, що теорема про інтегрування по параметру не завжди буває справедлива для узагальнених інтегралів. Тому, коли доводиться диференціювати або інтегрувати по параметру узагальнений інтеграл, то в кожному випадку потрібно доводити, що саме в цьому випадку можливо провести ці операції. Але виявляється, що в більшості випадків таке доведення потребує досить тонких досліджень. В той же час узагальнені інтеграли

весь час зустрічаються як у механіці, так і в фізиці. Тому представники цих дисциплін уникають зазначених утруднень дуже просто, керуючись таким принципом: якщо конкретно поставлена задача приводить до диференціювання або інтегрування по параметру узагальненого інтеграла, то, отже, це є можливим.

В більшості випадків цей принцип на практиці виправдовується результатами, що відповідають дослідженню. Але іноді він приводить і до помилкових висновків.

Нижче ми припускатимемо, що диференціювання і інтегрування по параметру можливе для всіх розглядуваних узагальнених інтегралів.

§ 123. Обчислення означених інтегралів.

Які методи ми маємо для обчислення означених інтегралів? Ми знаємо, що коли

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C,$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Завдяки цьому співвідношенню ми можемо вважати задачу про обчислення даного означеного інтеграла розв'язаною кожного разу, коли ми вміємо обчислити відповідний неозначений інтеграл. Але через те що неозначений інтеграл ми можемо обчислити тільки в рідких випадках, встановлений зв'язок між означеним інтегралом і неозначеним не розв'язує цілком питання про обчислення означених інтегралів. Неможливість обчислити для всякої функції неозначений інтеграл змушує шукати інших методів для обчислення означених інтегралів. Треба зауважити, що з того факту, що — коли ми знаємо неозначений інтеграл, то тим самим ми маємо можливість обчислити означений,— було б помилково зробити висновок, що коли ми не можемо обчислити неозначений інтеграл, то в такому разі ми не можемо знайти і значення означеного інтеграла,— це було б помилковим, бо, як побачимо, нерідко можна знайти значення означеного інтеграла і в тих випадках, коли ми не знаємо відповідного неозначеного інтеграла. Взагалі при питанні про обчислення означеного інтеграла треба різко розрізняти два випадки: один випадок ми маємо тоді, коли границі інтеграла розглядаються як змінні величини, тобто коли у виразі

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

a і b не мають деяких цілком певних числових значень, але можуть приймати різні значення. Зовсім інший випадок ми

маємо, коли обидві границі мають цілком певні числові значення, тобто коли ми маємо вирази типу:

$$\int_1^2 f(x)\,dx, \quad \int_5^7 f(x)\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

і т. д. Розглянемо окремо обидва ці випадки.

Нехай нижня границя a має певне числове значення, наприклад, $a=2$; верхню ж границю розглядатимемо як змінну величину і позначимо її через x. Якщо

$$\Phi(x)=\int_a^x f(x)\,dx,$$

то

$$d\Phi(x)=f(x)\,dx$$

і, отже,

$$\int f(x)\,dx=\Phi(x)+C.$$

Тепер зрозуміло, що коли верхня границя означеного інтеграла — змінна величина, то обчислити означений інтеграл — це те саме, що обчислити неозначений інтеграл. Інакше кажучи, це означає, що коли в даному випадку ми не можемо обчислити неозначений інтеграл, то тим самим ми позбавлені можливості обчислити і означений інтеграл. Але зовсім інший стан ми маємо, коли треба обчислити означений інтеграл, границями якого є якісь цілком певні числа.

Справді, нехай

$$G=\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

де a і b мають дані цілком певні числові значення. Якщо ми припустимо, що

$$\int f(x)\,dx=\Phi(x)+C, \tag{2}$$

то тоді

$$G=\Phi(b)-\Phi(a). \tag{3}$$

Але коли a і b — якісь числа, то $\Phi(a)$ і $\Phi(b)$ — певні значення функції $\Phi(x)$, тобто теж числа, і рівність (3) яскраво показує ось що: щоб знати значення інтеграла G, нам не треба знати самої функції $\Phi(x)$, але досить знати тільки два її значення в точках $x=a$ і $x=b$.

Очевидно, можна чекати, що в деяких випадках ми, не знаючи самої функції, в той же час зможемо обчислити два її значення. Тоді, не знаючи неозначеного інтеграла, ми знатимемо означений.

Наскільки одна справа — знати функцію і зовсім інша справа —

знати два її значення, видно особливо яскраво геометрично. Побудуємо криву

$$y = \Phi(x)$$

для інтервалу (a, b). Значення її $\Phi(a)$ і $\Phi(b)$ зобразяться ординатами точок A і B.

Щоб знайти ці значення, нам треба знати тільки положення двох точок A і B. Для цього нам зовсім не потрібно знати, як протікає між ними крива. Але, щоб знайти функцію $\Phi(x)$, нам треба знати хід цієї кривої.

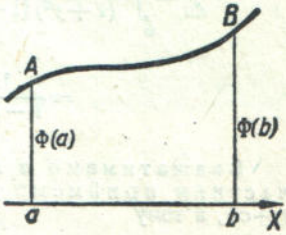

Рис. 97.

Очевидно, одна справа — знати форму цієї кривої і зовсім інша — знати положення тільки двох точок на ній. Можна, не маючи навіть найменшого уявлення про форму кривої, в той же час добре знати дві точки, через які вона проходить. Тому, не знаючи неозначеного інтеграла, іноді можна обчислити означений, якщо границями його є не змінні величини, а числа. Дуже часто вдається цього досягти, прикладаючи теореми про диференціювання і інтегрування по параметру, як це показують нижче такі приклади.

§ 124. Інтеграл типу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx$.

Неозначений інтеграл від підінтегральної функції ми не можемо обчислити, але означений можемо.

Для цього насамперед зауважимо, що оскільки в підінтегральному виразі x змінюється тільки від нуля до $\frac{\pi}{2}$, то ми можемо написати, що

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx, \tag{1}$$

бо $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x$, якщо x лежить у першій чверті.

І ось виявляється, що тоді як досить важко обчислити прямо інтеграл (1), то, навпаки, легко обчисляється інтеграл загальнішого типу:

$$u = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arc\,tg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx, \tag{2}$$

де a — довільне стале.

Розглядаючи u як функцію a і прикладаючи теорему про диференціювання означеного інтеграла по параметру, обчислимо з (2) похідну від u по a. Диференціюючи підінтегральний вираз по a, маємо:

$$\frac{du}{da} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x}. \tag{3}$$

Виявляється, що ми можемо обчислити означений інтеграл правої частини. Виконуємо підставляння

$$\operatorname{tg} x = y,\ x = \operatorname{arc\,tg} y.$$

Коли x змінюється від нуля до $\frac{\pi}{2}$, то y змінюється від 0 до $+\infty$, а тому

$$\frac{du}{da} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+a^2y^2)} = \frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty} \frac{(1+a^2y^2)-a^2(1+y^2)}{(1+y^2)(1+a^2y^2)}\,dy =$$

$$= \frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} - \frac{a^2}{1-a^2}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+a^2y^2}. \tag{4}$$

Вважатимемо a додатним, і в другому інтегралі правої частини приймемо $y = az$. Очевидно, що границі для z будуть теж 0 і $+\infty$, а тому

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+a^2y^2} = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2}.$$

Коли ж у підінтегральній функції замість z знову напишемо y, то (4) дасть нам

$$\frac{du}{da} = \frac{1-a}{1-a^2}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a}. \tag{5}$$

Ми обчислили похідну від u по a, не знаючи покищо виразу для u як функції a. Але з (5) випливає, що

$$u = \frac{\pi}{2}\int \frac{da}{1+a} = \frac{\pi}{2}\ln|1+a| + C, \tag{6}$$

і ми обчислили u. Лишається знайти тільки значення сталого C, яке не змінюється із зміною a. Для цього, приймаючи до уваги значення u, пишемо рівність:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arc\,tg}(a\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln|1+a| + C.$$

Ця рівність справедлива при всякому додатному a. Приймаючи, що a нескінченно маліє, в границі при $a = 0$ дістаємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\cdot dx = \frac{\pi}{2}\ln 1 + C,$$

тобто $C = 0$, а тому остаточно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arc\,tg}(a\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln|1+a|,\quad a > 0.$$

Приймаючи ж тут $a = 1$, знаходимо шуканий інтеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, dx = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Перепишемо його так:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, d \ln \sin x = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Інтегрування частинами дає

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, d \ln \sin x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx,$$

бо, прикладаючи правило Лопіталя, знайдемо, що

$$[x \ln \sin x]_{x=0} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = 0,$$

а тому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2. \tag{8}$$

Приймаємо тут $x = \frac{\pi}{2} - y$. Границі для y будуть $\frac{\pi}{2}$ і 0, а тому:

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln \cos y\, dy = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Пишемо тут замість y знову x. Дістаємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x\, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2. \tag{9}$$

Віднімаючи (9) з (8), знайдемо, що

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{tg} x\, dx = 0. \tag{10}$$

Тим, обчисливши один інтеграл, ми з нього одержали ряд інших.

§ 125. Інтеграл Пуассона.

Інтегралом Пуассона називається інтеграл:

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx. \tag{1}$$

Неважко переконатись, що цей інтеграл існує. Спочатку розглянемо інтеграл

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx. \tag{2}$$

Якщо $x > 1$, то $x^2 > x$, а тому

$$e^{-x^2} < e^{-x}$$

і при всякому $b > 1$

$$\int_1^b e^{-x^2}\,dx < \int_1^b e^{-x}\,dx.$$

Через те що

$$\int_1^b e^{-x}\,dx = e^{-1} - e^{-b} < 1,$$

то при всякому $b > 1$

$$\int_1^b e^{-x^2}\,dx < 1.$$

Якщо b нескінченно зростає, то інтеграл у лівій частині теж зростає; але при цьому він лишається меншим від одиниці, тому він не нескінченно зростає, а має скінченну границю. Отже, інтеграл (2) існує. Відзначаючи ж, що

$$\int_0^b e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^b e^{-x^2}\,dx,$$

робимо висновок, що

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

і, отже, інтеграл

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \tag{3}$$

існує. Він був обчислений Пуассоном так.

Замість того щоб для позначення аргумента функції користуватись символом x, ми маємо право скористатись для його позначення і якимнебудь іншим символом. Отже, поруч з рівністю (3) ми маємо право написати також, наприклад, таку рівність:

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy. \tag{4}$$

Надзвичайна дотепність методу Пуассона полягає в тому, що він, вважаючи x і y двома різними змінними величинами, водночас розглядає обидві рівності (3) і (4), і замість того, щоб обчисляти A, обчисляє A^2. Ми маємо:

$$A^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\right)\cdot\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx. \tag{5}$$

Але перший інтеграл у правій частині ми можемо розглядати як сталий множник, що стоїть перед знаком другого інтеграла, а тому ми його можемо підвести під знак другого інтеграла. Виконуючи це, дістаємо:

$$A^2 = \int_0^{+\infty} \left\{e^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right\} dx. \tag{6}$$

Інтеграл, що стоїть у дужках, помножується на e^{-x^2}. Але x відносно y є стала величина, а тому, підводячи e^{-x^2} як сталий множник під знак інтеграла, рівність (6) перетворюємо в рівність:

$$A^2 = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\, dy \right\} dx. \tag{7}$$

В результаті виявляється, що величина A може бути одержана з допомогою двократного інтегрування, а саме: функцію двох змінних

$$e^{-x^2-y^2}$$

треба проінтегрувати спочатку по y, потім по x.

Очевидно, зайве ускладнення — ось усе, чого ми досягли.

Але проробимо в першому інтегралі, який доводиться обчисляти, тобто в інтегралі

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\, dy, \tag{8}$$

підставляння. Відзначаючи, що при обчисленні цього інтеграла ми повинні розглядати y як змінне, а x як сталу додатну величину, ми приймаємо:

$$y = xt.$$

Зрозуміло,— бо x додатне,— що тоді як y зростає від нуля до $+\infty$, t теж зростає від нуля до $+\infty$. Отже, границі для t ті самі, як і для y, а тому

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\, dy = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2(1+t^2)}\, dt,$$

і рівність (7) перепишеться в такій формі:

$$A^2 = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} xe^{-x^2(1+t^2)}\, dt \right\} dx. \tag{9}$$

Змінимо тепер порядок інтегрування. Маємо:

$$A^2 = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} xe^{-x^2(1+t^2)}\, dx \right\} dt. \tag{10}$$

І ось виявляється, що тепер ми можемо провести перше інтегрування, бо ми можемо обчислити відповідний неозначений інтеграл. Справді,

$$\int e^{-x^2(1+t^2)}\, x\, dx = -\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)} + C,$$

а тому

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+t^2)}\, x\, dx = \frac{1}{2(1+t^2)},$$

і рівність (10) приймає такий вигляд:

$$A^2 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2} \Big|_0^{+\infty} \operatorname{arc\,tg} t = \frac{\pi}{4}$$

і, отже, $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Інтеграл Пуассона обчислений. Щоб чіткіше відзначити всі важливіші моменти застосованого методу, ми можемо зобразити весь шлях обчислення в такій схемі:

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad A = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy,$$

а тому

$$A^2 = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy \right\} dx = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+t^2)} x\, dt \right\} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+t^2)} x\, dx \right\} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{\pi}{4}$$

і, отже,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{11}$$

Цей інтеграл Пуассона часто представляють у трохи іншій формі. Проводимо підставляння:

$$x = -z.$$

Коли x зростає від нуля до $+\infty$, то z змінюється від нуля до $-\infty$, а тому після підставляння з (11) дістаємо:

$$-\int_0^{-\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Переставляючи ж границі інтеграла і знову написавши x замість z, знайдемо, що

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{12}$$

Додаючи (11) і (12), маємо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{13}$$

Це і є друга форма інтеграла Пуассона, про яку ми говорили.
Зробимо в (11) підставляння:

$$x = \sqrt{y}, \quad dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}.$$

Границі для y, очевидно, будуть теж нуль і $+\infty$, а тому:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y} dy}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Заміняючи ж тут символ y знову символом x, дістанемо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}. \tag{14}$$

§ 126. Наближене обчислення інтегралів.

Коли ніяким способом не вдається обчислити означений інтеграл, то тоді обчисляють його наближено.

Існує багато методів наближеного обчислення означених інтегралів. Найважчий момент — це оцінка наближення. Ми розглянемо кілька таких методів, обмежуючись тільки відзначенням їх ідеї і залишаючи осторонь питання про точність обчислення.

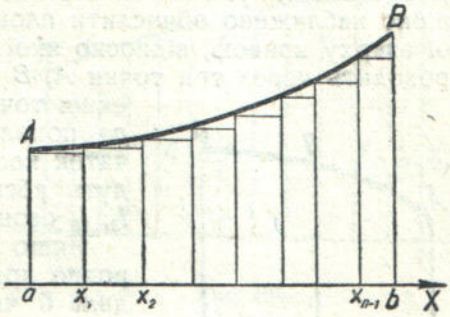

Рис. 98.

Ми завжди можемо припустити, що в інтегралі, який треба обчислити, підінтегральна функція додатна, бо коли б цієї умови не додержувати, ми могли б попередньо поділити інтервал інтеграції на підінтервали, в кожному з яких функція зберігає свій знак. Після цього ми обчисляли б інтеграл по кожному підінтервалу окремо, при чому коли б у якомунебудь підінтервалі підінтегральна функція була б від'ємною, то ми змінили б її знак на обернений.

Отже, припускатимемо, що дана функція $f(x)$ додатна в інтервалі (a, b). Якщо ми зобразимо цю функцію кривою, то величина інтеграла

$$G = \int_a^b f(x)\,dx$$

дорівнює площі відповідної кривої трапеції. Тому задача про наближене обчислення інтеграла рівносильна задачі про наближену квадратуру кривої трапеції.

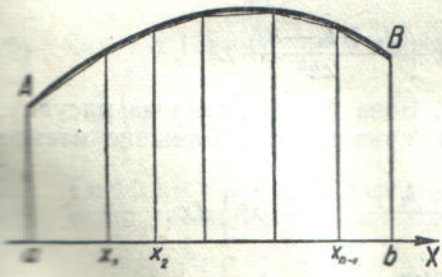

Рис. 99.

Найгрубіший спосіб наближеного обчислення полягає в тому, що, поділивши основу трапеції на досить велике число підінтервалів точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, ми будуємо елементарні прямокутники і приймаємо суму площ їх за величину шуканого інтеграла.

Точніше ж значення, як це геометрично є очевидним, ми дістанемо так: поставивши ординати в точках x_k, ми сполучаємо хордами кінці всяких двох суміжних ординат. Тоді ми дістанемо ряд звичайних трапецій. Обчисливши значення функції в кожній точці x_k, ми дістанемо можливість обчислити площу

кожної трапеції. Суму їх ми приймемо за величину інтеграла. Цей спосіб наближеного обчислення називається способом трапеції. Суть його полягає в тому, що всяку частину дуги даної кривої ми заміняємо її хордою. Очевидно, що ми дістанемо точніше наближення, якщо дугу кривої замінимо кривою ж, але простішого типу. Розв'яжемо спочатку таку задачу: нехай потрібно наближено обчислити площу u трапеції $pABCq$, обмеженої зверху кривою, відносно якої ми знаємо тільки те, що вона проходить через три точки A, B і C. Ми припустимо, що проекція точки B поділяє основу трапеції pq пополам. Точку O приймемо за початок координат. Нехай $+h$ і $-h$ будуть абсциси точок C і A; через l_1, l_2, l_3 позначимо ординати точок A, B, C.

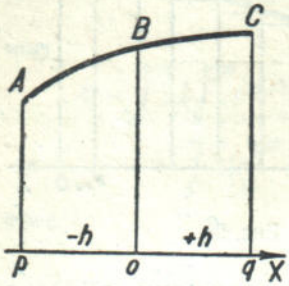

Рис. 100.

Якщо крива невідома, то за неї природно прийняти таку криву, яка проходила б через точки A, B, C і для якої залежність ординати від абсциси виражалася б по змозі просто. Після прямої такою кривою буде крива, рівняння якої

$$y = a + bx + cx^2, \tag{1}$$

тобто парабола, вісь якої паралельна осі Y.

Подивимось, чи можна коефіцієнти a, b, c підібрати так, щоб крива (1) проходила через точки A, B, C. Для цього координати цих точок повинні задовольняти рівняння (1), що дає рівності:

$$l_1 = a - bh + ch^2, \quad l_2 = a, \quad l_3 = a + bh + ch^2,$$

з яких неважко знайти:

$$a = l_2, \quad b = \frac{l_3 - l_1}{2h}, \quad c = \frac{l_1 + l_3 - 2l_2}{2h^2}.$$

Отже, крива

$$y = l_2 + \frac{l_3 - l_1}{2h}x + \frac{l_1 + l_3 - 2l_2}{2h^2}x^2 \tag{2}$$

проходить через точки A, B, C. Вона й зображена на рисунку. Приймаючи її замість невідомої кривої, ми наближено маємо:

$$u = \int_{-h}^{+h} \left\{ l_2 + \frac{l_3 - l_1}{2h}x + \frac{l_1 + l_3 - 2l_2}{2h^2}x^2 \right\} dx.$$

Обчисливши інтеграл, знайдемо

$$u = \frac{h(l_1 + l_3 + 4l_2)}{3}. \tag{3}$$

Цей вираз ми приймемо за наближене значення площі, обмеженої зверху невідомою кривою.

Нехай тепер потрібно обчислити площу $aABb$, обмежену кривою $y = f(x)$. Поділяємо основу ab на парне число $2n$

рівних частин; нехай h — довжина кожної з них. У точках поділу ставимо ординати $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$. Припускаємо, що довжини їх обчислені. Позначимо через $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ площі, обмежені з двох сторін парними (на рисунку жирними) ординатами. За формулою (3) маємо:

$$u_1 = \frac{h}{3}(y_0 + y_2 + 4y_1),$$

$$u_2 = \frac{h}{3}(y_2 + y_4 + 4y_3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n-1} = \frac{h}{3}(y_{2n-4} + y_{2n-2} + 4y_{2n-3}),$$

$$u_n = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + y_{2n} + 4y_{2n-1}).$$

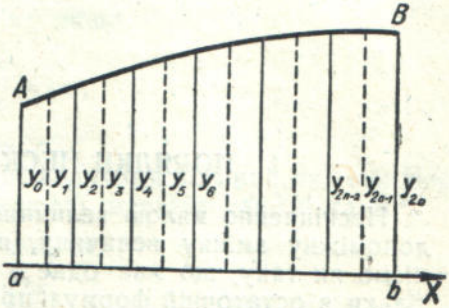

Рис. 101.

Додаючи всі ці рівності, дістаємо таку формулу для наближеного обчислення інтеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \frac{h}{3}\{(y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})\}.$$

Ця формула називається формулою Сімпсона.

§ 127. Висновок.

Теорема про диференціювання по параметру. Якщо a і b — сталі, то

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx.$$

Якщо a і b — функції параметра y, то

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx = f(b, y)\frac{db}{dy} - f(a, y)\frac{da}{dy} + \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx.$$

Теорема про інтегрування по параметру. Якщо границі інтегралів сталі, то

$$\int_\alpha^\beta \left\{\int_a^b f(x, y)\,dx\right\} dy = \int_a^b \left\{\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy\right\} dx.$$

Інтеграл Пуассона

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

ПОРЯДКИ НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ.

Нескінченно малою величиною ми умовились називати всяку допоміжну змінну величину, яку на протязі міркування розуміємо як таку, що має одне з можливих для неї значень і яку тільки в остаточній формулі припускаємо нескінченно маліючою. Тому можна також сказати, що нескінченно мале є довільно взяте значення нескінченно маліючого.

Як ми бачили, існують дві основні задачі про нескінченно малі: задача про обчислення границі відношення нескінченно малих і задача про обчислення границі суми нескінченно малих у нескінченно великому числі. Перша задача привела до виникнення диференціального числення, друга — інтегрального. Але, не зважаючи на існування цих двох дисциплін, все таки задачі про нескінченно малі продовжують існувати як самостійні, бо методи диференціального і інтегрального числень не можуть їх розв'язати в усіх випадках.

Нижче ми розглянемо ті методи, застосування яких дає можливість у багатьох випадках розв'язати дві основні задачі про нескінченно малі. Ці методи спираються на поняття про порядки нескінченно малих і на поняття про еквівалентні величини *.

§ 128. Порядки нескінченно малих.

Означення. **Якщо границя відношення $\frac{\beta}{\alpha}$ двох нескінченно малих α і β скінченна і не дорівнює нулеві, то говорять, що вони одного і того ж порядку малості. Коли ж ця границя дорівнює нулеві, то говорять, що порядок величини β вищий, або більший, порядку величини α. Навпаки, говорять, що порядок величини β менший, або нижчий, порядку величини α, якщо границя відношення $\frac{\beta}{\alpha}$ нескінченна.**

Отже, якщо

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = k, \text{ де } k \neq 0 \text{ і } \neq \infty,$$

* Перед тим, як приступити до вивчення цього і дальших розділів, треба перечитати з вступу до аналізу розд. XVIII і XIX.

то β і α одного порядку; якщо

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0,$$

то порядок β більший порядку α; якщо

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty,$$

то порядок β нижчий порядку α.

Говорячи образно, порядок тієї величини більший, яка швидше маліє; порядки рівні, якщо швидкість маління одна й та ж*.

Наприклад, якщо x — нескінченно мале, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{x} = 7,$$

а тому x і $\sin 7x$ одного порядку. Але, якщо

$$y = 3x^3 + x^5,$$
$$z = 5x^2 + x^4,$$

то

$$\frac{y}{z} = \frac{3x + x^3}{5 + x^2},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{y}{z} = 0,$$

а тому порядок y вищий порядку z. В той же час

$$\lim_{x \to 0} \frac{z}{y} = \infty,$$

а тому порядок z нижчий порядку y. Не завадить взагалі зауважити, що коли u і v — дві такі нескінченно малі величини, що

$$\lim \frac{u}{v} = 0, \tag{1}$$

то в такому разі необхідно

$$\lim \frac{v}{u} = \infty. \tag{2}$$

За означенням з (1) випливає, що порядок величини u вищий порядку величини v, а з (2) — що порядок величини v нижчий порядку величини u. Отже, **якщо з двох нескінченно малих порядок одного вищий від порядку другого, то завжди порядок другого нижчий від порядку першого.**

Поняття порядку може бути уточнене. Нехай x нескінченно мале. Розглянемо різні додатні степені його:

$$x, \sqrt{x}, x^{\frac{2}{3}}, x^4, x^5, \ldots, x^n.$$

---

* Точно кажучи, щоб посилатись на швидкість маління, треба спочатку визначити, що ми розуміємо під цим поняттям. Насправді не порядок визначається швидкістю маління, а навпаки. Сказати, що β швидше маліє, ніж α, це просто означає твердити, що $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$.

Якщо x нескінченно маліє, то і всякий додатний степінь його теж нескінченно маліє, при чому тим швидше, чим більший його показник. Так, наприклад, коли x зменшиться в 10 раз, то x^3 зменшиться в 1000 раз, а x^5 — в 100000 раз.

Означення. **Нескінченно мале β називається величиною порядку n відносно нескінченно малого α, якщо воно і α^n одного порядку, тобто якщо границя відношення $\frac{\beta}{\alpha^n}$ скінченна і не дорівнює нулеві.**

В цьому означенні показник n має бути додатним, бо α^n нескінченно маліє тільки при додатному n. При від'ємному ж показнику α^n прямує до ∞. Але, будучи додатним, n може бути не тільки дробовим, але й несумірним. Отже,

порядок нескінченно малого може бути будьяким додатним числом.

Але при цьому треба твердо пам'ятати, що

нескінченно мале має той або інший порядок не саме по собі, а тільки відносно іншого нескінченно малого.

Одне й те ж нескінченно мале може мати різні порядки відносно різних нескінченно малих.

Те нескінченно мале, відносно якого обчислюються порядки інших нескінченно малих, називається основним, або головним.

Щоб знайти порядок β відносно α, треба знайти таке n, щоб границя відношення

$$\frac{\beta}{\alpha^n} \tag{3}$$

була скінченна і не дорівнювала нулеві. Постає питання: чи завжди існує таке n?

Далі припускатимемо, що кожне з розглядуваних нескінченно малих має відносно будьякого з них якийсь певний порядок.

Побачимо, проте, що існують і такі нескінченно малі, порядки яких один відносно одного не можуть бути виражені ніяким скінченним додатним числом.

§ 129. Нескінченно малі елементарного типу.

Якщо α — основне нескінченно мале і k — стале, не рівне нулеві, то величина

$$\delta = k\alpha^n,$$

очевидно, порядку n, бо

$$\lim \frac{\delta}{\alpha^n} = k.$$

Величину $k\alpha^n$ ми назвемо нескінченно малою елементарного типу. Отже,

нескінченно-мала величина n-го порядку називається величиною елементарного типу, якщо вона дорівнює добуткові сте-

пеня основного нескінченно малого на скінченне стале, що не дорівнює нулеві.

Таким чином, усі величини

$$5\alpha^3,\ 4\sqrt[3]{\alpha},\ 7\alpha^{10},\ 9\alpha\sqrt{\alpha}$$

будуть нескінченно малі елементарного типу відповідно порядків $3,\ \frac{1}{3},\ 10,\ \frac{3}{2}$.

У зв'язку з цим зауважимо, що

коли порядок величини β відносно α більший n, то β може бути представлена у формі:

$$\beta = \varepsilon\alpha^n, \tag{1}$$

де ε нескінченно мале. Навпаки, якщо

$$\beta = \varepsilon\alpha^n$$

і ε нескінченно мале, то порядок β відносно α більший від n.

Справді, нехай

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = \varepsilon. \tag{2}$$

Якщо порядок β більший від n, то за означенням порядку

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = 0, \tag{3}$$

тобто $\lim \varepsilon = 0$, а тому ε нескінченно мале.

Навпаки, якщо ε — нескінченно мале, то з (2) випливає (3), а тому порядок β вищий від n.

§ 130. Розклад нескінченно малого.

Нехай β — порядку n відносно α. Отже,

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = k,\ \ k \neq 0 \text{ і } \neq \infty. \tag{1}$$

Нехай до переходу до границі

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = k + \varepsilon. \tag{2}$$

Зрозуміло, що $\lim \varepsilon = 0$, а тому ε є нескінченно мале. З (2) випливає

$$\beta = k\alpha^n + \varepsilon\alpha^n, \tag{3}$$

або

$$\beta = k\alpha^n + \beta_1, \tag{4}$$

де

$$\beta_1 = \varepsilon\alpha^n. \tag{5}$$

Через те що ε нескінченно мале, порядок величини β_1 вищий від n.

Перший доданок у (4) є нескінченно мале елементарного типу. Дістаємо теорему.

Теорема. **Всяке нескінченно мале β порядку n відносно нескінченно малого α може бути розкладене на суму двох доданків:**

$$\beta = k\alpha^n + \beta_1, \tag{4'}$$

з яких перше елементарного типу і того ж порядку як і дана величина β, другий же доданок β_1 вищого порядку. Він може бути представлений у формі

$$\beta_1 = \varepsilon\alpha^n, \tag{5'}$$

де ε нескінченно мале.

В розкладі

$$\beta = k\alpha^n + \beta_1$$

елементарний доданок, тобто доданок $k\alpha^n$, називається головною частиною величини β.

Побачимо, що поняття про головну частину відограє велику роль завдяки тому, що вона завжди дуже простого типу і в той же час відрізняється від β тільки на величину вищого порядку.

Розклад

$$\beta = k\alpha^n + \beta_1 \tag{6}$$

нами одержаний для будьякого нескінченно малого. Тому ми можемо прикласти його і до величини β_1. Прикладаючи його і позначаючи через n_1 порядок величини β_1, при чому $n_1 > n$, маємо

$$\beta_1 = k_1\alpha^{n_1} + \beta_2, \tag{7}$$

де k_1 скінченне і не нуль і β_2 — якесь нескінченно мале, порядок якого вищий від порядку n_1. Нехай він дорівнює n_2.

Прикладаючи розклад (4) до β_2, маємо:

$$\beta_2 = k_2\alpha^{n_2} + \beta_3, \tag{8}$$

де k_2 скінченне і не нуль і β_3 порядку більшого, ніж порядок β_2.

До цієї величини β_3 ми можемо також прикласти розклад (4). Виконуючи так кілька разів, ми дістанемо рівності:

$$\begin{aligned}
\beta &= k\alpha^n + \beta_1,\\
\beta_1 &= k_1\alpha^{n_1} + \beta_2,\\
\beta_2 &= k_2\alpha^{n_2} + \beta_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\beta_h &= k_h\alpha^{n_h} + \beta_{h+1}.
\end{aligned}$$

Додаючи їх, дістаємо теорему:

Всяке нескінченно мале β може бути представлене в такій формі:

$$\beta = k\alpha^n + k_1\alpha^{n_1} + k_2\alpha^{n_2} + \ldots + k_h\alpha^{n_h} + \beta_{h+1}. \tag{9}$$

де $k\alpha^n$ головне нескінченно мале і де показники додатні, при чому кожний більший свого попереднього:

$$n < n_1 < n_2 < \ldots < n_h.$$

Щодо коефіцієнтів

$$k,\ k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_h,$$

то кожний з них скінченний і не дорівнює нулеві.

Останній доданок β_{h+1} є нескінченно мале, порядок якого більший порядку передостаннього доданку.

В рівності (9) останній доданок β_{h+1} ми можемо представити в свою чергу у формі:

$$\beta_{h+1} = k_{h+1}\alpha^{n_{h+1}} + \beta_{h+2}.$$

Якщо захочемо, то з β_{h+2} ми можемо зробити так само.

Взагалі ми можемо обчислити в (9) стільки членів, скільки захочемо.

Коли β представлена у формі (9), то говорять, що β розкладене з точністю до нескінченно малих порядку вищого, ніж n_h.

Розклад (9) дуже цікавий. Залежність величини β від α може бути складного характеру. Але якою б складною вона не була, завжди величина β може бути представлена у вигляді суми, всі доданки якої, крім останньої, — елементарного типу. Щодо останнього, то розклад завжди може бути проведений так далеко, щоб порядок цього останнього був як завгодно великий.

§ 131. Порядок приросту функції.

Нехай $y = f(x)$ — неперервна функція. Якщо $h = \Delta x$, то

$$\Delta y = f(x+h) - f(x). \tag{1}$$

Приріст функції є функція двох змінних: самого незалежного змінного x і його приросту Δx.

Але коли змінному x ми надамо якогонебудь значення c, то дістанемо:

$$(\Delta y)_c = f(c+h) - f(c) \tag{2}$$

і $(\Delta y)_c$ буде вже функцією тільки одного h.

Приріст функції при $x = c$ називається приростом функції в точці c.

Приріст функції в точці є вже функція тільки одного змінного, а саме приросту незалежного змінного.

З (2) зрозуміло, що коли $h \to 0$, то і $\Delta y \to 0$, а тому

якщо приріст Δx незалежного змінного нескінченно малий, то і приріст неперервної функції теж нескінченно малий.

Розглянемо порядок приросту Δy відносно приросту Δx. За рядком Тейлора*

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \ldots + \frac{h^{n-1} f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!} + \frac{h^n f^{(n)}(c+\theta h)}{n!}.$$

Залишаючи тільки два члени, маємо:

$$(\Delta y)_c = f'(c)\,h + \frac{h^2}{2} f''(c+\theta h).$$

---

* Особи, ще не ознайомлені з рядком Тейлора, можуть цей і дальший параграф пропустити.

Другий доданок порядку вищого, ніж перший, перший же доданок — першого порядку, якщо тільки випадково точка c не така, що $f'(c)=0$. Але якщо $f'(c)\neq 0$, то $f'(c)h$ є головна частина. Але

$$dy=f'(x)h$$

і $f'(c)h$ є значення диференціала функції в точці c; позначаючи це значення через $d_c y$, маємо

$$(\Delta y)_c = d_c y + \frac{h^2}{2} f''(c+\theta h).$$

Теорема. **Приріст функції в будьякій точці відносно приросту незалежного змінного — взагалі першого порядку.**

Диференціал функції взагалі є головна частина приросту функції.

Таким чином, яке б значення не мало x, *взагалі*

$$\Delta f(x) = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\Delta x = df(x) + \varepsilon\Delta x, \tag{3}$$

де ε — нескінченно мале. Ми говоримо „взагалі" тому, що теорема неправильна для тих особливих точок, у яких $f'(x)=0$. Але нехай c — така точка, що

$$f'(c)=f''(c)=\ldots=f^{(k-1)}(c)=0,$$

але $f^{(k)}(c)\neq 0$. Тоді для цієї точки

$$(\Delta y)_c = \frac{h^k f^{(k)}(c)}{k!} + \frac{h^{k+1} f^{(k+1)}(c+\theta h)}{(k+1)!},$$

і $(\Delta y)_c$ вже порядку k. Отже,

тільки як виняток порядок приросту функції може не бути першого порядку.

Якщо ми вважаємо за можливе нехтувати нескінченно малими другого порядку, то з (3) випливає:

З точністю до нескінченно малих порядку вищого від першого приріст функції дорівнює диференціалові функції:

$$\Delta f(x) = df(x) + \ldots$$

Саме в цій властивості диференціала і полягає його цінність.

§ 132. Про обчислення порядків.

Як можна обчислити порядок нескінченно малого β відносно основного нескінченно малого α, а також як можна знайти розклад β на суму нескінченно малих елементарного типу?

Ми весь час припускали, що розглядувані нескінченно малі є функціями одного змінного. Але коли β і α — функції одного змінного, то β можна виразити як функцію від α. Нехай

$$\beta = \varphi(\alpha).$$

Через те що $\beta\to 0$, якщо $\alpha\to 0$, то необхідно $\varphi(\alpha)\to 0$.

Якщо тепер виявиться, що функцію $\varphi(\alpha)$ можна розкласти в рядок Маклорена, для чого необхідно, щоб усі її відповідні похідні при $\alpha = 0$ були скінченні, то

$$\beta = \varphi'(0)\,\alpha + \frac{\varphi''(0)}{2}\alpha^2 + \ldots + \frac{\varphi^h(0)}{h!}\varphi^{(h)}(\theta\alpha).$$

Нехай із значень похідних у точці нуль, тобто із значень

$$\varphi'(0),\ \varphi''(0),\ \varphi'''(0), \ldots, \tag{1}$$

перше, що не дорівнює нулеві, буде $\varphi^k(0)$. Тоді

$$\beta = p\alpha^k + p_1\alpha^{k+1} + \ldots + p_{h-1}\alpha^{h-1} + \varepsilon_h\alpha^h,$$

і β розкладена по степенях α, де перший доданок є головна частина.

Але коли розклад за рядком Маклорена неможливий, то тоді часто вдається β представити у формі

$$\beta = \alpha^m\psi(\alpha)$$

так, що $\psi(\alpha)$ вже розкладається в ряд. Нехай, наприклад,

$$\beta = 1 - \cos\alpha.$$

Через те що

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots,$$

то

$$\beta = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{4!} + \ldots,$$

і зрозуміло, що головна частина дорівнює $\frac{\alpha^2}{2}$.

Нехай

$$\beta = \sqrt{\alpha - \sin\alpha}.$$

Через те що

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \alpha^5 g,$$

де відносно g нам досить знати, що це — скінченна величина, то

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha^3}{6} - \alpha^5 g} = \alpha^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{6} - \alpha^2 g}.$$

Коли $\alpha \to 0$, то границя другого множника дорівнює $\frac{1}{\sqrt{6}}$. Тому

$$\sqrt{\frac{1}{6} - \alpha^2 g} = \frac{1}{\sqrt{6}} + \varepsilon,$$

де ε нескінченно маліє, коли $\alpha \to 0$. Тепер маємо

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}\alpha^{\frac{3}{2}} + \varepsilon\alpha^{\frac{3}{2}}.$$

Зрозуміло, що β порядку $\frac{3}{2}$ і що $\frac{1}{\sqrt{6}}\alpha^{\frac{3}{2}}$ — головна частина.

Такими прийомами часто вдається знайти порядок нескінченно малого і його головну частину.

§ 133. Порядки нескінченно великих.

Поняття про порядок нескінченно великих вводиться аналогічно до поняття про порядки нескінченно малих.

Нескінченно великою величиною ми називали довільне значення змінної величини, модуль якої нескінченно зростає.

Говорять, що дві нескінченно великі величини u і v одного порядку, якщо

$$\lim \frac{u}{v} = k,$$

де k скінченне і не нуль. Коли ж

$$\lim \frac{u}{v} = 0,$$

то говорять, що порядок величини u нижчий порядку величини v. Коли ж

$$\lim \frac{u}{v} = \infty,$$

то говорять, що порядок величини u вищий порядку величини v. Якщо

$$\lim \frac{u}{v^n} = k,$$

де k скінченне і не нуль, то говорять, що u порядку n відносно v.

З цього означення, як і для нескінченно малих, можна вивести можливість розкладу нескінченно великої величини на суму доданків різних порядків, але ми на цьому не будемо спинятись.

§ 134. Про величини, що не мають порядку.

Чи всяка величина має відносно іншої порядок?

Нехай x нескінченно зростає і нехай

$$y = e^x.$$

В такому випадку y теж нескінченно зростає. Отже, ми маємо дві нескінченно зростаючі величини. Постає питання: який порядок має y відносно x? Легко довести, що яке б додатне число m ми не взяли, відношення

$$\frac{y}{x^m}$$

завжди прямує до нескінченності, тобто, інакше кажучи, y зростає швидше, ніж будьякий додатний степінь x. Справді, яким би не було додатне число m, завжди можна знайти ціле число, більше, ніж воно. Нехай n — таке ціле число.

Будемо розглядати процес нескінченного зростання x з того моменту, починаючи з якого $x > 1$. З цього моменту, якщо $n > m$, то

$$x^n > x^m,$$

а тому

$$\frac{e^x}{x^m} > \frac{e^x}{x^n}. \tag{1}$$

Але за рядком Тейлора

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Відкинемо в правій частині всі члени, крім одного: $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Але всі члени додатні, тому

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

і, отже,

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}.$$

З (1) випливає, що

$$\frac{e^x}{x^m} > \frac{x}{(n+1)!}, \tag{2}$$

і тепер зрозуміло, що коли $x \to \infty$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty. \tag{3}$$

Отже, e^x зростає швидше, ніж x^m, а тому порядок зростання величини e^x більший m. Але m — довільно взяте додатне число. Робимо висновок:

Порядок зростання показникової функції e^x відносно нескінченно зростаючого показника більший від усякого скінченного числа, бо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty \tag{4}$$

при всякому m. Тому говорять, що її порядок нескінченний.

Розглянемо тепер, якого порядку $\ln x$, коли $x \to +\infty$. Візьмемо відношення

$$\frac{\ln x}{x^m},\ m > 0.$$

Прикладаючи правило Лопіталя, знайдемо:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{mx^m} = 0.$$

Ми маємо результат, обернений попередньому:

Порядок зростання функції $\ln x$ відносно свого аргумента менший від усякого скінченного числа, бо

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^m} = 0 \tag{5}$$

при всякому додатному m, яке б мале воно не було.

Рівності (4) і (5) треба запам'ятати. Користуючись ними, часто дуже легко розібратись у порядках і в справжніх значеннях неозначених виразів. Так, наприклад, нехай $x \to 0$; тоді $\ln x \to -\infty$. Постає запитання: чому дорівнює границя добутку

$$x^m \ln x? \tag{6}$$

Тут x необхідно додатний, бо логарифм може бути взятий тільки від додатного числа. Покладаючи

$$x = \frac{1}{z}, \quad z = \frac{1}{x},$$

маємо:

$$x^m \ln x = -\frac{\ln z}{z^m}. \tag{7}$$

Коли $x \to 0$, то $z \to +\infty$, а тому права частина, згідно з (5), має границею нуль. Робимо висновок:

Яке б не було додатне число m, завжди

$$\lim_{x \to 0} (x^m \ln x) = 0. \tag{8}$$

З викладеного зрозуміло, що нескінченно зростаючі величини можуть не мати скінченних порядків. Легко бачити, що те саме є справедливим і для нескінченно маліючих.

Можливі нескінченно маліючі, що не мають скінченного порядку.

Приклади їх нам дадуть величини, обернені нескінченно зростаючим величинам e^x і $\ln x$.

Нехай α — додатне нескінченно мале і нехай

$$\beta = e^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \gamma = \frac{1}{\ln \alpha}. \tag{9}$$

Коли α прямує до нуля, то β і γ нескінченно маліють.

Нехай

$$x = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{x}.$$

Коли $\alpha \to 0$, приймаючи за умовою тільки додатні значення, то $x \to +\infty$. Маємо, яке б не було додатне n, завжди

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta}{\alpha^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\gamma}{\alpha^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x^n}{\ln x} = -\infty.$$

Бачимо, що порядок величини β більший від усякого довільно взятого n, а порядок γ менший від нього.

Величини β і γ не мають порядку відносно α. Але відзначимо, що величинами типу (9) і складеними з них вичерпуються ті величини, що не мають порядку, з якими доводиться зустрічатись у прикладаннях.

§ 135. Поняття „скінченної величини".

В зв'язку з поняттям нескінченно малого спинимось на понятті скінченного.

Математичні книжки і розмовна мова мають багато слів з тим же спільним коренем, як і слова „скінченний" і „нескінченний". Ці слова вживаються в найрізноманітнішому розумінні і, на жаль, завдяки вкоренілим традиціям, немає ніякої змоги уникнути при вживанні цієї многозначності їх.

У математиці теж весь час говорять про скінченні і нескінченні числа та величини, до того як про сталі, так і про змінні. Треба твердо пам'ятати, що в прикладаннях до сталих величин термін „скінченний" означає не те саме, що в прикладанні його до змінних. Розглянемо ці його різні значення.

Хоч Аналіз весь час говорить про величини, але з самими величинами ми маємо справу тільки в прикладаннях Аналізу; в самому ж Аналізі ми маємо справу не з величинами, а з їх числовими виразами, тобто з числами.

В прикладанні до чисел в Аналізі прикметник „скінченний" має цілком певний, точний зміст.

Символ ∞, який називають символом нескінченності, іноді також називають нескінченним числом, а тому всі інші числа відмінно від нього називають скінченними.

Таким чином, в Аналізі поняття „скінченний", коли воно прикладається до чисел, має цілком певний зміст. Всяке число скінченне, за винятком одного числа. Щождо цього винятку, то він має місце тільки в тому випадку, якщо символ нескінченності називати теж числом, чого, можливо, краще уникати.

Але зауважимо, чи називати символ нескінченності числом, чи не називати його так — в усякому разі його не можна називати нескінченно великим числом, бо нескінченно велике за нашою термінологією насамперед є змінне, аж ніяк не стале. Число ж по своїй суті є щось стале. Отже,

скінченним називається всяке число, крім числа, позначуваного символом нескінченності.

В прикладаннях до сталих величин поняття „скінченний" теж має цілком певний зміст. Стала величина скінченна, якщо скінченним є її числовий вираз. Тому, наприклад, усі відрізки належать до класу скінченних величин.

Але в прикладаннях до змінних величин поняття „скінченне" втрачає свою певність, бо в цьому випадку воно вживається в двох розуміннях — у широкому і вузькому. Від змішування їх можуть походити і весь час походять найважчі непорозуміння.

Змінне називається скінченним у широкому розумінні слова, якщо воно може приймати тільки скінченні числові значення.

В цьому розумінні слова нескінченно зростаюча величина, наприклад, абсциса точки, що йде по осі X вправо в нескінченність, є скінченна величина, бо, нескінченно зростаючи, вона в процесі своєї зміни приймає тільки скінченні числові значення.

Так само і нескінченно маліюча величина є завжди скінченна в широкому розумінні слова, бо різні числові значення, які вона приймає, скінченні.

Таким чином, виявляється, що змінні величини взагалі завжди скінченні в широкому розумінні слова, а тому в цьому розумінні слова прикладати прикметник „скінченна" до змінних величин в значній мірі безцільно.

Поняття „скінченна" в прикладанні до змінних величин ми далі вживатимемо тільки у вузькому розумінні слова.

В Аналізі скінченною змінною величиною у вузькому розумінні слова називають усяку змінну величину, модуль якої лежить між двома додатними числами.

Отже, сказати, що змінна величина x скінченна, це означає стверджувати, що існують два такі додатні числа m і M, що завжди

$$m \leqq |x| \leqq M.$$

Тому можна також сказати, що

змінна величина називається скінченною у вузькому розумінні слова, якщо вона не може приймати ні як завгодно малих значень, ні як завгодно великих.

Згідно з цим розумінням скінченної величини нескінченно велику величину вже не можна називати скінченною, бо вона може приймати значення, більші від усякої наперед заданої величини. Так само і нескінченно мала величина не є скінченна величина, бо вона може приймати значення, модуль яких менший від усякої наперед заданої величини.

В свою чергу скінченна змінна величина, не маючи права приймати як завгодно великих і як завгодно малих значень, не може бути ні нескінченно малою, ні нескінченно великою.

Тільки у вузькому розумінні і буде далі вживатись поняття „скінченний".

§ 136. Висновок.

1. Нескінченно малою величиною називається всяка допоміжна змінна величина, яку на протязі доведення розуміємо як таку, що має одне з можливих для неї значень і в остаточних формулах припускається нескінченно маліючою.

Прикметник „нескінченно мала" не вказує на якунебудь особливу властивість величини, тим більше на її надзвичайну малість, а тільки на роль величини в доведенні.

Означення. Нескінченно малі β і α одного порядку, якщо

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = k, \quad k \neq 0 \quad \text{і} \quad \neq \infty.$$

Порядок β вищий від порядку α, якщо

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0,$$

і нижчий, якщо

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty.$$

Нескінченно мале β порядку n відносно α, якщо воно одного порядку з α^n, тобто якщо

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = k, \quad k \neq 0 \quad \text{і} \quad \neq \infty.$$

Всяке нескінченно мале β може бути відносно основного нескінченно малого α представлене у формі

$$\beta = k\alpha^n + \beta_1,$$

де k скінченне і не нуль і де β_1 порядку вищого n.

ЕКВІВАЛЕНТНІ ВЕЛИЧИНИ.

Для розв'язання двох основних задач про нескінченно малі ще більше значення, ніж поняття порядку, має поняття еквівалентності. Це поняття при обчисленнях з нескінченно малими заміняє в певній мірі поняття рівності.

§ 137. Еквівалентні величини.

Означення. **Змінна величина u називається рівносильною, або еквівалентною, величині v, якщо границя відношення першої до другої дорівнює одиниці.**

Щоб записати, що u еквівалентне v, користуватимемося знаком

$$\approx,$$

який складається з двох вигнутих горизонтальних рисочок. Його назвемо знаком еквівалентності. Запис

$$u \approx v$$

повинен читатись так: „u еквівалентне v". Користуючись ним, наведене означення можна формулювати так:

За означенням

$$u \approx v \tag{1}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\lim \frac{u}{v} = 1. \tag{2}$$

По суті записи (1) і (2) виражають у різних формах одну й ту ж ідею.

За означенням запис

$$u \approx v \tag{3}$$

означає не те саме, що запис

$$v \approx u, \tag{4}$$

бо (3) означає, що

$$\lim \frac{u}{v} = 1, \tag{5}$$

а (4) — що

$$\lim \frac{v}{u} = 1. \tag{6}$$

Але коли маємо (5), то маємо і (6), а тому

Теорема. **Якщо $u \approx v$, то $v \approx u$.**

Відносно знака „$\approx$" зауважимо, що значення його не є загальноприйнятим. Ним користуються для різноманітних цілей кожного разу, як невистачає загальноприйнятих знаків, і різні автори приписують йому різні значення. Ми завжди вживатимемо його тільки як знак еквівалентності.

Поняття еквівалентності можна прикласти до найрізноманітніших величин, і не тільки до величин, що мають границі, але й до величин, що не мають їх. Це видно з таких прикладів.

Приклади. 1. Якщо x нескінченно маліє, то

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1,$$

а тому

$$\sin x \approx x.$$

Отже, еквівалентні величини можуть бути нескінченно маліючими.

2. Нехай x нескінченно зростає і нехай

$$u = a + \frac{1}{x}, \quad v = \frac{ax^2+1}{x^2+x} = \frac{a+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}},$$

де $a \neq 0$. Маємо

$$\lim u = a, \quad \lim v = a,$$

а тому

$$\lim \frac{u}{v} = 1,$$

тобто $u \approx v$. Отже, еквівалентні величини можуть мати скінченні границі.

3. Нехай $x \longrightarrow \infty$ і нехай

$$u = x^3 + 1, \quad v = x^3 + 5\sqrt{x} + 7.$$

Зрозуміло, що

$$\lim u = \lim v = \infty$$

і що

$$\lim \frac{u}{v} = \lim \frac{x^3+1}{x^3+5\sqrt{x}+7} = \lim \frac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{5}{x^2\sqrt{x}}+\frac{7}{x^3}} = 1,$$

а тому $u \approx v$. Отже, еквівалентні величини можуть мати нескінченні границі.

4. Нехай $x \longrightarrow \infty$ і

$$u = \sin x, \quad v = \frac{x}{1+x}\sin x.$$

Тоді u і v не мають границь, але

$$\lim \frac{u}{v} = \lim \frac{1+x}{x} = 1,$$

а тому $u \approx v$. Отже, еквівалентні величини можуть не мати границь.

Поняття еквівалентності найцінніше в прикладанні до нескінченно малих.

Дві нескінченно малі величини називаються еквівалентними, якщо, коли вони стануть в остаточній формулі нескінченно маліючими, то границя відношення їх дорівнює одиниці.

Відзначимо, що

величин, еквівалентних нулеві, немає.

Справді, якщо

$$u \approx 0,$$

то це повинно означати, що

$$\lim \frac{0}{u} = 1, \quad \text{але} \quad \lim \frac{0}{u} = 0.$$

Теорема. **Якщо аргумент функцій синуса, тангенса, арксинуса і арктангенса нескінченно малий, то функції еквівалентні йому. Отже, якщо x нескінченно малий, то**

$$\sin x \approx x, \quad \operatorname{tg} x \approx x, \quad \arcsin x \approx x, \quad \operatorname{arc\,tg} x \approx x.$$

Справді, маємо

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1,$$

а тому $\sin x \approx x$. Далі, маємо

$$\lim \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1,$$

а тому $\operatorname{tg} x \approx x$. Покладаючи $y = \arcsin x$, маємо

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = 1,$$

а тому $\arcsin x \approx x$. Покладаючи $y = \operatorname{arc\,tg} x$, маємо

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1,$$

а тому $\operatorname{arc\,tg} x \approx x$.

Теорема доведена. Згідно з нею, якщо x нескінченно малий, то

$$\sin(\sqrt{x}) \approx \sqrt{x},$$

бо $\sqrt{x}$ — аргумент синуса — нескінченно малий. Так само, якщо x нескінченно малий, то нескінченно малі і величини $7x$, $5x^2$, $x\sqrt{1+x^2}$, а тому

$$\sin(7x) \approx 7x, \quad \arcsin(5x^2) \approx 5x^2, \quad \operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{1+x^2}) \approx x\sqrt{1+x^2}.$$

§ 138. Основні теореми про еквівалентні величини.

Цих теорем дуже небагато, і всі вони легко доводяться, спираючись на означення, згідно з яким $u \approx v$, якщо

$$\lim \frac{u}{v} = 1.$$

Теорема. **Якщо $u \approx v$, то $v \approx u$.**

Цю теорему ми вже довели. Вона випливає з того, що коли

$$\lim \frac{u}{v} = 1, \quad \text{то} \quad \lim \frac{v}{u} = 1.$$

Теорема. **Всяка величина еквівалентна самій собі. Отже, $u \approx u$,**

бо $\lim \frac{u}{u} = 1$.

Теорема. **Дві рівні величини еквівалентні,**

бо якщо $u = v$, то $\lim \frac{u}{v} = 1$.

Теорема. **Дві величини, еквівалентні третій, еквівалентні між собою.**

Нехай

$$u \approx w, \quad v \approx w.$$

Отже,

$$\lim \frac{u}{w} = 1, \quad \lim \frac{v}{w} = 1.$$

Але

$$\frac{u}{v} = \left(\frac{u}{w}\right)\left(\frac{w}{v}\right),$$

звідки

$$\lim \frac{u}{v} = 1,$$

а тому $u \approx v$, і теорема доведена. Вона і попередні дивно нагадують відповідні теореми про рівні величини, але дві дальші дуже важливі теореми вже не мають аналогічних теорем у теорії рівних величин.

Теорема. **Величина, проміжна між двома еквівалентними величинами, еквівалентна їм.**

Нехай w — величина, проміжна між u і v, і нехай

$$u \approx v. \tag{1}$$

Потрібно довести, що

$$w \approx u \approx v.$$

Ми маємо*

$$w = u + \theta(v - u), \quad 0 < \theta < 1,$$

звідки

$$\frac{w}{u} = 1 + \theta\left(\frac{v}{u} - 1\right),$$

і через те, що згідно з (1)

$$\lim \frac{v}{u} = 1,$$

то

$$\lim \frac{w}{u} = 1,$$

а тому $w \approx u$, і теорема доведена. Спираючись на неї, можна так довести відому рівність

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{2}$$

Нехай x нескінченно маліє. Маємо

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0} \cos x = 1,$$

а тому

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x,$$

і через те що

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

то

$$\sin x \approx x,$$

тобто (2).

Надалі, якщо ε — різниця між β і β':

$$\beta' = \beta + \varepsilon,$$

то говоритимемо, що β' відрізняється від β на ε.

Теорема про еквівалентність. **Якщо в добутку $\beta\alpha$ скінченного** фактора β на нескінченно малий множник α замінимо фактор β нескінченно мало від нього відрізнюваним фактором β', а нескінченно малий множник α — еквівалентним множником α', то дістанемо добуток $\beta\alpha'$, еквівалентний даному добуткові $\beta\alpha$. Отже, якщо**

$$\alpha \approx \alpha', \quad \beta = \beta' + \varepsilon, \tag{3}$$

---

* При виведенні теореми Лагранжа ми довели, що всяке число ξ, проміжне між a і b, може бути представлене у формі

$$\xi = a + \theta(b - a).$$

** Отже, фактор β не може приймати як завгодно малих значень.

де фактор β скінченний і де ε нескінченно мале, то

$$\beta\alpha \approx \beta'\alpha'. \tag{4}$$

Маємо

$$\frac{\beta\alpha}{\beta'\alpha'} = \frac{(\beta'+\varepsilon)\alpha}{\beta'\alpha'}.$$

Отже,

$$\frac{\beta\alpha}{\beta'\alpha'} = \left(1+\frac{\varepsilon}{\beta'}\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right).$$

Через те що $\lim \varepsilon = 0$ і $\alpha \approx \alpha'$, то

$$\lim \frac{\beta\alpha}{\beta'\alpha'} = 1,$$

а тому (4).

Теорема. **Дві нескінченно малі β і α еквівалентні, якщо різниця між ними порядку вищого кожного з них.**

Нехай $\beta = \alpha + \varepsilon$ і порядок ε вищий порядку α. Отже,

$$\lim \frac{\varepsilon}{\alpha} = 0.$$

Маємо

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha}\right) = \lim\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) = 1,$$

а тому $\beta \approx \alpha$.

Теорема. **Нескінченно мале еквівалентне своїй головній частині.**

Справді, якщо

$$\beta = k\alpha^n + \beta_1,$$

то порядок β_1 вищий, ніж n, а тому за попередньою теоремою $\beta \approx k\alpha^n$.

Ця теорема яскраво показує, яке значення для поняття еквівалентності має поняття порядку. Якщо β — нескінченно мале, залежне від α, то ця залежність може мати складний характер, але головна частина завжди має дуже простий вираз. Нехай, наприклад,

$$\beta = \sqrt{1+\alpha^3} - 1 = \frac{\alpha^3}{\sqrt{1+\alpha^3}+1}. \tag{5}$$

Маємо

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^3} = \lim \frac{1}{1+\sqrt{1+\alpha^3}} = \frac{1}{2},$$

а тому

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha^3 + \varepsilon\alpha^3,$$

де ε — нескінченно мале. Головною частиною величина β має $\frac{1}{2}\alpha^3$. Отже,

$$\beta \approx \frac{1}{2}\alpha^3,$$

і ми знайшли для β дуже просту еквівалентну їй величину.

§ 139. Перший принцип.

Для розв'язання першої основної задачі, тобто для обчислення границі відношення нескінченно малих, має велике значення теорема, що відома як

Перший принцип числення нескінченно малих. **При обчисленні границі відношення, членами якого є добутки нескінченно малих, можна кожний нескінченно малий множник заміняти еквівалентною йому величиною. Отже, якщо $\alpha, \beta, \ldots, \gamma, u, v, \ldots, w$ — дані нескінченно малі і якщо $\alpha', \beta', \ldots, \gamma', u', v', \ldots, w'$ — відповідно еквівалентні їм величини, а саме, якщо**

$$\alpha \approx \alpha',\ \beta \approx \beta', \ldots,\ \gamma \approx \gamma',\ u \approx u', \ldots,\ v \approx v', \ldots,\ w \approx w', \quad (1)$$

то

$$\lim \frac{\alpha \cdot \beta \ldots \gamma}{u \cdot v \ldots w} = \lim \frac{\alpha' \cdot \beta' \ldots \gamma'}{u' \cdot v' \ldots w'}. \quad (2)$$

Але це є майже очевидним. Маємо

$$\frac{\alpha \cdot \beta \ldots \gamma}{u \cdot v \ldots w} = \frac{\alpha' \cdot \beta' \ldots \gamma'}{u' \cdot v' \ldots w'} \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)\left(\frac{\beta}{\beta'}\right) \ldots \left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)\left(\frac{u'}{u}\right)\left(\frac{v'}{v}\right) \ldots \left(\frac{w'}{w}\right).$$

В правій частині всі множники в дужках, завдяки (1), в границі дорівнюють одиниці, а тому маємо (2), і принцип доведений.

Нехай, наприклад, потрібно обчислити границю виразу

$$y = \frac{\sin(7\sqrt{x}) \cdot \operatorname{arc\,tg}(x^3)}{\arcsin(2x^2) \cdot \operatorname{tg}(3x\sqrt{x})} \quad (3)$$

при $x \to 0$.

Прикладаючи доведений принцип, ми обчислимо шукану границю дуже швидко. Ми знаємо, що коли v нескінченно маліє, то

$$\sin v \approx \operatorname{tg} v \approx \arcsin v \approx \operatorname{arc\,tg} v \approx v.$$

Тому в нашому прикладі заміняємо кожну тригонометричну функцію еквівалентним їй аргументом. Дістаємо

$$\lim \frac{\sin(7\sqrt{x}) \operatorname{arc\,tg}(x^3)}{\arcsin(2x^2) \operatorname{tg}(3x\sqrt{x})} = \lim \frac{7\sqrt{x} \cdot x^3}{2x^2 \cdot 3x\sqrt{x}} = \frac{7}{6},$$

і задача розв'язана.

На початку розвитку Аналізу перший принцип дуже широко застосовувався. Тепер ним теж доводиться користуватись, але значно рідше.

Щоб обчислити границю виразу (3), ми, міркуючи теоретично, могли б прикласти правило Лопіталя. Але зрозуміло, що це привело б до дуже довгих обчислень.

§ 140. Диференціал функції.

Якщо $f'(x)$ — похідна функції $y=f(x)$, то за означенням

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x). \tag{1}$$

Припускаємо, що x має одне з таких значень, при яких похідна скінченна і не дорівнює нулеві. Тоді, до переходу до границі, якщо Δx має якенебудь значення, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ і } f'(x)$$

взагалі не рівні між собою. Нехай ε — різниця між ними:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon. \tag{2}$$

Згідно з (1), якщо Δx нескінченно маліє, то ε теж нескінченно маліє. Кажучи інакше, якщо Δx нескінченно мале, то і ε нескінченно мале. Поділяючи (2) на $f'(x)$, маємо

$$\frac{\Delta y}{f'(x)\Delta x} = 1 + \frac{\varepsilon}{f'(x)}.$$

Нехай $\Delta x \to 0$, тоді

$$\lim \frac{\Delta y}{f'(x)\Delta x} = 1.$$

Отже, до переходу до границі

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x,$$

тобто

$$\Delta y \approx dy. \tag{3}$$

Теорема. **Нескінченно малий приріст функції взагалі еквівалентний її диференціалові.**

Ми кажемо „взагалі", бо співвідношення (3) перестає бути правильним у тих виняткових випадках, коли $f'(x)=0$ або ∞.

Велике значення диференціала випливає з того, що коли приріст Δx незалежного змінного нескінченно малий, то приріст функції і її диференціал еквівалентні.

Тому в усіх тих випадках, коли величини можна замінити еквівалентними їм, ми замість приросту функції можемо брати її диференціал.

§ 141. Висновок.

1. *Означення.* Якщо u і v — змінні, то $u \approx v$, якщо

$$\lim \frac{u}{v} = 1.$$

Якщо x нескінченно мале, то

$$\sin x \approx x, \quad \operatorname{tg} x \approx x, \quad \arcsin x \approx x, \quad \operatorname{arc\,tg} x \approx x.$$

2. Теореми:

1) якщо $u \approx v$, то $v \approx u$;

2) $u \approx u$;

3) якщо $u = v$, то $u \approx v$;

4) якщо $u \approx w$ і $v \approx w$, то $u \approx v$;

5) величина, проміжна між еквівалентними величинами, еквівалентна їм.

3. *Теорема еквівалентності.* Якщо

$$\alpha \approx \alpha' \quad \text{і} \quad \beta = \beta' + \varepsilon,$$

де ε нескінченно мале і β скінченне, то

$$\beta\alpha \approx \beta'\alpha'.$$

4. Всяке нескінченно мале еквівалентне своїй головній частині.

5. Якщо два нескінченно малі відрізняються на величину, порядок якої вищий одного з них, то вони еквівалентні.

6. Якщо приріст незалежного змінного нескінченно малий, то приріст функції взагалі еквівалентний диференціалові.

7. ***Перший принцип.*** **При обчисленні границі відношення добутків нескінченно малих кожне нескінченно мале можна заміняти йому еквівалентним.**

ІНТЕГРАЛЬНА СУМА І ДРУГИЙ ПРИНЦИП.

Ми перейдемо до другої задачі про нескінченно малі — до задачі про обчислення границі сум нескінченно маліючих доданків у нескінченно зростаючому числі.

§ 142. Суми нескінченно маліючих доданків у нескінченно зростаючому числі.

З цими сумами ми матимемо справу протягом усього дальшого курсу і з ними ж ми весь час зустрічатимемося в усіх прикладаннях математики до механіки і фізики. Тому потрібно чітко з'ясувати зміст цього поняття.

На перший погляд здається, що твердження „нехай s є сума нескінченно маліючих доданків" має яскравий зміст не тільки тоді, коли число доданків стале, але й тоді, коли воно змінне. Насправді це далеко не так.

Якщо s — сума сталого числа доданків, наприклад, чотирьох:

$$s = x + y + z + v,$$

то цілком зрозуміло, який зміст має твердження, що кожний доданок цієї суми маліє. Але припустимо, що від суми трьох доданків

$$4 + 8 + 15$$

ми переходимо до суми шести доданків

$$1 + 3 + 4 + 9 + 10 + 17.$$

Ми говоримо, що при цьому переході всі доданки змінились.

Постає запитання: що ж вони — збільшились чи зменшились? В окремому випадку це запитання можна поставити відносно другого доданку першої суми, який дорівнює 8. Що він — при переході до другої суми — зменшився чи збільшився?

Зрозуміло, в чому полягають труднощі. На поставлене запитання ми не можемо відповісти, поки не дамо відповіді на запитання, яким доданком другої суми замінився доданок 8 першої суми. Якщо ми вважаємо, що він замінився 3 або 4, то він зменшився; коли ж вважатимемо, що він замінився 9 або 10, то він збільшився. Отже,

щоб мати право говорити про те, як змінюються доданки суми s при зміні числа їх n, треба спочатку умовитись, щó ми називатимемо одним і тим же доданком, який змінює свої значення при зміні n.

Цю трудність легко подолати.

При вивченні суми s із змінним числом n доданків завжди припускають, що попередньо при кожному значенні числа n усі доданки перенумеровані. Тоді при кожному n кожний доданок займає якесь певне місце, і ми дістаємо змогу говорити про зміну доданку, який займає одне й те ж місце при всякому n.

При цьому при суто теоретичних дослідженнях зовсім байдуже, в якому порядку ми перенумеруємо доданки. Фактично, коли ми розглядаємо справді дані суми, то доданки їх звичайно виявляються вже перенумерованими, завдяки тому законові, яким вони дані.

Припустимо ж, що доданки суми s перенумеровані. Нехай

$$s = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n.$$

Тепер ми вже можемо говорити про зміну першого, другого і взагалі доданку α_n, який стоїть на будьякому місці k.

При цьому, звичайно, якщо n зростає, то доданок α_k з'являється тільки з того моменту, коли n стає рівним або більшим від k.

Здавалося б, тепер уже цілком зрозуміло, щó означає твердження, що всі доданки суми

$$s = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$$

нескінченно маліють при нескінченному зростанні n. Це означає, що кожний з них маліє, а тому

$$\lim \alpha_k = 0,$$

якщо $n \to \infty$, яке б не було k. І ось це виявляється неправильним. Тут ми дійшли до найважчого місця в теорії сум із змінним числом доданків. Виявляється, що коли число доданків нескінченно зростає, то тоді можливі такі суми, що кожний доданок їх, взятий окремо, нескінченно маліє, але в той же час не можна стверджувати, що всі доданки нескінченно маліють. Але щоб зміст цього твердження був цілком зрозумілий, треба спочатку точно умовитись, щó саме ми повинні розуміти, коли говоримо, що всі доданки нескінченно маліють.

Говорять, що всі доданки суми

$$s = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$$

при нескінченному зростанні числа їх n нескінченно маліють, якщо, починаючи з якогось моменту, модулі всіх їх водночас стають як завгодно малими, тобто меншими одного й того ж довільно наперед заданого додатного числа.

Між іншим, якщо всі доданки нескінченно маліють, то повинен маліти і найбільший серед них за абсолютною величиною.

Зауваживши це, розглянемо таку просту суму:

$$s=\frac{1}{2n}+\frac{2}{2n}+\frac{3}{2n}+\ldots+\frac{2n-2}{2n}+\frac{2n-1}{2n}.$$

Доданок, який займає місце k, позначимо через α_k:

$$\alpha_k=\frac{k}{2n}.$$

Зрозуміло, яке б k не було, якщо $n\to\infty$, то

$$\lim \alpha_k=0.$$

Отже, всякий доданок, що стоїть на одному і тому ж місці, при всякому k нескінченно маліє.

Але візьмемо останній доданок

$$\alpha_{2n-1}=\frac{2n-1}{2n}=1-\frac{1}{2n}.$$

Зрозуміло, що

$$\lim \alpha_{2n-1}=1.$$

Отже, цей доданок не маліє.

Візьмемо доданок

$$\alpha_n=\frac{n}{2n},$$

що стоїть на n-му місці. При всякому n

$$\alpha_n=\frac{1}{2},$$

а тому і цей доданок теж не маліє. Ми бачимо, що не можна стверджувати, що всі доданки нашої суми нескінченно маліють у своїй сукупності. Легко в даному випадку розібратись у цій, здавалося б, суперечності. Ми маємо

$$\alpha_k=\frac{k}{2n}.$$

Зрозуміло, що коли $n\to\infty$ і коли при цьому k зберігає одне й те ж значення, то

$$\lim \alpha_k=0.$$

Але коли k змінюється разом з n, то вже невідомо, як при цьому змінюватиметься α_k.

Саме останній доданок α_{2n-1} не є доданок, що займає в сумі одне й те ж місце при всякому n. Щоб у рівності

$$\alpha_k = \frac{k}{2n}$$

ми могли α_k вважати останнім доданком, ми повинні прийняти, що

$$k = 2n - 1,$$

тобто ми повинні вважати, що індекс k змінюється разом з n. Але коли $k = 2n - 1$, то

$$\alpha_{2n-1} = 1 - \frac{1}{2n}, \quad \lim \alpha_{2n-1} = 1.$$

Так само, коли ми розглядаємо доданок α_n, що стоїть на n-му місці, то індекс його змінюється із зміною n.

Ми бачимо, що доданок $\alpha_k = \frac{k}{n}$ нескінченно маліє, якщо k не змінюється разом з n. Але коли k змінюється разом з n, то α_k може й не маліти.

Розглянутий приклад вчить того, що можливі такі суми з нескінченно зростаючим числом доданків, що їх доданки α_k нескінченно маліють тільки при сталому k, але якщо k змінюється разом з n, то α_k може й не маліти.

Означення. **Говорять, що доданки суми**

$$s = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$$

маліють рівномірно, якщо при нескінченному зростанні числа їх n доданок α_k нескінченно маліє, як саме при цьому його індекс k не змінювався б водночас із зміною n.

Коли ж α_k нескінченно маліє тільки при сталому k, то кажуть, що доданки маліють нерівномірно.

Означення. **Інтегральною сумою називається всяка сума рівномірно маліючих доданків у нескінченно зростаючому числі.**

Нехай α_h — той з доданків інтегральної суми, модуль якого найбільший. В загальному випадку h змінюється разом з n. За умовою

$$\lim \alpha_k = 0,$$

як саме k не змінювалося б разом з n. Покладаючи $k = h$, маємо

$$\lim \alpha_h = 0.$$

Отже,

в інтегральній сумі нескінченно маліє також і доданок, найбільший абсолютною величиною.

Тому в інтегральній сумі справді маліють усі її доданки, не тільки кожний окремо, але й усі в своїй **сукупності**.

Викладене наочно можна пояснити таким геометричним прикладом.

З точки A прямої (рис. 102), що проходить через початок O, опустимо на

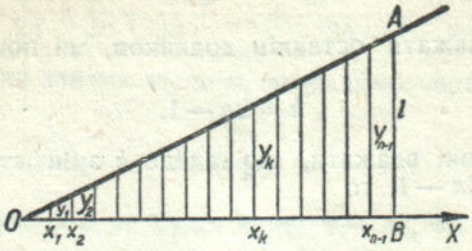

Рис. 102.

вісь X перпендикуляр $AB = l$. Поділимо відрізок OB точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на n рівних частин і нехай $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$ — ординати прямої OA в цих точках.

Зрозуміло, що

$$y_1 = \frac{l}{n}, \quad y_2 = \frac{2l}{n}, \quad y_3 = \frac{3l}{n}, \ldots$$

і взагалі

$$y_k = \frac{kl}{n}.$$

Якщо k стале, то

$$\lim_{n \to \infty} y_n = 0.$$

І справді, ордината, що займає одне й те ж місце k, при збільшенні n наближається до початку. Але коли, змінюючи n, ми змінюватимемо і k, то ми можемо змінювати k так, що y_k не зменшуватиметься. Це цілком зрозуміло, якщо ми надамо символові n двох якихнебудь певних значень.

На рисунку 103 товстими лініями зображені ординати при $n = 8$. Потім кожний підінтервал поділений пополам і в точках поділу поставлені тонкі орди-

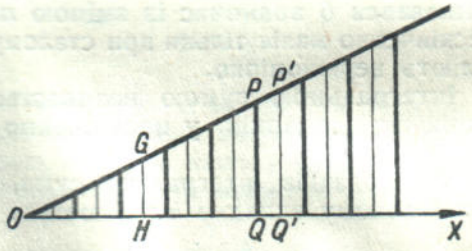

Рис. 103.

нати. Таким чином, одні товсті ординати зображають числа y_k при $n = 8$. Товсті і тонкі разом дають числа y_k при $n = 16$.

При $n = 8$ число y_5 зобразиться ординатою PQ, а при $n = 16$ — ординатою GH. Зрозуміло, що y_5 зменшилось.

Але коли, переходячи від $n = 8$ до $n = 16$, ми індекс 5 змінимо, наприклад, на 11, то від ординати PQ ми перейдемо до більшої ординати $P'Q'$. Взагалі на цьому прикладі очевидно, що y_k маліє тільки при сталому k.

§ 143. Інтегральна сума і означений інтеграл.

Означення. Інтегральною сумою називаємо всяку суму нескінченно великого числа нескінченно малих доданків, при переході до границі рівномірно маліючих.

Означеним інтегралом у найширшому розумінні називається границя всякої інтегральної суми.

Звичайно інтегральна сума s представляється сумою типу:

$$s = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 + \ldots + \beta_n\alpha_n,$$

кожний доданок якої є добуток двох множників. У своїй сукупності ці множники розпадаються на дві системи: на систему величин

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n,$$

які ми називатимемо елементами інтеграції, і на систему величин

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n,$$

які назвемо факторами.

При переході до границі число доданків нескінченно зростає. При цьому елементи інтеграції

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$$

нескінченно маліють у своїй сукупності, завдяки чому нескінченно маліють і всі доданки. Щождо факторів, то хоч в інших випадках вони теж нескінченно маліють, але звичайно вони не прямують ні до якої границі.

Якщо через α позначимо загальний тип елемента інтеграції, а через β — загальний тип фактора, то доданки інтегральної суми будуть типу $\beta\alpha$, а тому ця сума може бути позначена так:

$$s = \sum \beta\alpha,$$

що треба читати так: сума доданків типу $\beta\alpha$.

В такому випадку границя цієї суми, тобто інтеграл, позначається так:

$$\int \beta\alpha,$$

при чому біля знака інтеграла часто приписують різні символи, що мають на меті дати точнішу вказівку на умови одержання цього інтеграла.

Границю суми абсолютних величин елементів інтеграції, тобто границю суми

$$\sum |\alpha| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| + \ldots + |\alpha_n|,$$

ми називатимемо областю інтеграції*.

* На це означення і на все, що викладено далі в цьому розділі, читач повинен звернути особливу увагу. Викладене тут становить суть сучасного Аналізу.

Розглянемо, як відоме нам поняття про означений інтеграл підходить під тількищо наведене ширше поняття.

Ми визначили означений інтеграл як границю суми:

$$s = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}. \qquad (1)$$

Доданки цієї суми типу $f(x)\Delta x$. Ось чому границю цієї суми позначають так:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Варто тільки покласти

$$\alpha_1 = \Delta x_0,\ \alpha_2 = \Delta x_1, \ldots,\ \alpha_n = \Delta x_{n-1},$$
$$\beta_1 = f(\xi_0),\ \beta_2 = f(\xi_1), \ldots,\ \beta_n = f(\xi_{n-1}),$$

щоб добре бачити, що сума s є сума типу:

$$s = \sum \beta\alpha,$$

тобто інтегральна сума, де Δx_k — елементи інтеграції, а $f(\xi_k)$ — фактори. Перші нескінченно маліють, другі—ні. Сума всіх Δx_k є інтервал (a, b), тобто область інтеграції.

§ 144. Лема про інтегральну суму.

Якщо всі фактори інтегральної суми

$$\sum \varepsilon\alpha = \varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \varepsilon_3\alpha_3 + \ldots + \varepsilon_n\alpha_n$$

в свою чергу рівномірно нескінченно маліють і якщо область інтеграції, тобто границя суми $\sum |\alpha_k|$ скінченна, то границя інтегральної суми дорівнює нулеві.

Нехай ε — найбільший модуль з модулів факторів $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$. Через те що за умовою теореми всі фактори нескінченно маліють і до того рівномірно, то

$$\lim \varepsilon = 0.$$

Модуль суми менший або дорівнює сумі модулів доданків. Тому

$$|\sum \varepsilon\alpha| \leqq |\varepsilon_1||\alpha_1| + |\varepsilon_2||\alpha_2| + \ldots + |\varepsilon_n||\alpha_n|.$$

В правій частині всі доданки додатні. Ми її збільшимо, якщо всі $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \ldots, |\varepsilon_n|$ замінимо через ε. Дістанемо:

$$|\sum \varepsilon\alpha| \leqq \varepsilon\{|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| + \ldots + |\alpha_n|\},$$

або коротше:

$$|\sum \varepsilon\alpha| \leqq \varepsilon \sum |\alpha|.$$

Через те що границя суми $\sum|\alpha|$ за умовою скінченна і через те що $\lim \varepsilon = 0$, то лема доведена. Прикладом її може бути сума граничних прямокутників, якщо через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ позначити їх основи, а через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ — їх висоти. Тоді їх сума буде типу

$$\sum \varepsilon\alpha$$

і границя її дорівнює нулеві.

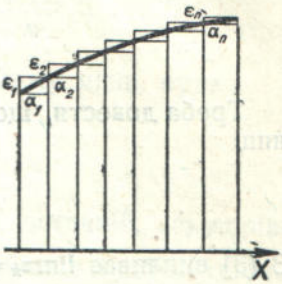

Рис. 104.

§ 145. Другий принцип числення нескінченно малих.

Теорема. **При обчисленні границі інтегральної суми, область інтеграції якої скінченна, можна всі її фактори замінити величинами, що відрізняються від них нескінченно мало.**

Нехай маємо дві інтегральні суми:

$$p = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 + \ldots + \beta_n\alpha_n,$$
$$q = \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 + \ldots + \gamma_n\alpha_n$$

з одними й тими ж елементами інтеграції α_k, але з різними при них факторами, і припустимо, що всі фактори β_k в своїй сукупності нескінченно мало відрізняються від відповідних їм факторів γ_k. Це означає, що всі різниці

$$\beta_1 - \gamma_1, \quad \beta_2 - \gamma_2, \quad \beta_3 - \gamma_3, \quad \ldots, \quad \beta_n - \gamma_n$$

рівномірно нескінченно маліють. Маємо:

$$p - q = (\beta_1 - \gamma_1)\alpha_1 + (\beta_2 - \gamma_2)\alpha_2 + (\beta_3 - \gamma_3)\alpha_3 + \ldots + (\beta_n - \gamma_n)\alpha_n.$$

У правій частині всі фактори нескінченно маліють, а тому за тількищо доведеною лемою:

$$\lim(p - q) = 0.$$

Отже,

$$\lim q = \lim p.$$

Але суму q одержуємо з суми p заміною її факторів β_k відповідними їй величинами γ_k. Теорема доведена.

Теорема. **При обчисленні границі інтегральної суми із скінченною областю інтеграції всі елементи інтеграції можна замінити відповідно еквівалентними їм величинами.**

Нехай

$$p = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 + \ldots + \beta_n\alpha_n, \tag{1}$$

$$q = \beta_1\alpha_1' + \beta_2\alpha_2' + \beta_3\alpha_3' + \ldots + \beta_n\alpha_n' \tag{2}$$

дві суми з одними й тими ж факторами, але з різними елементами інтеграції, при чому $\alpha_k \approx \alpha'_k$ при всіх k і, отже,

$$\lim \frac{\alpha'_k}{\alpha_k} = 1. \qquad (3)$$

Треба довести, що $\lim p = \lim q$. Нехай до переходу до границі

$$\frac{\alpha'_k}{\alpha_k} = 1 + \varepsilon_k.$$

З (3) випливає $\lim \varepsilon_k = 0$, а тому всі ε_k нескінченно малі. Маємо

$$\alpha'_k = \alpha_k + \varepsilon_k \alpha_k,$$

і оскільки

$$p = \sum \beta_k \alpha_k, \quad q = \sum \beta_k \alpha'_k,$$

то

$$q - p = \sum (\beta_k \varepsilon_k) \alpha_k.$$

У правій частині всі фактори $\beta_k \varepsilon_k$ нескінченно малі, а тому $\lim (q - p) = 0$, тобто

$$\lim p = \lim q.$$

Поєднуючи цю теорему і попередню в одну, одержуємо теорему, яку назвемо другим принципом числення нескінченно маліючих.

Другий принцип. **При обчисленні границі інтегральної суми із скінченною областю інтеграції можна фактори заміняти величинами, що нескінченно мало відрізняються від них, а елементи інтеграції — еквівалентними їм величинами.**

Можна сказати, що тільки завдяки цьому принципові можливі всі незліченні прикладання Аналізу до геометрії, механіки і фізики.

Як окремий випадок доведеного принципу відзначимо той випадок, коли всі фактори в інтегральній сумі

$$\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 + \ldots + \beta_n \alpha_n$$

дорівнюють одиниці, а всі елементи додатні. Тоді одержуємо теорему:

При обчисленні границі інтегральної суми

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

додатних нескінченно маліючих доданків у нескінченно зростаючому числі всі доданки можна замінити еквівалентними їм величинами.

В більшості курсів під другим принципом числення нескінченно маліючих розуміють саме тільки цю теорему.

Як приклад доведеного принципу розглянемо таку задачу. Нехай

$$s = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \sin\frac{3}{n^2} + \ldots + \sin\frac{n-1}{n^2} + \sin\frac{n}{n^2},$$

де n — ціле число. Доданок, що стоїть на k-му місці, буде

$$\alpha_k = \sin\frac{k}{n^2}, \quad 1 \leqq k \leqq n,$$

і зрозуміло, що найбільшим доданком буде останній, що дорівнює $\sin\frac{1}{n}$. Покладемо, що n нескінченно зростає і що потрібно знайти границю суми s.

При нескінченному зростанні n число доданків нескінченно зростає; в той же час доданки нескінченно маліють. Але синус нескінченно маліючої дуги еквівалентний самій дузі. Отже, при обчисленні границі суми s ми маємо право замінити кожний синус його аргументом, а тому

$$\lim s = \lim\left[\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}\right] = \lim\frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right\};$$

отже,

$$\lim s = \frac{1}{2},$$

і ми розв'язали одразу ж задачу, яку розв'язати іншим шляхом було б досить важко.

§ 146. Простий означений інтеграл.

Означеним інтегралом, як було сказано, взагалі називається границя всякої суми нескінченно маліючих доданків у нескінченно зростаючому числі, тобто границя всякої інтегральної суми.

Далі ми зустрінемося з різноманітними типами означених інтегралів. Той же тип, з яким ми вже ознайомлені, тобто означений інтеграл, який позначається так:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

дуже часто, для відміни від інших типів, називають простим означеним інтегралом, або звичайним, або означеним інтегралом від функції одного змінного.

Але в більшості випадків саме інтеграли цього типу називають коротко означеними інтегралами, без усякого додаткового прикметника; найчастіше ж їх називають просто інтегралами.

Щождо інтегралів інших типів, то для них, відмінно від вивчених нами, вводять різні терміни.

Обчислення інтегралів найрізноманітніших типів зводиться кінець-кінцем до обчислення вивчених нами звичайних інтегралів. Тому теорія їх набуває особливого значення для всієї математики.

Ми розглянемо ще раз деякі їх основні властивості, маючи на меті з'ясувати ту роль, яку в їх теорії відограє поняття еквівалентних величин. Завдяки тому шляхові, який ми обрали для введення поняття про означений інтеграл, ця роль досі лишалась осторонь.

Означений інтеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ми означили як границю такої суми:

$$s = f(\xi_0)\,\Delta x_0 + f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\,\Delta x_{n-1}, \qquad (1)$$

при чому при переході до границі припускали, що число проміжних чисел x_k нескінченно зростає так, що проміжки між ними нескінченно маліють.

Ця границя, як ми бачили, не залежить від вибору чисел ξ_k, і свого часу ми переконалися в цьому, виходячи з суто геометричних міркувань. Але тепер неважко бачити, що це є простий висновок другого принципу.

Справді, поруч із сумою s розглянемо іншу суму з тими ж числами x_k, але з іншим вибором чисел ξ_k. Нехай

$$s' = f(\xi_0')\,\Delta x_0 + f(\xi_1')\,\Delta x_1 + f(\xi_2')\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1}')\,\Delta x_{n-1}. \qquad (2)$$

Множники $f(\xi_k)$ і $f(\xi_k')$ є факторами в цих сумах.

Розглянемо їх різницю:

$$f(\xi_k) - f(\xi_k'). \qquad (3)$$

Через те що числа ξ_k і ξ_k' лежать в одному і тому ж інтервалі (x_{k+1}, x_k), і через те що цей інтервал у границі перетворюється в нуль, то, отже, і різниця

$$\xi_k - \xi_k'$$

в границі дорівнює нулеві, а тому й різниця (3) має границю нуль.

Отже, величини $f(\xi_k)$ і $f(\xi_k')$, що є факторами сум s і s', відрізняються одна від одної нескінченно мало, а тому за другим принципом суми s і s' мають одну і ту ж границю, тобто границя суми s не залежить від вибору чисел ξ_k.

Ми бачимо, що ця незалежність є не що інше, як просте прикладання другого принципу, згідно з яким границя інтеграль-

ної суми не зміниться, якщо всі фактори її замінити величинами, що відрізняються від них нескінченно мало.

Зовсім байдуже, як саме брати числа ξ_k, тому ми можемо сказати, що доданки суми s є доданки типу $f(x)\Delta x$, а тому й пишемо основну рівність

$$\lim \sum_a^b f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

§ 147. Висновок.

Лема. Якщо всі фактори інтегральної суми нескінченно маліють, то границя суми дорівнює нулеві.

Другий принцип. При обчисленні границі інтегральної суми із скінченною областю інтеграції фактори можна заміняти величинами, нескінченно мало від них відрізнюваними, а елементи інтеграції — еквівалентними величинами.

Означеним інтегралом називається границя всякої інтегральної суми.

ГЕОМЕТРИЧНІ І МЕХАНІЧНІ ПРИКЛАДАННЯ ОЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА.

Означений інтеграл має різноманітні прикладання в галузі геометрії та механіки. Ми тут розглянемо деякі з них; при цьому хоч більшість геометричних прикладань ми вже розглянули в першій частині, ми почасти знову повернемося до них, щоб розглянути їх з погляду еквівалентності, а також щоб зробити деякі додаткові до них зауваження.

§ 148. Площа в декартових координатах.

Цю задачу, яку ми вже вивчили досить детально, ми знову розглянемо в трохи загальнішому вигляді, припускаючи, що крива віднесена не до прямокутних декартових координат, а до косокутних, кут між осями якої дорівнює ω.

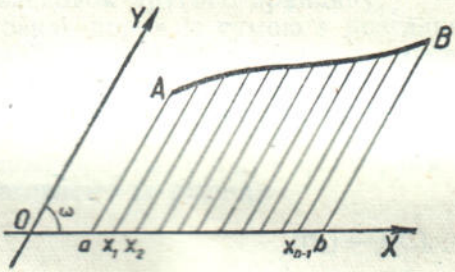

Рис. 105.

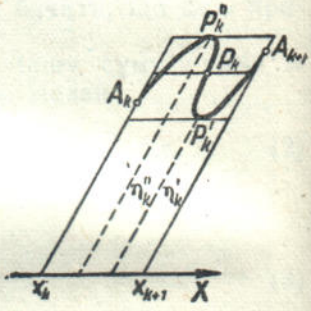

Рис. 106.

Нехай, як і раніше, a і b — абсциси двох точок A і B, з яких проводимо прямі aA і bB, паралельні осі Y. Криволінійною трапецією, площу якої позначимо через u, тепер називатимемо фігуру $aABb$ (рис. 105). Вставивши між a і b ряд проміжних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, проведемо з кожної точки x_k пряму, паралельну осі Y. Цими прямими трапеція поділиться на елементарні смуги, площі яких позначимо через $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Через $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ позначимо ординати кривої, відповідні точкам поділу.

Припустимо — це, як побачимо, є дуже важливим,— що крива всіма точками лежить вище осі X, не маючи ні однієї точки,

спільної з віссю X. Отже, ордината y змінної точки на кривій завжди лишається додатною і не може приймати як завгодно малих значень.

Розглянемо елементарну смужку, що належить якомунебудь підінтервалові (x_k, x_{k+1}). Нехай P'_k і P''_k — ті точки дуги A_kA_{k+1}, ординати яких η'_k і η''_k відповідно менші і більші від усіх інших ординат інтервалу (x_k, x_{k+1}). Проводячи через них прямі, паралельні осі X, дістанемо внутрішній і виступаючий елементарні паралелограми, площі яких позначимо через u'_k і u''_k. Зрозуміло, що

$$u'_k < u_k < u''_k \tag{1}$$

і що

$$u'_k = \eta'_k \sin \omega \Delta x_k, \quad u''_k = \eta''_k \sin \omega \Delta x_k. \tag{2}$$

Різниця

$$\eta''_k - \eta'_k$$

буде нескінченно малою, якщо підінтервали Δx_k нескінченно малі. Але величини u'_k і u''_k — типу $\beta\alpha$. Їх фактори η'_k і η''_k, через те що крива лежить вище осі, не можуть приймати як завгодно малих значень. В той же час вони нескінченно мало відрізняються один від одного. За теоремою про еквівалентність робимо висновок, що

$$u'_k \approx u''_k. \tag{3}$$

Якщо P_k — довільно взята точка на дузі A_kA_{k+1} і ξ_k, η_k — її координати, то, провівши через цю точку пряму, паралельну осі X, дістанемо елементарний паралелограм загального типу, площу якого позначимо через v_k. Зрозуміло, що

$$v = \eta_k \sin \omega \Delta x_k = f(\xi_k) \sin \omega \Delta x_k \tag{4}$$

і що водночас

$$u'_k < u_k < u''_k$$
$$u'_k < v_k < u''_k. \tag{5}$$

Одразу ж, беручи до уваги (3), робимо висновок, що

$$u_k \approx u'_k, \quad v_k \approx u'_k,$$

а тому

$$u_k \approx v_k.$$

Теорема. **Площа елементарної смужки еквівалентна площі елементарного паралелограма загального типу.**

Отже, з погляду еквівалентності всяка нескінченно тонка елементарна смужка може розглядатись як паралелограм.

Припускаючи тепер, що число проміжних точок нескінченно

зростає так, що найбільший проміжок між ними нескінченно маліє, і спираючись на другий принцип, робимо висновок, що

$$\text{площа } aABb = \lim \sum_a^b u_k = \lim \sum_a^b v_k =$$

$$= \lim \sum_a^b f(\xi_k) \sin \omega \, \Delta x_k = \int_a^b \sin \omega f(x)\, dx = \sin \omega \int_a^b y\, dx. \qquad (6)$$

Але це тоді, коли припускаємо, що точки A і B не лежать на осі X. Якби вони лежали на ній, то ордината змінної точки на кривій могла б приймати як завгодно малі значення і тоді з (2) ми не могли б зробити висновку про (3).

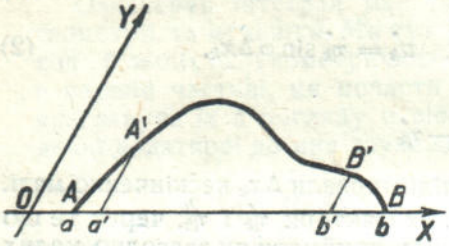

Рис. 107.

Але нехай A і B лежать на осі X. Тоді, взявши точки A' і B' досить близько до точок A і B, за доведеним маємо (рис. 107):

$$\text{площа } a'A'B'b' = \sin \omega \int_{a'}^{b'} y\, dx.$$

Змушуючи a' і b' нескінченно наближатись відповідно до a і b, у границі знову дістанемо рівність

$$u = \sin \omega \int_a^b y\, dx, \qquad (7)$$

де y — функція x.

Якщо крива дана параметрично рівняннями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то, провівши в (7) підставлянням $x = \varphi(t)$, знайдемо, що

$$u = \sin \omega \int_{t_0}^{T} y\, dx, \qquad (8)$$

де y і x вже треба розглядати як функції t. Границями інтеграла є значення параметра в початковій і кінцевій точках кривої. В результаті маємо теорему:

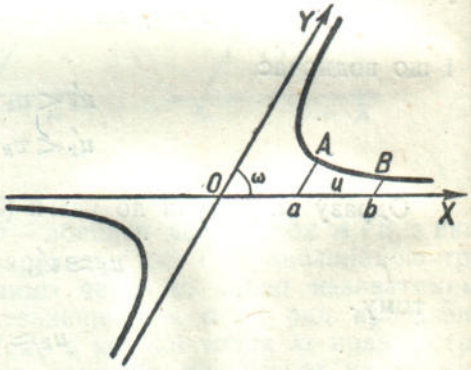

Рис. 108.

Теорема. **Площа кривої трапеції в косокутній системі координат виражається формулою:**

$$u = \sin \omega \int_{t_0}^{T} y\, dx,$$

Якщо система координат прямокутна, то $\sin\omega = 1$, і дістаємо знайому формулу.

Приклад. Нехай

$$xy = m$$

— рівняння гіперболи, віднесеної до своїх асимптот як до осей координат. Якщо з двох точок її A і B, абсциси яких a і b, проведемо ординати aA і bB, то для площі u фігури $aABb$ маємо:

$$u = \sin\omega \int_a^b y\,dx = \sin\omega \int_a^b \frac{m\,dx}{x} = m \sin\omega \ln\frac{b}{a}.$$

§ 149. Площа в полярних координатах.

Нехай PQ — крива. З точки O проведемо в точки A і B два радіус-вектори r' і r'', кут між якими нехай дорівнює ω. Фігуру AOB назвемо кривим сектором. Площу його позначимо через u. Якщо ω нескінченно маліє, то u теж нескінченно маліє (рис. 109).

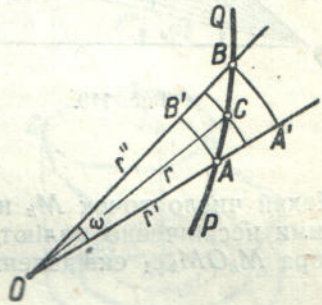

Рис. 109.

Всякий радіус-вектор r будьякої точки C, що лежить на кривій між точками A і B, називатимемо радіусом нашого сектора.

Обчислимо, чому еквівалентна площа u.

З O як з центра відповідно радіусами r' і r'' описуємо дуги AB' і BA'. Дістаємо кругові сектори AOB' і $A'OB$, площі яких позначимо через u' і u''. Маємо

$$u' < u < u'', \tag{1}$$

де

$$u' = \frac{1}{2} r'^2\omega, \quad u'' = \frac{1}{2} r''^2\omega. \tag{2}$$

Але геометрично зрозуміло, що коли ω нескінченно маліє, то різниці

$$r'^2 - r^2 \quad \text{і} \quad r''^2 - r^2$$

теж нескінченно маліють, а тому за теоремою про еквівалентність

$$u' \approx \frac{1}{2} r^2\omega, \quad u'' \approx \frac{1}{2} r^2\omega.$$

Отже,

$$u \approx u' \approx u'' \approx \frac{1}{2} r^2\omega,$$

і ми дістаємо теорему:

Площа нескінченно тонкого кривого сектора еквівалентна половині добутку квадрата його радіуса на його кут.

Отже, з погляду еквівалентності площу кривого сектора можна розглядати як площу кругового сектора. Нехай тепер

$$r = f(\omega)$$

— рівняння даної кривої (рис. 110). Ми припустимо, що ця крива перетинається всяким радіус-вектором тільки в одній точці.

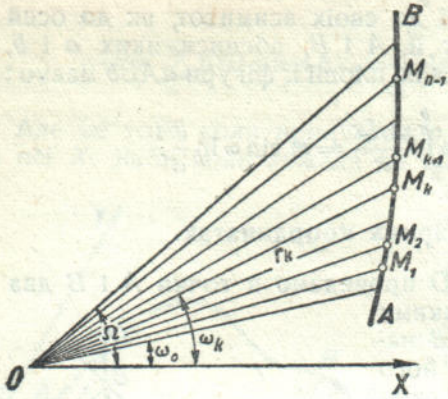

Рис. 110.

Відмітимо на кривій дві точки A і B з полярними кутами ω_0 і Ω. Вставимо між A і B ряд проміжних точок M_1, $M_2, \ldots, M_{n-1}$. Сполучивши кожну з них з полюсом радіус-вектором, дістанемо систему кривих секторів. Полярні координати точки M позначимо через r_k, ω. Отже,

$$r_k = f(\omega_k).$$

Нехай число точок M_k нескінченно зростає так, що віддалі між ними нескінченно маліють. Тоді площа нескінченно тонкого сектора M_kOM_{k+1} еквівалентна

$$\frac{1}{2} r_k^2 \Delta\omega_k,$$

а тому, знову за другим принципом,

$$u = \lim \sum_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\omega_k = \lim \sum_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} f(\omega_k)^2 \Delta\omega_k = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} f(\omega)^2 \, d\omega.$$

Дістаємо теорему:

Площа кривого сектора в полярних координатах виражається формулою:

$$u = \frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\Omega} r^2 \, d\omega,$$

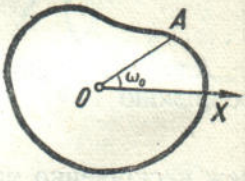

Рис. 111.

де ω_0 і Ω — полярні кути крайніх радіус-векторів сектора.

Очевидно, що коли дана площа u обмежена замкненим навколо полюса контуром, то треба прийняти

$$\Omega = \omega_0 + 2\pi,$$

де ω_0 — полярний кут довільно дібраної точки A на даному контурі (рис. 111).

§ 150. Об'єм тіла довільної форми.

Нехай маємо тіло, обмежене деякою замкненою поверхнею S довільної форми. Переріжемо його двома площинами P і P', паралельними між собою (рис. 112). Ними з даного тіла виріжеться якась частина його, яку назвемо шаром. Взагалі

шаром називатимемо всяке тіло, обмежене деякою бічною поверхнею і двома паралельними площинами, що називаються основами шару. Віддаль між цими площинами назвемо висотою шару.

Позначимо через v об'єм шару, через h — його висоту, через S' — ту частину даної поверхні, яка міститься між площинами P і P' і яка є бічною поверхнею шару. Нехай C і C' — контури, по яких поверхня S перерізається площинами P і P'. Площу, обмежену контуром C, позначимо через u.

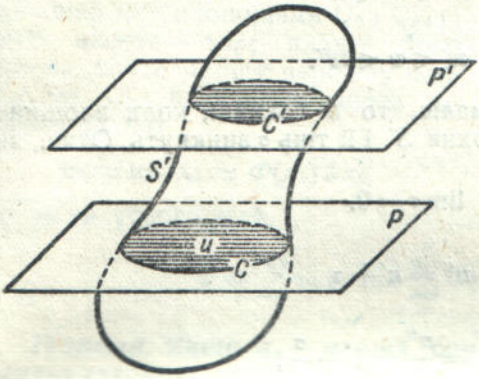

Рис. 112.

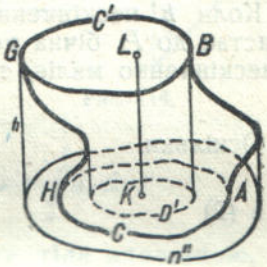

Рис. 113.

Одночасно з шаром розглянемо прямий циліндр, основою і висотою якого є основа u шару і його висота h. Якщо w — об'єм цього циліндра, то

$$w = uh.$$

Доведемо, що коли h нескінченно мале, то

$$v = w.$$

Поверхня S' може бути всякої форми. Для кращого уявлення припустимо, що площини P і P' горизонтальні (рис. 113) і що AB і HG — ті криві, по яких поверхня S' перерізається площиною рисунка, яку вважаємо вертикальною. Всякою іншою вертикальною площиною поверхня S' переріжеться по кривій більш або менш складної форми*. Спроектуємо поверхню S' на площину P, тобто з кожної точки поверхні S' опустимо перпендикуляр на площину P. Позначимо через σ ту частину площини P, яка вкриється проекціями всіх точок поверхні S',

* В окремому випадку поверхня S' може бути утворена обертанням кривої GH навколо якоїсь осі KL.

і цю частину назвемо **тінню**, бо якщо уявити, що поверхня S' освітлена зверху вертикальними променями, то її тінь вкриє саме цю частину σ. Через D' і D'' позначимо внутрішній і зовнішній контури тіні, через u' і u'' — площі, обмежені цими контурами. Зрозуміло, що

$$u' < u < u''. \tag{1}$$

Побудуємо прямий циліндр з висотою h, основою якого є площа u', і прямий циліндр з тією ж висотою, основою якого є площа u''. Якщо w' і w'' — об'єми цих циліндрів, то

$$w' = u'h, \quad w'' = u''h. \tag{2}$$

Геометрично зрозуміло, що

$$w' < w < w'' \tag{3}$$

і що

$$w' < v < w''. \tag{4}$$

Коли h нескінченно маліє, то в границі, коли площина P' пристає до P, бічна поверхня S' і її тінь σ зникнуть. Отже, якщо h нескінченно маліє, то

$$\lim \sigma = 0. \tag{5}$$

Оскільки

$$u'' = u' + \sigma,$$

то з (2)

$$\frac{w''}{w'} = \frac{u''}{u'} = 1 + \frac{\sigma}{u'},$$

а тому коли $h \to 0$, то

$$\lim \frac{w''}{w'} = 1.$$

Отже,

$$w'' \approx w'.$$

Тепер з (3) і (4) робимо висновок:

$$w \approx w' \text{ і } v \approx w',$$

а тому

$$v \approx w, \text{ тобто } v \approx uh. \tag{6}$$

Якщо шар, висота якого нескінченно мала, умовимось називати нескінченно тонким шаром, то (6) дає теорему:

Нескінченно тонкий шар еквівалентний прямому циліндрові, основою і висотою якого є основа і висота шару.

Отже, з погляду еквівалентності нескінченно тонкий шар можна розглядати як прямий циліндр.

Тепер неважко обчислити об'єм тіла, обмеженого замкненою поверхнею S довільної форми (рис. 114). Якщо проведемо пло-

щину Q перпендикулярно до осі абсцис у точці x, то контур, по якому вона переріже поверхню S, позначимо через D_x. Площа, обмежена цим контуром, називається площею перерізу. Її позначимо через u_x. Очевидно, що u_x — функція x. Нехай

$$u_x = \Phi(x) \tag{7}$$

і нехай a і b — ті границі, в яких треба змінювати x, щоб площина Q перерізала тіло.

Поділяємо інтервал (a, b) на нескінченно малі підінтервали точками x_k і через кожну точку x_k проводимо площину Q_k, перпендикулярну до осі X. Цими площинами тіло розіб'ється на нескінченно тонкі шари. Нехай взагалі v_k — шар між площинами Q_k і Q_{k+1}; його висота — Δx_k; площу його основи, тобто площу перерізу площиною Q_k, позначимо через u_k. Через те що

$$v_k \approx u_k \Delta x_k \approx \Phi(x_k) \Delta x_k,$$

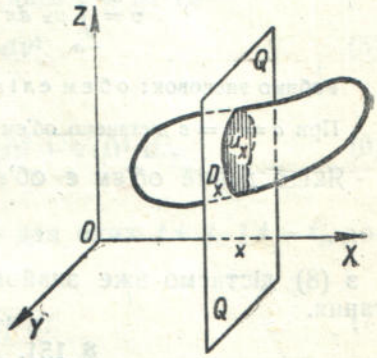

Рис. 114.

то об'єм усього тіла

$$v = \sum v_k = \lim \sum_a^b \Phi(x)\, dx = \int_a^b u_x\, dx.$$

Теорема. **Якщо u_x — площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі X, то його об'єм v, обмежений площинами $x = a$ і $y = b$, де $a < b$, визначається за формулою**

$$v = \int_a^b u_x\, dx, \tag{8}$$

де u_x — функція x.

Корисно швидко виводити мислено цю формулу, міркуючи так: шар між площинами, перпендикулярними до осі в точках x і $x + dx$, еквівалентний $u_x\, dx$, а тому

$$v = \lim \sum_a^b u_x\, dx = \int_a^b u_x\, dx,$$

тобто (8).

Обчислимо об'єм v еліпсоїда:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Площиною через точку x він перерізається по еліпсу

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

півосі якого дорівнюють

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

а тому його площа

$$u_x=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

і, отже,

$$v=\int_{-a}^{+a}u_x\,dx=\int_{-a}^{+a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx.$$

Робимо висновок: об'єм еліпсоїда дорівнює $\frac{4}{3}\pi abc$.

При $a=b=c$ дістанемо об'єм кулі.

Якщо даний об'єм є об'єм тіла обертання, то зрозуміло, що

$$u=\pi y^2,$$

і з (8) дістаємо вже знайому формулу для об'єму тіла обертання.

§ 151. Довжина дуги.

Відносно дуги ми довели (стор. 64), що коли крива дана рівнянням

$$y=f(x)$$

і коли початком відліку змінної дуги є точка з абсцисою a, то

$$s=\int_a^x\sqrt{1+y'^2}\,dx, \tag{1}$$

звідки

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx,\quad ds^2=dx^2+dy^2. \tag{2}$$

Припустимо тепер, що крива дана параметрично рівняннями

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

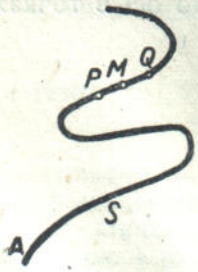

Рис. 115.

і нехай за початок відліку дуг прийнято точку A, для якої $t=t_0$ (рис. 115). Для такої кривої y взагалі не є однозначною функцією x. Але візьмемо на кривій точку M з довільним значенням параметра t і відмітимо навколо неї настільки малу дугу PQ, щоб для неї y був однозначною функцією x. Тоді ми можемо для цієї дуги, розглядаючи y як функцію x, прикласти формулу (2), яку перепишемо в такій формі:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \tag{3}$$

В цій формулі стоїть відношення диференціалів, отже, формула лишається правильною при всякому виборі незалежного змінного, а тому в ній можемо знову розглядати x і y як функції t. Робимо висновок:

Якщо для кривої

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{4}$$

початком відліку дуг є точка, для якої $t = t_0$, то

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{5}$$

а тому

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt, \tag{6}$$

і, отже, довжина дуги між точками, для яких $t = t_1$ і $t = t_2$, дорівнює

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt. \tag{7}$$

Формула (1) є окремим випадком формули (6), коли параметром є x.

Спираючись на одержаний результат, ми можемо довести таку теорему:

Границя відношення нескінченно маліючої дуги без особливих точок до її хорди дорівнює одиниці.

При цьому особливою точкою кривої, визначеної рівняннями (4), називають усяку точку, для якої

$$\varphi'(t) = \psi'(t) = 0.$$

Нехай $M'(x', y'; t')$ і $M''(x'', y''; t'')$ — дві точки на кривій (рис. 116). Тоді згідно з (7)

$$\text{дуга } M'M'' = \int_{t'}^{t''} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt.$$

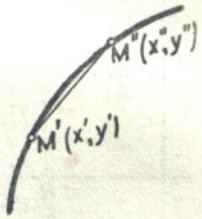

Рис. 116.

Прикладаючи ж теорему про середнє значення інтеграла, маємо:

$$\text{дуга } M'M'' = (t'' - t')\sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2},$$

де τ — якесь число проміжне між t' і t''. Обчисляємо довжину хорди $M'M''$. Прикладаючи теорему Лагранжа, послідовно знаходимо:

$$\begin{aligned} \text{хорда } M'M'' &= \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} = \\ &= \sqrt{[\varphi(t'') - \varphi(t')]^2 + [\psi(t'') - \psi(t')]^2} = \\ &= (t'' - t')\sqrt{\varphi'(\tau')^2 + \psi'(\tau'')^2}, \end{aligned}$$

де τ' і τ'' лежать в інтервалі (t', t''). Отже,

$$\frac{\text{дуга } M'M''}{\text{хорда } M'M''} = \frac{\sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2}}{\sqrt{\varphi'(\tau')^2 + \psi'(\tau'')^2}}.$$

Переходимо до границі, припускаючи, що M'' прямує до M'. Через те що $\lim \tau = \lim \tau' = \lim \tau'' = t'$, то

$$\lim \frac{\text{дуга}}{\text{хорда}} = \frac{\sqrt{\varphi'(t')^2 + \psi'(t')^2}}{\sqrt{\varphi'(t')^2 + \psi'(t')^2}}, \tag{8}$$

і, отже,

$$\lim \frac{\text{дуга}}{\text{хорда}} = 1, \tag{9}$$

якщо тільки випадково в правій частині (8) чисельник і знаменник не дорівнюють нулеві, що можливо тільки при умові, що

$$\varphi'(t') = \psi'(t') = 0.$$

Теорема доведена.

§ 152. Поверхня тіла обертання.

Вище (§ 29) ми визначили поверхню обертання, розглядаючи перервну ламану, описану навколо кривої. Але природнішим буде такий шлях.

Нехай крива AB, рівняння якої

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$$

обертається навколо осі X; ця крива може перетинатись прямою, паралельною осі X, не тільки в одній, але і в кількох точках.

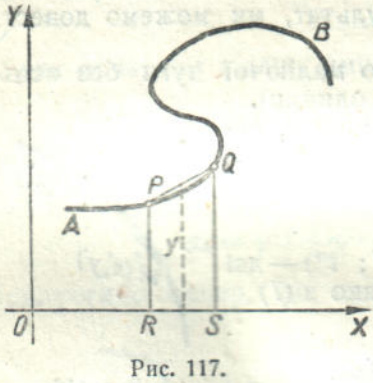

Рис. 117.

При своєму обертанні крива опише якусь поверхню, площу якої позначимо через S. Обчислимо її. Але спочатку ми повинні умовитись, що розуміти під площею поверхні обертання.

Під площею поверхні обертання розумітимемо границю площі тієї поверхні, яка одержується від обертання ламаної лінії, вписаної в дану криву в припущенні, що ланки цієї ламаної кривої нескінченно маліють.

Це означення в той же час вказує той шлях, яким ми повинні йти для обчислення площі поверхні обертання.

Вписуємо в дану криву ламану лінію. Нехай PQ — яканебудь її ланка. При обертанні навколо осі X ця ланка опише бічну поверхню зрізаного конуса, яку позначимо через p. За відомою формулою з елементарної геометрії маємо:

$$p = \pi (PR + QS)\, PQ. \tag{1}$$

Нехай y — ордината якоїнебудь точки дуги PQ.

В границі різниця

$$(PR + QS) - 2y = (PR - y) + (QS - y),$$

очевидно, дорівнює нулеві. Отже, в (1) фактор $PR + QS$ може бути замінений фактором $2y$, а тому

$$p \approx 2\pi y PQ. \tag{2}$$

Нехай s — довжина дуги AP. Тоді дуга $PQ = \Delta s$. Оскільки в (2) хорду PQ можна замінити еквівалентною їй дугою Δs, то

$$p \approx 2\pi y \Delta s. \tag{3}$$

Отже, з погляду еквівалентності можна розглядати дугу Δs як пряму, що при обертанні описує поверхню елементарного конуса, який у свою чергу можна розглядати як циліндр, радіус основи якого y, а висота Δs.

Нехай довжина всієї кривої AB дорівнює l, і деякий час розглядатимемо y як функцію s. Нехай $y = \Phi(s)$.

Згідно з (3), якщо S — площа всієї поверхні, утвореної обертанням кривої AB, то

$$S = \lim \sum_0^l 2\pi y \Delta s = \lim \sum_0^l 2\pi \Phi(s) \Delta s = \int_0^l 2\pi \Phi(s)\, ds,$$

тобто

$$S = \int_0^l 2\pi y\, ds. \tag{4}$$

Але коли x і y — функції параметра t, то і s — функція t. Тому, якщо в (4) ми станемо розглядати s як функцію t, то за теоремою про підставляння

$$\int_0^l 2\pi y\, ds = \int_{t_0}^T 2\pi y\, ds,$$

де в лівій частині y — функція s, а в правій y і s — функції t. Тепер (4) дає теорему:

Площа поверхні обертання кривої визначається за формулою

$$S = \int_{t_0}^T 2\pi y\, ds,$$

де y і s розглядаються як функції параметра.

Коли ж крива дана рівнянням $y = f(x)$, то маємо:

$$S = \int_{t_0}^T 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

§ 153. Маса і центр ваги лінії.

Як матеріальних поверхень, так і матеріальних ліній у природі не існує. В практичному житті матеріальною лінією ми називаємо всяке дуже тонке і довге тіло, при міркуваннях про яке ми зважаємо тільки на його довжину. Тому з математичного погляду матеріальна лінія є геометрична лінія, кожну частину якої ми уявляємо пов'язаною з речовиною. Цю речовину вважаємо за таку, що ніби належить лінії, ніби міститься в ній.

Якщо m — маса речовини, що міститься в дузі l даної кривої AB, то відношення

$$\frac{m}{l}$$

називають середньою лінійною густиною дуги l. Границя цього відношення в припущенні, що дуга l нескінченно маліє, перетворюючись у границі в точку P, називається справжньою лінійною густиною в точці P.

Позначаючи цю густину через ρ, маємо:

$$\lim \frac{m}{l} = \rho. \qquad (1)$$

Нехай до переходу до границі

$$\frac{m}{l} = \rho + \varepsilon, \quad m = l\rho + \varepsilon\rho,$$

де ε нескінченно мале, якщо l нескінченно мале. З (1) випливає, що

$$\lim \frac{m}{\rho l} = 1,$$

тому $m \approx \rho l$ і одержуємо таку теорему:

Теорема. **Маса речовини m, що міститься в нескінченно малій дузі l, еквівалентна добуткові цієї дуги на густину речовини в будьякій точці цієї дуги**

$$m \approx l\rho.$$

Нехай AB — дана матеріальна лінія, що лежить у площині XY; через s позначимо дугу AP від точки A, прийнятої за початок відліку дуг, до змінної точки P (рис. 118). Якщо через ρ позначимо густину в точці P, то очевидно, що ρ можна розглядати як функцію дуги s.

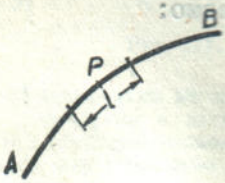

Рис. 118.

Нехай

$$\rho = \Phi(s).$$

Поставимо таку задачу: знаючи густину в кожній точці кривої, обчислити масу всієї кривої і координати її центра ваги.

Ми знаємо, що коли ми маємо систему ізольованих матеріальних точок, маси яких

$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n,$$

і якщо $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$

— координати їх, то координати центра ваги цієї системи визначаються за формулами:

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum m_kx_k}{\sum m_k},$$
$$y_c = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum m_ky_k}{\sum m_k}. \qquad (2)$$

Але ці формули виведені для системи ізольованих точок. Нам потрібно їх видозмінити так, щоб вони були придатні і для мас, розміщених неперервно.

На даній кривій AB (рис. 119) вставимо ряд проміжних точок A_1, A_2, ..., A_{n-1}. Вважаючи точку A початком відліку дуг, будемо деякий час розглядати координати точки кривої як функції дуги s.

Нехай

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s).$$

Отже, дуга s є параметром. Якщо s_k — значення цього параметра для точки A_k, то довжина дуги A_kA_{k+1} дорівнює $s_{k+1} - s_k = \Delta s_k$.

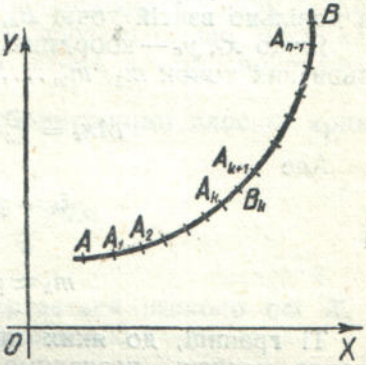

Рис. 119.

Нехай B_k — довільно взята точка на дузі A_kA_{k+1}. Через s'_k, ξ_k, η_k позначимо числові значення дуги s і координат для цієї точки B_k. Зрозуміло, що

$$\xi_k = \varphi(s'_k), \quad \eta_k = \psi(s'_k).$$

Якщо ρ_k — густина у точці B_k, то

$$\rho_k = \Phi(s'_k).$$

Позначимо через m_k масу нескінченно малої дуги A_kA_{k+1}, через M і l — масу і довжину всієї лінії AB. Ми маємо:

$$M = \sum m_k.$$

Ця рівність правильна, на які дуги Δs_k ми не поділили б усю лінію AB. Припускаючи ж, що число точок A_k нескінченно зростає так, що всі дуги Δs_k нескінченно маліють, ми маємо:

$$M = \lim \sum m_k.$$

Але коли дуга Δs_k нескінченно мала, то, як ми бачили,

$$m_k \approx \rho_k \Delta s_k,$$

а тому

$$M = \lim \sum_0^l \rho_k \Delta s_k = \lim \sum_0^l \Phi(s'_k)\, \Delta s_k.$$

Отже,

$$M = \int_0^l \Phi(s)\,ds = \int_0^l \rho\,ds, \tag{3}$$

і ми дістали формулу для обчислення маси всієї лінії через густину.

Щоб дістати формули для центра ваги, ми замінимо неперервну матеріальну лінію AB системою ізольованих точок, а саме, кожну нескінченно малу дугу Δs_k замінимо матеріальною точкою, маса якої дорівнює масі m_k цієї дуги, і помістимо цю точку в довільно взятій точці B_k, що лежить на дузі A_kA_{k+1}.

Якщо x_c, y_c — координати центра ваги цієї системи вже ізольованих точок $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то

$$Mx_c = \sum m_k\xi_k, \quad My_c = \sum m_k\eta_k. \tag{4}$$

Але

$$\xi_k = \varphi(s_k'), \quad \eta_k = \psi(s_k'),$$

і

$$m_k \approx \rho_k\Delta s_k \approx \Phi(s_k')\,\Delta s_k.$$

Ті границі, до яких прямують x_c, y_c, коли дуги Δs_k нескінченно маліють, позначимо через ξ, η і приймемо їх за координати центра ваги всієї лінії AB. З (3) маємо:

$$M\xi = \lim \sum m_k\xi_k = \lim \sum \rho_k\xi_k = \lim \sum \Phi(s_k')\varphi(s_k')\Delta s_k = \int_0^l \Phi(s)\,\varphi(s)\,ds,$$

і, отже, коротше

$$M\xi = \int_0^l \rho x\,ds. \tag{5}$$

Очевидно, що аналогічно

$$M\eta = \int_0^l \rho y\,ds, \tag{6}$$

де під знаком інтеграла x, y і ρ треба розглядати як функції дуги s.

Припустимо тепер, що координати x, y точки кривої дано як функції параметра t і що при русі по кривій параметр зростає від t_0 до T. В такому випадку s — теж функція t. Мислено замінюючи s в (3), (5) і (6) цією функцією, дістанемо за теоремою про підставляння:

$$M = \int_{t_0}^T \rho\,ds, \quad M\xi = \int_{t_0}^T \rho x\,ds, \quad M\eta = \int_{t_0}^T \rho y\,ds, \tag{7}$$

де x і ρ — вже функції t. Дістаємо теорему:

Теорема. **Якщо t_0 і T — значення параметра для початку і кінця матеріальної лінії AB, то її маса AB і координати ξ, η центра її маси визначаються за формулами:**

$$M=\int \rho\, ds, \quad M\xi=\int \rho x\, ds, \quad M\eta=\int \rho y\, ds, \tag{8}$$

де густина ρ і координати x, y треба розглядати як функції параметра.

Якщо $\rho=1$, то центр ваги дістає назву центра ваги самої геометричної кривої. Отже, центром ваги геометричної кривої називається та точка, яка служитиме центром ваги для кривої, якщо її розглядати як матеріальну з однорідною густиною, рівною одиниці. Але коли всюди $\rho=1$, то зрозуміло, що маса всієї кривої числово дорівнює її довжині: $M=l$, а тому, покладаючи в (8) $\rho=1$, робимо висновок:

Координати ξ, η центра ваги геометричної плоскої кривої визначаються за формулами:

$$l\xi=\int_{t_0}^{T} x\, ds, \quad l\eta=\int_{t_0}^{T} y\, ds, \tag{9}$$

де l — довжина кривої.

Якщо крива AB (рис. 117) обертається навколо осі X, то вона опише поверхню обертання, площа якої

$$S=2\pi\int_{t_0}^{T} y\, ds. \tag{10}$$

Порівнюючи з (9), знаходимо

$$S=2\pi\eta\cdot l. \tag{11}$$

Але $2\pi\eta$ є довжина кола, що його описує при обертанні навколо осі X центр ваги G кривої, а тому

Теорема Гульдена. **Площа поверхні, описуваної при обертанні кривої навколо осі, дорівнює довжині кривої, помноженій на довжину кола, що описується центром ваги кривої.**

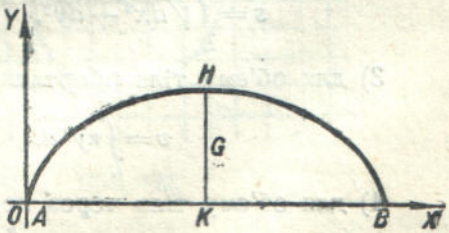

Рис. 120.

Ця теорема часто дає можливість легко визначити центр ваги деяких простих ліній, знаючи поверхню, утворену їх обертанням.

При обчисленні положення центра ваги кривої часто корисно користуватись тим, що коли крива симетрична відносно деякої осі, то центр ваги її лежить на цій осі. Обчислимо, наприклад, центр ваги всієї циклоїди

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t),$$

а саме, її дуги від $t_0=0$ до $t=2\pi$. Маємо:

$$dx = a(1-\cos t)\,dt, \quad dy = a\sin t\,dt,$$

$$ds = 2a\sin\frac{t}{2}dt, \quad l = \int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 8a,$$

$$l\xi = \int_0^{2\pi} x\,ds = \int_0^{2\pi} 2a^2(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\,dt = 8\pi a^2,$$

$$l\eta = \int_0^{2\pi} y\,ds = \int_0^{2\pi} 2a^2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{32a^2}{3},$$

звідки

$$\xi = \pi a, \quad \eta = \frac{4a}{3}.$$

Оскільки $AB = 2\pi a$, то $\xi = \frac{AB}{2}$. Отже, центр ваги циклоіди лежить на її осі HK, що є очевидним і без обчислень, через симетрію циклоіди відносно своєї осі.

§ 154. Висновок.

1. Площа нескінченно тонкої смужки еквівалентна добуткові її довжини на її висоту.

Площа нескінченно тонкого кривого сектора еквівалентна половині добутку квадрата його радіуса на його кут.

Довжина нескінченно малої дуги еквівалентна її хорді.

Об'єм нескінченно тонкого шару еквівалентний добуткові площі його основи на висоту.

2. Маємо формули:

1) для площі в декартових і полярних координатах

$$u = \int_{t_0}^{t} y\,dx, \quad u = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{1}{2} r^2 d\omega;$$

2) для довжини дуги в декартових і полярних координатах

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{dx^2 + dy^2}, \qquad s = \int_{\omega_0}^{\omega} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\omega;$$

3) для об'єму тіла обертання і площі його поверхні

$$v = \int_{t_0}^{T} \pi y^2\,dx, \quad S = \int_{t_0}^{T} 2\pi y\,ds;$$

4) для об'єму тіла через переріз

$$v = \int_a^b u_x\,dx;$$

5) для маси і центра маси лінії

$$M = \int \rho\,ds, \quad M\xi = \int \rho x\,ds, \quad M\eta = \int \rho y\,ds.$$

ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ.

Задача про квадратуру площ привела нас до поняття означеного інтеграла від функції одного змінного. Задача про кубатуру тіл приводить до поняття означеного інтеграла від функції двох змінних.

§ 155. Елементарні площинки.

Всяку досить малу частину площини, обмежену замкненим контуром, називатимемо елементарною площинкою.

Розміром, або діаметром, площинки називається довжина найбільшої хорди, яку можна провести між двома будь-якими точками контура, що обмежує площинку.

Так, наприклад, розмір площинки на рисунку 121 дорівнює довжині хорди *ab*, розмір еліпса, очевидно, дорівнює довжині його великої осі, розмір круга дорівнює його діаметрові, розмір прямокутника дорівнює його діагоналі.

Рис. 121.

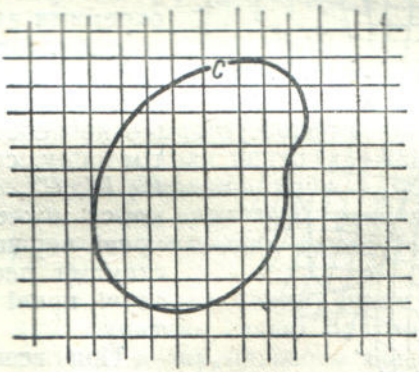

Рис. 122.

Всяку частину *A* площини, обмежену замкненим контуром *C* (рис. 122), ми можемо поділити на елементарні площинки найрізноманітнішими способами. Так, наприклад, ми можемо поділити площу *A* на елементарні площинки, провівши спочатку одну систему прямих, паралельних між собою, а потім другу систему прямих, перпендикулярних до прямих першої системи. Цими двома системами прямих уся площина поділиться на пря-

мокутники. В окремому випадку, якщо прямі проведені на одній і тій же віддалі в обох системах, ми матимемо квадрати.

Якщо прямі другої системи, будучи паралельними між собою, не перпендикулярні до прямих першої системи, то замість прямокутників ми матимемо елементарні паралелограми (рис. 123).

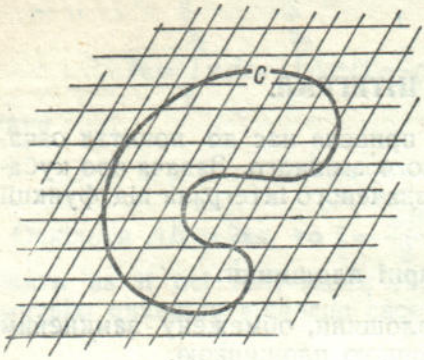

Рис. 123.

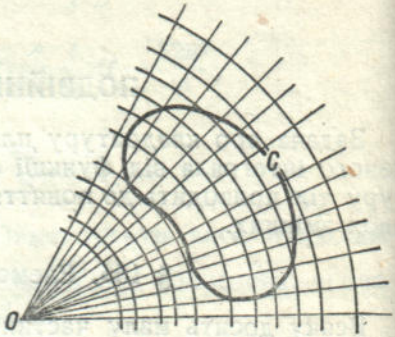

Рис. 124.

Часто ми будемо користуватись також таким способом поділу площі. З точки O як полюса проводимо систему концентричних кіл, якими площина поділиться на кільця. Провівши потім з O систему променів (рис. 124), ми поділимо площину на криві чотирикутники.

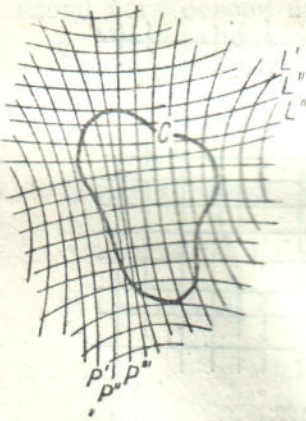

Рис. 125.

Всі розглянуті способи дробіння є окремими випадками такого загального способу. Ми проводимо (рис. 125) спочатку систему кривих L', L'', L''',... зовсім довільної форми, але тільки таких, що не перетинаються між собою, а потім іншу систему якихнебудь кривих P', P'', P''',..., які також не перетинаються між собою, але перетинають усі криві першої системи. Цими двома системами площа поділиться на елементарні криві чотирикутники загального типу.

При всякому способі дробіння всі елементарні площинки відносно даної фігури A поділяться на три класи: на внутрішні, зовнішні і граничні. Суму всіх граничних площинок позначимо через g. При цьому **граничною площинкою** ми називатимемо **всяку площинку, яка має хоча б тільки одну точку, спільну з контуром.**

Позначимо через λ найбільший з усіх розмірів елементарних площинок і уявімо такий процес: поділивши всю площину за якимнебудь законом на елементарні площинки і обчисливши

суму всіх граничних площинок, ми після цього знову поділяємо всю площину за якимнебудь законом на елементарні площинки і обчисляємо суму граничних площинок для цього нового поділу, і так продовжуємо необмежено, переходячи послідовно від одного поділу площини до дальшого за ним поділу і обчисляючи для кожного поділу суму всіх граничних площинок. Легко переконатися, що є справедливою

Лема. **Якщо перехід від одного поділу площини на елементарні площинки до дальшого поділу відбувається за таким законом, що найбільший розмір площинок нескінченно маліє, то в такому випадку сума всіх граничних площинок теж нескінченно маліє.**

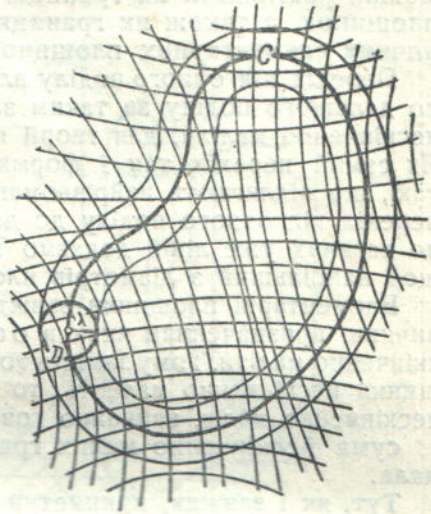

Рис. 126.

Справді, нехай при якомусь поділі найбільший розмір усіх елементарних площинок менший або дорівнює λ. Уявімо кружок D радіуса λ з центром у якійнебудь точці контура C і мислено змусимо центр цього кружка описати весь контур C. Тоді стає очевидним, що всі точки кружка опишуть на площині якусь смугу L*. Геометрично є очевидним, що коли λ нескінченно маліє, то площа смуги L теж нескінченно маліє. Але зрозуміло також, що всяка гранична площинка лежить усередині смужки L. Справді, якщо K — точка, спільна якійнебудь граничній площинці і контурові, то, коли центр кружка потрапить у цю точку, площинка буде всередині кружка, бо розмір її менший від радіуса кружка. Отже, сума всіх граничних площинок менша від площі нескінченно маліючої смуги L, а тому $\lim g = 0$.

Лема доведена. Її можна узагальнити таким чином: позначимо через g' ту суму, яку дістанемо, якщо братимемо від кожної граничної площинки тільки деяку, однаково яку, частину її. Очевидно, що $g' < g$, а тому

не тільки сума всіх граничних площинок, але також і сума будьяких довільно взятих частин цих площинок у границі дорівнює нулеві.

Нехай тепер s — сума всіх внутрішніх елементарних площинок. Через S позначимо суму як усіх внутрішніх, так і всіх граничних площинок. Отже,

$$S = s + g.$$

* Якщо уявити собі, що кружок зроблений з картону і що сторона його, прикладена до рисунка, вкрита чорнилом, то слід чорнила дасть якраз смугу L.

Нехай, нарешті, A — площа фігури, обмеженої контуром C. Геометрично є очевидними нерівності:

$$A - s < g, \quad S - A < g,$$

і через те що g в границі дорівнює нулеві, то

$$\lim s = A, \quad \lim S = A,$$

а звідси випливає

Теорема. **Всяку площу, обмежену замкненим контуром, можна розглядати як границю суми внутрішніх елементарних площинок, а також як границю суми всіх внутрішніх і граничних елементарних площинок.**

Перехід від одного поділу площини на елементарні площинки до дальшого поділу за таким законом, щоб розміри площинок нескінченно маліли, для теорії подвійних інтегралів є основним. Як самий перехід, так і форми площинок можна розуміти як такі, що підлягають найрізноманітнішим законам. Найпростіший перехід від одного поділу до дальшого полягає в тому, що ми до наявних уже ліній додаємо нові, збільшуючи число їх так, щоб найбільший з діаметрів площинок нескінченно малів.

Елементарні площинки завжди з'являються як допоміжні величини, призначенням яких в остаточних формулах є нескінченно маліти. Тому замість того, щоб говорити, що коли площинки нескінченно маліють, то сума граничних площинок теж нескінченно маліє, звичайно говорять:

сума нескінченно малих граничних площинок нескінченно мала.

Тут, як і завжди, прикметник „нескінченно мала" вказує не стільки на малий розмір площинок, скільки на роль їх у доведеннях.

§ 156. Об'єми циліндра і конуса.

Як відомо, циліндрична поверхня одержується так: уявляємо, що пряма, яку називаємо твірною, переміщаючись у просторі паралельно самій собі, в той же час постійно проходить через якунебудь точку даної кривої. Слід цієї прямої в просторі і дає циліндричну поверхню.

Отже,

циліндрична поверхня є геометричне місце паралельних між собою прямих, що проходять через усі точки даної кривої.

Якщо дана крива належить до класу замкнених кривих, то ми матимемо замкнену циліндричну поверхню.

Нехай маємо якусь замкнену циліндричну поверхню (рис. 127). Переріжемо її двома площинами, паралельними між собою і перпендикулярними до твірної. Ми одержимо тіло, обмежене з боків циліндричною поверхнею і, крім того, двома площинами. Це буде прямий циліндр. Частини площин, що обмежують прямий циліндр, називаються його основами. Очевидно, що ці пло-

щини перерізають циліндричну поверхню по двох зовсім тотожних кривих. Довжина твірної між основами називається висотою циліндра.

Нехай C — контур, що обмежує нижню основу циліндра. Позначимо через A площу основи, через H — висоту циліндра, через v — його об'єм. Поділимо площу основи на елементарні площинки, провівши дві системи прямих так, щоб прямі кожної системи були паралельні між собою і перпендикулярні до прямих іншої системи. Цими двома системами прямих уся площина основи поділиться на елементарні прямокутники. Частина з них лежатиме всередині контура C. Їх площі позначимо через $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Друга частина дасть нам граничні прямокутники. Площі їх позначимо через $q_1, q_2, q_3, \ldots$ Нехай, нарешті, як і раніше, s — сума площ усіх внутрішніх прямокутників, а S — сума всіх внутрішніх і всіх граничних прямокутників. Якщо ми уявимо собі, що число елементарних прямокутників нескінченно зростає так, що розміри їх в той же час нескінченно маліють, то, як ми бачили,

$$\lim s = \lim S = A. \qquad (1)$$

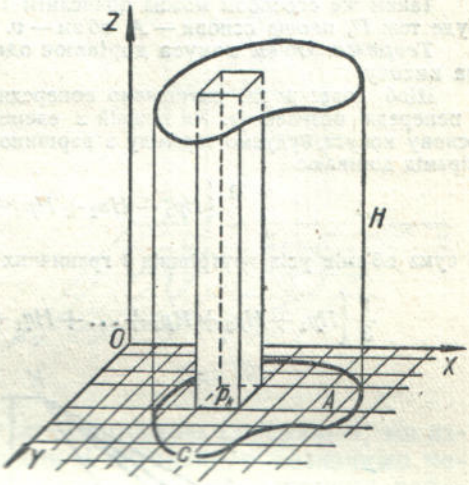

Рис. 127.

Візьмемо якунебудь елементарну площинку P_k і побудуємо на ній призму, **верхня основа якої пристає до верхньої основи циліндра**. Називатимемо цю призму елементарною призмою. Об'єм її, очевидно, дорівнює p_kH.

Уявляємо собі, що такі елементарні призми побудовані на всякій елементарній площинці, як на внутрішній, так і на граничній. Сума об'ємів усіх внутрішніх елементарних призм, очевидно, дорівнює:

$$p_1H + p_2H + p_3H + \ldots = Hs,$$

і зрозуміло, що ця сума менша об'єму циліндра.

Сума ж об'ємів усіх внутрішніх елементарних призм і всіх граничних дорівнює:

$$p_1H + p_2H + p_3H + \ldots + q_1H + q_2H + q_3H + \ldots = HS,$$

і очевидно, що ця сума більша об'єму циліндра. Таким чином, ми маємо нерівності:

$$Hs < v < HS.$$

Нехай число елементарних площинок нескінченно зростає так, що розміри їх нескінченно маліють. З (1) маємо:

$$H \lim s \leqq v \leqq H \lim S,$$

тобто

$$HA \leqq v \leqq HA,$$

а тому

$$v = AH.$$

Теорема. **Об'єм циліндра, твірні якого перпендикулярні до основи його, дорівнює добуткові площі основи на висоту.**

Таким же способом можна обчислити і об'єм конуса, висота якого нехай буде теж H, площа основи — A, об'єм — v.

Теорема. **Об'єм конуса дорівнює одній третині добутку площі основи на висоту.**

Щоб довести це, залишаємо попередній поділ на елементарні площинки і попередні позначення. На кожній з елементарних площинок, на які поділено основу конуса, будуємо піраміду з вершиною в K. Сума об'ємів усіх внутрішніх пірамід дорівнює

$$\frac{1}{3}\left\{Hp_1 + Hp_2 + Hp_3 + \ldots\right\} = \frac{1}{3} Hs,$$

а сума об'ємів усіх внутрішніх і граничних пірамід дорівнює

$$\frac{1}{3}\left\{Hp_1 + Hp_2 + Hp_3 + \ldots + Hq_1 + Hq_2 + Hq_3 + \ldots\right\} = \frac{1}{3} HS,$$

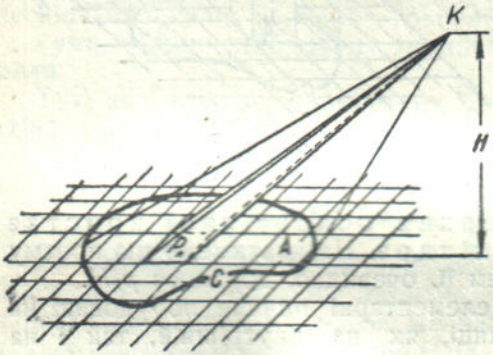

Рис. 128.

і оскільки є очевидним, що

$$\frac{1}{3} Hs < v < \frac{1}{3} HS,$$

то перехід до границі дає

$$\frac{1}{3} HA \leqq v \leqq \frac{1}{3} HA,$$

звідки випливає, що

$$v = \frac{1}{3} HA.$$

§ 157. Циліндроід.

Припустимо, що в просторі встановлена прямокутна система декартових осей координат, і нехай дана якась поверхня S, відносно якої припустимо, що вона всіма точками розміщена над площиною XY і що кожною прямою, паралельною осі Z, вона перерізається тільки в одній точці. Тоді рівняння цієї поверхні може бути представлене у формі:

$$z = f(x, y),$$

де $f(x, y)$ — неперервна функція двох змінних (рис. 129).

На площині XY проводимо якийсь замкнений контур C, на якому будуємо циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі Z. Ця поверхня переріже дану поверхню S по деякій замкненій кривій, яку позначимо через C'. Нехай S' — та частина поверхні S, яка обмежена контуром C'.

Ми тепер маємо тіло, яке з боків обмежене циліндричною поверхнею, знизу площиною XY, зверху ж частиною S' даної поверхні S. Тіла такої форми ми називатимемо циліндроїдами. В окремому випадку деякі твірні і навіть усі можуть дорівнювати нулеві. Так, наприклад, півкулю ми можемо розглядати як циліндроїд без бічної поверхні.

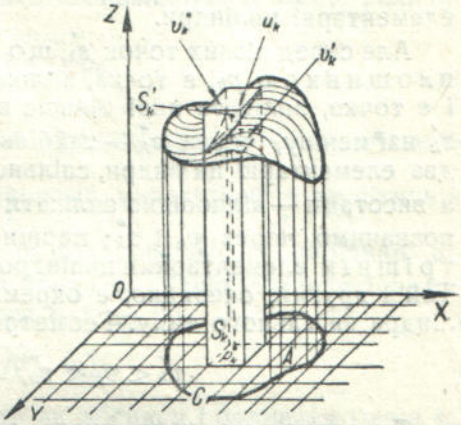

Рис. 129.

Щоб обчислити об'єм циліндроїда, зробимо так: позначаючи через A площу, обмежену на площині XY контуром C, поділяємо її на елементарні площинки p_1, p_2, p_3, ... довільної форми. Візьмемо з них якунебудь площинку p_k. На контурі її побудуємо циліндричну поверхню. Те тіло, яке з боків обмежене цією поверхнею, знизу — площинкою p_k, зверху ж — частиною поверхні S, ми назвемо елементарним циліндроїдом і об'єм його позначимо через u_k. Уявляємо, що на кожній елементарній площинці побудований відповідний до неї елементарний циліндроїд. Очевидно, що коли V — об'єм даного циліндроїда, то

$$V = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

або коротше,

$$V = \sum u_k.$$

Якби ми могли обчислити об'єм кожного елементарного циліндроїда, то ми могли б обчислити і об'єм даного циліндроїда. Але при обчисленні об'єму елементарного циліндроїда ми стикаємося з тими ж труднощами, як і при обчисленні об'єму даного циліндроїда. Легко, проте, бачити, що замість об'єму елементарного циліндроїда ми можемо взяти об'єм так званого елементарного циліндра, який ми дістанемо таким способом.

Посередині площинки p_k візьмемо довільно точку s_k з координатами ξ_k і η_k. Поставимо в ній перпендикуляр, який нехай перетне поверхню в точці s_k'. Аплікату* цієї точки позначимо через z_k. Якщо ми тепер через точку s_k' проведемо площину, паралельну

* Якщо x, y, z — координати точки M, то x — абсциса, y — ордината, z — апліката.

площині XY, то ми дістанемо циліндр, який знизу обмежений площинкою p_k, зверху — площиною, проведеною через точку s_k', з боків же — циліндричною поверхнею, побудованою на контурі, що обмежує площинку p_k. Об'єм цього циліндра ми позначимо через v_k і називатимемо його елементарним циліндром загального типу. Висотою його є апліката якоїнебудь точки s_k' тієї частини поверхні S, що лежить над площинкою p_k. Якщо ми братимемо різні точки s_k', то одержуватимемо різні елементарні циліндри.

Але серед різних точок s_k', що лежать на поверхні над площинкою p_k, є точка, апліката якої менша від усіх інших, і є точка, апліката якої більша від усіх інших. Позначимо через z_k' найменшу, через z_k'' — найбільшу з цих аплікат і побудуємо два елементарні циліндри, спільною основою яких є площинка p_k, а висотами — відповідно аплікати z_k' і z_k''. Об'єми цих циліндрів позначимо через v_k' і v_k''; перший циліндр називатимемо внутрішнім елементарним циліндром, а другий — виступаючим. Той і другий, очевидно, є окремий випадок елементарного циліндра загального типу. Геометрично очевидними є нерівності:

$$v_k' < v_k < v_k'', \quad v_k' < u_k < v_k''. \tag{1}$$

Доведемо, що коли число елементарних площинок нескінченно зростає так, що розміри їх нескінченно маліють, то v_k', v_k'', v_k, u_k еквівалентні між собою. Справді,

$$v_k' = p_k z_k', \quad v_k'' = p_k z_k''.$$

Маємо:

$$\frac{v_k''}{v_k'} = \frac{z_k''}{z_k'} = \frac{z_k' + (z_k'' - z_k')}{z_k'} = 1 + \frac{z_k'' - z_k'}{z_k'}.$$

Зрозуміло, що різниця $z_k'' - z_k'$ в границі дорівнює нулеві, отже,

$$\lim \frac{v_k''}{v_k'} = 1,$$

а тому

$$v_k'' \approx v_k.$$

З (1) випливає, що

$$u_k \approx v_k', \quad v_k \approx v_k',$$

і оскільки дві величини, еквівалентні третій, еквівалентні між собою, то u_k еквівалентне v_k.

Отже, ми довели:

Об'єм елементарного циліндроіда еквівалентний об'ємові елементарного циліндра.

Але коли V — об'єм даного циліндроіда, то рівність

$$V = \sum u_k \tag{2}$$

існує при всякому поділі площі A на елементарні площинки, а тому, якщо число елементарних площинок нескінченно зростає так, що розміри їх нескінченно маліють, то рівність (2) матиме місце і в границі:

$$V = \lim \sum u_k.$$

Але тепер у правій частині, згідно з другим принципом, всякий доданок u_k можемо замінити еквівалентною йому величиною v_k, а тому

$$V = \lim \sum v_k,$$

і ми маємо теорему:

Об'єм циліндроїда дорівнює границі суми об'ємів елементарних циліндрів.

Подивимось тепер, як ця теорема виразиться в аналітичній формі.

Об'єм елементарного циліндра, побудованого на площинці p_k, дорівнює $p_k z_k$, де z_k — апліката точки s_k. Якщо абсцису і ординату цієї точки позначимо через ξ_k і η_k, то

$$z_k = f(\xi_k, \eta_k),$$

де ξ_k і η_k ми можемо розглядати як абсцису і ординату точки s_k, взятої нами довільно на площинці p_k.

Таким чином, об'єм елементарного циліндра, побудованого на площинці p_k, дорівнює добуткові $f(\xi_k, \eta_k) p_k$, а тому, якщо через σ ми позначимо суму всіх елементарних об'ємів, то

$$\sigma = \sum f(\xi_k, \eta_k) p_k,$$

і ми можемо висловити таке твердження:

Щоб обчислити об'єм циліндроїда, обмеженого зверху поверхнею S, рівняння якої

$$z = f(x, y),$$

треба поділити основу циліндроїда на елементарні площинки і взяти суму всіх тих добутків, які дістанемо, помножуючи площу p_k кожної площинки на значення функції $f(\xi_k, \eta_k)$ в найдовільнішій точці s_k, що лежить на цій площинці. Границя отриманої таким способом суми

$$\sigma = \sum f(\xi_k, \eta_k) p_k$$

дорівнює об'ємові циліндроїда.

Таким чином, для обчислення об'ємів треба вміти знаходити границі сум типу σ; границі таких сум і називаються подвійними інтегралами. Саму суму σ назвемо інтегральною сумою.

§ 158. Подвійний інтеграл.

Поняття про подвійний інтеграл ми вводимо з допомогою такого означення:

Припускаємо, що на площині взято прямокутну систему декартових осей координат, і нехай $f(x, y)$ — якась дана функція двох змінних, неперервна в усіх точках якоїсь площі A, обмеженої одним або кількома контурами (на рисунку 130 трьома: зовнішнім C і внутрішніми C_1 і C_2).

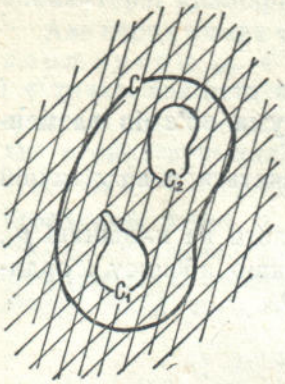

Рис. 130.

Площу A поділяємо на елементарні площинки $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Всередині кожної площинки p_k беремо довільно якунебудь точку з координатами ξ_k і η_k, і значення даної функції в цій точці помножуємо на величину площинки p_k. Дістаємо добуток

$$f(\xi_k, \eta_k)\, p_k.$$

Складаємо такі добутки для кожної елементарної площинки і беремо суму їх усіх. Нехай

$$\sigma = \sum f(\xi_k, \eta_k)\, p_k.$$

Границя суми σ в припущенні, що число елементарних площинок нескінченно зростає так, що розміри їх нескінченно маліють, називається подвійним інтегралом, поширеним на площу A, або взятим по площі A, і позначається так:

$$\iint\limits_A f(x, y)\, de.$$

Отже, за означенням

$$\iint\limits_A f(x, y)\, de = \lim \sum f(\xi_k, \eta_k)\, p_k.$$

Як ми бачимо, спочатку пишуть два знаки інтеграла*, потім пишуть добуток даної функції $f(x, y)$ на символ de. Цей символ має позначати площу довільно взятої елементарної площинки. Замість нього можна написати і всякий інший символ, надавши йому того ж змісту. Можна, наприклад, написати й так:

$$\iint\limits_A f(x, y) \cdot q.$$

Внизу знаків двох інтегралів іноді приписують символ, який повинен вказувати, по якій площі береться подвійний інтеграл. Але часто цього символа не пишуть.

* Чому два — з'ясується нижче.

Найбільш загальноприйняте ж позначення подвійного інтеграла таке:

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy,$$

де замість символа *de* стоїть добуток двох диференціалів. Таке позначення прийняте через такі міркування.

Для побудування суми σ ми можемо поділяти дану площу A на елементарні площинки якої завгодно форми. Очевидно, що одним з простіших поділів буде той поділ, який ми одержимо, якщо проведемо дві системи прямих відповідно паралельних осям координат. Тоді кожна елементарна площинка матиме форму прямокутника.

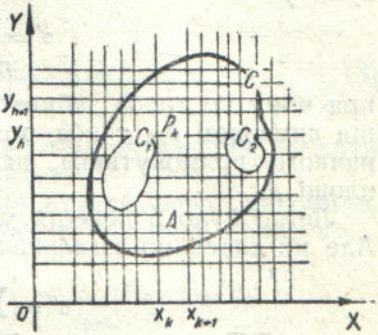

Рис. 131.

Нехай прямі, перпендикулярні до осі X, перетинають її в точках (рис. 131):

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n.$$

Прямі ж, перпендикулярні до осі Y, нехай перетинають її в точках

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_h,\ \ldots,\ y_{m-1},\ y_m.$$

Як завжди, покладаємо

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,\ \Delta y_h = y_{h+1} - y_h.$$

Ту частину площини, яка міститься між прямими, перпендикулярними до осі X у точках x_k, і x_{k+1}, умовимось називати вертикальною смужкою $(x_k,\ x_{k+1})$. Частину ж площини, що лежить між прямими, перпендикулярними до осі Y в точках y_h і y_{h+1}, називатимемо горизонтальною смужкою $(y_h,\ y_{h+1})$. Позначимо через $p_{k,\,h}$ площу того елементарного прямокутника, який лежить на перетині вертикальної смужки $(x_k,\ x_{k+1})$ і горизонтальної $(y_h,\ y_{h+1})$. Всередині нього візьмемо точку, координати якої нехай будуть ξ_{kh} і η_{kh}. При таких позначеннях сума σ прийме такий вигляд:

$$\sigma = \sum f(\xi_{kh},\ \eta_{kh})\, p_{kh},$$

при чому в правій частині ми беремо площу всього елементарного прямокутника, якщо він внутрішній, і тільки частину його, якщо він граничний.

Доведемо тепер, що при складанні суми σ ми за бажанням можемо брати або відкидати ті доданки, що відносяться до граничних прямокутників.

Для цього всі доданки суми σ поділимо на дві групи:

$$\sigma = \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh} + \sum_{\text{гран.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh}. \tag{1}$$

В першу групу ми збираємо доданки, що належать до внутрішніх елементарних прямокутників, у другу ж — доданки, що належать до граничних прямокутників. Нехай σ' — ця остання сума:

$$\sigma' = \sum_{\text{гран.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh}, \tag{2}$$

при чому не треба забувати, що в кожному доданку цієї суми під символом p_{kh} треба розуміти тільки ту частину площі граничного прямокутника, яка в той же час належить і даній площі A.

Легко було б довести, що в границі сума σ' дорівнює нулеві. Але ми доведемо загальнішу лему. Нехай

$$\sigma'' = \sum_{\text{гран.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) q_{kh}, \tag{3}$$

де доданки суми складені таким чином: від усякого граничного прямокутника p_{kh} ми беремо зовсім довільно деяку частину його, площу якої позначимо через q_{kh}. Цю величину q_{kh} ми помножимо на значення функції в якійнебудь точці граничного прямокутника p_{kh}, звичайно, в такій точці, яка в той же час належить і даній площі A. Дістанемо добуток $f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) q_{kh}$. Сума всіх таких добутків, складених для кожного граничного прямокутника, і є сума σ''.

Нехай тепер M — найбільше значення абсолютної величини даної функції на всій площі A. Отже, завжди

$$|f(\xi_{kh}, \eta_{kh})| \leqq M. \tag{4}$$

Через те що абсолютна величина суми дорівнює або менша суми абсолютних величин доданків, то з (3) маємо:

$$|\sigma''| \leqq \sum |f(\xi_{kh}, \eta_{kh})| q_{kh},$$

Беручи до уваги нерівність (4), дістаємо нерівність:

$$|\sigma''| \leqq M \sum q_{kh}, \tag{5}$$

або

$$|\sigma''| \leqq M g', \tag{6}$$

де g' — сума площ деяких частин граничних прямокутників. Ми знаємо, що сума площ усіх граничних прямокутників у границі дорівнює нулеві, а тому

$$\lim \sigma'' = 0.$$

Очевидно, що сума σ' є окремий випадок суми σ''. Отже,

$$\lim \sigma' = 0. \tag{7}$$

Повернемось тепер до рівності (1), яку перепишемо в такій формі:

$$\sigma = \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh} + \sigma'.$$

Завдяки (7), ми бачимо, що

$$\iint_A f(x, y)\, de = \lim \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh}. \tag{8}$$

Отже, при обчисленні границі суми σ ми можемо не зважати на граничні елементарні прямокутники.

Але границя суми σ'' теж дорівнює нулеві, тому зрозуміло, що замість рівності (8) ми можемо написати також рівність:

$$\iint_A f(x, y)\, de = \lim \left\{ \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh} + \sum_{\text{гран.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) q_{kh} \right\}.$$

Одержуємо теорему:

Теорема. **При обчисленні подвійного інтеграла як границі суми ми можемо при складанні суми або зовсім нехтувати граничними елементарними прямокутниками, або можемо замість кожного брати довільну частину його.**

Зауваживши це, при складанні суми σ зважимо тільки на внутрішні прямокутники. Маємо:

$$\iint_A f(x, y)\, de = \lim \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh}.$$

Але геометрично зрозуміло, що площа прямокутника p_{kh} визначиться за такою формулою:

$$p_{kh} = (x_{k+1} - x_k)(y_{h+1} - y_h) = \Delta x_k \Delta y_h,$$

а тому

$$\iint_A f(x, y)\, de = \lim \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) \Delta x_k \Delta y_h. \tag{9}$$

Досі ми припускали, що система прямих ліній проведена як завгодно, за єдиною умовою, що прямі кожної системи паралельні відповідній осі координат. Тепер ми припустимо, що всі прямі кожної системи містяться на рівних віддалях одна від одної. В такому випадку всі різниці

$$\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_{n-1}$$

рівні між собою, і спільну величину їх ми можемо позначити одним і тим же символом Δx.

Так само ми позначимо одним і тим же символом Δy спільну величину тепер рівних між собою різниць

$$\Delta y_0,\ \Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \ldots,\ \Delta y_{m-1}.$$

Тепер рівність (9) перепишеться в такій формі:

$$\iint\limits_A f(x,\ y)\,de = \lim \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh},\ \eta_{kh})\,\Delta x\,\Delta y.$$

Коли ж ми замість символів Δx, Δy як символів довільних приростів напишемо символи dx, dy, то дістанемо:

$$\iint\limits_A f(x,\ y)\,de = \lim \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_{kh},\ \eta_{kh})\,dx\,dy.$$

Коротше ж цю рівність можна переписати в такій формі:

$$\iint\limits_A f(x,\ y)\,de = \lim \sum f(x,\ y)\,dx\,dy,$$

що треба читати так: подвійний інтеграл є границя суми, доданки якої типу $f(x,\ y)\,dx\,dy$. Саме тому подвійний інтеграл і позначають звичайно так:

$$\iint\limits_A f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

§ 159. Основні властивості подвійних інтегралів.

Розглянемо основні властивості подвійних інтегралів. Ці властивості цілком аналогічні властивостям звичайних інтегралів. Починаючи доводити їх, ми спочатку умовимось щодо таких позначень.

Ми припустимо, що нам дана якась площа A, обмежена одним або кількома контурами C, C_1, C_2,... Уявляємо, що дана площа поділена на елементарні площинки p_1, p_2, ..., p_k, ... Всередині кожної площинки p_k беремо довільно точку, координати якої нехай будуть ξ_k, η_k. Тоді за означенням

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy = \lim \sum f(\xi_k,\ \eta_k)\,p_k. \tag{1}$$

Основні властивості подвійного інтеграла виражаються в таких теоремах.

1. *Теорема.* **Якщо A — площа тієї частини площини, по якій береться подвійний інтеграл, то**

$$\iint\limits_A dx\,dy = A. \tag{2}$$

Справді, покладемо, що в рівності (1) функція $f(x,\ y)$ тотожно дорівнює одиниці. Маємо

$$\iint\limits_A dx\,dy = \lim \sum p_k. \tag{3}$$

Але на які б елементарні площинки не була поділена площа A, завжди

$$\lim \sum p_k = A,$$

а тому (2).

2. *Теорема про середнє значення інтеграла.* **Всередині площі інтеграції завжди є якась така точка з координатами ξ, η, що**

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = f(\xi, \eta) \cdot A. \tag{4}$$

Позначимо через m і M найбільше і найменше з усіх тих значень, які дана функція $f(x, y)$ може приймати на площі A. Отже, при всякому k

$$mp_k \leqq f(\xi_k, \eta_k) p_k \leqq Mp_k,$$

а тому

$$m \sum p_k \leqq \sum f(\xi_k, \eta_k) p_k \leqq M \sum p_k.$$

Переходячи до границі, дістаємо:

$$mA \leqq \iint_A f(x, y)\, dx\, dy \leqq MA.$$

Отже, ми можемо написати рівність:

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = qA, \tag{5}$$

де q — невідома нам величина, проміжна між m і M. Але неперервна функція приймає всі значення, проміжні між її найменшим і найбільшим значеннями. Отже, повинні бути такі ξ і η, що

$$q = f(\xi, \eta).$$

Вставляючи цей вираз для q в рівність (5), дістаємо теорему. І у теорії звичайних інтегралів відповідає теорема про середнє значення інтеграла:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b - a).$$

3. *Теорема.* **Сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла.**

$$\iint_A Cf(x, y)\, dx\, dy = C \iint_A f(x, y)\, dx\, dy. \tag{6}$$

Щоб помножити суму на якунебудь величину, треба помножити на цю величину кожний доданок. Тому, якщо C — стала величина, то

$$\sum Cf(\xi_k, \eta_k) p_k = C \sum f(\xi_k, \eta_k) p_k.$$

Переходячи до границі, дістанемо рівність (6).

4. ***Теорема.*** **Інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів:**

$$\iint\limits_A [\varphi(x, y) \pm \psi(x, y)]\, dx\, dy = \iint\limits_A \varphi(x, y)\, dx\, dy \pm \iint\limits_A \psi(x, y)\, dx\, dy.$$

Справді, якщо справедлива рівність:

$$\sum [\varphi(\xi_k, \eta_k) \pm \psi(\xi_k, \eta_k)]\, p_k = \sum \varphi(\xi_k, \eta_k)\, p_k \pm \sum \psi(\xi_k, \eta_k)\, p_k.$$

Переходячи до границі, дістанемо теорему.

5. ***Теорема.*** **Інтеграл, узятий по всій площі, дорівнює сумі інтегралів по всіх частинах, на які поділена дана площа:**

$$\iint\limits_{P+Q+R} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_P f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_Q f(x, y)\, dx\, dy + \\ + \iint\limits_R f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (7)$$

Уявимо, що дана площа A поділена на якесь число частин, наприклад, на три частини: P, Q і R.

Рис. 132.

Поділяємо всю площу A на елементарні площинки і складаємо суму

$$\sigma = \sum_A f(\xi_k, \eta_k)\, p_k,$$

де індекс A показує, що треба взяти доданки, які належать до всіх елементарних площинок. Ми тепер поділимо доданки суми σ на три групи. До одної групи віднесемо ті доданки, в які входять усі елементарні площинки, що належать частині площини P. Другу групу дадуть доданки, відповідні площинкам частини площини Q. Нарешті, доданки, складені з допомогою площинок частини площини R, нам дадуть третю групу. Одержані суми ми можемо позначити так:

$$\sum_P f(\xi_k, \eta_k)\, p_k, \quad \sum_Q f(\xi_k, \eta_k)\, p_k, \quad \sum_R f(\xi_k, \eta_k)\, p_k.$$

Очевидно, що є справедливою рівність:

$$\sum_A f(\xi_k, \eta_k)\, p_k = \sum_P f(\xi_k, \eta_k)\, p_k + \sum_Q f(\xi_k, \eta_k)\, p_k + \sum_R f(\xi_k, \eta_k)\, p_k.$$

Переходячи до границі, одержимо рівність (7), і теорема доведена. Вона аналогічна такій теоремі в теорії звичайних інтегралів:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx.$$

§ 160. Узагальнені подвійні інтеграли.

Ми досі припускали, що функція, від якої береться подвійний інтеграл, неперервна в усіх точках області інтеграції, яку в свою чергу припускали розміщеною в кінцевій частині площини. Але можна розширити поняття подвійного інтеграла і на випадок, коли або функція перервна в деяких точках області інтеграції, або сама область інтеграції нескінченна. Одержувані при цьому інтеграли назвемо узагальненими.

Розглянемо спочатку інтеграли від перервних функцій.

Функція двох змінних може бути неперервна або в окремих точках, або на цілих лініях. Так, наприклад, функція

$$\frac{1}{x^2+y^2}$$

має тільки одну точку перервності в початку координат, де вона перетворюється в нескінченність. Але функція

$$\frac{1}{x^2+y^2-a^2}$$

перервна вже на всьому колі

$$x^2+y^2=a^2.$$

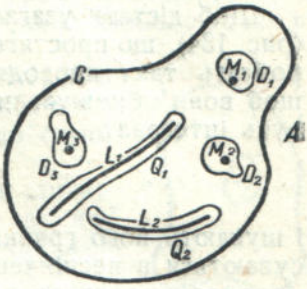

Рис. 133.

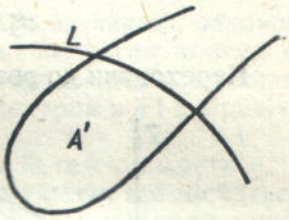

Рис. 134.

Припустимо ж (рис. 133), що дана функція $f(x, y)$ перервна на площі A, обмеженій контуром C, поперше, в точках $M_1, M_2, M_3, \ldots$ і, подруге, на лініях $L_1, L_2, L_3, \ldots$ Оточимо кожну з точок $M_1, M_2, M_3, \ldots$ досить малими контурами $D_1, D_2, D_3, \ldots$ довільної форми. Нехай $u_1, u_2, u_3, \ldots$ — площі, обмежені цими контурами.

Кожну з кривих $L_1, L_2, L_3, \ldots$ вмістимо в досить близькі до них замкнені контури $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$; хай $v_1, v_2, v_3, \ldots$ — площі, обмежені цими контурами. Позначимо через A' площу, обмежену ззовні контуром C, а зсередини контурами $D_1, D_2, D_3, \ldots, Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ Отже,

$$A'=A-(u_1+u_2+u_3+\ldots)-(v_1+v_2+v_3+\ldots).$$

На площі A' дана функція вже неперервна. Візьмемо від неї інтеграл:

$$H=\iint\limits_{A'} f(x, y)\,dx\,dy$$

по площі A'.

Якщо контури $D_1, D_2, D_3, \ldots, Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ змінюватимемо так, щоб площі $u_1, u_2, u_3, \ldots, v_1, v_2, v_3, \ldots$ нескінченно маліли, то границя інтеграла H, якщо ця границя існує і скінченна, називається узагальненим інтегралом по площі A. Отже, за визначенням

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{A' \to A} \iint_{A'} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Щоб дістати узагальнений інтеграл, поширений на площу A (рис. 134), що простягається в деяких напрямах у нескінченність, роблять так: проводять довільно одну або кілька ліній L так, щоб вони обмежували деяку скінченну частину A' площі A. Беруть інтеграл

$$H = \iint_{A'} f(x, y)\, dx\, dy$$

і шукають його границю, припускаючи, що допоміжні лінії L відсуваються в нескінченність так, що поступово всі точки площі A приєднуються до площі A'. Якщо ця границя існує і скінченна, то її приймають за інтеграл від функції по площі A.

§ 161. Об'єм циліндроїда.

Переходячи до розв'язування задачі про обчислення подвійного інтеграла, розглянемо деякі його прикладання.

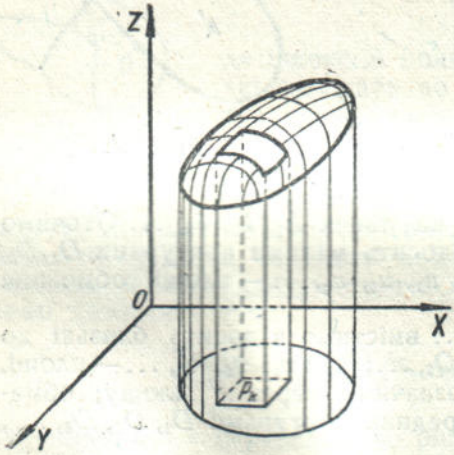

Рис. 135.

Якщо циліндроїд обмежений зверху поверхнею $z = f(x, y)$, то, поділивши площу його основи на елементарні площинки p_k і помноживши кожну площинку на аплікату якоїнебудь точки, розміщеної над площинкою p_k, ми бачили, що для об'єму циліндроїда дійсна рівність

$$V = \lim \sum zp = \lim \sum f(x, y)\, p.$$

Але права частина за визначенням є подвійний інтеграл, а тому

об'єм циліндроїда, обмеженого поверхнею $z = f(x, y)$, визначається подвійним інтегралом:

$$V = \iint z\, dx\, dy,$$

поширеним по площі основи циліндроїда.

Отже, обчислення об'єму циліндроїда зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

§ 162. Маса і центр ваги матеріальної плоскої фігури.

Під матеріальною поверхнею розуміють тіло настільки малої товщини, що практично його можна розглядати як поверхню. Прикладом такого тіла може бути всяке тіло, що називається звичайно листом.

Нехай A — матеріальна плоска фігура і p — точка на ній (рис. 136). Усяку площу q, обмежену контуром D, якщо точка p лежить усередині контура D, назвемо площею навколо точки p. Як відомо,

середньою густиною маси, що міститься в даній площі, називається відношення маси всієї речовини, що міститься в даній площі, до самої площі.

Рис. 136.

Тому, якщо m — маса всієї речовини, що міститься в площинці q, побудованій навколо точки p, то середня густина маси цієї площинки дорівнює

$$\frac{m}{q}. \qquad (1)$$

Уявимо тепер, що контур D змінюється за якимсь законом так, що розмір площинки q нескінченно маліє, а сам контур D у границі стягується в точку p. Це ми матимемо, наприклад, якщо припустимо, що контур D є коло з центром в p і що радіус цього кола нескінченно маліє.

Із зміною площинки q середня густина її теж змінюється.

Границя, до якої прямує середня густина маси, що міститься в нескінченно маліючій площинці, побудованій навколо точки p, називається справжньою густиною маси в точці p.

Якщо цю густину в точці p позначимо через ρ, то згідно з означенням маємо:

$$\rho = \lim_{q \to 0} \frac{m}{q}. \qquad (2)$$

Залежно від того, якої форми контур D і за яким законом розмір його нескінченно маліє, відношення $\frac{m}{q}$ може змінюватись дуже різноманітно. Але припускається, що границя цього відношення зовсім не залежить ні від форми площинки q, ні від шляху, за яким вона нескінченно маліє. Нехай до переходу до границі

$$\frac{m}{q} = \rho + \varepsilon. \qquad (3)$$

Як різниця між змінною величиною $\frac{m}{q}$ і її границею величина ε нескінченно маліє одночасно з нескінченним малінням площинки q. Із (3) маємо:

$$m = \rho q + \varepsilon q. \qquad (4)$$

У першому доданку маліє тільки q. Відносно q це доданок першого порядку, другий же доданок вищого порядку. Отже, ρq є головна частина в розкладі маси m, а тому

$$m \approx \rho q. \tag{5}$$

До цього висновку можна прийти і так. З (4) маємо:

$$\frac{m}{\rho q} = 1 + \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

Але $\lim \varepsilon = 0$, а тому

$$\lim \frac{m}{\rho q} = 1,$$

тобто маємо рівність (5). Дістаємо теорему.

Теорема. **Маса m, замкнена в нескінченно малій площинці q, еквівалентна добуткові площинки на густину маси в будь-якій точці цієї площинки:**

$$m \approx \rho q.$$

Спираючись на цей результат, уже неважко розв'язати таку задачу: дано матеріальну площу A; знаючи густину ρ маси в кожній точці цієї площі, обчислити масу всієї площі A.

Густина ρ у точці p, очевидно, є функція координат точки p. Нехай

$$\rho = f(x, y).$$

Ми припускаємо, що густина у кожній точці відома, тому ми повинні вважати функцію $f(x, y)$ теж даною, відомою нам функцією.

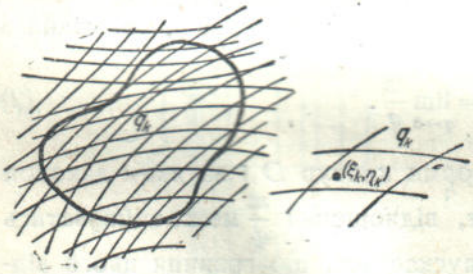

Рис. 137.

Позначимо через M масу всієї площі A. Щоб обчислити її, робимо так.

Поділяємо всю площу на нескінченно малі елементарні площинки

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k, \ldots$$

Масу, що міститься в площинці q_k, позначимо через m_k.

Очевидно, що вся маса M дорівнює сумі всіх мас $m_1, m_2, m_3, \ldots$, вміщених в елементарних площинках $q_1, q_2, q_3, \ldots$:

$$M = \sum m_k. \tag{6}$$

У кожній площинці q_k візьмемо довільно точку з координатами ξ_k, η_k і позначимо через ρ_k густину в цій точці:

$$\rho_k = f(\xi_k, \eta_k).$$

Коли площинка q_k нескінченно малітиме, то рівність (6) зберігатиметься і в границі, а тому

$$M = \lim \sum m_k.$$

Але

$$m_k \approx \rho_k q_k,$$

а тому за другим принципом

$$M = \lim \sum \rho_k q_k = \lim \sum f(\xi_k, \eta_k) q_k =$$
$$= \iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \iint_A \rho\, dx\, dy.$$

Дістаємо теорему:

Маса, що міститься в площі A, визначається за формулою:

$$M = \iint_A \rho\, dx\, dy,$$

де ρ — густина в точці.

Бачимо, що обчислення всієї маси, що міститься в плоскій фігурі, зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

Перейдемо тепер до визначення центра ваги плоскої фігури.

Нехай, як і раніше, маємо якусь матеріальну площу A маси M, обмежену контуром C. Поставимо задачу: знайти координати центра ваги цієї площі A, знаючи густину маси

$$\rho = f(x, y)$$

у кожній точці площі.

Щоб визначити його, ми випадок маси, розміщеної неперервно, зводимо до випадку ізольованих точок.

Поділивши площу A на нескінченно малі площинки q_1, q_2, q_3, ... довільної форми, як і раніше, позначимо через m_k масу площинки q_k, всередині якої, теж зовсім довільно, візьмемо якунебудь точку (x_k, y_k). Після цього уявимо, що в цій точці зосереджена маса всієї площинки q_k, і замість площі A, по якій маса розміщена неперервно, розглядатимемо систему вже ізольованих матеріальних точок:

$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n,$$

координати яких

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n).$$

Тоді координати центра ваги цієї системи точок визначаться за формулами

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \quad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}. \tag{7}$$

Якщо тепер уявимо, що число елементарних площинок нескінченно зростає, то ту границю, до якої прямуватимуть x_c і y_c, приймемо за координати центра ваги матеріальної площі A. Отже, якщо ці координати позначимо через ξ і η, то *за означенням* матимемо:

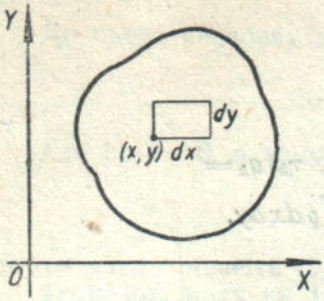

Рис. 138.

$$\xi = \lim x_c, \quad \eta = \lim y_c,$$

тобто

$$\xi = \frac{\lim \sum m_k x_k}{M}, \quad \eta = \frac{\lim \sum m_k y_k}{M}. \quad (8)$$

Але коли всі площинки q_1, q_2, q_3, ... нескінченно маліють і коли ρ_k — густина в точці (x_k, y_k), що лежить на площинці q_k, то

$$m_k \approx \rho_k q_k = f(x_k, y_k)\, q_k,$$

а тому з (8)

$$M\xi = \lim \sum f(x_k, y_k)\, x_k q_k = \iint\limits_A f(x, y)\, x\, dx\, dy,$$

$$M\eta = \lim \sum f(x_k, y_k)\, y_k q_k = \iint\limits_A f(x, y)\, y\, dx\, dy,$$

або коротше

$$M\xi = \iint\limits_A x\rho\, dx\, dy, \quad M\eta = \iint y\rho\, dx\, dy. \quad (9)$$

Ми бачимо, що ξ і η не залежать від того, як ми поділяємо площу на елементарні площинки і за яким законом їх зменшуємо.

Формули (9) дають теорему:

Координати ξ, η центра ваги і маса M матеріальної площинки визначаються за формулами:

$$M = \iint\limits_A \rho\, dx\, dy, \quad M\xi = \iint\limits_A x\rho\, dx\, dy, \quad M\eta = \iint\limits_A y\rho\, dx\, dy, \quad (10)$$

де ρ — густина і де інтеграли поширені на всю площу.

Якщо $\rho = 1$, то зрозуміло, що

$$M = A.$$

Центр ваги матеріальної площинки A, вкритої рівномірною масою, густина якої всюди дорівнює одиниці, називається центром ваги геометричної площі A. Тому, приймаючи, що в (10) $\rho = 1$, робимо висновок, що

координати ξ, η центра ваги геометричної площі A визначаються за формулами:

$$A\xi = \iint\limits_A x\, dx\, dy, \quad A\eta = \iint\limits_A y\, dx\, dy.$$

Практично формули (10) можна вивести швидко, міркуючи так. Мислено поділяємо всю площу A прямими, паралельними осям, на нескінченно малі прямокутники. Уявляємо один з них з вершиною в точці (x, y) і із сторонами dx і dy. Площа його — $dxdy$; маса його еквівалентна $\rho\, dx\, dy$. Розглядаючи кожний такий прямокутник як матеріальну точку з координатами x, y і масою $\rho\, dx\, dy$, робимо висновок, що координати центра ваги їх дорівнюють

$$\frac{\sum x\rho\, dx\, dy}{M}, \quad \frac{\sum y\rho\, dx\, dy}{M}.$$

Заміняючи знак $\sum$ знаком інтеграла, дістанемо (10).

§ 163. Висновок.

1. Границя суми граничних площинок замкненого контура дорівнює нулеві.

Площа, обмежена замкненим контуром, дорівнює границі суми всіх внутрішніх елементарних площинок.

2. Об'єм елементарного циліндроіда еквівалентний об'ємові елементарного циліндра.

Об'єм циліндроіда дорівнює границі суми об'ємів елементарних циліндрів.

3. Подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ двох аргументів, поширеним на площу A, називається границя суми

$$\sum f(\xi_k, \eta_k)\, p_k,$$

доданки якої дістаємо від множення кожної елементарної площинки p_k на значення функції в довільно взятій точці цієї площинки:

$$\iint\limits_A f(x, y)\, de = \lim \sum f(\xi_k, \eta_k)\, p_k.$$

4. При обчисленні інтеграла граничними площинками можна нехтувати.

5. Основні властивості подвійного інтеграла виражаються рівностями:

1)

$$\iint\limits_A dx\, dy = A;$$

2)

$$\iint\limits_A Kf(x, y)\, dx\, dy = K \iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy;$$

3)

$$\iint\limits_A \{\varphi(x, y) \pm \psi(x, y)\}\, dx\, dy = \iint\limits_A \varphi(x, y)\, dx\, dy \pm \iint\limits_A \psi(x, y)\, dx\, dy;$$

4)

$$\iint\limits_{P+Q} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{P} f(x, y)\,dx\,dy \pm \iint\limits_{Q} f(x, y)\,dx\,dy;$$

5)

$$\iint\limits_{A} f(x, y)\,dx\,dy = f(\xi, \eta)\,A,$$

де ξ, η — якась точка всередині площі.

6. Об'єм циліндроїда визначається за формулою:

$$V = \iint z\,dx\,dy.$$

7. Положення центра ваги і маса матеріальної площинки визначаються формулами:

$$M\xi = \iint\limits_{A} x\rho\,dx\,dy, \quad M\eta = \iint\limits_{A} y\rho\,dx\,dy,$$

$$M = \iint \rho\,dx\,dy.$$

ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА.

Методи обчислення подвійного інтеграла дуже різноманітні. З них тут ми розглянемо два основні: обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах і обчислення його в полярних.

§ 164. Основні властивості інтегральної суми.

При міркуваннях про інтегральну суму, крім другого принципу, постійно доводиться користуватись деякими її властивостями, які ми формулюємо у вигляді трьох лем.

Перша лема. **Якщо фактори інтегральної суми нескінченно малі, то і сама інтегральна сума нескінченно мала.**

Ця лема нами вже була доведена (стор 290). Другу лему ми дістанемо як простий висновок, що безпосередньо випливає з означення інтеграла як границі суми.

Всяка змінна величина відрізняється від своєї границі на нескінченно маліючу величину. Тому якщо

$$\lim x = a, \quad \text{то} \quad x = a + \varepsilon,$$

де ε нескінченно маліє. Але згідно з означенням

$$\lim \sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ми тут маємо змінну величину, а саме, інтегральну суму, і інтеграл як її границю, а тому

$$\sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon, \tag{1}$$

де ε нескінченно маліє. Ця рівність дає другу лему.

Друга лема. **Якщо підінтервали інтегральної суми нескінченно малі, то вона нескінченно мало відрізняється од відповідного їй інтеграла:**

$$\sum_a^b f(x)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon. \tag{2}$$

Це є очевидним геометрично. Якщо підінтервали нескінченно малі, то підінтегральна сума, як сума площ елементарних прямокутників, відрізняється нескінченно мало від площі трапеції $aABb$, тобто від інтеграла (рис. 139).

Для дальшого велике значення має таке узагальнення рівності (2). Нехай (a, b) — даний інтервал і (a', b') — інтервал, що лежить усередині нього (рис. 140).

Побудуємо інтегральну суму

$$s' = \sum_{a'}^{b'} f(\xi_k)\,\Delta x_k \qquad (3)$$

для інтервалу (a', b') і припустимо, що не тільки всі інтервали Δx_k нескінченно малі, але що також нескінченно малі і інтервали (a, a') і (b', b), тобто припустимо, що при переході до границі не тільки всі інтервали суми s' нескінченно маліють, але що також змінюються і її границі a' і b', нескінченно наближаючись до a і b.

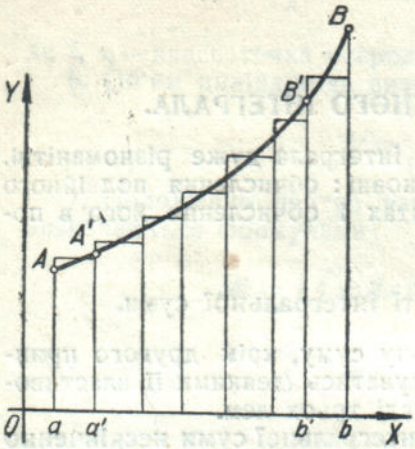

Рис. 139.

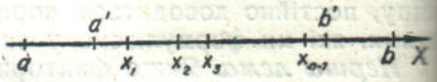

Рис. 140.

Якщо до суми s' додати суму

$$\varepsilon' = f(\xi')\,(a' - a) + f(\xi'')\,(b - b')$$

двох доданків, відповідних інтервалам (a, a') і (b', b), то ми дістанемо інтегральну суму між границями a, b, а тому

$$\sum_{a'}^{b'} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{a}^{b} f(\xi_k)\,\Delta x_k - \varepsilon'. \qquad (4)$$

Зрозуміло, що коли a' і b' у границі дорівнюють a і b, то $\lim \varepsilon' = 0$, а тому в рівності (4) ε' нескінченно мале. В той же час

$$\sum_{a}^{b} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon'',$$

де ε'' теж нескінченно мале. Тепер маємо:

$$\sum_{a'}^{b'} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon, \qquad (5)$$

де

$$\varepsilon = \varepsilon'' - \varepsilon'.$$

Оскільки ε' і ε'' нескінченно малі, то і ε нескінченно мале. Цією рівністю (5) виражається

Третя лема. **Якщо підінтервали інтегральної суми нескінченно малі, то сума нескінченно мало відрізняється від інтеграла, границі якого нескінченно мало відрізняються від границь суми. Отже, якщо всі Δx і різниці $a'-a$ і $b-b'$ нескінченно малі, то**

$$\sum_{a'}^{b'} f(x)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon, \qquad (6)$$

де ε нескінченно мале.

Геометрично ця рівність є очевидна (рис. 139). Сума

$$s' = \sum_{a'}^{b'} f(x)\,\Delta x$$

є не що інше, як сума площ усіх елементарних прямокутників трапеції $a'A'B'b'$. Лема стверджує, що коли інтервали (a, a'), (b', b) і ті, на які поділений інтервал (a', b'), нескінченно малі, то s' відрізняється нескінченно мало від площі трапеції $aABb$, тобто

$$\lim s' = aABb.$$

Цією властивістю інтегральної суми в дальшому ми користуватимемось на кожному кроці.

§ 165. Площа інтеграції першого типу.

Величина подвійного інтеграла, очевидно, залежить не тільки від вигляду підінтегральної функції, але й від форми тієї площі, на яку поширений інтеграл.

Припустимо, що контур, який обмежує площу інтеграції, перетинається кожною прямою, паралельною осі Y, не більш як у двох точках. Такі площі назвемо площами першого типу. Як побачимо, обчислення всякого подвійного інтеграла, поширеного на площу будь-якої форми, обмежену замкненим контуром, легко зводиться до інтегрування по площі першого типу.

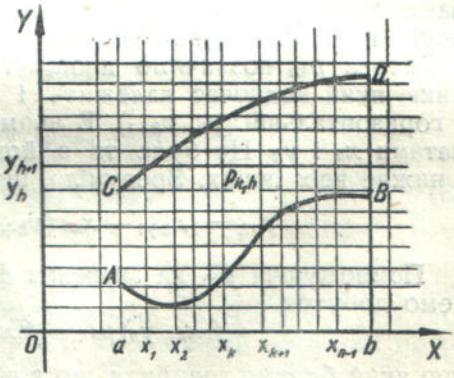

Рис. 141.

Нехай треба обчислити подвійний інтеграл

$$G = \iint f(x, y)\,dx\,dy,$$

поширений на площу, обмежену знизу і зверху кривими AB і CD, зліва і справа прямими, перпендикулярними до осі X у точках a і b (рис. 141).

В окремому випадку, якщо точка A зливається з точкою C, а точка D з точкою B, ми матимемо звичайний замкнений контур.

Умовимось щодо ряду позначень.

Через u позначимо ординату нижньої кривої, через v — ординату верхньої. Ми припускаємо, що кожна з них є однозначна функція абсциси. Нехай

$$u = \varphi(x), \quad v = \psi(x).$$

Щоб дістати інтегральну суму, границі якої дорівнює подвійний інтеграл, ми повинні поділити площу інтеграції на елементарні площинки і в кожній з них узяти точку. Цей поділ і цей вибір провадимо так.

Проводимо дві системи прямих. Поперше, систему прямих, які перпендикулярні до осі X і перетинають її в точках

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots, x_n.$$

Значення ординат u і v в цих точках позначимо відповідно символами:

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k, \ldots, u_n,$$
$$v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k, \ldots, v_n.$$

Отже, взагалі

$$u_k = \varphi(x_k), \quad v_k = \psi(x_k).$$

Прямі другої системи, перпендикулярні до осі Y, нехай перетинають її в точках

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_h, \ldots, y_m.$$

Проміжки між цими числами y_h, а також проміжки між числами x_k ми вважаємо нескінченно малими, тобто такими, які потім повинні будуть нескінченно маліти.

Через p_{kh} позначимо площу того елементарного прямокутника, який водночас належить і вертикальній смузі (x_k, x_{k+1}) і горизонтальній (y_h, y_{h+1}). В ньому відзначимо точку з координатами x_k і y_h. Це буде та з його вершин, яка лежить лівіше і нижче всіх інших. Зрозуміло, що

$$p_{kh} = (x_{k+1} - x_k)(y_{h+1} - y_h) = \Delta x_k \Delta y_h.$$

Помножуючи p_{kh} на значення функції в дібраній точці, дістанемо добуток

$$f(x_k, y_h)\, p_{kh} = f(x_k, y_h)\, \Delta x_k \Delta y_h,$$

про який будемо говорити, що він належить прямокутникові p_{kh}. Якщо такі добутки ми складемо для кожного елементарного прямокутника, то сума їх усіх дасть нам інтегральну суму:

$$s = \sum f(x_k, y_h)\, \Delta x_k \Delta y_h.$$

При цьому ми зважатимемо тільки на внутрішні елементарні прямокутники, граничні ж відкинемо, на що, як ми бачили, маємо право.

Наша задача полягає в обчисленні границі суми s. Для цього ми спочатку згруповуємо її доданки в окремі групи таким чином: в одну й ту ж групу ми згруповуємо всі ті доданки і тільки ті, які складені з допомогою елементарних прямокутників, що лежать в одній і тій же вертикальній смужці. Таких груп буде стільки, скільки всіх вертикальних смужок. Позначимо через s_k суму всіх тих доданків, що належать прямокутникам, які лежать у вертикальній смужці (x_k, x_{k+1}), що запишемо так:

$$s_k = \sum_{(x_k,\, x_{k+1})} f(x_k, y_h)\,\Delta x_k \Delta y_h.$$

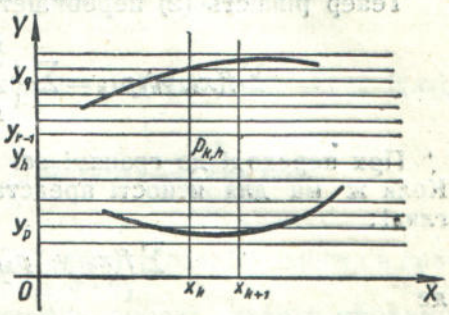

Рис. 142.

Ми будемо говорити, що кожна сума s_k одержується підсумовуванням уздовж або по відповідній вертикальній смузі. Сума s дорівнює сумі всіх сум s_k, що запишемо так:

$$s = \sum s_k. \qquad (1)$$

Цей перехід від сум s_k до суми s ми умовно називатимемо підсумовуванням по смугах. Отже, щоб одержати суму s, ми повинні спочатку підсумувати її доданки вздовж кожної вертикальної смуги, а потім узяти суму сум, що стосуються всіх смуг.

Беручи до уваги значення символів s і s_k, ми перепишемо рівність (1) у такому вигляді:

$$\sum f(x_k, y_h)\, p_{kh} = \sum \Big\{ \sum_{(x_k,\, x_{k+1})} f(x_k, y_h)\,\Delta x_k \Delta y_h \Big\}. \qquad (2)$$

Розглянемо внутрішню суму (рис. 142)

$$s_k = \sum_{(x_k,\, x_{k+1})} f(x_k, y_h)\,\Delta x_k \Delta y_h. \qquad (3)$$

Через те, що доданки цієї суми стосуються прямокутників, які лежать в одній і тій же вертикальній смужці, то у всіх цих доданках x_k і Δx_k ті самі. Тому Δx_k як спільний множник може бути винесений за знак суми:

$$s_k = \Big\{ \sum_{(x_k,\, x_{k+1})} f(x_k, y_h)\,\Delta y_h \Big\} \Delta x_k.$$

Але числа y_h в кожному доданку різні. При цьому неважко бачити, що не всі числа

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$$

входять у доданки суми s_k, а тільки ті з них, які є проміжними між u_k і v_k. Якщо це будуть числа $y_p, y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots, y_q$, то точніше можна записати, що

$$s_k = \left\{ \sum_{y_p}^{y_q} f(x_k, y_h)\, \Delta y_h \right\} \Delta x_k. \tag{4}$$

Тепер рівність (2) перепишеться так:

$$\sum f(x_k, y_h)\, p_{kh} = \sum \left\{ \sum_{y_p}^{y_q} f(x_k, y_h)\, \Delta y_h \right\} \Delta x_k. \tag{5}$$

При переході до границі всі Δx_k і Δy_h нескінченно маліють. Коли ж ми для ясності представимо рівність (5) у такому вигляді:

$$\sum f(x_k, y_h)\, p_{kh} = \sum \beta_k \Delta x_k, \tag{6}$$

де

$$\beta_k = \sum_{y_p}^{y_q} f(x_k, y_h)\, \Delta y_h, \tag{7}$$

то стає очевидним, що β_k є фактор при Δx_k, який при переході до границі можна замінити величиною, від якої він відрізняється нескінченно мало.

На деякий час покладемо

$$f(x_k, y) = \omega(y).$$

Це можливо, бо x_k в усіх доданках суми (7) один і той же. Маємо

$$\beta_k = \sum_{y_p}^{y_q} \omega(y_h)\, \Delta y_h = \sum_{y_p}^{y_q} \omega(y)\, \Delta y,$$

тобто маємо інтегральну суму. Її границі y_p і y_q нескінченно мало відрізняються від u_k і v_k, бо різниці

$$u_k - y_p, \quad v_k - y_q$$

при переході до границі нескінченно маліють. Тому згідно з третьою лемою можна написати, що

$$\beta_k = \sum_{y_p}^{y_q} \omega(y)\, \Delta y = \int_{u_k}^{v_k} \omega(y)\, dy + \varepsilon_k = \int_{u_k}^{v_k} f(x_k, y)\, dy + \varepsilon_k, \tag{8}$$

де ε_k нескінченно мале. Ми пишемо ε_k, а не просто ε, бо це для різних значень k може мати різні значення.

Якщо тепер для скорочення писання приймемо

$$\int\limits_{u=\varphi(x)}^{v=\psi(x)} f(x, y)\, dy = \Phi(x), \tag{9}$$

то з (8)

$$\beta_k = \int\limits_{u_k=\varphi(x_k)}^{v_k=\psi(x_k)} f(x_k, y)\, dy + \varepsilon_k = \Phi(x_k) + \varepsilon_k.$$

Заміняючи за другим принципом у (5) фактор β_k через $\Phi(x_k)$, маємо

$$\lim \sum f(x_k, y_h)\, p_{kh} = \lim \sum_a^b \Phi(x_k)\, \Delta x_k = \int_a^b \Phi(x)\, dx.$$

Ліва частина — шуканий подвійний інтеграл. Заміняючи в правій частині $\Phi(x)$ із (9), дістаємо теорему:

Якщо площа інтеграції обмежена знизу і зверху кривими $u = \varphi(x)$ і $v = \psi(x)$, зліва і справа прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 143), то

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left\{ \int\limits_{u=\varphi(x)}^{v=\psi(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx.$$

Отже, щоб дістати подвійний інтеграл, треба над підінтегральною функцією виконати два прості інтегрування: спочатку по y, потім по x. Ось тому для позначення подвійного інтеграла звичайно пишуть два знаки інтеграла.

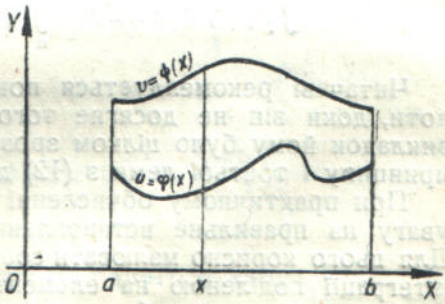

Рис. 143.

Слід звернути увагу на те, що перше інтегрування по y виконується між границями, що залежать від x. Друге ж інтегрування по x виконується вже між сталими границями.

Щодо самого доведення теореми, то за своєю ідеєю воно надзвичайно просте і може бути викладене в кількох рядках, якщо відкинути пояснення різних позначень.

Справді, користуючись правом групувати доданки в різні групи, ми маємо основну рівність

$$\sum f(x_k, y_h)\, p_{kh} = \sum \left\{ \sum_{(x_k,\, x_{k+1})} f(x_k, y_h)\, \Delta x_k \Delta y_h \right\}. \tag{10}$$

Від неї, виносячи Δx_k у внутрішні суми спільним множником і трохи змінюючи позначення, переходимо до рівності

$$\sum f(x_k, y_h) p_{kh} = \sum_a^b \left\{ \sum_{y_p}^{y_q} f(x_k, y_h) \Delta y_h \right\} \Delta x_k. \qquad (11)$$

Заміняючи фактор при Δx_k інтегралом, від якого він відрізняється нескінченно мало, і переходячи до границі, знову дістаємо рівність:

$$\lim \sum f(x_k, y_h) p_{kh} = \lim \sum_a^b \left\{ \int_{u=\varphi(x_k)}^{v=\psi(x_k)} f(x_k, y)\, dy \right\} \Delta x_k,$$

і остаточно

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left\{ \int_u^v f(x, y)\, dy \right\} dx.$$

Порівнюючи цю рівність з (11), ми бачимо, що інтегрування по y відповідає підсумовуванню вздовж смуг, а інтегрування по x — підсумовуванню по смугах.

Цей зв'язок стає ще яскравішим, якщо ми в рівності (11) пропустимо індекси у проміжних чисел. Тоді в скороченому вигляді все доведення може бути викладене в таких двох рядках: через те, що

$$\sum f(x, y) \Delta x \Delta y = \sum \{ \sum f(x, y) \Delta y \} \Delta x, \qquad (12)$$

то в границі

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left\{ \int_u^v f(x, y)\, dy \right\} dx. \qquad (13)$$

Читачеві рекомендується повторювати наведене доведення доти, доки він не досягне того, щоб без усяких допоміжних викладок йому було цілком зрозуміло, як з допомогою другого принципу і третьої леми з (12) дістати (13).

При практичному обчисленні завжди треба звертати велику увагу на правильне встановлення границь кожного інтеграла. Для цього корисно малювати собі таку картину: уявляємо площу інтеграції поділеною на елементарні площинки. Потім мисленно виділяємо одну якунебудь вертикальну смугу, ліва сторона якої перетинає вісь X в якійсь довільно взятій точці x (рис. 143). Ми уявляємо, що смужки настільки тонкі, що ширина їх не перевищує ширини чорнильної риски. Отже, нарисувати праву сторону смуги фактично не можна, бо вона повинна на рисунку злитися з лівою стороною. Тому ордината в точці x зображає, так би мовити, всю смужку.

Інтегрування по y відповідає підсумовуванню вздовж смужки. Тому, щоб встановити границі при інтегруванні по y, ми диви-

мось, в яких границях змінюється y, якщо ми будемо йти по площі вздовж довільно взятої координати. Зрозуміло, що y змінюватиметься від ординати u нижньої кривої до ординати v верхньої кривої. Це й будуть границі при першому інтегруванні по y, при чому ці границі є функціями x.

Щоб знайти границі інтеграла по x, ми дивимось, у яких границях треба змінювати x, щоб перебрати всі смужки.

Нехай, наприклад, потрібно обчислити подвійний інтеграл

$$G = \iint xy^2\,dx\,dy,$$

поширений на площу AOB, обмежену дугою параболи

$$y^2 = 3x$$

і хордою AB, що перетинає вісь X у точці $x = +1$ (рис. 144).

Коли ми йдемо по якійнебудь вертикальній смузі GH, абсциса якої x, то y змінюється від $-\sqrt{3x}$ до $+\sqrt{3x}$. Це й будуть границі інтегрування по y. Границі ж інтегрування по x будуть 0 і 1, бо в цих границях треба змінювати x, щоб одержати всі вертикальні смуги. Отже,

$$\iint\limits_{AOB} xy^2\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_{-\sqrt{3x}}^{+\sqrt{3x}} xy^2\,dy \right\} dx.$$

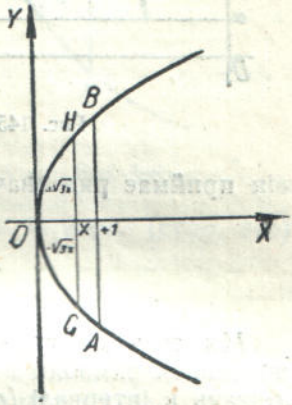

Рис. 144.

Обчисляючи спочатку внутрішній інтеграл, знайдемо

$$\int\limits_{-\sqrt{3x}}^{+\sqrt{3x}} xy^2\,dy = \left.\frac{xy^3}{3}\right|_{y=-\sqrt{3x}}^{y=+\sqrt{3x}} = 2\sqrt{3}\,x^2\sqrt{x},$$

а тому остаточно

$$\iint\limits_{AOB} xy^2\,dx\,dy = \int\limits_0^1 2\sqrt{3}\,x^2\sqrt{x}\,dx = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

§ 166. Площа інтеграції другого типу.

Нехай площа інтеграції обмежена знизу і зверху прямими:

$$y = \alpha;\quad y = \beta,$$

зліва і справа кривими, рівняння яких:

$$p = \lambda(y),\quad q = \mu(y),$$

де p — абсциса лівої, а q — абсциса правої кривої. Таку площу назвемо площею другого типу (рис. 145).

Розглядуваний випадок, очевидно, відрізняється від попереднього тільки тим, що x і y міняються ролями. Відповідно до цього змінюються і доведення, і результат.

Мислено поділивши площу на елементарні прямокутники і побудувавши інтегральну суму

$$s = \sum f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y,$$

ми згруповуємо її доданки, сполучаючи в одну групу ті з них, що відповідають прямокутникам, які лежать в одній горизонтальній смужці. Якщо через s_y позначимо суму тих доданків, які належать смужці, що лежить між прямими, ординати яких y і $y+\Delta y$, то

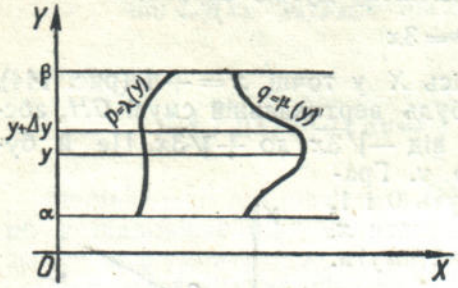

Рис. 145.

$$s_y = \sum_{(y,\,y+\Delta y)} f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y,$$

де в правій частині в усіх доданках y і Δy одні й ті ж. Тому Δy можна винести за знак суми. Щождо x, то він приймає ряд значень, проміжних між p і q. Отже,

$$s_y = \left\{ \sum_{p}^{q} f(x,\ y)\,\Delta x \right\} \Delta y.$$

Ми ставимо границями суми p і q. Точніше треба було б поставити символи першого і останнього числа з чисел x_k, що лежать в інтервалі (p, q).

Через те що сума s дорівнює сумі всіх сум s_y, то маємо основну рівність:

$$\sum f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y = \sum_{\alpha}^{\beta} \left\{ \sum_{p}^{q} f(x, y)\,\Delta x \right\} \Delta y. \qquad (1)$$

Заміняємо внутрішню суму як фактор при Δy відповідним інтегралом:

$$\sum_{p}^{q} f(x,\ y)\,\Delta x = \int_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)} f(x, y)\,dx + \varepsilon_y,$$

де ε_y нескінченно мале і де інтеграл — уже тільки функція y. Нехай

$$\int_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)} f(x,\ y)\,dx = \omega(y).$$

Послідовно маємо

$$\lim \sum f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y = \lim \sum_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)} f(x, y)\,dx \right\} dy = \lim \sum_{\alpha}^{\beta} \omega(y)\,\Delta y =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \omega(y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)} f(x, y)\,dx \right\} dy$$

і дістаємо теорему:

якщо площа інтеграції обмежена двома прямими

$$y = \alpha \quad \text{і} \quad y = \beta$$

і двома кривими

$$p = \lambda(y), \quad q = \mu(y),$$

то

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)} f(x, y)\,dx \right\} dy.$$

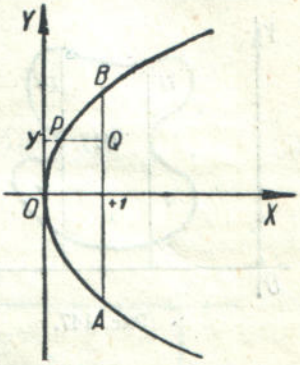

Рис. 146.

Тепер перше інтегрування виконується по x, при чому границями інтеграла є функції y. Друге інтегрування по y виконується вже між сталими границями α і β.

Розглянемо приклад. Ми вже обчислили інтеграл (стор. 345)

$$G = \iint_{AOB} xy^2\,dx\,dy,$$

поширений на площу, обмежений параболою $y^2 = 3x$ і прямою $x = +1$. При цьому перше інтегрування ми виконували по y, друге по x. Але контур цієї площі перетинається всякою прямою, паралельною осі X, тільки в двох точках. Тому ми можемо виконати перше інтегрування по x, друге по y. Мислено виділяємо якунебудь довільно взяту горизонтальну смужку PQ, ордината якої y (рис. 146). Коли ми йдемо по цій смужці, то x змінюється від абсциси точки P до абсциси точки Q. Отже, перше інтегрування по x ми повинні виконати між границями $\frac{y^2}{3}$ і $+1$.

Щоб одержати всі горизонтальні смуги, ми повинні змінювати y від ординати точки A до ординати точки B. Тому друге інтегрування по y ми повинні виконати між границями $-\sqrt{3}$ і $+\sqrt{3}$. Отже, маємо

$$\iint_{AOB} xy^2\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} \left\{ \int_{\frac{y^2}{3}}^{+1} xy^2\,dx \right\} dy = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

Два різні способи обчислення подвійного інтеграла дали, як і треба було чекати, один і той же результат.

§ 167. Площа інтеграції довільної форми.

Маючи формули для обчислення інтеграла по площах першого і другого типу, ми можемо обчислити подвійний інтеграл, поширений на площу довільної форми, і можемо це зробити двома способами.

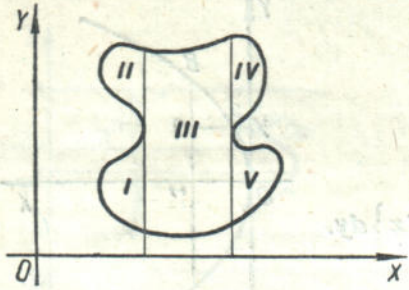

Рис. 147.

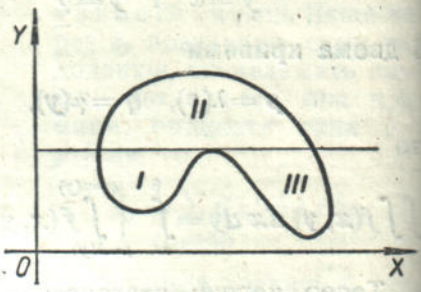

Рис. 148.

Ми можемо поділити всяку площу прямими, паралельними осі Y, на кілька площ першого типу. Так, наприклад, площа на рисунку 147 поділена на п'ять площ першого типу. Або ми можемо прямими, паралельними осі Y, поділити дану площу на кілька площ другого типу. Так, наприклад, площа на рисунку 148 поділена на три площі другого типу.

Обчисливши інтеграл на кожній частині площі і взявши потім їх суму, ми знайдемо інтеграл по всій площі.

Щодо питання, чи вигідніше поділяти дану площу на площі першого або другого типу, то це залежить від вигляду та площі і підінтегральної функції. На практиці доводиться випробовувати той і другий спосіб і дивитись, який приводить до простіших обчислень.

Особливої уваги заслуговує випадок, коли контур площі перетинається тільки в двох точках як усякою прямою, паралельною осі Y, так і всякою прямою, паралельною осі X. Нехай, наприклад, $ACBD$ — такий контур (рис. 149). Проводимо дві крайні ординати aA і bB, що обмежують контур зліва і справа. Нехай вони дотикаються контура в точках A і B. Ми дану площу можемо розглядати як площу першого типу. Нехай рівняння нижньої половини контура, тобто кривої ACB, таке:

$$y = \varphi(x).$$

Рівняння ж верхньої половини ADB нехай буде:

$$y = \psi(x).$$

За доведеним маємо:

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \right\} dx. \qquad (1)$$

Але, провівши крайні абсциси αC і βD, що обмежують контур знизу і зверху, ми можемо розглядати дану площу як площу другого типу, яка зліва обмежена кривою CAD, а справа кривою CBD. Нехай рівняння цих кривих відповідно будуть:

$$x = \lambda(y), \quad x = \mu(y).$$

За доведеним маємо

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x, y)\,dx \right\} dy. \qquad (2)$$

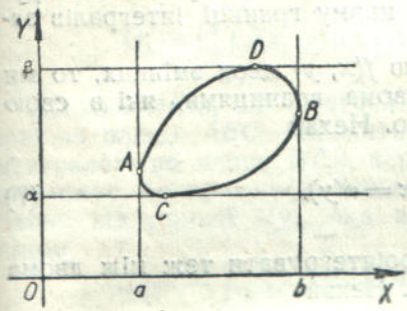

Рис. 149.

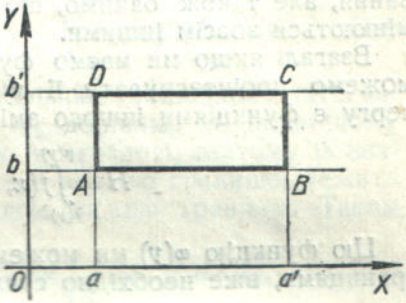

Рис. 150.

В першому випадку ми повинні інтегрувати спочатку по y, потім по x. В другому випадку навпаки — спочатку по x, потім по y; у тому і другому випадку границями першого інтеграла є функції того змінного, по якому інтегрується другий інтеграл.

Якщо площею інтеграції є прямокутник $ABCD$ із сторонами, паралельними осям координат, то дану площу ми можемо за бажанням розглядати і як площу першого типу, і як площу другого типу.

Розглядаючи її як площу першого типу, маємо:

$$\iint\limits_{ABCD} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^{a'} \left\{ \int_b^{b'} f(x, y)\,dy \right\} dx. \qquad (3)$$

Прикладаючи ж формулу для площі другого типу, знайдемо

$$\iint\limits_{ABCD} f(x, y)\,dx\,dy = \int_b^{b'} \left\{ \int_a^{a'} f(x, y)\,dx \right\} dy. \qquad (4)$$

Порівнюючи (3) і (4), маємо:

$$\int_b^{b'}\left\{\int_a^{a'} f(x, y)\,dx\right\}dy=\int_a^{a'}\left\{\int_b^{b'} f(x, y)\,dy\right\}dx, \tag{5}$$

і ми дістали нове доведення для теореми про інтегрування означеного інтеграла по параметру в припущенні, що границі інтеграла є сталі, які не залежать від аргументів функції. Але коли замість прямокутника на рисунку ми візьмемо більш загальний контур, то з рівностей (1) і (2) дістаємо рівність:

$$\int_a^{b}\left\{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\right\}dx=\int_\alpha^{\beta}\left\{\int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x, y)\,dx\right\}dy. \tag{6}$$

Тут у лівій частині перше інтегрування виконується по y вже між границями, які є функціями другого аргумента. Ми бачимо, що і в цьому випадку можна змінити порядок інтегрування, але також бачимо, що при цьому границі інтегралів замінюються зовсім іншими.

Взагалі якщо ми маємо функцію $f(x, y)$ двох змінних, то ми можемо проінтегрувати її між двома границями, які в свою чергу є функціями іншого змінного. Нехай

$$H=\int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x, y)\,dx=\omega(y). \tag{7}$$

Цю функцію $\omega(y)$ ми можемо проінтегрувати теж між двома границями, вже необхідно сталими. Нехай

$$G=\int_\alpha^{\beta}\left\{\int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x, y)\,dx\right\}dy. \tag{8}$$

Чи можна, і якщо можна, то як, змінити порядок інтегрування? Відповідь залежить від властивостей функцій $\lambda(y)$ і $\mu(y)$.

Будуємо криві

$$x=\lambda(y) \quad \text{і} \quad x=\mu(y). \tag{9}$$

Припустимо, що вони в своїй сукупності утворюють замкнений контур типу рисунка 149. Тоді питання про зміну порядку інтегрування розв'язується просто. Інтеграл (8) дорівнює подвійному інтегралові (1), і ми дістаємо рівність (2), яка вказує, як змінюються границі інтегралів при зміні порядку інтегрування. Але такою простою справа буває дуже рідко. Для цього потрібно, щоб функції $\lambda(y)$ і $\mu(y)$ зображались кривими, з яких друга лежала б правіше першої і які разом утворювали б замкнений контур, що перетинається прямими, паралельними осі Y, тільки в двох точках. У своїй сукупності ці умови можуть задовольнятись тільки в рідких випадках. Але навіть коли ці умови і не задоволені, то все таки можна змінити порядок інтегрування. Нехай, наприклад, функції

$$p=\lambda(y), \quad q=\mu(y)$$

зображаються кривими AB і CD (рис. 151). Через p позначаємо абсцису першої кривої, а через q — абсцису другої. Ці дві криві не дають одного замкненого контура. Але вони дають два контури: контур ACE і контур DBE. Тому починаємо з того, що інтеграл

$$G=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x, y)\,dx\right\}dy \qquad (8)$$

виражаємо через подвійні інтеграли, поширені по площах, обмежених цими контурами. Позначаючи через γ ординату точки E, насамперед маємо:

$$G=G_1+G_2, \qquad (9)$$

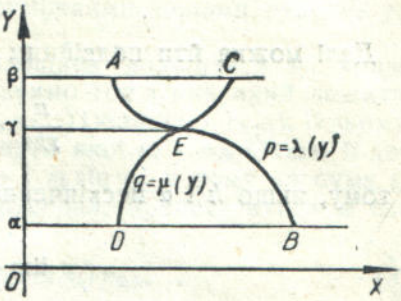

Рис. 151.

де

$$G_1=\int_{\alpha}^{\gamma}\left\{\int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x, y)\,dx\right\}dy, \quad G_2=\int_{\gamma}^{\beta}\left\{\int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x, y)\,dx\right\}dy. \qquad (10)$$

Легко бачити, що інтеграл G_2 дорівнює подвійному інтегралові по площі AEC. Але інтеграл G_1 дорівнює не подвійному інтегралові по площі DEB, а цьому інтегралові, взятому із знаком мінус, бо крива $\mu(y)$, що зображає верхню границю, лежить лівіше від кривої $\lambda(y)$, яка зображає нижню границю. Таким чином,

$$G_1=-\iint_{DEB} f(x, y)\,dx\,dy, \quad G_2=\iint_{AEC} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (11)$$

Кожний з цих двох інтегралів ми можемо обчислити, інтегруючи спочатку по y, потім по x. Тим самим в інтегралі G буде змінений порядок інтегрування.

§ 168. Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах.

Ми знайшли метод для обчислення подвійного інтеграла, поділяючи площу інтеграції на елементарні площинки прямими, паралельними осям координат. Поділяючи площу інтеграції на елементи іншими кривими, ми можемо дістати нові методи для обчислення подвійних інтегралів.

Доведемо спочатку лему. Нехай α — кут між прямими OC і OD. Приймаючи точку O за центр, описуємо радіусом r дугу AB і радіусом $r+h$ дугу CD. Нехай u — площа фігури $ABDC$, яку назвемо кривим чотирикутником; h і α назвемо його висотою і кутом. Якщо α і h нескінченно маліють, то u теж нескінченно маліє. Обчислимо величину, еквівалентну u.

Через те що площі секторів COD і AOB відповідно рівні

$$\frac{1}{2}(r+h)^2\alpha \quad \text{і} \quad \frac{1}{2}r^2\alpha,$$

то для u як різниці між ними маємо:

$$u = rh\alpha + \frac{1}{2}h^2\alpha. \tag{1}$$

Далі можна йти подвійним шляхом. З одного боку,

$$\frac{u}{rh\alpha} = 1 + \frac{h}{2r},$$

а тому, якщо h і α нескінченно маліють, то

$$\lim \frac{u}{rh\alpha} = 1$$

і, отже,

$$u \approx rh\alpha. \tag{2}$$

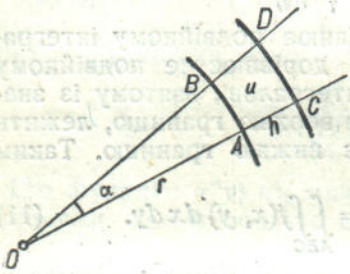

Рис. 152.

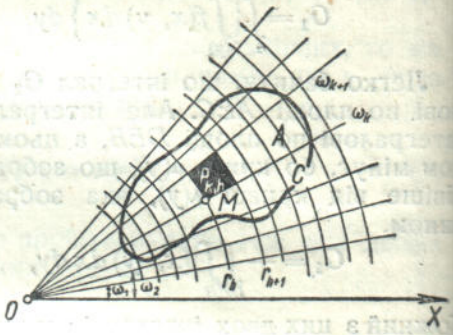

Рис. 153.

Або міркуємо так: якщо h і α нескінченно малі, то в (1) порядок другого доданку, що дорівнює $\frac{1}{2}h^2\alpha$, вищий від порядку першого доданку, а тому маємо (2). В результаті дістаємо лему:

Якщо кут α і висота h кривого чотирикутника радіуса r нескінченно малі, то його площа еквівалентна $rh\alpha$.

Нехай s — дуга AB. Через те що $s = r\alpha$, то $u \approx sh$. Отже,

з погляду еквівалентності нескінченно малий кривий чотирикутник можна розглядати як прямокутник.

Припустимо тепер, що ми повинні обчислити подвійний інтеграл

$$G = \iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

поширений на площу A, обмежену контуром C. Поділяємо площину на елементарні площинки таким чином (рис. 153): від початку координат проводимо систему променів, нахилених до

осі X під кутами $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, і будуємо систему кругів радіусів $r_1, r_2, r_3, \ldots$ з центром в O. Всяку частину площини, що лежить між двома суміжними променями, нахиленими під кутами ω_k і ω_{k+1}, назвемо секторіальною смугою (ω_k, ω_{k+1}); частину ж площини, що лежить між двома суміжними колами радіусів r_k і r_{k+1}, назвемо кільцем (r_k, r_{k+1}).

Системою променів і кругів площина поділиться на криві чотирикутники. Символом p_{kh} позначимо той з них, який лежить одночасно у секторіальній смузі (ω_k, ω_{k+1}) і кільці (r_h, r_{h+1}). В ньому візьмемо точку M, полярні координати якої r_h і ω_k. Отже, її декартові координати будуть $r_h \cos \omega_k$ і $r_h \sin \omega_k$, а тому та сума s, границі якої дорівнює подвійний інтеграл, представиться в такому вигляді:

$$s = \sum f(r_h \cos \omega_k,\ r_h \sin \omega_k)\, p_{k,h}. \tag{3}$$

Уявляємо, що число променів і концентричних кіл нескінченно зростає так, що розміри елементарних площинок нескінченно маліють. Тоді при обчисленні границі суми s можна кожну площинку p_{kh} замінити еквівалентною їй величиною. Але коли, додержуючи звичайних позначень, ми приймемо:

$$\Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k, \quad \Delta r_h = r_{h+1} - r_h,$$

то, як ми бачили, $p_{kh} \approx r_h \Delta\omega_k \Delta r_h$. Тому замість (3) можемо розглядати таку суму:

$$s' = \sum f(r_h \cos \omega_k,\ r_h \sin \omega_k)\, r_h \Delta r_h \Delta\omega_k. \tag{4}$$

Приймаючи ж для скорочення писання

$$rf(r \cos \omega,\ r \sin \omega) = \Phi(r,\ \omega), \tag{5}$$

дістанемо

$$s' = \sum \Phi(r_h,\ \omega_k)\, \Delta r_h \Delta\omega_k, \tag{6}$$

і границя цієї суми дорівнює шуканому подвійному інтегралові G.

Ми можемо тепер піти двома шляхами: можемо всі доданки суми s' згрупувати в різні групи, відносячи в одну й ту ж групу всі доданки, що відповідають елементарним площинкам, які лежать в одному і тому ж кільці. Нехай

$$s'_h = \sum_{(r_h,\ r_{h+1})} \Phi(r_h,\ \omega_k)\, \Delta r_h \Delta\omega_k \tag{7}$$

— сума тієї групи доданків, які належать елементарним площинкам у кільці (r_h, r_{h+1}). Тоді очевидно, що s' дорівнює сумі всіх s'_h.

Про такий спосіб групування доданків ми будемо говорити, що ми спочатку підсумовуємо вздовж кожного кільця, а потім по кільцях. Це один спосіб. Але ми можемо також спочатку

сполучати в окремі групи всі доданки, що належать до елементарних площинок, які лежать в одній і тій же секторіальній смужці. Кожна така група дає свою суму, і сума всіх таких сум дасть суму s'.

Про цей спосіб ми говоритимемо, що ми підсумовуємо спочатку вздовж секторіальних смужок, а потім по смужках.

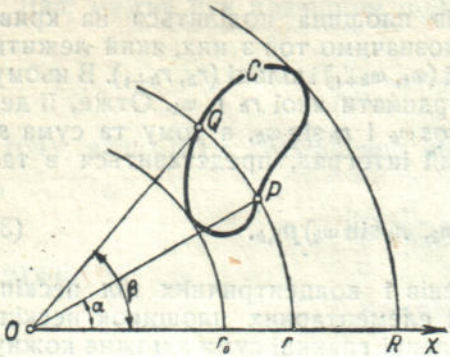

Рис. 154.

Той і другий спосіб після переходу до границі дає свою формулу для обчислення подвійного інтеграла.

В дальшому ми часто пропускатимемо індекси. Так, замість (6) і (7) будемо писати:

$$s' = \sum \Phi(r, \omega)\,\Delta r\,\Delta\omega, \qquad (6)$$

$$s'_h = \sum_{(r_h,\, r_{h+1})} \Phi(r, \omega)\,\Delta r\,\Delta\omega. \qquad (7)$$

Будемо підсумовувати спочатку вздовж кілець, а потім по кільцях.

Припустимо, що контур C (рис. 154) перетинається кожним колом радіуса r тільки в двох точках P і Q, і нехай α — кут нахилу променя OP, а β — кут нахилу променя OQ, при чому $\alpha < \beta$. Нехай також r_0 і R — найменше і найбільше з тих значень, які може приймати r, тобто нехай r_0 і R — ті границі, в яких повинен змінюватись r, щоб коло радіуса r перетинало контур C.

Для кожного певного значення r точки P і Q займають певні положення, кути ж α і β мають певні значення. Із зміною r будуть, взагалі кажучи, змінюватись α і β. Отже, α і β — деякі функції r. Нехай

$$\alpha = \varphi(r), \quad \beta = \psi(r). \qquad (8)$$

Ці функції ми повинні кожного разу знаходити з геометричних властивостей контура.

Розглянемо суму

$$s'_h = \sum_{(r_h,\, r_{h+1})} \Phi(r_h, \omega_k)\,\Delta r_h\,\Delta\omega_k = \sum_{(r_h,\, r_{h+1})} \Phi(r, \omega)\,\Delta r\,\Delta\omega$$

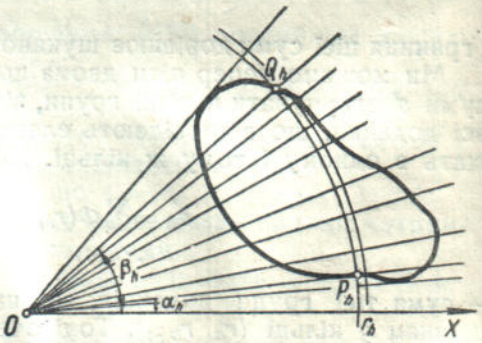

Рис. 155.

тих доданків, які відповідають кільцю (r_h, r_{h+1}).

Нехай (рис. 155) коло радіуса r_h перетинає контур C у точ-

ках P_h і Q_h. Через α_h і β_h позначимо кути нахилу променів OP_h і OQ_h до осі X. Згідно з (8)

$$\alpha_h = \varphi(r_h), \quad \beta_h = \psi(r_h). \tag{9}$$

Для всіх доданків, що належать до одного і того ж кільця, r_h і Δr_h — величини сталі, а тому

$$s'_h = \left\{ \sum_{(r_h,\ r_{h+1})} \Phi(r_h,\ \omega_k)\, \Delta\omega_k \right\} \Delta r_h.$$

Для одержання доданків цієї суми треба брати з величин ω_1, ω_2, $\omega_3, \ldots$ тільки ті, які є проміжними між α_h і β_h, тому ми запишемо, що

$$s'_h = \left\{ \sum_{\alpha_h}^{\beta_h} \Phi(r_h, \omega_k)\, \Delta\omega_k \right\} \Delta r_h. \tag{10}$$

Щоб дістати s', треба взяти суму всіх s'_h. Для цього треба взяти всі значення r_1, r_2, $r_3, \ldots$, проміжні між r і R. Це запишемо так:

$$s' = \sum s'_h = \sum_{r_0}^{R} \left\{ \sum_{\alpha_h}^{\beta_h} \Phi(r_h,\ \omega_k)\, \Delta\omega_k \right\} \Delta r_h. \tag{11}$$

Переходимо тепер до границі, припускаючи, що всі $\Delta\omega_k$ і Δr_h нескінченно маліють. Заміняючи фактор при Δr_h інтегралом, що нескінченно мало відрізняється від нього,

$$\int_{\alpha_h = \varphi(r_h)}^{\beta_h = \psi(r_h)} \Phi(r_h,\ \omega)\, d\omega = F(r_h), \tag{12}$$

послідовно знаходимо:

$$\lim s' = \lim \sum_{r_0}^{R} F(r_h)\, \Delta r_h = \int_{r_0}^{R} F(r)\, dr, \tag{13}$$

де ліва частина — шуканий подвійний інтеграл і де згідно з (12)

$$F(r) = \int_{\alpha = \varphi(r)}^{\beta = \psi(r)} \Phi(r,\ \omega)\, d\omega. \tag{14}$$

З (13) і (14), заміняючи функцію Φ її значенням, дістаємо теорему:

Якщо контур C (рис. 154) перетинається тільки в двох точках усяким колом з центром в O, то

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{r_0}^{R} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\omega,\ r\sin\omega)\, r\, d\omega \right\} dr.$$

Подивимось тепер, що ми одержимо, якщо доданки суми s' спочатку збиратимемо не по кільцях, а по секторіальних смугах.

Припустимо, що всяким променем, нахиленим під кутом ω до полярної осі, контур C перетинається не більше ніж у двох точках P і Q, радіуси-вектори яких позначимо через ρ_1 і ρ_2. Нехай

$$\rho_1 = \varphi(\omega), \quad \rho_2 = \psi(\omega).$$

Через ω_0 і Ω позначимо ті границі, в яких повинен лежати кут ω, щоб промінь, нахилений до осі x під кутом ω, перетинав контур.

Як і раніше, маємо:

$$s' = \sum f(r_h \cos\omega_k, \quad r_h \sin\omega_k)\, r_h\, \Delta r_h\, \Delta\omega_k = \sum \Phi(r_h, \ \omega_k)\, \Delta r_h\, \Delta\omega_k.$$

Нехай s'_k — сума доданків, що належать до секторіальної смужки $(\omega_k, \ \omega_{k+1})$:

$$s'_k = \sum_{(\omega_k, \ \omega_{k+1})} \Phi(r_h, \ \omega_k)\, \Delta r_h\, \Delta\omega_k.$$

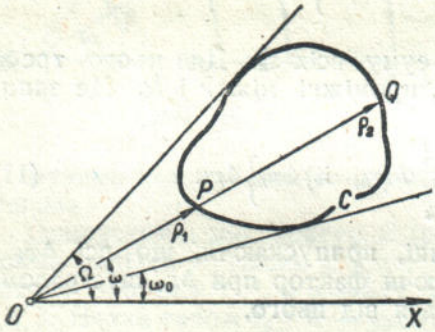

Рис. 156.

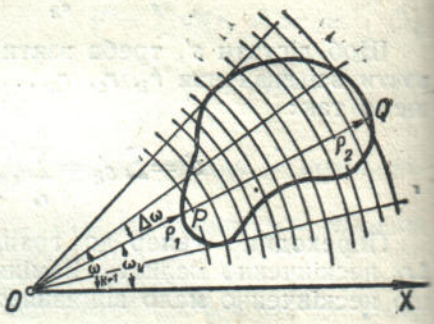

Рис. 157.

Всі ці доданки мають спільний множник $\Delta\omega_k$; з чисел же $r_1, r_2, r_3, \ldots$ в них входять тільки ті, які проміжні між ρ_1 і ρ_2, а тому

$$s'_k = \left\{ \sum_{\rho_1 = \varphi(\omega_k)}^{\rho_2 = \psi(\omega_k)} \Phi(r_h, \ \omega_k)\, \Delta r_h \right\} \Delta\omega_k.$$

Зрозуміло, що сума s' може бути представлена так:

$$s' = \sum_{\omega_0}^{\Omega} \left\{ \sum_{\rho_1 = \varphi(\omega_k)}^{\rho_2 = \psi(\omega_k)} \Phi(r_h, \ \omega_k)\, \Delta r_h \right\} \Delta\omega_k.$$

Отже,

$$\lim s' = \lim \sum_{\omega_0}^{\Omega} \left\{ \int_{\varphi(\omega_k)}^{\psi(\omega_k)} \Phi(r, \ \omega_k)\, dr \right\} \Delta\omega_k = \int_{\omega_0}^{\Omega} \left\{ \int_{\varphi(\omega)}^{\psi(\omega)} \Phi(r, \ \omega)\, dr \right\} d\omega.$$

Теорема. **Якщо контур перетинається кожним променем не більше як у двох точках** (рис. 156), то

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\omega_0}^{\Omega} \left\{ \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(r\cos\omega, \ r\sin\omega)\, r\, dr \right\} d\omega.$$

Отже, ми маємо дві формули для обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах. З них можна скористатись тією або іншою, залежно від того, чи перетинається контур тільки в двох точках променем або колом.

Щоб легше втримати в пам'яті ці формули, повторимо доведення, пропускаючи індекси у букв. Ми уявляємо площу поділеною на елементарні криві чотирикутники. Площа якогонебудь чотирикутника (рис. 158), полярні координати вершини якого є r і ω, еквівалентна

$$r dr \cdot d\omega.$$

Тому подвійний інтеграл є границя суми

$$\sum f(r\cos\omega,\ r\sin\omega)\, r\, dr\, d\omega.$$

Згруповуючи доданки по кільцях або по секторіальних смужках, ми в границі дістанемо перше інтегрування по r або по ω.

Уважне розглядання рисунка вкаже нам границі кожного інтегрування.

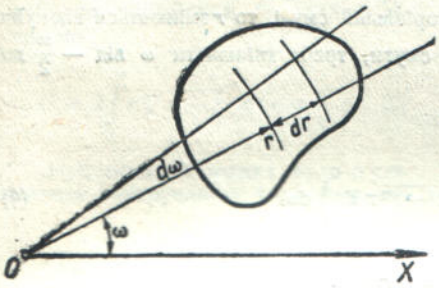

Рис. 158.

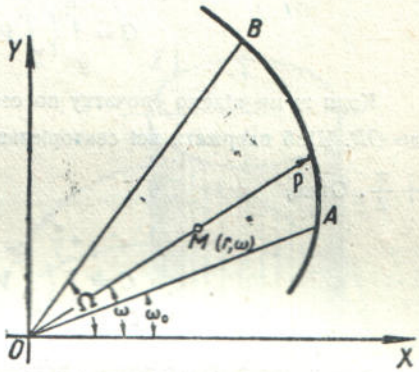

Рис. 159.

Приклади 1. (Рис. 159). Нехай потрібно обчислити подвійний інтеграл

$$G = \iint F(x,\ y)\, dx\, dy \tag{1}$$

по площі, обмеженій прямими OA і OB, нахиленими до осі X під кутами ω_0 і Ω, і кривою AB, рівняння якої

$$\rho = f(\omega). \tag{2}$$

В полярних координатах маємо:

$$G = \iint F(r\cos\omega,\ r\sin\omega)\, r\, dr\, d\omega.$$

Будемо перше інтегрування виконувати по r. Коли точка M рухається по променю OM, нахиленому під кутом ω, то r змінюється від нуля до ρ, а тому

$$G = \int_{\omega_0}^{\Omega} \left\{ \int_0^{\rho=f(\omega)} F(r\cos\omega,\ r\sin\omega)\, r\, dr \right\} d\omega. \tag{3}$$

В окремому випадку, якщо тотожно $F(x, y) = 1$, то G дорівнює площі AOB. Позначаючи цю площу через u, з (3) маємо:

$$u = \int_{\omega_0}^{\Omega} \left\{ \int_0^{\rho} r\,dr \right\} d\omega = \frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\Omega} \rho^2\,d\omega,$$

і ми дістали знайомий вираз для площі в полярних координатах.

2. Нехай потрібно обчислити інтеграл (рис. 160):

$$G = \iint \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy \tag{1}$$

по площі круга діаметра a, центр якого лежить на осі X у точці $\frac{a}{2}$. Позначаючи через r і ω полярні координати якоїнебудь точки M, маємо:

$$G = \iint \sqrt{a^2 - r^2}\,r\,dr\,d\omega. \tag{2}$$

Інтегруємо спочатку по кільцю PQ довільного радіуса r; при цьому ω змінюється від α до β, де $\alpha = -\beta$. Збираючи потім усі кільця, ми повинні зміняти r від нуля до a. Отже,

$$G = \int_0^a \left\{ \int_\alpha^\beta \sqrt{a^2 - r^2}\,r\,d\omega \right\} dr. \tag{3}$$

Коли ж ми підемо спочатку по секторіальній смузі, то r змінюється від нуля до OR. Щоб одержати всі секторіальні смуги, треба змінювати ω від $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Отже,

$$G = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{OR} \sqrt{a^2 - r^2}\,r\,dr \right\} d\omega. \tag{4}$$

Помічаючи, що з прямокутного трикутника OQA:

$$r = a\cos\beta, \quad \beta = \arccos\frac{r}{a}$$

і що $\alpha = -\beta$, ми з (3) одержуємо:

$$G = \int_0^a \left\{ \int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{+\arccos\frac{r}{a}} \sqrt{a^2 - r^2}\,r\,d\omega \right\} dr. \tag{5}$$

Оскільки $OR = a\cos\omega$, то (4) дає:

$$G = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{a\cos\omega} \sqrt{a^2 - r^2}\,r\,dr \right\} d\omega. \tag{6}$$

Помічаючи, що

$$\int \sqrt{a^2 - r^2}\,r\,dr = \frac{1}{2} \int \sqrt{a^2 - r^2}\,dr^2 = -\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} + C,$$

ми з (6) знаходимо:

$$G = \frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1 - \sqrt{\sin^6 \omega})\, d\omega. \tag{7}$$

Було б грубою помилкою прийняти, що

$$\sqrt{\sin^6 \omega} = \sin^3 \omega.$$

Поки ω змінюється від нуля до $+\frac{\pi}{2}$, це правильно; але якщо ω лежить між нулем і $-\frac{\pi}{2}$, то $\sqrt{\sin^6 \omega} = -\sin^3 \omega$. Через це ми повинні поділити інтеграл (7) на два інтеграли. Маємо:

$$G = \frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 + \sin^3 \omega)\, d\omega + \frac{a^3}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \omega)\, d\omega = \frac{(3\pi - 4)\, a^3}{9}. \tag{8}$$

Коли ж ми станемо обчисляти інтеграл G за формулою (5), то легко знайдемо внутрішній інтеграл і дістанемо

$$G = 2\int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2} \arccos\frac{r}{a}\, dr. \tag{9}$$

Цей інтеграл можна було б обчислити інтегруванням частинами, але

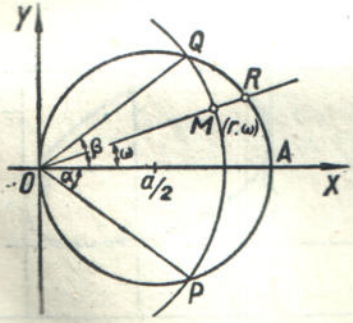

Рис. 160.

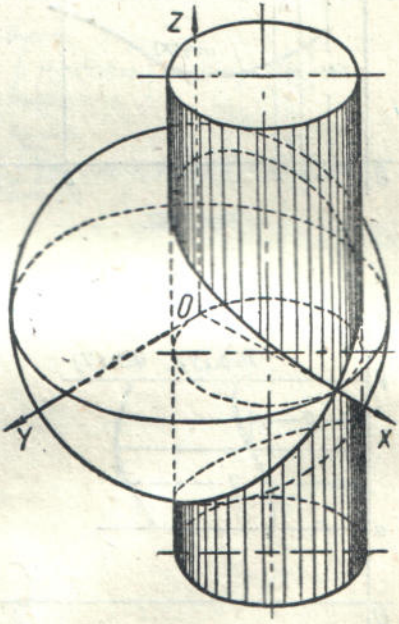

Рис. 161.

обчислення були б складні. Навпаки, знаючи (8), ми робимо висновок, що

$$\int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2} \arccos\frac{r}{a}\, dr = \frac{(3\pi - 4)\, a^3}{18}. \tag{10}$$

Ми бачимо, що різні способи обчислення подвійних інтегралів дають можливість знаходити значення деяких звичайних інтегралів.

Розв'яжемо тепер так звану задачу Вівіані. На радіусі сфери, який дорівнює a, побудоване в площині екватора, як на діаметрі, коло, а на ньому прямий циліндр. Обчислити об'єм, вирізуваний із сфери цим циліндром.

Помістивши центр сфери в початку координат, будуємо на радіусі (рис. 161), який збігається з віссю X, як на діаметрі, коло C в площині XY і на ньому циліндричну поверхню. Одержуємо циліндроід, обмежений зверху поверхнею сфери. Легко бачити, що об'єм його дається інтегралом (1).

§ 169. Висновок.

1. Якщо підінтервали Δx нескінченно малі і a' і b' нескінченно мало відрізняються від a і b, то

$$\sum_{a'}^{b'} f(x)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon,$$

де ε нескінченно мале.

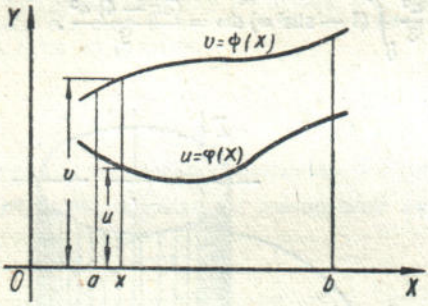

Рис. 162.

2. Подвійний інтеграл обчисляється:

якщо площа інтеграції першого типу,— за формулою:

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_{u=\varphi(x)}^{v=\psi(x)} f(x, y)\,dy \right\} dx;$$

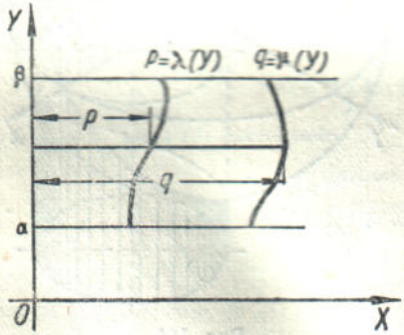

Рис. 163.

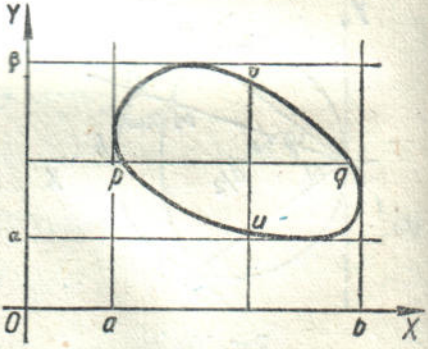

Рис. 164.

якщо площа другого типу,— то за формулою:

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)} f(x, y)\,dx \right\} dy;$$

для замкненого контура

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_{u=\varphi(x)}^{v=\psi(x)} f(x, y)\,dy \right\} dx = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)} f(x, y)\,dx \right\} dy.$$

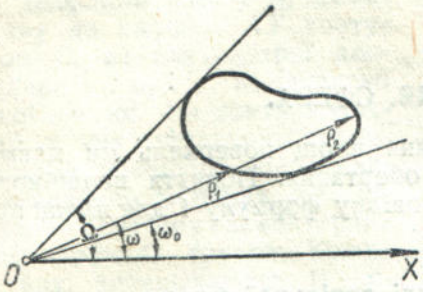

Рис. 165.

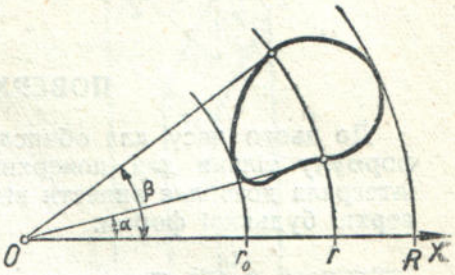

Рис. 166.

В полярних координатах залежно від типу площі маємо:

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \int_{r_0}^{R} \left\{ \int_{\alpha=\varphi(r)}^{\beta=\psi(r)} f(r\cos\omega,\ r\sin\omega)\,r\,d\omega \right\} dr;$$

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \int_{\omega_0}^{\Omega} \left\{ \int_{\rho_2=\lambda(\omega)}^{\rho_1=\mu(\omega)} f(r\cos\omega,\ r\sin\omega)\,r\,dr \right\} d\omega.$$

ПОВЕРХНЯ. СФЕРА.

До цього часу для обчислення площ поверхень ми маємо формулу тільки для поверхні обертання. Поняття подвійного інтеграла дозволяє вивести відповідну формулу і для площі поверхні будьякої форми.

§ 170. Площа поверхні довільної форми.

Нехай дана поверхня віднесена до деякої системи декартових прямокутних координат. Якщо вона хоча б деякими прямими, паралельними осі Z, перерізається в кількох точках, то поділимо її на частини, кожна з яких усякою прямою, паралельною осі Z, перерізалася б тільки в одній точці, і будемо розглядати одну таку частину, яку й називатимемо даною поверхнею. Для неї апліката z буде однозначною неперервною функцією абсциси x і ординати y. Нехай

$$z = f(x, \ y).$$

Ми припустимо, що частинні похідні

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \tag{1}$$

теж неперервні.

Позначимо через γ кут між віссю Z і нормаллю MN до поверхні в довільній точці M. Додатний напрям цієї нормалі виберемо так, щоб кут γ був гострий (рис. 167). Як відомо з диференціальної геометрії,

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{2}$$

Через те що p і q — функції x і y, то $\cos\gamma$ — теж деяка цілком означена функція тих же змінних. Нехай

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \varphi(x, \ y), \ \cos\gamma = \frac{1}{\varphi(x, \ y)}. \tag{3}$$

Проведемо на площині XY замкнений контур C (рис. 168), що не перетинається із самим собою, і побудуємо на ньому циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі Z. Той контур, в якому вона переріже дану поверхню, позначимо через C'; площу поверхні, обмежену цим контуром C', позначимо через S.

Перед тим як виводити формулу для обчислення площі S, треба було б точно означити, що ми розумітимемо під площею кривої поверхні. Але це означення ми введемо в процесі виведення самої формули.

Поділимо площу A, обмежену на площині XY контуром C, на елементарні площинки $u_1, u_2, \ldots, u_n$ однаково якої форми. На контурі кожної з них побудуємо циліндричну поверхню, перпендикулярну до площини XY. Дістанемо систему елементарних циліндричних трубок. Кожна з них, перерізаючись із поверхнею S, виріже з неї відповідний кусок. Через t_k позначимо той кусок поверхні, який вирізується з неї трубкою, що стоїть над площинкою u_k. На кожному такому куску t_k відмітимо теж зовсім довільно точку M_k, проекція якої на площину XY нехай буде точка s_k з координатами ξ_k, η_k. Через те що точка M_k взята на куску t_k, то очевидно, що точка s_k лежить на площинці u_k (рис. 167).

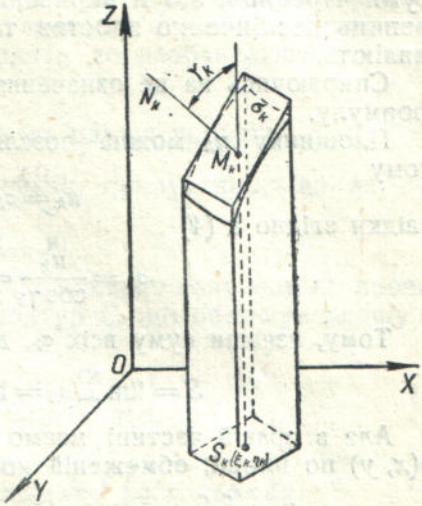

Рис. 167.

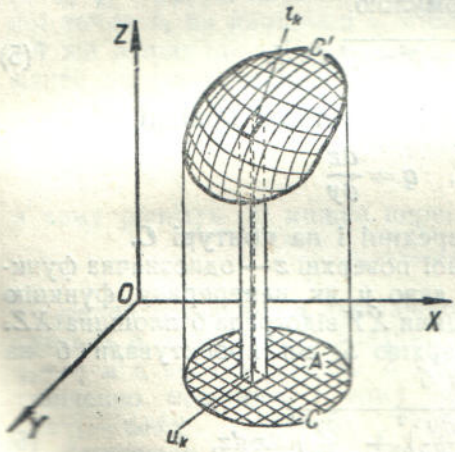

Рис. 168.

Нехай M_kN_k — нормаль до поверхні в точці M_k; гострий кут її з віссю Z позначимо через γ_k. Згідно з (3) маємо:

$$\cos\gamma_k = \frac{1}{\varphi(\xi_k, \eta_k)}. \qquad (4)$$

Проведемо тепер у точці M_k дотичну площину. З неї трубка, що стоїть над площинкою u_k, виріже якусь частину, яку назвемо **черепицею** і площу якої позначимо через σ_k.

Уявимо, що ми виконали таку побудову для кожної елементарної трубки. Отже, до кожного куска, на які поверхня поділена трубками, проведена в якійнебудь його точці дотична площина і з неї залишена тільки та частина, яка виріжеться трубкою. В результаті ми матимемо всю поверхню поділеною на куски $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ і кожного куска t_k дотикатиметься в якійсь його точці черепиця σ_k. Вся поверхня буде вкрита такими черепицями.

Введемо таке

Означення. **Площею кривої поверхні назвемо границю суми черепиць, що її вкривають, у припущенні, що число черепиць нескінченно зростає так, що розміри їх нескінченно маліють.**

Спираючись на це означення, вже неважко дістати шукану формулу.

Площинку u_k можна розглядати як проекцію черепиці σ_k, тому

$$u_k = \sigma_k \cos \gamma_k,$$

звідки згідно з (4)

$$\sigma_k = \frac{u_k}{\cos \gamma_k} = \varphi(\xi_k, \eta_k)\, u_k.$$

Тому, взявши суму всіх σ_k, дістанемо

$$S = \lim \sum \sigma_k = \lim \sum \varphi(\xi_k, \eta_k)\, u_k.$$

Але в правій частині маємо подвійний інтеграл від функції $\varphi(x, y)$ по площі, обмеженій контуром C:

$$S = \iint \varphi(x, y)\, dx\, dy = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

Теорема. **Площа S поверхні**

$$z = f(x, y),$$

обмеженої контуром, який проектується на площину XY контуром C, визначається за формулою

$$S = \iint_C \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy \tag{5}$$

при умові, що сама функція z і її частинні похідні

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

неперервні для всіх точок усередині і на контурі C.

Ми припускали, що для даної поверхні z — однозначна функція x і y. Якби виявилося, що дано y як неперервну функцію x і z, тоді, природно, роль площини XY відограла б площина XZ. Контур C', який обмежує поверхню S, ми проектували б на площину XZ і замість (5) мали б

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz, \tag{6}$$

при чому інтеграл брали б по частині площини XZ, обмеженої проекцією на неї контура C.

Якби для поверхні була дана абсциса x як неперервна функція y і z, то зрозуміло, що

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz,$$

де інтеграл береться по частині площини YZ, обмеженої проекцією на неї контура C'.

Одержані формули для площі кривої поверхні мають велике теоретичне значення. Але в прикладаннях навіть для простіших поверхень вони звичайно приводять до необчислюваних інтегралів.

§ 171. Нескінченно мала площа поверхні.

Зберігаючи попередні позначення, припустимо, що на поверхні

$$z = f(x, y)$$

маємо нескінченно малу площу σ, обмежену контуром C', проекція якого на площину XY дає контур C, що обмежує площу u. Нехай, як і раніше,

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{1}{\varphi(x, y)}. \tag{1}$$

За доведеним

$$\sigma = \iint\limits_u \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy = \iint\limits_u \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

За теоремою про середнє значення інтеграла маємо:

$$\sigma = \varphi(\xi_1, \eta_1)\, u, \tag{2}$$

де ξ_1, η_1 — координати якоїсь, хоч і невідомої, але цілком певної точки s_1 на площинці σ. Нехай s — довільно взята точка на тій же площинці σ. Через γ і γ_1 позначимо кути з віссю Z нормалей до σ в точках s і s_1. Згідно з (1)

$$\cos\gamma_1 = \frac{1}{\varphi(\xi_1, \eta_1)},$$

а тому рівність (2) можна переписати у формі

$$u = \sigma\cos\gamma_1. \tag{3}$$

Нехай площинка σ нескінченно маліє так, що контур C' стягується в одну точку. Зрозуміло, що в такому випадку різниця $\gamma_1 - \gamma$ між кутами з віссю Z нормалей у точках s і s_1 теж нескінченно малітиме, а тому нескінченно малітиме і різниця $\cos\gamma_1 - \cos\gamma$.

Заміняючи в (3) фактор $\cos\gamma_1$ нескінченно мало відмінним від нього фактором $\cos\gamma$, робимо висновок, що

$$u \approx \sigma\cos\gamma. \tag{4}$$

Площинка σ є частина кривої поверхні. Уявимо, що ця площинка є плоска площинка, вміщена в просторі так, що площина її перпендикулярна до нормалі в точці s. В такому випадку кут γ був би кутом між площиною площинки σ і площиною XY,

а тому проекція на площину XY цієї площинки, яку мислимо як плоску, дорівнювала б точно $\sigma \cos\gamma$. Беручи до уваги це і рівність (4), дістаємо теорему:

При обчисленні проекції нескінченно маліючої кривої площинки σ завжди можна, з погляду еквівалентності, розглядати нескінченно маліючу площинку як плоску площинку, перпендикуляром до якої є нормаль до поверхні в якійнебудь точці цієї площинки.

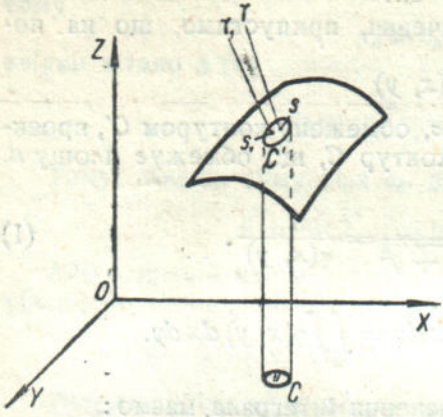

Рис. 169.

Стало звичаєм усяку нескінченно маліючу частину поверхні називати елементом поверхні. Отже,

з погляду еквівалентності всякий нескінченно маліючий елемент кривої поверхні можна розглядати як плоский елемент, площина якого пристає до дотичної площини в будьякій точці розглядуваного кривого елемента.

Цим результатом дуже зручно користуватись для швидкого виведення формули для поверхні будьякого типу. Міркуємо так: нехай потрібно обчислити поверхню S, обмежену контуром C, проекція якого на площину XY є контур C'. Розбиваємо всю поверхню S на елементарні криві площинки.

Нехай $d\sigma$ — одна з них і нехай γ — кут з віссю Z нормалі в якійнебудь її точці.

Всі елементарні криві площинки проектуємо на площину XY. Нехай взагалі du — проекція площинки $d\sigma$. Очевидно, що ці площинки du вкриють усю площу, обмежену контуром C'. За доведеним

$$du \approx \cos\gamma\, d\sigma, \quad d\sigma \approx \frac{du}{\cos\gamma}. \tag{5}$$

Але зрозуміло, що S точно дорівнює сумі всіх $d\sigma$, а тому

$$S = \lim \sum d\sigma.$$

Заміняючи $d\sigma$ з (5) еквівалентною величиною, маємо

$$S = \lim \sum \frac{du}{\cos\gamma} = \iint\limits_{C'} \frac{du}{\cos\gamma} = \iint\limits_{C'} \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy.$$

§ 172. Сфера.

Нехай K — точка на даній сфері радіуса a. Через неї і деяку точку M на сфері проведемо площину, що проходить через

центр сфери. В перерізі із сферою ця площина дасть дугу KM так званого великого круга. Довжину цієї дуги позначимо через l. Якщо λ — кут між радіусами OK і OM з центра до кінців дуги, то

$$l = a\lambda$$

і при $a = 1$ маємо $l = \lambda$. Отже,

якщо радіус сфери дорівнює одиниці, то довжина будьякої дуги великого круга дорівнює центральному кутові, що спирається на неї.

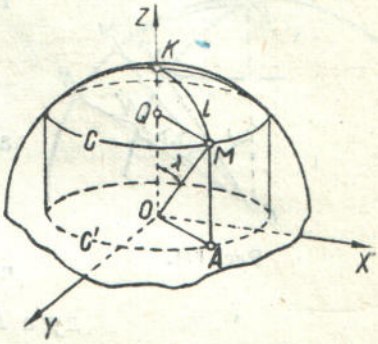

Рис. 170.

Через те що на сфері роль прямих ліній відограють дуги великих кругів, то за віддаль на ній між двома її точками приймають довжину дуги великого круга, що сполучає ці точки.

Нехай на сфері радіуса a описане навколо точки K коло C дугою $KM = l$. Довжину кола позначимо через s, площу сфери, обмежену нею, — через u. Обчислимо його.

Початок координат помістимо в центрі, спрямувавши вісь Z через K. Нехай C' і A — проекції на площину XY кола C і точки M. Рівняння сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

звідки для верхньої половини

$$z = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

$$p = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad q = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

а тому

$$u = \iint\limits_{C'} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{C'} \frac{a\, dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

де інтеграл береться по площі, обмеженій колом C', радіус якого $OA = a \sin\lambda = a \sin\frac{l}{a}$. Переходячи до полярних координат, дістанемо:

$$u = \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{OA} \frac{ar\, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right\} d\omega = \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \Big| - a\sqrt{a^2 - r^2} \Big|_0^{a \sin\lambda} \right\} d\omega,$$

і остаточно

$$u = 2\pi a^2 (1 - \cos\lambda), \quad \lambda = \frac{l}{a}. \tag{1}$$

Якщо з M опустимо перпендикуляр MQ на вісь Z, то він буде звичайним радіусом для кола C, а тому для довжини цього кола маємо:

$$s = 2\pi MQ = 2\pi a \sin\lambda. \qquad (2)$$

Проведемо з точки K два сферичні радіуси KM і KM', тобто дві дуги великого круга до точок M і M' кола C. Фігуру KMM' (рис. 171) назвемо сферичним сектором; нехай u' — його площа.

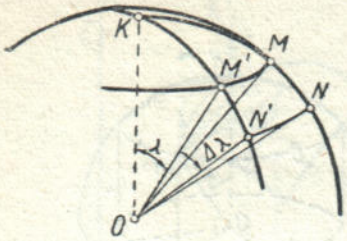

Рис. 171.

Якщо α — кут між дугами KM і KM', то зрозуміло, що

$$\frac{u'}{u} = \frac{\alpha}{2\pi},$$

а тому з (1) випливає, що

$$u' = \alpha a^2 (1 - \cos\lambda). \qquad (3)$$

Також згідно з (2) неважко бачити, що

$$\text{дуга } MM' = \alpha a \sin\lambda. \qquad (4)$$

Надамо кутові λ приросту $\Delta\lambda$. Тоді нехай точки M і M' пересунуться в N і N'. Замість сектора MKM' ми одержимо сектор NKN'. Площу його знайдемо, замінивши в (3) λ через $\lambda + \Delta\lambda$. Для дальшого нам дуже важливо знайти площу фігури $MNN'M'$, яку називатимемо *кривим сферичним чотирикутником*. Очевидно, що вона дорівнює приростові $\Delta u'$, якого зазнає площа сектора u', коли λ дістає приріст $\Delta\lambda$. Позначимо праву частину (3) через $f(\lambda)$. Тоді

$$\Delta u' = f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda).$$

Нехай $\Delta\lambda$ нескінченно мале. Ми знаємо, що нескінченно малий приріст функції еквівалентний диференціалові функції, а тому з (3) випливає

$$\Delta u' \approx \alpha a^2 \sin\lambda \Delta\lambda. \qquad (5)$$

Права частина піддається цікавому тлумаченню. Обчислимо довжини дуг MM' і MN. Згідно з (4)

$$MM' = \alpha a \sin\lambda,$$

і неважко бачити, що

$$MN = a\,\Delta\lambda.$$

Тепер зрозуміло, що

$$\Delta u' \approx MM' \cdot MN. \qquad (6)$$

Теорема. **З погляду еквівалентності площу нескінченно малого кривого сферичного чотирикутника можна розглядати як площу плоского прямокутника.**

Цим результатом ми незабаром скористуємось у теорії потрійних інтегралів.

§ 173. Висновок.

1. Площа поверхні будьякої форми визначається за формулою:

$$S = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

2. Площа нескінченно малого кривого сферичного чотирикутника еквівалентна добуткові двох його суміжних сторін.

ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ.

Поняття потрійного інтеграла природно з'являється, якщо до функцій трьох змінних прикласти ті ж ідеї, які приводять до понять простого і подвійного інтеграла.

§ 174. Означення потрійного інтеграла.

Нехай усередині замкненої поверхні S лежить кілька поверхень $S_1, S_2, S_3, \ldots$ теж замкнених (рис. 172). Частину простору, яка лежить усередині S і поза поверхнями $S_1, S_2, S_3, \ldots$, називатимемо об'ємом. Хордою об'єму назвемо всякий відрізок, що сполучає будьякі дві точки, які лежать на поверхнях, що обмежують об'єм.

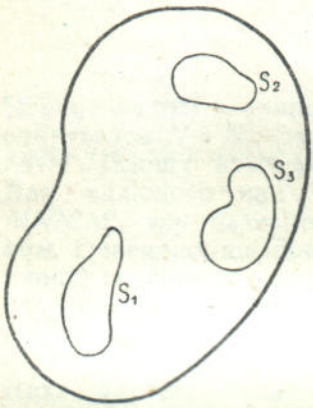

Рис. 172.

Розміром, або діаметром, об'єму називають довжину найбільшої хорди, яку можна провести між двома точками поверхень, що обмежують об'єм.

Розмір, наприклад, паралелепіпеда є довжина його найбільшої діагоналі. Розмір еліпсоїда — довжина його найбільшої осі.

Нехай $f(x, y, z)$ — функція, неперервна в усіх точках, що лежать усередині або на поверхні якогось об'єму V*.

Поділимо цей об'єм на досить малі частини довільної форми, які назвемо *елементарними об'ємами*, або навіть просто *елементами*. Перенумерувавши їх в якому завгодно порядку, позначимо їх символами $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$. Всередині або на поверхні кожного елемента v_k добираємо зовсім довільну точку з координатами ξ_k, η_k, ζ_k і помножуємо значення функції в цій точці на самий об'єм v_k. Дістанемо добуток

$$f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, v_k.$$

---

* Функція може бути неперервна всередині замкненої поверхні і перервна на ній. Так, наприклад, якщо Σ — поверхня сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

то функція

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}$$

неперервна всередині сфери і перетворюється в нескінченність на її поверхні.

Склавши такі добутки для кожного елементарного об'єму, позначимо через s суму всіх одержаних таким способом добутків:

$$s = f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) v_1 + f(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) v_2 + f(\xi_3, \eta_3, \zeta_3) v_3 + \ldots + f(\xi_n, \eta_n, \zeta_n) v_n,$$

або коротше

$$s = \sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k.$$

Коли ж символом dv ми позначимо загальний тип елементарного об'єму, який називається також диференціальним об'ємом, то суму s ми можемо представити в такому вигляді:

$$s = \sum f(x, y, z)\, dv,$$

де під x, y, z ми повинні розуміти координату якоїнебудь точки, що лежить усередині розглядуваного об'єму dv.

Уявимо тепер нескінченний процес, який полягає в тому, що від одного поділу тіла на елементи ми переходимо до дальшого поділу так, що розміри всіх елементів нескінченно маліють. В такому випадку сума s стає сумою нескінченно маліючих доданків у нескінченно зростаючому числі, тобто стає інтегральною сумою. Границя її називається потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$, поширеним на даний об'єм, і позначається або так:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv,$$

або коротше так:

$$\int\limits_V f(x, y, z)\, dv,$$

де замість символа dv може бути поставлений усякий інший символ, взятий для позначення типу елементарного об'єму. Внизу знака інтеграла часто приписують символи, які повинні вказувати на той об'єм, по якому береться інтеграл.

Отже,

потрійним інтегралом від даної неперервної функції, поширеним по даному об'єму, називається границя суми всіх добутків, одержуваних від множення кожного елементарного об'єму на значення функції в якійнебудь точці цього об'єму:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv = \lim \sum f(x, y, z)\, dv.$$

Розглядаючи суму

$$s = \sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k,$$

ми бачимо, що доданки її залежать від того, на які елементарні об'єми ми поділимо дане тіло і як проведемо добір точки в кожному об'ємі. Постає питання: чи не буде границя суми s залежати як від форми елементарних об'ємів, так і від вибору точок у них?

Зрозуміло, що в сумі s множники v_k є те, що ми називаємо елементами інтеграції, а множники $f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ — фактори при них.

Якщо всередині об'єму v_k замість точки (ξ_k, η_k, ζ_k) ми доберемо іншу точку $(\xi'_k, \eta'_k, \zeta'_k)$, то сума s набуде нового значення:

$$s' = \sum f(\xi'_k, \eta'_k, \zeta'_k) v_k.$$

Але через те що точки (ξ_k, η_k, ζ_k) і $(\xi'_k, \eta'_k, \zeta'_k)$ лежать усередині одного і того ж елементарного об'єму і через те що розміри елементарних об'ємів нескінченно малі, то всі різниці

$$f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) - f(\xi'_k, \eta'_k, \zeta'_k)$$

теж нескінченно малі. Отже, фактори сум s і s' відрізняються один від одного нескінченно мало, а тому за другим принципом

$$\lim s = \lim s'.$$

Так ми переконуємось, що границя суми s, тобто значення потрійного інтеграла, не залежить від добору точок усередині елементарних об'ємів.

Важче довести, що границя суми s не залежить також від форми елементарних об'ємів. Ми приймемо це покищо без доведення. Виправданням такого припущення може в певній мірі бути те механічне тлумачення потрійного інтеграла, яке ми зараз розглянемо.

§ 175. Геометричне значення потрійного інтеграла.

Потрійний інтеграл має просте геометричне значення в тому випадку, коли підінтегральна функція дорівнює одиниці. Справді, якщо в основній рівності

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv = \lim \sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k$$

приймемо функцію $f(x, y, z)$ тотожно рівною одиниці, то маємо

$$\iiint\limits_V dv = \lim \sum v_k.$$

Але сума всіх елементарних об'ємів, очевидно, дорівнює даному об'ємові V, а тому

$$\iiint\limits_V dv = V,$$

і ми дістаємо теорему: потрійний інтеграл від функції, яка дорівнює одиниці, дорівнює об'ємові того тіла, по якому він поширений.

Але в загальному випадку, коли підінтегральна функція не дорівнює одиниці, потрійний інтеграл не має геометричного значення, бо його не має і функція трьох змінних.

§ 176. Механічні прикладання потрійного інтеграла.

Нехай маємо неоднорідне тіло. Візьмемо всередині його якунебудь точку p і мислено виділимо з тіла досить малий об'єм v так, щоб точка p була всередині нього. Таким способом розміщений об'єм називатимемо об'ємом навколо точки p.

Якщо m — маса, вміщена всередині об'єму v, то **відношення**

$$\frac{m}{v},$$

тобто відношення маси речовини до того об'єму, в якому вона міститься, називається середньою густиною речовини в розглядуваному об'ємі.

Якщо ми братимемо різні об'єми навколо точки p, то в загальному випадку ми одержуватимемо різні середні густини.

Уявимо, що об'єм v змінюється, нескінченно маліючи так, що в границі перетворюється в точку p. Для простоти можемо уявити, що об'єм v є куля з центром у p і що радіус цієї кулі нескінченно маліє.

Та границя, до якої прямує середня густість

$$\frac{m}{v}$$

нескінченно маліючого об'єму v, побудованого навколо точки p, називається густиною тіла в точці p.

Отже, якщо

$$\lim_{v \to 0} \frac{m}{v} = \rho, \tag{1}$$

то ρ — густина тіла.

Припустимо тепер, що v — нескінченно малий об'єм, тобто об'єм, який вводиться як допоміжна величина і який тільки в майбутньому в остаточній формулі буде припущений нескінченно маліючим. Позначивши через ε різницю між середньою і справжньою густиною, дістанемо рівність

$$\frac{m}{v} = \rho + \varepsilon, \tag{2}$$

де ε нескінченно маліє водночас із v. Отже, якщо v — нескінченно малий об'єм, то і ε нескінченно мале. Маємо

$$m = \rho v + \varepsilon v. \tag{3}$$

В правій частині обидва доданки нескінченно малі, але порядок малості другого вищий від порядку першого, а тому

$$m \approx \rho v. \tag{4}$$

До того ж висновку можна прийти і так: з (3) маємо

$$\frac{m}{\rho v} = 1 + \frac{\varepsilon}{\rho},$$

звідки

$$\lim_{v \to 0} \frac{m}{\rho v} = 1,$$

а тому (4). Дістаємо теорему:

Маса речовини, вміщеної в нескінченно малому об'ємі, еквівалентна добуткові густини в будьякій точці об'єму на об'єм:

$$m \approx \rho v. \tag{5}$$

Розглянемо тепер таку задачу: обчислити масу неоднорідного тіла, знаючи його густину ρ в кожній точці.

Рис. 173.

Очевидно, що ρ є деяка функція координат точки. Нехай

$$\rho = f(x, y, z).$$

Поділяємо тіло на елементарні об'єми

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$$

і нехай m_k — маса речовини в об'ємі v_k. Якщо ρ_k — густина в якійнебудь точці (ξ_k, η_k, ζ_k) цього об'єму, то, як ми бачили,

$$m_k \approx \rho_k v_k \approx f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k. \tag{6}$$

Якщо тепер M — маса всього тіла, то

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n = \sum m_k,$$

і ця рівність, справедлива при всякому поділі на елементарні об'єми, буде справедлива і в границі:

$$M = \lim \sum m_k.$$

Заміняючи ж кожне нескінченно мале m_k еквівалентною йому величиною, дістаємо:

$$M = \lim \sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k = \lim \sum f(x, y, z)\, dv.$$

Але за означенням права частина є потрійний інтеграл, а тому

Теорема. **Маса, вміщена в об'ємі, виражається потрійним інтегралом, поширеним на об'єм, а саме**

$$M = \iiint f(x, y, z)\, dv,$$

де $f(x, y, z)$ — густина тіла в точці (x, y, z).

Якою б не була дана функція $f(x, y, z)$, ми завжди можемо уявити собі тіло, густина якого в кожній точці дорівнює значенню даної функції в цій точці:

$$\rho = f(x, y, z).$$

Отже, всякий потрійний інтеграл з механічного погляду завжди можна розглядати як масу якогось тіла.

Маса тіла не залежить від того, на які елементарні об'єми ми поділятимемо тіло, щоб утворити інтегральну суму

$$\sum \rho_k v_k = \sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k,$$

тому ми одержуємо доведення, що границя інтегральної суми не залежить від способу поділу тіла на елементи.

Розглянемо також таку задачу: знайти координати центра ваги тіла, знаючи густину тіла в кожній його точці.

Зберігаючи попередні позначення, ми в кожному об'ємі v_k беремо довільно точку q_k з координатами ξ_k, η_k, ζ_k і заміняємо кожний елементарний об'єм v_k маси m_k однією матеріальною точкою тієї ж маси m_k, зосередженої в точці q_k. Тоді дістанемо систему матеріальних точок $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$. Центр ваги цієї системи ізольованих точок визначиться за формулами:

$$\begin{aligned} Mx_c &= m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + \ldots + m_n\xi_n = \sum m_k\xi_k, \\ My_c &= m_1\eta_1 + m_2\eta_2 + \ldots + m_n\eta_n = \sum m_k\eta_k, \\ Mz_c &= m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 + \ldots + m_n\zeta_n = \sum m_k\zeta_k. \end{aligned} \tag{7}$$

Переходимо до границі, припускаючи, що всі v_k нескінченно маліють. Ті границі, до яких при цьому прямують x_c, y_c, z_c, приймемо за координати центра ваги даного тіла. Нехай

$$\xi = \lim x_c, \ \eta = \lim y_c, \ \zeta = \lim z_c. \tag{8}$$

З (7) випливає, що

$$M\xi = \lim \sum m_k\xi_k, \ M\eta = \lim \sum m_k\eta_k, \ M\zeta = \lim \sum m_k\zeta_k. \tag{9}$$

Нехай ρ_k — густина в точці $q_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$:

$$\rho_k = f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k). \tag{10}$$

Через те що

$$m_k \approx \rho_k v_k, \tag{11}$$

то, заміняючи в (9) кожний елемент інтеграції m_k еквівалентною йому величиною $\rho_k v_k$, дістаємо

$$M\xi = \lim \sum \rho_k\xi_k v_k = \lim \sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\xi_k v_k,$$

і, отже,

$$M\xi = \iiint f(x, y, z)\, x\, dv = \iiint \rho x\, dv.$$

Аналогічні формули, очевидно, маємо і для інших координат η і ζ, а тому

Теорема. **Координати ξ, η, ζ центра ваги суцільного тіла і його маса M визначаються за формулами**

$$M = \iiint \rho\, dv,$$

$$M\xi = \iiint \rho x\, dv,\ M\eta = \iiint \rho y\, dv,\ M\zeta = \iiint \rho z\, dv,$$

де $\rho = f(x, y, z)$ — густина тіла.

Бачимо, що обчислення центра ваги теж зводиться до інтегралів від функцій трьох змінних.

§ 177. Елементарні паралелепіпеди.

Досі ми припускали, що елементарні об'єми, на які ми поділяли наше тіло, були довільної форми. Їх вигідно брати таким способом.

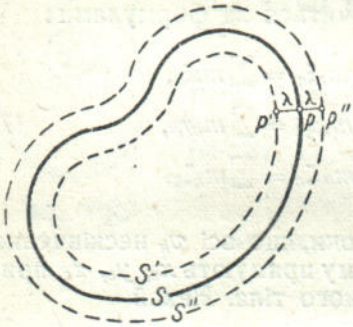

Рис. 174.

Встановивши в просторі прямокутну систему декартових осей координат, проведемо систему досить близьких одна до одної площин, перпендикулярних до осі X. Цими площинами наше тіло поділиться на частини, які ми називатимемо **шарами** тіла.

Другу систему площин проводимо перпендикулярно до осі Y. Цією системою кожний шар тіла розріжеться на частини, які ми називатимемо **стовпчиками**.

Нарешті, проводимо третю систему площин, перпендикулярних до осі Z. Цими площинами кожний стовпчик розріжеться на **елементарні паралелепіпеди**.

Отже, трьома системами площин, перпендикулярних до осей координат, ми поділяємо простір, а разом з тим і наше тіло на елементарні паралелепіпеди, які розпадаються на три класи: на внутрішні, зовнішні і граничні, при чому граничним паралелепіпедом ми називаємо всякий паралелепіпед, який має хоч одну спільну точку з поверхнею об'єму.

Доведемо, що коли розміри елементарних паралелепіпедів нескінченно малітимуть, то сума граничних паралелепіпедів у границі перетворюється в нуль. Для простоти припустимо, що тіло обмежене тільки однією поверхнею S. Як побачимо, доведення не залежить від числа поверхень, що є границями тіла.

Нехай λ — найбільший з розмірів елементарних паралелепіпедів. Уявляємо, що в **усякій** точці P даної поверхні S побудовано нормаль, на якій відкладаємо по ту і другу сторону від p відрізки pp' і pp'', довжиною рівні λ. Якщо таку побудову ми виконаємо для кожної точки p поверхні S, то зрозуміло, що точки p'' в своїй сукупності дадуть якусь поверхню S'', усе-

редині якої буде вміщена дана поверхня S; точки ж p' дадуть якусь поверхню S', що лежить усередині S. Нехай τ — об'єм тієї частини простору, яка вміщена між поверхнями S' і S''. Ця частина простору має вигляд шару, за товщину якого ми приймемо величину 2λ.

Геометрично зрозуміло, що всі граничні паралелепіпеди, суму яких позначимо через g, лежать усередині шару τ, а тому

$$g \leqq \tau.$$

Коли ж змусимо величину λ нескінченно маліти, то очевидно, що

$$\lim \tau = 0.$$

Отже, і $\lim g = 0$, а тому

Теорема. **Сума всіх граничних елементарних паралелепіпедів у границі дорівнює нулеві.**

Спираючись на цю теорему, легко довести, що при обчисленні потрійного інтеграла як границі суми можна нехтувати граничними паралелепіпедами. Справді, складемо суму S.

Позначимо через v_k загальний тип внутрішнього елементарного паралелепіпеда, а через v'_h — загальний тип тих частин граничних паралелепіпедів, які лежать усередині поверхні S. Кожний v_k дає для суми S доданок типу:

$$f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, v_k.$$

Кожна ж частина v'_h дає доданок типу:

$$f(\xi_h, \eta_h, \zeta_h)\, v'_h,$$

а тому

$$s = \sum_{\text{внутр.}} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, v_k + s', \tag{1}$$

де

$$s' = \sum_{\text{гран.}} f(\xi_h, \eta_h, \zeta_h)\, v'_h. \tag{2}$$

Нехай M — найбільше значення модуля функції в розглядуваній області. Отже, при всякому x, y, z

$$|f(x, y, z)| \leqq M,$$

а тому з (2)

$$s' \leqq M \sum v'_h.$$

Через те що в границі сума всіх граничних паралелепіпедів, тим більше частин їх, дорівнює нулеві, то

$$\lim s' = 0,$$

і з (1) випливає, що

$$\lim s = \lim \sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, v_k.$$

Теорема. **При обчисленні потрійного інтеграла як границі суми граничними паралелепіпедами можна нехтувати.**

Отже, надалі ми можемо на граничні паралелепіпеди не звертати ніякої уваги.

§ 178. Позначення потрійного інтеграла.

При позначенні потрійного інтеграла користуються різними системами. Насамперед пишуть, залежно від особистої схильності, то один знак інтеграла, то три.

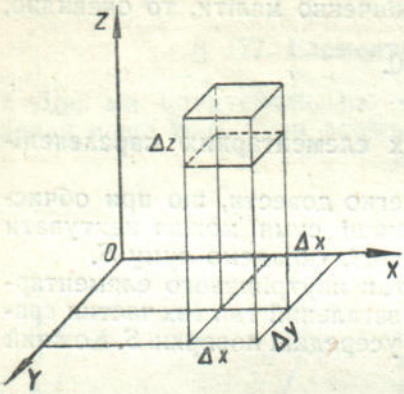

Рис. 175.

Далі, підінтегральний вираз завжди повинен зображати загальний тип доданків, що входять в інтегральну суму. Для цього беруть якунебудь букву, наприклад v, і символом Δv або частіше символом dv позначають загальний тип елементарного об'єму. Зважаючи на зовнішню подібність такого позначення з позначенням диференціалів величин, елементарний об'єм часто називають диференціальним об'ємом, або диференціальним елементом простору. Але треба пам'ятати, що на символ dv в даному випадку треба дивитись як на щось одне ціле, де d і v окремо не мають самостійного значення.

Кінець-кінцем потрійний інтеграл позначається одним з таких двох символів:

$$\int f(x, y, z)\, dv, \quad \iiint f(x, y, z)\, dv,$$

де замість букви v кожний з свого бажання може поставити іншу букву. Велику перевагу в цьому випадку надають буквам τ, σ, а також O. Тому часто зустрічаються такі позначення:

$$\int f(x, y, z)\, d\tau, \quad \int f(x, y, z)\, d\sigma, \quad \int f(x, y, z)\, dO$$

і подібні до них. Внизу інтеграла іноді приписують символ, який вказує на той об'єм, по якому береться інтеграл. Але дуже часто його не пишуть, а тільки тримають його в пам'яті.

Поділ тіла на елементарні паралелепіпеди привів ще до одного позначення, яке дуже зручне і яким тому найчастіше користуються.

Поділимо тіло на паралелепіпеди трьома системами площин, перпендикулярних до осей координат. Нехай Δx — загальний символ віддалі між двома сусідніми площинами, перпендикулярними до осі X; через Δy позначимо віддаль між двома якими-

небудь сусідніми площинами, перпендикулярними до осі Y; нарешті, Δz нехай буде загальний символ віддалі між двома довільно взятими сусідніми площинами, перпендикулярними до осі Z. В такому випадку зрозуміло, що об'єм усякого елементарного паралелепіпеда представиться добутком типу $\Delta x \Delta y \Delta z$, а тому доданки суми S будуть типу $f(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z$. Тому ми можемо написати рівність:

$$S = \sum f(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Таке зображення суми S привело до ось якого позначення потрійного інтеграла:

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Це позначення дуже зручне, бо воно добре нагадує походження потрійного інтеграла. Ми маємо основну рівність:

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim \sum f(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

§ 179. Основні теореми про потрійний інтеграл.

Позначимо символами $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ елементарні об'єми; ξ_k, η_k, ζ_k — координати точки, взятої всередині об'єму v_k.

Теорема. **Сталий множник можна вносити під знак інтеграла, а отже, і виносити спід знака інтеграла:**

$$\iiint A f(x, y, z)\, dv = A \iiint f(x, y, z)\, dv.$$

Доведення. Маємо рівність:

$$\sum A f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, v_k = A \sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, v_k.$$

Переходячи до границі, дістаємо теорему.

Теорема. **Інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від доданків:**

$$\iiint \{\varphi(x, y, z) \pm \psi(x, y, z)\}\, dv = \iiint \varphi\, dv \pm \iiint \psi\, dv.$$

Доведення. Маємо:

$$\sum \{\varphi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \pm \psi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\}\, v_k =$$
$$= \sum \varphi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, v_k \pm \sum \psi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, v_k.$$

Переходячи до границі, дістанемо теорему.

Теорема. **Інтеграл по всьому об'єму дорівнює сумі інтегралів по всіх тих частинах, на які поділений даний об'єм; отже, якщо даний об'єм V поділений на дві частини V_1 і V_2, то**

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dv = \iiint_{V_1} f(x, y, z)\, dv + \iiint_{V_2} f(x, y, z)\, dv.$$

Доведення. Поділивши даний об'єм V на елементарні об'єми, ми доданки суми

$$\sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k$$

поділимо на дві групи. В одну об'єднуємо ті, що складені з допомогою тільки елементарних об'ємів, які належать частині V_1; доданки, складені з допомогою елементарних об'ємів, що належать до частини V_2, дадуть другу групу. Маємо рівність

$$\sum_V f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k = \sum_{V_1} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k + \sum_{V_2} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k.$$

Переходячи до границі, дістанемо теорему.

§ 180. Висновок.

1. Потрійним інтегралом від неперервної функції, поширеним на даний об'єм, називається границя суми всіх добутків кожного нескінченно маліючого елементарного об'єму на значення функції в якійнебудь його точці:

$$\iiint f(x, y, z)\, dv = \lim \sum f(x, y, z)\, \Delta v.$$

Теореми:

1) $\int Af(x, y, z)\, dv = A\int f(x, y, z)\, dv$;

2) $\int (\varphi \pm \psi)\, dv = \int \varphi\, dv \pm \int \psi\, dv$;

3) $\int\limits_{V_1+V_2} f\, dv = \int\limits_{V_1} f\, dv + \int\limits_{V_2} f\, dv$;

4) $\int\limits_V dv = V$.

Маса і центр ваги визначаються формулами

$$M = \int \rho\, dv,$$

$$M\xi = \int \rho x\, dv, \qquad M\eta = \int \rho y\, dv, \qquad M\zeta = \int \rho z\, dv.$$

ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНОГО ІНТЕГРАЛА.

Потрійний інтеграл може бути обчислений дуже різноманітними способами залежно від того, за яким законом ми даний об'єм поділяємо на елементарні об'єми і як ми їх потім з'єднуємо в початковий об'єм.

§ 181. Обчислення інтеграла в декартових координатах.

Нехай V — об'єм, обмежений тільки однією замкненою поверхнею S, відносно якої припустимо, що вона всякою прямою, паралельною осі Z, перерізається тільки в двох точках. Якщо цієї умови не додержано, спочатку поділимо дане тіло на такі частини, для кожної з яких задовольнялася б ця умова.

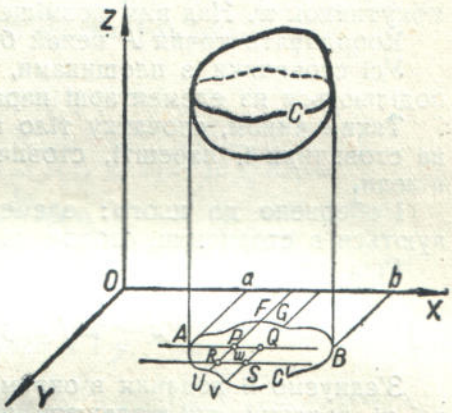

Рис. 176.

Нехай L — пряма, перпендикулярна до площини XY і розміщена поза поверхнею S. Мислено присуваємо її до поверхні S, поки вона не дотикнеться до цієї поверхні, і потім обводимо її навколо поверхні так, щоб вона весь час дотикалась поверхні і лишалась перпендикулярною до площини XY. Дістанемо циліндричну поверхню, яку позначимо через H. Вона дотикається поверхні S, а її твірні паралельні осі Z. Тому поверхня H описана навколо S, а S вписана в неї.

Нехай C — лінія, по якій дотикаються H і S. Її проекцію на площину XY позначимо через C'. Очевидно, що H перерізається з площиною XY якраз по C'.

Ми припустимо, що всяка пряма, паралельна осі Y, на площині XY перетинає контур C' тільки в двох точках. Якщо цієї умови не додержано, то ми спочатку поділимо дане тіло на такі частини, для кожної з яких цю умову додержувалося б.

Нехай, нарешті, aA і bB — крайні ординати контура C'. Площу, обмежену цим контуром, позначимо через A. Точками A і B контур C' поділяється на дві частини.

Ординату частини AFB позначимо через η_1, ординату частини AUB — через η_2. Нехай

$$\eta_1 = \lambda(x), \quad \eta_2 = \mu(x). \tag{1}$$

Контуром C поверхня S поділяється на дві частини: на нижню S_1 і верхню S_2. Аплікату першої позначимо через ζ_1, аплікату другої через ζ_2. Нехай

$$\zeta_1 = \varphi(x, y), \quad \zeta_2 = \psi(x, y).$$

Уявляємо тепер, що трьома системами площин, перпендикулярних до осей, наше тіло поділене на елементарні паралелепіпеди.

Площини, перпендикулярні до осі X, поділяючи тіло на шари, поділять площу A на смуги. Нехай $FGVU$ — одна з таких смуг. Над нею розміщений відповідний їй шар тіла.

Площини, перпендикулярні до осі Y, поділяючи шари на стовпчики, поділять площу A на прямокутники.

Нехай $PQRS$ — один з таких прямокутників; назвемо його прямокутником w. Над ним розміщений відповідний йому стовпчик.

Координати точки P нехай будуть x і y.

Усі стовпчики з площинами, перпендикулярними до осі Z, поділяються на елементарні паралелепіпеди.

Таким чином, спочатку тіло поділяється на шари, потім шари на стовпчики і, нарешті, стовпчики на елементарні паралелепіпеди.

І обернено до цього: елементарні паралелепіпеди згруповуються в стовпчики, стовпчики в шари, шари ж у тіло.

Розглянемо тепер суму

$$s = \sum f(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z. \tag{2}$$

З'єднуємо її доданки в окремі групи, відносячи в одну групу всі ті доданки, які належать паралелепіпедам, що лежать на одному й тому ж стовпчику. Таке групування ми називатимемо підсумовуванням по стовпчику або вздовж стовпчика.

Через s_w позначимо суму всіх тих доданків, які складені з допомогою паралелепіпедів, що належать одному й тому ж стовпчикові, який стоїть над прямокутником w; це запишемо так:

$$s_w = \sum_w f(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

В усіх доданках цієї суми Δx і Δy одні й ті ж; так само одними й тими ж є x і y. Значення ж z різні, і вони лежать у границях:

$$\zeta_1 = \varphi(x, y), \quad \zeta_2 = \psi(x, y),$$

де x і y мають значення, рівні координатам точки P.

Тому ми запишемо так:

$$s_w = \left\{\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,\Delta z\right\}\Delta x\,\Delta y, \tag{3}$$

виносячи $\Delta x\,\Delta y$ спільним множником.

Додаємо тепер усі суми s_w, що належать до однієї і тієї ж якоїнебудь смужки $FGUV$. Ми говоритимемо, що підсумовуємо вздовж шару, або вздовж смужки, або паралельно площині YZ.

При цьому підсумовуванні в усіх сумах s_w як x, так і Δx залишатимуться одні й ті ж, але y змінюватиметься від η_1 до η_2. Тому згідно з (3) результат підсумовування вздовж шару можна представити так:

$$\sum s_w = \left\{\sum_{\eta_1}^{\eta_2}\left[\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,\Delta z\right]\Delta y\right\}\Delta x, \tag{4}$$

виносячи Δx спільним множником.

Тепер лишається додати всі суми, що належать до різних шарів. При цьому x змінюється від a до b, а тому

$$s = \sum_a^b\left\{\sum_{\eta_1}^{\eta_2}\left[\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,\Delta z\right]\Delta y\right\}\Delta x.$$

Переходимо до границі. Маємо:

$$\lim s = \lim\sum_a^b\left\{\lim\sum_{\eta_1}^{\eta_2}\left[\lim\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,\Delta z\right]\Delta y\right\}\Delta x =$$

$$= \lim\sum_a^b\left\{\lim\sum_{\eta_1}^{\eta_2}\left[\int_{\zeta_1=\varphi(x,\,y)}^{\zeta_2=\psi(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz\right]dy\right\}dx.$$

У внутрішніх дужках, коли ми проінтегруємо дану функцію по z, ми дістанемо функцію тільки x і y. Тому

$$\lim s = \lim\sum_a^b\left[\int_{\eta_1=\lambda(x)}^{\eta_2=\mu(x)}\left(\int_{\zeta_1=\varphi(x,\,y)}^{\zeta_2=\psi(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz\right)dy\right]dx.$$

В квадратних дужках стоїть уже функція тільки самого x, а тому остаточно:

$$\lim s = \int_a^b\left[\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,dz\right)dy\right]dx. \tag{5}$$

Але ліва частина є потрійний інтеграл. Ми бачимо, що він виразився через три послідовні прості інтеграли.

Повторимо коротко попереднє міркування. Групуючи доданки спочатку по стовпчиках, потім уздовж шарів і, нарешті, вздовж осі X, ми маємо рівність:

$$\sum f(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = \sum_a^b\left\{\sum_{\eta_1}^{\eta_2}\left(\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,\Delta z\right)\Delta y\right\}\Delta x.$$

В границі кожна сума перетворюється у відповідний інтеграл, а тому

Теорема. **Потрійний інтеграл може бути одержаний трикратним простим інтегруванням даної функції спочатку по одному змінному, потім по другому і, нарешті, по третьому:**

$$\iiint f(x, y, z)\,de = \int_a^b \left\{ \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,dz \right] dy \right\} dx, \qquad (6)$$

при чому границі ζ_1 і ζ_2 першого інтеграла є функції двох інших змінних; границі η_1 і η_2 другого інтеграла — функції останнього змінного; границі третього інтеграла — сталі величини.

При прикладанні на практиці одержаної формули треба пам'ятати, що кожне інтегрування відповідає підсумовуванню або по стовпчиках, або по шарах. Тому, коли ми виконуємо перше інтегрування по z, то ми на площині XY у довільній точці (x, y) ставимо перпендикуляр, який повинен зображати стовпчик, і дивимось, якщо йти по перпендикуляру всередині тіла, то в яких границях змінюється z. Ці границі будуть границями інтеграла по z. Вони є функціями x і y.

Потім ми повинні зібрати всі стовпчики, що належать одному й тому ж шарові. Для цього, залишаючи x сталим, змінюємо y і знаходимо ті границі, в яких він змінюється, поки перпендикуляр у точці (x, y), переміщаючись паралельно площині XY, перерізає тіло. Ці границі, будучи функціями x, є границями інтеграла по y.

Нарешті, границю інтеграла по x знайдемо, розглядаючи крайні значення x для точок даної поверхні S.

Для обчислення потрійного інтеграла ми дістали формулу, в якій інтегрування виконується спочатку по z, потім по y і, нарешті, по x.

Цей порядок ми одержали, очевидно, тому, що ми спочатку збирали доданки по вертикальних стовпчиках, потім по шарах, паралельних площині XY, і, нарешті, підсумовували вздовж осі X.

Але групувати доданки можна і в іншому порядку. Ми могли б спочатку підсумовувати по стовпчиках, перпендикулярних площині XY, потім по шарах, паралельних площині XY, і, нарешті, вздовж осі Z.

Тоді ми перше інтегрування одержали б по x, друге по y, третє по z.

Тому є очевидним такий загальний висновок:

Щоб одержати потрійний інтеграл, треба підінтегральну функцію проінтегрувати по кожному змінному однаково в якому порядку.

Але при цьому треба завжди звертати найбільшу увагу на границі кожного інтегрування. Із зміною порядку інтегрування ці границі майже завжди змінюються.

Можна одержати й інші формули для обчислення потрійного інтеграла. Відзначимо дві з них.

Коли ми підсумуємо вздовж стовпчика, що стоїть над прямокутником w, і дістанемо суму

$$s_w = \left(\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,\Delta z\right)\Delta x\,\Delta y,$$

то таких сум s_w ми матимемо стільки, скільки прямокутників усередині контура C', і зрозуміло, що основна сума s дорівнює сумі всіх s_w, а тому

$$s = \sum\left(\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,\Delta z\right)\Delta x\,\Delta y,$$

і, отже,

$$\lim s = \lim \sum\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,\Delta z\right)\Delta x\,\Delta y.$$

Інтеграл у дужках є функція тільки x і y. Якщо на деякий час покласти

$$\int_{\zeta_1=\varphi(x,\,y)}^{\zeta_2=\psi(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz = \omega(x, y),$$

то

$$\lim s = \lim \sum \omega(x, y)\,\Delta x\,\Delta y,$$

і зрозуміло, що в правій частині ми маємо границю суми, кожний доданок якої одержується від множення елементарної площинки $\Delta x\,\Delta y$ на значення функції $\omega(x, y)$ в якійнебудь точці цієї площинки. Отже, це подвійний інтеграл:

$$\lim s = \iint_A \left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,dz\right) dx\,dy,$$

а тому маємо другу формулу:

$$\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_A \left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,dz\right) dx\,dy.$$

Нарешті, третю формулу дістанемо так.

Позначимо через D_x той контур, по якому площина P, перпендикулярна до осі X у якійнебудь точці x, перерізає поверхню S. Із зміною x цей контур змінюється.

Доданки суми

$$s = \sum f(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

згрупуємо так: об'єднаємо в одну групу всі ті доданки, які належать до паралелепіпедів, що лежать в одному й тому ж шарі, перпендикулярному до осі X.

Позначимо через s_x суму тієї групи, яка належить до шару, обмеженого площинами, перпендикулярними до осі X у точках x і $x+\Delta x$. Усі паралелепіпеди цього шару мають одну й ту ж висоту Δx, основи ж їх вкривають площу, обмежену контуром D_x.

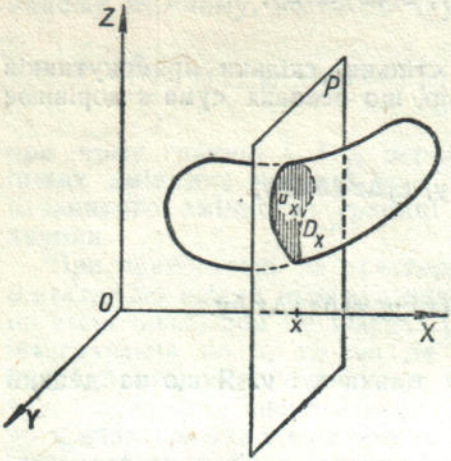

Рис. 177.

Тому можна написати, що

$$s_x = \Big(\sum_{u_x} f(x, y, z)\,\Delta y\,\Delta z\Big)\,\Delta x,$$

і, отже,

$$s = \sum_a^b \Big(\sum_{u_x} f(x, y, z)\,\Delta y\,\Delta z\Big)\,\Delta x.$$

В границі сума в дужках перетвориться в подвійний інтеграл від функції змінних y і z по площі, обмеженій контуром D_x:

$$\lim \sum_{u_x} f(x, y, z)\,\Delta y\,\Delta z = \iint_{u_x} f(x, y, z)\,dy\,dz,$$

а тому

$$\lim s = \int_a^b \Big\{\iint_{u_x} f(x, y, z)\,dy\,dz\Big\}\,dx,$$

і, отже,

$$\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \Big\{\iint_{u_x} f(x, y, z)\,dy\,dz\Big\}\,dx. \qquad (7)$$

Ми одержали три формули.

Теорема. **Потрійний інтеграл може бути обчислений за однією з трьох формул:**

$$\iiint f(x, y, z)\,dv =$$

$$= \int_a^b \Big\{\int_{\eta_1}^{\eta_2} \Big[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,dz\Big]\,dy\Big\}\,dx =$$

$$= \iint_A \Big\{\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,dz\Big\}\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^b \Big\{\iint_{u_x} f(x, y, z)\,dy\,dz\Big\}\,dx.$$

Але при виведенні цих формул площина XY у нас відограла особливу роль, яку з таким же правом може відограти як пло-

шина XZ, так і площина YZ. Беручи будьяку з них замість XY, дістанемо новий ряд формул, які від одержаних відрізнятимуться тим, що букви x, y, z в них ітимуть в іншому порядку.

В окремому випадку з формули (3) легко одержати вже знайому нам формулу для об'єму тіла довільної форми.

Якщо ми тіло, обмежене поверхнею S, переріжемо площиною P, перпендикулярною до осі X у точці x, то в перерізі одержуємо контур D_x. Він обмежує на площині P якусь площу, яку позначимо через u_x і яку назвемо площиною перерізу. Очевидно, що u_x є функція x.

Якщо тепер у рівності

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv = \int\limits_a^b \left\{ \iint\limits_{u_x} f(x, y, z)\,dy\,dz \right\} dx$$

приймемо $f(x, y, z) = 1$, то дістаємо:

$$\iiint\limits_V dv = \int\limits_a^b \left\{ \iint\limits_{u_x} dy\,dz \right\} dx.$$

Але ця рівність одразу ж перетворюється в рівність:

$$V = \int\limits_a^b u_x\,dx,$$

а тому вже відома теорема: об'єм будьякого тіла дорівнює інтегралові від площі перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі.

§ 182. Потрійні узагальнені інтеграли.

Ми досі припускали, що підінтегральна функція в потрійному інтегралі неперервна. Але можна поняття про потрійний інтеграл узагальнити і на випадки перервних функцій.

Нехай функція $f(x, y, z)$ перервна всередині поверхні S у точках $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Навколо кожної точки p_k уявляємо замкнену поверхню S_k; нехай v_k — простір, обмежений нею.

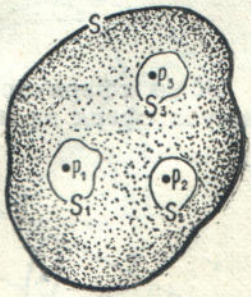

Рис. 178.

З даного об'єму V мислено викидаємо об'єми $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

Нехай V' — залишений об'єм. Усередині нього дана функція вже неперервна, а тому ми маємо право говорити про інтеграл, взятий по об'єму V'.

Нехай

$$G = \iiint\limits_{V'} f(x, y, z)\,dv.$$

Уявляємо, що об'єми $v_1, v_2, \ldots, v_m$ навколо точок перервності нескінченно маліють. Границя інтеграла G, якщо тільки ця гра-

ниця існує і скінченна, називається **узагальненим** потрійним інтегралом від перервної функції. Отже, за означенням

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv = \lim_{V'\to V} \iiint\limits_{V'} f(x, y, z)\,dv.$$

Так вводиться поняття про узагальнені потрійні інтеграли, поширені на об'єми, обмежені з усіх сторін.

Але уявімо, що поверхня S змінюється, прямуючи всіма своїми точками, або тільки деякими, в нескінченність. Границя інтеграла

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

якщо тільки ця границя існує і скінченна, дає нам узагальнений інтеграл, поширений на необмежений об'єм.

§ 183. Потрійний інтеграл у полярних координатах.

Нехай C — замкнений контур на сфері Σ радіуса r з центром в O. Провівши прямі через центр O і всі точки контура C, дістанемо конічну поверхню з вершиною в O. Об'єм тіла, обмеженого цією конічною поверхнею і сферою Σ, позначимо через v і називатимемо його сферичним конусом; частину ж сфери, обмежену контуром C, назвемо сферичною основою конуса і площу її позначимо через ω. Геометрично є очевидним, що об'єм v сферичного конуса в стільки разів менший об'єму всієї сфери, в скільки разів площа ω, що є його основою, менша площі всієї сфери:

$$\frac{v}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{\omega}{4\pi r^2},$$

звідки

$$v = \frac{1}{3} r\omega. \qquad (1)$$

Об'єм сферичного конуса дорівнює одній третині добутку радіуса сфери на площу сферичної основи.

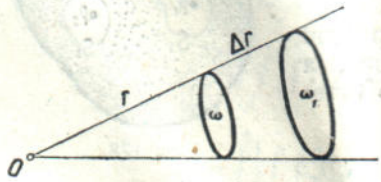

Рис. 179.

Бачимо, що при обчисленні об'єму сферичного конуса його можна розглядати як звичайний конус з висотою, що дорівнює радіусові, і площею основи, що дорівнює сферичній основі.

Надамо радіусові r приросту Δr і опишемо нову сферу Σ' радіусом $r+\Delta r$. Одержимо новий сферичний конус v', обмежений попередньою конічною поверхнею і сферою Σ'. Різниця $v'-v$, яку позначимо через Δv, дорівнює об'ємові тіла, обме-

женого конічною поверхнею і сферами Σ і Σ'. Якщо ω' — площа, що вирізується конічною поверхнею із сфери Σ', то згідно з (1)

$$v' = \frac{1}{3}(r + \Delta r)\omega'.$$

Але площі ω і ω' відносяться як квадрати радіусів:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{(r+\Delta r)^2}{r^2}, \quad \omega' = \omega\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^2,$$

а тому

$$v' = \frac{1}{3}\omega r\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^3$$

і

$$\Delta v = v' - v = \omega\Delta r + \omega\frac{\Delta r^2}{r} + \omega\frac{(\Delta r)^3}{3r^2},$$

$$\frac{\Delta v}{\omega\Delta r} = 1 + \frac{\Delta r}{r} + \frac{(\Delta r)^2}{3r^2}.$$

Якщо Δr нескінченно маліє, то

$$\lim\frac{\Delta v}{\omega\Delta r} = 1, \quad \Delta v \approx \omega\Delta r.$$

Теорема. **Якщо Δr нескінченно мале, то**

$$\Delta v \approx \omega\Delta r. \tag{2}$$

Отже, з погляду еквівалентності тіло Δv можна розглядати як прямий циліндр з основою ω і висотою Δr.

Відзначивши це, розглянемо обчислення потрійного інтеграла в полярних координатах.

В полярних координатах положення точки M визначається трьома величинами (рис. 180): 1) її віддаллю r від початку координат, 2) кутом φ, який утворює з площиною XZ площина, що проходить через точку M і вісь Z, 3) кутом λ між віссю Z і радіус-вектором OM.

Кут φ дорівнює кутові між віссю X і проекцією OP радіус-вектора OM на площину XY.

Величини r, φ, λ називаються радіус-вектором точки M, полярним її кутом, або довготою, і її азимутом, або доповненням до широти.

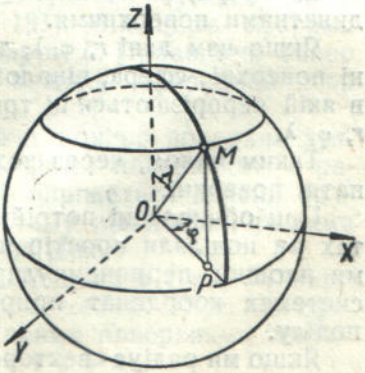

Рис. 180.

Щоб усяку точку в просторі можна було визначити цими трьома величинами, досить, щоб r міг приймати будьяке значення від 0 до $+\infty$. Кут φ досить змінювати тільки від 0 до 2π, а кут λ — від 0 до π.

Неважко бачити, що полярні координати пов'язані з декартовими рівностями:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\lambda \cos\varphi, \\ y &= r \sin\lambda \sin\varphi, \\ z &= r \cos\lambda. \end{aligned} \tag{3}$$

Якщо ми змінюватимемо тільки r, залишаючи φ і λ одними й тими ж, то точка M опише промінь, що виходить з початку координат. Змінюючи тільки кут φ, залишаючи при цьому r і λ одними й тими ж, ми змусимо точку M описати на сфері Σ круг, паралельний площині XY. При зміні тільки кута λ точка M опише на тій же сфері меридіан.

Звернемо увагу на ті поверхні, які визначаються значенням тільки однієї координати при довільних значеннях двох інших.

Якщо нам дано тільки значення r, якщо, наприклад, $r = l$, але λ і φ довільні, то точка M лежить на сфері радіуса l. Отже, одним значенням тільки радіус-вектора визначається сфера з центром в O. Надаючи r усіх можливих для нього значень від 0 до $+\infty$, дістанемо сім'ю сфер з центром в O.

Якщо дано значення φ, а саме якщо $\varphi = \alpha$, то всі відповідні точки лежатимуть на площині, точніше кажучи, на півплощині, що проходить через вісь Z під кутом α до площини XZ.

Усі точки, для яких λ одне й те ж, лежать на конічній поверхні, яку дістанемо, провівши якийнебудь промінь OM під кутом λ до осі Z і потім обертаючи його навколо осі Z при збереженні кута його нахилу до цієї осі.

Отже, одним значенням для r визначається деяка сфера; одним значенням для φ визначається півплощина; одне значення для λ визначає конічну поверхню.

Ці сфери, півплощини і конічні поверхні називаються координатними поверхнями.

Якщо нам дані r, φ, λ, то тим самим нам дані три координатні поверхні: сфера, півплощина і конічна поверхня. Та точка M, в якій перерізаються ці три поверхні, і є точка з координатами r, φ, λ.

Таким чином, через кожну точку M проходять три координатні поверхні.

При обчисленні потрійного інтеграла в декартових координатах ми поділяли простір на елементарні об'єми трьома системами площин, перпендикулярних до осей координат. В полярних системах координат природно вдаватись до другого способу поділу.

Якщо ми радіус-векторові r надамо ряду значень $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$, то ми дістанемо систему концентричних сфер. Ті частини, на які ними поділиться простір, називатимемо *сферичними шарами*.

Надаючи азимутові λ ряд значень $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, ми дістанемо систему конічних поверхень; вони поділять простір на *конічні шари*.

Якщо надамо кутові φ ряд значень $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, то дістанемо систему півплощин. Ними простір поділяється на *площинні шари*, або *клини*.

Таким чином, маємо три типи шарів: сферичні, конічні і клиноподібні.

Якщо ми візьмемо якийнебудь один з цих шарів, то він будь-якою іншою системою координатних поверхень поділиться на частини, які називатимемо *брусками*. Так, сферичний шар системою конічних поверхень поділиться на бруски кільцеподібної форми, а системою півплощин — на бруски серпоподібної форми.

Конічний шар, шар між двома конічними поверхнями, розріжеться концентричними сферами на кільцеподібні бруски, а півплощинами — на клиноподібні. Площинний шар між двома півплощинами поділяється сферами на серпоподібні бруски, а конічними поверхнями — на клиноподібні.

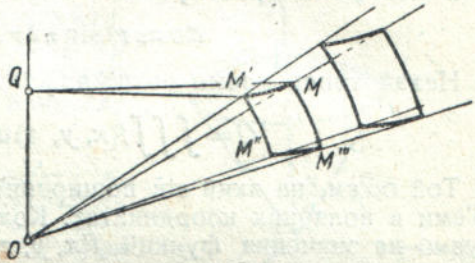

Рис. 181.

Треба призвичаїтись досить чітко уявляти собі ці шари і бруски.

Якщо ми проведемо систему сфер, систему півплощин і систему конічних перерізів, то простір поділиться ними на частини, які називатимемо *елементарними об'ємами в полярних координатах*.

Нехай dv — загальний символ такого об'єму. Розглянемо його форму. Уявляємо, що спочатку ми провели систему концентричних сфер. Нехай Σ — одна з них радіуса r, а Σ' — суміжна з нею радіуса $r+\Delta r$, при чому $\Delta r > 0$ (рис. 181). Між цими сферами маємо сферичний шар. Назвемо його шаром L. Проводимо тепер систему конічних поверхень. Ними кожний сферичний шар поділиться на кільцеподібні бруски.

Нехай K і K' — дві якінебудь суміжні конічні поверхні, азимути яких λ і $\lambda+\Delta\lambda$, при чому $\Delta\lambda > 0$. Цими поверхнями з раніше взятого нами сферичного шару L виріжеться деякий брусок G. Коли ми, нарешті, проведемо систему півплощин, то ними всі бруски поділяться на елементарні об'єми.

Нехай dv — той об'єм, який дві півплощини φ і $\varphi+\Delta\varphi$ вирізують з бруска G. Отже, dv є об'єм, обмежений: 1) двома сферами радіусів r і $r+\Delta r$, 2) двома конічними поверхнями азимутів λ і $\lambda+\Delta\lambda$, 3) двома півплощинами φ і $\varphi+\Delta\varphi$.

Якщо через ω позначимо площу кривого сферичного елементарного чотирикутника $MM'M''M'''$, то за формулою (2)

$$dv \approx \omega\,\Delta r, \tag{4}$$

якщо Δr, $\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$ нескінченно малі. Тут M — та точка, координати якої (r, λ, φ).

Якщо MQ — перпендикуляр з M на вісь Z, то легко бачити, що дуга MM' є дуга кола радіуса QM з центром в Q. Тому її довжина дорівнює $QM \cdot \Delta\varphi$, бо $\Delta\varphi$ дорівнює кутові між радіусами QM і QM'. Але зрозуміло, що $QM = r \sin\lambda$, а тому

$$MM' = r \sin\lambda \, \Delta\varphi.$$

Також очевидно, що

$$MM''' = r \, \Delta\lambda. \tag{5}$$

Але площа ω чотирикутника $M'MM'''M''$ еквівалентна добуткові $MM' \cdot MM'''$, а тому

$$\omega \approx r^2 \sin\lambda \, \Delta\varphi \, \Delta\lambda.$$

Беручи до уваги (4), робимо висновок:

В полярних просторових координатах елементарний об'єм

$$dv \approx r^2 \sin\lambda \, \Delta r \, \Delta\varphi \, \Delta\lambda. \tag{6}$$

Нехай тепер маємо потрійний інтеграл

$$G = \iiint f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \tag{7}$$

Той об'єм, на який він поширений, поділяємо на елементарні об'єми в полярних координатах. Кожний такий об'єм dv помножуємо на значення функції $f(x, y, z)$ в якійнебудь його точці. Виражаючи x, y, z в полярних координатах і заміняючи dv еквівалентним йому виразом, ми замість доданку

$$f(x, y, z) \, dv$$

дістанемо доданок

$$f(r \sin\lambda \cos\varphi, \; r \sin\lambda \sin\varphi, \; r \cos\lambda) \, r^2 \sin\lambda \, \Delta r \, \Delta\varphi \, \Delta\lambda.$$

Границя всіх таких доданків і дасть нам інтеграл G, а тому:

$$G = \iiint f(x, y, z) \, dv = \lim \sum f(x, y, z) \, r^2 \sin\lambda \, \Delta r \, \Delta\varphi \, \Delta\lambda, \tag{8}$$

де в правій частині x, y, z повинні бути замінені їх виразами через r, φ і λ.

Щоб тепер обчислити границю суми правої частини (8), ми робимо так само, як у випадку декартової системи. Всі доданки суми

$$s = \sum f(x, y, z) \, r^2 \sin\lambda \, \Delta r \, \Delta\varphi \, \Delta\lambda$$

ми можемо поділяти на різні групи. Ми можемо зробити, наприклад, так: об'єднати в одну групу ті доданки, для яких φ і λ одні й ті ж. Це будуть доданки, що належать до елементарних об'ємів, які лежать між двома якиминебудь півплощинами φ і $\varphi + \Delta\varphi$ і двома конічними поверхнями λ і $\lambda + \Delta\lambda$. В усіх цих доданках φ, λ, $\Delta\varphi$ і $\Delta\lambda$ одні й ті ж, а тому $\Delta\varphi$ і $\Delta\lambda$ можуть бути винесені за дужки:

$$s = \sum \left\{ \sum f(x, y, z) \, r^2 \sin\lambda \, \Delta r \right\} \Delta\varphi \, \Delta\lambda.$$

Після цього ми можемо внутрішні суми зібрати в нові групи, відносячи до одної групи ті з них, для яких λ і $\Delta\lambda$ одні й ті ж, а змінюється тільки φ. Дістанемо стільки груп, скільки плоских шарів. Тоді з'єднуємо всі ці шари в первісну суму s. Дістаємо:

$$s = \sum \left[\sum \left\{ \sum f(x, y, z)\, r^2 \sin\lambda\, \Delta r \right\} \Delta\lambda \right] \Delta\varphi.$$

Переходимо тепер до границі. При цьому кожна сума перетворюється у відповідний інтеграл і ми дістанемо:

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int \left[\int \left\{ \int f(x, y, z)\, r^2 \sin\lambda\, dr \right\} d\lambda \right] d\varphi,$$

де в правій частині кожний інтеграл береться між відповідними границями.

Якби ми стали групувати елементарні об'єми в іншому порядку, то і в остаточній формулі інтегрування по змінних теж одержали б в іншому порядку.

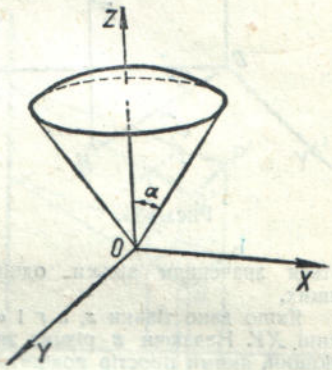

Рис. 182.

Розв'яжемо, наприклад, таку задачу: обчислити координати центра ваги однорідного тіла, обмеженого сферою радіуса a і конічною поверхнею з вершиною в центрі сфери і з кутом α між її віссю і твірними.

Нехай ρ — густина тіла. Помістимо початок координат у центрі сфери. Вісь конуса приймемо за вісь Z. Осі X і Y візьмемо в перпендикулярній до неї площині, байдуже як.

Якщо M — маса тіла, ξ, η, ζ — координати центра ваги, то з симетрії тіла відносно осі зрозуміло, що центр ваги лежить на ній, а тому $\xi = \eta = 0$. Далі, загальні формули дають

$$M = \iiint \rho\, dv, \quad M\zeta = \iiint \rho z\, dv.$$

Переходячи до полярних координат, маємо:

$$M = \rho \iiint r^2 \sin\lambda\, dr\, d\varphi\, d\lambda, \quad M\zeta = \rho \iiint r^3 \cos\lambda \sin\lambda\, dr\, d\varphi\, d\lambda.$$

Інтеграли беруться по всьому тілу.

Якщо ми будемо при сталих λ і φ інтегрувати спочатку по r, то r треба змінювати від 0 до a; потім φ змінюється від 0 до 2π, нарешті, λ — від 0 до α. Маємо:

$$M = \rho \int_0^{\alpha} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{a} r^2 \sin\lambda\, dr \right] d\varphi \right\} d\lambda.$$

$$M\zeta = \rho \int_0^{\alpha} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{a} r^3 \cos\lambda \sin\lambda\, dr \right] d\varphi \right\} d\lambda.$$

Обчислюючи інтеграли, знайдемо:

$$M = \frac{2\pi}{3} \rho (1 - \cos\alpha)\, a^3; \quad \zeta = \frac{3a}{8} \frac{1 - \cos^2\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{3a}{8}(1 + \cos\alpha).$$

§ 184. Потрійний інтеграл у циліндричних координатах.

Положення якоїнебудь точки в декартових прямокутних координатах визначається трьома числами: абсцисою, координатою і аплікатою. В сферичних координатах положення тієї ж точки також визначається трьома числами, але вже іншими: радіус-вектором, азимутом і довготою. Розглянемо третю систему координат, що називаються циліндричними. Їх дуже зручно розглядати одночасно з декартовими.

Нехай дано якунебудь систему декартових координат і якусь точку $M(x, y, z)$. Нехай N – її проекція на площину XY (рис. 183).

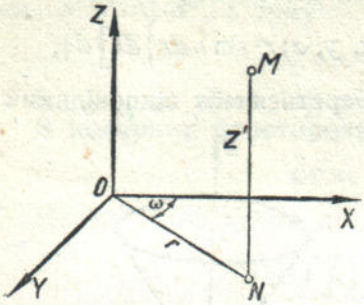

Рис. 183.

Будемо на площині XY одночасно з декартовими координатами розглядати також і полярні, приймаючи вісь X за полярну вісь, і нехай (r, ω) — полярні координати точки N.

Апліката z даної точки M і полярні координати r і ω її проекції N на площину XY, взяті в своїй сукупності, називаються циліндричними координатами точки M.

Легко бачити, що цими трьома числами r, ω і z положення точки M цілком визначається. Справді, числами r і ω цілком визначається точка N. Знаючи z і поставивши перпендикуляр у точці N до площини XY, знайдемо точку M.

Розглянемо координатні поверхні цієї системи, тобто ті поверхні, які визначаються значенням тільки однієї координати при довільних значеннях двох інших.

Якщо дано тільки z, а r і ω довільні, то маємо площину, паралельну площині XY. Надаючи z різних значень $z_1, z_2, z_3, \ldots$, дістанемо ряд паралельних площин, якими простір поділиться на плоскі шари.

Якщо дано тільки r, а z і ω довільні, то ми маємо циліндричну колову поверхню з твірними, паралельними осі Z. Змінюючи r, надаючи йому ряд значень $r_1, r_2, r_3, \ldots$, дістанемо систему циліндричних поверхень. Ними простір поділиться на циліндричні шари.

Нарешті, якщо дано тільки кут ω, а r і z довільні, то маємо півплощину, що проходить через вісь Z. Надаючи ω ряд значень $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, дістанемо систему півплощин, якими простір поділяється на клиноподібні шари.

Покладемо тепер, що потрібно обчислити потрійний інтеграл, поширений по об'єму V. Поділяємо його на елементарні шари так. Спочатку, надаючи радіусові r ряд значень $r_1, r_2, r_3, \ldots$, поділяємо тіло на циліндричні шари. Потім, надаючи ω ряд значень $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, будуємо систему півплощин, якими циліндричні шари поділяться на циліндричні стовпчики. Нарешті, надаючи z ряду значень $z_1, z_2, z_3, \ldots$, будуємо систему паралельних площин, якими циліндричні стовпчики поділяться на елементарні об'єми.

Ті самі поверхні ми могли б провести в іншому порядку. Ми могли б спочатку провести площини $z_1, z_2, z_3, \ldots$, потім півплощини $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ і, нарешті, циліндричні поверхні $r_1, r_2, r_3, \ldots$ Тоді спочатку тіло поділилося б на плоскі шари, потім кожний шар — на клини і, нарешті, кожний клин — на попередні елементарні об'єми.

Взагалі ми маємо три системи поверхень: циліндричні, площини і півплощини. Будьяку систему можна провести першою, будьяку з двох інших другою. Через те що число переставлянь з трьох предметів дорівнює шістьом, то і шістьма способами можна поділити тіло на елементарні об'єми.

Ці елементарні об'єми потім зможемо зібрати в тіло тим або іншим способом.

Знайдемо вираз для елементарного об'єму в циліндричних координатах.

Нехай $M(r, \omega, z)$ — яканебудь точка. Через неї проходить циліндрична поверхня r, площина z і півплощина ω. Надамо r приросту Δr. Одержимо нову циліндричну поверхню і тим самим циліндричний шар між нею і попередньою.

Будуємо півплощину $\omega + \Delta\omega$; разом з першою півплощиною ω вона виріже з циліндричного шару циліндр, що стоїть на чотирикутнику $M_1P_1Q_1R_1$. З цього циліндра площини z і $z + \Delta z$ виріжуть елементарний об'єм $MPQ'R'$, який позначимо через dv. Як об'єм циліндра він дорівнює добуткові висоти Δz на площу основи, що дорівнює $M_1P_1Q_1R_1$ і еквівалентна $r\,dr\,d\omega$, а тому

$$dv \approx r\,dr\,d\omega\,dz. \tag{1}$$

Таким є вираз елементарного об'єму в циліндричних координатах.

Якщо тепер потрібно обчислити потрійний інтеграл

$$G = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv, \tag{2}$$

поширений на об'єм V, то поділяємо цей об'єм на елементарні об'єми типу dv (рис. 184). В кожному з них вибираємо точку, для простоти точку M. Виражаємо значення функції f у цій точці через r, ω, z:

$$f(x, y, z) = f(r\cos\omega, r\sin\omega, z) = \\ = \Phi(r, \omega, z), \tag{3}$$

помножуємо це значення на dv і беремо суми таких добутків, складених для кожного елементарного об'єму. При переході до границі в цій сумі

$$s = \sum f(x, y, z)\,dv = \sum \Phi(r, \omega, z)\,dv,$$

заміняємо dv з (1) еквівалентною йому величиною. Дістанемо суму

$$\sigma = \sum \Phi(r, \omega, z)\,r\,dr\,d\omega\,dz. \tag{4}$$

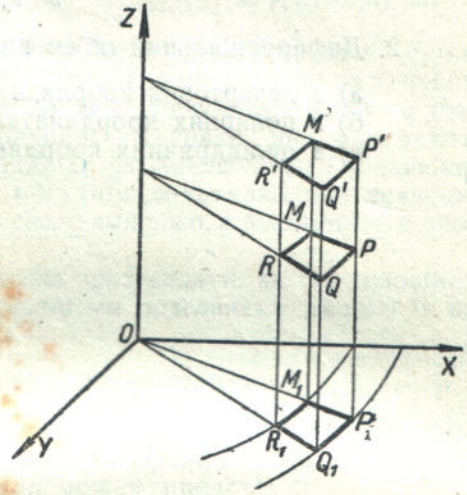

Рис. 184.

Границя її дає інтеграл G. Щоб обчислити його, ми поділяємо доданки суми на групи. Можемо, наприклад, відносити в одну групу всі доданки, що належать до одного і того ж циліндричного стовпчика. В цих доданках змінюється тільки z, а r, ω, Δr і $\Delta\omega$ одні й ті ж.

З'єднуючи групи циліндричних стовпчиків, що лежать в одному циліндричному шарі, в одну групу, дістанемо групи циліндричних шарів. Сума всіх цих груп дасть суму σ в такій формі:

$$\sigma = \sum \Phi(r, \omega, z)\,r\,\Delta r\,\Delta\omega\,\Delta z = \sum\left\{\sum\left[\sum r\Phi\,\Delta z\right]\Delta\omega\right\}\Delta r.$$

Перехід до границі дає рівність

$$\iiint f(x, y, z)\,dv = \iiint f(r\cos\omega, r\sin\omega, z)\,r\,dr\,d\omega\,dz = \\ = \int\left\{\int\left[\int f(r\cos\omega, r\sin\omega, z)\,r\,dr\right]\right\}d\omega\Big]\,dz,$$

де інтеграли в правій частині беруться між відповідними границями. Якщо елементарні об'єми збиратимемо в іншому порядку, дістанемо прості інтегрування в іншому порядку.

§ 185. Висновок.

1. В декартових координатах

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv =$$

$$= \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} \left[\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx =$$

$$= \iint\limits_{C'} \left\{ \int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\, dz \right\} dx\, dy =$$

$$= \int\limits_a^b \left\{ \iint\limits_{u_x} f(x, y, z)\, dy\, dz \right\} dx.$$

2. Диференціальний об'єм виражається:

а) в декартових координатах: $dv = dx\, dy\, dz$,
б) в полярних координатах: $dv \approx r^2 \sin\lambda\, dr\, d\omega\, d\lambda$,
в) в циліндричних координатах: $dv \approx r\, dr\, d\omega\, dz$.

КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ НА ПЛОЩИНІ.

Поняття інтеграла як границі суми ми встановили для функцій одного, двох і трьох змінних. При цьому, залежно від числа змінних, суми ці були таких типів:

$$1)\ \sum f(x)\,\Delta x,\quad 2)\sum\sum f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y,\quad 3)\sum\sum\sum f(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

І ось виявляється, що поняття інтеграла як границі суми, до того суми типу (1), а не (2) або (3), можна поширити і на випадок функцій двох і більшого числа змінних. Результатом такого узагальнення є так звані криволінійні інтеграли, що відограють дуже велику роль у деяких відділах як Аналізу, так і Механіки. В Аналізі вони, наприклад, є могутнім знаряддям при вивченні властивостей функцій комплексного змінного, в Механіці — в теорії рідин і газів.

Криволінійні інтеграли можна розглядати як на площині, так і в просторі. В цьому розділі ми розглянемо теорію їх на площині.

§ 186. Попередні зауваження.

Зауваження. 1. В цьому розділі шляхом називатимемо всяку напрямлену криву, що має форму одного неперервного сліду. Такий шлях завжди можна представити параметрично. Справді, уявимо, що даний шлях пробігається точкою $M(x, y)$. Тоді її координати виразяться як деякі функції часу t, і якщо

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t), \tag{1}$$

ми одержуємо координати точки кривої як функції параметра t.

Рис. 185.

Нехай t_0 і T — ті значення параметра, які відповідають точкам A і B (рис. 185). Якщо при зміні t від t_0 до T точка пробігає шлях у напрямі від A до B, то вона пробіжить його в напрямі від B до A, якщо t змінюватиметься від T до t_0. Отже, напрям шляху визначається напрямом зміни параметра.

Якщо шлях даний рівняннями (1), то будемо говорити, що він представлений параметрично функціями $\varphi(t)$ і $\psi(t)$.

Приймемо $t=\omega(\tau)$, де $\omega(\tau)$ — довільно взята неперервна функція, але обов'язково монотонна і така, що при зміні τ від деякого значення τ_1 до іншого значення τ_2 параметр t змінюється саме від t_0 до T. Тоді x і y можна розглядати як функції τ, і якщо

$$x=\lambda(\tau), \quad y=\mu(\tau), \tag{2}$$

то ми матимемо інше параметричне представлення того ж шляху. Отже,

всякий шлях може бути представлений параметрично з допомогою різних функцій.

Від представлення рівняннями (1) ми перейшли до представлення рівняннями (2), приймаючи t рівним якійсь функції від нового змінного τ. Неважко переконатись і в оберненому, а саме, в тому, що

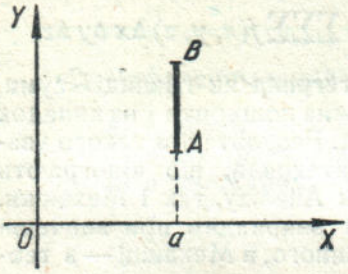

Рис. 186.

коли один і той же шлях параметрично представлений двома різними способами, а саме рівняннями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \tag{3}$$

і рівняннями

$$x=\lambda(\tau), \quad y=\mu(\tau), \tag{4}$$

то від першого способу представлення завжди можна перейти до другого, розглядаючи параметр t як деяку цілком означену, монотонну і неперервну функцію параметра τ.

Справді, кожному значенню τ' параметра τ відповідає єдина точка на шляху, якій своїм порядком відповідає якесь єдине значення t' параметра t. Якщо це значення t' вважатимемо відповідним значенню τ', то одержимо t як однозначну функцію від τ. Нехай

$$t=\omega(\tau).$$

Зрозуміло, що коли в (3) вважатимемо t саме цією функцією від τ, то x і y як функції τ представляться рівняннями (4), і ми від представлення через функції φ і ψ перейдемо до представлення через функції λ і μ.

Коли τ змінюється неперервно і монотонно, то відповідна точка по кривій рухається в одному й тому ж напрямі, а тому і t змінюється теж монотонно і неперервно. Отже, $\omega(\tau)$ — монотонна і неперервна функція.

Відзначимо, що всякий відрізок AB, паралельний осі Y (рис. 186), можна розглядати як шлях. Якщо він перетинає вісь X у точці $x=a$, то параметрично він може бути представлений рівняннями:

$$x=a, \quad y=t,$$

де t змінюється від ординати aA точки A до ординати aB

точки B. Найзагальніше ж його параметричне представлення буде

$$x = a, \quad y = \omega(t),$$

де $\omega(t)$ може бути будьякою неперервною функцією, яка монотонно змінюється в якомусь інтервалі (t_1, t_2) так, що коли t пробігає його, то y змінюється від aA до bB.

Так само і всякий відрізок AB (рис. 187), паралельний осі X, може бути представлений параметрично або рівняннями

$$x = t, \quad y = k,$$

де k — ордината точки A, або взагалі рівняннями

$$x = \varphi(t), \quad y = k,$$

де t повинно пробігати такий інтервал (t', t''), щоб при цьому x змінювався від kA до kB.

Відзначимо, що для відрізка, паралельного осі ординат, x сталий, а тому $dx = 0$. Навпаки, для відрізка, паралельного осі абсцис, уже $dy = 0$, бо y сталий.

2. Якщо $\Phi(x, y)$ — функція двох аргументів, то її значення в точці A ми часто позначатимемо так:

$$\Phi_A,$$

виписуючи тільки характеристику і ставлячи при ній індексом символ точки. Таке позначення зручне не тільки своєю короткістю, але головним чином тому, що його можна написати, не маючи позначень для координат точки.

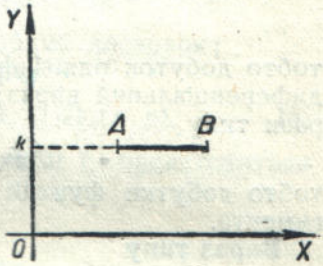

Рис. 187.

Для різниці $\Phi_B - \Phi_A$ між значеннями функції $\Phi(x, y)$ в двох точках ми введемо таке позначення:

$$[\Phi(x, y)]_A^B.$$

Отже, якщо (x_1, y_1) і (x_2, y_2) — координати точок A і B, то

$$[\Phi(x, y)]_A^B = \Phi_B - \Phi_A = \Phi(x_2, y_2) - \Phi(x_1, y_1).$$

3. Всяку функцію $\varphi(x)$ тільки одного аргумента x завжди можна розглядати як окремий випадок функції двох аргументів x і y:

$$\varphi(x) = \omega(x, y),$$

де $\omega(x, y)$ — функція, що зберігає при даному x одне й те ж значення, яке б не було y.

Якщо функція $\varphi(x)$ розглядається як функція двох аргументів x і y, то її значення в усіх точках будьякої прямої, паралельної осі Y, буде одне й те ж, бо коли точка (x, y) переміщається по цій прямій, то змінюється тільки y, а x зберігає своє значення.

Так само всяку функцію $\psi(y)$ тільки одного аргумента y можна розглядати як таку функцію двох аргументів x і y, яка при заданому y зберігає одне й те ж значення при всякому x. Як функція двох аргументів функція $\psi(y)$ має одне й те ж значення в усіх точках будьякої прямої, паралельної осі X.

§ 187. Диференціальний вираз.

Нижче ми обмежимось розглядом тільки функцій двох змінних.

Диференціальним виразом називається всякий вираз, у який входять диференціали.

Лінійним диференціальним виразом називається всякий вираз типу

$$\varphi_1(x, y)\, d\psi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)\, d\psi_2(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y)\, d\psi_n(x, y), \quad (1)$$

тобто всяка сума, кожний доданок якої є добуток якоїсь функції на диференціал іншої функції.

В окремому випадку вираз вигляду

$$\varphi(x, y)\, d\psi(x, y), \quad (2)$$

тобто добуток однієї функції на диференціал другої, є лінійний диференціальний вираз; ще більш окремий випадок дають вирази типу

$$f(x, y)\, dx, \quad \Phi(x, y)\, dy, \quad (3)$$

тобто добутки функції на диференціал одного якогонебудь аргумента.

Вираз типу

$$\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy \quad (4)$$

назвемо зведеною формою диференціального виразу.

Якщо в (4) одна з функцій дорівнює нулеві, то дістанемо вираз типу (3).

Теорема. **Всякий лінійний диференціальний вираз загального типу**

$$p = \varphi_1(x, y)\, d\psi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)\, d\psi_2(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y)\, d\psi_n(x, y) \quad (5)$$

може бути представлений у зведеній формі:

$$p = \Phi(x, y)\, dx + F(x, y)\, dy. \quad (6)$$

Справді, пропускаючи для скорочення писання аргументи, що надалі часто робитимемо, маємо:

$$\varphi_1\, d\psi_1 = \varphi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\, dx + \varphi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\, dy,$$

$$\varphi_2\, d\psi_2 = \varphi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x}\, dx + \varphi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\, dy,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n\, d\psi_n = \varphi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial x}\, dx + \varphi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial y}\, dy.$$

Додаючи ці рівності, при чому праві частини додаємо по стовпчиках, і позначаючи коефіцієнти при dx і dy через $\Phi(x, y)$ і $F(x, y)$, дістанемо (6), і теорема доведена.

Вона має велике значення, бо показує, що при теоретичних дослідженнях ми можемо обмежитись тільки виразом типу (6), бо всякий інший лінійний диференціальний вираз можна представити в цій формі.

Вираз

$$p = \varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy \tag{7}$$

є функція двох змінних x і y і їх диференціалів. Але, коли ми в ньому розглядатимемо x і y як якісь функції третього змінного, то цей вираз перетвориться у функцію цього змінного і його диференціала. Справді, якщо

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t),$$

то з (7)

$$p = \left\{\varphi\big(\lambda(t), \mu(t)\big)\,\lambda'(t) + \psi\big(\lambda(t), \mu(t)\big)\,\mu'(t)\right\} dt.$$

Позначаючи множник при dt через Φ, робимо висновок:

всякий лінійний диференціальний вираз

$$p = \varphi_1(x, y)\,d\psi_1(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y)\,d\psi_n(x, y), \tag{8}$$

якщо в ньому розглядати x і y як функції t, представиться у формі

$$p_t = \Phi(t)\,dt, \tag{9}$$

тобто як функція t і його диференціала.

Коли вираз (8) ми розглядаємо як функцію t, то це ми відзначатимемо, ставлячи t індексом у p, як це зроблено в рівності (9).

Очевидно, що сума двох будьяких лінійних диференціальних виразів:

$$p = \varphi\,d\psi + \lambda\,d\mu + \ldots + \nu\,d\omega,$$
$$q = \Phi\,dF + G\,dH + \ldots + W\,dU,$$

є теж лінійний диференціальний вираз.

§ 188. Узагальнення інтегральної суми.

Під інтегральною сумою від функції одного змінного ми досі розуміли суму типу

$$\sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k = f(\xi_0)\,\Delta x_0 + f(\xi_1)\,\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\,\Delta x_{n-1},$$

тобто суму, кожний доданок якої представляється у формі добутку значення функції на відповідний приріст її аргумента. Узагальнюючи поняття інтегральної суми, розглянемо суму,

доданки якої одержуються множенням значення даної функції не на приріст її аргумента, а на приріст якоїсь іншої функції.

Нехай $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — дві функції, неперервні в деякому інтервалі (a, b). Як і раніше, через $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ позначимо ряд довільно взятих чисел, проміжних між a і b.

Коли x переходить від значення x_k до значення x_{k+1}, то функція $\psi(x)$ набуває приросту

$$\Delta\psi(x_k) = \psi(x_{k+1}) - \psi(x_k).$$

Таким чином, водночас із числами

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$$

ми маємо різниці

$$\psi(x_1) - \psi(a),\ \psi(x_2) - \psi(x_1),\ \ldots,\ \psi(b) - \psi(x_{n-1}),$$

коротше позначувані так:

$$\Delta\psi(x_0),\ \Delta\psi(x_1),\ \ldots,\ \Delta\psi(x_{n-1}).$$

Нехай ξ_k — довільно взята точка на інтервалі (x_k, x_{k+1}). Помножуючи значення функції $\varphi(x)$ у цій точці на приріст функції $\psi(x)$ при переході x від x_k до x_{k+1}, дістанемо добуток

$$\varphi(\xi_k)\,\Delta\psi(x_k).$$

Нехай s — сума всіх таких добутків, складених для всіх підінтервалів (x_k, x_{k+1}). Отже,

$$s = \varphi(\xi_0)\,\Delta\psi(x_0) + \varphi(\xi_1)\,\Delta\psi(x_1) + \ldots + \varphi(\xi_{n-1})\,\Delta\psi(x_{n-1}),$$

або коротше

$$s = \sum_a^b \varphi(\xi_k)\ \Delta\psi(x_k). \tag{1}$$

Зрозуміло, що в окремому випадку, якщо $\psi(x) = x$, то сума (1) перейде в суму

$$\sum_a^b \varphi(\xi_k)\,\Delta x_k, \tag{2}$$

тобто в інтегральну суму звичайної форми. Тому сума (1) є природним узагальненням суми (2).

Розглянемо границю суми (1), припускаючи, що число проміжних точок x_k нескінченно зростає так, що довжина найбільшого проміжку між ними нескінченно маліє.

Припускаючи, що похідна $\psi'(x)$ неперервна, ми за теоремою Лагранжа маємо:

$$\Delta\psi(x_k) = \psi(x_{k+1}) - \psi(x_k) = \psi'(\eta_k)\,(x_{k+1} - x_k),$$

де η_k — якесь число, проміжне між x_k і x_{k+1}, а тому сума (1) може бути представлена у формі

$$s = \sum_a^b \varphi(\xi_k)\,\psi'(\eta_k)\,\Delta x_k. \tag{3}$$

Розглянемо одночасно з цією сумою також суму

$$\sigma = \sum_a^b \varphi(\xi_k)\psi'(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{4}$$

Неважко бачити, що відповідні фактори цих двох сум відрізняються один від одного нескінченно мало. Справді, різниця факторів при Δx_k дорівнює

$$\varphi(\xi_k)\,[\psi'(\eta_k) - \psi'(\xi_k)].$$

Через те що точки ξ_k і η_k лежать в одному інтервалі, всі різниці в дужках нескінченно маліють, коли інтервали (x_k, x_{k+1}) нескінченно маліють, бо функція $\psi'(x)$ за умовою неперервна. За другим принципом робимо висновок, що

$$\lim s = \lim \sigma = \lim \sum_a^b \varphi(\xi_k)\,\psi'(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx,$$

і дістаємо теорему:

Якщо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, а також похідна функції $\psi'(x)$ неперервні в інтервалі (a, b), то

$$\lim \sum_a^b \varphi(\xi_k)\,\Delta\psi(x_k) = \int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x).$$

Ця рівність, очевидно, є природне узагальнення рівності

$$\lim \sum_a^b \varphi(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

§ 189. Означення криволінійного інтеграла.

Припускаємо функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ неперервними в розглядуваних областях. Якщо ми в диференціальному виразі

$$p = \varphi(x, y)\,d\psi(x, y), \tag{1}$$

вважаючи x і y декартовими координатами точки на площині, приймемо їх рівними деяким функціям параметра t:

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t), \tag{2}$$

то p перетвориться у функцію змінного t. Нехай

$$p_t = \Phi(t)\,dt. \tag{3}$$

Припускаючи, що $\lambda(t)$ і $\mu(t)$ неперервні в інтервалі від t_0 до T, ми можемо взяти від p_t інтеграл між цими границями. Цей інтеграл

$$G = \int_{t_0}^{T} \Phi(t)\,dt \tag{4}$$

ми звичайно будемо представляти в такій формі:

$$G = \int_{t_0}^{T} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y). \tag{5}$$

пам'ятаючи при цьому, що x і y треба вважати функціями t.

Очевидно, що взагалі в підінтегральному виразі (5) ми можемо прийняти x і y рівними будьяким неперервним функціям $\lambda(t)$ і $\mu(t)$, і від вибору цих функцій залежатиме і значення інтеграла G.

Цей вибір функцій $\lambda(t)$ і $\mu(t)$ дуже просто тлумачиться геометрично. Рівняннями (2) визначається параметрично деякий шлях AB, який пробігається в певному напрямі при зміні t від t_0 до T (рис. 188). Навпаки, якщо ми візьмемо якийнебудь напрямлений шлях AB, то для нього можна знайти пару функцій, якими він визначається параметрично.

Рис. 188.

Означення. **Криволінійним інтегралом від даного виразу $\varphi(x, y)\, d\psi(x, y)$, взятим по напрямленому шляху AB від A до B і позначуваним так:**

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y),$$

називається звичайний інтеграл

$$\int_{t_0}^{T} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y),$$

який матимемо, якщо в підінтегральному виразі розглядатимемо x і y як функції, якими шлях визначається параметрично. Отже, якщо шлях AB в напрямі від A до B визначається параметрично рівняннями

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t)$$

при зміні параметра від t_0 до T, то за означенням

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y) = \int_{t_0}^{T} \varphi(\lambda(t), \mu(t))\, d\psi(\lambda(t), \mu(t)).$$

Але коли ми візьмемо шлях у напрямі від B до A, то t треба вже змінювати від T до t_0, а тому

$$\int_{BA} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y) = \int_{T}^{t_0} \varphi(\lambda(t), \mu(t))\, d\psi(\lambda(t), \mu(t)).$$

Отже,

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y) = -\int_{BA} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y). \tag{6}$$

Бачимо, що необхідно брати на увагу напрям шляху. Змінити в криволінійному інтегралі напрям шляху — це однаково, що переставити границі в звичайному інтегралі.

Означення і позначення криволінійного інтеграла викликають одне питання. Щоб значення інтеграла

$$G = \int_{AB} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y) \tag{7}$$

було цілком певне, ще далеко недосить, щоб були дані функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$. Необхідно повинен бути даний також і шлях AB. Але й цього ще недосить. Ми повинні ще знати ті функції, якими шлях представлений параметрично.

Але один і той же шлях може бути представлений параметрично різними функціями. І ось постає питання: чи не залежить значення криволінійного інтеграла не тільки від шляху, по якому він береться, але також і від вибору функцій для його параметричного представлення? Тільки коли ми доведемо, що його значення залежить тільки від самого шляху, а не від функцій, якими його дано, тільки тоді виправдовуються як введення самого поняття криволінійного інтеграла, так і його позначення. Нехай же шлях AB, з одного боку, представляється рівняннями

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t) \tag{8}$$

при зміні t від t_0 до T, а з другого боку,— рівняннями

$$x = \lambda_1(\tau), \quad y = \mu_1(\tau) \tag{9}$$

при зміні τ від τ_0 до τ_1, і нехай

$$G_1 = \int_{t_0}^{T} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y),$$

де

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t), \tag{10}$$

і

$$G_2 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y),$$

де

$$x = \lambda_1(\tau), \quad y = \mu_1(t). \tag{11}$$

Ми знаємо, що від представлення (8) можна перейти до представлення (9), приймаючи у (8)

$$t = \omega(\tau),$$

де $\omega(\tau)$ — якась цілком означена функція. Виконуємо в (10) підставляння $t=\omega(\tau)$. Тоді x і y перетворяться у функції від τ, а t_0 і T заміняться через τ_0 і τ_1, і ми знайдемо, що

$$G_1 = G_2.$$

Одержуємо теорему.

Теорема. **Значення криволінійного інтеграла не залежить від функцій, якими представлений шлях, а тільки від самого шляху.**

Ось тому і в позначенні

$$\int\limits_{AB} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y)$$

вказується тільки шлях, а не функції, що його визначають.

Означення. **Криволінійним інтегралом від будьякого даного диференціального виразу по напрямленому шляху AB, параметрично представленому функціями $\lambda(t)$ і $\mu(t)$ при зміні t від t_0 до T, називається звичайний інтеграл між границями t_0 і T від виразу, який матимемо, якщо в даному диференціальному виразі x і y замінити через $\lambda(t)$ і $\mu(t)$. Отже, за означенням**

$$\int\limits_{AB} (\varphi_1(x, y)\, d\psi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)\, d\psi_2(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y)\, d\psi_n(x, y)) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} (\varphi_1(x, y)\, d\psi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)\, d\psi_2(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y)\, d\psi_n(x, y)),$$

де в правій частині $x=\lambda(t)$, $y=\mu(t)$.

Цей інтеграл не залежить від вибору функцій для параметричного представлення шляху.

Справді, інтеграл у правій частині поділяється на суму інтегралів, кожний з яких не залежить від вибору функцій $\lambda(t)$ і $\mu(t)$.

Всякий лінійний диференціальний вираз може бути представлений у зведеній формі. Тому всякий криволінійний інтеграл може бути представлений у такій формі:

$$G = \int\limits_{AB} \varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy.$$

Звичайно в такій формі він і з'являється в прикладаннях. В окремому випадку, якщо одна з функцій φ або ψ дорівнює нулеві, маємо інтеграли типу

$$\int\limits_{AB} \varphi(x, y)\, dx = \int\limits_{t_0}^{T} \varphi(\lambda, \mu)\, \lambda'(t)\, dt,$$

і типу

$$\int\limits_{AB} \psi(x, y)\, dy = \int\limits_{t_0}^{T} \psi(\lambda, \mu)\, \mu'(t)\, dt.$$

§ 190. Криволінійний інтеграл як границя суми.

Нехай рівняннями

$$x=\lambda(t), \quad y=\mu(t)$$

представлено якийсь шлях. Якщо α — кут напряму дотичної, то, як відомо,

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}=\frac{\lambda'(t)}{\sqrt{\lambda'(t)^2+\mu'(t)^2}},$$

$$\sin\alpha=\frac{dy}{ds}=\frac{\mu'(t)}{\sqrt{\lambda'(t)^2+\mu'(t)^2}}.$$

Праві частини можуть перестати бути неперервними в тих точках, в яких втрачають неперервність похідні $\lambda'(t)$ і $\mu'(t)$. Тоді в цих точках і кут α як функція t теж перервний, а тому ці точки необхідно особливі, а саме, точки звороту, або кутові точки (рис. 189).

Рис. 189.

Ми припустимо покищо, що шлях не має таких точок. Отже, припустимо неперервними не тільки функції $\lambda(t)$ і $\mu(t)$, але і їх похідні. Також припустимо неперервними функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ і частинні похідні від ψ.

Якщо x і y розглядати як функції t, то φ і ψ стають теж функціями t. Нехай

$$\Phi(t)=\varphi(x, y), \quad F(t)=\psi(x, y) \tag{1}$$

при

$$x=\lambda(t), \quad y=\mu(t).$$

Маємо

$$F'(t)=\frac{\partial\psi}{\partial x}\lambda'(t)+\frac{\partial\psi}{\partial y}\mu'(t),$$

і через те що за припущенням

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}, \ \frac{\partial\psi}{\partial y}, \ \lambda' \text{ і } \mu'$$

неперервні, неперервна і похідна $F'(t)$.

Відзначивши це, розглянемо криволінійний інтеграл

$$G=\int_{AB}\varphi(x, y)\,d\psi(x, y) \tag{2}$$

і доведемо, що його можна розглядати як границю якоїсь інтегральної суми.

Згідно з позначеннями в рівності (1) маємо

$$G=\int_{t_0}^{T}\Phi(t)\,dF(t). \tag{3}$$

Але інтеграл правої частини є границя суми

$$s = \sum_{t_0}^{T} \Phi(\tau_k)\,\Delta F(t_k), \tag{4}$$

де $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — числа, проміжні між t_0 і T, і число τ_k належить проміжкові (t_k, t_{k+1}).

Кожному значенню параметра t відповідає точка на шляху. Нехай взагалі A_k і A'_k — точки, що відповідають значенням t_k і τ_k параметра. Через (x_k, y_k) і (ξ_k, η_k) позначимо координату цих точок. Отже,

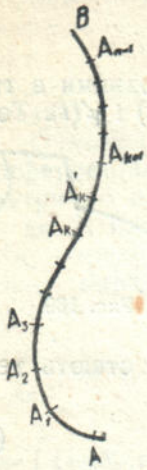

Рис. 190.

$$x_k = \lambda(t_k),\ y = \mu(t_k),\ \xi_k = \lambda(\tau_k),\ \eta_k = \mu(\tau_k),$$

і згідно з (1)

$$\Phi(\tau_k) = \varphi(\xi_k, \eta_k),\ F(t_k) = \psi(x_k, y_k),$$
$$\Delta F(t_k) = \psi(x_{k+1}, y_{k+1}) - \psi(x_k, y_k) = \Delta\psi(x_k, y_k),$$

а тому сума s може бути переписана у формі

$$s = \sum_{AB} \varphi(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\psi(x_k, y_k), \tag{5}$$

і інтеграл G є границя цієї суми, яку можна назвати інтегральною сумою по шляху AB:

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y) = \lim \sum_{AB} \varphi(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\psi(x_k, y_k). \tag{6}$$

Розглянемо, як складається сума (5).

Кожна точка A_k відповідає значенню t_k параметра t (рис. 190). Через те що числа t_k беруться довільно, то і точки A_k можуть бути взяті довільно. Так само і кожна точка A'_k є довільно взята точка на дузі A_kA_{k+1}. Нарешті, всякий доданок

$$\varphi(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\psi(x_k, y_k)$$

суми (5) є добуток значення функції φ у точці A'_k на приріст функції ψ при переході від точки A_k до точки A_{k+1}.

При переході до границі проміжки між числами t_k нескінченно маліють. Тому нескінченно маліють дуги A_kA_{k+1}, на які поділений шлях. Дістаємо теорему.

Теорема. **Криволінійний інтеграл**

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y)$$

є границя суми

$$\sum_{AB} \varphi(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\psi(x_k, y_k),$$

доданки якої виходять так: весь шлях поділяється на елементарні дуги довільно взятими точками і потім значення функ-

ції $\varphi(x, y)$ в якійнебудь точці кожної елементарної дуги помножується на різницю між значеннями іншої функції $\psi(x, y)$ в кінці і на початку цієї дуги.

При переході до границі припускають, що найбільша з довжин елементарних дуг нескінченно маліє. Отже,

$$\int\limits_{AB} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y) = \lim \sum_{AB} \varphi(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\psi(x_k, y_k). \qquad (7)$$

Впадає в очі повна аналогія цієї рівності з рівністю

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\, d\psi(x) = \lim \sum_a^b \varphi(\xi_k)\, \Delta\psi(x_k).$$

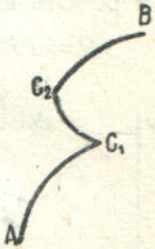

Рис. 191.

Вся відміна тільки в тому, що замість функцій одного змінного стоять функції двох змінних і що замість того, щоб поділяти на нескінченно малі частини відрізок (a, b), поділяється на нескінченно малі дуги кривий шлях.

В окремому випадку рівність (7) дає рівності

$$\int\limits_{AB} \varphi(x, y)\, dx = \lim \sum_{AB} \varphi(\xi_k, \eta_k)\, \Delta x_k =$$

$$= \lim \{\varphi(\xi_0, \eta_0)\, \Delta x_0 + \varphi(\xi_1, \eta_1)\, \Delta x_1 + \ldots + \varphi(\xi_{n-1}, \eta_{n-1})\, \Delta x_{n-1}\}, \qquad (8)$$

$$\int\limits_{AB} \psi(x, y)\, dy = \lim \sum_{AB} \psi(\xi_k, \eta_k)\, \Delta y_k =$$

$$= \lim \{\psi(\xi_0, \eta_0)\, \Delta y_0 + \psi(\xi_1, \eta_1)\, \Delta y_1 + \ldots + \psi(\xi_{n-1}, \eta_{n-1})\, \Delta y_{n-1}\}.$$

Але рівність (7) доведена покищо тільки для шляху без кутових точок. Нехай шлях має кутові точки, для простоти припустимо, що тільки дві C_1 і C_2, якими шлях поділяється на три частини. Розглядувана окремо, кожна частина є шлях без кутових точок, а тому для кожної з них є прикладальною рівність (7). Маємо

$$\int\limits_{AC_1} \varphi\, d\psi = \lim \sum_{AC_1} \varphi(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\psi(x_k, y_k),$$

$$\int\limits_{C_1C_2} \varphi\, d\psi = \lim \sum_{C_1C_2} \varphi(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\psi(x_k, y_k),$$

$$\int\limits_{C_2B} \varphi\, d\psi = \lim \sum_{C_2B} \varphi(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\psi(x_k, y_k).$$

Додаючи ці рівності, знову дістанемо рівність (7), і теорема доведена остаточно.

§ 191. Робота сили.

Нехай постійна сила F діє на матеріальну точку m, що перемістилась по вектору AB з точки A в точку B (рис. 192). Позначимо через l і α геометричну довжину і кут напряму вектора AB,

проекції якого на осі X і Y нехай відповідно рівні Δx і Δy. Через β, X, Y позначимо кут напряму і проекції на осі сили F, через ω — кут між напрямами сили F і вектора AB. Якщо перенести початок координат у точку A, то Δx і Δy будуть декартові координати точки B, а l і α — її полярні координати. Тому

$$\Delta x = l\cos\alpha, \quad \Delta y = l\cos\beta. \tag{1}$$

На тій же підставі

$$X = F\cos\beta, \quad Y = F\sin\beta. \tag{2}$$

Позначимо через R роботу сили F на шляху AB *. Як відомо, ця робота визначається виразом

$$R = Fl\cos\omega = Fl\cos(\beta - \alpha) = Fl\cos\beta\cos\alpha + Fl\sin\beta\sin\alpha.$$

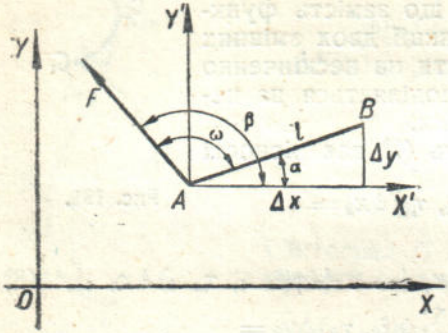

Рис. 192.

Беручи до уваги (1) і (2), робимо висновок:

Робота R постійної сили, проекції якої на осі дорівнюють X і Y, при переміщенні точки її прикладання на прямолінійний вектор визначається за формулою

$$R = X\Delta x + Y\Delta y, \tag{3}$$

де Δx і Δy — проекції на осі вектора переміщення.

Припустимо тепер, що сила F змінна і що точка її прикладання описує криволінійний шлях AB. Щоб ввести поняття про роботу цієї сили на всьому шляху AB, введемо спочатку поняття про елементарну роботу.

Нехай l — нескінченно мала дуга шляху і c — її хорда. На дузі l візьмемо довільно точку p, і через F' позначимо значення сили F у цій точці p.

Коли матеріальна точка m переміщається по l, то сила F взагалі різна в різні моменти. Замість неї візьмемо фіктивну постійну силу, що дорівнює F', а замість дуги візьмемо її хорду. Роботу сили F' на шляху l назвемо елементарною роботою сили F.

Означення. **Елементарною роботою змінної сили F на нескінченно малій дузі l називається робота фіктивної постійної сили F', що дорівнює значенню сили F в якійнебудь точці дуги l, при переміщенні точки прикладання сили по хорді дуги l.**

Робота сили F на всьому шляху AB приймається рівною границі суми всіх її елементарних робіт.

---

* Треба уникати думати, що точка m переміщається з A у B під діянням сили F. Точка може переміщатись з A у B під впливом дуже багатьох сил, однією з яких є сила F.

Нехай X і Y, проекції сили F, є якимись функціями координат точки прикладання сили.

Нехай

$$X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y).$$

Поділяємо шлях AB на нескінченно малі частини точками $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, координати яких $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$. В довільно взятій точці (ξ_k, η_k) на дузі A_kA_{k+1} діє сила, проекції якої на осі

$$X_k = \varphi(\xi_k, \eta_k), \quad Y_k = \psi(\xi_k, \eta_k).$$

Її робота вздовж хорди дуги A_kA_{k+1} дорівнює

$$X_k \Delta x_k + Y_k \Delta y_k.$$

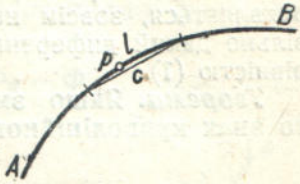

Рис. 193.

Це елементарна робота сили F. Беремо суму всіх таких елементарних робіт. Вона дорівнює

$$\sum(X_k \Delta x_k + Y_k \Delta y_k) = \sum[\varphi(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k + \psi(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k].$$

Переходячи до границі, робимо висновок:

Робота сили R по шляху AB дорівнює криволінійному інтегралові по цьому шляху від виразу $X\,dx + Y\,dy$:

$$R = \int\limits_{AB} (X\,dx + Y\,dy), \tag{4}$$

де X і Y — проекції сили R на осі координат.

Корисно звикнути швидко виводити цю формулу, міркуючи так: при переміщенні на нескінченно малу дугу ds, проекції якої на осі еквівалентні dx і dy, виконується елементарна робота $X\,dx + Y\,dy$. Взявши суму всіх елементарних робіт, одержимо (4).

§ 192. Основні теореми про криволінійний інтеграл.

Якщо

$$p = \varphi_1(x, y)\,d\psi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)\,d\psi_2(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y)\,d\psi_n(x, y)$$

— даний диференціальний вираз, то інтеграл від нього по шляху AB, для якого

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t),$$

виразиться через звичайний:

$$\int\limits_{AB} p = \int\limits_{t_0}^{T} \Phi(t)\,dt, \tag{1}$$

де $p = \Phi(t)\,dt$.

Але коли таким способом усякий криволінійний інтеграл може бути представлений через звичайний, то вивчення властивостей

даного криволінійного інтеграла зводиться до прикладання до нього властивостей звичайного інтеграла. Але, щоб виразити криволінійний інтеграл через звичайний, треба спочатку мати параметричне представлення шляху. Шлях же може бути даний і не параметрично. Тому бажано встановити основні властивості криволінійних інтегралів у таких формах, в яких не згадувалося б про параметричне представлення шляху. Зробити це, виявляється, зовсім неважко. Для цього, розуміючи під p довільно даний диференціальний вираз, нам досить скористатись рівністю (1).

Теорема. **Якщо змінити напрям шляху на протилежний, то знак криволінійного інтеграла зміниться:**

$$\int\limits_{AB} p = -\int\limits_{BA} p,$$

бо

$$\int\limits_{AB} p = \int\limits_{t_0}^{T} \Phi(t)\,dt = -\int\limits_{T}^{t_0} \Phi(t)\,dt = -\int\limits_{BA} p.$$

Теорема. **В криволінійному інтегралі сталий множник можна виносити за знак інтеграла:**

$$\int\limits_{AB} Kp = K\int\limits_{AB} p,$$

бо

$$\int\limits_{AB} Kp = \int\limits_{t_0}^{T} K\Phi(t)\,dt = K\int\limits_{t_0}^{T} \Phi(t)\,dt = K\int\limits_{AB} p.$$

Теорема. **Інтеграл по всьому шляху дорівнює сумі інтегралів по всіх частинах, на які поділений шлях.**

Нехай шлях AB поділений на кілька частин, наприклад, на три, точками C' і C'' (рис. 194), яким відповідають значення параметра t' і t''. Треба довести, що

$$\int\limits_{AB} p = \int\limits_{AC'} p + \int\limits_{C'C''} p + \int\limits_{C''B} p.$$

Але це безпосередньо випливає з того, що

$$\int\limits_{t_0}^{T} \Phi(t)\,dt = \int\limits_{t_0}^{t'} \Phi(t)\,dt + \int\limits_{t'}^{t''} \Phi(t)\,dt + \int\limits_{t''}^{T} \Phi(t)\,dt.$$

Теорема. **Криволінійний інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів доданків.**

Нехай p і q — два диференціальні вирази, для яких

$$p = \Phi(t)\,dt, \quad q = F(t)\,dt.$$

В такому випадку маємо:

$$\int_{AB}(p+q)=\int_{t_0}^{T}\{\Phi(t)+F(t)\}dt=\int_{t_0}^{T}\Phi(t)\,dt+\int_{t_0}^{T}F(t)\,dt=\int_{AB}p+\int_{AB}q,$$

і теорема доведена.

На такі дві теореми треба звернути особливу увагу.

Теорема. **Криволінійний інтеграл від диференціала неперервної функції дорівнює різниці між значеннями функції в кінці і на початку шляху:**

$$\int_{AB}d\Phi(x,y)=[\Phi(x,y)]_A^B=\Phi_B-\Phi_A. \tag{2}$$

Нехай $x=\lambda(t)$, $y=\mu(t)$, тоді

$$\Phi(x,y)=F(t).$$

Зрозуміло, що

$$F(t_0)=\Phi_A,\quad F(T)=\Phi_B,$$

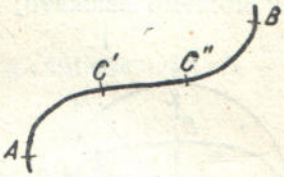

Рис. 194.

і через те що

$$\int_{AB}d\Phi(x,y)=\int_{t_0}^{T}dF(t)=[F(t)]_{t_0}^{T}, \tag{3}$$

маємо (2). Через те що (3) правильне тільки при умові неперервності $F(t)$, теорема дійсна тільки для неперервної функції $\Phi(x,y)$.

Теорема про інтегрування частинами. **Якщо функції $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ неперервні, то**

$$\int_{AB}\varphi(x,y)\,d\psi(x,y)=[\varphi\psi]_A^B-\int_{AB}\psi(x,y)\,d\varphi(x,y), \tag{4}$$

бо

$$\int_{AB}\varphi(x,y)\,d\psi(x,y)=\int_{AB}\{d(\varphi\psi)-\psi\,d\varphi\}=[\varphi\psi]_A^B-\int_{AB}\psi\,d\varphi.$$

Рис. 195.

Часто доводиться розглядати інтеграли по замкнених шляхах. Треба відзначити той вигляд, який для них приймають рівності (2) і (4). Нехай C — замкнений контур. Якунебудь точку A на ньому приймемо за початок шляху. Кінець його B зливається з A (рис. 195). Тому в (2) і (4) тепер $\Phi_B=\Phi_A$, а тому

$$[\Phi]_A^B=0,\quad [\varphi\psi]_A^B=0,$$

і з (4) і (2) дістаємо теорему:

Теорема. **Якщо контур C замкнений, то**

$$\int_{AB}\varphi\,d\psi=-\int_{AB}\psi\,d\varphi,\quad \int_{AB}d\Phi=0 \tag{5}$$

при неодмінній умові неперервності функцій.

В окремому випадку маємо рівності:

$$\int_C y\,dx = -\int_C x\,dy, \quad \int_C dx = 0, \tag{6}$$

якими нам доведеться скористатись.

§ 193. Про обчислення криволінійного інтеграла.

Фактично шлях, по якому береться інтеграл, звичайно складається з частин різних кривих. Тому хоч теоретично ми завжди можемо вважати, що він даний весь параметрично рівняннями

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t),$$

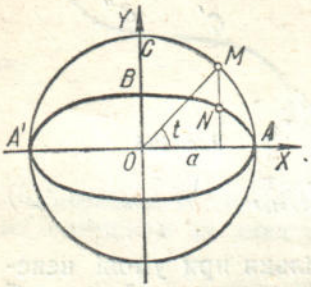

Рис. 196.

але фактично таке параметричне представлення ми маємо тільки в рідких випадках. Тому рівністю

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\,d\psi(x, y) = \int_{t_0}^{T} \varphi(x, y)\,d\psi(x, y)$$

на практиці доводиться користуватись рідко. Звичайно весь шлях природно поділяється на кілька частин, кожна з яких представляється параметрично своїми функціями, не тими, якими представляються інші частини. Тому обчислюють інтеграл окремо вздовж кожної частини і потім беруть суму всіх одержаних результатів.

Покладемо, наприклад, що шлях інтеграції такий: на великій осі еліпса (рис. 196)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

будується як на діаметрі коло. Якщо N — точка еліпса, продовження ординати якої перетинає коло в точці M, то параметрично еліпс може бути представлений рівняннями

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \tag{1}$$

тоді як коло представиться рівняннями

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t. \tag{2}$$

Нехай потрібно обчислити інтеграл:

$$G = \int_{A'CBAO} y^2\,dx + yx\,dy.$$

Шлях природно поділяється на частини $A'C$, CB, BA, AO.

Для частини $A'C$ в рівняннях (2) параметр t змінюється від π до $\frac{\pi}{2}$, а тому

$$\int\limits_{A'C} y^2\,dx + yx\,dy = \int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} a^3(-\sin^3 t + \cos^2 t \sin t)\,dt = \frac{a^3}{3}.$$

На шляху CB, як легко бачити, y змінюється від a до b, і $x = 0$; тому

$$\int\limits_{CB} y^2\,dx + yx\,dy = \int\limits_{a}^{b} 0 \cdot dy = 0.$$

На шляху BA в рівняннях (1) параметр змінюється від $\frac{\pi}{2}$ до 0, а тому

$$\int\limits_{BA} y^2\,dx + yx\,dy = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} ab^2(-\sin^3 t + \cos^2 t \sin t)\,dt = \frac{ab^2}{3}.$$

На шляху AO x змінюється від a до 0, але $y = 0$, а тому

$$\int\limits_{AO} y^2\,dx + xy\,dy = 0.$$

Додаючи всі одержані результати, знайдемо:

$$G = \frac{a(a^2 + b^2)}{3}.$$

§ 194. Окремі випадки криволінійного інтеграла.

Якщо шлях AB визначається рівнянням

$$y = f(x),$$

де функція $f(x)$ неперервна в інтервалі (a, b) (рис. 197), то, розглядаючи x і y як функції параметра x, маємо

$$\int\limits_{AB} \varphi(x, y)\,dx = \int\limits_{a}^{b} \varphi(x, f(x))\,dx.$$

Так само, якщо шлях AB представляємо рівнянням

$$x = \omega(y),$$

де $\omega(y)$ — неперервна функція в інтервалі (α, β), то

$$\int\limits_{AB} \psi(x, y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(\omega(y), y)\,\omega'(y)\,dy.$$

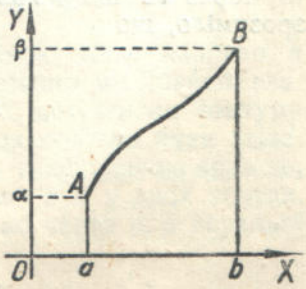

Рис. 197.

Особливо цікавий випадок, коли шлях AB є відрізок, паралельний осі X, для якого $y=c$ (рис. 198). В такому випадку

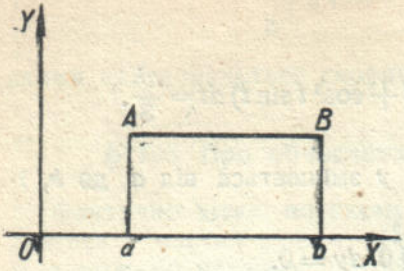

Рис. 198.

$$G=\int\limits_{AB}\varphi(x, y)\,dx=\int\limits_{a}^{b}\varphi(x, y)\,dx,$$

де y треба розуміти як стале c. Ми бачимо, що

інтеграл як функція параметра є окремий випадок криволінійного інтеграла, шлях якого є відрізок, паралельний осі X.

Треба відзначити, що всякий звичайний інтеграл

$$A=\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx$$

завжди можна представити у формі криволінійного. Справді, якщо AB — крива, для якої

$$y=f(x),$$

то зрозуміло, що

$$\int\limits_{AB}y\,dx=\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx.$$

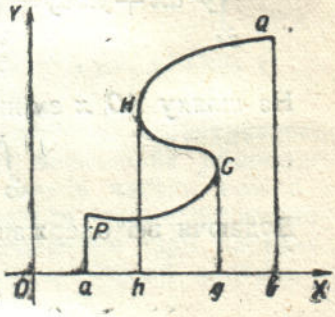

Рис. 199.

Ще цікавіший інший спосіб представлення. Нехай P і Q — дві точки з абсцисами a і b (рис. 199) на якомунебудь шляху $PGHQ$, що сполучає їх. Припустимо для спрощення, що цей шлях поділяється на три частини PG, GH і HQ, для кожної з яких y — однозначна функція x. Нехай потрібно обчислити криволінійний інтеграл

$$K=\int\limits_{PQ}f(x)\,dx.$$

Через те що y явно не входить в підінтегральний вираз, то зрозуміло, що

$$\int\limits_{PG}f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{g}f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_{GH}f(x)\,dx=\int\limits_{g}^{h}f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_{HQ}f(x)\,dx=\int\limits_{h}^{b}f(x)\,dx.$$

Додаючи, робимо висновок, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{PQ} f(x)\,dx.$$

Отже, інтеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

можна розглядати як криволінійний інтеграл, взятий по будь-якому шляху, початком і кінцем якого є точки з абсцисами a і b.

§ 195. Теорема Гріна — Рімана.

Нехай A — площа, обмежена контуром C. Ми можемо довільно умовитись приймати за додатне обертання променя обертання його або за стрілкою годинника, або проти неї. Так само і для контура ми можемо вибрати додатний напрям у той або інший бік. При цьому очевидно, що вибір додатного напряму для контура може бути проведений зовсім незалежно від вибору додатного напряму для обертання променя. Але від цієї довільності ми раз назавжди відмовимось.

Коли дібрано декартову систему координат, то додатним обертанням завжди вважається обертання в тому напрямі, в якому повинна повернутись на прямий кут вісь абсцис, щоб її додатний напрям збігся з додатним напрямом осі ординат.

За додатний напрям замкненого, що не перетинається з самим собою, контура завжди приймається той напрям, в якому повинна рухатись точка по контуру, щоб її обертання навколо будьякої досить до неї близької точки, яка лежить усередині контура, відбувалось у додатному напрямі.

Отже, якщо вісь X напрямлена зліва направо, а вісь Y знизу вгору, то додатним обертанням ми повинні вважати обертання проти стрілки годинника, а додатним напрямом контура той напрям, ідучи по якому ми матимемо площу всередині контура зліва (рис. 200).

Якщо ж вісь X, як і раніше, напрямлена зліва направо, але вісь Y зверху вниз, то додатним обертанням променя вже буде обертання за стрілкою годинника, а додатним напрямом контура той напрям, ідучи по якому ми матимемо площу всередині контура справа (рис. 201).

Надалі вважатимемо вісь X напрямленою зліва направо, а вісь Y знизу вгору. В такому випадку додатним ми повинні вважати обертання проти стрілки годинника і, щоб іти по контуру в додатному напрямі, обмежена ним площа повинна бути зліва.

Нехай площа S обмежена контуром C, який усякою прямою, паралельною осі Y, перетинається не більше ніж у двох точках. Ординату нижньої його половини позначимо через u, а верхньої через v (рис. 202), і нехай

$$u = \lambda(x), \quad v = \mu(x).$$

Якщо $x=a$ і $x=b$ — прямі, що обмежують контур зліва і справа, то, як відомо,

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{u=\lambda(x)}^{v=\mu(x)} f(x, y)\,dy \right\} dx.$$

Рис. 200.

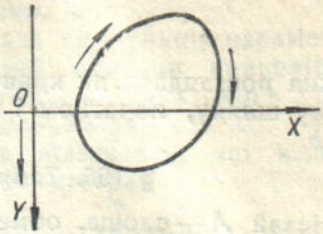

Рис. 201.

Взагалі кажучи, внутрішній інтеграл у правій частині не може бути обчислений. Але він легко обчисляється, якщо нам відома первісна функція по y від підінтегральної функції. Справді, якщо

$$\int f(x, y)\,dy = \varphi(x, y) + C$$

і, отже,

$$f(x, y) = \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y},$$

то маємо

$$\int\limits_{u=\lambda(x)}^{v=\mu(x)} \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\,dy = \Big|_{y=u}^{y=v} \varphi(x, y) = \varphi(x, \mu(x)) - \varphi(x, \lambda(x)),$$

а тому

$$\iint\limits_S \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b \varphi(x, \mu(x))\,dx - \int\limits_a^b \varphi(x, \lambda(x))\,dx. \qquad (1)$$

Розглянемо перший інтеграл у правій частині. Через те що

$$\int\limits_a^b \varphi(x, \mu(x))\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x, y)\,dx, \text{ де } y = \mu(x),$$

то він є інтеграл по верхній половині контура в напрямі від A до B. Так само другий інтеграл є інтеграл по нижній половині того ж контура, бо

$$\int\limits_a^b \varphi(x, \lambda(x))\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x, y)\,dx, \text{ де } y = \lambda(x).$$

Отже,

$$\iint\limits_S \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_{AEB} \varphi(x, y)\, dx - \int\limits_{ADB} \varphi(x, y)\, dx =$$

$$= -\int\limits_{BEA} \varphi(x, y)\, dx - \int\limits_{ADB} \varphi(x, y)\, dx = -\int\limits_{ADBEA} \varphi(x, y)\, dx.$$

В правій частині з'явився інтеграл по всьому контуру. Маємо рівність

$$\iint\limits_S \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{\overleftarrow{C}} \varphi(x, y)\, dx, \qquad (2)$$

де стрілка у символа $\overleftarrow{C}$ вказує той напрям, по якому береться інтеграл по контуру.

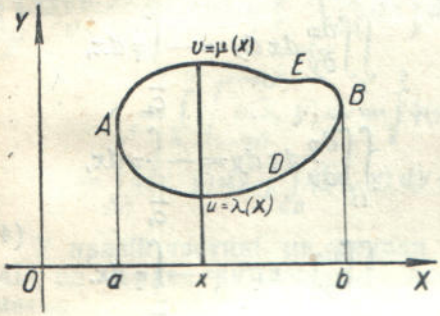

Рис. 202.

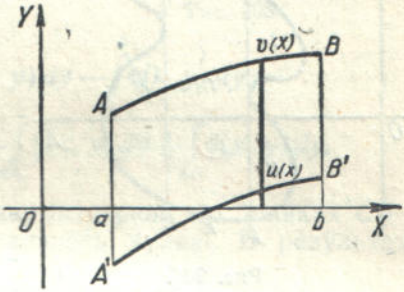

Рис. 203.

Ми одержали формулу, якою подвійний інтеграл виражається через інтеграл по контуру. Це і є формула Гріна — Рімана. Але вона доведена нами тільки для площі, обмеженої контуром дуже частинної форми. Доведемо її справедливість і для площі, обмеженої контуром будьякої форми, який не перетинається з самим собою.

Нехай A — площа першого типу, тобто площа, обмежена зліва і справа прямими $x = a$ і $x = b$, знизу і зверху кривими $u = u(x)$, $v = v(x)$ (рис. 203). Маємо

$$\iint\limits_A \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_u^v \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\, dy \right\} dx =$$

$$= \int\limits_a^b \{\varphi(x, v) - \varphi(x, u)\}\, dx = -\int\limits_{BA} \varphi(x, y)\, dx - \int\limits_{A'B'} \varphi(x, y)\, dx.$$

У правій частині ми не маємо інтеграла по всьому контуру. Для цього не вистачає інтегралів

$$\int\limits_{B'B} \varphi(x, y)\,dx \quad \text{і} \quad \int\limits_{AA'} \varphi(x, y)\,dx$$

по шляхах AA' і $B'B$. Але обидва ці інтеграли дорівнюють нулеві, бо на цих шляхах $dx=0$. Тому ці інтеграли можна додати. Виконуючи це, дістанемо

$$\iint\limits_{A} \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{BAA'B'B} \varphi(x, y)\,dx = -\int\limits_{\overleftarrow{C}} \varphi(x, y)\,dx, \tag{3}$$

тобто дістанемо попередню формулу.

Нехай тепер площа A обмежена контуром C якої завгодно форми (рис. 204). Поділяємо площу A на частини першого типу. Якщо C_1, C_2, C_3, ... — контури, що обмежують ці частини, то за доведеним, прикладаючи формулу для кожної частини, маємо

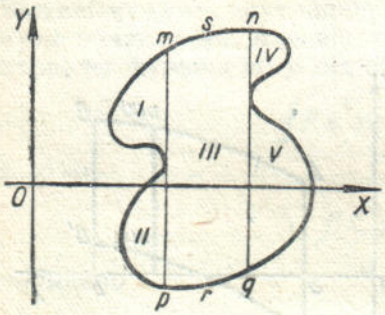

Рис. 204.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathrm{I}} \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx\,dy &= -\int\limits_{\overleftarrow{C_1}} \varphi\,dx,\\
\iint\limits_{\mathrm{II}} \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx\,dy &= -\int\limits_{\overleftarrow{C_2}} \varphi\,dx,\\
\iint\limits_{\mathrm{III}} \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx\,dy &= -\int\limits_{\overleftarrow{C_3}} \varphi\,dx.
\end{aligned} \tag{4}$$

Додаємо всі ці рівності. В лівій частині дістанемо інтеграл по всій площі A. Щодо інтегралів правої частини, то кожний з них складається почасти з інтегралів по деякій частині контура C, а почасти по допоміжних прямих лініях. Так, наприклад,

$$\int\limits_{\overleftarrow{C_3}} \varphi\,dx = \int\limits_{prq} \varphi\,dx + \int\limits_{qn} \varphi\,dx + \int\limits_{nsm} \varphi\,dx + \int\limits_{mp} \varphi\,dx.$$

Інтеграли по допоміжних лініях pm і qn дорівнюють нулеві. Лишаються тільки інтеграли по дугах контура prq і nsm. Так само і від кожного інтеграла в правій частині лишаться тільки інтеграли по частинах контура, до того взятих у додатному напрямі. В своїй сумі ці інтеграли дадуть інтеграл по всьому контуру, а тому ми знову одержуємо попередню рівність

$$\iint\limits_{A} \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{\overleftarrow{C}} \varphi\,dx, \tag{5}$$

але вже доведену для контура будьякої форми.

В зв'язку з цією рівністю природно розглянути також подвійний інтеграл

$$\iint\limits_A \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}\,dx\,dy,$$

підінтегральна функція якого дорівнює частинній похідній по x від деякої функції $\psi(x, y)$, неперервної на площі A. Припустимо спочатку, що площа A є площа другого типу, тобто площа, обмежена зліва і справа кривими

$$p=\lambda(y), \quad q=\mu(y),$$

де $\lambda(y)$ і $\mu(y)$ — неперервні функції, знизу і зверху — прямими $y=\alpha$ і $y=\beta$ (рис. 205). Маємо

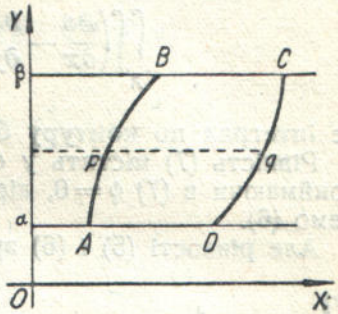

Рис. 205.

$$\iint\limits_A \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}\,dx\,dy=\int\limits_\alpha^\beta\left\{\int\limits_{p=\lambda(y)}^{q=\mu(y)}\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx\right\}dy=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta\left\{\Big|_{x=\lambda(y)}^{x=\mu(y)}\psi(x, y)\,dy=\int\limits_\alpha^\beta\psi(\mu, y)\,dy-\int\limits_\alpha^\beta\psi(\lambda, y)\,dy=\right.$$

$$=\int\limits_{DC}\psi(x, y)\,dy+\int\limits_{CB}\psi(x, y)\,dy+\int\limits_{BA}\psi(x, y)\,dy+\int\limits_{AD}\psi(x, y)\,dy.$$

У правій частині ми додали два інтеграли по шляхах CB і AD, бо обидва ці інтеграли дорівнюють нулеві. В результаті маємо

$$\iint\limits_A \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}\,dx\,dy=+\int\limits_{\overset{\uparrow}{C}}\psi(x, y)\,dy. \tag{6}$$

Покищо ця рівність доведена тільки для площ другого типу. У випадку площі іншої форми поділяємо її на частини другого типу. Якщо $C_1, C_2, C_3, \ldots$ — контури цих частин (рис. 206), то за доведеним маємо

$$\iint\limits_{\mathrm{I}} \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx\,dy=+\int\limits_{\overset{\uparrow}{C_1}}\psi\,dy,$$

$$\iint\limits_{\mathrm{II}} \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx\,dy=+\int\limits_{\overset{\uparrow}{C_2}}\psi\,dy,$$

$$\iint\limits_{\mathrm{III}} \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx\,dy=\int\limits_{\overset{\uparrow}{C_3}}\psi\,dy.$$

. . . . . .

Додаючи ці рівності, в лівій частині дістанемо інтеграл по всій площі. В правій же частині з контурів C_1, C_2, C_3 інтеграли по допоміжних лініях дорівнюють нулеві. Всі ж інші у сумі дадуть інтеграл по всьому контуру. В результаті маємо знову (6).

Від віднімання з рівності (6) рівності (5) одержуємо теорему.

Теорема Гріна — Рімана. **Якщо $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ — функції, неперервні на площі A, обмеженій контуром C, то**

$$\iint_A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\overleftarrow{C}} \varphi\, dx + \psi\, dy, \qquad (7)$$

де інтеграл по контуру береться в додатному напрямі.

Рівність (7) містить у собі обидві рівності (5) і (6). Справді, приймаючи в (7) $\psi = 0$, дістанемо (5), а приймаючи $\varphi = 0$, матимемо (6).

Але рівності (5) і (6) вражають своєю несиметричністю. Вона особливо впадає у вічі, якщо в них замість φ і ψ написати одну й ту ж функцію, наприклад, $f(x, y)$. Тоді дістанемо

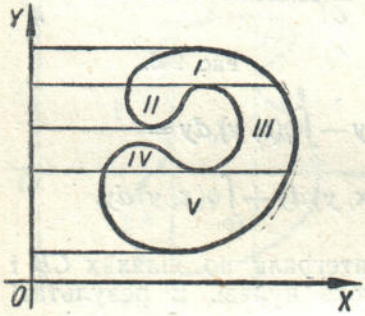

Рис. 206.

$$\iint_A \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\overrightarrow{C}} f(x, y)\, dx, \qquad (8)$$

$$\iint_A \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\overleftarrow{C}} f(x, y)\, dy. \qquad (9)$$

Здавалося б, що оскільки по суті x і y рівноправні, то в правих частинах повинен бути один і той же знак.

Але ця позірна несиметричність в дійсності є тільки зовнішній прояв повної внутрішньої симетрії. Справді, в рівності (8) інтеграл по контуру береться в тому напрямі, в якому треба обертати вісь X на прямий кут для збігу її напряму з напрямом осі Y. Тому саме за симетрією в рівності (9) треба інтеграл по контуру брати в тому напрямі, в якому повинна обертатись на прямий кут уже вісь Y до збігу з віссю X, а не вісь X до збігу з віссю Y, тобто треба взяти його в напрямі, протилежному до напряму в рівності (8). Виконуючи це, ми можемо переписати рівності (8) і (9) у такій формі:

$$\iint_A \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\overleftarrow{C}} f\, dx, \quad \iint_A \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = -\int_{\overrightarrow{C}} f\, dy,$$

і тепер є очевидною їх повна симетричність.

Формула Рімана широко прикладається в механіці і в фізиці. Ми тут розглянемо одне її прикладання до обчислення

площ. Якщо A — площа, обмежена замкненим, що не перетинається з самим собою, контуром C, то

$$A = \iint_A 1 \cdot dx\,dy.$$

Приймаючи тепер у рівності

$$\iint_A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\overleftarrow{C}} \varphi\,dx + \psi\,dy$$

спочатку $\psi = x$, $\varphi = 0$, дістанемо

$$A = +\int_{\overleftarrow{C}} x\,dy;$$

приймаючи ж

$$\psi = 0, \quad \varphi = -y,$$

знайдемо, що

$$A = -\int_{\overleftarrow{C}} y\,dx;$$

нарешті, приймаючи, що $\psi = x$, $\varphi = -y$, дістанемо

$$2A = \int_{\overleftarrow{C}} x\,dy - y\,dx.$$

З цих рівностей випливає

Теорема. **Якщо A — площа, обмежена контуром C, що не перетинається з самим собою, то**

$$A = \int_{\overleftarrow{C}} x\,dy, \quad A = -\int_{\overleftarrow{C}} y\,dx, \quad A = \frac{1}{2}\int_{\overleftarrow{C}} x\,dy - y\,dx.$$

Ці формули часто дають можливість швидко і просто обчисляти площі деяких фігур. Обчислимо, наприклад, площу A еліпса з осями a і b. Візьмемо його рівняння в параметричній формі:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Коли t змінюється від 0 до 2π, то еліпс оббігається точкою саме в додатному напрямі. Маємо

$$A = \frac{1}{2}\int_{\overleftarrow{C}} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\,ab\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \pi ab.$$

§ 196. Висновок.

1. За означенням

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y) = \int_{t_0}^{T} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y),$$

де в правій частині x і y розглядаються як ті функції параметра, якими визначений шлях.

Криволінійний інтеграл дорівнює границі відповідної інтегральної суми:

$$\int_{AB} \varphi(x, y)\, d\psi(x, y) = \lim \sum_{AB} \varphi(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\psi(x_k, y_k).$$

2. Теорема Гріна — Рімана:

$$\iint_{A} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\overleftarrow{C}} \varphi\, dx + \psi\, dy.$$

ДОДАТКОВІ СТАТТІ.

§ 197. Ознаки збіжності узагальнених інтегралів.

Питання про існування узагальненого інтеграла легко розв'язується, коли ми можемо обчислити відповідний неозначений інтеграл. Але ця можливість буває тільки в рідких випадках, тому виникає задача про знаходження методів, які давали б можливість робити висновок про існування або неіснування узагальненого інтеграла без обчислення неозначеного інтеграла, а тільки з властивостей підінтегральної функції, тобто виникає задача про знаходження так званих ознак існування інтегралів.

Якщо інтервал інтеграції (a, b) скінченний і функція $f(x)$ перервна всередині його тільки в точках $C_1, C_2, \ldots, C_n$, то за означенням

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Отже, задача про ознаки існування інтеграла від функцій, перервних усередині інтервалу, зводиться до задачі про ознаки існування інтеграла від функцій, перервних тільки на кінцях інтервалу.

Але коли функція $f(x)$ перервна на обох кінцях інтервалу (a, b), всередині ж нього неперервна, і якщо c — довільно взята точка всередині цього інтервалу, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

і інтеграл лівої частини існує, якщо існують інтеграли правої частини. Але через те що кожний з цих інтегралів є інтеграл від функції, перервної тільки на одному кінці інтервалу, то ми бачимо, що задача про існування інтеграла від перервної функції в тому випадку, коли інтервал інтеграції скінченний, завжди може бути зведена до задачі про існування інтеграла від функції, перервної тільки на одному кінці інтервалу.

Далі, через те що за означенням

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

а тому інтеграл лівої частини існує тільки при умові, що існують інтеграли правої частини,— то задача про існування інтегралів з двома нескінченними границями зводиться до задачі про існування інтегралів тільки з однією нескінченною границею.

В результаті ми бачимо, що для розв'язання питання про існування узагальнених інтегралів ми повинні дослідити питання про існування інтегралів тільки двох типів: інтегралів від функцій, перервних тільки на одному кінці інтервалу інтеграції, і інтегралів тільки з однією нескінченною границею.

Нехай же підінтегральна функція $f(x)$ в інтервалі (a, b) перервна тільки при верхній границі. Можливі два випадки: або $a<b$, або $a>b$. Обидва ці випадки розглядатимемо одночасно (рис. 207). За означенням

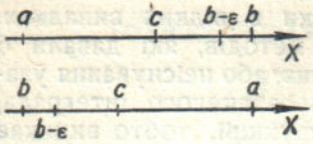

Рис. 207.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

де ε — додатне, якщо $a<b$, і від'ємне, якщо $a>b$.

Нехай c — точка всередині інтервалу (a, b). Ця точка може бути взята як завгодно близько до точки b, але не повинна з нею зливатись. Для скорочення писання покладемо

$$G=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \quad H=\int_c^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

і візьмемо ε настільки малим, щоб точка $b-\varepsilon$ була всередині інтервалу (c, b). Через те що функція $f(x)$ неперервна на всьому інтервалі $(a, b-\varepsilon)$, то

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Переходимо до границі, припускаючи, що ε нескінченно маліє. Маємо:

$$\lim G = \int_a^c f(x)\,dx + \lim H. \tag{3}$$

Отже, якщо H має скінченну границю, то і G має теж скінченну границю. Навпаки, якщо G має скінченну границю, то скінченну границю має і H. Отже, інтеграли G і H одночасно або мають скінченні границі, або їх не мають. Інакше кажучи, це означає, що узагальнені інтеграли

$$A=\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{і} \quad B=\int_c^b f(x)\,dx$$

завжди існують одночасно, при чому точка c може бути взята як завгодно близько до b. Отже,

Якщо функція $f(x)$ перервна тільки в точці b, то існування або неіснування інтеграла на всьому інтервалі (a, b) залежить від його існування або неіснування в області точки b, тобто в будьякому досить малому інтервалі (c, b).

Ця область лежатиме зліва від b, якщо $a < b$, і справа, якщо $a > b$.

Той же висновок справедливий і для інтегралів з нескінченною границею. Умовимось щодо такого способу вираження:

Якщо якенебудь твердження справедливе про всякий інтервал $(c, +\infty)$, аби тільки c було досить велике, то ми будемо говорити, що дане твердження справедливе відносно області точки $+\infty$.

Коли ж якенебудь твердження справедливе про всякий інтервал $(c, -\infty)$, де від'ємне число c досить велике за абсолютною величиною, то ми будемо говорити, що дане твердження справедливе відносно всякої області точки $-\infty$.

Нехай c — як завгодно велике число і $b > c$. Маємо

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Якщо змусимо b прямувати до $+\infty$, то обидва інтеграли

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{і} \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

одночасно матимуть скінченні границі або не матимуть їх, а тому інтеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{і} \quad \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

одночасно існуватимуть або не існуватимуть. Отже, існування або неіснування інтеграла з границею $+\infty$ залежить від його існування або неіснування в області точки $+\infty$.

Те саме, очевидно, справедливе, коли границею є $-\infty$.

Якщо ми тепер умовимось у цьому розділі називати критичними точками точки перервності функції, а також точки $+\infty$ і $-\infty$, то ми бачимо, що наші дослідження приводять нас до такого загального висновку:

Існування або неіснування узагальненого інтеграла на всьому інтервалі залежить від існування або неіснування його в області кожної критичної точки.

Отже,

існування узагальненого інтеграла залежить не від властивостей функції на всьому інтервалі, але тільки від властивостей функції в області кожної критичної точки.

Цей результат надзвичайно важливий. На всьому інтервалі функція може мати значно складніші властивості, ніж в області якоїнебудь точки. Так, наприклад, функція, зображена кривою на рисунку 208, приймає в усьому інтервалі як додатні, так і від'ємні значення, але в області точки b вона тільки додатна.

Відзначимо тепер, що коли функція $f(x)$ в області точки b зберігає один і той же знак, то при розв'язанні питання про існування інтеграла ми завжди можемо вважати її додатною, бо коли точка c взята досить близько до b, то зрозуміло, що інтеграли

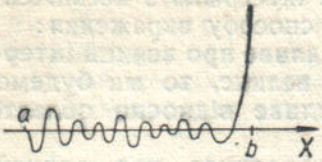

Рис. 208.

$$\int_c^b f(x)\,dx \quad \text{і} \quad \int_c^b -f(x)\,dx$$

завжди існують або не існують одночасно. Тому, коли б функція $f(x)$ в області розглядуваної точки була від'ємна, то ми замість першого інтеграла розглядали б другий. Взявши це до уваги, припустимо, що в інтегралі

$$A = \int_a^b \psi(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{4}$$

функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ в області критичної точки b зберігають один і той же знак. Згідно з тількищо сказаним вважатимемо їх додатними. Далі припустимо, що функція $\psi(x)$ має скінченну границю k, яка не дорівнює нулеві, і що інтеграл

$$B = \int_a^b \varphi(x)\,dx \tag{5}$$

існує. Доведемо, що в такому випадку існує і інтеграл (4).

Припускаємо спочатку, що $a < b$, і візьмемо точку c настільки близько до b, щоб функції $\psi(x)$ і $\varphi(x)$ на інтервалі (c, b) були додатні. Взявши ε досить малим, розглянемо інтеграли

$$G = \int_c^{b-\varepsilon} \psi(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \text{і} \quad H = \int_c^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx. \tag{6}$$

За умовою функція $\psi(x)$ додатна в точці b і має границю $k \neq 0$. Тому, якщо візьмемо два такі додатні числа m і M, що

$$m < k < M, \tag{7}$$

то c можна взяти настільки близько до b, щоб для всякого x в інтервалі (c, b) були нерівності

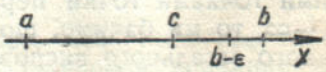

Рис. 209.

$$m < \psi(x) < M.$$

Вважаємо, що c взято таким. Тоді, через те що $\varphi(x)$ додатна, маємо

$$m\varphi(x) < \psi(x)\,\varphi(x) < M\varphi(x),$$

а тому

$$m\int_c^{b-\varepsilon}\varphi(x)\,dx<\int_c^{b-\varepsilon}\psi(x)\,\varphi(x)\,dx<M\int_c^{b-\varepsilon}\varphi(x)\,dx, \tag{8}$$

або згідно з (6)

$$mH<G<MH. \tag{9}$$

Через те що $c<b-\varepsilon$ і підінтегральні функції додатні, то інтеграли H і G, коли $\varepsilon\to 0$, необхідно зростають, а тому мають границі; вся справа тільки в тому, якими будуть ці границі — скінченними чи нескінченними. З (9) маємо

$$m\lim H\leqq\lim G\leqq M\lim H. \tag{10}$$

Якщо тепер інтеграл (5) існує, то $\lim H$ і $\lim G$ скінченні, тобто інтеграл (4) існує. Якщо ж інтеграл (5) не існує, то

$$\lim H=+\infty,$$

а тому $\lim G$ теж нескінченний, тобто інтеграл (4) не існує. Отже, інтеграл (4) існує або не існує одночасно з інтегралом (5). Це тоді, коли $a<b$. Але коли б мали $a>b$, то замість інтегралів (6) ми взяли б інтеграли

$$\int_{b+\varepsilon}^{c}\psi(x)\,\varphi(x)\,dx \quad\text{і}\quad \int_{b+\varepsilon}^{c}\varphi(x)\,dx,$$

а тому замість (8) мали б

$$m\int_{b+\varepsilon}^{c}\varphi(x)\,dx\leqq\int_{b+\varepsilon}^{c}\psi(x)\,\varphi(x)\,dx\leqq M\int_{b+\varepsilon}^{c}\varphi(x)\,dx;$$

весь інший хід міркування лишився б незмінним.

Якщо ж у (4) верхня границя нескінченна: $b=+\infty$, то ми тоді б узяли c досить великим і замість (8) мали б

$$m\int_c^{b}\varphi(x)\,dx<\int_c^{b}\psi(x)\,\varphi(x)\,dx<M\int_c^{b}\varphi(x)\,dx.$$

Змушуючи b прямувати до $+\infty$, дістали б попередній результат. Отже, маємо теорему:

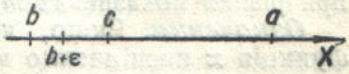

Рис. 210.

Якщо в області скінченної або нескінченної критичної точки b функції $\psi(x)$ і $\varphi(x)$ зберігають один і той же знак і якщо функція $\psi(x)$ має в точці b скінченну границю, не рівну нулеві, то інтеграли

$$A=\int_a^{b}\psi(x)\,\varphi(x)\,dx \quad\text{і}\quad B=\int_a^{b}\varphi(x)\,dx \tag{11}$$

існують або не існують одночасно.

Очевидне значення цієї теореми. Замість інтеграла A ми можемо розглядати простіший інтеграл B, тобто в інтегралі A можемо не звертати уваги на множник $\psi(x)$.

Перейдемо тепер до виведення ознак збіжності. Спочатку відзначимо ось що: якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(c, +\infty)$ завжди лишається більшою деякого додатного числа m: $f(x) > m$, то

$$\int_c^b f(x)\,dx > \int_a^b m\,dx, \text{ тобто } > m(b-a),$$

і якщо $b \to +\infty$, то права частина, а тому і ліва нескінченно зростають. Отже, інтеграл

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx \tag{12}$$

не існує. Тому якщо він існує, то функція $f(x)$ не може лишатись при всякому x більшою одного й того ж додатного числа m, яке б мале не було це число. Інакше кажучи, це означає, що функція $f(x)$ повинна приймати як завгодно малі значення. Тому при питанні про існування інтеграла (12) ми обмежимось тільки тим випадком, коли границя функції $f(x)$ у точці $+\infty$ дорівнює нулеві, тобто коли при нескінченному зростанні x функція $f(x)$ нескінченно маліє.

Але якщо при нескінченному зростанні x функція нескінченно маліє, то постає питання про порядок її малості. Але говорити про порядок малості однієї величини можна тільки відносно іншої величини. Природно, коли x нескінченно зростає, швидкість маління функції $f(x)$ порівнювати з швидкістю маління функції $\frac{1}{x}$, тобто розглядати границю відношення

$$\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^m} = x^m f(x)$$

при різних показниках m. Тому введемо

Означення. **Якщо, коли x прямує до $+\infty$ або до $-\infty$, функція x нескінченно маліє, то говорять, що її порядок малості дорівнює n, якщо**

$$\lim x^n f(x) = k,$$

де k скінченне і не нуль, і що цей порядок більший від n, якщо

$$\lim x^n f(x) = 0,$$

і менший від n, якщо

$$\lim x^n f(x) = \infty.$$

Таким же способом, якщо функція $f(x)$ у точці b перетворюється в ∞:

$$\lim_{x \to b} f(x) = \infty,$$

то природно розглядати порядок її нескінченності відносно функції $\frac{1}{x-b}$, тобто розглядати границю відношення вигляду

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{(x-b)^n}} = (x-b)^n f(x).$$

Означення. **Якщо функція $f(x)$ у точці b перетворюється в нескінченність, то говорять, що в цій точці її порядок нескінченності дорівнює n, якщо**

$$\lim_{x \to b} (x-b)^n f(x) = k,$$

де k скінченне і не нуль. Цей порядок менший від n, якщо

$$\lim_{x \to b} (x-b)^n f(x) = 0,$$

і більший від n, якщо

$$\lim_{x \to b} (x-b)^n f(x) = \infty.$$

В означенні припускалося, що x наближається до b справа; якби x наближався зліва, то ми мали б $x < b$, і при n дробовому або несумірному треба замість $x-b$ брати $b-x$, щоб уникнути уявних чисел.

Нехай тепер дана функція $f(x)$ перервна в інтервалі (a, b) тільки в точці b, перетворюючись у ній в нескінченність, і нехай

$$\lim (x-b)^n f(x) = k,$$

при чому

$$k \neq 0 \quad \text{і} \neq \infty.$$

Отже, порядок нескінченності функції $f(x)$ у точці b дорівнює n.

Взявши точку c досить близько до b, розглядаємо інтеграл

$$G = \int_c^b f(x)\,dx. \tag{13}$$

Переписавши його в такій формі:

$$G = \int_c^b (b-x)^n f(x) \cdot \frac{dx}{(b-x)^n},$$

ми представимо підінтегральну функцію як добуток двох функцій:

$$\psi(x)=(b-x)^n f(x) \quad \text{і} \quad \varphi(x)=\frac{1}{(b-x)^n},$$

а тому можемо до нього прикласти доведену вище теорему, бо функція $\varphi(x)$ в області точки b зберігає один і той же знак, і, крім того, функція $\psi(x)$ має скінченну границю, що не дорівнює нулеві. Робимо висновок, що інтеграл (13) існує або не існує одночасно з інтегралом

$$\int_c^b \frac{dx}{(b-x)^n}.$$

Але легко переконатись, що цей інтеграл існує тільки при $n<1$ і не існує при $n\geqq 1$. Але якщо він існує, то існує і інтеграл (13), а тому

Теорема. **Інтеграл**

$$\int_c^b f(x)\,dx \tag{14}$$

існує, якщо порядок функції $f(x)$ у точці b менший одиниці; коли ж порядок більший або дорівнює одиниці, то інтеграл не існує.

Розглянемо, наприклад, такий інтеграл:

$$A=\int_0^1 \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin x}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}. \tag{15}$$

Підінтегральна функція

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

перетворюється в ∞ у точках $x=0$ і $x=1$. Шукаємо її порядок нескінченності в цих точках. Через те що

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to 0}\left\{\sqrt{\frac{x}{\sin x}}\cdot\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right\}=1,$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^{\frac{2}{3}} f(x)=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right\}=\frac{\cos 1}{\sqrt{\sin 1}},$$

то ці порядки відповідно рівні $\frac{1}{2}$ і $\frac{2}{3}$. Через те що вони менші одиниці, то інтеграл (15) існує.

Розглянемо тепер інтеграл

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

з нескінченною границею і припустимо, що функція $f(x)$ у точці $+\infty$ має порядок малості, що дорівнює n. Отже,

$$\lim_{x\to+\infty} x^n f(x) = k, \text{ де } k \neq 0 \text{ і } \neq \infty.$$

Маємо

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx = \int_c^{+\infty} x^n f(x) \cdot \frac{dx}{x^n}. \tag{16}$$

У правій частині підінтегральна функція є добуток двох функцій: функції $x^n f(x)$, границя якої скінченна, і функції $\frac{1}{x^n}$, яка зберігає один і той же знак. Отже, інтеграл (16) існує або не існує одночасно з інтегралом

$$\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^n}. \tag{17}$$

Але коли $n < 1$, то

$$\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \left| \frac{1}{1-n} x^{1-n} \right|_c^{+\infty} = +\infty;$$

якщо $n = 1$, то

$$\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln(+\infty) - \ln c = +\infty,$$

якщо $n > 1$, то

$$\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \left| -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} \right|_c^{+\infty} = +\frac{1}{(n-1)c^{n-1}}.$$

Тільки в останньому випадку, тобто при $n > 1$, інтеграл (17), а тому і інтеграл (16) існують. Отже, інтеграл

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx \tag{18}$$

існує, якщо порядок малості функції $f(x)$ у точці $+\infty$ більший одиниці. Якщо ж цей порядок менший або дорівнює одиниці, то інтеграл не існує.

Розглянемо, наприклад, інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3+5}{3x^5+x+7}\,dx. \tag{19}$$

Позначаючи підінтегральну функцію через $f(x)$, маємо

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{5}{x^3}}{3+\frac{1}{x^4}+\frac{7}{x^5}},$$

а тому зрозуміло, що

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 f(x))=\frac{1}{3}.$$

Отже, порядок більший одиниці, а тому інтеграл існує.

§ 198. Ейлерові інтеграли.

Ейлеровим інтегралом першого роду називається інтеграл

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Якщо $p<1$, то підінтегральна функція нескінченна при $x=0$; вона нескінченна при $x=1$, якщо $q<1$. Тому постає питання про існування цього інтеграла. Приймаючи

$$f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1},$$

маємо:

$$\lim_{x\to 0} x^{1-p}f(x)=1,\quad \lim_{x\to 1}(1-x)^{1-q}f(x)=1.$$

Отже, порядок нескінченності функції $f(x)$ дорівнює $1-p$ у точці $x=0$ і $1-q$ в точці $x=1$. Тому інтеграл існує тоді і тільки тоді, коли ці порядки менші одиниці, тобто коли p і q додатні. Цей інтеграл позначається так: $B(p, q)$, що читається: бета від p і q.

Ейлеровим інтегралом другого виду називається інтеграл

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx.$$

Позначається він так: $\Gamma(p)$, що читається: гама від p. Якщо $p<1$, то порядок нескінченності підінтегральної функції в точці $x=0$ дорівнює $1-p$, а через те що інтеграл існує тільки в тому випадку, коли цей порядок менший одиниці, тобто коли

$1-p<1$, то в області точки $x=0$ інтеграл існує тоді і тільки тоді, коли p додатне. В області $x=+\infty$ інтеграл завжди існує, бо при всякому m

$$\lim_{x\to+\infty} x^m e^{-x}=0,$$

і, отже, порядок малості підінтегральної функції більший одиниці.

Таким чином, при додатних показниках, і тільки при додатних, ейлерові інтеграли існують. Візьмемо перший з них:

$$B(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \tag{1}$$

Приймаючи $x=1-y$, дістаємо

$$B(p,\ q)=-\int_1^0 y^{q-1}(1-y)^{p-1}\,dy.$$

Переставивши в правій частині границі інтеграла і замінивши символ y знову символом x, матимемо:

$$B(p,\ q)=\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}\,dx.$$

Отже,

$$B(p,\ q)=B(q,\ p). \tag{2}$$

Таким чином, виявляється, що функція $B(p,\ q)$ симетрична відносно своїх аргументів.

Зробимо тепер таке підставляння:

$$x=\frac{z}{1+z},\quad z=\frac{x}{1-x}.$$

Коли x змінюється від нуля до одиниці, то z змінюється від нуля до $+\infty$, а тому після підставляння знайдемо, що

$$B(p,\ q)=\int_0^{+\infty}\frac{z^{p-1}\,dz}{(1+z)^{p+q}}. \tag{3}$$

Ми скоро скористуємось цією формулою. Тепер же розглянемо ейлерів інтеграл другого роду:

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx. \tag{4}$$

Насамперед маємо:

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=-\Big/_{x=0}^{x=+\infty} e^{-x}=1,$$

а тому

$$\Gamma(1)=1. \tag{5}$$

Це можна вважати першою властивістю функції $\Gamma(p)$. Далі, інтегруючи частинами, ми послідовно маємо:

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx=-\int_0^{+\infty} x^p\,de^{-x}=$$

$$=-\left[x^p e^{-x}\right]_0^{+\infty}+p\int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{p-1}\,dx,$$

і через те що

$$\lim_{x\to+\infty} x^p e^{-x}=0,$$

то

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p). \tag{6}$$

Це — друга властивість функції Г.

Нехай тепер m — ціле додатне число. Прикладаючи рівність (6) кілька разів, ми маємо:

$$\begin{aligned}
\Gamma(m+1)&=m\Gamma(m),\\
\Gamma(m)&=(m-1)\,\Gamma(m-1),\\
\Gamma(m-1)&=(m-2)\,\Gamma(m-2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Gamma(3)&=2\Gamma(2),\\
\Gamma(2)&=1\Gamma(1),\\
\Gamma(1)&=1.
\end{aligned}$$

Перемноживши всі ці рівності, робимо висновок, що

$$\Gamma(m+1)=1\cdot2\cdot3\ldots(m-1)\,m=m! \tag{7}$$

Це — третя властивість Г. Цікаво, що в правій частині стоїть вираз, який має зміст тільки при m цілому.

Повернемось до основної рівності (4). Приймаючи $x=ay$, де a — стала додатна величина, дістанемо:

$$\Gamma(p)=a^p\int_0^{+\infty} e^{-ay}\,y^{p-1}\,dy, \tag{8}$$

звідки

$$\frac{1}{a^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty} e^{-ay}y^{p-1}\,dy. \tag{9}$$

Замінимо тут a через $1+z$, а p — через $p+q$. Дістанемо

$$\frac{1}{(1+z)^{p+q}}=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^{+\infty} e^{-(1+z)y}\,y^{p+q-1}\,dy. \tag{10}$$

Візьмемо тепер рівність (3). Завдяки (10) цю рівність можна переписати в такій формі:

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{z^{p-1}}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} e^{-(1+z)y} y^{p+q-1} dy \right\} dz,$$

або, виносячи і підводячи сталі множники під знак інтеграла:

$$B(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-(1+z)y} y^{p+q-1} z^{p-1} dy \right\} dz.$$

Змінюємо порядок інтеграції. Маємо:

$$B(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-(1+z)y} y^{p+q-1} z^{p-1} dz \right\} dy.$$

Або, виносячи сталий множник,

$$B(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} \left\{ e^{-y} y^{p+q-1} \int_0^{+\infty} e^{-zy} z^{p-1} dz \right\} dy. \qquad (11)$$

В рівності (8) замість a напишемо y, а y замінимо буквою z. Одержимо:

$$\Gamma(p) = y^p \int_0^{+\infty} e^{-yz} z^{p-1} dz,$$

а тому з (11)

$$B(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} \Gamma(p) e^{-y} y^{q-1} dy = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{q-1} dy,$$

і остаточно несподівана рівність

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

якою функція B виражається через функцію Г. На цьому прикладі ми бачимо, яку силу мають теореми про підставляння і диференціювання та інтегрування по параметру.

§ 199. Рядок Тейлора.

В теоремі про інтегрування частинами:

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\psi(x) = [\varphi(x)\psi(x)]_a^b - \int_a^b \psi(x)\, d\varphi(x),$$

неявно міститься рядок Тейлора.

Нехай $f(x)$ — функція, неперервна в інтервалі (a, b) разом із своїми похідними до n-го порядку включно.

Через те що

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C,$$

то

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Відзначаючи, що

$$dx = d(x-b),$$

перепишемо ці рівності в такій формі:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,d(x-b)$$

і праву частину проінтегруємо частинами. Через те що

$$[f'(x)(x-b)]_a^b = (b-a)f'(a),$$

то дістанемо

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-x)f''(x)\,dx. \qquad (1)$$

Але інтеграл у правій частині теж можна проінтегрувати частинами. Маємо:

$$\int_a^b (b-x)f''(x)\,dx = -\frac{1}{1\cdot 2}\int_a^b f''(x)\,d(b-x)^2 =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{1\cdot 2}f''(a) + \frac{1}{1\cdot 2}\int_a^b (b-x)^2 f'''(x)\,dx,$$

а тому

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1\cdot 2}f''(a) + \frac{1}{1\cdot 2}\int_a^b (b-x)^2 f'''(x)\,dx$$

і через те що

$$\frac{1}{2!}\int_a^b (b-x)^2 f'''(x)\,dx = -\frac{1}{3!}\int_a^b f'''(x)\,d(b-x)^3 =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a) + \frac{1}{3!}\int_a^b (b-x)^3 f^{IV}(x)\,dx,$$

то

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a)+$$

$$+\frac{1}{3!}\int_a^b (b-x)^3 f^{IV}(x)\,dx.$$

Інтеграл у правій частині теж можна проінтегрувати частинами і т. д. Взагалі, відзначаючи, що

$$\frac{1}{k!}\int_a^b (b-x)^k f^{(k+1)}(x)\,dx=-\frac{1}{(k+1)!}\int_a^b f^{(k+1)}(x)\,d(b-x)^{k+1},$$

і інтегруючи частинами, дістаємо рівність

$$\frac{1}{k!}\int_a^b (b-x)^k f^{(k+1)}(x)\,dx=\frac{(b-a)^{k+1}f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}+$$

$$+\frac{1}{(k+1)!}\int_a^b (b-x)^{(k+1)} f^{(k+2)}(x)\,dx. \qquad (2)$$

Приймаючи послідовно k рівним 1, 2, 3, ..., ми одержуємо рівності

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\int_a^b (b-x)f''(x)\,dx,$$

$$\int_a^b (b-x)f'(x)\,dx=\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{1}{2!}\int_a^b (b-x)^2 f'''(x)\,dx,$$

$$\frac{1}{2!}\int_a^b (b-x)^2 f''(x)\,dx=\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a)+\frac{1}{3!}\int_a^b (b-x)^3 f^{IV}(x)\,dx,$$

$$\frac{1}{3!}\int_a^b (b-x)^3 f'''(x)\,dx=\frac{(b-a)^4}{4!}f^{IV}(a)+\frac{1}{4!}\int_a^b (b-x)^4 f^{V}(x)\,dx,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_a^b (b-x)^{n-2} f^{(n-1)}(x)\,dx=\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx.$$

Додаючи їх, знайдемо

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+$$

$$+\frac{(b-a)^{n-1}f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}+R_n, \tag{3}$$

де

$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-x)^{n-1}f^{(n)}(x)\,dx. \tag{4}$$

Але це і є не що інше, як рядок Тейлора.

Представимо його в звичній формі. Для цього спочатку в інтегралі правої частини замінимо символ x як символ інтеграції символом u, а величини a і b — через x і $x+h$. Дістанемо:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+R_n, \tag{5}$$

де

$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_x^{x+h}(x+h-u)^{(n-1)}f^{(n-1)}(u)\,du. \tag{6}$$

Цей інтеграл неважко представити в простішому вигляді. Насамперед само собою напрошується підставляння

$$u=x+z.$$

Коли u змінюється від x до $x+h$, то z змінюється від нуля до h, а тому

$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-z)^{n-1}f^{(n)}(x+z)\,dz. \tag{7}$$

Тепер границі інтеграла вже не залежать від x. Неважко зробити так, щоб вони не залежали також і від h. Приймаємо

$$z=ht.$$

Коли z змінюється від нуля до h, то t змінюється від нуля до одиниці, а тому

$$R_n=\frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}f^{(n)}(x+ht)\,dt, \tag{8}$$

і в правій частині ми маємо інтеграл уже із сталими границями. В результаті одержуємо теорему:

Якщо дана функція $f(x)$ разом з похідними до n-го порядку включно неперервна в інтервалі $(x, x+h)$, то

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+R_n,$$

де

$$R_n=\frac{h^n}{(n-1)}\int_0^1(1-t)^{n-1}f^{(n)}(x+ht)\,dt. \qquad (9)$$

Такий вивід рядка Тейлора, цікавий сам по собі, набуває особливого значення завдяки тому, що ми одержали нову форму для остачі. Ця форма часто дуже зручна при теоретичних дослідженнях. Перевага її перед формами Коші і Лагранжа в тому, що в неї не входить невідома величина θ. Але з неї неважко одержати звичайні форми остачі. Нехай p — довільно взяте додатне число. Маємо

$$R_n=\frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-p}f^{(n)}(x+ht)\cdot(1-t)^{p-1}\,dt,$$

і через те що множник $(1-t)^{p-1}$ додатний, поки t змінюється в границях від 0 до 1, то за узагальненою теоремою про середнє значення інтеграла

$$R_n=\frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(x+h\theta)\int_0^1(1-t)^{p-1}\,dt,$$

де $0<\theta<1$. Обчисляючи ж інтеграл правої частини, знаходимо

$$R_n=\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(x+\theta h)}{(n-1)!\,p},$$

тобто ми одержали остачу у формі Шломільха.

§ 200. Формула Валліса.

Обчислимо такий інтеграл:

$$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx.$$

Індекс символа u_n повинен показувати, в якому степені в підінтегральному виразі береться функція $\sin x$. Показник n вважаємо цілим додатним числом. Маємо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,d\cos x.$$

Інтегруючи частинами, знаходимо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = -[\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

У правій частині знову з'явився шуканий інтеграл. Переносячи його в ліву частину, знаходимо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx,$$

або, користуючись скороченим позначенням:

$$u_n = \frac{n-1}{n} u_{n-2}. \qquad (1)$$

Одержана формула зводить шуканий інтеграл до інтеграла того ж типу, але з показником, зменшеним на дві одиниці. Прикладаючи цю формулу кілька разів і зменшуючи кожного разу показник на дві одиниці, ми прийдемо, нарешті, до одного з таких інтегралів, які одержимо, приймаючи $n=0$ або $n=1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1,$$

залежно від того, чи дорівнює первісний n парному числу або непарному. Обчислимо u_n.

Якщо n — парне ($n=2m$), то

$$u_{2m} = \frac{2m-1}{2m} u_{2m-2},$$

$$u_{2m-2} = \frac{2m-3}{2m-2} u_{2m-4},$$

$$u_{2m-4} = \frac{2m-5}{2m-4} u_{2m-6},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$u_2 = \frac{1}{2} u_0$$

$$u_0 = \frac{\pi}{2}$$

якщо n — непарне ($n=2m-1$), то

$$u_{2m-1} = \frac{2m-2}{2m-1} u_{2m-3},$$

$$u_{2m-3} = \frac{2m-4}{2m-3} u_{2m-5},$$

$$u_{2m-5} = \frac{2m-6}{2m-5} u_{2m-7},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$u_3 = \frac{2}{3} u_1$$

$$u_1 = 1.$$

Перемножуючи між собою рівності кожної системи, ми після очевидних скорочень одержуємо:

$$u_{2m}=\frac{\pi}{2}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2m-5)(2m-3)(2m-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots(2m-4)(2m-2)(2m)}, \qquad (2)$$

$$u_{2m-1}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots(2m-6)(2m-4)(2m-2)}{3\cdot5\cdot7\cdot9\ldots(2m-5)(2m-3)(2m-1)}. \qquad (3)$$

Дуже красиві вирази. В чисельниках і знаменниках стоять добутки або тільки парних чисел, або тільки непарних. Крім того, заслуговує на увагу така обставина: в правій частині рівності (3) ми маємо раціональне число, в правій же частині рівності (2) присутнє несумірне число $\frac{\pi}{2}$. Отже, значення інтеграла

$$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

дорівнює раціональному числу у випадку n непарного і несумірному числу у випадку n парного.

Звідси випливає, що для того, щоб знати величину інтеграла u_n при n парному, необхідно спочатку знати значення π.

Дуже цікаве те, що рівностями (2) і (3) можна скористатись для обчислення π.

Якщо x змінюється тільки в границях від нуля до $\frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ додатний і менший одиниці. Тому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}x\,dx,$$

бо підінтегральні функції задовольняють ці нерівності. При наших позначеннях

$$u_{2m+1}<u_{2m}<u_{2m-1}. \qquad (4)$$

Замінимо в цих нерівностях інтеграли їх значеннями з рівностей (2) і (3), які нам дають значення для u_{2m} і u_{2m-1}. Щоб одержати значення для u_{2m+1}, очевидно, досить у рівності (3) замінити m через $m+1$. Виконуючи все це, дістаємо нерівності:

$$\frac{2\cdot4\ldots(2m-2)(2m)}{3\cdot5\ldots(2m-1)(2m+1)}<\frac{\pi}{2}\frac{1\cdot3\ldots(2m-3)(2m-1)}{2\cdot4\ldots(2m-2)(2m)}<$$
$$<\frac{2\cdot4\ldots(2m-4)(2m-2)}{3\cdot5\ldots(2m-3)(2m-1)}.$$

Поділяючи на ліву частину, маємо:

$$1<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ \ldots(2m-1)(2m-1)(2m+1)}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots(2m-2)(2m-2)(2m)(2m)}<1+\frac{1}{2m}.$$

Зрозуміло, що можна написати таку рівність:

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots(2m-1)(2m-1)(2m+1)}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\ldots(2m-2)(2m)(2m)}=1+\frac{\theta_m}{2m}, \qquad (5)$$

де θ_m — невідома додатна величина, менша одиниці. Значення її, очевидно, залежить від того, яким є m, яке може бути яким завгодно цілим числом.

З (5) ми одержуємо формулу:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots(2m-2)(2m-2)(2m)(2m)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\ldots(2m-3)(2m-1)(2m-1)(2m+1)}\left(1+\frac{\theta_m}{2m}\right). \qquad (6)$$

Ця формула дає можливість обчислити π. Справді, прийнявши, що

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\ldots(2m-2)(2m)(2m)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\ldots(2m-1)(2m-1)(2m+1)},$$

ми зробимо помилку, яка менша $\frac{1}{2m}$ того значення, яке одержимо для $\frac{\pi}{2}$ *.

Поділимо рівність (6) на останній множник правої частини і потім перепишемо його в такій формі:

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\theta_m}{2m}}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}.$$

Ця рівність справедлива при всякому m. Якщо ж ми збільшуватимемо m, то збільшуватиметься число множників у правій частині.

Уявимо, що m зростає до нескінченності. Тоді в границі права частина перетвориться в добуток нескінченного числа множників, і ми дістаємо таку надзвичайно красиву рівність:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

---

* Щоб яскраво бачити це, досить переписати рівність (6) у такій формі:

$$\frac{\pi}{2}=p_m\left(1+\frac{\theta_m}{2m}\right)=p_m+p_m\frac{\theta_m}{2m}.$$

Через те що $\theta_m<1$, то, приймаючи, що $\frac{\pi}{2}=p_m$, ми робимо помилку, яка менша, ніж $\frac{p_m}{2m}$.

Ця рівність називається формулою Валліса. Вона дає вираз для $\frac{\pi}{2}$ через нескінченний добуток.

§ 201. Інтеграл типу $\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz$.

Якщо ми від неперервної функції $f(x)$ візьмемо інтеграл від a до x, де a — якась стала величина, то одержимо функцію

$$\psi(x)=\int\limits_a^x f(x)\,dx,$$

похідна якої дорівнює підінтегральній функції і яка перетворюється в нуль при $x=a$:

$$\psi'(x)=f(x), \quad \psi(a)=0.$$

Але, одержавши функцію $\psi(x)$, ми можемо її в свою чергу проінтегрувати в границях від a до x. Дістанемо функцію, яка позначиться так:

$$\int\limits_a^x \left\{ \int\limits_a^x f(x)\,dx \right\} dx.$$

Від цієї функції ми можемо знову взяти інтеграл у границях від a до x. Одержимо функцію

$$\int\limits_a^x \left\{ \int\limits_a^x \left[\int\limits_a^x f(x)\,dx \right] dx \right\} dx,$$

яку в свою чергу можемо проінтегрувати від a до x.

Взагалі, якщо ми дану функцію $f(x)$ послідовно проінтегруємо n разів, кожного разу в границях від a до x, то ми дістанемо функцію

$$u=\int\limits_a^x \left[\int\limits_a^x \left\{ \int\limits_a^x \ldots \left(\int\limits_a^x \left(\int\limits_a^x f(x)\,dx \right) dx \right) \ldots \right\} dx \right] dx,$$

де знак інтеграла повторюється n разів. Цю функцію прийнято коротше позначати так:

$$u=\int\limits_a^x\int\limits_a^x\int\limits_a^x \ldots \int\limits_a^x\int\limits_a^x f(x)\,dx^n,$$

або ще коротше так:

$$u=\int\limits_a^x f(x)\,dx^n.$$

При цьому очевидно, що при кожному новому інтегруванні ми одержуватимемо функцію, похідна якої дорівнює тій функції, від якої береться останній інтеграл. Тому зрозуміло, що

$$\frac{du}{dx}=\int_a^x f(x)\,dx^{n-1},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\int_a^x f(x)\,dx^{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}=\int_a^x f(x)\,dx,$$

$$\frac{d^nu}{dx^n}=f(x),$$

і що сама функція u і всі її похідні до $(n-1)$-го порядку дорівнюють нулеві при $x=a$.

Взагалі кажучи, в більшості випадків буває досить важко провести навіть одне інтегрування, тим більше кілька послідовних інтегрувань. Тому заслуговує на особливу увагу той надзвичайний факт, що n-кратне інтегрування завжди може бути замінене одним інтегруванням. Справді, прикладаючи теорему про інтегрування частинами, ми маємо:

$$\int_a^x \underbrace{\left(\int_a^x f(x)\,dx\right)}_{u}\underbrace{dx}_{dv}=\left[x\int_a^x f(x)\,dx\right]_{x=a}^{x=x}-\int_a^x xf(x)\,dx.$$

Проінтегрована частина при нижньому підставлянні $x=a$ перетворюється в нуль, а тому

$$\int_a^x\left(\int_a^x f(x)\,dx\right)dx=x\int_a^x f(x)\,dx-\int_a^x xf(x)\,dx.$$

Замінимо тепер у правій частині символ x як символ змінної інтеграції новим символом z. Дістанемо:

$$\int_a^x\int_a^x f(x)\,dx^2=x\int_a^x f(z)\,dz-\int_a^x zf(z)\,dz.$$

Тепер ми можемо в першому інтегралі правої частини підвести x як сталий множник під символ інтеграла. Дістанемо

$$\int_a^x\int_a^x f(x)\,dx^2=\int_a^x (x-z)f(z)\,dz, \qquad (1)$$

і ми бачимо, що результат двократного інтегрування виражається через один означений інтеграл, при чому функція $f(x)$ може бути якою завгодно неперервною функцією.

Замінимо в рівності (1) функцію $f(x)$ функцією

$$\int_a^x f(x)\,dx.$$

Тоді дістанемо

$$\int_a^x\int_a^x\int_a^x f(x)\,dx^3 = \int_a^x \left[(x-z)\left(\int_a^z f(z)\,dz\right)\right]dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_a^x \underbrace{\left(\int_a^z f(z)\,dz\right)}_{u}\underbrace{d(x-z)^2}_{dv}$$

і, інтегруючи частинами праву частину, маємо:

$$\int_a^x f(x)\,dx^3 = -\frac{1}{2}\left[(x-z)^2\int_a^z f(z)\,dz\right]_{z=a}^{z=x} + \frac{1}{2}\int_a^x (x-z)^2 f(z)\,dz.$$

Проінтегрована частина перетворюється в нуль і при верхньому і при нижньому підставлянні, а тому

$$\int_a^x f(x)\,dx^3 = \frac{1}{2!}\int_a^x (x-z)^2 f(z)\,dz. \qquad (2)$$

Заміняючи ж тут знову $f(x)$ через функцію

$$\int_a^x f(x)\,dx,$$

дістанемо

$$\int_a^x f(x)\,dx^4 = \frac{1}{2!}\int_a^x (x-z)^2\left(\int_a^z f(z)\,dz\right)dz =$$

$$= -\frac{1}{3!}\int_a^x \left(\int_a^z f(z)\,dz\right)d(x-z)^3,$$

що після інтегрування частинами дає:

$$\int_a^x f(x)\,dx^4 = \frac{1}{3!}\int_a^x (x-z)^3 f(z)\,dz. \qquad (3)$$

Рівності (1), (2) і (3) природно наводять на думку, що при всякому n

$$\int_a^x f(x)\,dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz. \tag{4}$$

Щоб довести справедливість цієї рівності при всякому n, досить, враховуючи рівності (1), (2) і (3), довести, що коли вона справедлива при якомунебудь n, то вона справедлива і при наступному за n числі. Для цього переписуємо (4) в такій формі:

$$\int_a^x f(x)\,dx^n = -\frac{1}{n!}\int_a^x f(z)\,d(x-z)^n$$

і, замінивши $f(x)$ через $\int_a^x f(x)\,dx$, праву частину інтегруємо частинами. Одержуємо:

$$\int_a^x f(x)\,dx^{n+1} = -\frac{1}{n!}\int_a^x \left(\int_a^z f(z)\,dz\right) d(x-z)^n =$$

$$= -\frac{1}{n!}\left[(x-z)^n \int_a^z f(z)\,dz\right]_{z=a}^{z=x} + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-z)^n f(z)\,dz,$$

тобто

$$\int_a^x f(x)\,dx^{n+1} = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-z)^n f(z)\,dz.$$

Але ця рівність є не що інше, як рівність (4), в якій n замінено через $n+1$. Отже, рівність (4) справедлива при всякому n, і ми одержуємо теорему:

Послідовне n-кратне інтегрування даної функції від однієї і тієї ж нижньої границі може бути замінене одним інтегруванням за формулою:

$$\int_a^x\int_a^x \dots \int_a^x f(x)\,dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz.$$

Продиференціюємо цю рівність n разів. Кожне диференціювання знищує в лівій частині один символ інтегрування, а тому в результаті ми дістанемо рівність:

$$\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz = f(x).$$

Отже, приймаючи

$$u=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dx, \tag{5}$$

маємо

$$\frac{d^n u}{dx^n}=f(x).$$

Ми бачимо, що вираз

$$u=\int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f(z)\,dz$$

є одним із розв'язків рівняння

$$\frac{d^n u}{dx^n}=f(x).$$

§ 202. Нескінченно малий кривий трикутник.

Нехай три криві, перетинаючись, утворюють кривий трикутник ABC. Позначимо через a, b, c дуги, що є його сторонами, а через α, β, γ протилежні до них кути, розуміючи під кутом між двома кривими кут між дотичними до них у точці перетину їх (рис. 211). Ми припустимо, що цей трикутник нескінченно малий. Говорячи точніше, ми припустимо, що криві деформуються за якимнебудь законом так, що самі дуги нескінченно маліють, при чому радіуси кривизни їх не можуть приймати як завгодно малих значень. Одним з найпростіших, але таких, що часто зустрічаються, прикладів такої деформації може бути той випадок, коли всі три криві, не змінюючи своєї форми, рухаються по площині так, що точки A, B, C нескінченно наближаються до однієї і тієї ж точки. В ще більш окремому випадку ми можемо собі уявити, що криві AB і AC нерухомі, а крива BC рухається так, що точки B і C нескінченно наближаються до A.

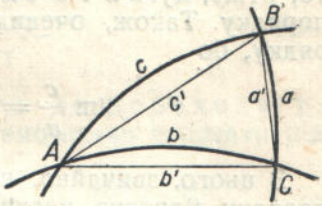

Рис. 211.

Із зміною форми трикутника кути α, β, γ теж змінюються. Позначимо їх границі через $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$:

$$\lim \alpha=\bar{\alpha},\quad \lim \beta=\bar{\beta},\quad \lim \gamma=\bar{\gamma}, \tag{1}$$

при чому припустимо, що ні одна з цих границь не дорівнює нулеві, тобто припустимо, що кути α, β, γ не нескінченно малі.

Через a', b', c' позначимо хорди дуг a, b, c; ці хорди утворюють звичайний прямолінійний трикутник, кути якого позначимо відповідно через α', β', γ'.

Через те що за припущенням радіуси кривизни дуг не нескінченно малі, то дуги еквівалентні своїм хордам:

$$a \approx a', \quad b \approx b', \quad c \approx c', \tag{2}$$

і

$$\lim \alpha' = \bar{\alpha}, \quad \lim \beta' = \bar{\beta}, \quad \lim \gamma' = \bar{\gamma}. \tag{3}$$

Ми маємо

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'}.$$

В границі

$$\lim \frac{a'}{b'} = \frac{\sin \bar{\alpha}}{\sin \bar{\beta}},$$

і через те що хорди еквівалентні дугам, то за першим принципом

$$\lim \frac{a}{b} = \frac{\sin \bar{\alpha}}{\sin \bar{\beta}}. \tag{4}$$

Через те що права частина скінченна і не дорівнює нулеві, то, отже, дуги a і b одна відносно одної одного й того ж порядку. Також, очевидно, і дуга c відносно них того ж порядку, бо

$$\lim \frac{c}{a} = \lim \frac{c'}{a'} = \lim \frac{\sin \gamma'}{\sin \alpha'} = \frac{\sin \bar{\gamma}}{\sin \bar{\alpha}}.$$

З цього, звичайно, не випливає, що a, b, c будуть першого порядку відносно нескінченно малого, прийнятого за основне. Нехай це основне нескінченно мале буде τ і нехай a порядку λ відносно нього. Тоді b і c будуть відносно τ теж порядку λ, бо вони одного порядку з a. Нехай

$$a = k\tau^{\lambda} + \varepsilon_1, \quad b = h\tau^{\lambda} + \varepsilon_2, \quad c = g\tau^{\lambda} + \varepsilon_3, \tag{5}$$

де k, h, g — сталі, що не дорівнюють нулеві, і де ε_1, ε_2, ε_3 — нескінченно малі, порядки яких відносно τ вищі λ. Позначимо через $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ головні частини дуг a, b, c:

$$\bar{a} = k\tau^{\lambda}, \quad \bar{b} = h\tau^{\lambda}, \quad \bar{c} = g\tau^{\lambda}. \tag{6}$$

Через те що нескінченно мале еквівалентне своїй головній частині, то

$$a \approx \bar{a}, \quad b \approx \bar{b}, \quad c \approx \bar{c}. \tag{7}$$

Після всіх цих попередніх зауважень перейдемо до доведення дуже важливої теореми.

Розглядаючи трикутник з хорд, ми маємо:

$$\frac{b'}{a'}=\frac{\sin\beta'}{\sin\alpha'},\quad \frac{c'}{a'}=\frac{\sin\gamma'}{\sin\alpha'},$$

звідки

$$\lim\frac{b'}{a'}=\frac{\sin\bar{\beta}}{\sin\bar{\alpha}},\quad \lim\frac{c'}{a'}=\frac{\sin\bar{\gamma}}{\sin\bar{\alpha}}.$$

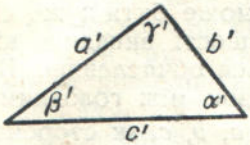

Рис. 212.

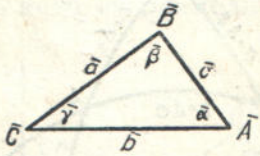

Рис. 213.

Але

$$\lim\frac{b'}{a'}=\lim\frac{b}{a}=\lim\frac{\bar{b}}{\bar{a}}=\frac{h}{k},\quad \lim\frac{c'}{a'}=\lim\frac{c}{a}=\lim\frac{\bar{c}}{\bar{a}}=\frac{g}{k},$$

а тому

$$\frac{h}{k}=\frac{\sin\bar{\beta}}{\sin\bar{\alpha}},\quad \frac{g}{k}=\frac{\sin\bar{\gamma}}{\sin\bar{\alpha}},$$

або

$$\frac{k}{\sin\bar{\alpha}}=\frac{h}{\sin\bar{\beta}}=\frac{g}{\sin\bar{\gamma}}.$$

Але коли мають місце ці рівності, то до переходу до границі ми, помножуючи (8) на τ^{λ}, маємо право написати рівності

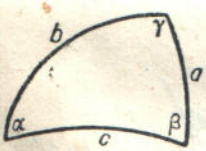

Рис. 214.

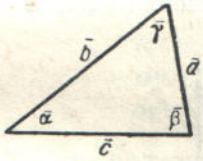

Рис. 215.

$$\frac{k\tau^{\lambda}}{\sin\bar{\alpha}}=\frac{h\tau^{\lambda}}{\sin\bar{\beta}}=\frac{g\tau^{\lambda}}{\sin\bar{\gamma}},\qquad (8)$$

тобто рівності

$$\frac{\bar{a}}{\sin\bar{\alpha}}=\frac{\bar{b}}{\sin\bar{\beta}}=\frac{\bar{c}}{\sin\bar{\gamma}}.\qquad (9)$$

В цих рівностях і є теорема.

Побудуємо прямолінійний трикутник $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, сторона $\bar{A}\bar{B}$ якого дорівнює $\bar{c}$, а прилежні кути дорівнюють $\bar{\alpha}$ і $\bar{\beta}$. З (9) випливає, що дві інші його сторони дорівнюють $\bar{a}$ і $\bar{b}$, а кут між ними дорівнює $\bar{\gamma}$ (рис. 215).

Теорема. **Якщо кути і радіуси кривизни дуг нескінченно малого кривого трикутника не нескінченно малі, то прямолінійний трикутник, сторонами якого є головні частини сторін кривого трикутника, має кути, рівні граничним значенням кутів даного трикутника.**

Для прикладання цю теорему вигідно формулювати так:

Всякий нескінченно малий кривий трикутник, кути і радіуси кривизни сторін якого не нескінченно малі, можна розглядати як прямолінійний трикутник при умові заміни його сторін головними їх частинами, а його кутів — їх граничними значеннями.

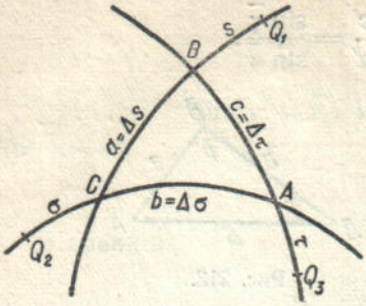

Рис. 216.

Зрозумілим є величезне значення цієї теореми. Зв'язок між a, b, c може бути дуже складний, і в більшості випадків він важко піддається обчисленню. В той же час зв'язок між головними частинами їх $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, як сторонами прямолінійного трикутника, легко піддається обчисленню. Фактично ж нам майже завжди досить знати тільки $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, а не самі a, b, c, які як нескінченно малі є тільки допоміжними величинами і їх можна заміняти еквівалентними їм величинами.

В більшості випадків нескінченно малі є як прирости змінних величин. В окремому випадку сторони кривого трикутника ми завжди можемо розглядати як прирости відповідних дуг. Справді, взявши на кожній кривій якунебудь точку за початок відліку дуг і позначивши через s, σ, τ змінні дуги кривих, ми матимемо

$$a=\Delta s, \quad b=\Delta\sigma, \quad c=\Delta\tau.$$

Змінні s, σ, τ можуть бути функціями деякого незалежного змінного t; прирости Δs, $\Delta\sigma$, $\Delta\tau$ ми одержуємо, надаючи цьому t приросту Δt. Коли Δt нескінченно маліє, то прирости Δs, $\Delta\sigma$,

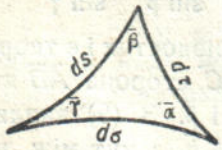

Рис. 217.

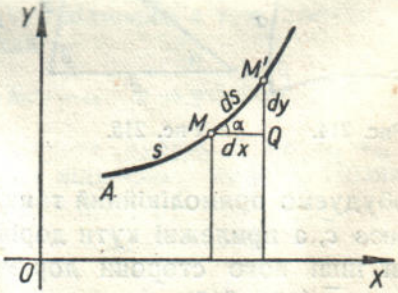

Рис. 218.

$\Delta\tau$ теж маліють. Але головна частина приросту функції дорівнює її диференціалові, а тому згідно з теоремою варто тільки сторони трикутника замість Δs, $\Delta\sigma$, $\Delta\tau$ вважати рівними ds, $d\sigma$,

$d\tau$, а кути рівними їх граничним значенням, і ми маємо право наш кривий трикутник розглядати як прямолінійний. Отже,

якщо сторонами нескінченно малого кривого трикутника є прирости дуг, то його можна розглядати як прямолінійний при умові вважати сторони рівними диференціалам, а кути — їх граничним значенням.

Тому на практиці, коли мають кривий трикутник, то на дугах його пишуть їх диференціали, приймаючи кути рівними граничним значенням, і розглядають його як прямолінійний.

Не треба забувати, що кривий нескінченно малий трикутник можна розглядати як прямолінійний тільки в тому випадку, коли його кути і радіуси кривизни його сторін не нескінченно малі.

Якщо це забути, то легко прийти до парадоксальних висновків.

Розглянемо кілька прикладів на викладене. Нехай M — точка на кривій, даній параметрично рівняннями

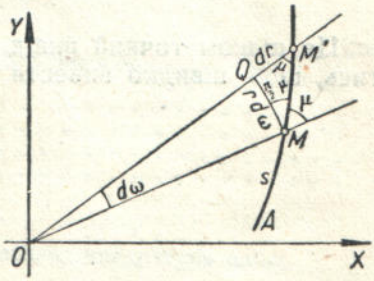

Рис. 219.

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Треба визначити кут α напряму дотичної. Міркуємо так: надаємо параметрові нескінченно малого приросту.

Одержимо точку M', нескінченно близьку до M. Будуємо ординату точки M' і проводимо пряму MQ паралельно осі X. Одержуємо нескінченно малий кривий трикутник $M'MQ$. Його ми можемо розглядати як прямолінійний при умові вважати сторони його рівними не приростам Δs, Δx, Δy, а диференціалам ds, dx, dy, а кут при M рівним α. Одразу ж одержуємо добре нам відомі співвідношення:

$$dx = ds \cdot \cos\alpha,$$
$$dy = ds \cdot \sin\alpha,$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Але відзначимо, що цей вивід можливий тільки після того, як спочатку встановлене поняття про довжину дуги кривої і доведена еквівалентність її хорді.

Розглянемо інший приклад. Нехай (рис. 219) треба визначити кут μ між дотичною в точці M і її радіус-вектором для кривої, даної в полярних координатах рівняннями

$$r = f(t), \quad \omega = \psi(t).$$

Надаємо параметрові нескінченно малого приросту Δt. Кут MQM' дорівнює $\Delta\omega$, але ми пишемо, що він дорівнює $d\omega$. Проводимо дугу круга MQ. Маємо

$$MQ = r\,\Delta\omega, \quad QM' = \Delta r, \quad MM' = \Delta s.$$

Розглядаємо кривий трикутник MQM' як прямокутний, приймаючи сторони його рівними $rd\omega$, dr, ds, а кут при M рівним $\frac{\pi}{2}-\mu$. Одразу ж одержуємо:

$$r\,d\omega = ds\cdot\sin\mu,\quad dr = ds\cdot\cos\mu,\quad ds^2 = dr^2 + r^2\,d\omega^2,$$

звідки

$$\cos\mu = \frac{dr}{ds},\quad \sin\mu = \frac{r\,d\omega}{ds},\quad \operatorname{ctg}\mu = \frac{d\ln r}{d\omega},\quad ds^2 = dr^2 + r^2\,d\omega^2.$$

Це цілком точний вивід. Між іншим, ним зручно користуватись, щоб швидко вивести ці формули, якщо зрадить пам'ять.

ЗМІСТ

Розділ I.

Стор.

Дві задачі інтегрального числення.

Розділ II.

Перша задача інтегрального числення: квадратура площ.

Розділ III.

Інтеграл як границя суми.

Розділ IV.

Метод безпосереднього обчислення інтеграла. Інтеграл як функція своїх границь.

Розділ V.

Вираження інтеграла через значення первісної.

Розділ VI.

Геометричні прикладання інтеграла Стор.

Розділ VII.

Друга задача інтегрального числення. Інтеграл як первісна.

Розділ VIII.

Інтеграл означений і неозначений.

Розділ IX.

Задача теорії неозначених інтегралів. Таблиця основних інтегралів.

Розділ X.

Основні теореми в теорії неозначених інтегралів.

Розділ XI.

Основні методи інтегрування і прикладання їх до деяких інтегралів.

Стор.

Розділ XII.

Інтегрування раціональних функцій.

Розділ XIII.

Метод раціоналізації.

Розділ XIV.

Загальний огляд теорії неозначених інтегралів.

Розділ XV.

Основні властивості означеного інтеграла.

Стор.

Розділ XVI.

Узагальнені інтеграли.

Розділ XVII.

Інтеграл як функція параметрів. Обчислення інтегралів.

Розділ XVIII.

Порядки нескінченно малих.

Розділ XIX.

Еквівалентні величини.

Стор.

Розділ XX.

Інтегральна сума і другий принцип.

Розділ XXI.

Геометричні і механічні прикладання означеного інтеграла.

Розділ XXII.

Подвійний інтеграл.

Розділ XXIII.

Обчислення подвійного інтеграла.

Розділ XXIV.

Поверхня. Сфера.

Розділ XXV.

Потрійний інтеграл.

Стор.

Розділ XXVI.

Обчислення потрійного інтеграла.

Розділ XXVII.

Криволінійний інтеграл на площині.

Розділ XXVIII.

Додаткові статті.