АН УССР ПРАЦІ ІНСТИТУТУ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА, ВИП. 7 1936

ARBEITEN DES INSTITUTS FÜR WASSERWIRTSCHAFT, LIEF. 7

Г. Й. Сухомел

Основи теорії неусталеного руху у відкритих водотоках (хвилі переміщення)

I

Теорія неусталеного руху у відкритих водотоках знаходить дедалі більше практичних застосувань; важливими прикладами можуть служити: неусталений рух в каналах гідросилових установок при змінах витрати турбін або неусталений рух в каналах до шлюзових камер і багато інших. В основному теорію неусталеного руху дали M. I. Boussinesq у своїй класичній роботі „Essai sur la théorie des eaux courantes", 1877, а також B. de Saint-Venant в роботах, надрукованих в працях Французької Академії; експериментальні спостереження провадили Scott-Russel, M. Basin, проф. Н. В. Егіазаров і ін. Російською мовою інтересний виклад робіт M. I. Boussinesq-а дав проф. Д. Бобилев [1]).

Перелічені теоретичні дослідження так само, як і нові роботи Feifel-я, Böss-а і деякі інші, дуже важко дістати; багато з них давно стали бі-

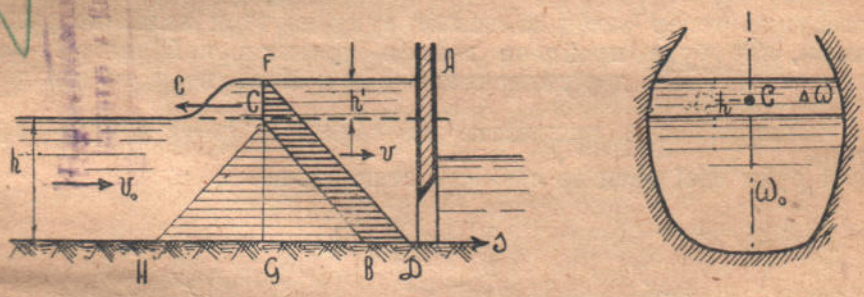

Рис. 1.

бліографічними раритетами і, крім того, більшість з них мало придатні для того, щоб ними могли користуватись інженери. Тому далі зроблена буде спроба дати основи теорії неусталеного руху у відкритих водотоках в можливо простому і водночас досить точному викладі. Спочатку дамо цю теорію, ідучи в основному за B. Saint-Venant-ом, при чому розглянемо насамперед конкретний випадок, поданий на рис. 1.

[redacted] переріз каналу довільної форми, але має вертикальну вісь си- [redacted] припустімо, що в певному перерізі порушили рівномірний рух [redacted] каналі, досить швидко спустивши щит A на певну глибину. Тоді [redacted] ритом рівень води піднімається на певну висоту h' і це підняття [redacted] атиметься вгору проти течії з певною швидкістю c (цю швидкість розглядаємо як відносну — відносно води, що рухається рівномірно з швидкістю v_0 в каналі). Це явище, яке являє собою окремий випадок хвиль

[1]) Очерк теории водяных течений, выработанный Буссинеском, СПБ, 1898.

переміщення, назвемо **хвилею підняття**, що **рухається проти течії**. Вниз по течії від щита піде хвиля зниження. Розглядатимемо покищо хвилю підняття і при тому тільки в спокійних водотоках; відносно берегів вона буде рухатись з швидкістю $c - v_0$. Нехай витрата при рівномірному русі була Q_0, а після часткового спускання щита під ним проходить витрата Q; цю саму витрату маємо і на всьому шляху, який вже пройшла хвиля. Різниця цих двох витрат $Q_0 - Q = \Delta Q$, і йде на утворення хвилі при поширенні її вгору проти течії. Позначивши площу поперечного перерізу каналу при глибині h літерою ω_0, а при глибині $h + h'$ — через ω і різницю їх $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, можна буде написати таке рівняння:

$$\omega_0 \cdot v_0 = \omega \cdot v + \Delta\omega\,(c - v_0)$$

Інакше:

$$\omega_0 v_0 = \omega_0 v + \Delta\omega \cdot v + \Delta\omega\,(c - v_0)$$

Звідси:

$$\omega_0\,(v_0 - v) = \Delta\omega\,(v + c - v_0);$$

$$\omega_0\,(v_0 - v) = \Delta\omega\,[c - (v_0 - v)]$$

Отже:

$$\omega_0\,(v_0 - v) + \Delta\omega\,(v_0 - v) = c \cdot \Delta\omega$$

$$v_0 - v = c\,\frac{\Delta\omega}{\omega_0 + \Delta\omega}$$

$$v_0 - v = c\,\frac{\Delta\omega}{\omega} \qquad (1)$$

Застосуймо тепер закон кількості руху до маси води, що рухається на ділянці, яка буде пройдене хвилею протягом найближчої секунди і довжина якої, отже, дорівнюватиме саме c. Маса води на цій довжині $\frac{\gamma}{g}\,\omega_0 \cdot c$ зменшить свою швидкість на величину $v_0 - v$ і, отже, приріст кількості руху цієї маси за секунду становитиме:

$$-\frac{\gamma}{g}\,\omega_0 c\,(v_0 - v)$$

Різниця тисків на цю масу показана на рис. 1 графічно у вигляді $FEBD$ двох трикутників тиску EHG і DEG.

Взявши на увагу, що $BD = h'$, можемо написати для імпульсу сили, поданої жирно заштрихованою фігурою, за одну секунду такий вираз:

$$-(\omega_0 h' + \Delta\omega \cdot z'_C)\,\gamma$$

Вираз взято з мінусом, тому що за додатний напрям прийнято напрям швидкості v_0; у цьому виразі z'_C позначає глибину центра ваги C площі $\Delta\omega$.

Прирівнюючи приріст кількості руху до імпульсу сил, одержимо, не звертаючи уваги на знак:

$$\frac{\gamma}{g}\,\omega_0 \cdot c\,(v_0 - v) = (\omega_0 h' + \Delta\omega \cdot z'_C)\,\gamma$$

або інакше:

$$\frac{\omega_0 c\,(v_0 - v)}{g} = \omega_0 h' + \Delta\omega z'_C \qquad (2)$$

При виводі цього рівняння ми нехтували складовою сили ваги в напрямі руху й силами тертя рідини об стінки каналу.

Підставляючи з рівняння (1) вираз для $v_0 - v$ в рівняння (2), одержуємо:

$$\frac{\omega_0 c \cdot c \cdot \Delta\omega}{g\omega} = \omega_0 h' + \Delta\omega \cdot z'_C$$

$$c^2 = g\left(\frac{h'\omega}{\Delta\omega} + \frac{z'_C\omega}{\omega_0}\right)$$

$$c = \sqrt{g\left(\frac{h' \cdot \omega}{\Delta\omega} + \frac{z'_C\omega}{\omega_0}\right)} \qquad (3)$$

З цього рівняння насамперед бачимо, що швидкість c руху хвилі відносно води, яка рухається рівномірно із швидкістю v_0, не залежить від цієї останньої; швидкість же c_0 хвилі відносно берегів в розглядуваному випадку буде, як вже зазначено вище, дорівнювати $c_0 = c - v_0$ або

$$c_0 = \sqrt{g\left(\frac{h'\omega}{\Delta\omega} + \frac{z'_C\omega}{\omega_0}\right)} - v_0 \qquad (4)$$

Якщо вважати Q_0, Q і ω_0 заданими, а також взяти на увагу, що при довільному поперечному перерізі русла величини $\Delta\omega$, а також і $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ являють собою функції h', то можемо хоч би підбиранням розв'язати рівняння (1) і (3) відносно c і h', пам'ятаючи при цьому, що $v_0 = \frac{Q}{\omega_0}$ і $v = \frac{Q}{\omega}$. Проте таке розв'язання дуже складне, хоч і є найточнішим. Звичайно коштом деякого зменшення точності можна спростити розв'язання так: позначивши через Z середню глибину при рівномірному русі, матимемо $\omega_0 = Z \cdot b$; крім того, якщо h' мале (рис. 2), то $\Delta\omega = h' \cdot y$ і $z'_C = \frac{h'}{2}$.

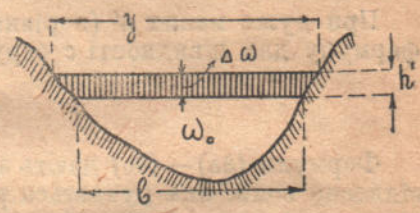

Рис. 2.

Тепер замість (3) можемо написати:

$$c = \sqrt{g\left[\frac{h'(bZ + h'y)}{h'b} + \frac{h'}{2}\left(\frac{\omega_0}{\omega_0} + \frac{h'y}{Zb}\right)\right]}$$

або інакше:

$$c = \sqrt{g\left(Z + h' + \frac{h'}{2}\,\frac{y}{b} + \frac{h'}{2}\,\frac{h'y}{Zb}\right)}$$

Часто можна вважати, що $y \cong b$; тоді:

$$c = \sqrt{gZ\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{h'}{Z} + \frac{1}{2}\,\frac{h'^2}{Z^2}\right)} \qquad (3a)$$

При малих h' можна без значної похибки відкинути член $\frac{h'^2}{2Z^2}$, тому що до нього h' входить в квадраті. При цій умові матимемо:

$$c = \sqrt{g\left(Z + \frac{3}{2}h'\right)} \qquad (3b)$$

або

$$c = \sqrt{gZ\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h'}{Z}\right)}$$

Тому що $\frac{3}{2}\frac{h'}{Z}$ звичайно мале порівнюючи з одиницею, можна покласти:

$$\sqrt{1 + \frac{3}{2}\frac{h'}{Z}} \cong 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\frac{h'}{Z} = 1 + \frac{3}{4}\frac{h'}{Z};$$

тоді:

$$c = \sqrt{gZ}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h'}{Z}\right) \tag{3c}$$

В такому вигляді цю формулу часто дають для визначення швидкості хвилі у водотоках з довільним перерізом русла[1]). У випадку прямокутного перерізу з глибиною рівномірного руху h у формулу (3c) треба вставити це h замість Z; тоді одержимо формулу для визначення c у вигляді, що найчастіше трапляється:

$$c = \sqrt{gh}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h'}{h}\right) \tag{3d}$$

При дуже малих h' (порівняно з глибиною рівномірного руху h) часто формулу для швидкості c беруть в такому спрощеному вигляді:

$$c = \sqrt{gh} \tag{3e}$$

Формули (3a) — (3e) дають з тою чи іншою точністю швидкість c хвилі відносно води, яка рухається рівномірно; щоб одержати швидкість хвилі відносно берегів, треба від кожного з зазначених виразів відняти швидкість v_0.

Випадок хвилі підняття, що рухається проти течії, трапляється на практиці дуже часто, наприклад — в дериваційному каналі гідросилової установки при закритті турбін.

Розгляньмо тепер випадок руху хвилі підняття, яка рухається вниз по течії. Такий випадок можна спостерігати на практиці, якщо в каналі з усталеним рівномірним рухом швидко збільшити витрату з початкової Q_0 до більшої витрати Q і далі вже підтримувати її при вході в канал сталою. Такий випадок і поданий на рис. 3.

Швидкість хвилі відносно води в каналі, яка перебуває в стані рівномірного руху, позначмо знову через c; тоді швидкість хвилі відносно берегів буде в даному випадку $c + v_0$. Взявши на увагу, що тепер $v > v_0$, і міркуючи аналогічно тому, як ми це робили, розглядаючи рух хвилі підняття, яка рухається проти течії, одержимо знову два рівняння:

1) рівняння нерозривності руху рідини

$$v \cdot \omega = v_0 \cdot \omega_0 + \Delta\omega\,(c + v_0)$$

або

$$v - v_0 = \frac{\Delta\omega}{\omega}\,c; \tag{1a}$$

---

[1]) Див. напр. Ph. Forchheimer, Wasserschwall und Wassersunk, 1924.

2) рівняння кількості руху:

$$\frac{\gamma\omega_0 c(v-v_0)}{g}=(\omega_0\cdot h'+\Delta\omega\cdot z'_c)\gamma$$

Після перетворень, знову такі цілком аналогічних наведеним вище для хвилі підняття, яка рухається проти течії, одержимо і для хвилі підняття, що рухається вниз по течії:

$$c=\sqrt{g\left(\frac{h'\omega}{\Delta\omega}+\frac{z'_c\,\omega}{\omega_0}\right)} \tag{3}$$

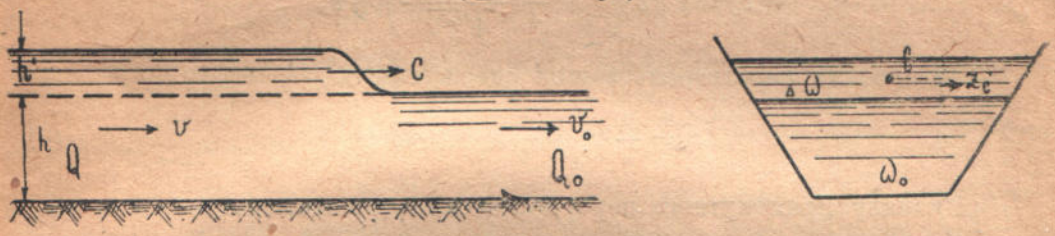

Рис. 3.

Тепер ясно, що всі формули (3a — 3e), виведені з вище написаної, придатні і для хвилі підняття, яка рухається вниз по течії; швидкість c_0 цієї хвилі відносно берегів одержимо, якщо до c додамо v_0:

$$c_0=c+v_0$$

Загальний вираз для хвиль підняття, які рухаються як вгору, так і вниз по течії, буде:

$$c_0=c\pm v \tag{5}$$

Візьмімо тепер формулу (3c)

$$c=\sqrt{gZ}\left(1+\frac{3}{4}\,\frac{h'}{Z}\right)$$

і формулу нерозривності для хвилі підняття, яка рухається по течії:

$$\omega\cdot v=\omega_0 v_0+\Delta\omega\,(c+v_0)$$

Подамо останню формулу у вигляді:

$$(\omega_0+\Delta\omega)\cdot v=\omega_0 v_0+\Delta\omega\,(c+v_0)$$

і далі

$$v-v_0=c\,\frac{\Delta\omega}{\omega_0+\Delta\omega}=c\,\frac{\Delta\omega}{\omega}$$

Але, як і раніше

$$\Delta\omega\cong y\cdot h';\quad \omega=Z\cdot b$$

і тому

$$\frac{v-v_0}{c}=\frac{yh'}{Z\cdot b}$$

Якщо покладемо $y\cong b$, то

$$\frac{v-v_0}{c}=\frac{h'}{Z}$$

Підставмо тепер у формулу (3c) для c замість $\frac{h'}{Z}$ рівний вираз $\frac{v-v_0}{c}$ при чому візьмімо тут замість c вираз $\sqrt{Zg}$, приблизно йому рівний:

$$c_0 = \sqrt{gZ}\left(1 + \frac{3}{4}\,\frac{v-v_0}{\sqrt{gZ}}\right)$$

Тепер можемо написати для швидкості відносно берегів хвилі підняття, яка рухається вниз по течії:

$$c_0 = \sqrt{gZ}\left(1 + \frac{3}{4}\,\frac{v-v_0}{\sqrt{gZ}}\right) + v_0$$

Після простих перетворень звідси одержуємо:

$$c_0 = \frac{1}{4}v_0 + \frac{3}{4}v + \sqrt{gZ} \qquad (6)$$

Для каналу прямокутного перерізу, очевидно, матимемо:

$$c_0 = \frac{1}{4}v_0 + \frac{3}{4}v + \sqrt{gh} \qquad (6a)$$

Аналогічну формулу можна було б вивести і для швидкості відносно берегів хвилі підняття, яка рухається проти течії, а саме:

$$c_0 = -\frac{1}{4}v_0 - \frac{3}{4}v + \sqrt{gh} \qquad (6b)$$

При виводі формул для швидкості c хвилі ми користувались законом кількості руху. У відомій книзі A. Koch — M. Karstanjen, Ueber die Bewegung des Wassers und den dabei auftretenden Kräften (Berlin, 1936, c. 132 і далі; є російський переклад) подано вивід формули (6a) і (6b) з закону зберігання енергії, при чому попереду до всіх швидкостей (рис. 1) додається швидкість c, взята з супротивним знаком. А Кох робить це для того, щоб мати хвилю, що спинилась, або стрибок; коли б далі прикласти до цієї хвилі, що спинилась, закон кількості руху, то додавання швидкості c ніяк не могло б відбитись на остаточних результатах, бо в рівняння кількостей руху швидкості входять у першому степені і тому додана швидкість просто скоротилась би. Якщо ж скористуватись законом зберігання енергії, то додавання v_0 навіть до тієї самої кількості c змінить співвідношення кінетичних енергій перед і за хвилею, а крім того цей закон не дозволяє ураховувати можливі місцеві втрати енергії.

Кінець-кінцем А. Кох, відкидаючи в одержаних виразах різні члени, одержує ті самі формули (6a) і (6b), хоч принципово вивід цих формул, даний А. Кохом, не можна визнати правильним.

Щодо висоти h' хвилі підняття, яка рухається проти течії, то її можна визначати, як вже зазначалось вище, розв'язуючи підбиранням рівняння (1) і (3) або (1a) і (3a). Однак розв'язання цих рівнянь не дуже зручне; тому бажано одержати формули, з яких можна було б безпосередньо визначати висоту хвилі h'. Проте такі формули досить простого вигляду можна одержати тільки у випадку повного закриття щита A (рис. 1) для водотоків у руслах прямокутного перерізу сталої ширини або для таких випадків, коли $\Delta\omega$ можна прийняти за прямокутник (рис. 2) шириною b, при чому в цьому випадку площу ω_0 треба замінити добутком bZ, де Z, як і раніше, позначає середню глибину перерізу ω_0.

Для виводу візьмімо рівняння (2), зробивши в ньому відповідні підставлення:

$$\omega_0 = bZ,\ \Delta\omega = bh',\ z'_c = \frac{h'}{2}$$

Тоді одержимо:

$$\frac{bZc(v_0 - v)}{g} = bZh' + b\,\frac{h'^2}{2}$$

або

$$h'_2 + 2Zh' - \frac{2Zc(v_0 - v)}{g} = 0$$

Розв'язавши це рівняння відносно h', знайдемо:

$$h' = -Z + \sqrt{Z^2 + 2Zc\frac{v_0 - v}{g}} \qquad (7)$$

У цьому розв'язанні перед коренем взято, звичайно, тільки знак плюс. Крім того замість c можна підставити наближене його значення $\sqrt{gZ}$, тоді одержимо:

$$h' = Z\sqrt{1 + 2\frac{v_0 - v}{\sqrt{gZ}}} - Z$$

або

$$h' = Z\left(\sqrt{1 + 2\frac{v_0 - v}{\sqrt{gZ}}} - 1\right) \qquad (7a)$$

Якщо вираз $2\frac{v_0 - v}{\sqrt{gZ}}$ малий порівняно з одиницею, то:

$$h' = Z\left[\left(1 + \frac{v_0 - v}{\sqrt{gZ}}\right) - 1\right]$$

Спростивши, матимемо:

$$h' = (v_0 - v)\sqrt{\frac{Z}{g}} \qquad (7b)$$

Аналогічні формули для прямокутного перерізу одержимо, замінивши у формулах (7), (7a) і (7b) середню глибину Z глибиною h:

$$h' = \sqrt{h^2 + 2\frac{hc(v_0 - v)}{g}} - h \qquad (7c)$$

$$h' = h\left(\sqrt{1 + 2\frac{v_0 - v}{\sqrt{gh}}} - 1\right) \qquad (7d)$$

$$h' = (v_0 - v)\sqrt{\frac{h}{g}} \qquad (7e)$$

При повному закритті у формулах (7)—(7c) треба покласти $v = 0$; тоді замість, наприклад (7e), одержимо:

$$h' = v_0\sqrt{\frac{h}{g}} \qquad (7d)$$

Остання формула дає досить точні результати тільки при порівняно невеликих h' і v_0, але зате вона дає змогу швидко й легко знайти перше наближення для h'. Уточнити значення h' можна з допомогою формул (7) або відповідно (7c), підставляючи туди вже

$$c = \sqrt{gh}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h'}{h}\right)$$

Проте звичайно дають інший вивід формул для визначення h' і відповідно одержують для h' формули іншого вигляду. Візьмімо знову перетворене рівняння (2):

$$\frac{bZc(v_0 - v)}{g} = bZh' + b\frac{h'^2}{2}$$

і відкинувши в ньому останній член $\frac{bh'^2}{2}$ як малий, підставимо в нього вираз для c з рівняння (1):

$$c = \frac{\omega}{\Delta\omega}(v_0 - v)$$

або для прийнятих при виводі рівняння (7) умов:

$$c = \frac{b(Z + h')}{bh'}(v_0 - v) = \frac{Z + h'}{h'}(v_0 - v)$$

Після виконання підставлення і невеликих спрощень одержимо:

$$\frac{Z(Z + h')(v_0 - v)^2}{gh'} = Zh'$$

або:

$$h'^2 - h'\frac{(v_0 - v)^2}{g} - \frac{Z(v_0 - v)^2}{g} = 0$$

Звідси:

$$h' = \frac{(v_0 - v)^2}{2g} \pm \sqrt{\left[\frac{(v_0 - v)^2}{2g}\right]^2 + \frac{Z}{g}(v_0 - v)^2},$$

а тому що тут розглядається хвиля підвищення, то перед коренем треба взяти знак плюс:

$$h' = \frac{(v_0 - v)^2}{2g} + \sqrt{\left[\frac{(v_0 - v)^2}{2g}\right]^2 + \frac{Z}{g}(v_0 - v)^2} \tag{8}$$

Якщо $v = 0$, то:

$$h'_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2 \frac{Z}{g} v_0^2} \tag{8a}$$

Заміняючи в останніх формулах середню глибину Z глибиною h, одержимо формули для водотоків з прямокутним перерізом.

В тому випадку, коли v_0 невелике і виразом $\frac{v_0^2}{2g}$ можна нехтувати порівняно з коренем, а виразом $\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2$ — порівняно з $\frac{Zv_0^2}{g}$, то з (8a) одержимо:

$$h' = v_0\sqrt{\frac{Z}{g}} \tag{8b}$$

або відповідно для потоку з прямокутним перерізом:

$$h' = v_0 \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Цю формулу ми вже вивели іншим способом (див. 7d).

Досі ми припускали, що щит A (рис. 1), опускаючись дуже швидко, припиняє частково або цілком рух в каналі. Розгляньмо тепер ще висоту хвилі h' в тому випадку, коли щит опускається поступово. Візьмімо якийнебудь довільний момент в проміжку опускання щита; при цьому матимемо вже зміну швидкості в певному місці не на скінченну величину $(v_2 - v)$, а на нескінченно малу dv і відповідно цій зміні швидкості — підняття води тільки на dh'; для цих малих змін можна застосувати рівняння (8):

$$dh' = \frac{(dv)^2}{2g} + \sqrt{\left[\frac{(dv)^2}{2g}\right]^2 + \frac{Z}{g}(dv)^2}$$

Знехтувавши нескінченно малими вищих порядків, одержимо:

$$dh' = \sqrt{\frac{Z}{g}(dv)^2} \qquad \text{(a)}$$

Тут з $(dv)^2$ можно добути корінь; при цьому, проте, треба мати на увазі, що при зростанні h' швидкість зменшується і тому корінь з $(dv)^2$ треба взяти з мінусом; крім того треба мати на увазі, що нескінченно мале підняття на dh' відбувається вже не при сталій глибині Z, а при змінній, тому що перед розглядуваним підняттям рівня на dh' рівень води вже піднявся на деяку величину h' [1]); ось чому в рівняння (a) треба буде замість Z підставити $Z + h'$. Після зазначених операцій замість рівняння (a) одержимо:

$$dh' = -\sqrt{\frac{Z + h'}{g}}\, dv$$

Якщо швидкість змінюється від початкового свого значення v_0 до деякої величини v_1, то максимальне підняття h'_{max} знайдемо, інтегруючи написане тільки що диференціальне рівняння, яке для цього трохи перетворюємо:

$$\frac{dh'}{\sqrt{Z + h'}} = -\frac{dv}{\sqrt{g}}$$

Неозначений інтеграл:

$$2\sqrt{Z + h'} = -\frac{v}{\sqrt{g}} + \text{const}$$

Const визначимо з тієї умови, що при $h' = 0$ швидкість $v = v_0$.

$$2\sqrt{Z} = -\frac{v_0}{\sqrt{g}} + \text{const}$$

$$\text{const} = 2\sqrt{Z} + \frac{v_0}{\sqrt{g}}$$

---

[1]) Ця величина тепер, звичайно, змінна.

Підставивши замість const знайдений вираз, одержимо:

$$2\sqrt{Z+h'}=-\frac{v}{\sqrt{g}}+2\sqrt{Z}+\frac{v_0}{\sqrt{g}}$$

Розв'язуємо це рівняння відносно h':

$$h'=\frac{(v_0-v)^2}{4g}+(v_0-v)\sqrt{\frac{Z}{g}} \tag{9}$$

При поступовому повному закритті щита A (рис. 1) з рівняння (9) одержимо максимальну висоту хвилі підняття, поклавши $v=0$:

$$h'_{\max}=\frac{v_0^2}{4g}+v_0\sqrt{\frac{Z}{g}} \tag{9a}$$

Порівнюючи формулу (8a) для швидкого закриття щита і формулу (9) для поступового його закриття, бачимо, що максимальні підняття $h'_{\max}$ для обох цих випадків не дуже багато різняться, так само як і при однаковому частковому закритті щита.

При малих швидкостях v_0 в рівнянні (9a) членом $\frac{v_0^2}{4g}$ можна нехтувати порівняно з другим додатком; тоді з формули (9a) одержимо формулу, яка збігається з (8b).

Зробімо тепер кілька зауважень відносно висоти h' хвилі підняття, яка рухається вниз по течії. І в цьому випадку найточніше значення одержимо при сумісному розв'язанні рівнянь (1a) і (3) способом підбирання. При відповідних спрощеннях рівнянь (1a) і (3) розв'язання їх відносно h' спрощується, але, звичайно, зменшується і точність.

Попередні висновки зроблені були без ураховування тертя. Тепер постараймося приблизно врахувати вплив тертя на хвилі підняття, розглянувши наперед хвилю підняття, яка рухається вниз по течії.

Це можна зробити приблизно таким простим способом: при виводі рівняння (2) кількостей руху треба до імпульсу сил тиску

$$(\omega h'+\Delta\omega\,.\,z'_c)\gamma$$

додати **силу тертя** по поверхні стикання води з стінками каналу від місця утворення хвилі (наприклад, підняття щита) до розглядуваного перерізу; силу тертя беремо в розглядуваному випадку з знаком мінус. Такий спосіб урахування впливу тертя запропонував Jules Calame [1]); проте силу тертя і формули для коефіцієнта Шезі C ми дамо в іншій формі, ніж згаданий автор, скористувавшись для цього дуже поширеною формулою Шезі:

$$v=C\sqrt{RI}$$

Але попереду все таки спробуємо з'ясувати, чому в рівняння кількостей руху, написане для маси рідини тільки на довжині c, треба вставити „силу тертя" на всій довжині від місця виникнення хвилі до голови хвилі включно. Очевидно, автор цього способу враховує таким чином вплив тертя, яке є на всій ділянці від місця виникнення хвилі до розглядуваної ділянки довжиною l, на рух голови хвилі.

Перейдімо тепер до обчислення сили тертя на довжині l. Позначмо мокрий периметр і площу поперечного перерізу на ділянці, по якій вже

---

[1]) Jules Calame, Calcul de l'onde de translation dans les canaux d'usines, Lausanne—Paris, 1932 p., 26.

пройшла хвиля, через U і F, зауваживши при цьому, що ці величини на всій цій ділянці вже не будуть сталими, як ми приймали це досі, не враховуючи тертя. Щоб врахувати цю обставину, вставмо у формули для тертя середні для розглядуваної ділянки величини мокрого периметра U_m, площі живого перерізу F_m і гідравлічного радіуса перерізу $R_m = \frac{F_m}{U_m}$.

Позначимо силу тертя на 1 $м^2$ поверхні русла покищо через $\varphi(v)$, підкреслюючи цим, що сила тертя є функція середньої по перерізу швидкості v. Поверхня, по якій має місце тертя на ділянці l, буде $U_m . l$, а сила тертя на ній — $P = \varphi(v) . U_m . l$.

Разом з тим відомо, що втрата напору на тертя дорівнює:

$$H_{rm} = \frac{\varphi(v)}{\gamma} \frac{U_m}{F_m} l \text{ [1]}$$

Якщо у формулу Шезі підставити замість $I = \frac{H_{rm}}{l}$, одержимо:

$$v_m = C_m \sqrt{R_m \frac{H_{rm}}{l}}$$

І звідси:

$$H_{rm} = \frac{v_m^2 l}{C_m^2 R_m}$$

Тепер можемо написати:

$$\frac{\varphi(v)}{\gamma} \cdot \frac{U_m}{F_m} l = H_{rm} = \frac{v_m^2 l}{C_m^2 R_m}$$

Отже:

$$\varphi(v) \cdot U_m l = H_{rm} F_m \gamma = \frac{v_m^2 \cdot l \cdot \gamma \cdot F_m}{C_m^2 \cdot R_m} = \frac{v_m^2 \cdot l \cdot \gamma \cdot U_m}{C_m^2}$$

Остаточно сила тертя становитиме:

$$P = \varphi(v) U_m l - H_{rm} F_m \gamma = \frac{v_m^2 l U_m}{C_m^2} \gamma \qquad (10)$$

Після цих попередніх міркувань можемо написати виправлене рівняння кількостей руху:

$$\frac{\gamma \omega_0 c (v - v_0)}{g} = (\omega_0 h' + \Delta\omega \cdot z_c') \gamma - \frac{v_m^2 l U_m}{C_m^2} \gamma$$

Скорочуємо його на γ:

$$\frac{\omega_0 c (v - v_0)}{g} = \omega_0 h' + \Delta\omega \cdot z_c' - \frac{v_m^2 l U_m}{C_m^2} \qquad (11)$$

Розв'язуючи способом підбирання це рівняння разом з рівнянням нерозривності (1а), можемо знайти c і h'. Проте з рівняння (11) не можна більш-менш наочно бачити вплив тертя на швидкість хвилі c і, крім того, розв'язання підбиранням досить копітке. Спрощене наближене розв'язання

[1]) Див. напр. Г. Й. Сухомел, Гідравліка, 1933, сс. 60—61.

дамо для випадку, коли $v_0 = 0$, тобто хвиля поширюється в каналі з стоячою водою. Підставмо спочатку в рівняння (11) замість v і v_m вираз $c\frac{\Delta\omega}{\omega}$

$$\frac{\omega_0 c^2 \Delta\omega}{g\omega} = \omega_0 h' + \Delta\omega \cdot z_c - \frac{c^2 \Delta\omega^2 l U_m}{\omega^2 C_m^2}$$

Замінивши тепер ω_0 через bZ, $\Delta\omega$ через bh', ω через $b(Z+h')$ і z_c' через $\frac{h'}{2}$, матимемо:

$$\frac{bZ c^2 bh'}{gb(Z+h')} = bZh' + bh'\frac{h'}{2} - \frac{c^2 b^2 h'^2 l U_m}{b^2 (Z+h')^2 C_m^2}$$

Звідси легко одержати:

$$c^2 = \frac{Z + \frac{h'}{2}}{\frac{Z}{g(Z+h')} + \frac{h' l U_m}{(Z+h')^2 b C_m^2}} = \frac{Z\left(1 + \frac{h'}{2Z}\right)}{\frac{Z}{g(Z+h')}\left(1 + \frac{h' l U_m g}{Zb(Z+h')C_m^2}\right)} =$$

$$= \frac{g(Z+h')\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h'}{Z}\right)}{1 + \frac{h'}{Z}\frac{U_m}{b}\frac{lg}{(Z+h')C_m^2}} = gZ\frac{\left(1 + \frac{h'}{Z}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h'}{Z}\right)}{1 + \frac{h'}{Z}\frac{U_m}{b}\frac{lg}{(Z+h')C_m^2}}$$

Добуваючи корінь і беручи при цьому на увагу, що

$$\left(1 + \frac{h'}{Z}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h'}{Z}\right) \cong 1 + \frac{3}{2}\frac{h'}{Z} \text{ *)}$$

і

$$1 : \left[1 + \frac{h'}{Z}\frac{U_m}{b}\frac{gl}{(Z+h')C_m^2}\right] \cong 1 - \frac{h'}{Z}\frac{U_m}{b}\frac{gl}{(Z+h')C_m^2}, \text{ *)}$$

матимемо:

$$c = \sqrt{gZ\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h'}{Z}\right)\left[1 - \frac{h'}{Z}\frac{U_m}{b}\frac{gl}{(Z+h')C_m^2}\right]}, \text{ *)}$$

або приблизно:

$$c = \sqrt{gZ}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h'}{Z}\right)\left[1 - \frac{1}{2}\frac{h'}{Z}\frac{U_m}{b}\frac{gl}{(Z+h')C_m^2}\right], \tag{11a}$$

або ще трохи простіше:

$$c = \sqrt{gZ}\left[1 + \frac{3}{4}\frac{h'}{Z} - \frac{1}{2}\frac{h'}{Z}\frac{gl}{(Z+h')C_m^2}\right]. \tag{11b}$$

---

*) Ці приблизні рівності вірні при умові, що $\frac{h'}{Z}$ і $\frac{h'}{Z} \cdot \frac{U_m}{b} \cdot \frac{gl}{(Z+h')C_m^2}$ невеликі, як це звичайно й буває.

Для прямокутного перерізу в попередній формулі треба було б замість Z вставити h, а для дуже великих b (порівняно з h) $\frac{U_m}{b} \cong 1$; тому для обох цих випадків відповідно одержимо:

$$c = \sqrt{gh}\left[1 + \frac{3}{4}\frac{h'}{h} - \frac{1}{2}\frac{h'}{h}\frac{U_m}{b}\cdot\frac{gl}{(h+h')C_m^2}\right] \tag{11c}$$

і

$$c = \sqrt{gh}\left[1 + \frac{3}{4}\frac{h'}{h} - \frac{1}{2}\frac{h'}{h}\frac{gl}{(h+h')C_m^2}\right] \tag{11}$$

Отже бачимо, що вплив тертя на швидкість хвилі c виявляється в деякому зменшенні її; але звичайно зменшення це невелике, як у цьому можна переконатись, обчисливши останній член в дужках у формулах (11b) і (11d).

Точніший спосіб врахування впливу тертя на рух хвилі підняття запропонований Форхгеймером в роботі його „Wasserschwall und Wassersunk" (1924) як для хвиль підняття, що рухаються по течії, так і для тих, що рухаються проти течії.

Зауважмо, що наведені вище формули для швидкості c дають середнє її значення по висоті h'; щоб з'ясувати це, уявімо собі хвилю, яка складається з багатьох дуже тонких шарів, так що кожний шар рухається по нижчому, який вже спричинив певне підвищення швидкості. Але для найнижчого шару хвилі швидкість дорівнюватиме $\sqrt{gh}$, а середня швидкість хвилі:

$$\sqrt{gZ}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h'}{h}\right);$$

якщо вважатимемо, що швидкість хвилі по окремих шарах зростає до верху за лінійним законом, що уявляється досить імовірним, то ясно, що швидкість хвилі в найвищому її шарі (на висоті h' над початковим рівнем) буде

$$c_1 = \sqrt{gh}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h'}{h}\right), \tag{12}$$

а на висоті z над тим же рівнем:

$$c_z = \sqrt{gh}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{z}{h}\right) \tag{12a}$$

Ці міркування показують нам, що хвиля при своєму русі змінює форму. Якщо хвиля починає свій рух, маючи певну форму, яка може бути виражена рівнянням $x = f(z)$ [1]), де x — віддаль від щита, а z — висота над початковим рівнем, то через t секунд форма хвилі буде вже виражатись таким рівнянням:

$$x = \sqrt{gh}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{z}{h}\right)t + f(z)$$

Формулі (12a) можна надати іншого вигляду. Для цього зауважмо, що за біномом Ньютона

$$(h+z)^{\frac{1}{2}} = h^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}}z + \cdots$$

[1]) Отже ми розглядаємо тут випадок поступового відкриття щита.

Обмежмось членами, в які мала величина z входить в степені, не вищому за перший; тоді можна написати:

$$3(h+z)^{\frac{1}{2}}-2h^{\frac{1}{2}}=3h^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}h^{\frac{1}{2}}z-2h^{\frac{1}{2}}=$$

$$=h^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}zh^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{h}\left(1+\frac{3}{2}\frac{z}{h}\right)$$

Отже

$$\sqrt{gh}\left(1+\frac{3}{2}\frac{z}{h}\right)=3\sqrt{g(h+z)}-2\sqrt{gh}$$

і

$$c_z=3\sqrt{g(h+z)}-2\sqrt{gh} \qquad (12b)$$

Підкреслимо ще раз, що c_z є швидкість на висоті z над початковим (до проходження хвилі) рівнем. З формули (12b) можна одержати таку формулу для середньої швидкості руху хвилі:

$$c=\frac{3}{2}\sqrt{g(h+h')}-\frac{1}{2}\sqrt{gh} \qquad (13)$$

або:

$$c=1{,}57\,(3\sqrt{h+h'}-\sqrt{h}) \qquad (13a)$$

Розгляньмо тепер коротко рух хвиль зниження. Хвилю зниження, що рухається вниз по течії, матимемо, як вже сказано, почавши впускати в канал певну кількість води Q, меншу, ніж витрата каналу Q_0 при початково рівномірному русі (рис. 4). Хвилю зниження, яка рухається вгору проти течії, одержимо, почавши випускати в нижньому кінці каналу певну кількість води Q, більшу, ніж витрата Q_0, яка була в каналі до збільшення забору води (рис. 5).

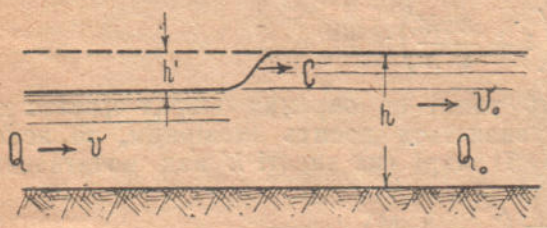

Рис. 4.

Шляхом міркувань, аналогічних наведеним вище для хвиль підвищення, можна одержати для швидкості хвилі c відносно води в каналі, яка рухається рівномірно, таку формулу:

$$c=\sqrt{gZ\left(1-\frac{3}{2}\frac{h'}{Z}+\frac{h'^2}{2Z^2}\right)} \qquad (14)$$

Цю формулу можна також одержати безпосередньо з формули (3a), підставивши в останню h' з знаком мінус. З формули (14) легко вивести, нехтуючи членом $\frac{h'^2}{2Z^2}$, такий вираз для швидкості хвилі:

$$c=\sqrt{gZ}\left(1-\frac{3}{4}\frac{h'}{Z}\right) \qquad (14a)$$

Щодо зниження h', то для нього можна було б вивести (див. рис. 5) формулу, аналогічну формулі (9):

$$h'=\frac{(v-v_0)^2}{4g}+(v-v_0)\sqrt{\frac{Z}{g}} \qquad (15)$$

Таку формулу одержимо при поступовому збільшенні витрати у нижньому кінці каналу.

Проте форма хвилі зниження не може лишатись сталою, так само як і хвилі підвищення (див. вище), тому що передня частина її (рис. 4), де глибина більша, рухається з більшою швидкістю, ніж нижня задня частина її з найменшою глибиною. Аналогічне явище маємо і для випадку, поданого на рис. 5. Щодо швидкостей хвилі для різних точок по висоті її, то й для них можна написати аналогічно формулі (12b)

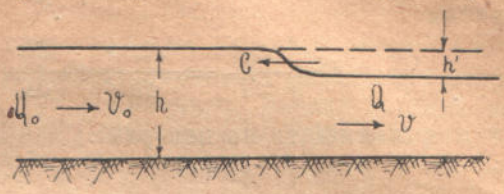

Рис. 5.

$$c_z = 3\sqrt{g(h-z)} - 2\sqrt{gh} \qquad (16)$$

Маючи цю швидкість, можна написати рівняння поверхні води для будьякого моменту часу t, якщо тільки відома форма хвилі в початковий момент. Наприклад, при моментальному збільшенні відкриття в нижньому кінці каналу, рівняння поверхні хвилі буде:

$$x = t\,[3\sqrt{g(h-z)} - 2\sqrt{gh}]$$

Це рівняння, звичайно, можна застосувати в границях зміни z від 0 до h'.

Тому що найвища частина хвилі, як тільки но зазначалось, рухається найшвидше, то передній край її підходить до початкової поверхні під кутом, який чимраз зменшується; ось чому передній край (рис. 6—A_1, A_2, A_3) хвилі зниження навіть важко помітити. Обчислення об'ємів ABA_1, ABA_2 і т. д. дає змогу обчисляти виливання з верхнього б'єфу при збільшенні споживання води, наприклад турбінами.

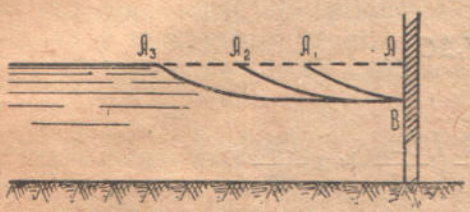

Рис. 6.

В попередньому викладі ми приймали, що рух в каналі перед з'явленням у ньому хвилі був рівномірний. Проте наведені формули й висновки можна застосувати й тоді, коли рух в каналі до з'явлення в ньому хвилі був нерівномірний; при цьому розрахунок треба провадити ділянками невеликої довжини, на протязі яких глибину і швидкість можна вважати приблизно сталими.

Виведімо ще формулу для швидкості хвилі c у відкритих водотоках з призматичним руслом іншим шляхом, склавши спочатку диференціальне рівняння неусталеного руху рідини в таких водотоках. Складаючи його, ми не будемо, проте, виходити з диференціальних рівнянь руху в'язкої рідини Нав'є-Стокса, як це робить Буссінеск, бо, з одного боку, цей вивід не можна не визнати трохи штучним (застосування рівнянь для в'язкої рідини до турбулентного руху), а з другого боку, він досить складний. Найпростіше будемо виводити потрібне диференціальне рівняння безпосередньо з основного рівняння механіки:

$$P = mj$$

Візьмімо частку рідини (рис. 7) вагою ΔG, яка рухається по поверхні потоку, на ділянці ds. Якщо спад поверхні в даний момент на розглядуваній ділянці ds дорівнює I, то складова сили ваги, яка діє на частку

ΔG в напрямі її руху буде $I \cdot \Delta G$ *). Крім сили ваги на цю частку діятиме „сила“ тертя; позначмо відносний спад, який відповідає втратам на тертя, через I_r; тоді складова сили ваги в напрямі руху буде $I_r \Delta G$; цю складову треба взяти, звичайно, з мінусом. Прискорення розглядуваної частки становитиме:

$$j = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s}$$

Тут u є швидкість на поверхні.

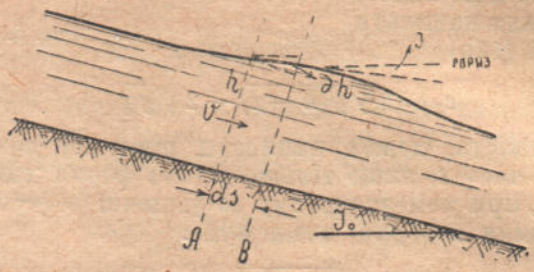

Рис. 7.

Замість маси m треба вставити $\frac{\Delta G}{g}$. Сила, що діє на частку, дорівнюватиме:

$$I \cdot \Delta G - I_r \Delta G$$

Тому можемо написати:

$$I \cdot \Delta G - I_r \cdot \Delta G = \frac{\Delta G}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s}\right)$$

Скоротивши на ΔG, матимемо:

$$I - I_r = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s}\right) \qquad (1)$$

Зауважмо, що відносний спад I поверхні води на ділянці ds можна написати ще в такому вигляді (рис. 6):

$$I = I_0 - \frac{\partial h}{\partial s}$$

Тоді рівняння (1) можна написати так:

$$I_0 - \frac{\partial h}{\partial s} - I_r = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s}\right)$$

або, взявши на увагу, що

$$u\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u^2}{2}\right),$$

*) При малих спадах, коли $I \cong \sin I$; в противному разі треба було б брати не I, а $\sin I$.

одержимо:

$$I - \frac{\partial h}{\partial s} - I_r = \frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\frac{u^2}{2g} \qquad (1a)$$

Рівняння (1) і (1а) виведені для струминки на поверхні потоку, але їх узагальнюють так, щоб їх можна було застосовувати і для цілого потоку скінченного перерізу. Не наводячи тут відповідних, досить відомих міркувань, зазначмо, що в рівняння (1) або (1а) замість швидкості струминки u треба вставити середню швидкість по перерізу v; крім того член $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ треба помножити на так званий коректив на нерівномірний розподіл швидкостей по перерізу $\alpha \cong 1{,}11$, а член $\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}$ — на коефіцієнт $\alpha' \cong 1{,}04$. Далі, замість I_r підставимо вираз його з рівняння Шезі $I_r = \frac{v^2}{C^2R}$.

Тут C — коефіцієнт Шезі, а R — гідравлічний радіус перерізу.

Таким чином замість рівняння (1а) одержимо:

$$I_0 - \frac{\partial h}{\partial s} - \frac{v^2}{C^2R} = \frac{\alpha'}{g}\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2g}\right) \qquad (II)$$

Відзначмо, що при виводі цього диференціального рівняння не враховувався вплив кривизни струминок.

Виведімо тепер ще рівняння нерозривності для неусталеного руху рідини у відкритому руслі. Очевидно, що через будьякий переріз A (рис. 7) з площею ω за час dt пройде кількість рідини

$$\omega \cdot v \cdot dt,$$

а через нескінченно близький до нього переріз B за той самий час протече

$$\left[\omega v + \frac{\partial(\omega v)}{\partial s}\partial s\right] dt$$

В такому випадку об'єм води між перерізами A і B збільшиться за час dt на

$$\omega v\, dt - \left[\omega\, v dt + \frac{\partial(\omega v)}{\partial s} ds \cdot dt\right]$$

Але при збільшенні об'єму води на ділянці ds на ній повинна збільшитись і площа перерізу на $\frac{\partial \omega}{\partial t}\, dt$, а об'єм води на

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}\, ds \cdot dt$$

Обидва вирази для того самого збільшення об'єму води на ділянці ds за час dt можна дорівняти і таким чином одержимо рівняння нерозривності для розглядуваного руху:

$$-\frac{\partial(\omega v)}{\partial s}\, ds \cdot dt = \frac{\partial \omega}{\partial t}\, ds \cdot dt$$

Скоротивши, одержимо:

$$-\frac{\partial(\omega v)}{\partial s}=\frac{\partial\omega}{\partial t}$$

або

$$\frac{\partial(\omega v)}{\partial s}+\frac{\partial\omega}{\partial t}=0 \qquad \text{(III)}$$

Це рівняння можна написати ще й так:

$$v\frac{\partial\omega}{\partial s}+\omega\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial\omega}{\partial t}=0 \qquad \text{(IIIa)}$$

Рівняння (II) і (III) будемо розв'язувати тільки для водотоків у широких руслах прямокутного перерізу, при чому ширину вважатимемо сталою вздовж по течії, і дуже великою порівняно з глибиною. Тоді $\omega=bh$, де b — ширина водотоку. Крім того припустімо, що відхилення (збурення, хвиля) від рівномірної течії; зроблене в певному місці в момент t, незначної висоти; отже втрати на тертя при наявності цього збурення можна приблизно прийняти рівними втратам при рівномірному русі, тобто $I_0=\frac{v^2}{C^2R}$. При викладених умовах замість рівнянь (II) і (III) одержимо

$$-\frac{\partial h}{\partial s}=\frac{\alpha'}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\alpha\frac{\partial}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) \qquad \text{(IIa)}$$

і

$$v\frac{\partial h}{\partial s}+h\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial h}{\partial t}=0 \qquad \text{(IIIa)}$$

При виводі рівнянь (I—III) ми вважали h і v величинами змінними. Умовмося надалі позначати літерою h тільки сталу глибину рівномірного руху (до утворення хвилі), швидкість того самого руху — літерою v_0, а змінні невеликі відхилення від глибини і швидкості рівномірного руху — через h' і v'. Тоді замість h і v у формули (IIa) і (IIIa) треба підставити

$$h+h' \text{ і } v_0+v'$$

Після підставлень одержимо:

$$-\frac{\partial h'}{\partial s}=\frac{\alpha'}{g}\frac{\partial v'}{\partial t}+\alpha\frac{v_0+v'}{g}\frac{\partial v'}{\partial s}$$

$$(v_0+v')\frac{\partial h'}{\partial s}+(h+h')\frac{\partial v'}{\partial s}+\frac{\partial h'}{\partial t}=0$$

В сумах $v+v'$ і $h+h'$ малими величинами v' і h' можна нехтувати, і тому одержимо:

$$-\frac{\partial h'}{\partial s}=\frac{\alpha'}{g}\frac{\partial v'}{\partial t}+\alpha\frac{v_0}{g}\frac{\partial v'}{\partial s} \qquad \text{(IIb)}$$

$$v_0\frac{\partial h'}{\partial s}+h\frac{\partial v'}{\partial s}+\frac{\partial h'}{\partial t}=0$$

Щоб проінтегрувати ці рівняння, виключаємо з них похідні від v'. Для цього спочатку рівняння (IIb) продиференціюємо по s:

$$-\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}=\frac{\alpha'}{g}\frac{\partial^2 v'}{\partial s\,\partial t}+\alpha\frac{v_0}{g}\frac{\partial^2 v'}{\partial s^2} \qquad \text{(IIc)}$$

Рівняння (IIIb) розв'язуємо відносно $\frac{\partial v'}{\partial s}$:

$$\frac{\partial v'}{\partial s}=-\frac{v_0}{h}\frac{\partial h'}{\partial s}-\frac{1}{h}\frac{\partial h'}{\partial t}$$

Останній вираз диференціюємо по s і по t:

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial s^2}=-\frac{v_0}{h}\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}-\frac{1}{h}\frac{\partial^2 h'}{\partial s\,\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial s\,\partial t}=-\frac{v_0}{h}\frac{\partial^2 h'}{\partial s\,\partial t}-\frac{1}{h}\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}$$

Підставляємо дві останні похідні в рівняння (IIc):

$$-\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}=-\alpha'\frac{v_0}{gh}\frac{\partial^2 h'}{\partial s\,\partial t}-\alpha'\frac{1}{gh}\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}-\alpha\frac{v_0^2}{gh}\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}-\alpha\frac{v_0}{gh}\frac{\partial^2 h'}{\partial s\,\partial t}$$

Інакше:

$$\left(1-\alpha\frac{v_0^2}{gh}\right)\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}-(\alpha'+\alpha)\frac{v_0}{gh}\frac{\partial^2 h'}{\partial s\,\partial t}-\frac{\alpha'}{gh}\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}=0$$

Остаточно:

$$(gh-\alpha v_0^2)\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}-(\alpha'+\alpha)\,v_0\frac{\partial^2 h'}{\partial s\,\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}=0 \qquad \text{(IV)}$$

Це диференціальне рівняння в частинних похідних задовольняється, якщо покласти:

$$h'=F(s-c_0t),$$

де F позначає довільну функцію, а c_0 — сталу величину, яку зараз і визначимо. Зауважмо, що

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}=F''; \quad \frac{\partial h'}{\partial t}=-c_0F'; \frac{\partial^2 h'}{\partial s\,\partial t}=-c_0F'' \text{ і } \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}=c_0^2F''$$

Підставивши знайдені тількищо вирази для похідних від h' в рівняння (IV), одержимо:

$$(gh-\alpha v_0^2)\,F''+(\alpha'+\alpha)\,v_0c_0F''-\alpha'c_0^2F''=0$$

або після простих перетворень:

$$c_0^2-\frac{\alpha'+\alpha}{\alpha'}v_0c_0-\frac{gh-\alpha v_0^2}{\alpha'}=0$$

З цього квадратного рівняння і визначаємо c_0:

$$c_0=\frac{\alpha'+\alpha}{2\alpha'}v_0\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2\alpha'}\right)^2v_0^2+\frac{1}{\alpha'}(gh-\alpha v_0^2)} \qquad \text{(V)}$$

Якщо сюди підставити наведені вище середні значення коефіцієнтів $\alpha = 1{,}11$ і $\alpha' = 1{,}04$, то одержимо (приблизно):

$$c_0 = 1{,}033 v_0 \pm \sqrt{0{,}96 gh}$$

Якщо ж покласти, як це найчастіше роблять, $\alpha = 1$ і $\alpha' = 1$, то замість формули (V) одержимо

$$c_0 = v_0 \pm \sqrt{gh} \qquad \text{(Va)}$$

Отже взагалі для c_0 одержуємо два значення:

$$c_{01} = \frac{\alpha' + \alpha}{2\alpha'} v_0 + \sqrt{\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2\alpha'}\right)^2 \tau_0^2 + \frac{1}{\alpha'}(gh - \alpha v_0^2)}$$

$$c_{02} = \frac{\alpha' + \alpha}{2\alpha'} v_0 - \sqrt{\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'} + (gh - \alpha v_0^2)}$$

і загальний інтеграл рівняння (IV) можемо написати в такому вигляді:

$$h' = F_1(s - c_{01}t) + F_2(s - c_{02}t) \qquad \text{(VI)}$$

Тут F_1 і F_2, означають дві довільні функції.

Якщо підставити цей вираз в рівняння (IIIb), то одержимо таке диференціальне рівняння для визначення v':

$$h \cdot \frac{\partial v'}{\partial s} = (c_{01} - v_0) F'_1(s - c_{01}t) + (c_{02} - v_0) F'_2(s - c_{02}t)$$

Інтеграл цього рівняння

$$h \cdot v' = (c_{01} - v_0) F_1(s - c_{01}t) + (c_{02} - v_0) F_2(s - c_{02}t) + f(t)$$

Тут $f(t)$ є довільна функція від одного тільки t. Легко переконатись, хоч би підставленням знайдених виразів для h' і v' в наведені вище диференціальні рівняння, що $f(t)$ є стала величина і її можна включити в довільні функції F_1 і F_2. Тому

$$v' = \frac{c_{01} - v_0}{h} F_1(s - c_{02}t) + \frac{c_{02} - v_0}{h} F_2(s - c_{02}t) \qquad \text{(VII)}$$

Зміни в глибинах і швидкостях h' і v', як це видно з формул (VI) і (VII), складаються кожна з двох доданків, один з яких залежить від функції F_1, а другий — від функції F_2. Для дослідження h' і v' треба, очевидно, розглянути функції F_1 і F_2 і особливо сталі величини c_{01} і c_{02}, які входять до них. Насамперед відзначмо, що величина c_{01} незалежно від значень h і v_0 завжди додатна і до того завжди $c_{01} > c_{02}$.

Щодо величини c_{02}, то вона може бути і додатною і від'ємною, а саме $c_{02} > 0$, якщо

$$\frac{\alpha' + \alpha}{2\alpha'} v_0 - \sqrt{\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2\alpha'}\right)^2 v_0^2 + \frac{1}{\alpha'}(gh - \alpha v_0^2)} > 0$$

або приблизно (покладаючи, що $\alpha' = 1$ і $\alpha = 1$):

$$v_0 - \sqrt{gh} > 0$$

Цю умову для розглядуваних прямокутних перерізів можна трохи пе-

ретворити, вставивши в неї $\frac{q}{h}$ замість v_0; через q тут, як звичайно, позначено витрату на одиницю ширини водотоку. Після підставлення одержимо:

$$\frac{q}{h} - \sqrt{gh} > 0 \text{ або } h^3 < \frac{q^2}{g}$$

Але, як відомо, вираз $\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$ є критична глибина h_k водотоку прямокутного перерізу; тому можемо сказати, що $c_{02} > 0$, якщо

$$h < h$$

Аналогічно можна легко довести, що $c_{02} = 0$, коли

$$h = h_k, \qquad (a_1)$$

і $c_{02} < 0$, коли

$$h > h_k \qquad (a_2)$$

З умов (a) і (a_2) бачимо, що c_{02} додатне для так званих „бурхливих" течій, для яких характерним є те, що в них глибина h при рівномірному русі менша від критичної глибини h_k; навпаки, для „спокійних" течій, для яких $h > h_k$, стала c_{02} є від'ємна.

Щоб з'ясувати фізичне значення c_{01}, збережімо в рівняннях (VI) і (VII) тільки члени, які залежать від нього, тобто покладімо:

$$F_2(s - c_{02}t) = 0$$

Тоді

$$h' = F'(s - c_{01}t)$$

і

$$v' = \frac{c_{01} - v_0}{h} F_1(s - c_{01}t)$$

Розмістімо початок координат у перерізі, до якого досягає збурення в момент $t = 0$, а вісь s напрямімо вниз по течії. Тоді в момент $t = 0$ матимемо і $h' = 0$ для перерізу, в якому ми вмістили початок координат, а також і для всіх перерізів, розміщених нижче по течії. Отже для розглядуваного моменту $h' = F_1(s)$ [1]$) = 0$ для всіх $s \geqslant 0$; але тоді і $F_1(s - c_{01}t)$ дорівнюватиме нулеві для всіх випадків, коли $s - c_{01}t \geqslant 0$.

Зауважмо тепер, що умова $s - c_{01}t = 0$, або інакше $s = c_{01}t$, дає нам абсцису s того перерізу, до якого збурення досягне в певний момент t. Але $s = c_{01}t$ є простір, пройдений збуренням за час t, отже c_{01} є швидкість хвилі, яка йде по відкритому водотоку вниз по течії, якщо зробимо розв'язання диференціального рівняння (IV) залежним тільки від функції F_1. Тому що c_{01} завжди додатне, то звідси робимо висновок, що збурення з швидкістю c_{01} можуть поширюватись тільки вниз по течії як у спокійних, так і в бурхливих течіях.

Щоб з'ясувати значення величини c_{02}, збережімо в рівняннях (VI) і (VII) тільки члени, які містять c_{02}, для чого покладімо $F_1(s - c_{01}t) = 0$. Тоді одержимо

$$h' = F_2(s - c_{01}t)$$

---

[1]) Розглядаємо момент $t = 0$

Умову відносно початку координат лишаємо ту саму, що й в попередньому випадку, тобто $s=0$ при $t=0$. Тоді

$$F_2(s)=0$$

в момент $t=0$ для всіх $s \geqslant 0$; звідси і

$$F_2(s-c_{02}t)=0$$

для $s-c_{02} \geqslant 0$, маючи на увазі, що s і t додатні. З рівняння

$$s-c_{02}t=0$$

зробивши розв'язання диференціального рівняння (IV) залежним тільки від функції F_2, можемо зробити висновок, що c_{02} є швидкість поширення хвиль вниз по течії; однак цей висновок буде вірний, звичайно, тільки в тому разі, коли $c_{02}>0$, тобто коли c_{02} напрямлене вниз по течії, а це, згідно з виведеною вище умовою (а), буває тільки для течій з нормальною глибиною h, меншою за критичну h_k тобто для бурхливих течій. У випадку спокійної течії маємо $c_{02}<0$; це треба розуміти так, що збурення в спокійній течії може йти з швидкістю $c_{02} \cong v_0-\sqrt{gh}$ тільки проти течії.

Тепер можемо зробити такий висновок: у водотоках з бурхливою течією хвилі поширюються тільки вниз по течії, при чому є два види хвиль, — що поширюються з швидкістю c_{01} і з швидкістю c_{02}; ці два види хвиль інтерферують одна з одною; у водотоках з спокійною течією хвилі вниз по течії можуть поширюватись тільки з швидкістю c_{01}, а проти течії — тільки з швидкістю c_{02}.

Легко збагнути, що у випадку поширення збурень малої висоти в стоячій воді матимемо:

$$c_{01}=c_{02}=c=\sqrt{gh},$$

тобто формулу (IIIe), одержану вище цілком іншим способом.

На основі сказаного можна підійти до розгляду руху збурень у відкритих водотоках і з другого погляду. Можна вважати, що збурення у відкритому водотоці поширюється з швидкістю $c=\sqrt{gh}$ відносно води, яка вже рухається, при чому рух хвилі може відбуватись як вгору, так і вниз по течії. Щоб визначити швидкість відносно берегів (а не відносно води в водотоці) збурення, яке рухається вниз по течії, треба до швидкості $c=\sqrt{gh}$ додати величину v_0 і таким чином одержимо вираз

$$c_0=v_0+\sqrt{gh}$$

для водотоків як з бурхливою, так і з спокійною течією.

Щоб одержати швидкість відносно берегів хвилі, яка рухається вгору проти течії, треба від швидкості v_0 водотоку відняти швидкість (додатним вважаємо напрям вниз по течії) руху хвилі $\sqrt{gh}$. Таким чином одержуємо:

$$c_0=v_0-\sqrt{gh}$$

Як відомо, в бурхливих течіях швидкість $v_0>\sqrt{gh}$; отже швидкість c_0 в бурхливих водотоках додатна; тому і розглядувана друга система хвиль у бурхливій течії рухається відносно берегів вниз по течії [1]).

Для спокійних течій вираз

$$v_0-\sqrt{gh}$$

---

[1]) Відносно ж води в каналі, як видно з попереднього, ця система хвиль рухається проти течії

буде від'ємним, тобто в спокійних водотоках друга система хвиль рухається і відносно води в водотоках і відносно берегів вгору проти течії.

III

Досі ми не звертали уваги на викривлення струмин при утворенні і русі хвиль. Тепер врахуймо цей вплив [1]), проте тільки при певних спрощуючих дослідження припущеннях, а саме — обмежившись дослідженням руху в широких водотоках прямокутного перерізу сталої ширини b, при чому початкову швидкість v_0 в каналі приймаємо рівною нулеві. Впливом тертя на рух хвилі нехтуємо.

Вісь s, як і раніше, напрямімо горизонтально по дну вздовж каналу, а вісь y — вертикально вгору. Тепер уже не можна буде нехтувати складовою w швидкості води по осі y. Рух можна розглядати як плоский. Скористуймось диференціальними рівняннями руху Ейлера для осей s і y:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho (S - j_s)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho (Y - j_y)$$

Тут ρ — густина рідини, S і Y — складові по осях s і y об'ємної сили, яка діє на одиницю маси, а j_s і j_y — складові прискорення по осях координат. Зауваживши, що

$$S = 0; \quad Y = -g; \quad j_s = \frac{\partial v}{\partial t}; \quad j_y = \frac{dw}{dt},$$

можемо рівняння Ейлера написати так:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho \frac{dv}{dt}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \left(g + \frac{dw}{dt}\right)$$

Помножмо друге рівняння на dy і проінтегруймо його в границях y і $h + h'$, взявши на увагу, що при зміні y в цих границях тиск змінюється в границях від p до 0 (на поверхні):

$$\frac{p}{\rho}(h + h' - y) + \int_y^{h+h'} \frac{dw}{dt}\, dy \qquad \text{(a)}$$

Візьмімо тепер рівняння нерозривності руху рідини для плоского руху в такій формі:

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Звідси:

$$\partial w = -\frac{\partial v}{\partial s}\, dy$$

або

$$w = -y \frac{\partial v}{\partial s} \qquad \text{(b)}$$

---

[1]) В цій частині в основному користуємось способом, викладеним в книзі A. Flamant Hydraulique, 1909.

Візьмімо ще рівняння нерозривності у вигляді (III):

$$\frac{\partial(\omega v)}{\partial s}+\frac{\partial\omega}{\partial t}=0$$

Тут $\omega=b(h+h')$, і тому:

$$\frac{\partial[(h+h')v]}{\partial s}+\frac{\partial h'}{\partial t}=0$$

Нехтуючи h' порівняно з h, одержимо:

$$h\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial h'}{\partial t}=0$$

Звідси

$$\frac{\partial v}{\partial s}=-\frac{1}{h}\frac{\partial h'}{\partial t}$$

Підставмо це в формулу (b):

$$w=\frac{y}{h}\frac{\partial h'}{\partial t}$$

Отже бачимо, що швидкість по вертикалі пропорціональна координаті y, становлячи деяку частину $\frac{y}{h}$ від швидкості на поверхні в розглядуваному перерізі $\frac{\partial h'}{\partial t}$. Звідси ясно, що

$$\frac{dw}{dt}=\frac{y}{h}\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}$$

Цей вираз для $\frac{dw}{dt}$ підставмо в формулу (a):

$$\frac{p}{\rho}=g(h+h'-y)-+\int_y^{h+h'}\frac{y}{h}\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}dy$$

У верхній границі інтеграла замість $h+h'$ візьмімо наближене h і зробимо інтегрування:

$$\frac{p}{\rho}=g(h+h'-y)+\frac{h^2-y^2}{2h}\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}$$

Продиференціювавши цей вираз по s, одержимо

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}=g\frac{\partial h'}{\partial s}+\frac{\partial^3 h'}{\partial x\,\partial t^2}\frac{h^2-y^2}{2h},$$

але

$$\frac{\partial p}{\partial s}=-\rho\frac{du}{dt};$$

тому

$$\frac{du}{dt}=-g\frac{\partial h'}{\partial s}-\frac{\partial^3 h'}{\partial x dt^2}\frac{h^2-y^2}{2h}$$

Щоб знайти середнє значення $\left(\frac{du}{dt}\right)_{сер.}$ по вертикалі від $\frac{du}{dt}$, помножмо знайдене тільки що рівняння почленно на dy, проінтегруємо в границях від 0 до $h+h'$ і поділимо на $h+h'$:

$$\frac{du}{dt}dy = -g\frac{\partial h'}{\partial s}dy - \frac{\partial^3 h'}{\partial s\,\partial t^2}\frac{h^2-y^2}{2h}dy;$$

$$\frac{du}{dt}\Big|y\Big|_0^{h+h'} = -g\frac{\partial h'}{\partial s}\Big|y\Big|_0^{h+h'} \frac{\partial^3 h'}{\partial s\partial t^2}\frac{h^2}{2h}\Big|y\Big|_0^{h+h'} + \frac{\partial^3 h'}{\partial s\,\partial t^2}\frac{1}{6H}\Big|y^3\Big|_0^{h+h'}$$

Після підставлення границь і почленного ділення на $h+h'$ одержимо

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{сер.} = -g\frac{\partial h'}{\partial s} - \frac{\partial^3 h'}{\partial s} - \frac{\partial^3 h'}{\partial s\partial t^2}\frac{h}{2}\left(h+h'\right) + \frac{\partial^3 h'}{\partial s dt^2}\frac{(h+h')^3}{6h}$$

Зробивши далі прості перетворення й спрощення, матимемо:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{сер.} = -g\frac{\partial h'}{\partial s} - \frac{h}{3}\frac{\partial^3 h'}{\partial s\,\partial t^2}$$

З другого боку:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Підставивши в останній вираз замість змінної по вертикалі швидкості u середнє її значення v, одержимо:

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{du}{dt}\right)_{сер.} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s} + w\frac{\partial v}{\partial y}$$

Однак тут треба врахувати те, що середня по вертикалі швидкість v не залежить від y і тому:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{сер.} = \frac{\partial v}{dt} + v\frac{\partial v}{\partial s}$$

Прирівнюючи один одному два знайдені вирази для $\left(\frac{du}{dt}\right)_{сер.}$ одержимо:

$$-g\frac{\partial h'}{\partial s} - \frac{h}{3}\frac{\partial^3 h'}{\partial s\,\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{v\partial}{\partial s}$$

або так:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s} + g\frac{\partial h'}{\partial s} + \frac{h}{3}\frac{\partial^3 h'}{\partial s\,\partial t^2} = 0 \qquad (c)$$

З попереднього ми знаємо, що h' і v — функції від $s-ct$

$$h' = F(s-ct)$$

Звідси:

$$\frac{\partial h'}{\partial s} = F'(s-ct);\ \frac{\partial h'}{\partial t} = -cF'(s-ct)$$

З цих формул легко вивести, що

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = -c\frac{\partial h'}{\partial s}$$

Далі

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = -c\frac{\partial^2 h'}{\partial s\,\partial t} = c^2\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}$$

Аналогічно можна було б вивести:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -c\frac{\partial v}{\partial s}$$

Підставивши в рівняння (c) замість похідних по t вирази їх через похідні по s, матимемо:

$$-c\frac{\partial v}{\partial s} + v\frac{\partial v}{\partial s} + g\frac{\partial h'}{\partial s} + \frac{hc^2}{3}\frac{\partial^3 h'}{\partial s^3} = 0$$

або

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(-cv + \frac{1}{2}v^2 + gh' + \frac{hc^2}{3}\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}\right) = 0$$

Звідси бачимо, що вираз в дужках не залежить від s. Цей вираз треба покласти рівним нулеві, якщо умовитися досліджувати тільки хвилі, висота яких h' і швидкість під якими v дорівнюють нулеві для $s = \infty$:

$$-cv + \frac{1}{2}v^2 + gh' + \frac{hc^2}{3}\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2} = 0$$

Вставимо сюди v, визначене з рівняння нерозривності руху рідини для прямокутного поперечного перерізу

$$ch' = v(h + h')$$

Звідси

$$v = c\frac{h'}{h + h'}$$

Після підставлення:

$$-c^2\frac{h'}{h + h'} + \frac{1}{2}c^2\frac{h'^2}{(h + h')^2} + gh' + \frac{hc^2}{3}\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2} = 0$$

Інакше:

$$c^2\left[1 - \frac{1}{2}\frac{h'}{h + h'} - \frac{h(h + h')}{3h'}\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}\right] = g(h + h')$$

Звідси

$$c = \sqrt{\frac{g(h + h')}{1 - \frac{1}{2}\frac{h'}{h} - \frac{h^2}{3h'}\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}}} \cong \sqrt{g(h + h')\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h'}{h} + \frac{h^2}{3h'}\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}\right)} \cong$$

$$= \sqrt{gh\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h'}{h} + \frac{h^2}{3h'}\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}\right)}$$

і остаточно:

$$c \cong \sqrt{gh}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h'}{h} + \frac{h^2}{6h'}\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}\right) \qquad (3f)$$

Як відомо, невелика кривизна дорівнює приблизно $\frac{\partial_2 h'}{\partial s^2}$; тому член $\frac{h^2}{6h'}\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}$ виражає вплив кривизни струмин на швидкість хвиль; це стане цілком ясним, якщо порівняти формулу (3f) з формулою (3d). Ми вже знайшли, що голова довгої хвилі з часом змінюється при русі її в наслідок того, що швидкості c різних шарів хвилі неоднакові, — вище розташовані шари рухаються швидше. Тепер ми зможемо переконатись, що зміна форми хвилі залежить і від кривизни поверхні її.

Справді, розгляньмо рух хвилі підвищення, яка має певну висоту h' над початковим рівнем AB нерухомої води в каналі (рис. 8), при чому перехід

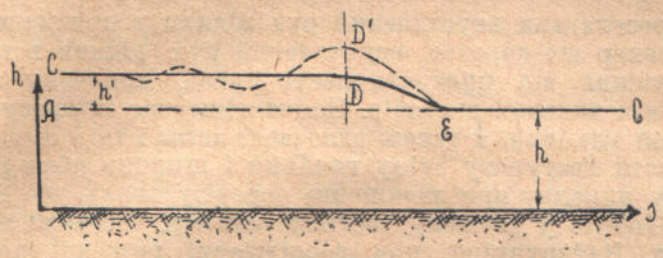

Рис. 8.

до початкового рівня відбувається по кривій DE, що має поблизу точки D від'ємну кривизну. З цього ясно, що частина хвилі поблизу точки D має рухатися з швидкістю, меншою ніж швидкість на поверхні плоскої частини хвилі CD. Ось з цієї причини поблизу точки D при русі хвилі збирається певна кількість води, поверхня хвилі підіймається до певної точки D' так, щоб збільшена глибина компенсувала сповільнення від кривизни струмини. Базен експериментально знайшов, що висота в перерізі DD' збільшується до $\frac{3h'}{2}$. Поверхня цього підвищення може примкнути до площини CD тільки поверхнею угнутою, тобто такою, яка має додатну кривизну; отже в цьому місці матимемо швидкість більшу, ніж на площині CD і тому тут утворюється западина; за западиною матимемо знову підвищення, але вже меншої висоти і т. д.

Розглядаючи рівняння (3f), можна прийти до висновку, що існують хвилі, які можуть рухатись, не змінюючи своєї форми. Диференціальне рівняння профілю такої хвилі одержимо, якщо в рівнянні (3f) вважатимемо швидкість c сталою для всіх частин цього профілю; для цього треба, щоб вплив зміни h' [1]) для різних частин профілю компенсувався б відповідними змінами кривизни [2]). Хвиля такої форми зветься „самотньою“ хвилею.

Розгляньмо ще питання про те, як впливає кривизна струмини на зміну форми довгої хвилі зниження при русі її. В цьому випадку h' у формулі (3f) є величина від'ємна; якщо кривизна у вищій частині хвилі

[1]) Тут h' вважаємо змінним.

[2]) Ph. Forchheimer, Hydraulik, 1930, с. 260, або згадана праця Д. Бобилева.

(рис. 9) поблизу точки D від'ємна (крива опукла), то член $\frac{h^2}{6h'} \frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}$ буде додатним, і, отже, в цьому випадку кривизна ще збільшує і без того велику швидкість верхньої частини хвилі; таким чином передня частина

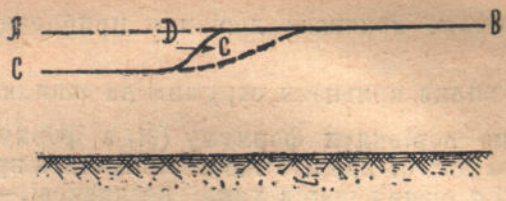

Рис. 9.

хвилі зниження дедалі більше згладжується, як показано на рис. 9 пунктиром.

IV

Досі ми розглядали неусталений рух рідини в призматичних руслах; розгляньмо тепер ще коротко неусталений рух рідини в тих випадках, коли є відхилення від призматичності русла, при чому скористуймось найпростішим з наявних способів. Найчастіше нас інтересує вплив зміни ширини, зміни глибини, а також одночасна зміна і тої і другої. При цьому треба відрізняти поступову зміну глибини і ширини абож різку їх зміну. В останньому випадку при зменшенні перерізу хвиля, що йде по каналу, частково проходить у звужену частину каналу, частково ж відбивається від звуження. Найзручніше при дослідженні розглядуваних тут явищ скористуватись законом збереження енергії, застосувавши його до енергії хвилі. Треба відрізняти потенціальну і кінетичну енергії хвилі як частини повної енергії її. Нехай на поверхні рідини з тієї чи іншої причини утворилось підвищення якоїсь довільної форми, змінну, але однакову по всій ширині висоту якого позначмо, як і раніш, через h'; цю висоту знов беремо над початковим рівнем, — до утворення підвищення хвилі. При ширині, покищо сталій, русла b об'єм води хвилі на довжині ds буде $bh'ds$; вага її $-\gamma bh'ds$, де γ — вага кубічної одиниці. Потенціальну енергію води в розглядуваному об'ємі, який має форму елементарного паралелепіпеда, одержимо, помноживши вагу $\gamma bh'ds$ на висоту його центра ваги $\frac{h'}{2}$, а саме

$$\frac{\gamma bh'^2 ds}{2}$$

Потенціальну енергію всього „підвищення" можна одержати інтегруванням по всій його довжині, при чому треба дати h' у вигляді функції від s. Якщо позначмо вагу всього підвищення через G, а висоту центра його ваги — через h'_0, то вся потенціальна енергія дорівнюватиме $G \cdot h'_0$.

Перейдімо тепер до кінетичної енергії хвилі. Цю енергію обчисляємо на тій самій довжині ds; але її вже треба обчисляти по всій глибині $h + h'$ [1]). Приймімо, що швидкість часток води в будьякому перерізі однакова по всій висоті $h + h'$; при цьому маємо на увазі тільки горизонтальну швидкість v, вертикальними ж швидкостями в даному питанні нехтуємо, зважаючи на їх малість. Об'єм рідини, для якого обчисляємо кінетичну енергію, дорівнює:

$$b(h + h')ds$$

[1]) Обмежуємось випадком прямокутного перерізу каналу.

Вага рідини в цьому об'ємі:

$$\gamma b(h+h')ds$$

Маса її:

$$\frac{\gamma b(h+h')ds}{g}$$

Шукана жива сила:

$$\frac{\gamma b(h+h')v^2ds}{2g}$$

Але за рівнянням (1а), якщо обмежитись випадком, коли швидкість в каналі $v_0=0$, маємо:

$$v=\frac{\Delta\omega}{\omega}\cdot c$$

або для прямокутного перерізу

$$v=\frac{h'}{h+h'}c$$

Підставляючи це значення v в знайдений вище вираз для живої сили води на дільниці ds, одержуємо:

$$\frac{\gamma bh'^2ds}{2g(h+h')}c^2$$

або інакше:

$$\frac{\gamma bh'ds}{2g(h+h')}g\left(h+\frac{3}{2}h'\right)$$

Якщо приблизно приймемо:

$$h+h'=h+\frac{3}{2}h',$$

то вираз для живої сили матимемо в такій формі:

$$\frac{\gamma bh'^2ds}{2}$$

З останнього виразу робимо інтересний висновок, що потенціальна енергія хвилі дорівнює її кінетичній енергії.

Повна енергія хвилі на довжині ds дорівнюватиме:

$$\gamma bh'^2ds$$

Розгляньмо тепер випадок руху хвилі підвищення висоти h'_1, яка переходить з ділянки каналу з шириною b_1 і глибиною h_1 в ділянку з шириною b_2, глибиною h_2 і новою висотою хвилі h'_2. Перехід припускаємо плавний, отже без відбивання хвилі. Швидкості хвиль будуть на пер-

шій ділянці $c_1 \cong \sqrt{gh_1}$; на другій ділянці — $c_2 \cong \sqrt{gh_2}$. Візьмімо на першій ділянці хвилю довжиною Δs_1; енергія її буде така:

$$\gamma b_1 h'^2_1 \Delta s_1$$

При переході на другу ділянку голова розглядуваної хвилі увійде на цю ділянку раніше, ніж її кінець, на час $\Delta s_1 : c_1$; за цей час голова на другій ділянці пройде шлях $\Delta s_2 = c_2(\Delta s_1 : c_1) = \Delta s_1 \frac{c_2}{c_1}$. Таку довжину матиме хвиля після переходу на другу ділянку, а енергія її становитиме, очевидно:

$$\gamma b_2 h'^2_2 \Delta s_2 = \gamma b^2 h'^2_2 \Delta s_1 \frac{c_2}{c_1} = \gamma b_2 h'^2_2 \Delta s_1 \frac{h_2^{\frac{1}{2}}}{h_1^{\frac{1}{2}}}$$

Ясно, що одержана енергія хвилі на другій ділянці повинна на основі закону зберігання енергії, дорівнювати енергії, яку хвиля мала на першій ділянці; отже:

$$\gamma b_1 h'^2_1 \Delta s_1 = \gamma b_2 h'^2_2 \Delta s_1 \frac{h^{\frac{1}{2}}}{h_1^{\frac{1}{2}}}$$

Звідси можемо знайти відношення висот хвилі на ділянках з різними ширинами і глибинами:

$$\frac{h'_2}{h'_1} = \frac{b_1^{\frac{1}{2}}}{b_2^{\frac{1}{2}}} \frac{h_1^{\frac{1}{4}}}{h_2^{\frac{1}{4}}}$$

Це співвідношення дано було Ері і Гріном. З нього бачимо, що висота хвилі при русі по каналу змінного перерізу змінюється обернено пропорціонально квадратному кореневі з ширини і обернено ж пропорціонально кореневі четвертого степеня з глибини каналу [1]). При виводі цього співвідношення не брали на увагу втрати на тертя та ін. і, крім того, висота хвилі h' припускалась малою.

Розгляньмо ще коротко різку зміну ширини від значення b_1 до меншого значення b_2 при сталій глибині h і, відповідно, однакових швидкостях c хвилі підвищення на обох ділянках. Хвиля, яка підходить до місця різкої зміни ширини, частково відбивається від цього місця, частково проходить далі. Хай висота хвилі, що підходить до звуження, буде h', висота відбитої хвилі h'_1 і висота хвилі, що проходить, — h'_2. Тоді з закону зберігання енергії маємо: $b_1 h'^2 = b_1 h'^2_1 + b_2 h'^2_2$. З цього рівняння зникли довжини пройдених ділянок, тому що швидкості руху хвиль на обох ділянках однакові, зважаючи на те, що h на обох ділянках за умовою однакові.

Щоб можна було визначити h'_1 і h'_2, напишемо ще рівняння нерозривності руху рідини:

$$b_1 h' = b_1 h'_1 + b_2 h'_2$$

---

[1]) Щодо уточнення умов, при яких виведене співвідношення дає правильні результати, див. В. В. Шулейкин, Физика моря, т. 1, 1933, с. 123 і далі.

В цих міркуваннях ми нехтували втратами енергії.

Г. И. Сухомел

Основы теории неустановившегося движения в открытых водотоках (волны перемещения)

Резюме

В этой статье дается изложение упрощенной теории движения волн перемещения в открытых руслах, которой могли бы пользоваться в расчетах проектирующие инженеры. Относящиеся к этой области классические работы Буссинеска, Сен-Венана, а также некоторые другие мало доступны инженерам ввиду применяемого в этих работах обширного математического материала.

При этом основные формулы (скорость волны) приводятся тут в виде, несколько более уточненном и обобщенном, чем обычно. Вместе с тем в работе дается критика выводов расчетных формул, предложенных А. Кохом и некоторыми другими авторами.

G. I. Suchomel

Die Grundlagen der Theorie der zeitlich veränderlichen Wasserbewegungen in offenen Gerinnen (Wasserschwall und Wassersunk)

Zusammenfassung

In vorliegender Arbeit ist die vereinfachte Theorie der zeitlich veränderlichen Wasserbewegungen in offenen Gerinnen angegeben, die von projektierenden Ingenieuren für Berechnungen angewandt werden kann. Die zu diesem Gebiete angehörenden klassischen Arbeiten von Bussinesq, Saint-Venant u. a. mehr sind für Ingenieure schwer verständlich, infolge des in solchen Arbeiten angewandten umfangreichen mathematischen Materials.

Dabei werden die Grundformeln (Wellengeschwindigkeit) in etwas genauerer uud verallgemeinterer Form als gewöhnlich angeführt. Gleichzeitig wird in der Arbeit eine Kritik der Ableitungen der Berechnungsformeln angegeben, die von Al. Koch und anderen Verfassern vorgeschlagen wurden.