Інж. Д. І. КОСТЮК

КІНЕМАТИКА МЕХАНІЗМІВ

ОНТИ — ДНТВУ — НКТП

Інж. Д. І. КОСТЮК

КІНЕМАТИКА МЕХАНІЗМІВ

Під редакцією
проф. Я. Л. ГЕРОНІМУСА

ДНТВУ

ОНТИ НКТП
ДЕРЖАВНЕ НАУКОВО-ТЕХНІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНИ
Харків *1937*

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літописі Українського Друку“, „Картковому Репертуарі“ та інших покажчиках Української Книжкової Палати

5-2

Відповідальний редактор *М. Я. Усач.* Літредактор *Х. В. Гладкова.*
Техредактор *О. О. Кадашевич.* Коректори *Ф. І. Малая* і *А. А. Томіліна*

Типо-цинкографія ДНТВУ. Харків, Суздальські ряди 18/20. Уповноваж. Головліту № 1656. Зам. № 1157. Тираж 3000. $16^{3}/_{4}$ друк. арк. Папір 60 × 92. Вага 1 метр. стопи 36 кг. В друк. аркуші 51.000 зн. Здано на виробництво 7/V-37 року. Підписано до друку 9/VII-37 року.

ПЕРЕДМОВА

Викладання курсу прикладної механіки у втишах дуже утруднюється відсутністю одного підручника, який, хоча б в основних рисах, охоплював би всі найважливіші питання програми.

Змушений досвід користування кількома посібниками одночасно, написаними в різних розрізах і стилях, отже, такими, які не дають цільності і злитності в засвоєнні дисципліни, — з кожним роком дедалі найстійніше диктує потребу створення курсу, який відповідав би програмі.

Потреба в стабільному підручнику набула особливої гостроти саме зараз з введенням стабільної програми Комітету по вищій технічній освіті. Натиск цієї програми на трактування загальних принципів аналізу і синтезу механізмів та машин різко розбігається з характером всіх підручників, які є на ринку. Ця розбіжність чи не найбільше відчувається у викладанні такого розділу прикладної механіки, як „Кінематика механізмів".

Справді, різноманітність конструкцій сучасних машин, кінематичний скелет яких дедалі ускладняється, диктує потребу в рішучому переході до вивчення в загальному курсі „Кінематики механізмів" важливіших загальних методів дослідження; основні типи механізмів вивчаються в цьому курсі в розрізі застосування до них таких загальних методів. Щодо специфіки окремих механізмів, то вивчається вона в спеціальних курсах і для студента, озброєного загальними методами, не повинна являти собою принципіальних труднощів.

Така настанова в багатьох питаннях наперед визначає не тільки форму і послідовність викладу, а й зміст викладуваного матеріалу з погляду вибору з паралельно існуючих способів дослідження таких, які в дальших застосуваннях мають найбільшу універсальність і загальну значимість.

Наприклад, на перше місце висувається значення графічних способів аналізу порівняно з аналітичними, тим важливішими, що вони створюють широку базу для розгортання загальних методів динамічного дослідження машин, інтереси якого треба всемірно проводити при складанні підручника з кінематики механізмів.

План книги побудований цілком на стабільній програмі, затвердженій Комітетом по вищій технічній освіті.

Матеріал кожного розділу викладено примірно в тому обсязі, в якому його можна прочитати за відведену навчальним планом кількість годин.

Для глибшої проробки окремих питань читачам рекомендується спеціальна література.

Після кожного розділу подані контрольні запитання і задачі, що дають матеріал для домашньої роботи і самоконтролю і водночас можливість використання підручника в заочній системі навчання.

У тексті окремих розділів наведені докладні розв'язання характерних прикладів. Число їх обмежене наміченим обсягом книги і, розуміється, далеко недостатнє.

Наприкінці висловлюю щиру подяку професорові Я. Л. Геронімусу, що взяв на себе труд редагування цієї книжки і в процесі роботи дав ряд дуже цінних вказівок.

Також глибоко вдячний і доцентові Харківського електротехнічного інституту Г. І. Слєзнікову, який прочитав дану працю в рукописі і подав багато корисних порад і вказівок.

Д. Костюк

Харків, грудень 1936 р.

ВСТУП

§ 1. Зміст курсу прикладної механіки

Прикладна механіка, у вузькому розумінні цього слова („теорія механізмів"), розглядає прикладання загальних законів теоретичної механіки до вивчення руху спеціальних матеріальних систем, що мають застосування в техніці і називаються машинами та механізмами. Вона, як наука, має розв'язати два завдання: аналітичне і синтетичне.

Завдання аналітичне полягає в тому, щоб дослідити існуючі механізми з кінематичної точки зору, тобто дослідити путі, швидкості й прискорення окремих точок досліджуваного механізму.

Завдання синтетичне полягає в тому, щоб викласти методи побудови нових механізмів, які б відповідали даним умовам.

Останнє завдання не включене в загальному вигляді у даний курс теорії механізмів, не зважаючи на його важливість, бо ще недостатньо розроблене; розглянуто тільки деякі окремі випадки.

Курс прикладної механіки поділяється на три частини, подібно до курсу теоретичної механіки:

1) Кінематичний аналіз механізмів („Кінематика механізмів"), що охоплює вивчення траекторій всіх точок механізму, їх швидкостей і прискорень без урахування факторів (сил), що зумовлюють рух.

2) Статичний аналіз („Статика машин") охоплює визначення зусиль у ланках механізму в випадку рівноваги сил, що діють на цей механізм (без урахування сил інерції).

Окремим випадком зрівноважених сил є стан спокою механізму, тому при статичному аналізі визначають зусилля в ланках механізму, рахуючи, що механізм перебуває в спокої.

При статичному аналізі вивчаються також сили, що чинять шкідливий опір. У зв'язку з цими силами тут порушується питання про механічний коефіцієнт корисної дії і способи обчислення його.

3) Динамічний аналіз („Динаміка машин") розглядає визначення зусиль в ланках матеріальної системи при будьякій дії сил.

Цей рух супроводжується зміною живої сили всієї системи і називається незрівноваженим рухом.

В динамічному аналізі розглядаються сили інерції в частинах машин під час ходу і питання про додаткові напруги від них.

Сили інерції через частини машин передаються на фундамент, від чого походить його дрижання і неспокійний хід машини — вібрація машини. Тому в динаміці машин розглядаються питання про зрівноваження сил інерції і спосіб визначення необхідної маси фундаменту, щоб вібрація машин не виходила за дозволені межі.

До цієї ж частини стосуються і питання регулювання ходу з допомогою маховиків.

§ 2. Механічна система

Механічна система являє собою групу твердих тіл (інколи з участю гнучких, рідких і газоподібних тіл), з'єднаних між собою так, що кожне тіло (ланка) системи обмежує вільність руху інших тіл або ланок, з'єднаних з ними.

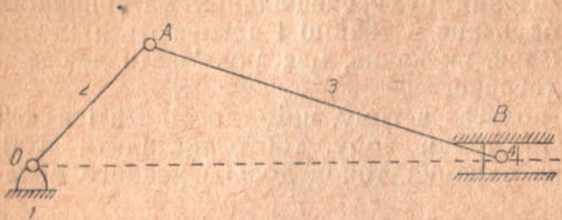


Рис. 1

Здебільшого зв'язок між тілами (ланками) системи такий виразний, що рух однієї ланки цілком визначає рух всіх інших ланок системи. Кажуть, що система має примушений рух.

Із схеми (рис. 1) видно, що рух ланки *2* (кривошипа) цілком визначає рух ланки *3* (шатуна) і рух повзуна або поршня *B* (ланка *4*).

§ 3. Класифікація механічних систем

Механічні системи за призначенням поділяються на три категорії:

а) системи для передачі і перетворення руху — *механізми*;

б) системи для передачі і зміни сил — *механічні прилади*;

в) системи для передачі і зміни руху й сил, або, як кажуть, для передачі і перетворення роботи — *машини*.

Інколи машини служать для перетворення інших видів енергії (теплової) в механічну роботу, або, навпаки, для перетворення механічної енергії в інші види енергії, наприклад, в електричну.

Тому машина ще характеризується ознакою перетворення енергії.

Треба відмітити, що механізм і машина мають рух з циклом, або, як кажуть, мають періодичний рух.

Системи, в рухові яких кожне тіло, виходячи з певного положення, через деякий проміжок часу знову повертається в попереднє положення, мають циклічний (періодичний) рух.

Механічні прилади не мають періодичного руху, чим також вони відмінні від механізму й машини.

Приклади механізмів

А. Кривошипно-шатунний механізм (рис. 1).

Він служить для перетворення обертального руху кривошипа *OA* (*2*) в обернено-поступний прямолінійний рух повзуна *B* (*4*). Якщо ведуча ланка є *B* (*4*), то обернено-поступний прямолінійний рух повзуна перетворюється в обертальний рух кривошипа і зв'язаного з ним вала *O*.

В. Еліптичний циркуль (еліпсограф) (рис. 2).

По двох взаємно перпендикулярних пазах x і y рухаються повзуни *1* і *2*. Лінійка *AB* шарнірно зв'язана з повзунами. Кожна точка лінійки *AB*, за винятком середньої точки *C* (між шарнірами *1* і *2*), опише еліпс. Точка *C* описує коло. Її можна пов'язати з точкою *O* ланкою *OC*; тоді обертальний рух кривошипа *OC* буде перетворений в плоский рух лінійки *AB*, а разом з тим коловий рух будьякої точки кривошипа *OC* — в еліптичний рух точок шатуна *AB*.

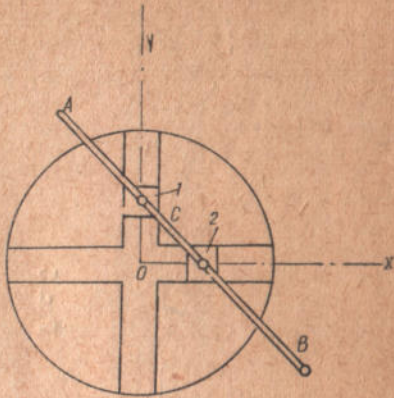


Рис. 2

Приклади механічних приладів

А. Ваги Квінтенца (десяткові) (рис. 3).

Вага гирки *P* передається через систему важелів і зрівноважує тягар $Q = 10\ P$.

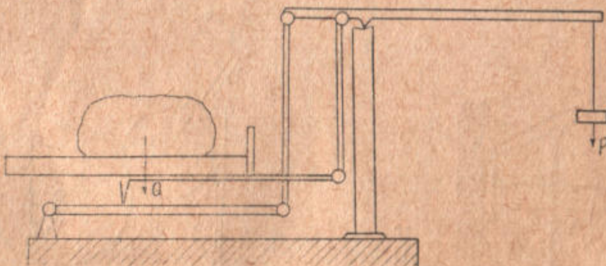


Рис. 3

В. Ручний важільний прес (рис. 4).

Сила *P*, що передається з допомогою важелів, перетворюється в *Q*, яка в кілька разів більша за *P*.

Приклади машин та їх класифікація

Машини діляться на три категорії.

А. Машини-двигуни (рис. 5).

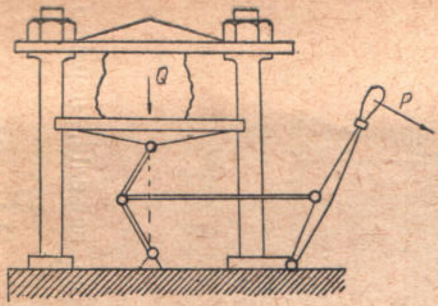


Рис. 4

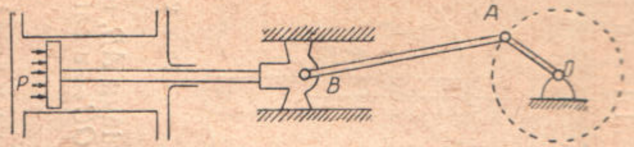
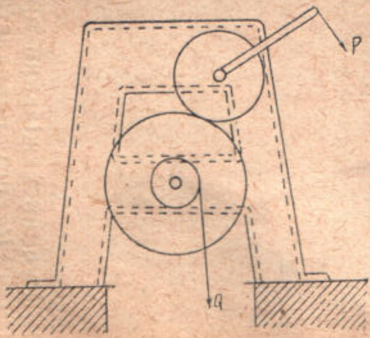


Рис. 5



Рис, 6

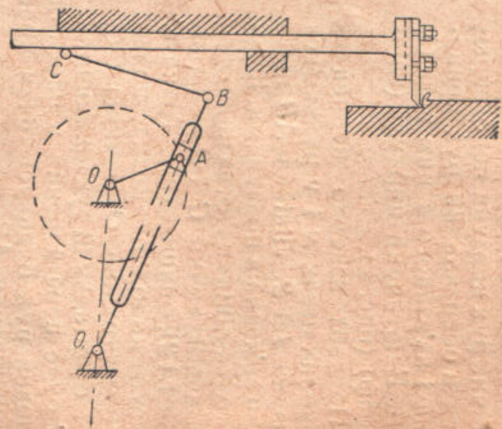


Рис. 7

Характерні ознаки машин-двигунів такі:

a) вони мають самостійний рух;

b) як рушійні сили в них використовуються різноманітні сили природи;

c) істотним для них є рід рушійних сил, в зв'язку з чим машини-двигуни класифікуються на такі види:

Парові, які поділяються на: 1) поршневі і 2) турбінні.

Газові, які теж поділяються на: 1) поршневі і 2) турбінні.

Електричні.

Пневматичні.

Гідравлічні.

Живі (кінні приводи).

B. Машини-знаряддя.

Машини-знаряддя відмінні від машин-двигунів тим, що вони:

a) не мають самостійного руху,

b) безпосередньо виконують корисну роботу.

Як приклад машин-знарядь можна навести ручну лебідку (рис. 6) і поперечно-стругальний верстат — шепінг (рис. 7).

C. Приводи й трансмісії.

Вони посідають проміжне місце між машинами-двигунами та машинами-знаряддями і служать для передачі роботи.

До цієї категорії відносяться зубчасті, пасові та червячні передачі і ін.

§ 4. Контрольні запитання

1. Які завдання розв'язуються в прикладній механіці?
2. На які частини поділяють курс прикладної механіки?
3. Що вивчається в кінематиці механізмів, статиці та динаміці машин?
4. Що таке механічна система?
5. Що таке механізм, механічний прилад, машина?
6. Аналітичні ваги — механізм чи механічний прилад?
7. Похила площина й конвеєр — механізм чи механічний прилад?

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ

§ 5. Структура механізмів. Ланки та кінематичні пари

Механізм складається з окремих елементів, що називаються ланками. Елементи, які складають механізм, називаються ланками в тому випадку, коли вони рухаються один відносно одного.

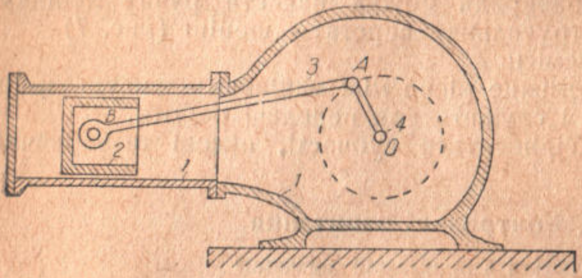


Рис. 8

Запам'ятаємо, що закріплена ланка називається стояком.

На схемі двигуна внутрішнього згорання (рис. 8): *1'* — картер, *1*—циліндр, *4*—колінчастий вал, *2* — поршень; *3* — шатун; *OA* — кривошип колінчастого вала.

В цьому механізмі стояком є циліндр і картер, бо вони прикріплені до фундаменту і взаємно скріплені (відносний рух виключений).

Деталі *1'* і *1* складають одну ланку. Ланка *2* — поршень — приймає на себе силу, що діє на механізм і називається приймачем. Ланка *4* — колінчастий вал — віддає роботу машині-знаряддю. Ланка *3* — шатун — передавальна ланка. Таким чином, ми маємо чотириланковий механізм.

В механізмі рух однієї ланки цілком залежить від руху інших. Ця залежність така тісна, що положення однієї точки рухомої ланки повністю визначає положення всіх інших точок як цієї ланки, так і всіх інших.

Отже, рух елементів механізму не довільний, а кожна точка його описує траєкторію певної геометричної форми, чому сприяє зв'язок між елементами (ланками).

Дві ланки, з'єднані так, що вони мають певний рух одна відносно одної, звуться *кінематичною парою*.

Кінематичні пари бувають:

а) плоскі, ланки яких мають плоский відносний рух;

b) просторові пари, ланки яких мають просторовий відносний рух.

Кінематичні пари поділяються також на:

A. Нижчі пари, ланки яких дотикаються цілими поверхнями.

B. Вищі пари, ланки яких дотикаються по лінії або в точці.

Нижчі пари своєю чергою поділяються на:

a) обертальні, ланки яких мають тільки обертальний відносний рух (рисунки 9, 10, 11);

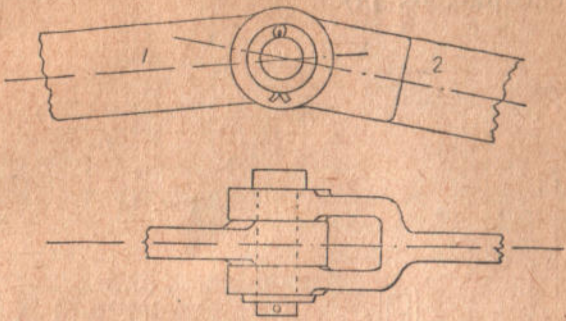


Рис. 9

b) поступні, ланки яких мають тільки відносний поступний рух (рис. 12, 13 і 14 і на рис. 1 пара *1—4*);

c) гвинтові, ланки яких мають відносний гвинтовий рух (рис. 15).

Перші два види являють собою окремий випадок гвинтових пар, коли крок гвинтової лінії рівний нулеві і нескінченості.

Відмінність у характері дотикання в нижчих і вищих пар зумовлює відмінність у характері відносного руху ланок. В нижчих парах обидві ланки рівноправні по суті відносного руху;

Рис. 10

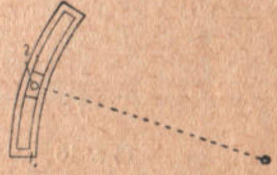


Рис. 11

тобто в нижчих парах траєкторії, які описують точки дотику ланок, не залежать від того, яку ланку буде закріплено, а яка рухатиметься. Ця властивість називається оборотністю. Наприклад, довільна точка дотику цапфи з підшипником (рис. 10) описує коло, незалежно від того, що рухатиметься — цапфа чи підшипник.

Вищі пари такої властивості не мають. В цьому можна переконатися на такому прикладі (рис. 16). Візьмемо колесо з рейкою. Коли закріпимо ланку *A* — рейку, тобто зробимо її стійкою, то при коченні колеса по рейці довільна точка, яка лежить на зовнішній поверхні обода колеса (точки дотикання), опише циклоїду.

Коли закріпимо колесо і по ньому котитимемо рейку, то точка *C* рейки опише евольвенту.

Крім поданої вище класифікації, пари поділяються на:

a) незамкнені (відкриті) (рис. 12);

b) замкнені (рис. 13, 14).

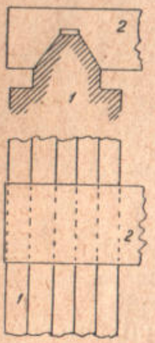


Рис. 12

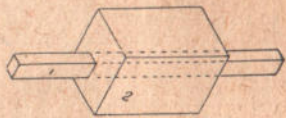


Рис. 13

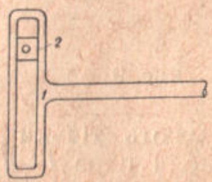


Рис. 14

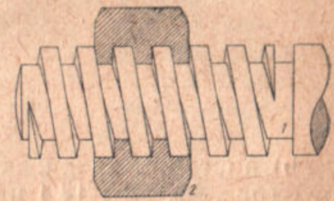


Рис. 15

Незамкнені пари можуть мати силове замкнення (силою ваги, пружинами і ін.). Приміром, супорт *2*, зображений на рис. 12, завжди дотикається до паралелей, бо його притискує сила ваги; тарілка клапана (рис. 61) завжди дотикається до ролика, бо її притискує сила пружини і т. д.

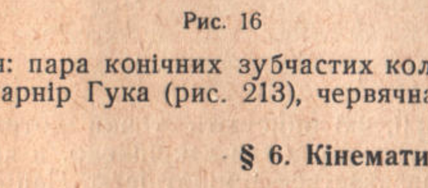


Рис. 16

Всі розглянені вище пари, крім гвинтової (рис. 15), належать до плоских пар. Гвинтова пара є прикладом просторових пар, до яких залічуються: пара конічних зубчастих коліс (рис. 211), сферичний шарнір, шарнір Гука (рис. 213), червячна пара і т. д.

§ 6. Кінематичний ланцюг

Три і більше взаємно з'єднаних окремих кінематичних пар називаються кінематичним ланцюгом.

Кінематичні ланцюги поділяються на такі:

1) Прості ланцюги, в яких ланки пар з'єднані між собою тільки в послідовному порядку (рис. 17 і 18).

Відкритий ланцюг — це ланцюг, крайні ланки якого не з'єднані одна з одною (рис. 17).

В замкненому ланцюгу крайні ланки з'єднані одна з одною (рис. 18). В простому замкненому ланцюгу число пар дорівнює числу ланок.

2) Складні ланцюги, в яких, крім послідовно з'єднаних ланок є ще бокові розгалуження (рис. 19 і 20).

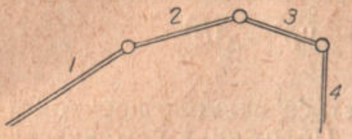


Рис. 17

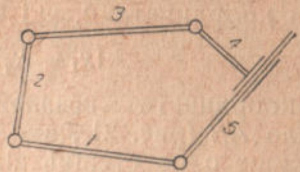


Рис. 18

В складному замкненому кінематичному ланцюгу число пар більше числа ланок. (На рис. 19 — сім ланок, але вісім пар — всі обертальні; на рис. 19 — вісім ланок, але дев'ять пар, з них одна поступна, а вісім обертальних).

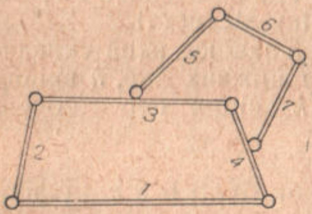


Рис. 19

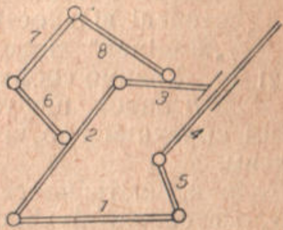


Рис. 20

§ 7. Степені вільності кінематичного ланцюга

Для визначення положення твердого тіла в просторі треба знати положення трьох якихнебудь його точок, що не лежать на одній прямій. Три точки визначаються дев'ятьма координатами, зв'язаними між собою трьома рівняннями типу:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \overline{AB}^2, \qquad (1)$$

де x_1, y_1, z_1 — координати точки A, а x_2, y_2, z_2 — координати точки B. Рівняння типу (1) виражає умову зв'язку точок A і B. Таким чином, в даному випадку маємо 3 рівняння з 9 невідомими.

Для визначення їх не вистачає шести рівнянь, тобто, не вистачає шести умов зв'язку. Число умов зв'язку, якого не вистачає для того, щоб положення даної системи цілком визначилось, зветься числом степенів вільності системи. Звідси робимо висновок, що вільне тверде тіло має 6 степенів вільності (положення його визначається шістьма незалежними координатами).

Можна дати ще й таке визначення: число степенів вільності твердого тіла це — число його можливих переміщень. Вільне тверде тіло може обертатися навколо трьох координатних осей і може рухатись поступним рухом вздовж цих осей. Таким чином, воно має шість можливих переміщень.

Коли тверде тіло може рухатись лише паралельно нерухомій площині (має плоский рух), то воно має три степені вільності, бо положення його визначається положенням двох точок — чотирма координатами, які зв'язані лише одним рівнянням:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \overline{AB}^2 \qquad (2)$$

(три координати — незалежні).

Тіло AB (рис. 21), яке обертається навколо нерухомої осі A, має лише один степінь вільності. Положення його визначається однією координатою — кутом повороту.

Рис. 21

Повзун, який рухається в нерухомому прямолінійному або дуговому пазу, теж має один степінь вільності. Звідси робимо висновок, що нижча плоска пара „віднімає" два степені вільності.

Такими ж міркуваннями виведемо, що й вища пара з чистим коченням або ковзанням „віднімає" теж два степені вільності, а вища пара з коченням і ковзанням „віднімає" лише один степінь вільності.

Уявимо собі кінематичний ланцюг, який складається з n ланок, що утворюють f нижчих пар, h вищих пар з чистим коченням або ковзанням і k вищих пар з коченням і ковзанням.

Всі ланки мають плоский рух.

Число степенів вільності всіх ланок було б $3\,n$, коли б вони не були зв'язані між собою.

Але f нижчих пар відібрали $2\,f$ степені вільності
h вищих „ „ $2\,h$ „ „
і k „ „ „ k „ „

Таким чином, число степенів вільності кінематичного ланцюга, що має плоский рух

$$m = 3n - 2(f + h) - k. \qquad (3)$$

§ 8. Механізм — окремий випадок кінематичного ланцюга

За визначенням Рело механізм є кінематичний ланцюг, „поставлений" на якунебудь ланку, тобто такий, в якому одна ланка закріплена (нерухома).

Закріплена ланка зветься стояком. З другого боку, в механізмі всі ланки мають примушений рух; це значить, що рух однієї ланки цілком визначає рух всіх інших (§ 2). Звідси випливає, що механізм має один степінь вільності.

Закріплюючи в кінематичному ланцюгу одну ланку, ми віднімаємо від нього три степені вільності (у випадку плоского руху). Формула (3) для такого випадку матиме вигляд:

$$m = 3n - 2(f + h) - k - 3,$$

або $$m = 3(n - 1) - 2(f + h) - k \text{ (формула Грюблера).} \qquad (4)$$

Коли визначене за цією формулою $m=0$, це буде нерухома система (ферма); коли $m=1$, це буде механізм, коли $m>1$, матимемо систему з кількома ступенями вільності (система з неозначеним рухом).

Необхідно відмітити, що формула Грюблера не завжди дає вірний результат. При аналізі за цією структурною формулою механізмів із „зайвими“ ланками[1] (наприклад, еліпсограф з кривошипом OC, рис. 2) ми одержимо $m=0$.

В дальшому параграфі ми розглянемо інші випадки, не підпорядковані структурній формулі Грюблера.

§ 9. Мертві точки

У кожному механізмі ланки поділяються на ведучі і ведені.

Ведучими ланками називаються такі, які сприймають на себе зусилля, що рухають даний механізм. Під час руху механізму може утворитися таке положення, коли дальший рух стає неможливим. Такі положення називаються мертвими положеннями.

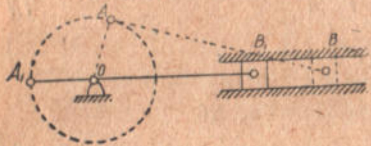


Рис. 22

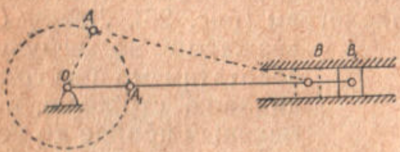


Рис. 23

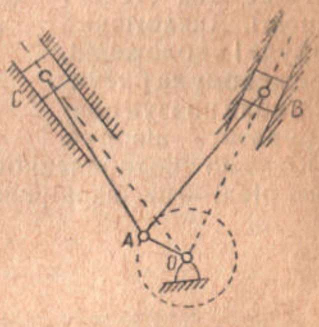


Рис. 24

Мертві положення механізму характеризуються тим, що діюча сила руху зрівноважується реакціями опорів, і руху ніякого не буває.

Розглянемо мертві положення кривошипно-шатунного механізму (рис. 22, 23). Якщо ведучою ланкою буде OA, то ніякі мертві положення не з'являться. При ведучій ланці — повзуні B — за один оберт механізм двічі попадає в мертві положення: коли кривошип OA і шатун AB витягуються в одну пряму (рис. 23) або накладаються один на одного (рис. 22).

Вивести механізм із мертвого положення можна двома способами:

1) Для виведення з мертвого положення використовуються маси (маховик), закріплені на одній з ланок. Ці маси, рухаючись по інерції, виводять механізм із мертвого положення.

[1] „Зайвими“ ланками називаються такі ланки, які не порушують кінематики всіх інших ланок, а вводяться у механізм для зручності користування ним (кривошип еліпсографа) або для розвантаження інших ланок (складний паралелограм).

2) Коли встановлення маховика небажане, механізм виводять з мертвого положення приєднанням до того ж кривошипа (рис. 24) ще одного шатуна, мертві положення якого не збігаються з мертвими положеннями першого шатуна; або застосовують кривошипно-шатунні механізми з причіпними шатунами, зіркоподібні мотори і ін.

Рис. 25

Треба відмітити одну особливість механізму в мертвому положенні. Коли повзун почне рухатись праворуч (рис. 22), то кривошип OA може обертатись і за годинниковою стрілкою, і проти, тобто має непевний рух: механізм в даному стані має два степені вільності. Аналогічний стан буде і в положенні, зображеному на рисунку 23, коли повзун почне рухатись ліворуч.

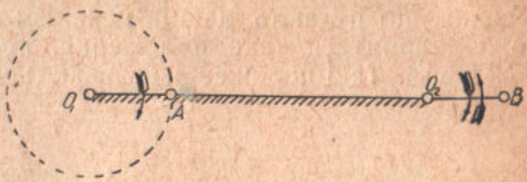


Рис. 26

Візьмемо чотириланковий механізм, в якому протилежні ланки рівні — це шарнірний паралелограм (рис. 25). Ланку O_1A вважаємо за ведучу і обертатимемо її за годинниковою стрілкою, поки механізм прийде до мертвого положення (рис. 26). Ланка O_2B при цьому теж обертатиметься за годинниковою стрілкою. При дальшому повертанні ланки O_1A ланка O_2B може обертатись або за годинниковою стрілкою (механізм лишається паралелограмом, див. рис. 27), або проти годинникової стрілки (механізм перетворюється в антипаралелограм, див. рис. 28).

Рис. 27

Звідси робимо висновок: коли три послідовні шарніри механізму розміщаються по одній прямій, то механізм одержує зайвий степінь вільності.

Рис. 28

Цим пояснюється, що механізм, який складається з двох фрикційних коліс (рис. 29), суперечить формулі (4). Ясно, що даний механізм має один степінь вільності, бо при повертанні колеса A

на певний кут і колесо B повернеться теж на певний кут (ковзання немає).

За формулою ж (4) одержуємо:

$$m = 3(3-1) - 2(2+1) = 0,$$

тобто маємо цупку (нерухому) систему.

Але, механізм фрикційних коліс можна теоретично розглядати як тришарнірний механізм, у якому шарнір C має нескінченно мале переміщення, після чого знову займає своє положення на лінії AB (рис. 30). Звідси випливає, що він завжди має один зайвий степінь вільності.

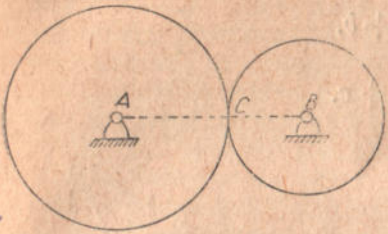


Рис. 29

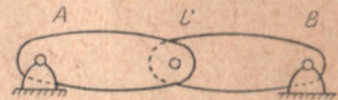


Рис. 30

§ 10. Чотириланковий механізм — основний тип механізму з нижчими парами

Найпростішим із шарнірних механізмів є чотириланковий механізм, бо три ланки, з'єднані шарнірами (рис. 31), дають цупку систему, а п'ять ланок утворять систему з числом степенів вільності, рівним двом, тобто вони не забезпечують примушеності рухів (рис. 32).

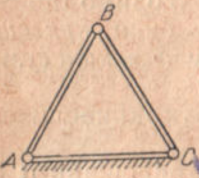


Рис. 31

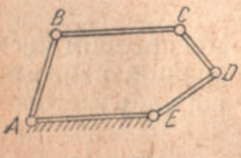


Рис. 32

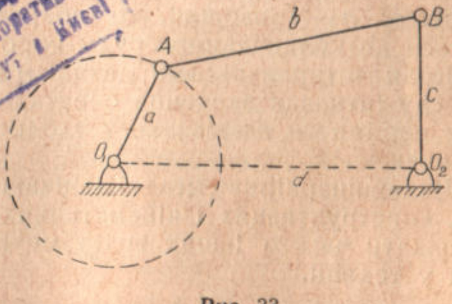


Рис. 33

Коли в чотириланковому механізмі яканебудь ланка може робити повний оберт, то вона називається кривошипом.

Ланка, яка здійснює коливальний рух, називається коромислом, а третя рухома ланка називається шатуном.

На рисунку 33 маємо: a — кривошип, b — шатун, c — коромисло, d — стояк.

Для того, щоб найменша ланка a була кривошипом, треба, щоб чотириланковий механізм мав два такі мертві положення, які зображені на рисунках 34 і 35.

З рисунку 34 маємо

$$d < c + (b - a) \qquad (5)$$

і

$$c < d + (b - a). \qquad (6)$$

Звідки:

$$d + a < c + b \qquad (7)$$

і

$$c + a < d + b. \qquad (8)$$

З рисунку 35 маємо:

$$a + b < d + c. \qquad (9)$$

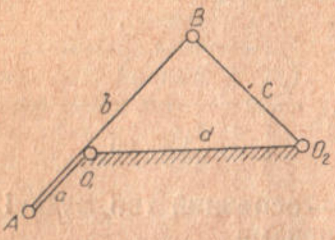


Рис. 34

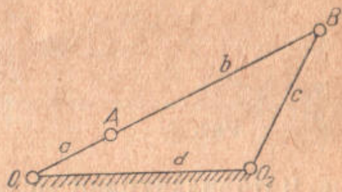


Рис. 35

Якщо прийняти, що в даному чотириланковому механізмі ланка b найдовша, нерівності (7) і (8) будуть додержані, коли буде додержано нерівність (9). Отже, приходимо до такого висновку: *для того щоб найменша ланка була кривошипом, треба, щоб сума її з найбільшою ланкою була менша суми двох інших* (теорема Грасгофа).

Якщо a — кривошип, то обертальний рух кривошипа зводиться до коливального руху коромисла c.

Коли чотириланковий механізм має два кривошипи a і c, то він служить для зведення обертального руху до обертального. Два коромисла дають змогу зводити коливальні рухи до коливальних.

Чотиришарнірний механізм цікавий тим, що способом нескладних конструктивних і кінематичних перетворень з нього можна одержати багато інших видів механізмів, широко застосовуваних у техніці.

§ 11. Методи перетворення механізмів

Ознайомимося з методами перетворення механізмів на конкретних прикладах перетворення чотиришарнірного механізму.

А. Метод зміни довжини ланок.

1) В чотиришарнірному механізмі (рис. 33) збільшуємо довжину коромисла c. Коромисло c має коливальний рух, тому

пару $c-d$ конструктивно можна змінити на форму нерухомої дугової куліси з радіусом дуги ρ з повзуном B (рис. 36).

Якщо $\rho = c$, то механізм, зображений на рисунку 36, нічим кінематично не відрізнятиметься від механізму, зображеного на рисунку 33. Різниця буде лише конструктивна.

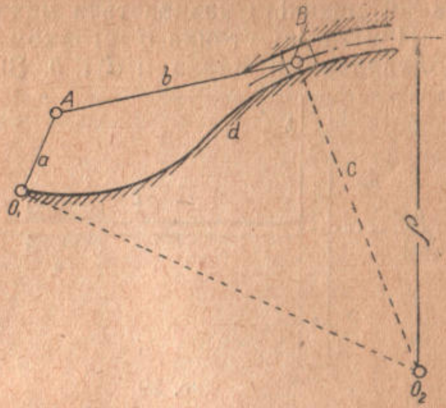


Рис. 36

Потім збільшимо ρ до ∞ і цим самим замінимо обертальну пару $c-d$ поступною. Одержимо нецентральний кривошипно-шатунний механізм (рис. 37), в якого лінія руху повзуна не переходить через вісь вала O_1 (дезаксіальний кривошипно-шатунний механізм). Нецентральність характеризується величиною перпендикуляра h, опущеного з точки O_1 на лінію руху повзуна. Ця величина h називається дезаксіалом. Коли $h = 0$, тобто коли лінія руху повзуна пройде через вал O_1, то одержимо так званий нормальний кривошипно-шатунний механізм (рис. 38).

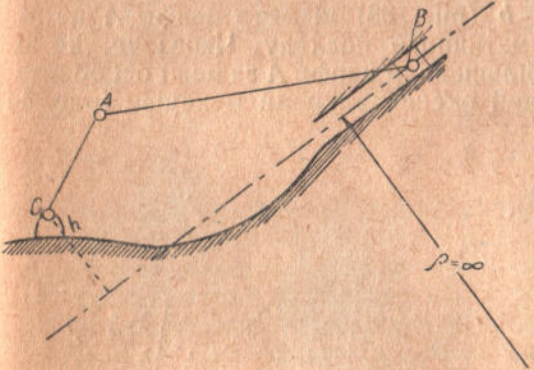


Рис. 37

2) Введемо другу поступну пару в кривошипно-шатунний механізм. Для цього збільшимо шатун b до ∞; цим самим кут φ зведемо до нуля. Шатун b конструктивно змінюється в повзун, а повзун c — в кулісу. Одержимо кривошипно-шатунний механізм з нескінченно довгим шатуном, що зветься кулісою Вольфа (куліса з прямолінійним поступним рухом, див. рис. 39).

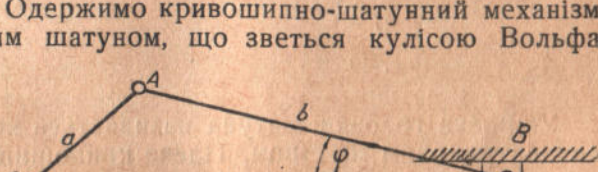


Рис. 38

В. Метод заміни стояків.

Коли стояк d чотиришарнірного механізму (рис. 33) замінити стояком b, то ми не внесемо ніяких особливих змін у механізм, бо умову Грасгофа буде додержано, і a буде кривошипом, c — коромислом, а тільки ланка d стане вже шатуном. Коли зробимо кривошип стояком (рис. 40), тоді шатун b і стояк d стануть кривошипами. Такий механізм називається механізмом подвійного кривошипа.

При заміні стояка d стояком c одержимо механізм з двома коливальними ланками d і b. Він називається механізмом подвійного повідка — коромисла (рис. 41).

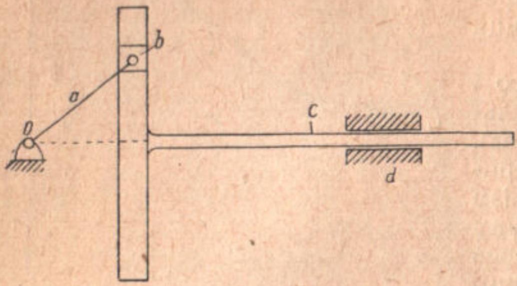


Рис. 39

Коли кривошипно-шатунний механізм (рис. 38) поставимо на кривошип a, тобто кривошип зробимо стояком і видовжимо стояк a так, щоб він був більший за ланку b, то матимемо механізм коливальної куліси, яка широко застосовується в поперечно-стругальних верстатах — шепінгах (рис. 42).

Коли $a < b$, то утворюється механізм обертальної куліси (механізм Вітворта, рис. 43).

С. Метод поширення цапф.

У шарнірній парі $a - b$ (рис. 38) діаметр цапфи A не має ніякого значення з кінематичного погляду. Через те, не змінюючи характера руху збільшенням цапфи A за межі осі обертання O, одержимо так званий ексцентриковий механізм (рис. 44).

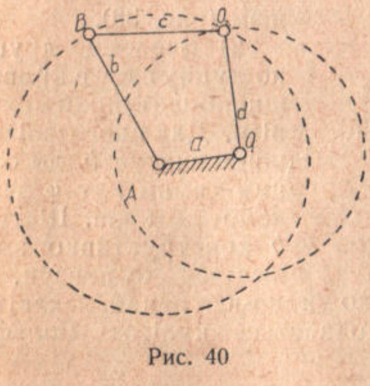


Рис. 40

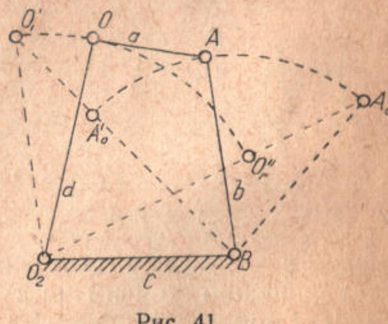


Рис. 41

Уширена головка шатуна називається хомутом *1*, а ланки b — ексцентриковим шатуном. Плече кривошипа $OA = a$ називається ексцентриситетом. З механічного погляду механізм ексцентрика гірший кривошипного, бо на поверхні хомута виникає більше тертя; але він має також і перевагу над кривошипом тим, що його можна закріпити на валу з будьяким (часто дуже малим) ексцентриситетом; це дає можливість здійснити рух повзуна теж з будьякими амплітудами. Збільшенням цафп O і B можна одержати ряд інших механізмів.

D. Метод заміни пар.

Цей метод полягає в тому, що, виключивши одну з ланок, можна дві нижчі замінити однією вищою парою або, навпаки: вводячи нову ланку, можна вищу пару замінити двома нижчими.

Виготуємо кривошип у вигляді ексцентрика, повзун c замінимо стрижнем, що проходитиме через втулку d, шатун виклю-

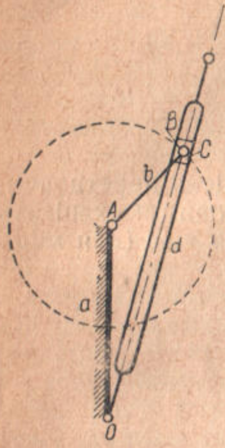


Рис. 42

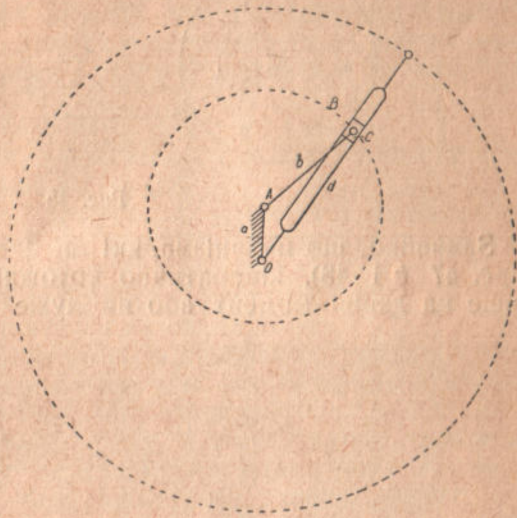


Рис. 43

чимо; цим ми приведемо стрижень у безпосереднє дотикання з ексцентриком (рис. 45).

В результаті такої заміни стрижень і ексцентрик дадуть вищу пару (пружина для силового замикання) замість двох нижчих. Такий механізм називатиметься кулачковим.

Стрижень c закінчують роликом (рис. 46), який сам одержує другий степінь вільності (обертання навколо своєї осі), не змінюючи певного руху інших.

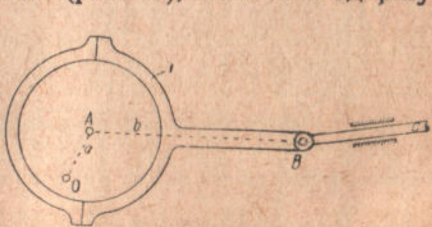


Рис. 44

Кулачковий ексцентрик еквівалентний кривошипно-шатунному механізмові, в якого радіус кривошипа рівний ексцентриситетові a, а довжина шатуна рівна сумі радіусів ексцентрика й ролика.

Зворотним способом можна перетворити механізм з вищою парою в механізм з нижчими парами додаванням нової ланки. Для прикладу візьмемо кулачковий ексцентрик, профіль якого викреслений трьома дугами (рис. 47a). Ведена ланка кінчається тарілкою.

В результаті перетворення матимемо кулісу Вольфа (рис. 47b).

Таким же способом триланковий механізм, утворений парою зубчастих коліс, можна перетворити в чотиришарнірний (O_1ABO_2), з'єднуючи центри кривини профілів зубців між собою і з центрами обертання коліс (рис. 48).

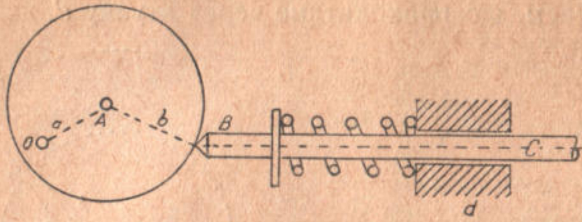


Рис. 45

Звичайно, що механізми, які ми одержали після перетворень (рис. 47 *b* і 48), кінематично тотожні початковим механізмам лише на даний момент або на дуже короткий час (для меха-

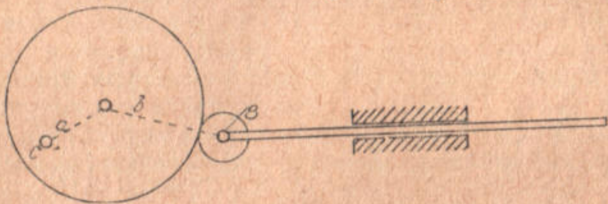


Рис. 46

нізму, зображеного на рис. 47*a* і 47*b*, — на час, поки кулак дотикається до площини дугою при вершині).

Наведеними прикладами не вичерпуються можливості одержання нових механізмів перетворенням чотиришарнірного меха-

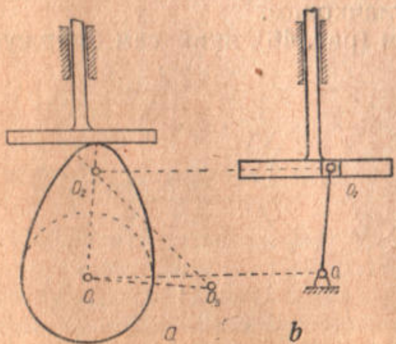


Рис. 47

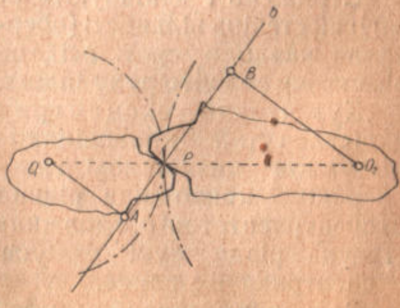


Рис. 48

нізму. Способом аналогічних перетворень з нього можна одержати еліпсограф, муфту Ольдгема і ряд інших механізмів [1].

[1] *Д. Зернов.* Прикладная механика. Ленинград 1925; проф. *В. В. Добровольский.* Динамика кинематической цепи, часть 1, Москва, 1930.

§ 12. Поняття про класифікацію механізмів

В арсеналі сучасної техніки надзвичайно багато механізмів. Для систематичного вивчення їх всі ці механізми треба об'єднати в групи з тим, щоб кожна група мала свої певні характерні ознаки, при чому ознаки ці повинні бути не поверхові, а глибоко характеризувати структурну суть механізмів. Це дасть можливість виробити для кожної групи специфічні й найпростіші методи вивчення, допоможе розробити і удосконалити загальні методи дослідження і відкриє шляхи для наукової розробки нових механізмів.

Таке об'єднання в групи зветься класифікацією.

Спроби класифікувати механізми були від самого початку існування теорії механізмів, як науки.

За вказівками Monge, професора Паризької політехнічної школи, Hâchette склав першу програму з теорії механізмів, в якій в основу класифікації механізмів покладено „перетворення рухів" п'ятьох родів: прямолінійного, прямолінійно-зворотного, колового, колового-зворотного і криволінійного.

Lanz et Bétancourt склали за цією програмою книжку [1], тому цю класифікацію деякі автори вважають за класифікацію Монжа, а інші — за класифікацію Ланца і Бетанкура.

Недолік цієї класифікації в тому, що структурно різні механізми часто служать для перетворення одних і тих же рухів, тому попадають в один клас, наприклад, конічні зубчасті або фрикційні колеса і шарнір Гука, або циліндричні колеса і пасова передача і т. д.

Вілліс в основу класифікації поклав перетворення швидкостей і всі механізми поділив на три класи:

1) Напрям руху ведучої і веденої ланки постійний або змінюється водночас. Відношення величин швидкостей стале. Приклад: круглі колеса, червячна передача, пасова передача з циліндричними шківами.

2) Напрям руху ведучої і веденої ланки сталий або змінюється водночас. Відношення величин швидкостей змінне. Приклад: еліптичні колеса, пасова передача з конічними барабанами і т. д.

3) Співвідношення між напрямами руху ведучої і веденої ланки змінне. Відношення швидкостей стале або змінне. Приклад: кулачні механізми, кривошипно-шатунні механізми, кривошипно-кулісні і т. д.

Кожен клас своєю чергою поділено на групи, залежно від способу передачі руху:

a) передача руху безпосереднім стиканням ланок;

b) передача руху від ведучої до веденої ланки з допомогою проміжних твердих ланок;

---

[1] *Lanz et Bétancourt.* 1808 „Курс побудови машин". Essae sur la composition des machines.

ПОМИЛКА *

Стр.	Рядок	Надруковано	Повинно бути
24	4—3 зн.	Кинетостатистика	Кинетостатика

* З вини літредактора

№ 1157/1336

c) передача руху з допомогою проміжних гнучких або рідких ланок.

Класифікації Вілліса і досі додержується дехто з американських авторів [1], а також і радянських з деякою модифікацією.

Як видно з наведених прикладів, ця класифікація має ті самі недоліки, що й попередня.

Рело, Бурместер, Ассур будували класифікацію на суворо науковій базі, виходячи з структури механізмів. Але ці класифікації мають абстрактний характер і незручні для практичного використання.

Зупинимося докладніше на одній з них — на класифікації проф. Л. Ассура [2], бо вона на нашу думку, в майбутньому буде базою і для розвинення та удосконалення загальних методів дослідження механізмів [3], і для наукового побудування нових механізмів.

Л. Ассур в своїй класифікації виходив із способу утворення нових механізмів з уже існуючих приєднанням до них нових ланок.

Рис. 49

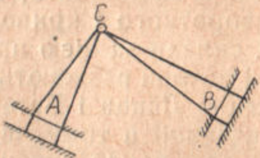


Рис. 50

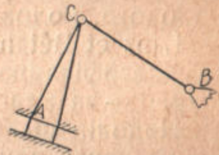


Рис. 51

Спосіб цей такий простий, що, навіть, важко, як каже автор, сказати, хто його перший придумав.

Приєднувані ланки можуть утворювати різні групи.

Найпростіша група — це двоповідкова, або діада Сільвестра (рис. 49). Вона складається з двох ланок AC і BC, які своїми кінцями A і B приєднуються до двох точок існуючого механізму. Приєднання це може бути здійснене з допомогою шарнірів, як показано на рисунку 49, або з допомогою прямолінійних пар ковзання (рис. 50 і 51). Самі ланки AC і BC можуть утворювати і обертальну пару (рис. 49) і прямолінійну пару ковзання (рис. 52 і 53).

В дальшому для спрощення рисунків вважатимемо всі пари шарнірними, як це показано на рисунку 49. Коли замінити в двоповідковій групі один повідок ланкою з двома повідками, то матимемо триповідкову групу (рис. 54), де ланка BC замінена лан-

[1] *S. W. Robinson.* Principles of mechanism; introduction.

[2] *Л. Ассур.* Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. „Изв. СПБ Политехнического Института". Вип. 1 і 2 1913.

[3] В цьому напрямі вже є дві видатні праці *Н. Г. Бруєвіча:* „Кинетостатистика плоских механизмов" і „Применение векторных уравнений к кинематике плоских механизмов". „Труды Военно-Воздушной Академии РККА им. Жуковского". Сборник № 10, 1935.

кою CDE з двома повідками EF і DG). Дана група приєднується до існуючого механізму вже в трьох точках — A, F і G.

На рисунках 55 і 56 таким же методом „розвитку повідка" одержані чотириповідкова і п'ятиповідкова групи.

Коли розглядати групу, зображену на рисунку 56 окремо від існуючого механізму, то її можна охарактеризувати, як *відкритий простий* триланковий ланцюг з п'ятьма повідками.

Уявимо собі, що повідки прикріплені до нерухомих точок A, B, C, D і E; тоді ланцюг перетворюється в цупку систему

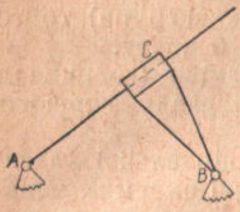


Рис. 52

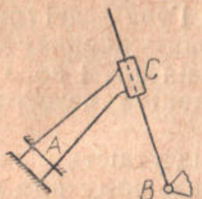


Рис. 53

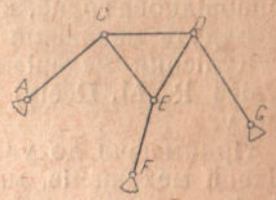


Рис. 54

з нульовим степенем вільності (статично означуване з'єднання). Такий ланцюг називатимемо *нормальним*.

Зрозуміло, що для утворення нових механізмів з існуючого методом нашаровування нових ланцюгів, придатні лише нормальні ланцюги, в противному разі утвориться не механізм, а система з неозначеним рухом.

Ассур відносить до першого класу всі механізми, які можна утворити з простого кривошипа способом послідовного при-

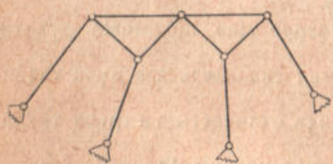


Рис. 55

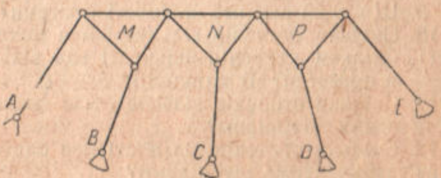


Рис. 56

кріплення *одних тільки простих відкритих* многоповідкових ланцюгів *нормального* типу, абож, що те ж саме, — механізми, які можна спростити до простого кривошипа способом послідовного відкидання таких ланцюгів.

До другого класу він відносить механізми, які можна утворити з простого кривошипа послідовним прикріпленням одних тільки *складних* або *простих і складних відкритих* ланцюгів нормального типу.

В утворенні механізмів третього класу беруть участь *закриті* ланцюги.

Механізми кожного класу поділяються на порядки.

Так, механізми першого класу бувають першого, другого і т. д. порядків залежно від найбільш складної групи, яка входить до його складу. Порядок механізму першого класу визначається *числом повідків* найбільш складного многоповідкового ланцюга, що входить до складу механізму.

Переважна більшість існуючих механізмів утворена нашаруванням Сільвестрових діад, тобто належить до другого порядку механізмів першого класу.

Найбільш складні механізми утворені приєднанням однієї або кількох триповідкових груп (куліса Стефенсона — одна триповідкова група, куліса Гуча — дві триповідкові групи), тобто це будуть механізми третього порядку першого класу.

Кулісний механізм Гейзінгера і його видозміни (наприклад куліса R. M. Deely) є механізм четвертого порядку першого класу.

Приймаючи до уваги відсутність цілком раціональної класифікації механізмів, ми в дальшому при вивченні окремих механізмів додержуватимемося розподілу їх за кінематичними ознаками і конструктивним виконанням та призначенням їх.

§ 13. Контрольні запитання і задачі

1. Що таке кінематична пара?
2. Як класифікуються пари?
3. Яка властивість нижчих пар?
4. Що таке силові замикання пар?
5. Яку пару являє дугова куліса? Прямолінійна куліса?
6. Яку пару являють собою профілі зубців зубчастих коліс?
7. Що таке кінематичний ланцюг. Відкритий, замкнутий? Простий? Складний?
8. Чим відрізняється механізм від кінематичного ланцюга?
9. Що таке степінь вільності системи?
10. Скільки степенів вільності має механізм?
11. Скільки степенів вільності має вільне тверде тіло, що може рухатися в просторі? В площині?
12. Скільки степенів вільності має система, яка складається з двох твердих тіл, зв'язаних шарніром?
13. Скільки степенів вільності має система, яка складається з трьох твердих тіл, зв'язаних двома шарнірами?
14. Яка найменша кількість ланок у шарнірному механізмі?
15. Що таке мертве положення механізму?
16. Яку властивість набуває механізм у мертвому положенні?
17. Як перетворити шарнірний чотириланковий механізм у кривошипно-шатунний механізм, а також у ексцентрик?
18. Як перетворити кривошипно-шатунний механізм у кулісу Вольфа, а також у механізм Вітворта?
19. Як перетворити кулачний механізм у чотириланковий механізм з нижчими парами?
20. Те саме для механізму зубчастих коліс?
21. Які існують методи перетворення механізмів?
22. Дати кортеньке формулювання кожного методу?

Задачі

1. Скільки і які кінематичні пари має механізм куліси (рис. 42)? Визначити число степенів вільності куліси.
2. Визначити число степенів вільності механізму зубчастих коліс (рис. 48).
3. Визначити число степенів вільності в механізмові, що на рис. 57.

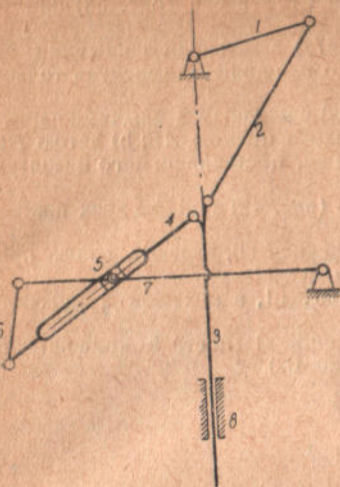


Рис. 57

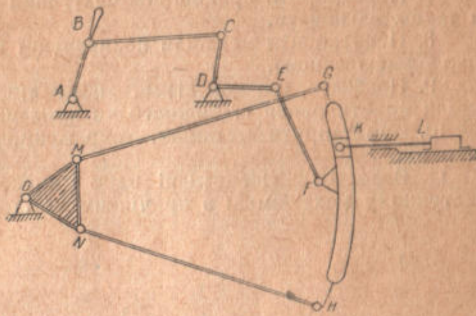


Рис. 58

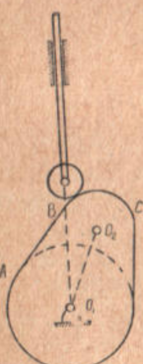


Рис. 59

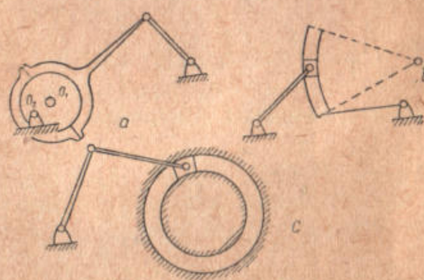


Рис. 60

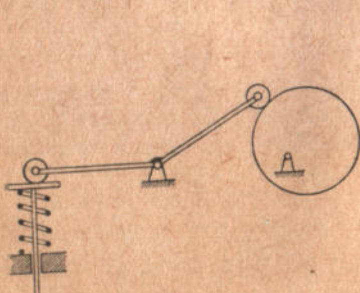


Рис. 61

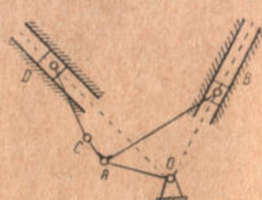


Рис. 62

4. Визначити число степенів вільності куліси Стефенсона (рис. 58) при закріпленій ланці AB і при вільній.

5. Перетворити кулачковий механізм (рис. 47а) в механізм з нижчими парами для моменту, коли кулачок дотикається до площини якоюнебудь точкою бокової дуги.

6. Перетворити кулачковий механізм (рис. 59) у механізм з нижчими парами для моменту, коли: a) кулак дотикається до ролика прямою AB; b) дугою BC.

7. Перетворити кривошипно-шатунний механізм, поставивши його на шатун, а також на повзун.

8. Перетворити механізм коливальної куліси (рис. 42) заміною двох нижчих пар однією вищою.

9. Показати, що механізми, зображені на рисунку 60, являють собою приклади перетворення шарнірного чотириланкового механізму.

10. Перетворити механізм, зображений на рис. 61, в механізм з нижчими парами.

11. Визначити кінематичні пари і число степенів вільності в кривошипно-шатунному механізмові з причіпним шатуном (рис. 62).

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ МЕТОДОМ ДІАГРАМ

§ 14. Складання схеми механізму

В практиці сучасного машинобудівництва зустрічаються машини з дуже складними механізмами. Для кінематичного дослідження таких механізмів треба навчитися зображати їх з допомогою умовних графічних позначень — навчитися рисувати схеми механізмів.

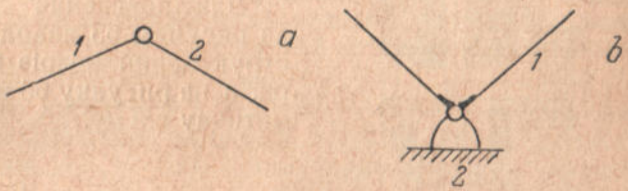


Рис. 63

На схемах ланки механізму не мають конструктивної форми, величини мас, втрачають фізичні властивості, але зберігають геометричні співвідношення між окремими ланками і кінематичними парами.

Так, ланка, будьякої форми, коли вона зв'язана з сусідніми ланками шарнірами, характеризується віддаленням між осями шарнірів і визначається відрізком прямої з маленькими кружечками на місцях шарнірів.

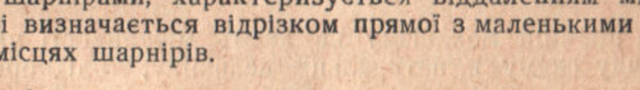


Рис. 64

Дві ланки, з'єднані шарніром, позначаються так (обертальна пара) як показано на рисунку 63 *a* і *b*.

Поступні пари позначаються так, як показано на рисунку 64 *a*, *b* і *c*, при чому штрихуванням (зовні) показується, що ланка *1* нерухома.

Щоб показати, що кілька стрижнів складають цупку систему (стрижні *OM*, *ON*, *MN* на рис. 58), фігуру, утворену ними, штрихують.

Цупкість системи з кількох стрижнів позначають ще маленькими дужками, які з'єднують ці стрижні: на рисунку 62 стрижні AB і AC з'єднані маленькою дужкою a, яка показує, що ці стрижні являють собою цупку систему.

Для того щоб вирисувати схему механізму в будьякому положенні, треба знати положення основних його точок (центри шарнірів, центри круглих і дугових ланок, місця дотику ланок, що складають вищі пари і т. д.). Все це береться з конструктивного рисунку, або знімається з натури.

За одержаними даними наноситься на папері конфігурація кінематичного ланцюга, при чому треба додержувати умовних позначень пар і не звертати уваги на конструктивні форми.

Для пояснення сказаного на рисунку 65 наводимо конструктивний розріз індикатора, а на рисунку 66 його кінематичну схему.

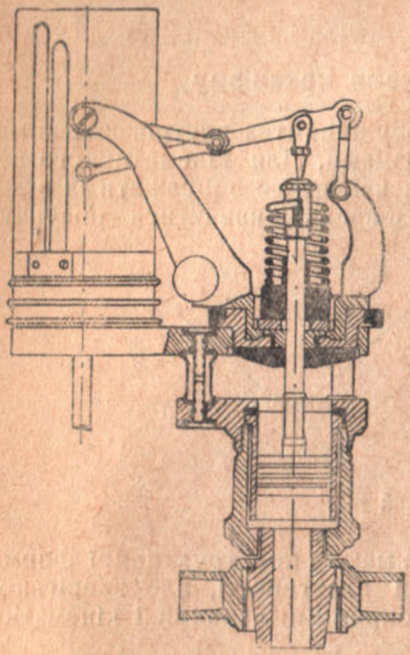


Рис. 65

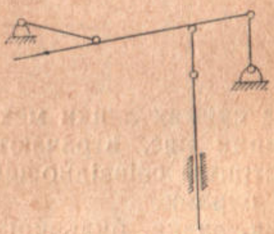


Рис. 66

Часто розміри механізму не дають можливості вирисувати кінематичну схему в натуральну величину, тоді користуються масштабом.

§ 15. Масштаби, їх розмірність і числова величина

Всі величини можна зобразити графічно, відкладаючи на папері пропорціональні їм відрізки. Таким чином, між дійсним значенням величини і довжиною відрізка, який її зображує, існує така залежність:

$$D = M . O \quad (10)$$

$$M = \frac{D}{O}, \quad (11)$$

де: D — дійсна величина, O — довжина відрізка, M — довільно вибраний фактор пропорціональності.

Цей фактор пропорціональності M між дійсною величиною і довжиною відповідного цій величині відрізка називається масштабом. Розмірність масштаба, як це видно з формули (11), дорівнює відношенню розмірностей зображуваної величини і довжини відрізка. Отже, коли ми хочемо час в 150 секунд зобразити відрізком в 30 *мм*, то масштаб дорівнюватиме:

$$\frac{150\ сек}{30\ мм}=5\ \frac{сек}{мм}.$$

Коли зображувана величина має таку ж розмірність, як і довжина відрізка, що її зображує, то масштаб матиме нульову розмірність, тобто буде абстрактним числом. Наприклад, коли довжину ланки, рівну 1100 *мм*, зобразити відрізком в 22 *мм*, то масштаб дорівнюватиме:

$$\frac{1100\ мм}{22\ мм}=50.$$

Коли за прийнятою технічною системою одиниць довжини виражати в метрах, а відрізки для зручності вимірювання — в міліметрах, то і в цьому випадку масштаб не буде абстрактним числом, а матиме розмірність $\frac{м}{мм}$.

Масштаб вибирають так. З формули (10) видно, що більшій величині відповідає і більший відрізок (при однаковому масштабі). Коли на заготовленому аркуші паперу вміщається максимальна із зображуваних величин, то всі інші величини теж вмістяться. Вибирають максимальну зображувану величину і ділять на довжину найбільшого відрізка, який міг би вміститися на папері.

$$M_o=\frac{D_{max}}{O_{max}},$$

де M_o — орієнтовна величина масштаба.

Для масштабів у машинобудівництві існує певний стандарт:

Масштаби машинобудівництва

10:1	5:1	2:1	1:1	1:2	1:5	1:10

Для зручності користування кінематичними діаграмами вибирають масштаби, які відповідають масштабам, прийнятим у машинобудівництві, а саме:

0,001	0,002	0,005
0,01	0,02	0,05
0,1	0,2	0,5
1	2	5
10	20	50
100	200	500
1000	2000	5000
і т. д.	і т. д.	і т. д.

Орієнтовну величину масштабу M_0 замінюють на більшу ближчу до неї M з наведеної таблиці.

§ 16. Побудова траекторій окремих точок механізму. Спосіб засічок. Спосіб шаблонів

Кінематична характеристика руху механізму включає траекторії, путі, швидкості і прискорення його точок.

Теорія механізмів ставить завданням графічне розв'язання кінематичних питань для практичних механізмів, бо математичному аналізові вони здебільшого не піддаються.

Крива (в окремому випадку може бути пряма), по якій переміщається точка механізму під час руху, зветься траекторією цієї точки. Траекторія може бути зображена аналітично — у вигляді рівняння, як функціональна залежність між координатами точки, і графічно — будується на рисунку у вигляді лінії в натуральну величину або в масштабі.

Траекторія дає форму руху точки і дозволяє при певних умовах дослідити закон переміщення даної точки як по площині, так і в просторі. Для техніки велике значення має дослідження траекторій точок механізму.

Дослідження це потрібне:

a) при вивченні руху робочих органів машини;

b) при проектуванні профіля зубів зубчастих коліс і контурів ексцентрика;

c) при розв'язанні питання: чи не зачіпаються окремі ланки механізму і

d) коли траекторії точок є матеріалом для кінематичного дослідження механізмів.

Пов'язуючи траекторію, дану в координатах простору або в координатах площини, з часом, ми можемо вивести закономірності, що характеризують путі, швидкості і прискорення.

Траекторію будьякої точки механізму вирисовують графічно так:

1) Вирисовують механізм у різних положеннях, в яких він може перебувати.

2) На вирисованих положеннях механізму відзначають досліджувану точку за даними її відстанями.

3) Відмічені точки з допомогою лекала сполучають кривою, яка й дає траекторію.

Для вирисовування траекторій положення механізму можуть бути довільними.

Для прикладу вирисуємо траекторію середньої точки шатуна чотиришарнірного механізму (рис. 67).

Легко помітити, що всі точки, які лежать на кривошипі, опишуть кола, як і цапфа кривошипа A, а точки, які лежать на коромислі O_2B опишуть дуги (точка M — траекторією M_0M_0').

Будьяка точка, що лежить на шатуні AB, описуватиме складнішу траекторію. За ведучу ланку приймають кривошип O_1A, рух якого рівномірний, тобто число обертів n — const.

Положення ланок механізму знаходять так:

1) З точки O_2 проводять дугу радіусом O_2B — траєкторію точки B.

2) З ведучої точки A радіусом AB на дузі точки B засічкою знаходять точку B, а потім точки A і B сполучають прямою. Точку C знаходять засічкою на шатуні AB радіусом, рівним $AC = \frac{AB}{2}$.

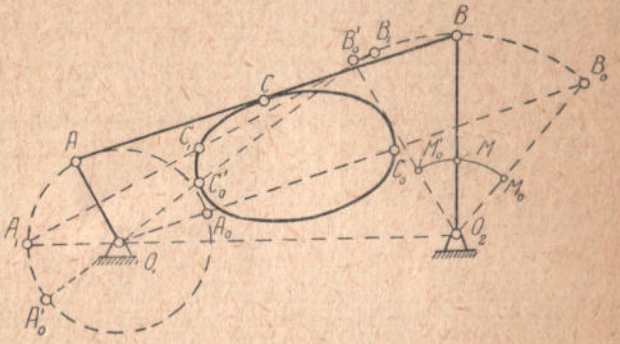


Рис. 67

Щоб намітити наступні положення механізму, ведучій ланці O_1A дають поворіт на якийсь кут, наприклад на 30° (ланка в цьому прикладі обертається проти стрілки годинника); на рисунку 67 відкладено кут 60°. З нового положення точки A (A_1) радіусом AB на дузі радіуса O_2B засікається точка B_1. На лінії A_1B_1 відмічається точка C_1. Таким же способом будуються наступні положення механізму через кожні 30°. Всіх їх буде 12, і радіусами AC засічкою в кожному положенні знаходитимемо точку C. Сполучивши знайдені точки плавною кривою, одержимо траєкторію точки C, яка лежить на шатуні.

Аналогічно можна знайти траєкторію будьякої точки шатуна, а також траєкторію точки в будьякому механізмі.

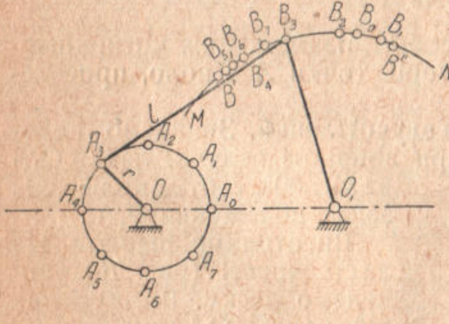


Рис. 68

Процес визначення положень точок на їх траєкторіях відповідно до певного положення механізму зветься розміткою траєкторій.

В розгляненому прикладі ми задавалися положенням ланки O_1A (ведучої в даному випадку) і відповідно до цього визначали положення окремих точок.

Таким чином, одночасно з побудовою траєкторії точки C_1 ми зробимо й розмітку її траєкторії, а також і траєкторії точки В.

На рисунку 68 показана розмічена траєкторія точки A кривошипа OA через кожні 45° повороту кривошипа OA.

Залежно від положення точки A знайдені засічками положення точки B на її траєкторії — дуга MN.

Крайні положення точки B (B' і B'') знайдені засічками дуги MN радіусами $l-r$ і $l+r$ з центра O.

При способі засічок потрібно багато паперу (коли розміри механізму значні і рисують його в натуральну величину), а також застосування штанген-циркуля.

Другий спосіб — спосіб шаблонів — не має цих незручностей.

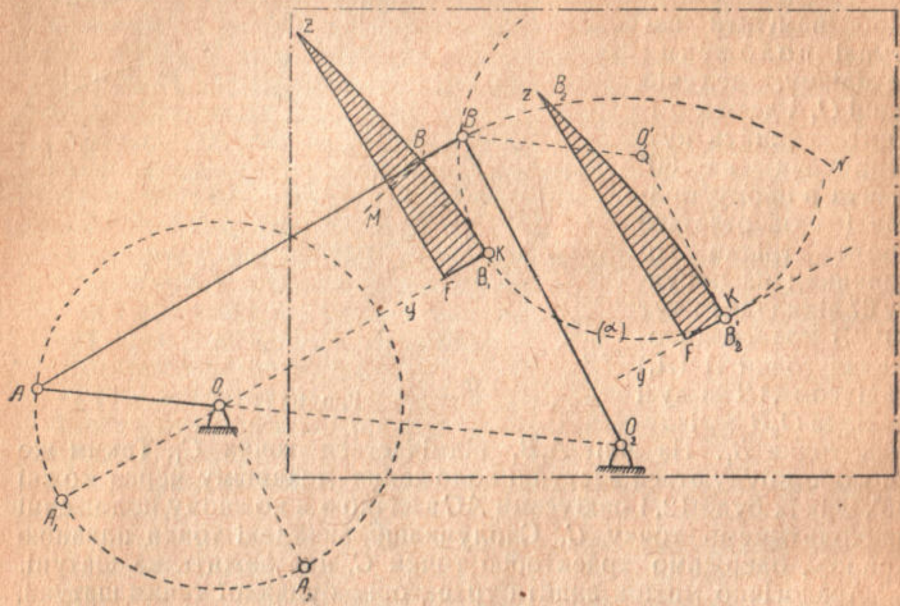


Рис. 69

Для ознайомлення з цим способом візьмемо теж чотиришарнірний механізм (рис. 69). Траекторія точки A є коло, проведене з центра O_1 радіусом O_1A.

O_1A — початкове положення ведучої ланки. Знайдемо положення точки B на її траекторії при повороті ведучої ланки O_1A на кут 30°, тобто, коли вона займе положення O_1A_1.

Виготовимо шаблон. На листі жерсті (рис. 70) проведемо риску. Візьмемо на ній точку O і з неї, як із центра радіусом $OK=AB$ проведемо дугу KZ довільної довжини. Лінію ZF проведемо довільно. Шаблон виріжемо по контуру KZF. Точка K зветься носиком шаблона, бік KF — його основою. На основі іноді ставиться стрілка, напрямлена від K до F, яка вказує на орієнтацію шаблона

Рис. 70

при встановленні. Шаблон встановлюється завжди так, щоб стрілка була напрямлена *на точку*, *по якій* проводиться розмітка, і *від точки, траєкторія якої розмічається*. (Виходить, що стрілка показуватиме на центр відносного обертання даної ланки).

Через точку B (рис. 69) проводимо лінію $BO'_1 \# AO_1$. З центру O_1 проводимо коло α радіусом O'_1B. Користуємося властивістю плоского руху: рух точки B розглядаємо як складений з поступного, разом з точкою A, і обертального — навколо точки A.

Першим рухом точка B переміститься на колі α в точку B'_1, (за час, коли точка A переміститься в точку A_1); другий рух — це буде обертання навколо точки A_1.

Для визначення остаточного положення точки B, прикладаємо виготовлений шаблон так, щоб точка K збігалася з точкою B'_1, а сторона його KF — з лінією B'_1y паралельною AB; точка перетину дугової сторони шаблона KZ з траєкторією точки B — точка B_1 — і буде шукане положення точки B.

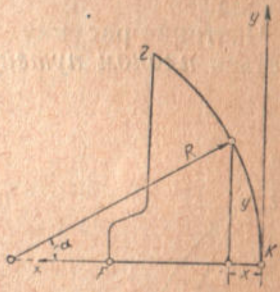


Рис. 71

Таким чином, процес знаходження точки B на її траєкторії, що відповідає положенню, скажемо, A_2 точки A, зводиться до такого:

а) відкладаємо на колі α дугу BB'_2, рівну дузі AA_2;

b) через точку B'_2 проводимо лінію B'_2y, паралельну AB (початковому положенню шатуна);

с) прикладаємо до B'_2y шаблон стороною FK так, щоб точка K збігалася з точкою B'_2, а точка F — лежала між B'_2 і A_2;

d) точка перетину дугової сторони шаблона KZ з траєкторією точки B (точки B_2) і буде шукане положення.

Наведений приклад показує, як розмічається траєкторія з допомогою шаблона.

Користуючись шаблоном, не треба робити засічки радіусом, рівним довжині шатуна (непотрібний штанген-циркуль) і всю побудову можна виконати біля точки B, навіть зовсім не вирисовуючи кривошипа й шатуна, від чого потреба в папері зменшується (на рис. 69 потрібний розмір аркуша паперу обведено штрих-пунктирною лінією).

Шаблон теж можна побудувати без штанген-циркуля, визначивши точки дуги KZ аналітично або графічно.

Коли взяти осі координат, як показано на рисунку 71, то положення точок на дузі KZ визначатимуться координатами:

$$x = R(1 - \cos\alpha);$$

$$y = R\sin\alpha.$$

Надаючи різних значень кутові α (починаючи від 0° через 3° ÷ 5°), знайдемо ряд точок, які сполучаємо з допомогою лекала.

Графічно дугу KZ визначають так (рис. 72): з центра O_1 через точку K проводять дугу KM радіусом, в n раз меншим потрібного радіуса $\left(\text{для попереднього прикладу } r=\frac{AB}{n}\right)$.

На дузі KM беруть ряд точок M_1, $M_2,\ldots$ які сполучають з точкою K. Коли на продовженні KM_1, $KM_2,\ldots$ відкласти відрізки: $\overline{KZ_1}=\overline{KM_1}\cdot n$; $\overline{KZ_2}=\overline{KM_2}\cdot n;\ldots$ то точки Z_1, Z_2... лежатимуть на шуканій дузі шаблона KZ, що легко довести на підставі теорем з елементарної геометрії.

Через точки Z_1, $Z_2\ldots$ проводиться дуга KZ з допомогою лекала.

Частина рисунку 69, обведена штрих-пунктирною лінією, зветься *планом путей.* На плані путей траекторії точок зсунені

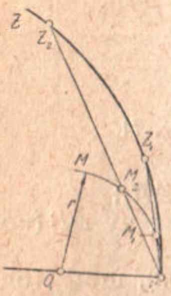


Рис. 72

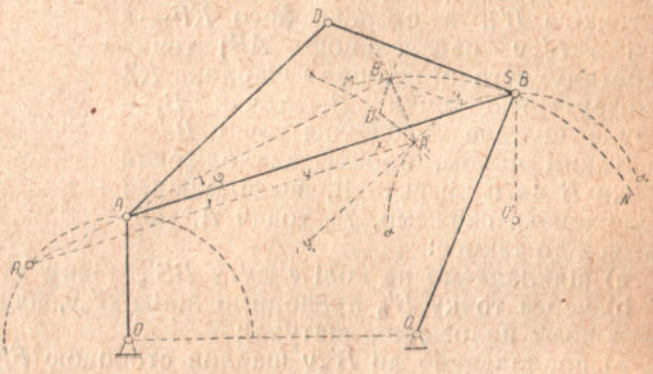


Рис. 73

так, що в початковий момент положення всіх точок збігається в спільній точці, що зветься *полюсом* плану путей і визначається літерою s. (На рис. 69 полюс збігається з точкою B; літера s не поставлена; зсунена траекторія точки A є коло α; траекторія точки B — дуга MN).

Покажемо, як з допомогою шаблона побудувати траекторію довільної точки D шатуна AB (рис. 73).

Знайдемо положення точки D на плані путей в той момент, коли точки A і B знаходяться в положеннях A і B (положення точки B визначено за попереднім).

Вважаємо, що точка D в початковий момент знаходилася також у полюсі (точка s і B на рис. 73). Рух її розглядаємо як складний: поступний разом з якоюнебудь точкою шатуна і обертальний — навколо цієї точки.

Розглянемо раніше рух точки D разом з точкою A. Поступним рухом вона з початкового положення переміститься в положення A'_1. Обертальним рухом вона переміщатиметься по дузі A'_1x, яку проводять з допомогою дугового шаблона з радіусом, рівним AD. Шаблон орієнтують по прямій A'_1y, паралельній DA.

При визначенні положення її на дузі A'_1x розглянемо рух її разом з точкою B.

Поступним рухом вона переміщається з початкового положення в точку B_1, а обертальним рухом вона переміщатиметься по дузі B_1x_1, яку проводимо з допомогою другого дугового шаблона з радіусом рівним BD. Шаблон орієнтуємо по прямій B_1y_2, паралельній BD.

Очевидно, шукане положення точки D буде точка перетину дуг A'_1x і B_1x_1, — точка D_1.

Коли сполучити точки A'_1, B_1 і D_1, то одержимо $\triangle A'_1B_1D_1 \backsim \triangle ABD$, що легко доводиться:

$$\smile A'_1B_1 = \overline{AB}\cdot\varphi,$$

$$\smile A'_1D_1 = \overline{AD}\cdot\varphi,$$

$$\smile B_1D_1 = \overline{BD}\cdot\varphi,$$

де φ — кут повороту фігури ABD за перший період, починаючи від початкового.

Звідси:

$$\overline{A'_1B_1} = \overline{AB}\cdot\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$\overline{A'_1D_1} = \overline{AD}\cdot\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$\overline{B_1D_1} = \overline{BD}\cdot\sin\frac{\varphi}{2},$$

або:

$$\frac{\overline{A'_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'_1D_1}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{B_1D_1}}{\overline{BD}}.$$

Значить, $\triangle A'_1B_1D_1$ подібний до $\triangle ABD$. З цього робимо висновок: *фігура, утворена на плані путей положеннями точок цупкої фігури, яка рухається плоским рухом, подібна до самої цупкої фігури.*

Цим висновком широко користуються при побудові планів путей з допомогою шаблонів. Наведемо приклад.

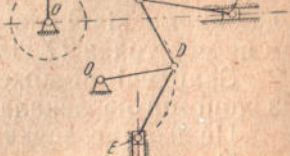


Рис. 74

Даний механізм, зображений на схемі (рис. 74) в масштабі 1 *мм* — α *м*. Побудувати план путей у натуральну величину.

Вважаємо положення механізму, зображене на рис. 74, за початкове. Візьмемо точку s (рис. 75) за полюс плану путей. Через точку s проведемо лінію, паралельну AO; відкладемо на ній відрізок sO, рівний натуральній величині кривошипа OA.

З центра O радіусом Os проводимо коло. Це буде зсунена траєкторія точки A. Поділимо це коло точками A_1, A_2, $A_3, \ldots$, на вісім рівних частин і знайдемо відповідні цим положенням положення точок B, C, D і E.

Проводимо через точку s лінію $\beta\beta$, паралельну OB. Це буде зсунена траєкторія точки B.

Для визначення положень точки B на її траєкторії, відповідних до положень A_1, A_2, $A_3, \ldots$, виготовляємо дуговий шаблон з радіусом рівним натуральній довжині шатуна AB.

Шаблон встановлюємо носком в точки A_1, A_2, $A_3, \ldots$, а основу орієнтуємо по лініях A_1y_1, A_2y_2, $A_3y_3, \ldots$, паралельних AB.

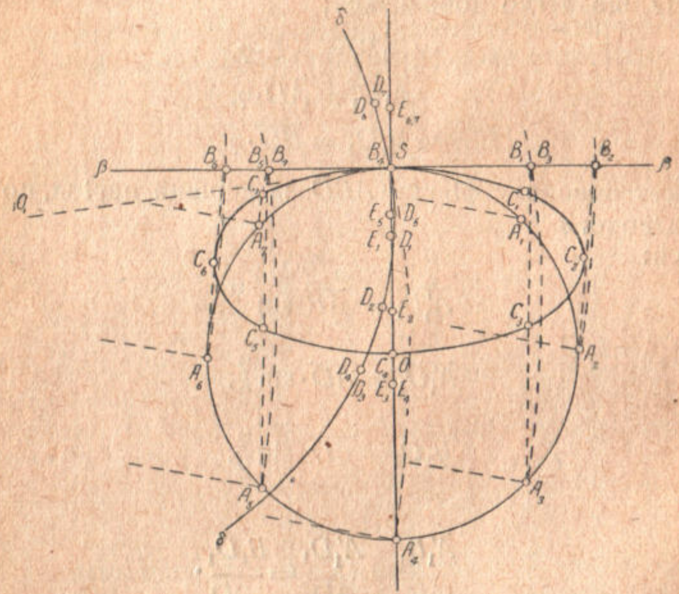


Рис. 75

Точки перетину дуги шаблона з прямою $\beta\beta$ і будуть відповідними положеннями B_1, B_2, $B_3, \ldots$ На підставі теореми про подібність положення точки C в зазначені моменти будуть знайдені діленнями відрізків $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}\ldots$ в такому ж відношенні, в якому точка C ділить відрізок AB.

Знайдені положення точки C — C_1, C_2, $C_3, \ldots$ — сполучаємо з допомогою лекала.

Це й буде зсунена (вже розмічена) траєкторія точки C.

Траєкторією точки D буде дуга $\delta\delta$, проведена радіусом O_1s, рівним натуральній величині коромисла O_1D, при чому O_1s паралельна O_1D.

Положення точки D на її траєкторії визначаємо з допомогою другого дугового шаблона з радіусом, рівним натуральній довжині ланки CD. Установлення шаблона аналогічне попередньому (носок суміщається з точками C_1, C_2, $C_3, \ldots$, а основа орієнтується в напрямі CD; орієнтовні лінії не показані на рисунку).

Після розмітки траєкторії точки D розмічається траєкторія точки E — вертикальна лінія, проведена через s. Для цього користуються третім дуговим шаблоном з радіусом, рівним натуральній довжині ланки DE, при чому носок встановлюється в точках $D_1, D_2, D_3, \ldots$, а основа орієнтується по прямій DE (орієнтовні лінії теж не показані на рисунку).

Треба зауважити, що метод шаблонів неможливо застосувати в тих випадках, коли положення точок не можуть бути визначені засічками. Приклади таких механізмів ми розглядаємо в § 32.

§ 17. Путь точки. Побудова діаграми путі за часом

Припустимо, що точка A (рис. 76) рухається по прямолінійній траєкторії MN. Виберемо на прямій MN початкову точку O і відмічатимемо відстані OA через s. Щоб відрізнити місце положення точки A вправо або вліво від точки O, приписуватимемо відрізкові s вправо від O додатний, а вліво — від'ємний знак. Відповідно напрям руху від M до N вважатимемо додатним, а від N до M — від'ємним.

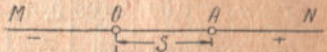


Рис. 76

Переміщення s точки механізму можна показати так. Вирисовуємо схематично даний механізм в певному масштабі, в положеннях, які відповідають різним відрізкам часу, і знаходимо відстань s вибраної точки від початкової. Величину s одержуємо в тому масштабі, в якому вирисований механізм. Припустимо, треба знайти s залежно від часу для точки B повзуна кривошипно-шатунного механізму (рис. 77).

Рис. 77

Дано: радіус кривошипа $R = 100$ *мм*, довжина шатуна $l = 400$ *мм*, число обертів кривошипа $n = 1250$ *об/хв*.

Для вирисовування механізму приймаємо масштаб, рівний п'яти, тобто 1 *мм* на рисунку відповідає 5 *мм* в натурі. Виходить, на нашому рисунку радіус кривошипа зобразиться відрізком $\frac{100\ мм}{5} = 20\ мм$, а довжина шатуна — відрізком $\frac{400\ мм}{5} = 80\ мм.$

Ставлячи кривошип під різними кутами (наприклад 0°, 30°, 60°, 90° і т. д.) до прямої OB_0, ми знайдемо на цій прямій відповідні положення точки B шатуна (B_0, $B_1, \ldots$, і т. д.), засікаючи пряму OB радіусом, рівним l, з точок A_0, A_1, $A_2 \ldots$ і т. д.

Тепер, прийнявши за початкову точку B_0, ми знайдемо відповідні s для цих положень, зменшені в п'ять раз.

Відрізки часу, які відповідають цим положенням, знаходяться так.

Кривошип робить 1250 *об/хв*, або $\frac{1250}{60} = \frac{125}{6}$ *об/сек*; виходить, один оберт (поворот на 360°) він робить за $\frac{6}{125}$ *сек*; тоді на 30° він повертається за $\frac{6}{125} \cdot \frac{30}{360} = \frac{1}{250} = 0{,}004$ *сек* на 60° — за 0,008 *сек*, на 90° — за 0,012 *сек* і т. д.

Путь поршня за 0,004 *сек* дорівнює 5 B_0B_1, за 0,008 *сек* — 5 B_0B_2 і т. д. (5 — масштаб).

Одержані дані можна звести в таблицю:

t сек.	0,004	0,008	0,012	0,016	0,020	0,024	0,028	0,032	0,036	0,040	0,044	0,048
s мм	16,5	60	113	160	190	200	190	160	113	60	16,5	0

Коли в прямокутній системі (рис. 78) на осі абсцис відкладати відрізки, пропорціональні часові, а на осі ординат — відрізки, пропорціональні путі, то ми одержимо ряд точок. Сполучивши їх плавною кривою, матимемо діаграмму путі по часу, або діаграму [s, t] (вірніше діаграму відстаней). Коефіцієнтами пропорціональності будуть: масштаб часу — τ і масштаб путі — α.

Рис. 78

Час і путь зв'язані з координатами такими залежностями:

$$\left.\begin{aligned} s &= \alpha y \\ t &= \tau x \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

На рисунку:[1]

$$\alpha = 5;$$

$$\tau = 0{,}0005 \frac{сек}{мм}.$$

Розмірність масштабу довжин нульова — $\alpha\left(\frac{мм}{мм}\right)$.

Розмірність масштабу часу — $\tau\left(\frac{сек}{мм}\right)$.

За цією діаграмою можна знайти путь (відстані) точки B від початкового положення в будьякий момент часу; для цього треба через кінець абсциси O_a, яка відповідає даному моментові часу, провести ординату ab. Остання в масштабі і зобра-

[1] Рисунок зменшено вдвічі.

жатиме відповідну путь (відстань). Відклавши на осі s відрізок OC, що виражатиме задану путь, знайдемо абсцису Cd, яка виражатиме в масштабі відрізок часу, що відповідає заданій путі.

Масштаби діаграм вибирають, користуючись наведеними вище міркуваннями.

§ 18. Побудова діаграм швидкості і прискорення за часом методом графічного диференціювання

З теоретичної механіки відомо, що:

$$v=\frac{ds}{dt}.$$

Диференціюючи рівняння (12), маємо:

$$ds=\alpha dy;$$
$$dt=\tau dx.$$

Звідси:

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{\alpha}{\tau}\cdot\frac{dy}{dx};$$

але, як відомо, $\frac{dy}{dx}$ дорівнює тангенсові кута між дотичною в даній точці і віссю абсцис — $\operatorname{tg}\varphi$ (рис. 79).

Виходить:

$$v=\frac{\alpha}{\tau}\cdot\operatorname{tg}\varphi. \tag{13}$$

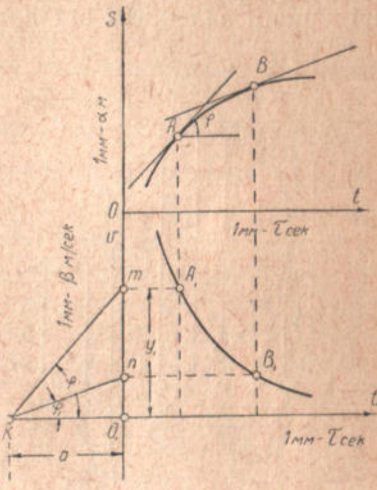


Рис. 79

Продовжимо вісь OS униз до точки O_1 і з цієї точки проведемо нову вісь абсцис O_1t. Маємо нову систему координат з осей O_1v і O_1t.

Продовжимо вісь O_1t вліво від точки O_1 і відкладемо на продовженні відрізок $O_1K=a$ *мм*.

Коли тепер ми з точки K проведемо пряму Km паралельно дотичній в точці A на кривій $[s, t]$, то одержимо прямокутний трикутник mKO_1, де $\angle mKO_1=\varphi$.

З цього трикутника маємо:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{O_1m}{a}=\frac{y_1}{a}.$$

Тоді рівняння (13) перепишемо так:

$$v=\frac{\alpha}{\tau a}\cdot y_1.$$

Прийнявши

$$\frac{\alpha}{\tau a}=\beta, \tag{14}$$

маємо:

$$v=\beta y_1. \tag{15}$$

Коли тепер з точки m провести пряму, паралельну осі абсцис, то вона перетне ординату точки A в точці A_1. Ордината останньої в новій системі координат зображає швидкість у даний момент.

Коли проробити цей процес для багатьох точок діаграми $[s, t]$ і одержані точки (A_1, B_1 і т. д.) сполучити плавною кривою, то ми одержимо нову криву, що називається *диференціальною.*

Це й буде діаграма $[v, t]$. На рисунку 80 показаний приклад такого диференціювання.

З формули (14) видно, що величина масштабу диференціальної кривої залежить від довжини відрізка a.

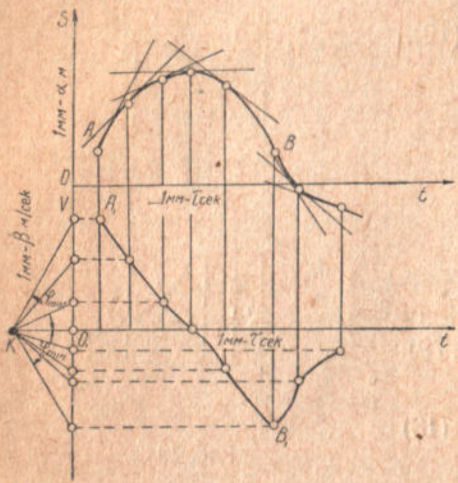


Рис. 80

Ця довжина вибирається так, щоб диференціальна крива вмістилася на взятому аркуші паперу. З рисунку 80 видно, що ширина аркуша має бути більша або рівна

$$y_{max} + y_{min},$$

$$l \geqslant y_{max} + y_{min},$$

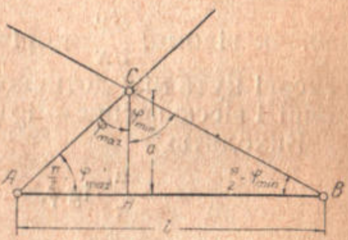


Рис. 81

але

$$y_{max} = a \operatorname{tg} \varphi_{max},$$

$$y_{min} = a \operatorname{tg} \varphi_{min}.$$

Звідси:

$$l \geqslant a (\operatorname{tg} \varphi_{max} + \operatorname{tg} \varphi_{min}),$$

або

$$a \leqslant \frac{l}{\operatorname{tg} \varphi_{max} + \operatorname{tg} \varphi_{min}}. \qquad (16)$$

Відстань OO_1 має бути

$$OO_1 \geqslant y_{max} = a \operatorname{tg} \varphi_{max}.$$

Орієнтовну величину a_0 можна знайти графічно так: відкладаємо величину l на папері і на ній як на основі, будуємо трикутник з кутами при основі, рівними (рис. 81):

$$\frac{\pi}{2} - \varphi_{max}; \quad \frac{\pi}{2} - \varphi_{min}.$$

Не важко помітити, що висота цього трикутника $CH = a_0$.

$$AH = y_{\max}$$
$$HB = y_{\min}.$$

Підставивши a_0 у формулу (14), знайдемо β_0.

Замінивши β_0 на стандартний масштаб β за тією ж формулою знайдемо остаточно величину a.

Таким чином, схема диференціювання методом дотичних буде така:

1) Вибирають точки на даній діаграмі (чим більша кривина, тим частіше) і в них проводять дотичні до кривої.

2) Вибирають висоту шуканої діаграми l.

3) З усіх дотичних вибирають дві, які утворюють найбільші (додатний і від'ємний) кути з віссю абсцис.

4) Будують допоміжний трикутник і з нього знаходять a_0.

5) Вираховують $\beta_0 = \frac{\alpha}{\tau a_0}$ і вибирають β; величина $a = \frac{\alpha}{\tau\beta}$ відкладається на продовженні осі O_1x_1.

6) Через початок відрізка a (точку K) проводять лінії, паралельні дотичним і одержують точки на осі ординат.

7) Перетини ординат точок диференціальної кривої і ліній, паралельних осі абсцис, які проходять через відповідні точки на осі ординат, визначають положення точок диференціальної кривої.

8) Одержані точки сполучають плавною кривою.

Таким же способом можна знаходити діаграму $[w, t]$ за діаграмою $[v, t]$, коли рух прямолінійний. Коли рух точки криволінійний, то таким способом одержуємо діаграму дотичних прискорень.

Похибка цього методу при старанному виконанні не перевищує 5%.

Практично трохи зручніший, так званий, метод диференціювання січними.

З формули Лагранжа

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varphi); \quad a < \varphi < b$$

відомо, що тангенс кута нахилу січної дорівнює похідній в якійсь точці ξ всередині проміжку між точками перетину січної з кривою. При малих проміжках можна допустити, що ξ знаходиться якраз посередині цих проміжків.

Крива ділиться на частини з рівними проекціями на вісь абсцис Δx. Точки на кривій сполучають через одну, а з січними роблять, як і з дотичними при попередньому методі. Точки диференціальної кривої відкладають на середній ординаті (рис. 82).

Всі наведені вище формули дійсні і в цьому випадку.

Рівняння (14) дає таку залежність між масштабами:

$$\alpha = \beta\tau a, \tag{17}$$

або словами: масштаб інтегральної кривої дорівнює добуткові масштабів диференціальної кривої, помноженому на полюсну відстань.

Зрозуміло, що розмірність масштаба швидкості β є $\frac{м}{сек \cdot мм}$.

Коли побудувати таким способом діаграму прискорень $[w, t]$, то масштаб її γ визначається з рівняння:

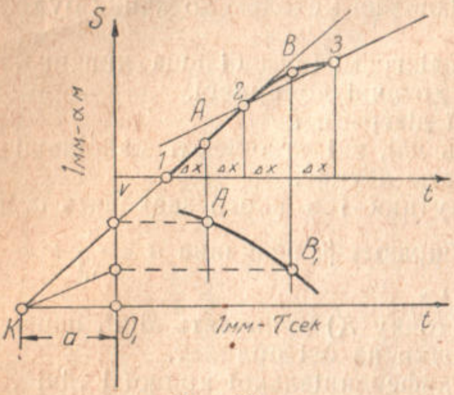


Рис. 82

$$\gamma = \frac{\beta}{\tau a_1},$$

де a_1 — нова полюсна відстань.

Розмірність — $\gamma \ \frac{м}{сек^2 \cdot мм}$.

§ 19. Графічне інтегрування

Часто на практиці доводиться будувати діаграму $[s, t]$, за діаграмою $[v, t]$ і останню за діаграмою $[w, t]$. Ці побудови проводяться методом графічного інтегрування.

Припустимо, що крива MN зображує ділянку діаграми $[v, t]$ (рис. 83). Коли відрізком x позначити довільний відрізок часу t, а відповідна ордината зображуватиме швидкість v, то:

$$t = \tau x,$$
$$v = \beta y'.$$

Відповідно до цього:

$$t_п = \tau x_1,$$
$$t_к = \tau x_2,$$

де: $t_п$ — початковий момент часу, а $t_к$ — кінцевий момент часу,

Тоді на підставі формули

$$v = \frac{ds}{dt}$$

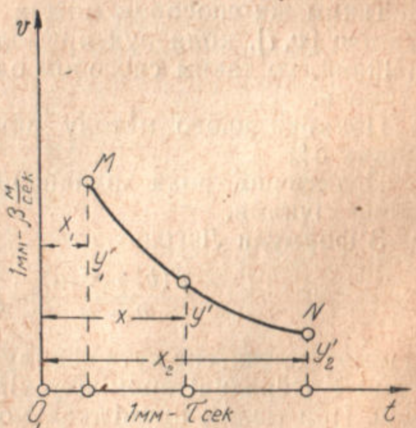


Рис. 83

матимемо:

$$ds = v\,dt,$$

$$s_к - s_п = \int_{t_п}^{t_к} v\,dt,$$

де: $s_п$ — початкова відстань точки, а $s_к$ — кінцева відстань точки.

Позначивши різницю $s_к - s_п$ скорочено через $s_{кп}$ ($s_{кп}$ — путь пройдена точкою за час $t_к - t_п$) і маючи на увазі, що:

$$v = \beta y',$$

а

$$dt = \tau dx,$$

одержимо:

$$s_{кп} = \int_{t_п}^{t_к} v dt = \int_{x_1}^{x_2} \beta y' \tau dx,$$

або остаточно:

$$s_{кп} = \beta\tau \int_{x_1}^{x_2} y' dx. \qquad (18)$$

Інтеграл $\int_{x_1}^{x_2} y' dx$ являє собою площину діаграми $[v, t]$, обмежену віссю абсцис, ділянкою кривої і двома ординатами, що відповідають абсцисам x_1 і x_2. Позначивши цю площину через f_{12} і підставивши це позначення в формулу (18) одержимо:

$$s_{кп} = \beta\tau f_{12}. \qquad (19)$$

Ця залежність вірна для будьякого інтеграла між двома точками кривої $[v, t]$.

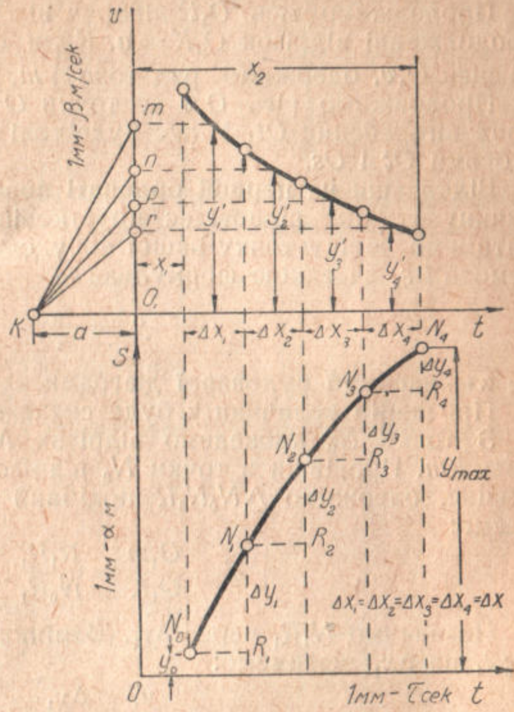


Рис. 84

На підставі сказаного вище крива $[s, t]$ (інтегральна крива) будується так (рис. 84).

Ділимо діаграму $[v, t]$ рівновіддаленими вертикальними лініями на кілька рівних частин (чим частіші ці лінії, тим точніша буде побудова). Припустимо, що відстань між ними буде Δx. Проводимо в кожній ділянці ординату (y'_1, y'_2, y'_3 і т. д.) так, щоб добуток такої ординати на Δx давав площину тієї ділянки, в якій знаходиться ця ордината (коли Δx достатньо мале, то контур кожної ділянки можна прийняти за трапецію, і потрібна ордината буде середньою лінією трапеції).

Таким чином маємо:

$$f_1 = \Delta x_1 y'_1; \quad f_2 = \Delta x_2 y'_2; \ldots, f_i = \Delta x_i y'_i$$

і т. д.

Коли $s_{кп}$ для першої ділянки позначити через Δs_1, для другої ділянки — через Δs_2, для третьої — Δs_3 і т. д., то за формулою (19) буде:

$$\Delta s_1 = \beta\tau f_1; \quad \Delta s_2 = \beta\tau f_2 \ldots \Delta s_i = \beta\tau f_i,$$

або, підставивши значення f, матимемо:

$$\Delta s_i = \beta\tau\Delta x_i y_i. \tag{20}$$

Продовжимо вісь O_1t ліворуч від точки O_1 і відкладемо на продовженні відрізок $O_1K = a$. Коли спроектувати ординати y_i' на вісь O_1v, одержимо ряд точок: m, n, p, r і т. д.

Продовжимо вісь O_1v до точки O і проведемо з цієї точки нову вісь абсцис Ot. У нас буде тоді нова система координат з осями Ot і Os.

Відклавши на першій ординаті нової системи координат величину y_0, яка відповідає початковій путі (відстані) точки s_0, матимемо першу точку нашої побудови — N_0. Величину y_0 знайдемо по s_0 за такою формулою:

$$y_0 = \frac{s_0}{\alpha}, \tag{21}$$

де α — масштаб будованої діаграми путі (відстаней).

Про вибір величини α буде сказано нижче.

З точки N_0 проведемо відрізок N_0N_1, паралельний відрізкові Km. Провівши з точки N_0 відрізок N_0R_1, паралельний осі абсцис, одержимо $\triangle N_0N_1R$ подібний $\triangle KmO$. З цієї подібності маємо:

$$\frac{O_1m}{O_1K} = \frac{N_1R_1}{N_0R_1}.$$

Позначимо N_1R_1 через Δy_1. Замінивши O_1m на y_1', O_1K на a, N_0R_1 на Δx_1, матимемо:

$$\frac{y_1'}{a} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}.$$

Звідси

$$y_1' = \frac{a\Delta y_1}{\Delta x_1}.$$

Підставивши у формулу (20) знайдене значення, одержимо

$$\Delta s_1 = \frac{\beta\tau\Delta x_1 a\Delta y_1}{\Delta x_1},$$

або, скоротивши на Δx_1:

$$\Delta s_1 = \beta\tau a\Delta y_1.$$

Далі. З точки N_1 проводимо N_1N_2 паралельно Kn. З подібності трикутників KnO і $N_1N_2R_2$ одержимо:

$$\frac{y_2'}{a} = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2},$$

де Δy_2 означає N_2R_2. Звідси

$$\Delta s_2 = \beta\tau a \Delta y_2.$$

Аналогічно:

$$\Delta s_i = \beta\tau a \Delta y_i. \qquad (22)$$

Приріст Δy ординати інтегральної кривої в масштабі $\beta\tau a$ зображає переміщення точки, що відповідає даному відрізкові кривої $[v, t]$.

Згідно з викладеним вище маємо:

$$s = s_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \Delta s_i,$$

де n — дорівнює числу ділянок, на які розбита крива $[v, t]$ від початкової абсциси до абсциси x, що відповідає моментові t, коли відстань точки дорівнює s.

Підставляючи в цю формулу значення Δs за формулою (22), маємо:

$$s = s_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \beta\tau a \Delta y_i.$$

Замінивши $\beta\tau a$ на α і s_0 за формулою (21) на αy_0, одержимо:

$$s = \alpha y_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \alpha \Delta y_i,$$

або

$$s = \alpha (y_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \Delta y_i).$$

Остаточно позначивши

$$y_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \Delta y_i$$

через y, одержуємо:

$$s = \alpha y. \qquad (23)$$

Як видно з формули (23), висота інтегральної діаграми залежить від величини α.

Але згідно з формулою (17):

$$\alpha = \beta\tau a,$$

тобто α сама залежить від величини a, яку ми вибираємо залежно від бажаної висоти диаграми $[s, t]$. Висота останньої, в крайньому випадку, має дорівнювати y_{max} (рис. 84), тобто вона рівна

$$y_{max} = y_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \Delta y_i,$$

або

$$y_{\max}=\frac{s_0}{\beta\tau a}+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\Delta s_i}{\beta\tau a}=\frac{s_0}{\beta\tau a}+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\beta\tau f_i}{\beta\tau a}=\frac{s_0}{\beta\tau a}+\frac{1}{a}\sum_{1}^{n}f_i.$$

Але $\sum_{1}^{n} f_i=F$ — площині, замкненій між інтегрованою ділянкою діаграми $[v, t]$ і віссю Ot.

Маємо:

$$y_{\max}=\frac{s_0}{\beta\tau a}+\frac{F}{a}. \tag{24}$$

Звідси можна знайти величину полюсної відстані, щоб $y_{\max}$ не виходило за межі паперу.

На основі всього наведеного вище можна дати таку схему графічного інтегрування:

1) Знаходимо площину, яка відповідає найбільшій путі.

2) За вибраною висотою діаграми $y_{\max}$ вираховують a_0 (орієнтовну полюсну відстань).

3) За a_0 вираховують α_0, заміняють на стандартний масштаб α і за ним знаходять величину a, яку відкладають на продовженні осі O_1t.

4) Інтегровану криву ділимо рівновіддаленими одна від одної прямовисними лініями на невеличкі площинки. В кожній площинці проводимо середню ординату y'.

5) Проектуючи середні ординати y' на вісь O_1v, одержуємо ряд точок, які сполучаємо з кінцем відрізка a (з точкою K).

6) На діаграмі $[s, t]$ з кінця першої ординати, яка зображує початкову відстань точки, проводимо відрізок, паралельний променеві, який відповідає другій ділянці діаграми і т. д.

7) Діаграма лишається у вигляді ломаної і плавною кривою не заміняється.

Так само, як і метод диференціювання, цей метод можна застосовувати для побудови інших діаграм, наприклад, для побудови епюр згинаючих моментів за епюрою перерізаючих сил, бо:

$$M=\int Q\,dl$$

Цей спосіб досить точний, і при старанному виконанні похибка не перевищує 1,5—2%.

§ 20. Виключення спільної змінної

Часто потрібно знати зміну величини швидкості і прискорення даної точки залежно від її переміщення.

Відповідь на це питання дають діаграми *швидкості по відстані*, або $[v, s]$, і *прискорення по відстані*, або $[w, s]$.

Ці діаграми можна одержати так: першу — з діаграм $[v, t]$ і $[s, t]$, а другу — з $[w, t]$ і $[s, t]$ — графічним методом виключення спільної змінної.

Ми розглянемо цей метод для випадку побудови діаграми $[v, s]$. Діаграми $[v, t]$ та $[s, t]$ вирисовуємо одну під одною (рис. 85). Масштаби часу обох діаграм мають бути однакові. Побудовану діаграму розміщуємо на продовженні осі O_1t діаграми $[v, t]$.

Вісь $O'v$ діаграми $[v, s]$ продовжуємо до перетину з віссю Ot діаграми $[s, t]$. Точку перетину позначаємо через M. З точки M проводимо пряму MN під кутом 45° до осей координат. Розіб'ємо діаграму $[s, t]$ на ряд точок (чим більше точок, тим точніша буде побудова) і прономеруємо по черзі: 1, 2, 3, 4... і т. д. З кожної точки проведемо вертикаль до перетину з діаграмою $[v, t]$ і горизонталь до перетину з прямою MN. Одержані точки перетину позначимо тими ж номерами, які мають точки на діаграмі $[s, t]$ і звідки були проведені вертикаль і горизонталь, що утворили дані перетини. Потім з кожної точки перетину на прямій MN проведемо вертикаль до перетину з горизонталлю, проведеною з точки під таким же номером на діаграмі $[v, t]$. Одержані таким чином точки сполучаємо плавною кривою. Це і буде діаграма $[v, s]$.

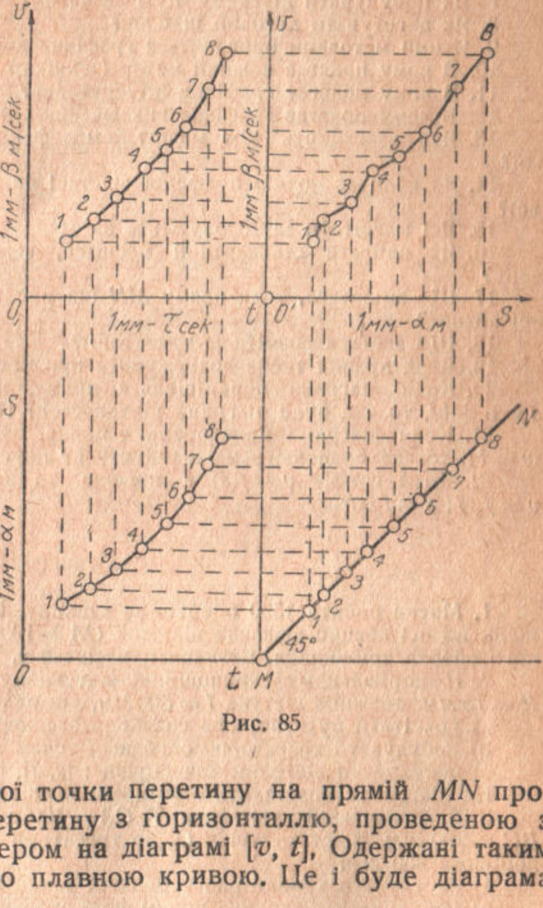


Рис. 85

Масштаби відстаней α і швидкостей β одержаної діаграми $[v, s]$ дорівнюватимуть відповідним масштабам діаграм $[v, t]$ і $[s, t]$.

Цим методом за довільними двома діаграмами, які мають одну спільну змінну, можна побудувати третю, в якій ця змінна виключена. Точність цього методу практично цілком задовільна. Обгрунтування його наочне, а тому ми на ньому зупинятися не будемо.

§ 21. Контрольні запитання і задачі

1. Як схематично визначаються обертальні пари? Поступні пари?

2. В чому різниця між конструктивними рисунками і кінематичною схемою механізму?

3. Що зветься масштабом?

4. Яка розмірність масштабу часу? швидкості? прискорення? переміщення?

5. Що зветься траєкторією?

6. Якими способами можна побудувати траєкторію?

7. Як побудувати діаграму путі за часом?

8. Як виготувати дуговий шаблон?

9. Якими методами проводиться графічне диференціювання?

10. В чому полягає кожний метод (техніка)?

11. В чому полягає графічне інтегрування?

12. В чому полягає графічне виключення спільної змінної?

13. Яка залежність між масштабом диференціальної і інтегральної кривої?

14. Як впливає розмір полюсної відстані на масштаб диференціальної кривої?

15. Які масштаби застосовуються за стандартом?

16. Як вибрати стандартний масштаб, коли задані розміри аркуша паперу?

17. Що зміниться, коли пряму MN (на рис. 85) провести під кутом 30° до осі абсцис?

18. Що зветься розміткою траєкторії?

19. Яких правил треба додержувати при встановленні шаблона.

20. Коли діаграма переміщень є пряма, яку можна виразити рівнянням $s = a + bt$, то яка буде діаграма швидкостей? Прискорення?

21. Коли діаграма прискорень є пряма, яку можна виразити рівнянням $w = bt$, то яка буде діаграма швидкостей? переміщень?

22. Коли графік $v = f(s)$ є півколо, то які будуть графіки $wt = f_1(s)$; $v = f_2(t)$; $s = f_3(t)$?

Задачі

1. Мотор робить 1500 обертів за хвилину. При побудові діаграми переміщень по осі абсцис відклали відрізок $OA = 100$ *мм*, який відповідає часові одного оберта кривошипа. Визначити масштаб τ. Чи є він стандартний?

2. В нормальному кривошипно-шатунному механізмі радіус кривошипа $R = 75$ *мм*, довжина шатуна $l = 300$ *мм*, число обертів за хвилину $n = 1200$:

a) розмітити путь поршня способом засічок;

b) побудувати траєкторію середньої точки шатуна;

c) побудувати діаграми для поршня: $[s, t]$, $[v, t]$, $[w, t]$, $[v, s]$, $[w, s]$.

На діаграмах розставити стандартні масштаби.

3. В коливальній кулісі (рис. 7) $OA = 100$ *мм*; $OO_1 = 200$ *мм*; $O_1B = 400$ *мм*; $BC = 200$ *мм*. Відстань точки O_1 до траєкторії точки C (горизонтальна пряма) дорівнює 450 *мм*:

a) побудувати траєкторію середньої точки шатуна BC;

b) побудувати діаграму переміщень точки C; число обертів кривошипа OA — $n = 120$ *об/хв*.

4. Побудувати траєкторію точки C (рис. 62 — клик для чіпляння причіпного шатуна).

Дано: $OA = 90$ *мм*; $AB = 360$ *мм*; $AC = 30$ *мм*; $\angle BAC = 70°$.

5. Зробити розмітку путей для поршнів B і C подвійного кривошипно-шатунного механізму (рис. 24), взявши за початкове положення кривошипа горизонтальне положення OA

Дано: $OA = 100$ *мм*; $AB = AC = 400$ *мм*.

6. В кулісі Вольфа (рис. 39) $a = 150$ *мм*; $n = 300$ *об/хв*. Побудувати діаграми $[s, t]$, $[v, t]$, $[w, t]$, $[v, s]$, $[w, s]$ для куліси.

7. Для мотора BMW-III $n = 1450$ *об/хв*, дана таблиця $[v, t]$.

Швидкість поршня залежно від часу

t *сек*	$v \frac{м}{сек}$	t *сек*	$v \frac{м}{сек}$
0,0000	0,0	0,0241	−5,2
0,0034	8,5	0,0276	−10,1
0,0069	13,5	0,0310	−13,6
0,0103	13,6	0,0344	−13,5
0,0138	10,1	0,0379	−8,5
0,0172	5,2	0,0414	0,0
0,0207	0,0		

Побудувати діаграми $[v, t]$, $[s, t]$, $[w, t]$, $[v, s]$, $[w, s]$ і обчислити за діаграмами s_{max}, v_{max} і w_{max}.

8. За даними задачі 5 побудувати діаграми переміщень поршнів B і C. $\angle BOC = 60°$, $n = 1800$ *об/хв*.

9. Дезаксіальний мотор має такі розміри: радіус кривошипа $r = 80$ *мм*; довжина шатуна $l = 320$ *мм*; дезаксіал (зміщення осі циліндра відносно осі вала) $a = 24$ *мм*; нормальне число обертів $n = 1000$ *об/хв*.

Побудувати траєкторію середньої точки шатуна і діаграми $[s, t]$, $[v, t]$ і $[v, s]$. Знайти v_{max}.

10. В авіадвигуні BMW = VI кут між циліндрами $\gamma = 60°$; радіус кривошипа $R = 95$ *мм*; довжина головного шатуна $L = 340$ *мм*; довжина клика $r = 84$ *мм*; кут клика з головним шатуном $\varphi = 70°$; довжина причіпного шатуна $L_1 = 253$ *мм*; число обертів кривошипа $n = 1450$ *об/хв*.

a) зробити розмітку путей поршнів;

b) побудувати траєкторію клика;

c) побудувати діаграми $[s, t]$, $[v, t]$, $[w, t]$, $[v, s]$ і $[w, s]$ для поршнів головного і причіпного механізмів;

d) визначити на підставі побудованих діаграм v_{max} і w_{max} для обох поршнів.

Р о з д і л IV

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ МЕТОДОМ ПЛАНІВ ШВИДКОСТЕЙ І ПРИСКОРЕНЬ

§ 22. Визначення швидкостей з допомогою миттьового центра швидкостей (М.Ц.Ш.). Теорема Аронгольда-Кенеді

Дослідження кінематики механізмів методом діаграм, крім позитивних сторін (простота, наочність), має такі недоліки:

1) Неточність — особливо, коли потрібно графічно диференціювати криву з великою кривиною, при чому при подвійному диференціюванні похибка збільшується, наприклад, крива [w, t] часто виходить зовсім невдало.

2) Неможливість повністю досліджувати криволінійний рух — диференціюванням кривої швидкостей одержуємо лише діаграму зміни тангенціальних прискорень.

3) Неможливість безпосередньо визначати швидкості або прискорення, не побудувавши диференціальних або інтегральних кривих.

4) Вона дає лише чисельні значення векторів, про напрями ж їх ми можемо дізнатися лише після деяких міркувань.

Метод планів швидкостей і прискорень не має цих недоліків, тому останнім часом цей метод стали широко застосовувати при дослідженні різних механізмів, де аналітичний метод непридатний через свою складність.

Перш, ніж перейти до докладного вивчення названого методу, покажемо, як знаходити швидкості точок механізму з допомогою митьового центра швидкостей (М.Ц.Ш.).

З теоретичної механіки відомо (теорема Бернулі-Шаля), що при всякому плоскому рухові даної фігури її можна перевести з даного положення в будьяке інше положення повертанням навколо нерухомого центра. Твердження це застосовується і до нескінченно малих переміщень. Тоді центр повороту фігури зветься миттьовим центром обертання, але швидкість цієї точки миттьового центра обертання в даний момент дорівнює нулеві, тому ця точка зватиметься миттьовим центром швидкостей (М.Ц.Ш.)

Швидкості всіх інших точок пропорціональні миттьовим радіусам і напрямлені перпендикулярно до них.

Покажемо на прикладах, як використати зазначену властивість для визначення швидкості точок плоского механізму.

Дано нормальний кривошипно-шатунний механізм, кривошип якого обертається з заданою постійною кутовою швидкістю ω (рис. 86) проти годинникової стрілки. Визначити швидкість точки B, а також точок C і D в системі шатуна при положенні кривошипа під кутом, рівним 30°.

Швидкість точки A напрямлена перпендикулярно до OA, швидкість точки B — по BO.

Шатун AB має плоский рух.

М.Ц.Ш. знаходиться в точці перетину (точка P) перпендикулярів до v_A і v_B.

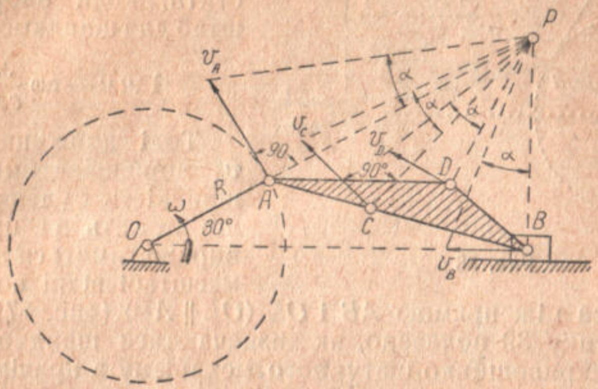


Рис. 86

Швидкості точок C і D напрямлені перпендикулярно до миттьових радіусів PC і PD.

Величини їх знаходять так:

Швидкість точки A

$$v_A = R\omega.$$

Відкладаємо цю швидкість в певному масштабі у вигляді вектора $v_A \perp OA$. Кінець цього вектора сполучаємо з точкою P.

Остання лінія утворює з миттьовим радіусом PA кут α.

Скориставшись з властивості М.Ц.Ш., проводимо лінії під кутом α до PC, PD, PB. Ці лінії і відсічують на проведених раніш напрямах вектори v_C, v_D, v_B, які в тім же масштабі означатимуть відповідні швидкості.

Рис. 87

Величини швидкостей точок, які лежать на лінії AB шатуна (в нашому прикладі v_C і v_B), можна визначити значно простіше таким способом: вектор v_A повертаємо навколо точки A (рис. 87) на 90°, кінець його попадає на точку M; через точку M проводимо $MN \parallel AB$. Пряма MN і відріже від миттьових радіусів відрізки, які в прийнятому масштабі виражатимуть відповідні швидкості (на рис. 87 дуга $v_C K$ випадково пройшла через точку M).

Як визначити зазначеним способом швидкість будьякої точки в системі шатуна, показано на рисунку 88 і не потребує пояснень ($Md \parallel AD$).

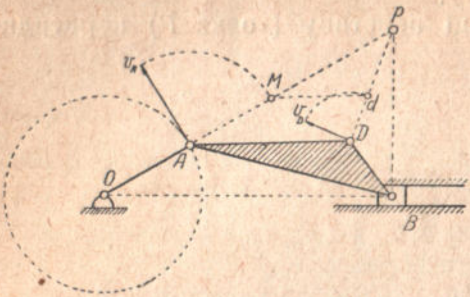


Рис. 88

Побудову, показану на рисунку 87, можна ще спростити, коли вибрати масштаб для швидкостей такий:

$$1\ мм - a\omega\,\frac{м}{сек}.$$

Тоді довжина вектора v_a дорівнюватиме OA, а швидкість будьякої точки, що лежать на прямій AB, виражатиметься в такому ж масштабі відрізком миттьового радіуса між прямою AB і OL ($OL \parallel AB$) (рис. 87).

На рисунку 89 показано, як визначаються швидкості будьякої точки кривошипно-шатунного механізму з причіпним шатуном з допомогою миттьового центра швидкостей.

Відрізки: Bb, Mm, Nn, Kk, Cc виражають у вибраному масштабі v_B, v_M, v_N, v_K, v_C.

Побудова ясна сама собою і не потребує пояснень ($ab \parallel AB$, $ak \parallel AK$, $kc \parallel KC$).

В складних механізмах для побудови плану швидкостей доводиться користуватися теоремою Аронгольда-Кенеді.

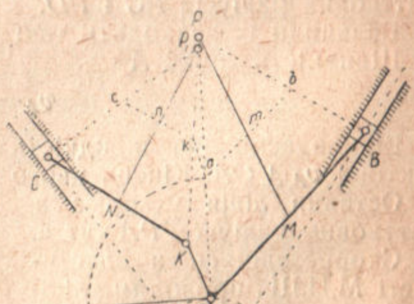


Рис. 89

Перед тим, як доводити цю теорему, встановимо такі поняття.

Коли дві ланки (a і b) будьякого плоского механізму рухаються як завгодно, то рух однієї ланки відносно другої буде теж плоский, і на підставі тієї ж теореми (Бернулі-Шаля) його можна уявити, як обертання навколо миттьових центрів. Ці центри звуться миттьовими центрами **відносного** обертання (М.Ц.В.О.). Значить М.Ц.В.О. ланки a відносно ланки b — це є миттьовий центр обертання ланки a, коли ланка b нерухома. Позначимо його через P_{ab}. М.Ц.В.О. ланки b відносно ланки a позначимо через P_{ba}. Легко упевнитись, що P_{ab} збігається з P_{ba}.

Справді: точка P_{ab}, яка являє миттьовий центр обертання ланки a при нерухомій ланці b, має швидкість рівну нулеві, тобто належить і ланці b; аналогічними міркуваннями доводимо, що і точка P_{ba} належить обом ланкам. Звідси робимо висновок, що P_{ab} і P_{ba} повинні збігатися, бо в противному разі ланки a і b мали б дві спільні точки, що лежать у площині їх руху, тобто являли б одну ланку.

Коли механізм має n ланок, то число М.Ц.В.О. дорівнюватиме $\frac{n(n-1)}{2}$. Це легко доводиться таким міркуванням. Зробимо одну ланку стояком, тоді інші $(n-1)$ ланки обертатимуться навколо стояка і дадуть $(n-1)$ М.Ц.В.О.

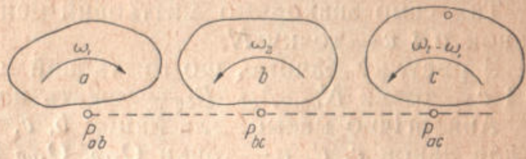


Рис. 90

Закріплюючи по черзі кожну ланку, ми збільшимо число М.Ц.В.О. в n раз, але сюди ж увійдуть і такі точки, як P_{ab} і P_{ba}, P_{bc} і P_{cb}, P_{cd} і P_{dc} і т. д., що попарно збігаються на підставі зазначеного вище.

Значить число М.Ц.В.О. буде вдвоє менше від $n(n-1)$.

Теорема Аронгольда-Кенеді: три миттьові центри відносного обертання P_{ab}, P_{bc} і P_{ac} ланок a, b і c при плоскому рухові лежать на одній прямій (рис. 90).

Припустимо, що в даний момент ланка b обертається відносно a з кутовою швидкістю ω_1 за годинниковою стрілкою; миттьовий центр відносного обертання — P_{ab}. В той же момент ланка c обертається навколо b з кутовою швидкістю ω_2 — проти годинникової стрілки; миттьовий центр відносного обертання — P_{bc}.

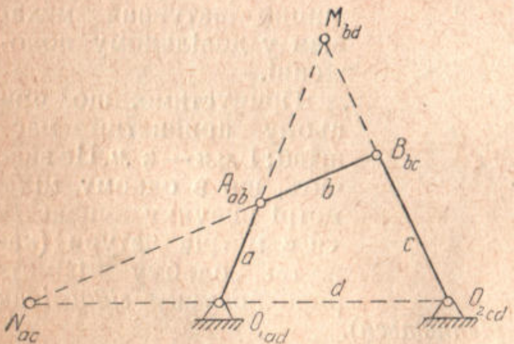


Рис. 91

Рух ланки c відносно a розглядаємо як складений рух — з руху її відносно b і руху b відносно a.

За **правилом** складання обертальних рухів **знайдемо** миттьовий центр обертання ланки c відносно a — P_{ac} на прямій, яка сполучає P_{ab} і P_{bc}; при чому відстань P_{ac} від P_{ab} і P_{bc} буде обернено пропорціональна кутовим швидкостям ω_1 і ω_2.

Візьмемо окремий випадок — чотиришарнірний механізм (рис. 91). Позначимо ланки його через a, b, c і d.

Зрозуміло, що

шарнір O_1 є центр відносного обертання ланок a і d
„ A „ „ „ „ „ a і b

шарнір B є центр відносного обертання ланок b і c
„ O_2 „ „ „ „ „ c і d

Для визначення М.Ц.В.О. ланок b і d надамо всій системі рух, протилежний рухові ланки b. Тоді вона зупиниться, а швидкості точок O_1 і O_2 будуть напрямлені перпендикулярно O_1A і O_2B. Миттьовий центр обертання ланки d відносно b буде точка M — точка перетину O_1A і O_2B.

Так само знаходимо миттьовий центр відносного обертання ланок a і c — точку N.

З рисунку бачимо, що миттьовий центр обертання ланок a, b і c — точки N_{ac}, A_{ab}, B_{bc} — лежать на одній прямій.

Аналогічно маємо: для ланок b, c, d — точки M_{bd}, B_{bc} і O_{2cd} і для ланок c, d, a — точки O_{2cd}, O_{1ad} і N_{ac}, які лежать відповідно на одній прямій.

§ 23. Побудова планів швидкостей, нормальних і повернених

З побудовою планів швидкостей в основному ми обізнані з теоретичної механіки.

В даному розділі ми поглибимо цей досить важливий спосіб дослідження механізмів у розрізі практичного його застосування на конкретних прикладах.

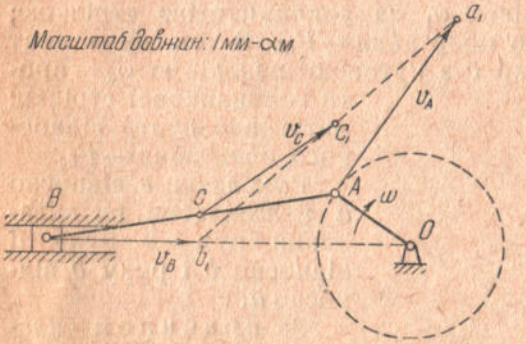


Рис. 92

На рисунку 92 вирисовано нормальний кривошипно-шатунний механізм у довільному положенні.

Припустимо, що при цьому прийнятий масштаб: 1 *мм* — α *м*. Це значить, що в одному міліметрі рисунку вміщається α метрів натури (кажуть: „одному міліметрові рисунку *відповідає* α метрів натури“ — але не *рівняється*).

Треба побудувати нормальний план швидкостей і знайти швидкість довільної точки шатуна, коли кривошип має в даний момент кутову швидкість — ω (ω — може бути і стала величина), напрямлену за годинниковою стрілкою.

Швидкість точки A напрямлена перпендикулярно до OA рівна

$$v_A = \overline{OA} \cdot \alpha \cdot \omega \ \frac{м}{сек}.$$

Швидкість точки B напрямлена по BO.

Вибираємо для швидкостей такий масштаб: $1\ мм - \beta\ \frac{м}{сек}$ (один міліметр рисунку відповідає швидкості $\beta\ \frac{м}{сек}$).

За полюс візьмемо довільну точку P і з неї проведемо вектор швидкості точки A: $v_A - Pa$. Довжину цього вектора визначаємо за відомим нам правилом (§ 15) так:

$$P_a = \frac{OA \cdot \alpha \cdot \omega}{\beta}.$$

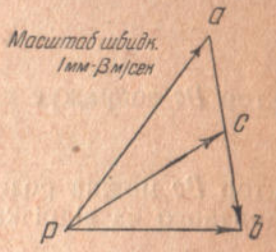


Рис. 93

Точка a зветься зображенням точки A на плані швидкостей. Швидкість точки B (точка B належить шатуну, що рухається плоским рухом) дорівнює геометричній сумі швидкостей точки A і відносної швидкості B навколо A:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B(A)} \tag{25}$$

Геометричне оформлення цього рівняння (25) подано на рисунку 93:

$$ab \perp AB; \quad Pb \parallel BO.$$

Точка b — зображення точки B на плані швидкостей.

Точка c — зображення довільної точки шатуна C на плані швидкостей — ділить відрізок ab (зображення шатуна) в такому ж відношенні, як і точка C шатун AB.

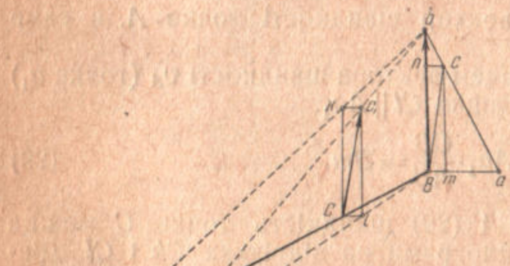


Рис. 94

Вектори: $\overline{ab}$, $\overline{Pb}$, $\overline{Pc}$ відповідно виражають швидкості $v_{B(A)}$, v_B, v_C. Величину швидкостей знаходимо так:

$$\bar{v}_{B(A)} = ab \cdot \beta;$$

$$\bar{v}_B = \overline{Pb} \cdot \beta;$$

$$\bar{v}_C = \overline{Pc} \cdot \beta.$$

Швидкість точки C можна знайти на підставі загальної теореми про розподіл швидкостей точок відрізка, що рухається плоским рухом.

Припустимо, що відрізок AB (рис. 94) рухається плоским рухом. Швидкість точки B задана вектором $\overline{Bb}$, швидкість точки A напрямлена по лінії $\alpha\alpha$.

Через точку B проводимо лінію $Ba \parallel \alpha\alpha$, а через b лінію

$ba \perp AB$. Ці дві лінії, перетинаючись у точці a, дадуть нам величини v_A і $v_{B(A)}$:

$$\bar{v}_A = \overline{Ba}\cdot\beta \quad \text{і} \quad \bar{v}_{B(A)} = \overline{ab}\cdot\beta,$$

де β — масштаб швидкостей.

Поділимо відрізок ab точкою c в такому відношенні, в якому точка C, що лежить на відрізкові AB, ділить цей відрізок, тобто:

$$\frac{ac}{cb} = \frac{AC}{CB}.$$

Вектор Bc зображує швидкість точки C в тому ж масштабі:

$$\bar{v}_C = \overline{Bc}\cdot\beta.$$

Вектор Bc можна розглядати, як діагональ паралелограма, побудованого на відрізках Bm і Bn, при чому:

$$Bm = cn = Ba\cdot\frac{cb}{ab} = Ba\frac{CB}{AB}; \tag{26}$$

$$Bn = cm = Bb\cdot\frac{ac}{ab} = Bb\frac{AC}{AB}. \tag{27}$$

Сполучаємо точку A з кінцем вектора швидкості v_B (точка b) і через точку C проводимо лінію $CK \parallel Bb$

$$CK = Bb\cdot\frac{AC}{AB} = Bn. \tag{28}$$

По лінії $\alpha\alpha$ відкладемо вектор швидкості точки A, а саме $Aa_1 = Ba$.

Сполучаємо точку B з кінцем вектора швидкості v_A (точка a_1) і через точку C проводимо лінію $Cl \parallel Aa_1$.

$$Cl = Aa_1\cdot\frac{CB}{AB} = Bm. \tag{29}$$

На підставі рівнянь (28) і (29) швидкість точки C можна знайти, побудувавши паралелограми на відрізках Ck і Cl. Діагональ його Cc_1 і виражатиме швидкість точки C в прийнятому масштабі.

Далі маємо: $Ck \# lc_1$, тому на підставі рівняння (28)

$$\frac{lc_1}{Bb} = \frac{AC}{AB},$$

але

$$\frac{AC}{AB} = \frac{a_1l}{a_1B},$$

тому

$$\frac{lc_1}{Bb} = \frac{a_1l}{a_1B}. \tag{30}$$

Умова паралельності відрізків lc_1 і Bb і рівняння (30) доводять, що трикутник la_1c_1 подібний до трикутника Ba_1b. Звідси робимо висновок, що точка c_1 лежить на прямій a_1b і ділить її в такому ж відношенні, в якому точка C ділить відрізок AB.

Точку C ми взяли довільно, тому висновки можна застосувати для всіх точок відрізка AB.

Висновки:

1) Кінці векторів швидкостей точок відрізка, що рухається плоским рухом, лежать на прямій, яка сполучає кінці векторів швидкостей кінцевих його точок.

2) Для визначення швидкостей будьякої точки такого відрізка треба сполучити кінці векторів швидкостей кінцевих його точок, поділити одержаний відрізок в такому ж відношенні, в якому взята точка ділить цей відрізок; коли сполучити знайдену точку із взятою на відрізку, то одержимо вектор, що виражає в прийнятому масштабі шукану швидкість.

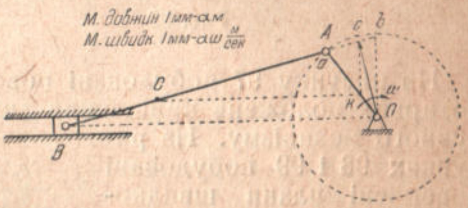


Рис. 95

Знайдений спосіб визначення швидкостей точок відрізка можна застосувати і до визначення швидкості довільної точки шатуна AB (рис. 92). Він дуже простий, але для застосування його треба знати швидкості кінцевих точок шатуна.

Побудова плану швидкостей, показана на рисунку 93, значно спрощується, коли

a) за полюс вибрати точку O;

b) масштаб швидкостей взяти $\beta = \alpha\omega$;

c) швидкості напрямити під кутом 90° до їх дійсних напрямів (повертати на 90° проти обертання кривошипа).

На рисунку 95 показана така побудова. Швидкість точки A, рівна $v_A = OA \cdot \alpha \cdot \omega \frac{м}{сек}$, виразиться відрізком $Oa = OA$:

$$Oa = \frac{v_A}{\beta} = \frac{OA \cdot \alpha \cdot \omega}{\alpha\omega} = OA.$$

Таким чином зображення точки A збігається з самою точкою; вектор швидкості $v_{B(A)} - ab$ є продовження AB; вектор швидкості $- v_B - ob \perp OB$; трикутник aOb є повернений план швидкостей. Поверненим він зветься тому, що вектори швидкостей, які складають цей трикутник, мають не дійсний напрям, а повернені на 90° проти обертання кривошипа.

Для визначення швидкості точки C проводимо $Ck \parallel BO$; $Kc \parallel ob$.

Точка c є зображення точки C, а Oc — вектор швидкості точки C, повернений на 90° проти годинникової стрілки (для одержання дійсного напряму вектор Oc треба повернути за рухом кривошипа на 90°).

Величина швидкості точки C:

$$v_C = Oc \cdot a\omega \frac{м}{сек}.$$

На рисунку 96 побудовані повернені плани швидкостей для трьох положень кривошипа OA, OA_1, OA_2.

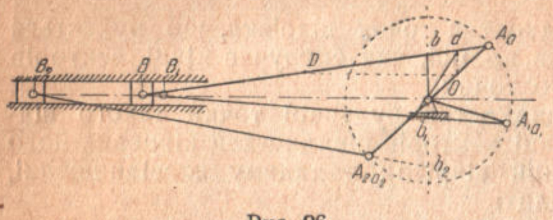


Рис. 96

Відповідні плани швидкостей будуть: aOb, a_1Ob_1, a_2Ob_2.

Для положення кривошипа OA знайдена швидкість довільної точки D, що лежить на шатуні AB. Побудова така проста, що пояснень не потребує.

На рисунку 97 побудовані повернені плани швидкостей для чотирьох положень кривошипа дезаксіального кривошипно-шатунного механізму. На рисунках 98 і 99 побудовані повернені плани швидкостей для двох положень кривошипно-шатунного механізму з причіпним шатуном.

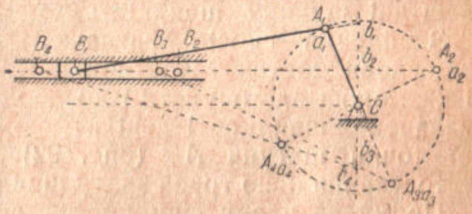


Рис. 97

На рис. 98: $Ob_1 \perp OB_1$, a_1b_1 — продовження B_1A_1; a_1k_1 — продовження K_1A_1; $b_1k_1 \parallel B_1K_1$; $k_1c_1 \parallel C_1K_1$ і $Oc_1 \perp OC_1$.

На рис. 99: $Ob_2 \perp OB_2$; $b_2k_2 \parallel B_2K_2$; $k_2c_2 \parallel K_2C_2$ і $Oc_2 \perp OC_2$.

Рис. 98

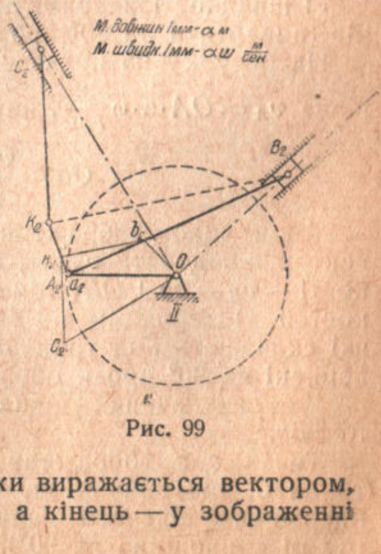


Рис. 99

Абсолютна швидкість будьякої точки виражається вектором, початок якого знаходиться в полюсі, а кінець — у зображенні цієї точки на плані швидкостей.

Відносна швидкість виражається вектором, початок якого знаходиться в точці, відносно якої ця точка обертається, а кінець — в її зображенні на плані швидкостей.

Всі швидкості (вектори) повернені на 90° проти руху кривошипа.

З теоретичної механіки відомо (та це видно і з наведених прикладів), що для побудови плану швидкостей даного механізму треба знати швидкість однієї точки по величині і напряму і напрям швидкості другої точки.

В складних механізмах часто ми такої умови не маємо.

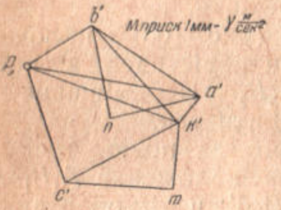


Рис. 100

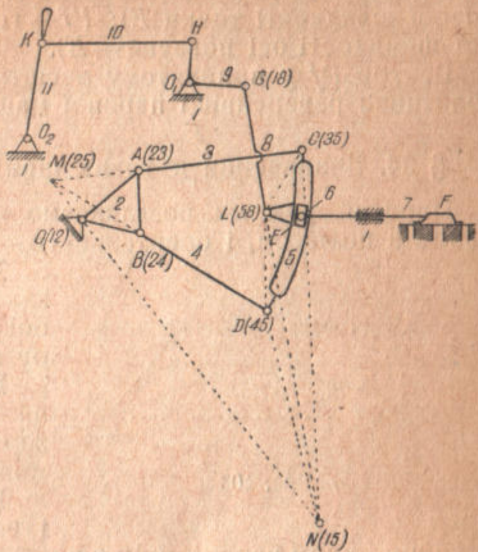


Рис. 101

На рисунку 101 показана куліса Стефенсона. Ланка *2* конструктивно оформлюється у вигляді двох ексцентриків, які закріплені на валу *O*. Ланка *11* у робочому стані закріплена, тому ланки *9* і *10* будуть нерухомі, тобто являтимуть разом з ланкою *1* стояк.

Коли вал обертається з кутовою швидкістю ω, то швидкості точок A і B визначаються рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} v_A &= OA\cdot\alpha\omega\,\frac{м}{сек}, \\ v_B &= OB\cdot\alpha\omega\,\frac{м}{сек}, \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

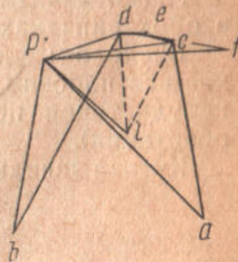


Рис. 102

де α — масштаб, у якому вирисовано механізм.

Для визначення швидкостей точок C і D і дальшої побудови плану швидкостей треба знати напрям швидкостей цих точок, тобто знати миттьовий центр обертання куліси (N *15*). Цей центр на рисунку 101 знайдений з допомогою теореми *Аронгольда-Кенеді*. Дальша побудова не важка. План швидкостей побудований на рисунку 102.

На ньому: $Pa \perp OA$; $ac \perp AC$; $Pc \perp NC$; $Pb \perp OB$; $Pd \perp ND$; $bd \perp BD$.

Через точки c і d проведена дуга, подібна до дуги CD; точка e ділить дугу cd в такому ж відношенні, в якому точка E ділить дугу CD; ef — дотична до дуги cd в точці e (напрям відносної швидкості точки E); Pf — горизонталь (напрям переносної швидкості осі повзуна — E).

Вектор Pf у прийнятому масштабі виражає швидкості точок золотника реверсивної парової машини.

§ 24. Визначення кутових швидкостей ланок механізму

Плоский рух ми розглядаємо як складений з поступного разом з полюсом, і обертального — навколо полюса.

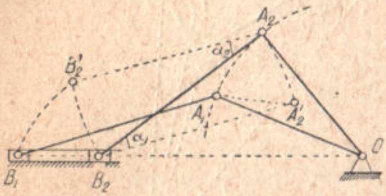


Рис. 103

Характер поступного руху залежить від вибору полюса; обертальний рух від цього вибору не залежить.

Шатун (рис. 103) з положення A_1B_1 перемістився в положення A_2B_2. Переміщення це можна уявити так.

Візьмемо за полюс точку B і шатун з положення A_1B_1 поступним рухом перемістимо в положення B_2A_2'; потім обертанням його навколо точки B_2 на кут α_1 ставимо в положення A_2B_2 (поступний рух — прямолінійний).

Можна взяти за полюс точку A; тоді поступним рухом шатун переміщується з положення A_1B_1 в положення A_2B_2', а потім обертанням навколо A_2 на кут α_2 — в шукане положення — A_2B_2 (поступний рух — криволінійний).

Легко бачити з рисунку, що $\alpha_1 = \alpha_2$ і що напрями обертань в обох випадках однакові (проти годинникової стрілки).

Висновок: для визначення кутової швидкості ланки, яка рухається плоским рухом, треба лінійну відносну швидкість якої-небудь точки поділити на відстань її від полюса (відносного обертання).

Кутова швидкість головного шатуна в положенні I (рис. 98)

$$\omega_1 = \frac{\overline{a_1b_1} \cdot \alpha\omega}{A_1B_1\alpha} = \frac{\overline{a_1b_1}}{A_1B_1} \cdot \omega. \tag{31}$$

Для причіпного шатуна кутова швидкість буде

$$\omega_2 = \frac{\overline{k_1c_1} \cdot \alpha\omega}{K_1C_1\alpha} = \frac{\overline{k_1c_1}}{K_1C_1} \cdot \omega. \tag{32}$$

Коли побудувати плани швидкостей для положень кривошипа через кожні 30° (краще навіть через менший проміжок) і для кожного положення визначити кутову швидкість шатуна за формулою (31), то можна потім побудувати діаграму кутової швидкості шатуна — діаграму $[\omega_1, t]$, відклавши одержані результати на перпендикулярах до абсцис, що відповідають часові повороту кривошипа на 30°, 60° і т. д.

Для спрощення цієї роботи (побудови діаграми) можна на зазначених перпендикулярах відкласти відрізки a_1b_1, a_2b_2 і т. д., які для відповідних положень виражають швидкість точки B відносно точки A.

Цілком зрозуміло, що в даному випадку масштаб кутової швидкості на діаграмі буде

$$1\ мм - \frac{\omega}{AB}\,\frac{радіан}{сек}\ (AB \text{ — в міліметрах}).$$

§ 25. Побудова планів прискорень

При обертанні тіла навколо осі легко визначити прискорення будьякої точки його, коли відоме прискорення однієї точки.

Припустимо, що тіло M обертається навколо осі O (рис. 104).

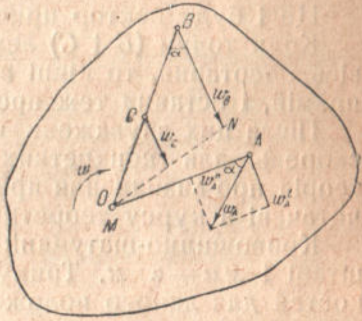


Рис. 104

Точка A цього тіла має прискорення, яке виражається вектором w_A у вибраному масштабі, що з OA становить кут α.

З теоретичної механіки відомо, що прискорення точки при криволінійному рухові можна розкласти на нормальне, напрямлене від точки по радіусу кривини і рівне

$$w^n = \frac{v^2}{\rho},$$

і тангенціальне

$$w^t = \frac{dv}{dt}.$$

При обертальному рухові нормальне й тангенціальне прискорення виражаються так:

$$w^n = r\omega^2,$$
$$w^t = r\varepsilon,$$

де ω — кутова швидкість, а ε — кутове прискорення обертального руху.

Тому в нашому випадку

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w_A^t}{w_A^n} = \frac{\varepsilon\overline{OA}}{\omega^2\overline{OA}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{33}$$

Висновок перший: прискорення всіх точок даного тіла утворюють з радіусами обертань рівні кути, бо ε і ω для всіх точок однакові.

Прискорення точки A по величині дорівнює

$$w_A = \sqrt{(w_A^n)^2 + (w_A^t)^2} = \sqrt{(\omega^2 \overline{OA})^2 + (\varepsilon \overline{OA})^2},$$

або

$$w_A = \overline{OA} \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \qquad (34)$$

Висновок другий: прискорення точок по величині пропорціональні відстанням їх від осі обертання.

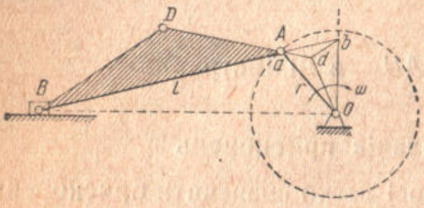


Рис. 105

На підставі зроблених висновків для визначення прискорення точки B, коли задано w_A, відкладаємо кут $OBN = \alpha$ (в напрямі ε), а на стороні його відрізок

$$BN = w_A \frac{OB}{OA}.$$

Це і буде вектор прискорення точки B.

Коли точки (B і C) лежать на прямій, що проходить через вісь обертання, то кінці векторів їх прискорень теж лежать на прямій, і остання теж проходить через вісь обертання.

Після цих зауважень переходимо до побудови планів прискорень для конкретних механізмів, вважаючи, що загальна теорія про визначення прискорень точок плоскої фігури відома читачеві з курсу теоретичної механіки[1].

Кривошипно-шатунний механізм (рис. 105) побудований у масштабі 1 *мм* — α *м*. Трикутник aOb є повернений план швидкостей для даного положення; масштаб для плану швидкостей: 1 *мм* — $\alpha\omega \frac{м}{сек}$; кривошип обертається з постійною кутовою швидкістю.

Прискорення точки A

$$w_A = OA\alpha\omega \frac{м}{сек^2}. \qquad (35)$$

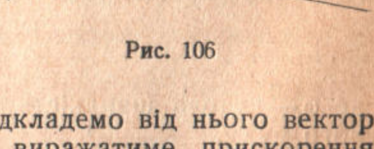


Рис. 106

Для визначення прискорення повзуна і довільної точки шатуна побудуємо план прискорень.

Візьмемо довільний полюс P_1 і відкладемо від нього вектор P_1a', який у вибраному масштабі виражатиме прискорення точки A (рис. 106). Масштаб прискорень виберемо такий: 1 *мм* — $\gamma \frac{м}{сек^2}$; тоді довжина вектора на підставі рівняння (35) буде:

[1] Проф. *Е. Л. Николаи.* Лекции по теоретической механике. Часть I. 1. Статика твердого тела. 2. Кинематика. §§ 100, 101, стор. 197—205. ОНТИ, 1935.

$$P_1a' = \frac{OA \cdot \alpha\omega^2}{\gamma} \text{ мм}, \tag{36}$$

де $P_1a' \parallel AO$.

Прискорення точки B за властивістю плоского руху дорівнює

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}_{B(A)},$$

або

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}^n_{B(A)} + \overline{w}^t_{B(A)}. \tag{37}$$

Для геометричного оформлення цього рівняння (побудова чотирикутника прискорень) треба знайти величину $w^n_{B(A)}$; тоді невідомими лишаться величини $w^t_{B(A)}$ і w_B (напрями всіх прискорень відомі) і побудова чотирикутника стане можлива.

$$w^n_{B(A)} = \frac{(v_{B(A)})^2}{l} = \frac{(\overline{ab} \cdot \alpha \cdot \omega)^2}{AB \cdot \alpha} = \frac{\overline{ab^2} \cdot \alpha \cdot \omega^2}{AB}. \tag{38}$$

Побудова: через a' проводимо лінію $a'x \parallel AB$, відкладаємо $a'n = \frac{w^n_{B(A)}}{\gamma}$ (в напрямі від B до A); з точки n ставимо перпендикуляр до $a'n$ (напрям $w^t_{B(A)}$), а через полюс проводимо $P_1y \parallel BO$ (напрям w_B). P_1y перетинається з проведеним перпендикуляром в точці b'.

$P_1a'nb'$ — чотирикутник прискорень;
a' і b' — зображення точок A і B на плані прискорень;
$a'b'$ — зображення шатуна AB на плані прискорень.

$$\overline{w}_A = \overline{P_1a'} \cdot \gamma \quad \frac{м}{сек^2} \tag{39a}$$

$$\overline{w}_B = \overline{P_1b'} \cdot \gamma \quad „ \tag{39b}$$

$$\overline{w}^n_{B(A)} = \overline{a'n} \cdot \gamma \quad „ \tag{39c}$$

$$\overline{w}^t_{B(A)} = \overline{nb'} \cdot \gamma \quad „ \tag{39d}$$

$$\overline{w}_{B(A)} = \overline{a'b'} \cdot \gamma \quad „ \tag{39e}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{nb'}}{\overline{a'n}} = \frac{\overline{nb'} \cdot \gamma}{\overline{a'n} \cdot \gamma} = \frac{w^t_{B(A)}}{w^n_{B(A)}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

але $\overline{a'x}$ — є напрям шатуна; звідси: зображення шатуна на плані прискорень повернене відносно шатуна на кут $180° - \alpha$, при чому $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$. (Відома теорема з курсу теоретичної механіки).

Візьмемо в системі шатуна довільну точку D (рис. 105).

Зображення її на плані швидкостей знайдемо, коли продовжимо Da до перетину з $\overline{bd}$ паралельною BD.

Відрізки ad, bd і Od виражають у вибраному масштабі відповідно швидкості: $v_{D(A)}$, $v_{D(B)}$, v_D.

Для визначення прискорення точки D використаємо геометричні рівняння:

$$\overline{w}_D = \overline{w}_A + \overline{w}^n_{D(A)} + \overline{w}^t_{D(A)} \tag{40}$$

і

$$w^n_{D(A)} = \frac{v^2_{D(A)}}{AD \cdot \alpha}. \tag{41}$$

З другого боку:

$$\overline{w}_D = \overline{w}_B + \overline{w}^n_{D(B)} + \overline{w}^t_{D(B)} \tag{42}$$

і

$$w^n_{D(B)} = \frac{v^2_{D(B)}}{BD \cdot \alpha}. \tag{43}$$

Напрями прискорень, що входять у рівняння (40) і (42), відомі, тому прискорення точки D знайдемо так.

На підставі рівнянь (40) і (41) через точку a' проводимо лінію $a'z \parallel DA$; відкладаємо в напрямі від D до A відрізок $a'm = \frac{w^n_{D(A)}}{\gamma}$ — вектор відносного нормального прискорення точки D (відносно A).

З точки m ставимо перпендикуляр—напрям $w^t_{D(A)}$; величини його ми не знаємо.

Далі, користуючись рівняннями (42) і (43), через точку b' проводимо лінію $b'u \parallel BD$ і відкладаємо в напрямі від D до B відрізок $b'q = \frac{w^n_{D(B)}}{\gamma}$ — вектор відносного нормального прискорення точки D (відносно B). З точки q ставимо перпендикуляр—напрям $w^t_{D(B)}$; величини його ми теж не знаємо.

Напрями прискорень $w^t_{D(A)}$ і $w^t_{D(B)}$ перетинаються в точці d' — зображення точки D на плані прискорень.

$$\overline{w}^n_{D(A)} = \overline{a'm} \cdot \gamma \quad \frac{м}{сек^2} \tag{44a}$$

$$\overline{w}^t_{D(A)} = \overline{md'} \cdot \gamma \quad " \tag{44b}$$

$$\overline{w}^n_{D(B)} = \overline{b'q} \cdot \gamma \quad " \tag{44c}$$

$$\overline{w}^t_{D(B)} = \overline{qd'} \cdot \gamma \quad " \tag{44d}$$

$$\overline{w}_{D(A)} = \overline{a'd'} \cdot \gamma \quad " \tag{44e}$$

$$\overline{w}_{D(B)} = \overline{b'd'} \cdot \gamma \quad " \tag{44f}$$

$a'd'$ і $b'd'$ — зображення ліній AD і BD на плані прискорень.

Фігура $a'b'd'$ є зображення фігури ABD.

На підставі рівнянь (34), (39e), (44e) і (44f) легко одержуємо:

$$\frac{a'b'}{AB} = \frac{b'd'}{BD} = \frac{a'd'}{AD} = \frac{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}{\gamma}, \tag{45}$$

де ω і ε — кутова швидкість і кутове прискорення шатуна в даний момент.

Рівняння (45) виражає відому з теоретичної механіки теорему про подібність фігури, утвореної зображеннями на плані прискорень з цупкою фігурою, яку вона зображає.

При користанні цією теоремою значно полегшується знаходження прискорення довільної точки тіла, що рухається плоским рухом.

На дальших прикладах ми це покажемо.

На рисунку 107 побудований план прискорень для кривошипно-шатунного механізму з причіпним шатуном для положення, поданого на рисунку 99, де P_1 — полюс плана прискорень; a', b', c' — зображення точок A, B і C на плані прискорень.

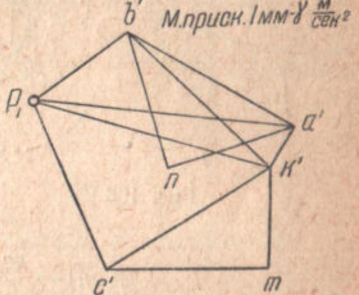


Рис. 107

$$P_1a' = \frac{w_A}{\gamma} \quad \text{і} \quad P_1a' \parallel A_2O;$$

$$a'n = \frac{w^n_{B(A)}}{\gamma} \quad \text{і} \quad a'n \parallel B_2A_2;$$

$$b'n \perp a'n; \qquad P_1b' \parallel OB_2;$$

$a'b'$ — зображення шатуна A_2B_2.

На підставі теореми про подібність на $a'b'$ будуємо трикутник, подібний до трикутника $A_2K_2B_2$, для чого при точці a' будуємо кут, рівний кутові $K_2A_2B_2$, а при точці b' — кут, рівний кутові $K_2B_2A_2$. ($\angle k'a'b' = \angle K_2A_2B_2$ відкладено в напрямі проти годинникової стрілки від $a'b'$ — за аналогією з $\angle K_2A_2B_2$ і $k'b'a' = \angle K_2B_2A_2$ відкладено за годинниковою стрілкою від $b'a'$ — за аналогією з $\angle K_2B_2A_2$).

Точка k' — зображення точки K_2 (клика) на плані прискорень

$$k'm = \frac{w^n_{c(k)}}{\gamma} \quad \text{і} \quad k'm \parallel C_2K_2;$$

$$mc' \perp k_1m; \qquad P_1c' \parallel C_2O.$$

$c'k'$ — зображення причіпного шатуна C_2K_2.

Прискорення будьякої точки в системі головного чи причіпного шатуна легко знайдемо, коли визначимо, на підставі теореми про подібність, її зображення.

Відрізок, який сполучає полюс із зображенням точки, помножений на γ, і дасть нам шукане прискорення.

§ 26. Побудова повернених планів прискорень. Графічне визначення нормального відносного прискорення

Побудову планів прискорень можна значно спростити, коли:

a) вибрати відповідний масштаб γ;

b) за полюс у розібраних прикладах взяти точку O;

c) умовитися, що напрям прискорень буде від зображень до полюса.

Для побудови плану прискорень нормального кривошипно-шатунного механізму виберемо масштаб $\gamma = \alpha\omega^2$; тоді на підставі рівняння (36) прискорення точки A виражатиметься вектором $P_1a' = AO$. Коли ж взяти за полюс точку O_1, то положення вектора прискорення w_A суміститься з положенням кривошипа AO, при чому прискорення буде напрямлене до полюса (рис. 108).

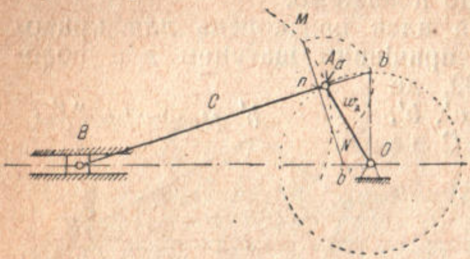


Рис. 108

Нормальне відносне прискорення піде вздовж шатуна AB. Величину його знаходимо за формулою (38), а довжина вектора, що його виражає при вибраному масштабі $\gamma = \alpha\omega^2$, буде:

$$\overline{na} = \frac{w_{B(A)}}{\gamma} = \frac{\overline{ab}^2\,\alpha\omega^2}{AB\alpha\omega^2} = \frac{\overline{ab}^2}{AB} \tag{46}$$

Формула (46) показує, що в даному випадку нормальне відносне прискорення легко визначити графічно так.

Поділимо шатун AB точкою C пополам і радіусом CA, з точки C, як з центра, проведемо дугу. З центра A (він же a) робимо засічку цієї дуги радіусом ab.

Хорда, яка сполучає засічені точки, перетинається з шатуном в точці n. Очевидно, na задовольнятиме рівняння (46). Продовжимо проведену хорду до перетину з лінією BO (якщо вона ще не перетнулась з BO) в точці b'.

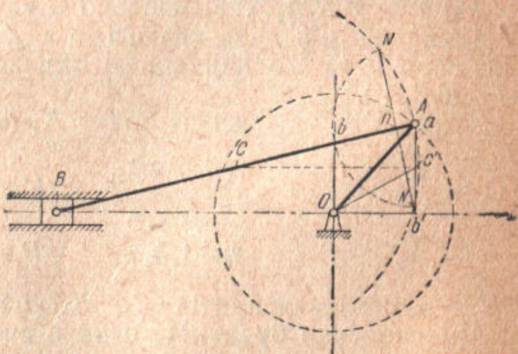


Рис. 109

Чотирикутник $b'Oan$ і буде повернений план прискорень. Його звуть поверненим тому, що в ньому вектори прискорень напрямлені *від зображень до полюса.*

Підкреслюємо, що на повернутому плані прискорень прискорення мають дійсні напрями, тоді як на повернутому плані швидкостей, швидкості повернені на 90°.

На повернутому плані прискорень зображення точки A теж збігається з самою точкою.

Таким же способом на рисунку 109 побудований повернений план прискорень для іншого положення кривошипа нормального кривошипно-шатунного механізму (переплетений чотирикутник $b'Oan$), а на рисунку 110—для дезаксіального.

Коли сполучити точки a і b', то одержимо зображення ab' шатуна AB на повернутому плані прискорень.

Користуючись повернутим планом прискорень, дуже легко знайти прискорення будьякої точки шатуна AB, приміром, точки C (рис. 109). Для цього треба лише через взяту точку провести лінію, паралельну BO до перетину з ab'. Точка перетину і буде зображенням взятої точки на плані прискорень. Прискорення ж її виражатиметься вектором, який сполучає зображення з полюсом O.

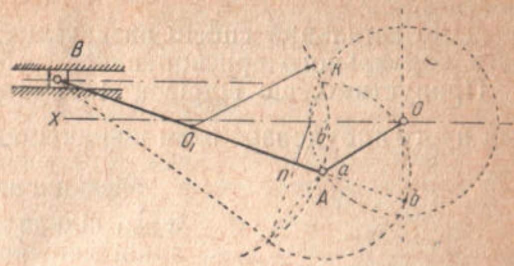


Рис. 110

На рисунку 109 $Cc' \parallel BO$ і $\overline{w}_c = \overline{c'O} \cdot \alpha \cdot \omega^2 \ \frac{м}{сек^2}$.

Коли точка лежить не на лінії AB, то для визначення її прискорення користуються теоремою про подібність.

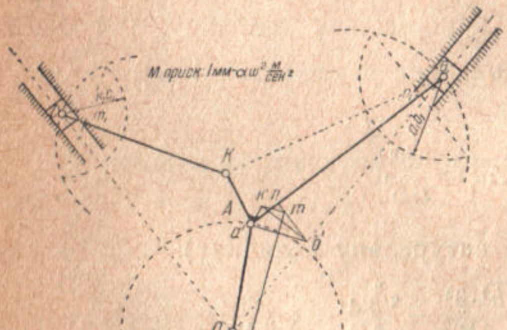


Рис. 111

На рисунку 111 зазначеним способом побудований повернений план прискорень для кривошипно-шатунного механізму з причіпним шатуном для положення, показаного на рисунку 98 (механізм на обох рисунках в одному масштабі).

Для ясності рисунку нормальні відносні прискорення побудовані коло других кінців шатунів, а потім відрізки перенесені у відповідні місця:

$$a'n \# Bn_1; \qquad k'm \# Cm.$$

Зображення k' знайдено побудовою трикутника $a'b'k'$, подібного до трикутника ABK.

$$nb' \perp a'n; \qquad mc' \perp k'm$$

(точка m випадково попала на nb').

Відносні швидкості точок B і C (вектори a_1b_1 і k_1c_1) взяті з рисунку 98.

Наведений спосіб графічного визначення відносного нормального прискорення можливий лише в такому випадку, коли вектор відносної швидкості менший за довжину відповідної ланки ($ab < AB$).

В кривошипно-шатунних механізмах ця умова завжди здійснюється.

Дамо загальний спосіб визначення довжини вектора відносного нормального прискорення.

Припустимо, що відрізок AB рухається плоским рухом і що для нього побудовано план швидкостей в масштабі: 1 *мм* — $\beta \frac{м}{сек}$.

Рис. 112

Для визначення довжини вектора $w^n_{B(A)}$ відкладаємо відрізок AB (при великій довжині відкладаємо в масштабі: 1 *мм* — α *м*) (рис. 112). З якогонебудь кінця його ставимо перпендикуляр, на якому відкладаємо вектор відносної швидкості — $v_{B(A)}$ — ab.

Одержану точку b сполучаємо з другим кінцем відрізка (точка B) і до прямої bB з точки b ставимо перпендикуляр до перетину з продовженням відрізка (точка n). Відрізок An і буде довжина вектора $w^n_{B(A)}$. Масштаб прискорення: 1 *мм* — $\beta^2 \frac{м}{сек^2}$, коли відрізок відкладено в нормальну величину, і 1 *мм* — $\frac{\beta^2}{\alpha} \frac{м}{сек^2}$, коли відрізок відкладено в масштабі: 1 *мм* — α *м*.

Дійсно:

$$\overline{An} = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}},$$

або (коли AB відкладено в натуральну величину):

$$\overline{An} \cdot \beta^2 = \frac{\overline{ab}^2 \cdot \beta^2}{AB} = \frac{v^2_{B(A)}}{AB} = w^n_{B(A)}.$$

Підкреслюємо, що наведені способи графічного визначення відносного нормального прискорення вірні лише при певному співвідношенні між масштабами, а саме:

$$\gamma = \frac{\beta^2}{\alpha}. \qquad (47)$$

В наведених нами прикладах:

$$\beta = \alpha \cdot \omega;$$

$$\gamma = \alpha \cdot \omega^2;$$

тому формула (47) обертається в тотожність:

$$\alpha \cdot \omega^2 = \frac{\alpha^2\omega^2}{\alpha} = \alpha\omega^2.$$

Необхідно також відмітити, що висновки 1) і 2), зроблені в § 23 для швидкостей, цілком стосуються й прискорень. У формулюванні їх треба тільки слово „швидкість" замінити словом „прискорення". Доведення аналогічне, тому ми його не наводимо.

§ 27. Спосіб Мора

Повернений план прискорення кривошипно-шатунного механізму можна побудувати простіше, застосувавши спосіб Мора (рис. 113).

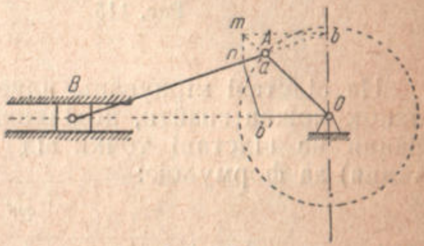


Рис. 113

Будуємо повернений план швидкостей aOb; через точку b проводимо $bm \parallel OB$ до перетину з кривошипом або його продовженням; через точку m проводимо $mn \parallel Ob$ до перетину з AB в точці n; з точки n ставимо перпендикуляр до AB до перетину з OB в точці b'. Фігура $b'Oan$ і буде повернений план прискорень, побудований у масштабі $\gamma = \alpha\omega^2$.

Дійсно, $\triangle\ mab \backsim \triangle\ BAO$, звідки

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ma}{AO}. \tag{48}$$

З подібності трикутників mna і bAO маємо:

$$\frac{ma}{AO} = \frac{an}{ab}. \tag{49}$$

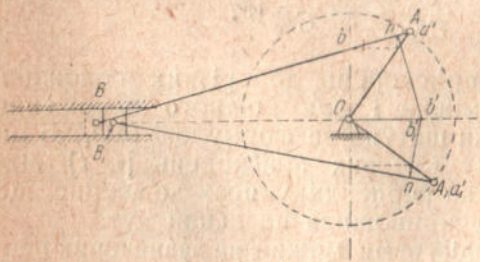


Рис. 114

З рівнянь (48) і (49) знаходимо:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{an}{ab},$$

або

$$an = \frac{\overline{ab}^2}{AB}.$$

Таким чином aO і na в прийнятому масштабі виражають відповідно прискорення w_A і $w^n_{B(A)}$, а $b'n$ і $b'O$ є напрями прискорень $w^t_{B(A)}$ і w_B.

Значить, чотирикутник $b'Oan$ і є план прискорень.

На рисунку 114 способом Мора побудовані плани прискорень ще для двох положень нормального кривошипно-шатунного механізму (переплетені чотирикутники $b'Oan$), а на рисунку 115 — для двох положень дезаксіального кривошипно-шатунного механізму. Побудова аналогічна, треба тільки пам'ятати, що $bm \parallel BO$.

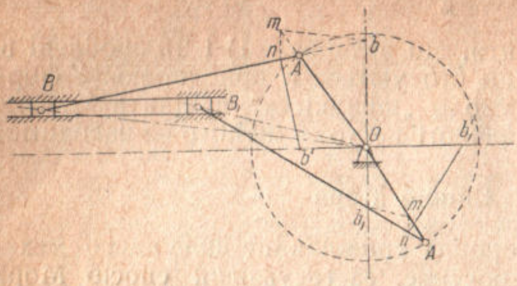


Рис. 115

Зауважимо, що спосіб Мора не можна застосовувати для мертвих положень кривошипно-шатунного механізму.

§ 28. Визначення кутових прискорень ланок механізму

На підставі міркувань, наведених у § 24, кутове прискорення ланок можна знайти, поділивши відносне тангенціальне прискорення на відстані точки від полюса (центр відносного обертання) за формулою:

$$w^t = r\varepsilon. \tag{50}$$

Так, кутове прискорення головного шатуна для положення механізму, показаного на рисунку 111, буде:

$$\varepsilon = \frac{w^t_{B(A)}}{AB\cdot\alpha} = \frac{b'n\cdot\alpha\omega^2}{AB\cdot\alpha} = \frac{b'n}{AB}\omega^2. \tag{51}$$

Кутове прискорення причіпного шатуна для цього ж положення:

$$\varepsilon_1 = \frac{w^t_{c(k)}}{CK\cdot\alpha} = \frac{c'm\cdot\alpha\omega^2}{CK\cdot\alpha} = \frac{c'm}{CK}\omega^2. \tag{52}$$

Коли побудувати плани прискорень для різних положень кривошипа через певні проміжки і для кожного положення визначити кутове прискорення шатуна за формулою (51), то ми зможемо побудувати діаграму кутових прискорень [ε, t], відклавши одержані результати на перпендикулярах до абсцис, що відповідають часові повороту кривошипа на даний кут.

Для спрощення побудови діаграми можна на зазначених перпендикулярах відкладати відрізки b'_1n, b'_2n, b'_3n і т. д., які для відповідних положень виражають відносне тангенціальне прискорення.

Зрозуміло, що в даному випадку масштаб кутового прискорення буде:

$$1\ мм - \frac{\omega^2}{AB}\,\frac{1}{сек^2}\ (AB\text{ — в міліметрах}).$$

§ 29. Визначення радіусів кривини траєкторій точок механізму

Про характер траєкторії точки можна судити, коли знати радіуси кривини в різних її точках.

Радіус кривини визначається за рівнянням:

$$w^n = \frac{v^2}{\rho}. \qquad (53)$$

де w^n — абсолютне нормальне прискорення точки.

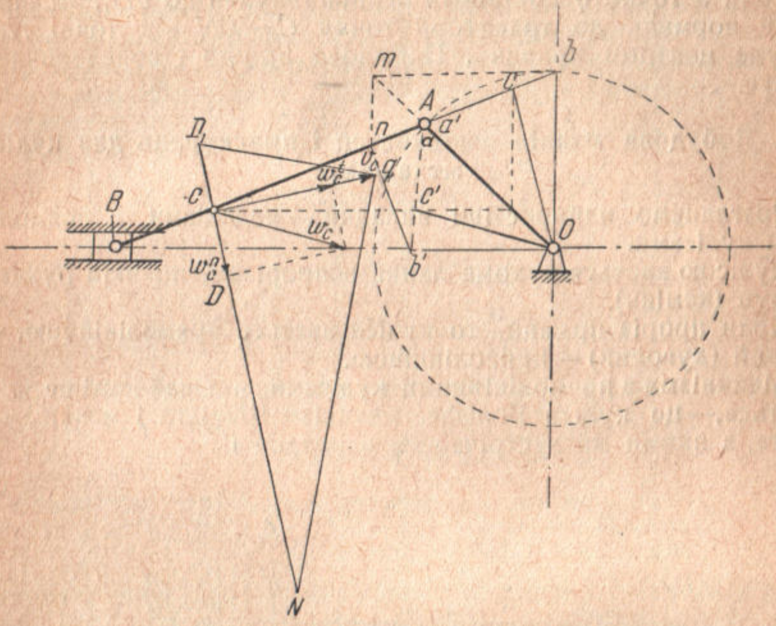


Рис. 116

Визначення його показане на рисунку 116. З допомогою планів швидкостей і прискорення визначаємо швидкість і прискорення точки шатуна, траєкторія якої досліджується (точка C).

Швидкість точки C визначиться вектором v_c величиною рівним $\overline{Oc}$, але напрямленим перпендикулярно до Oc.

Прискорення точки C визначиться вектором w_c, геометрично рівним $c'O$.

Відомо, що швидкість точки напрямлена по дотичній до траєкторії. Значить, радіус кривини буде напрямлений по $CN \perp v_c$.

Розклавши w_c за двома напрямами (напрям v_c і CN), одержимо величину нормального прискорення множенням вектора CD на масштаб:

$$w_c^n = \overline{CD} \cdot a\omega^2 \frac{м}{сек^2} (CD \text{ — в міліметрах}),$$

а радіус кривини траєкторії точки C в даному місці:

$$\rho = \frac{v_c^2}{w_c^n} = \frac{(Oc)^2 \cdot \alpha^2 \omega^2}{CD \cdot \alpha\omega^2} = \frac{(Oc)^2}{CD} \cdot \alpha. \tag{54}$$

На підставі рівняння (54) можна легко визначити геометричною побудовою центр і радіус кривини для точки C. Для цього на продовженні NC відкладемо відрізок $CD_1 = CD$; точку D_1 сполучимо з кінцем вектора швидкості v_c (точка q, при чому $C_q = O_c$).

Коли з точки q поставити перпендикуляр до qD_1, то він перетне нормаль до траєкторії точки $C - CN$ — в точці N, яка й буде центром кривини. Побудова проста і пояснень не потребує.

§ 30. Побудова планів швидкостей і прискорень для кулісних механізмів

Розглянемо найпростіші випадки — механізми з прямолінійними кулісами.

Кулісою зветься рухома ланка з прорізом, по якій рухається повзун (камінь).

Коли проріз прямий, то куліса зветься прямолінійною, коли кривий (дуговий) — криволінійною.

Механізми з прямолінійними кулісами, які найчастіше зустрічаються,— це куліса Вольфа, механізм Шепінга і механізм Вітворта, з якими ми зустрічалися в розділі II.

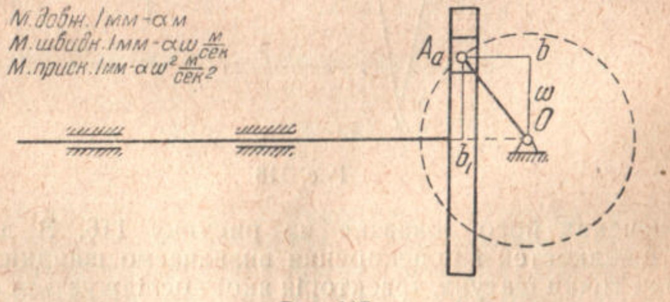


Рис. 117

Куліса Вольфа — кривошипно-шатунний механізм з нескінченним шатуном (рис. 117). Коли будувати для нього повернені плани швидкостей і прискорень за правилами, як і для нормального, то одержимо: $\triangle baO$ — план швидкостей; $\triangle aOb_1$ — план прискорень.

Ці ж плани ми одержимо і на підставі таких міркувань.

Швидкість точки A, коли віднести її до пальця кривошипа, $v_A = OA \cdot \alpha\omega$ і при вибраному масштабі — 1 *мм* — $\alpha\omega \, \frac{м}{сек}$ — виразиться відрізком, рівним OA.

Коли взяти за полюс точку O і повернути швидкість на 90° проти руху кривошипа, то вектор швидкості точки A суміститься з OA і зображення (кінець вектора) точки A суміститься з нею.

Коли ж точку A розглядати в системі повзуна, то вона має складений рух: відносний рух вздовж прорізу куліси і переносний — разом з кулісою. Геометрична сума швидкостей цих рухів і дасть швидкість осі пальця кривошипа, що виразилася в нас вектором Oa. Розкладаємо вектор Oa на два напрями — перпендикулярний до прорізу куліси ab (повернений на 90° напрям відносної швидкості) і перпендикулярний до напряму руху куліси Ob (повернений на 90° напрям переносної швидкості); тоді одержимо $\triangle Oab$ — трикутник швидкостей — план швидкостей.

З нього:

$$v_A = Oa \cdot \alpha\omega \frac{м}{сек},$$

$$v_A^e = Ob \cdot \alpha\omega \frac{м}{сек},$$

$$v_A^r = ba \cdot \alpha\omega \frac{м}{сек},$$

де v_A^e — переносна швидкість точки A; v_A^r — відносна швидкість точки A, при чому

$$\bar{v}_A^e + \bar{v}_A^r = \bar{v}_A. \tag{55}$$

Аналогічні міркування дадуть:

$$\bar{w}_A^e + \bar{w}_A^r = \bar{w}_A. \tag{56}$$

і геометричне оформлення цього рівняння — у вигляді трикутника aOb_1, при чому:

$$w_A = aO \cdot \alpha\omega^2 \frac{м}{сек^2},$$

$$w_A^e = b_1O \cdot \alpha\omega^2 \quad "$$

$$w_A^r = ab_1 \cdot \alpha\omega^2 \quad "$$

Візьмемо механізм Шепінга в довільному положенні (рис. 118). В ньому: OA — кривошип, що обертається навколо осі O; O_1B — куліса, що коливається навколо точки O_1 (точка підвісу куліси); A і B — повзуни.

Кривошип обертається з постійною кутовою швидкістю.

Механізм вирисовано в масштабі: 1 *мм* — α*м*.

Візьмемо масштаб швидкостей: 1 *мм* — $\alpha\omega \frac{м}{сек}$, тоді кривошип OA зображатиме повернений на 90° вектор швидкості точки A.

Коли розглядати точку A в системі повзуна, то

$$\bar{v}_A = \bar{v}_A^e + \bar{v}_A^r. \tag{57}$$

Проведемо $Oa_1 \parallel O_1B$ і $Aa_1 \perp O_1B$; тоді, очевидно, на підставі рівняння (57)

$$\overline{Oa_1} \cdot \alpha\omega = v_A^e ;$$

$$\overline{a_1a} \cdot \alpha\omega = v_A^r .$$

Але v_A^e — це швидкість тієї точки куліси, з якою в даний момент збігається точка A повзуна.

Тоді, на підставі закону розподілу швидкостей точок, що лежать на радіусі обертання, можна написати

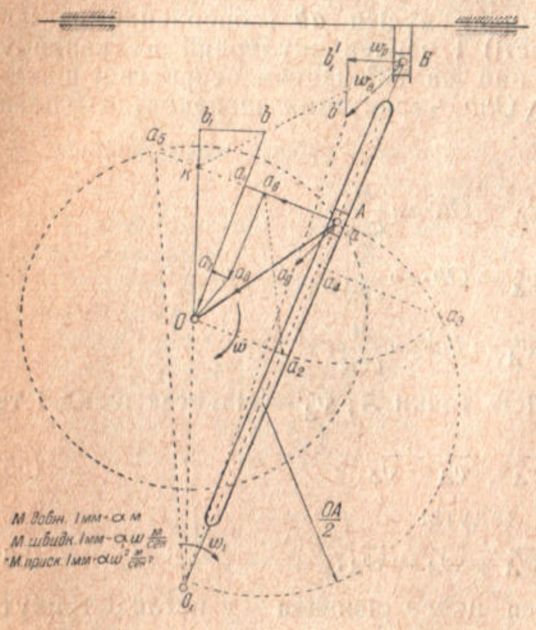


Рис. 118

$$v_B = v_A^e \cdot \frac{O_1B}{O_1A} . \qquad (58)$$

Продовжимо aa_1 до перетину з продовженням O_1O в точці k. З'єднаємо точку k з B і продовжимо Oa_1 до перетину з kB в точці b.

Легко довести, що Ob і виражатиме в прийнятому масштабі швидкість точки B.

Дійсно

$$\triangle O_1kB \backsim \triangle Okb,$$

звідки

$$\frac{Ob}{O_1B} = \frac{a_1k}{Ak} . \qquad (59)$$

$$\triangle Oka_1 \backsim \triangle O_1kA,$$

звідки

$$\frac{Oa_1}{O_1A} = \frac{a_1k}{Ak} . \qquad (60)$$

Порівнюємо рівняння (59) і (60):

$$\frac{Oa_1}{O_1A} = \frac{Ob}{O_1B},$$

звідки

$$Ob = Oa_1 \cdot \frac{O_1B}{O_1A} . \qquad (61)$$

і остаточно, коли помножити обидві частини рівняння (61) на $\alpha\omega$:

$$\overline{Ob} \cdot \alpha\omega = v_A^e \cdot \frac{O_1B}{O_1A} . \qquad (62)$$

З рівнянь (58) і (62) робимо висновок: $\overline{Ob}\cdot\alpha\omega = v_B$, тобто $\overline{Ob}$ є вектор швидкості точки B.

В практиці нас інтересує не *абсолютна* швидкість точки B, а переносна — v^e_B — швидкість тієї точки різцевої призми, з якою в даний момент збігається точка B.

Цю швидкість легко знайти, розклавши v_B за двома напрямами: вздовж руху різцевої призми і вздовж напрямних повзуна B.

Приймаючи до уваги, що вектор швидкості точки B — Ob — повернений на 90°:

$$Ob_1 - v^e,$$
$$b_1b - v^r_B,$$

де Ob_1 — вертикаль, а b_1b — горизонталь.

Таким чином, швидкість різцевої призми в даний момент буде

$$v_p = Ob_1\cdot\alpha\omega\frac{м}{сек} \tag{63}$$

і напрямлена вона праворуч.

Візьмемо масштаб прискорень: 1 *мм* — $\alpha\omega^2\ \frac{м}{сек^2}$; тоді $\overline{aO} - \overline{w}_A$.

Коли точку A розглядати в системі повзуна, то

$$\overline{w}_A = \overline{w}^r_A + \overline{w}^e_A + \overline{w}^k_A, \tag{64}$$

де:

w_A — абсолютне прискорення точки A
w^r_A — відносне " " "
w^e_A — переносне " " "
w^k_A — коріолісове " " "

В свою чергу переносне прискорення складається з нормального й тангенціального (переносний рух — обертальний):

$$w^e_A = w^{ne}_A + w^{te}_A \tag{65}$$

і геометричне рівняння (64) перепишемо так:

$$\overline{w}_A = \overline{w}^r_A + \overline{w}^{ne}_A + \overline{w}^{te}_A + \overline{w}^k_A. \tag{66}$$

Напрями всіх цих прискорень відомі:

w_A — напрямлене від A до O;
w^r_A — " вздовж O_1B;
w^{ne}_A — " від A до O_1;
w^{te}_A — " вздовж Ak;
w^k_A — " від A до k.

(Вектор відносної швидкості v^r_A напрямлений в останньому випадку від A до O_1; коли його повернути на 90° в бік руху куліси — в даному разі за годинниковою стрілкою,—то одержимо напрям w^k_A).

Відома також довжина вектора w_A — AO. Для геометричного оформлення рівняння (66) необхідно визначити величини ще двох векторів.

Відносне прискорення визначається лише тоді, коли відомий закон зміни відносної швидкості, за формулою:

$$w_A^r = \frac{dv_A^r}{dt}.$$

w_A^{te} можна було б визначити лише тоді, коли б ми знали кутове прискорення куліси в даний момент.

Переносне нормальне прискорення визначається так:

$$w_A^{ne} = \frac{(v_A^e)^2}{O_1A \cdot \alpha} = \frac{(Oa_1 \cdot \alpha\omega)^2}{O_1A \cdot \alpha} = \frac{(Oa_1)^2}{O_1A} \alpha\omega^2. \tag{67}$$

Звідси вектор переносного нормального прискорення:

$$x = \frac{(Oa_1)^2}{O_1A}. \tag{68}$$

Величину x легко знаходять такою побудовою.

З точки O опускаємо перпендикуляр на O_1B — $Oa_2 \perp O_1B$; на O_1A, як на діаметрі, будуємо півколо; засікаємо його дугою радіуса Aa_2 з центра A; з одержаної точки a_3 опускаємо перпендикуляр a_3a_4 на O_1A.

Очевидно, $aa_4 = x$.

Довжина вектора коріолісового прискорення визначається так:

$$w_A^k = 2v_A^r \omega_1, \tag{69}$$

де ω_1 — кутова швидкість куліси в даний момент — визначиться за планом швидкостей так:

$$\omega_1 = \frac{v_A^e}{O_1A \cdot \alpha} = \frac{Oa_1 \cdot \alpha\omega}{O_1A \cdot \alpha} = \frac{Oa_1}{O_1A} \omega. \tag{70}$$

Тоді рівняння (69) перепишеться так:

$$w_A^k = 2\overline{a_1a} \cdot \alpha\omega \cdot \frac{Oa_1}{O_1A} \omega = 2\overline{a_1a} \cdot \frac{Oa_1}{O_1A} \alpha\omega^2. \tag{71}$$

Звідси вектор коріолісового прискорення:

$$y = 2\overline{a_1a} \cdot \frac{Oa_1}{O_1A}. \tag{72}$$

Величину y знаходимо такою побудовою:

Продовжимо aa_1 до перетину з колом пальця кривошипа в точці a_5. Ясно, що

$$aa_5 = 2a_1a. \tag{73}$$

Точку a_5 сполучимо з точкою O_1, а через точку a_2 проведемо $a_2a_6 \parallel O_1a_5$.

Одержимо $$aa_6 = y. \tag{74}$$

Дійсно: $\triangle O_1a_5a \backsim \triangle a_2a_6a$,

звідки: $$\frac{aa_6}{aa_5} = \frac{aa_2}{O_1A}, \tag{75}$$

що на підставі рівняння (73) при $aa_2 = Oa_1$, дасть:

$$aa_6 = 2a_1a \cdot \frac{Oa_1}{O_1A} = y.$$

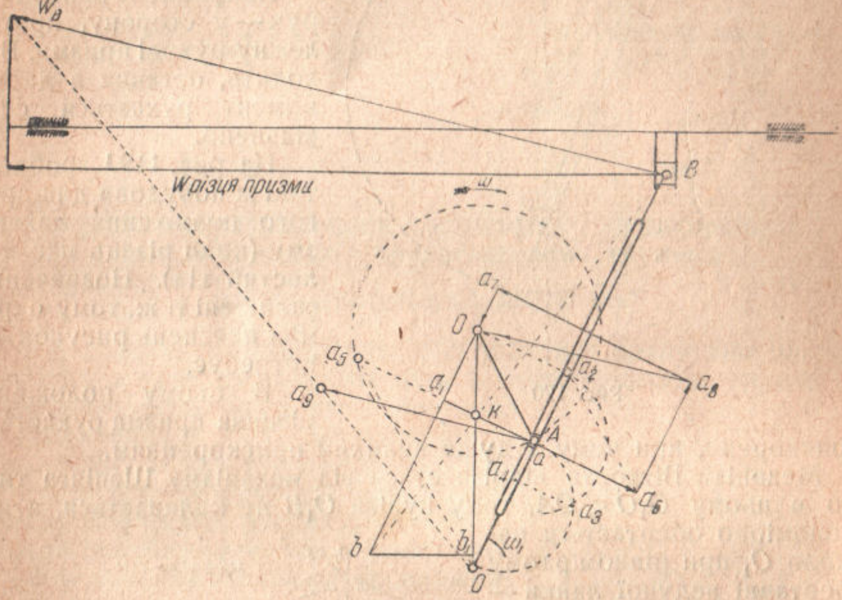


Рис. 119

Тепер можна приступити до побудови п'ятикутника прискорень (рівняння 66).

Відкладаємо $a_7O \#\!\# aa_4$ і через точку a_7 проведемо лінію паралельну ak, а через a_6 — лінію паралельну O_1A. Точка перетину цих ліній — a_8.

Фігура $Oaa_6a_8a_7O$ — і буде шуканий п'ятикутник. В ньому

$\overline{aO}$ — є вектор w_A
$\overline{aa_6}$ „ „ w_A^k
$\overline{a_6a_8}$ „ „ w_A^r
$\overline{a_8a_7}$ „ „ w_A^{te}
$\overline{a_7O}$ „ „ w_A^{ne}
$\overline{a_8O}$ „ „ w_A^e

Будуємо вектор $aa_9 \# a_8O$ і на підставі сказаного в § 25 про визначення прискорень точок тіла, що обертається навколо осі, знаходимо прискорення точки B (вектор Bb').

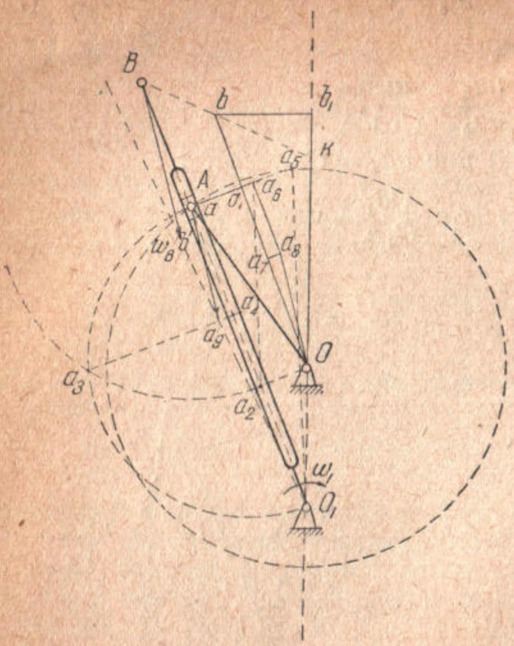


Рис. 120

Розклавши вектор Bb' так, як і вектор швидкості точки B, знайдемо прискорення різця:

$$\overline{w}_p = Bb_1'\alpha\omega^2 \frac{м}{сек^2}.$$

Напрямлене воно ліворуч — у сторону, протилежну рухові призми. Виходить, остання в даний момент рухається сповільнено.

На рис. 119[1] зроблені такі ж побудови для другого положення механізму (коли різець має холостий хід). Позначення залишені ті ж, тому окремих пояснень рисунок не потребує.

В цьому положенні різцева призма рухається прискорено, при чому з дуже великим прискоренням.

Механізм Вітворта відрізняється від механізму Шепінга тим, що в ньому $O_1O < OA$, тому куліса O_1B не коливається, а нерівномірно обертається навколо O_1 при рівномірному обертанні ведучої ланки — кривошипа OA.

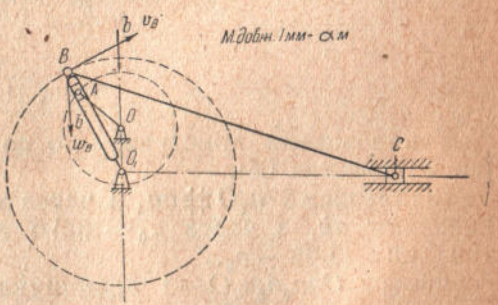


Рис. 121

Швидкість і прискорення головки куліси (точки B) знаходимо таким же способом (рис. 120), як і для механізму Шепінга.

Коли від головки (точки B) рух передається до повзуна C за схемою, поданою на рисунку 121, то швидкість і прискорення повзуна C визначається звичайним способом — побудовою плану швидкостей (рис. 122) і плану прискорень (рис. 123):

[1] Рисунок 119 зроблено в зменшеному масштабі, щоб умістити довгі вектори прискорень точки B.

$$Pb \# Bb;\ Pc \parallel O_1C;\ bc \perp BC;$$
$$P_1b' \# Bb';\ b'm \parallel BC;\ (b'm \text{ є вектор } w^n_{C(B)});$$
$$mc' \perp b'm;\ P_1c' \parallel O_1C.$$

З планів одержуємо:

$$\bar{v}_c = \overline{Pc} \cdot \beta \frac{м}{сек};$$

$$w_c = P_1c' \cdot \gamma \frac{м}{сек^2}.$$

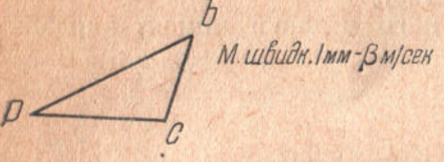


Рис. 122

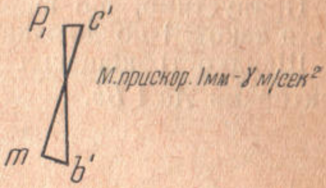


Рис. 123

§ 31. Побудова планів швидкостей і прискорень для механізмів з триповідковими групами

(метод несправжніх положень)

В § 23 була показана (рис. 102) побудова плану швидкостей для куліси Стефенсона (механізм з триповідковою групою) з допомогою миттьових центрів обертання.

Визначення М. Ц. О. потребує додаткових побудов, при чому часто зустрічаються великі незручності — центри виходять за межами рисунку.

Для дослідження таких механізмів зручніший метод несправжніх положень. Крім того, цим методом порівняно легко будуються також і плани прискорень для зазначених механізмів.

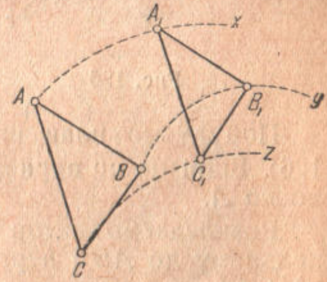


Рис. 124

Перш, ніж приступити до викладу цього методу, зупинимося на основних положеннях.

1. *Припустимо, що плоский многокутник з n вершинами переміщується так, що його n — 1 вершина мають цілком певний рух, а сторони, змінюючи свою величину, лишаються паралельними сами собі. Доведемо, що й остання (n — та) вершина переміщуватиметься в певному напрямі.*

Маємо: фігура *ABC* (рис. 124) переміщується так, що точки *A* і *B* описують траєкторії *Ax* і *By*.

Для кожного положення точки *A* на її траєкторії легко знайти відповідні положення точок *B* і *C*, при чому ці положення будуть цілком певні.

ПОМИЛКА *

Стр.	Рядок	Надруковано	Повинно бути
82	7 зв.	то і C буде прямою	то і *Cz* буде прямою

* З вини автора

№ 1157/1336

Наприклад, коли точка A займе положення A_1, точки B і C будуть в положеннях B_1 і C_1, які знайдуться проведенням $A_1B_1 \parallel AB$ до перетину з By, а також $B_1C_1 \parallel BC$ і $A_1C_1 \parallel AC$ до взаємного перетину.

Таким чином, траєкторія точки C — буде цілком означена крива Cz.

Окремий випадок: коли Ax і By — прямі лінії, то і C буде прямою. Це легко доводиться на основі теорем елементарної геометрії.

2. *Швидкості точок фігури, яка, рухаючись паралельно площині (плоский рух), подібно змінюється.*

Припустимо, що відрізок AB, рухаючись у площині, змінюється також і по довжині (рис. 125).

Швидкості кінцевих точок його в даний момент виразимо векторами $\overline{Aa}$ і $\overline{Bb}$.

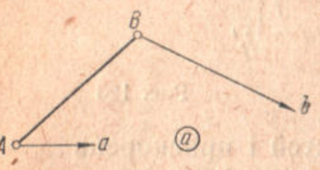


Рис. 125

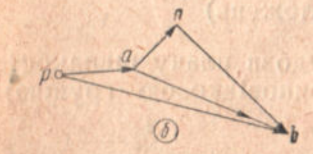


Рис. 126

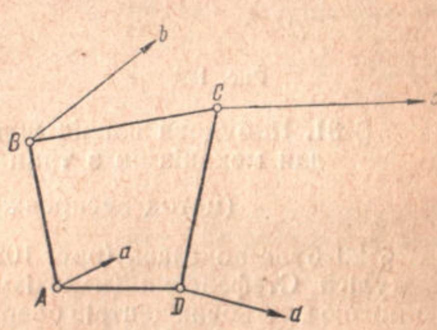


Рис. 127

Побудуємо план швидкостей у довільного полюса P (рис. 126). Відрізок $\overline{ab}$ виражатиме, очевидно, швидкість точки B відносно A.

Розкладаємо вектор відносної швидкості $\overline{ab}$ в напрямі, паралельному до AB і перпендикулярному: $an \parallel AB$, а $nb \perp AB$, або $nb \perp an$.

Вектор an виражатиме швидкість зміни довжини відрізка, а вектор nb — зображує обертальну швидкість точки B відносно A.

Кутова швидкість обертання точки В відносно A дорівнює:

$$\omega_{B(A)} = \frac{\overline{nb} \cdot \beta}{AB} \frac{1}{сек}.$$

Очевидно, що у випадку незмінної довжини відрізка, як це ми розглядали вище, відрізок ab буде перпендикулярний до AB (зображення відрізка на плані швидкостей повернено на 90° відносно самого відрізка) і $an = 0$, а $nb = ab$.

Припустимо, що сторони фігури $ABCD$ (рис. 127), яка має плоский рух, змінюються так, що вона лишається собі подібною.

Для цього, очевидно, треба, щоб здовження сторін її за довільний проміжок часу були пропорціональні початковим їх довжинам, або, щоб *швидкості зміни довжин відрізків були пропорціональні початковим їх довжинам.*

Припустимо, що швидкості точок A, B, C, D у певний момент часу виражаються відповідно векторами: Aa, Bb, Cc, Dd,

Візьмемо точку P за полюс і побудуємо план швидкостей (рис. 128).

Відрізки $\overline{ab}$, bc, cd, da на плані швидкостей виражатимуть у прийнятому масштабі $\left(1\ мм - \beta\,\frac{м}{сек}\right)$ відносні швидкості.

Розкладемо вектор $\overline{bc}$ на $\overline{bn} \parallel \overline{BC}$ і $nc \perp BC$, а вектор dc на $md \perp CD$ і $cm \parallel CD$. Вектори $\overline{bn}$ і $\overline{cm}$ виражатимуть швидкості зміни довжин сторін BC і CD даної фігури.

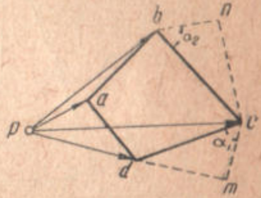


Рис. 128

Значить, на підставі сказаного вище:

$$\frac{\overline{bn}}{BC} = \frac{\overline{cm}}{CD},$$

або

$$\frac{\overline{bn}}{\overline{cm}} = \frac{BC}{CD}, \qquad (75a)$$

Далі, на підставі того, що в подібних фігур відповідні кути рів[illegible], маємо: кутові швидкості обертання точки B відносно C [illegible] точки D відносно C повинні бути рівними, тобто:

$$\omega_{B(C)} = \omega_{D(C)}. \qquad (75b)$$

Але

$$\left.\begin{aligned} \omega_{B(C)} &= \frac{\overline{nc}\cdot\beta}{BC} \\ \omega_{D(C)} &= \frac{\overline{md}\cdot\beta}{CD}. \end{aligned}\right\} \qquad (75c)$$

і

Рівняння (75b) і (75c) дають:

$$\frac{\overline{nc}}{BC} = \frac{\overline{md}}{CD} \text{ або } \frac{\overline{nc}}{\overline{md}} = \frac{BC}{CD}. \qquad (75d)$$

Останнє рівняння в сукупності з (75a) дасть:

$$\frac{\overline{bn}}{\overline{cm}} = \frac{\overline{nc}}{\overline{md}}. \qquad (75e)$$

Звідси: прямокутний трикутник bnc подібний до прямокутного трикутника cmd, а тому маємо ряд таких рівних відношень:

$$\frac{\overline{bn}}{\overline{cm}}=\frac{\overline{nc}}{\overline{md}}=\frac{\overline{bc}}{\overline{cd}}=\frac{BC}{CD},$$

а також рівність: $\angle \alpha_1 = \angle \alpha_2$.

Аналогічно можна довести пропорціональність:

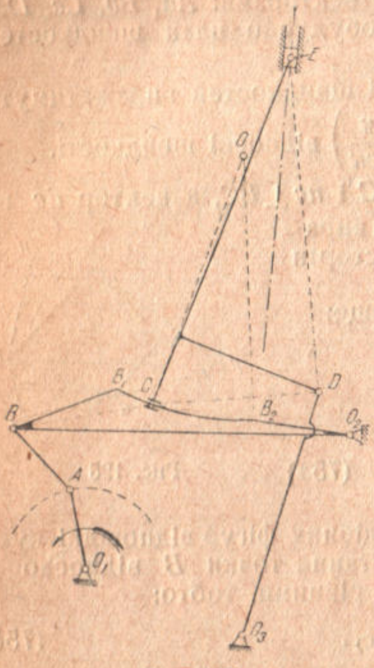


Рис. 129

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ad}}=\frac{AB}{AD},$$

а тому

$$\frac{\overline{ab}}{AB}=\frac{\overline{bc}}{BC}=\frac{\overline{cd}}{CD}=\frac{\overline{da}}{DA},$$

що в сукупності з рівністю кутів повороту векторів відносних швидкостей відносно напрямів сторін фігури приводить до висновку: *фігура, побудована на кінцях векторів абсолютних швидкостей, подібна в кожний момент до самої плоскої фігури й повернена відносно неї на один і той же кут.*

Окремий випадок. Коли дві точки фігури, яка подібно змінюється, рухаються прямолінійно й рівномірно, то і всі інші точки також рухаються прямолінійно і рівномірно.

Справді, коли точки A і B (рис. 127) рухаються прямолінійно, то вектори $\overline{Aa}$ і $\overline{Bb}$ зберігають весь час сталі величини й напрями. Тому і вектор $\overline{ab}$ (рис. 128) буде сталий величиною і напрямом. Звідси — положення фігури $abcd$ буде незмінне, що дає: $\overline{Pc} = \text{const}$ і $Pd = \text{const}$, а це й треба було довести.

Базуючись на висновках п. п. 1 і 2, побудуємо плани швидкостей і прискорень для двох механізмів, які мають триповідкові групи.

Приклад перший. Побудувати план швидкостей і прискорень для паливного насоса авіадизеля Дорнера.

Схему механізму дано на рисунку 129 (при побудові схеми вищі пари замінені нижчими). Ведуча ланка механізму — O_1A — обертається проти годинникової стрілки з сталою кутовою швидкістю ω.

Схема вирисована в масштабі: 1 *мм* — α *м*.

Виберемо масштаб для побудови плану швидкостей:

$$1\ мм - \beta\ \frac{м}{сек}.$$

Швидкість точки A виразиться на плані вектором Pa, перпендикулярним O_1A і величиною рівним (рис. 130):

$$Pa = \frac{\overline{O_1A} \cdot \alpha\omega}{\beta} \text{ мм.}$$

Зображення точки B на плані швидкостей знаходимо звичайним порядком, провівши через a лінію $ab \perp AB$, а через полюс P — лінію $Pb \perp O_2B$. Перетин цих ліній і дасть нам шукане зображення b.

Швидкість точки C, яка належить коромислу O_2B, знаходимо побудовою на відрізкові Pb трикутника Pbc_1, подібного до трикутника O_2BC. (Трикутник Pbc повернутий відносно трикутника O_2BC на 90°). Вектор Pc_1 виражає швидкість точки C, коли розглядати її в системі коромисла O_2B.

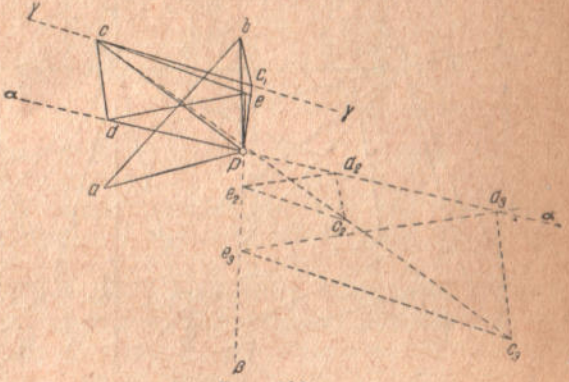


Рис. 130

Коли ж точку C розглядати в системі повзуна, то знайдений вектор виражатиме переносну швидкість (вісь повзуна переміщується по дузі B_1B_2 і разом з нею обертається навколо точки O_2), відносна швидкість буде напрямлена перпендикулярно до CO, де O — центр дуги B_1B_2.

Проведемо через c_1 лінію $\gamma\gamma \perp CO$. На цій лінії повинен лежати кінець вектора абсолютної швидкості точки C — осі повзуна.

Через те що ні величина відносної швидкості, ні напрям абсолютної швидкості нам невідомі, то трикутника швидкостей побудувати звичайним способом ми не зможемо.

Але ми знаємо, що абсолютна швидкість точки E напрямлена по лінії руху поршня насоса, тобто по лінії $P\beta$, а абсолютна швидкість точки D (головки коромисла O_3D) напрямлена по $\alpha\alpha \perp O_3D$. Значить, зображення точок D, E і C повинні лежати відповідно на прямих $\alpha\alpha$, $P\beta$ і $\gamma\gamma$, а трикутник, утворений цим зображенням, повинен бути подібний до трикутника DEC і повернений відносно нього на 90°.

Візьмемо довільне положення зображення точки D на прямій $\alpha\alpha$ — точку d_2 і через неї проведемо $d_2e_2 \perp DE$. На відрізкові d_2e_2 побудуємо трикутник $d_2e_2c_2$, подібний до трикутника DEC. Це буде *перше несправжнє положення шуканого трикутника.*

Аналогічно будуємо *друге несправжнє положення* — трикутник $d_3e_3c_3$. В ньому $d_3e_3 \perp DE$; $e_3c_3 \perp EC$ і $d_3c_3 \perp DC$.

На підставі п. 1 цього параграфа робимо висновок, що скільки б ми не будували таких трикутників, вершини їх c_2, c_3... лежатимуть на одній прямій. Значить, шукане зображення точки C має лежати також на цій прямій.

Таким чином, коли сполучити C_2 й C_3 і продовжити цю лінію до перетину з $\gamma\gamma$, ми одержимо *дійсне* (вже не несправжнє) зображення точки C на плані швидкостей — точку c, а Pc буде вектор абсолютної швидкості точки C в системі повзуна. Вона ж буде і швидкістю точки C в системі шатуна CDE.

Швидкості точок D і E знаходять звичайною побудовою трикутників швидкостей Pcd і Pce так: $cd \perp CD$; $ce \perp CE$.

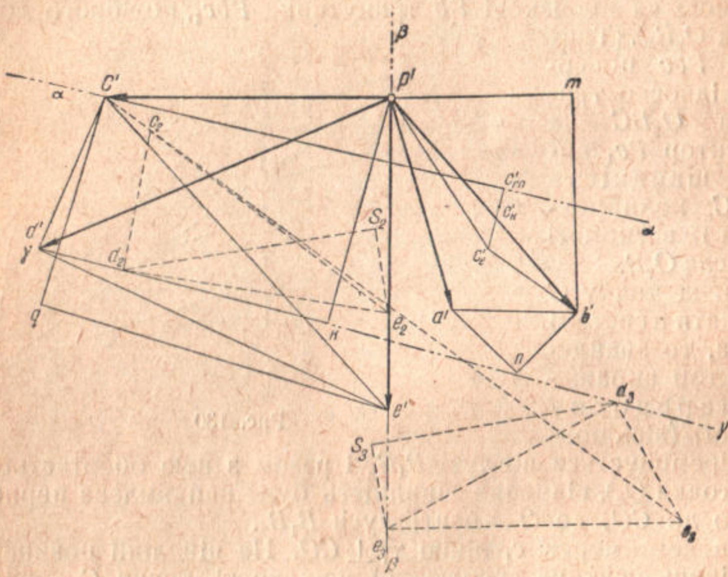


Рис. 131

Для побудови плану прискорень вибираємо полюс P' (рис. 131) і проводимо відрізок $P'a' \parallel AO_1$.

Довжину відрізка $P'a'$ визначають з рівності:

$$P'a' = \frac{O_1A \cdot \alpha\omega^3}{\gamma} \, мм,$$

де γ — масштаб плану прискорень $\left(1 \; мм - \gamma \frac{м}{сек^2}\right)$.

Через точку a' проводимо лінію, паралельну AB і відкладаємо на ній (в напрямі від B до A) відрізок $a'n$, що виражає в прийнятому масштабі $w^n_{B(A)}$:

$$a'n = \frac{w^n_{B(A)}}{\gamma} = \frac{v^2_{B(A)}}{AB\alpha\gamma} = \frac{\overline{ab}^2\beta^2}{AB\alpha \cdot \gamma} \, мм.$$

Через точку P' проведемо лінію, паралельну BO_2 і відкладемо на ній відрізок $P'm$, що виражає в прийнятому масштабі $w^n_{B(O_2)}$:

$$P'm = \frac{v_B^2}{\overline{BO_2} \cdot \alpha \cdot \gamma} = \frac{\overline{Pb}^2 \cdot \beta^2}{\overline{BO_2} \cdot \alpha \cdot \gamma} \text{ мм.}$$

Перпендикуляри, поставлені з кінців відрізків $a'n$ і $P'm$, перетнуться в точці b'; це й буде зображення точки B на плані прискорень, при чому:

$$\overline{w}_B = P'b' \cdot \gamma \frac{м}{сек^2};$$

$$w_B^t = \overline{mb'} \cdot \gamma \frac{м}{сек^2};$$

$$w^t_{B(A)} = \overline{nb'} \cdot \gamma \frac{м}{сек^2}.$$

Прискорення точки C, коли розглядати її в системі коромисла O_2B, знайдемо побудовою трикутника $P'b'c'_e$, подібного до трикутника O_2BC.

Вектор $P'c'_e$ і виражатиме в прийнятому масштабі прискорення точки C в системі коромисла O_2B, він же виражатиме *переносне* прискорення точки C, коли її розглядати в системі повзуна. В останньому випадку прискорення точки C визначається геометричною рівністю:

$$\overline{w}_C = \overline{w}_C^e + \overline{w}_C^r + w_C^k,$$

де w_C — абсолютне прискорення точки C
w_C^e — переносне „ „ C
w_C^r — відносне „ „ C
w_C^k — коріолісове „ „ C

Для побудови чотирикутника прискорень через кінець вектора $P'c'_e$, що виражає прискорення w_C^e, проводимо лінію, паралельну CO (радіус дуги B_1B_2), і на ній відкладаємо відрізок $c'_ec'_k$, що виражає w_C^k (коріолісове прискорення буде напрямлене від C до O, що легко встановлюється на підставі відомих правил).

Довжина відрізка $c'_ec'_k$ визначається з рівності:

$$c'_ec'_k = \frac{w_C^k}{\gamma} = \frac{2v_C^r \omega_{BO_2}}{\gamma} = \frac{2\overline{c_1c} \cdot \beta \cdot \overline{Pb} \cdot \beta}{\gamma \cdot \overline{BO_2} \cdot \alpha} = \frac{2\overline{c_1c} \cdot \overline{Pb} \cdot \beta^2}{\overline{BO_2} \cdot \alpha \cdot \gamma} \text{ мм.}$$

На продовженні відрізка $c'_ec'_k$ відкладаємо відрізок $c'_kc'_{rn}$, що виражає *відносне нормальне* прискорення точки C — w_C^{rn} (напрямлене воно, очевидно, також від C до O).

Довжина відрізка $c_k'c_{rn}'$ визначається з рівності:

$$c_k'c_{rn}' = \frac{w_C^{rn}}{\gamma} = \frac{(v_C^r)^2}{OC \cdot \alpha \cdot \gamma} = \frac{\overline{c_1c^2} \cdot \beta^2}{\overline{OC} \cdot \alpha \cdot \gamma} \text{ мм.}$$

Тангенціальне відносне прискорення піде по перпендикуляру, поставленому з кінця c_{rn}' відрізка $c_k'c_{rn}'$, тобто по лінії $\alpha\alpha$.

Закінчити побудову чотирикутника прискорень ми не зможемо звичайним способом, бо нам невідомі *ні величина відносного тангенціального прискорення, ні напрям абсолютного прискорення* точки C. Але нам відомо, що абсолютне прискорення точки E буде напрямлене по лінії $\beta\beta$, паралельній лінії руху поршня насоса, а тангенціальне прискорення точки D напрямлене по лінії $\gamma\gamma$, перпендикулярній до $P'k$, при чому відрізок $P'k$ паралельний до DO_3 і величиною рівний:

$$P'k = \frac{w_D^n}{\gamma} = \frac{v_D^2}{DO_3 \cdot \alpha \cdot \gamma} = \frac{\overline{Pd}^2 \cdot \beta^2}{\overline{DO_3} \cdot \alpha \cdot \gamma} \text{ мм.}$$

Значить, зображення точок C, E і D на плані прискорень повинні лежати, відповідно, на лініях $\alpha\alpha$, $\beta\beta$ і $\gamma\gamma$, а трикутник, утворений цими зображеннями, повинен бути подібним до трикутника EDC.

Візьмемо *довільне* зображення точки E на линії $\beta\beta$ — точку e_2 — і через неї проведемо відрізок, паралельний DE і рівний:

$$e_2s_2 = \frac{w_{D(E)}^n}{\gamma} = \frac{v_{D(E)}^2}{\overline{DE} \cdot \alpha \cdot \gamma} = \frac{de^2 \cdot \beta^2}{DE \cdot \alpha \cdot \gamma} \text{ мм.}$$

З точки s_2 поставимо перпендикуляр до e_2s_2 і продовжимо його до перетину з лінією $\gamma\gamma$, в точці d_2.

Сполучимо точки e_2 і d_2 і на відрізкові $\overline{e_2d_2}$ побудуємо трикутник $e_2d_2c_2$, подібний до трикутника EDC.

Цей трикутник і буде *перше несправжнє положення* шуканого трикутника.

Аналогічно будуємо *друге несправжнє положення* — трикутник $e_3d_3c_3$. В ньому $e_3s_3 \# e_2s_2$; $s_3d_3 \perp e_3d_3$.

Трикутники $e_2d_2c_2$ і $e_3d_3c_3$ будуть подібні, бо кожний з них подібний до EDC.

На підставі п. 2 цього параграфа (див. формулювання окремого випадку) можемо зробити висновок, що, скільки б ми не побудували таких трикутників, вершини їх c_2, c_3, ...лежатимуть на одній прямій.

Значить, шукане зображення точки C повинне лежати на цій прямій.

Коли сполучити c_2 і c_3 і подовжити цю лінію до перетину з $\alpha\alpha$, то знайдемо *дійсне* (вже не несправжнє) зображення точки C на плані прискорень — точку c', а вектор $P'c'$, що замикає трикутник прискорень точки C, виразить абсолютне прискорення w_c в прийнятому масштабі:

$$\overline{w}_C = P'c' \cdot \gamma \frac{м}{сек^2}.$$

Прискорення точки D і E будуть знайдені тепер звичайним способом на підставі рівностей:

$$\overline{w}_D = \overline{w}_C + \overline{w}^n_{D(C)} + \overline{w}^t_{D(C)}$$

і

$$\overline{w}_E = \overline{w}_C + \overline{w}^n_{E(C)} + \overline{w}^t_{E(C)}$$

На підставі останньої рівності на рисунку 131 знайдено прискорення точки E $\left(c'q \parallel EC, \text{ при чому } c'q = \frac{w_{E(C)}}{\gamma} = \frac{v^2_{E(C)}}{EC \cdot \alpha\gamma} = \right.$ $\left. = \frac{\overline{ec}^2 \cdot \beta^2}{EC \cdot \alpha \cdot \gamma} \text{ мм і } qe' \perp c'q \right)$.

Прискорення точки D знайдене побудовою на відрізкові $c'e'$ трикутника $c'e'd'$, подібного до трикутника CED.

Коли побудова виконана правильно, то точка d' безумовно попаде на лінію $\gamma\gamma$.

Таким чином, абсолютні прискорення точок D і E будуть рівні:

$$\overline{w}_D = \overline{P'd'} \cdot \gamma \frac{м}{сек^2}$$

$$\overline{w}_E = \overline{P'e'} \cdot \gamma \frac{м}{сек^2}.$$

Приклад другий: Побудувати план швидкостей і прискорень для кулісного механізму (рис. 132).

Даний кулісний механізм відрізняється від розібраного раніш механізму Шепінга тим, що головка куліси (точка B) сполучена з різцевою призмою з допомогою шарніра. Для можливості руху точки B по прямій MN нижня точка куліси C підвішена до нерухомої точки O_1 з допомогою коромисла O_1C. Таким чином, точка C має певний рух по дузі радіуса O_1C.

Ведуча ланка — кривошип OA — рівномірно обертається навколо осі O з постійною кутовою швидкістю ω. Механізм зображено в масштабі 1 *мм* — α *м*.

Знайдемо миттьовий центр швидкостей куліси BC. Він буде, очевидно, в точці P — точці перетину перпендикуляра, поставленого до MN з точки B, з продовженням коромисла CO_1, бо CP і BP є перпендикуляри до напрямів швидкостей кінцевих точок куліси. Відрізок AP є миттьовий радіус обертання точки A куліси.

Після цього легко побудувати план швидкостей.

Масштаб для плану швидкостей виберемо: 1 *мм* — $\alpha\omega \frac{м}{сек.}$, тоді відрізок OA зображатиме швидкість точки A — кривошипа, повернену на 90° проти обертання кривошипа.

Коли вважати, що точка A належить повзуну (каменю) куліси, то швидкість її

$$\bar{v}_A = \bar{v}_A^e + \bar{v}_A^r .$$

v_A — в прийнятому масштабі виражається відрізком OA.

Складові швидкості відомі нам лише по напряму: v_A^e — напрямлена перпендикулярно до PA, v_A^r — вздовж BC.

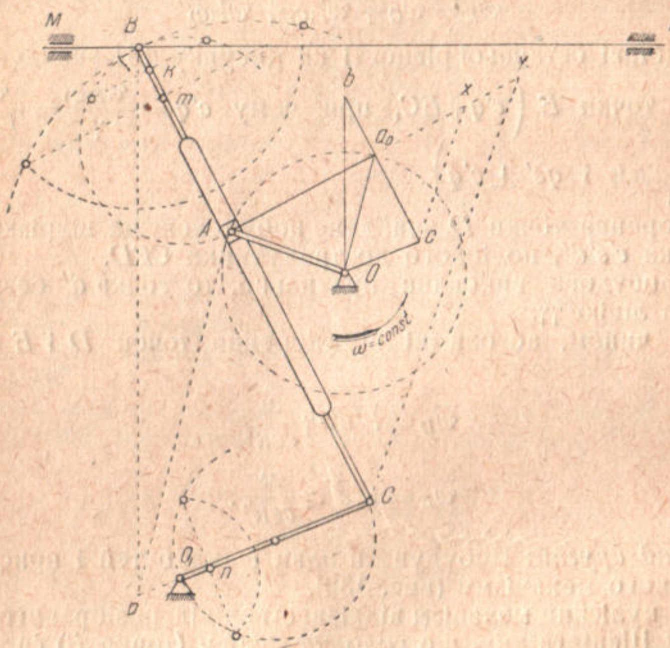


Рис. 132

Тому, коли через точку O провести $Oa_0 \parallel PA$, а через точку A — $Aa_0 \perp BC$, то трикутник OAa_0 і буде трикутником повернених швидкостей.

В ньому

$$\overline{Oa_0} \text{ є вектор } v_A^e ,$$

$$\overline{a_0A} \text{ „ \quad „ } \quad v_A^r .$$

Для визначення швидкості точки B куліси використаємо геометричне рівняння:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A^e + \bar{v}_{B(A)} ,$$

яке оформлюється у вигляді трикутника Oa_0b. В ньому:

$$a_0b \parallel BC \text{ і } Ob \perp MN.$$

Таким чином, швидкість точки B:

$$v_B = \overline{Ob} \cdot \alpha\,\omega\,\frac{м}{сек},$$

це буде також і швидкість різцевої призми.

Для повного закінчення побудови повернутого плану швидкостей нам треба знати ще швидкість точки C куліси.

Продовжимо ba_0 до перетину з Oc, проведеною паралельно O_1C.

Відрізок Oc у прийнятому масштабі і виражатиме швидкість точки C.

На рисунку 133 побудовано нормальний (не повернений) план швидкостей для цього ж таки положення механізму *методом несправжніх положень.*

Метод несправжніх положень, як зазначалось, дає можливість побудувати план швидкостей, не користуючись М. Ц. Ш.

Припустимо, що відрізок P_1a, проведений перпендикулярно до OA, зображає в певному масштабі швидкість точки A кривошипа (абсолютна швидкість точки A повзуна).

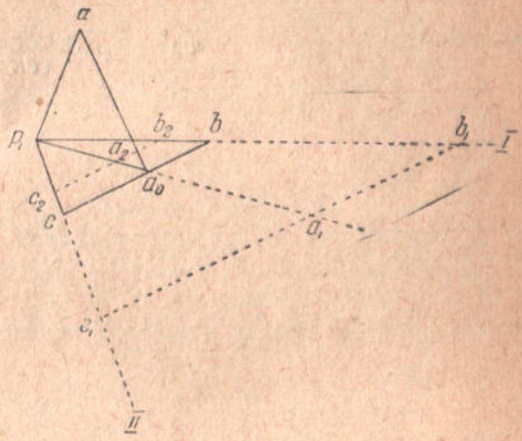


Рис. 133

Нам треба розкласти цей вектор на два вектори: v_A^e і v_A^r. Перший вектор нам невідомий ні величиною, ні напрямом; другий — відомий лише напрямом (паралельний BC).

Задача, як бачимо, невизначена.

Розв'язуємо її так:

Відомо, що швидкість точки C перпендикулярна до O_1C, тому вектор її буде напрямлений по P_1II, яку проводимо перпендикулярно до O_1C.

Швидкість точки B напрямлена по MN, а вектор, що її виражає,— по P_1I.

Коли відрізок P_1b_1 виражає в якомусь масштабі швидкість точки B, то, провівши $b_1c_1 \perp BC$, одержимо відрізок P_1c_1, який в тому ж масштабі виражатиме швидкість точки C, на підставі геометричного рівняння: $\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{C(B)}$.

Відрізок b_1c_1 є *перше несправжнє положення* зображення куліси BC на плані швидкостей. Аналогічно знаходимо *друге несправжнє положення* — b_2c_2.

Поділивши відрізки b_1c_1 і b_2c_2 точками a_1 і a_2 в такому ж відношенні, в якому точка A ділить кулісу BC, і сполучивши a_1

з a_2, ми одержимо лінію, на якій повинне лежати дійсне зображення точки A (на підставі п. 1 цього параграфа).

При правильній побудові звичайно лінія a_1 і a_2 повинна пройти через P. Це й буде напрям v_A^e.

Тепер задача стала визначеною.

Провівши $aa_0 \parallel BC$ до перетину з P_1a_1 в точці a_0, ми одержимо трикутник швидкостей P_1aa_0.

В ньому:

$$\overline{v}_A = \overline{P_1a} \cdot \beta \frac{м}{сек}; \quad \overline{v}_A^e = \overline{P_1a_0} \cdot \beta \frac{м}{сек};$$

$$\overline{v}_A^r = \overline{a_0a} \cdot \beta \frac{м}{сек}.$$

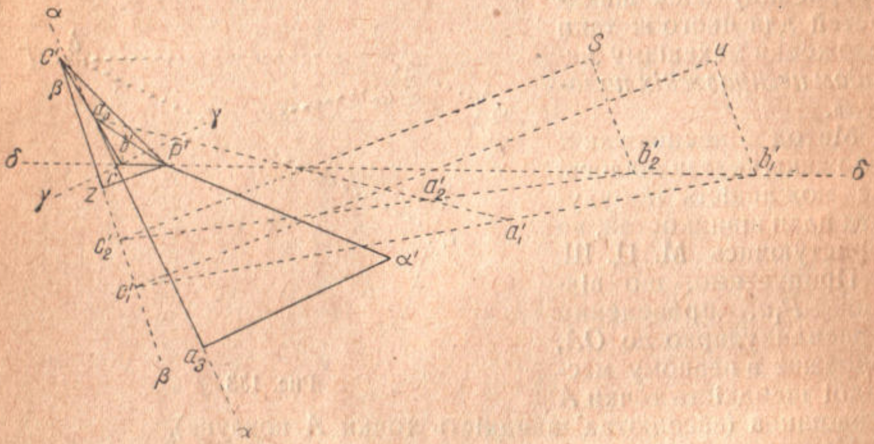


Рис. 134

Пряма bc, проведена через точку a_0 перпендикулярно до BC, закінчить побудову нормального плану швидкостей, а відрізки P_1b і P_1c в прийнятому масштабі виражатимуть відповідно швидкості v_B і v_C.

На рисунку 134 тим же методом побудовано план прискорень для заданого положення механізму.

Точка P' — полюс плану прискорень; $P'a'$ — вектор прискорення точки A кривошипа ($w_A = r\omega^2 = \overline{OA}\,\alpha\omega^2$).

Коли вважати, що точка А належить повзуну (каменю) куліси, то прискорення її складають таке геометричне рівняння:

$$\overline{w}_A = \overline{w}_A^r + \overline{w}_A^e + \overline{w}_A^k.$$

Рівняння це геометрично оформлюється у вигляді чотирикутника прискорень.

Для побудови його ми маємо: величину й напрям вектора w_A ($P'a'$); напрям вектора w_A^r (вздовж BC).

До цих даних ще можемо знайти величину й напрям вектора w_A^k.
Величину його знаходимо на підставі рівняння:

$$w_A^k = 2 v_A' \omega_e .$$

Це рівняння за рисунком 132 перепишеться так:

$$w_A^k = 2 \overline{a_0 A} \cdot \alpha\omega \cdot \frac{v_{A(C)}}{\overline{AC} \cdot \alpha} = 2 \overline{a_0 A} \cdot \alpha\omega \cdot \frac{\overline{a_0 c} \cdot \alpha\omega}{\overline{AC} \cdot \alpha} =$$

$$= 2 a_0 A \frac{a_0 c}{AC} \alpha\omega^2 \frac{м}{сек^2} .$$

Масштаб прискорень візьмемо: 1 $мм - \alpha\omega^2 \frac{м}{сек^2}$. Тоді довжина вектора коріолісового прискорення дорівнюватиме:

$$2 a_0 A \frac{a_0 c}{AC}$$

і буде знайдена такою побудовою (рис. 132).

На продовженні Aa_0 відкладаємо $a_0 y = Aa_0$, сполучимо y з C і проведемо через c лінію $cx \parallel Cy$. Відрізок $a_0 x$ і буде шукана довжина вектора w_A^k.

Дійсно, з подібності трикутників $ca_0 x$ і CAy маємо:

$$\frac{a_0 x}{Ay} = \frac{a_0 c}{AC} ,$$

або:

$$a_0 x = Ay \frac{a_0}{AC} = 2 \overline{a_0 A} \cdot \frac{a_0 c}{AC} .$$

За правилами теоретичної механіки встановлюємо, що напрям вектора буде від A до a_0.

Задача побудови чотирикутника прискорень лишається невизначеною, бо нам невідомі ні величина, ні напрям переносного прискорення.

Тому, застосовуємо метод несправжніх положень. Проведемо через кінець вектора $P'a'$ відрізок $a'a_3$, геометрично рівний векторові w_A^k. Побудову робимо так, щоб ці вектори йшли не „за течією", а один проти одного, бо $P'a'$ є замикальна сторона чотирикутника прискорень. (На рис. 134 прийнятий масштаб прискорень: 1 $мм - 0{,}5\ \alpha\omega^2 \frac{м}{сек^2}$).

Через точку a_3 проводимо лінію $\alpha\alpha \parallel BC$ (або $\alpha\alpha \perp a_3 a'$). Лінія $\alpha\alpha$ — є напрям відносного прискорення.

Величини цього прискорення ми не знаємо, а також не знаємо ні величини, ні напряму w_A^e, тому закінчити побудову чотирикутника прискорень ми зараз не зможемо.

За відомими нам правилами знайдемо нормальне прискорення точки C (рис. 132).

Довжина вектора w_C^n в масштабі — 1 $мм$ — $\alpha\omega^2 \frac{м}{сек^2}$ — дорівнює nO_1 (засічку кола, побудованого на O_1C, робимо радіусом Oc). Відкладаємо її в прийнятому масштабі (вдвоє збільшену) від полюса P':

$$P'z = 2\,nO_1.$$

Через точку z проводимо $\beta\beta \perp P'z$, при чому $\beta\beta$ є напрям тангенціального прискорення точки C. Через P' проводимо $\delta\delta \parallel MN$; при чому $\delta\delta$ є напрям прискорення точки B.

При даному положенні куліси зображення точки C і B на плані прискорень повинні лежати десь на прямих $\beta\beta$ і $\delta\delta$ (відповідно). При чому, коли зображенням точки B буде точка b_1' (взята довільно на $\delta\delta$), то зображення точки C на прямій $\beta\beta$ можна знайти відомою побудовою на підставі рівняння:

$$\bar{w}_C = \bar{w}_B + w_{C(B)}^n + \bar{w}_{C(B)}^t.$$

Вектор w_B є відрізок $P'b_1'$

„ $w_{C(B)}^n$ „ „ $b_1'u = 2\,Bm$ (засічка кола, побудованого на BC, зроблена радіусом bc);

„ $w_{C(B)}^t$ „ „ $uc_1' \perp b_1'u$.

Поділивши відрізок $b_1'c_1'$ в такому відношенні, в якому точка A ділить ланку BC, знайдемо точку a_1' — перше несправжнє положення кінця вектора переносного прискорення — w_A^e.

Візьмемо другу довільну точку b_2' за кінець вектора w_B.

Аналогічною побудовою ($b_2's \parallel BC$; $b_2's = 2\,Bm$; $sc_2' \perp b_2's$) знайдемо c_2' — кінець вектора w_C, а потім діленням відрізка $b_2'c_2'$ на частки, що задовольняють пропорції: $\frac{b_2'a_2'}{a_2'c_2'} = \frac{BA}{AC}$, знайдемо точку a_2' — друге несправжнє положення кінця вектора w_A^e.

Сполучаємо точки a_1' і a_2' і продовжуємо цю лінію до перетину з $\alpha\alpha$ в точці a_0', — це й буде дійсне положення кінця вектора w_A^e.

Таким чином, шуканий чотирикутник прискорень оформився у вигляді $P'a'a_3a_0'P'$.

В ньому:

$$w_A = \overline{P'a'} \cdot 0{,}5\,\alpha\omega^2\,\frac{м}{сек^2}$$

$$\bar{w}_A^e = \overline{P'a_0'} \cdot 0{,}5\,\alpha\omega^2 \quad „$$

$$\bar{w}_A^r = \overline{a_0'a_3} \cdot 0{,}5\,\alpha\omega^2 \quad „$$

$$\bar{w}_A^k = \overline{a_3a'} \cdot 0{,}5\,\alpha\omega^2 \quad „$$

Прискорення точки В (прискорення різцевої призми) знайдемо на підставі рівняння:

$$\overline{w}_B = \overline{w}_{A'} + \overline{w}^n_{B(A')} + \overline{w}^t_{B(A')},$$

де A' — є точка куліси, яка в даний момент збігається з точкою A (віссю повзуна).

Але $w_{A'} = w^e_A$, тобто виражається вектором $P'a'_0$.

Вектор прискорення $w^n_{B(A')}$ виражається в прийнятому масштабі відрізком $a'_0r \parallel BC$, при чому $a'_0r = 2\,Bk$ (відрізок Bk—знайдемо відомим нам способом; відрізок a'_0r відкладено по $\alpha\alpha$).

Лінія $\gamma\gamma$, проведена через точку r перпендикулярно до $\alpha\alpha$, є напрям $w^t_{B(A')}$.

Точка перетину (b') ліній $\gamma\gamma$ і $\delta\delta$ і буде кінець вектора w_B.

Отже, прискорення різцевої призми (точки B) в даний момент виражається вектором $P'b'$ $\left(\text{масштаб: } 1\ \textit{мм} - 0{,}5\ \alpha\omega\ \frac{\textit{м}}{\textit{сек}^2}\right)$.

Для повного закінчення побудови плану прискорень знайдемо прискорення точки C.

Для цього сполучимо точку b' з точкою a'_o і продовжимо $b'a'_o$ до перетину з $\beta\beta$.

Точка перетину — c' — і буде кінець вектора w_C, а величина прискорення точки C знайдеться з рівняння:

$$\overline{w}_C = \overline{P'c'} \cdot 0{,}5\,\alpha\omega^2\,\frac{\textit{м}}{\textit{сек}^2}.$$

Метод додаткових точок Ассура

Методом несправжніх положень можна побудувати план швидкостей і прискорень і для розгляненої вище куліси Стефенсона (§ 23), яка має ланку *5* з трьома повідками (ланки *3*, *4* і *8*). Але в даному випадку краще застосувати метод додаткових точок Ассура.

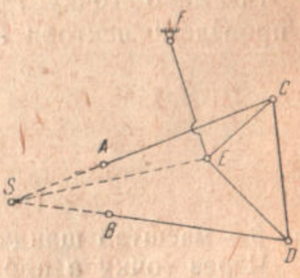


Рис. 135

Припустимо, що ми маємо ланку CDE з трьома повідками AC, BD і EF (рис. 135). Вважаємо, що швидкості й прискорення точок A, B і F в заданому положенні нам відомі (точка F на рисунку показана закріпленою, за аналогією з розгляненою вище кулісою Стефенсона). Треба визначити швидкості й прискорення точок E, C і D в даний момент.

Візьмемо в системі ланки CDE точку S — *додаткову точку Ассура*, що в заданий момент лежить на перетині прямих AC і BD. (Коли б ці прямі перетиналися далеко за межами рисунку, можна було б взяти за додаткову точку Ассура точку перетину AC і EF).

Тоді для точки S ми зможемо написати такі векторні рівняння:

$$\bar{v}_S = \bar{v}_C + \bar{v}_{S(C)},$$

$$\bar{v}_S = \bar{v}_D + \bar{v}_{S(D)}.$$

Але, розглядаючи точку C в системі повідка AC, а точку D в системі повідка BD, ми матимемо:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{C(A)}$$

$$\bar{v}_D = \bar{v}_B + \bar{v}_{D(B)}.$$

Тому написані векторні рівняння приймуть вигляд:

$$\bar{v}_S = \bar{v}_A + \bar{v}_{C(A)} + \bar{v}_{S(C)},$$

$$\bar{v}_S = \bar{v}_B + \bar{v}_{D(B)} + \bar{v}_{S(D)}.$$

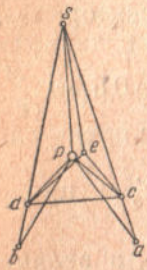


Рис. 136

Точки S, A і C лежать на одній прямій, значить, вектори $\bar{v}_{C(A)}$ і $\bar{v}_{S(C)}$ теж лежать на одній прямій, і їх можна замінити одним вектором, що має напрям, перпендикулярний до SC.

Вектори $\bar{v}_{D(B)}$ і $\bar{v}_{S(D)}$, на підставі таких же міркувань (точки S, B і D лежать на одній прямій), заміняємо одним вектором, перпендикулярним до SD.

Тоді рівняння перепишуться так:

$$\bar{v}_S = \bar{v}_A + \overline{v_{C(A)} + v_{S(C)}};$$

$$\bar{v}_S = \bar{v}_B + \overline{v_{D(B)} + v_{S(D)}}$$

і швидкість точки S можна знайти звичайною побудовою.

Візьмемо точку P за полюс плану швидкостей (рис. 136) і проведемо вектори $\overline{Pa}$ і $\overline{Pb}$, при чому

$$\bar{v}_A = \overline{Pa} \cdot \beta \frac{м}{сек},$$

$$\bar{v}_B = \overline{Pb} \cdot \beta \frac{м}{сек},$$

де β — масштаб швидкостей.

Через точку a проведемо $as \perp AS$, а через точку b — $bs \perp BS$. Точка перетину as і bs (точка s) і буде зображенням точки S на плані швидкостей, а вектор Ps в масштабі β — виражатиме швидкість точки S.

Швидкість точки E знайдеться на підставі векторних рівнянь:

$$\bar{v}_E = \bar{v}_S + \bar{v}_{E(S)};$$

$$\bar{v}_E = \bar{v}_F + \bar{v}_{E(F)}.$$

У нас точка F закріплена, тому швидкість точки E знаходиться на підставі першого з цих рівнянь побудовою трикутника Pse, при чому $se \perp SE$, а $Pe \perp FE$.

Далі таким же способом знаходимо швидкість точки C на підставі векторних рівнянь:

$$\overline{v}_C = \overline{v}_A + \overline{v}_{C(A)},$$
$$\overline{v}_C = \overline{v}_E + \overline{v}_{C(E)},$$

і точки D на підставі векторних рівнянь:

$$\overline{v}_D = \overline{v}_B + \overline{v}_{D(B)},$$
$$\overline{v}_D = \overline{v}_E + \overline{v}_{D(E)}.$$

Прискорення точки S, коли її розглядати в системі ланки CDE, визначиться такими векторними рівняннями:

$$\overline{w}_S = \overline{w}_C + \overline{w}^n_{S(C)} + \overline{w}^t_{S(C)},$$
$$\overline{w}_S = \overline{w}_D + \overline{w}^n_{S(D)} + \overline{w}^t_{S(D)}.$$

Але, розглядаючи точку S в системі повідка AC, а точку D в системі повідка BD, ми маємо:

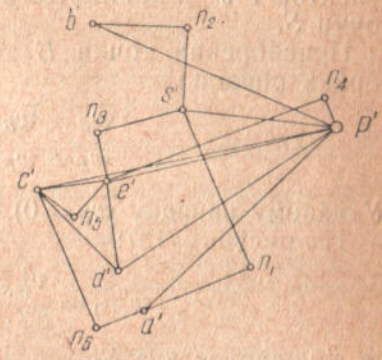


Рис. 137

$$\overline{w}_C = \overline{w}_A + \overline{w}_{C(A)} + \overline{w}^t_{C(A)},$$

і

$$\overline{w}_D = \overline{w}_B + \overline{w}^n_{D(B)} + \overline{w}^t_{D(B)}.$$

Тоді:

$$\overline{w}_S = \overline{w}_A + \overline{w}^n_{C(A)} + \overline{w}^t_{C(A)} + \overline{w}^n_{S(C)} + \overline{w}^t_{S(C)},$$
$$\overline{w}_S = \overline{w}_B + \overline{w}^n_{D(B)} + \overline{w}^t_{D(B)} + \overline{w}^n_{S(D)} + \overline{w}^t_{S(D)}.$$

На підставі міркувань, наведених при побудові плану швидкостей, ми можемо суми векторів $\overline{w}^n_{C(A)} + \overline{w}^n_{S(C)}$; $\overline{w}^t_{C(A)} + \overline{w}^t_{S(C)}$, $\overline{w}^n_{D(B)} + \overline{w}^n_{S(D)}$; $\overline{w}^t_{D(B)} + \overline{w}^t_{S(D)}$ замінити, відповідно, одним вектором, тоді рівняння перепишуться так:

$$\overline{w}_S = \overline{w}_A + \overline{w^n_{C(A)} + w^n_{S(C)}} + \overline{w^t_{C(A)} + w^t_{S(C)}},$$
$$\overline{w}_S = \overline{w}_B + \overline{w^n_{D(B)} + w^n_{S(D)}} + \overline{w^t_{D(B)} + w^t_{S(D)}};$$

і прискорення точки S знайдеться звичайною побудовою. Візьмемо точку P' за полюс плану прискорень (рис. 137). Припустимо, що вектори $P'a'$ і $P'b'$ виражають у вибраному масштабі відповідно прискорення w_A і w_B. Проведемо $a'n_1 \parallel AC$ і $b'n_2 \parallel BD$.

Довжини відрізків $a'n_1$ і $b'n_2$ визначаться рівняннями:

$$a'n_1 = \frac{w^n_{C(A)} + w^n_{S(C)}}{\gamma} = \frac{\overline{ac}^2 \cdot \beta^2}{AC \cdot \alpha\gamma} + \frac{\overline{cs}^2 \cdot \beta^2}{CS \cdot \alpha\gamma}$$

і

$$b'n_2 = \frac{w^n_{D(B)} + w^n_{S(D)}}{\gamma} = \frac{\overline{bd}^2 \cdot \beta^2}{BD \cdot \alpha\gamma} + \frac{\overline{ds}^2 \cdot \beta^2}{DS \cdot \alpha\gamma}.$$

(Вектори $w^n_{C(A)}$ і $w^n_{S(C)}$, а також $w^n_{D(B)}$ і $w^n_{S(D)}$ напрямлені протилежно, тому сумарний вектор на рисунку 137 напрямлений у сторону більшого $\overline{w}^n_{S(C)} > w^n_{C(A)}$; $w^n_{S(D)} > w^n_{D(B)}$).

Точка перетину перпендикулярів, поставлених до $a'n_1$ і $b'n_2$, і буде зображенням точки S на плані прискорень (точка s'), а вектор $P's'$ у прийнятому масштабі виражатиме прискорення точки S.

Прискорення точки E тепер легко знайти на підставі векторних рівнянь:

$$\overline{w}_E = \overline{w}_S + \overline{w}^n_{E(S)} + \overline{w}^t_{E(S)},$$
$$\overline{w}_E = \overline{w}_F + \overline{w}^n_{E(F)} + \overline{w}^t_{E(F)}.$$

(У даному випадку $\overline{w}_F = 0$).

На рисунку 137:

$$w^n_{E(S)} = \frac{v^2_{E(S)}}{ES \cdot \alpha} = \frac{\overline{es}^2 \cdot \beta^2}{ES \cdot \alpha} = \overline{s'n_3} \cdot \gamma;$$

де $s'n_3$ паралельна SE.

$$w^n_{E(F)} = \frac{v^2_E}{EF \cdot \alpha} = \frac{\overline{P}^2 e \cdot \beta}{EF \cdot \alpha} = P'n_4 \cdot \gamma,$$

де $P'n_4$ паралельна EF; $\overline{n_4e'}$ перпендикулярна $P'n_4$ і n_3e' перпендикулярна $s'n_3$.

e' — зображення точки E на плані прискорень, тому

$$w_E = P'e' \cdot \gamma \frac{м}{сек^2}.$$

Аналогічно знайдемо прискорення точки C на підставі векторних рівнянь:

$$\overline{w}_C = \overline{w}_A + \overline{w}^n_{C(A)} + \overline{w}^t_{C(A)},$$
$$\overline{w}_C = \overline{w}_E + \overline{w}^n_{C(E)} + \overline{w}^t_{C(E)}.$$

Зображення точки D (точка d') на плані прискорень знайдено побудовою на відрізку $c'e'$ трикутника $c'e'd'$, подібного до трикутника CED.

Як бачимо, метод додаткових точок Ассура в даному випадку має дуже просте розв'язання.

Висновок: *у всіх тих випадках, коли будьяка пара повідків* (або їх продовження) *триповідкової групи перетинається в межах рисунку, побудови планів швидкостей і прискорень краще робити методом додаткових точок Ассура, ніж методом несправжніх положень.*

§ 32. Контрольні запитання і задачі

1. Що таке миттьовий центр швидкостей?

2. Як знайти швидкість довільної точки відрізка, що має плоский рух, коли відомі напрями швидкостей кінцевих його точок і величина однієї з них?

3. Що таке нормальний план швидкостей і його властивості?

4. До плану швидкостей входять трикутники чи паралелограми швидкостей?

5. Що таке повернений план швидкостей?

6. При якому співвідношенні масштабів слід застосовувати повернений план швидкостей для кривошипно-шатунних механізмів?

7. Які властивості має план швидкостей для кривошипного механізму при $\alpha = 0$; $\alpha = 180°$; $\alpha = 90°$; $\alpha = 270°$?

8. При якому положенні кривошипа, при постійній його кутовій швидкості, швидкість повзуна буде найбільша?

9. Які умови потрібні для побудови плану швидкостей?

10. Як формулюється теорема Аронгольда-Кенеді?

11. Чи доводиться застосовувати цю теорему при дослідженнях механізмів методом планів швидкостей і прискорень? В яких випадках?

12. Як визначити кутову швидкість ланки?

13. При якому положенні кривошипа, при постійній його кутовій швидкості, кутова швидкість шатуна найбільша?

14. Як побудувати діаграму $[v, t]$ для поршня і $[\omega, t]$ для шатуна кривошипного механізму, коли є побудовані плани швидкостей через кожні 30° повороту кривошипа? (Число обертів кривошипа задано).

15. Як розподіляються прискорення точок тіла, що обертається навколо осі?

16. Як розміщаються зображення ланок на планах швидкостей і прискорень відносно самих ланок?

17. Як формулюється теорема про подібність?

18. При якому співвідношенні між масштабами нормальне відносне прискорення легко визначається графічно?

19. Якими способами можна графічно визначити нормальне відносне прискорення? Коли застосовують кожний з них?

20. Як побудувати план прискорень для кривошипного механізму способом Мора?

21. Чи можна способом Мора побудувати план прискорень для кривошипно-шатунного механізму в мертвому положенні?

22. Як визначаються кутові прискорення ланок механізму?

23. Як побудувати діаграму $[w, t]$ для поршня і $[\epsilon, t]$ для шатуна кривошипного механізму, коли є побудовані плани прискорень через кожні 30° повороту кривошипа? (число обертів кривошипа задано).

24. Дано певне положення кривошипного механізму ($\omega = \text{const}$). Чи залежать напрями прискорень точок його від напряму обертання кривошипа?

25. Як визначити радіус кривини траєкторії середньої точки шатуна в точках перетину її з BO.

26. Що зветься кулісою? Класифікація куліс.

27. Чому дорівнює швидкість і прискорення куліси Вольфа, коли кривошип перпендикулярний до ходу куліси?

28. При якому положенні кривошипа швидкість головки куліси (точки B) в механізмі Шепінга буде мінімальна? Максимальна?

29. Те саме для механізму Вітворта.

Задачі

1. Колесо радіуса в 1 *м* (рис. 138) котиться без ковзання по похилій площині з швидкістю $v = 5 \frac{м}{сек.}$; $\alpha = 30°$. Визначити швидкості точок A, B і D. (Задачу розв'язати графічно і аналітично).

2. Визначити швидкість точки D (рис. 139), коли кривошип обертається з кутовою швидкістю $\omega = 5\pi \frac{1}{сек}$.

$$OA = 100 \text{ мм}; \; OB = 300 \text{ мм}; \; AD = 500 \text{ мм}.$$

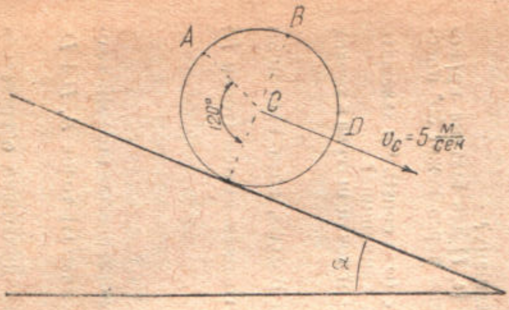


Рис. 138

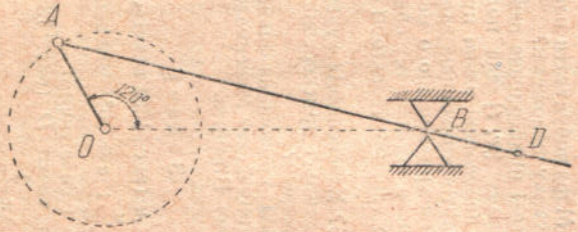
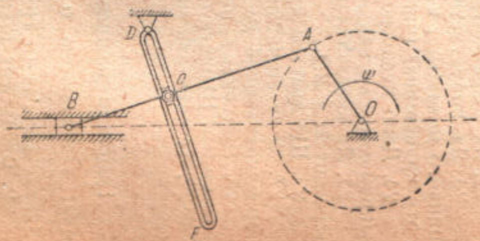


Рис. 139



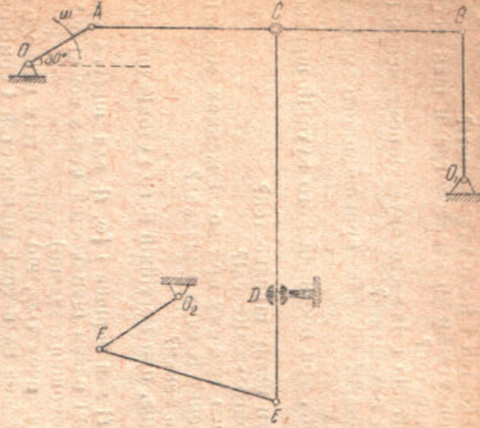


Рис. 141

Рис. 142

3. Побудувати плани швидкостей і прискорень для мертвих положень кривошипно-шатунного механізму.

4. Знайти в системі шатуна точки, швидкість яких паралельна швидкості пальця кривошипа.

5. Знайти в системі шатуна точки, швидкість яких величиною дорівнює швидкості пальця кривошипа.

6. Визначити кутову швидкість куліси DE (рис. 140) при даному положенні механізму.

7. В складному механізмі $OABO_1\ CDEFO_2$ (рис. 141):

1) Визначити лінійні швидкості і прискорення точок A, B, C, D і E при заданій кутовій швидкості ланки OA.

2) Визначити кутові швидкості й прискорення ланок AB, BO_1, CE, EF.

Дано: $OA = 0{,}2$ *м;* $AB = 5\,OA$; $AC = CB$; $O_1B = 0{,}4$ *м;* $O_1O = 1{,}1$ *м;* $CE = AB$; $EF = 0{,}5\ AB$; $O_2F = 0{,}5\ EF$.

Положення точок O_1, D і O_2 — довільне (можна вибрати згідно з даним рисунком).

8. Побудувати плани швидкостей і прискорень для механізму (рис. 142) через кожні 30° повороту кривошипа AB.

Дано: $AB = 50$ *мм*; $BC = 200$ *мм*; $AD = 60$ *мм*; $DE = 30$ *мм*; $EM = 160$ *мм*; передатне число $i = 2$.

9. В дезаксіальному кривошипному механізмі $R = 50$ *мм*; $L = 180$ *мм*; дезаксіал $a = 0{,}5\ R$; побудувати план швидкостей і прискорень для мертвих положень. Знайти кути повороту кривошипа (α_1 і α_2) для мертвих положень.

10. Дано для дезаксіального кривошипного механізму: $R = 80$ *мм*; $L = 270$ *мм*; $a = 0{,}2\ R$.

Побудувати плани швидкостей і прискорень через кожні 30° повороту кривошипа.

Побудувати діаграми $[v, t]$; $[w, t]$; $[\omega, t]$ і $[\varepsilon, t]$.

11. Дослідити кінематику кривошипного механізму одного з авіаційних двигунів, дані про які подано в таблиці [1].

	Назва мотора	Число і розміщення циліндрів (γ)	Довжина головного шатуна	Довжина причіпн. шатуна	Довжина клика AK	γ_e	Хід головного поршня	$\frac{1}{\lambda}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	BMW=VI	12—V 60°	340	253	85	70°	190	3,58
2	Кертіс D 12 . .	12—V 60°	254	195	58,85	66°20′	153	3,32
3	Конкверор . . .	12—V 60°	254	192,7	61,25	66°30′	158,8	3,2
4	Паккард 1500 . .	12—V 60°	228,5	166	62,12	—	139,5	3,28
5	Ассо 500	12—V 60°	258	195	63	66°	150	3,42
6	Ассо 750	18—W 40°	325	254	72,5	40°	170	3,82
7	Райт „Смерч“ . .	Зіркоподібні	277	225,3	51,6	40°	139,5	3,96

Дослідження провести методом планів швидкостей і прискорень з дальшою побудовою діаграм.

12. Визначити швидкість і прискорення центра ваги головного і причіпного шатунів одного з двигунів, наведених у таблиці попередньої задачі. Центр ваги лічити на відстані $0{,}35\ L$ від кривошипної головки для головного шатуна і на $0{,}35\ L_1$ від клика для причіпного. L і L_1 — довжини головного і причіпного шатунів.

[1] В третій колонці цифрою позначено число циліндрів; знаком V — вeподібне, W — дубльвеподібне розміщення циліндрів; 60° — кут між осями циліндрів — кут розвалу. В сьомій колонці через γ_e позначено кут між кликом і головним шатуном.

Задачу розв'язати для положення кривошипа під кутом 30° до лінії руху головного поршня і для положення, коли причіпний шатун знаходиться на осі свого циліндра.

Визначити кутові прискорення шатунів в даних положеннях.

13. Для механізму Шепінга дано $OO_1 = 200$ *мм*; $OA = 100$ *мм*; $O_1B = 400$ *мм*. Число обертів кривошипа $OA - n = 60$ *об/хв*.

Побудувати план швидкостей і прискорень через кожні 30° повороту кривошипа.

Побудувати діаграми $[s, t]$, $[v, s]$ і $[w, s]$ для різцевої призми.

14. Дано механізм Вітворта (рис. 121), в якому $OO_1 = 50$ *мм* і $OA = 100$ *мм*; $O_1B = 200$ *мм*; $BC = 800$ *мм*. Число обертів кривошипа $OA - n = 120$ *об/хв*.

Дослідити кінематику точки C.

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ

§ 33. Аналітичне дослідження кінематики нормального кривошипно-шатунного механізму

Аналітичний метод дослідження має такі позитивні риси: результати за цим методом одержують з наперед заданою точністю, є можливість робити загальні висновки й поглиблювати аналіз руху механізму.

Але через складність цей метод застосовується лише для найпростіших механізмів. Найбільш характерні приклади такого дослідження ми й розглянемо в цьому розділі.

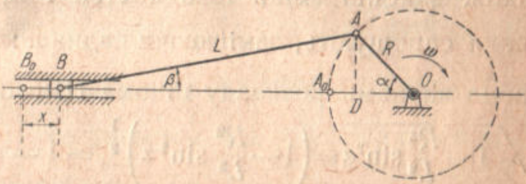


Рис. 143

На рисунку 143 дано нормальний кривошипний механізм. Визначимо закон переміщень, закон зміни швидкостей і прискорень поршня.

На рисунку: B_0 — крайнє ліве положення поршня; $BA = B_0A_0 = L$ — довжина шатуна; $AO = A_0O = R$ — довжина кривошипа; A_0O — початкове положення кривошипа. Кривошип обертається за годинниковою стрілкою з постійною кутовою швидкістю ω.

Значить, кут повороту кривошипа $\alpha = \omega t$. Позначимо переміщення поршня, яке відповідає довільному кутові (α) повороту кривошипа, через x.

З рисунку маємо:

$$x = B_0B = B_0O - BO, \tag{76}$$

$$B_0O = B_0A_0 + A_0O = L + R,$$

$$BO = BD + DO = L\cos\beta + R\cos\alpha.$$

Рівняння (76) перепишеться так:

$$x = L + R - L\cos\beta - R\cos\alpha,$$

або

$$x = R(1 - \cos\alpha) + L(1 - \cos\beta). \tag{77}$$

У рівняння (77) входить кут β, залежність якого від часу нам невідома, тому виразимо його через α з трикутника AOB

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{R}{L},$$

звідси:

$$\sin\beta = \frac{R}{L}\sin\alpha, \tag{78}$$

а

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2}\sin^2\alpha}.$$

Вставляємо одержане значення в рівняння (77):

$$x = R(1 - \cos\alpha) + L\left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2}\sin^2\alpha}\right) \tag{79}$$

Рівняння (79) виражає точний закон переміщення (або, краще, відстаней від лівого мертвого положення) поршня.

В практичному користуванні для визначення переміщень, а також законів зміни швидкостей і прискорень одержане рівняння спрощують, замінюючи радикал: $\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2}\sin^2\alpha}$ першими двома членами розкладу бінома Ньютона:

$$\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2}\sin^2\alpha} = \left(1 - \frac{R^2}{L^2}\sin^2\alpha\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{L^2}\sin^2\alpha - \frac{1}{8}\frac{R^4}{L^4}\sin^4\alpha - $$
$$- \frac{1}{16}\frac{R^6}{L^6}\sin^6\alpha - \ldots$$

Це робиться на підставі того, що, навіть, у авіаційних двигунах найбільше значення $\frac{R}{L} = \frac{1}{3{,}2}$, в стаціонарних парових машинах звичайно $\frac{R}{L} = \frac{1}{5}$, в паровозах $\frac{R}{L} = \frac{1}{8}$.

Тому третій і наступні члени розкладу бінома дуже малі.

Зазначене підставляння перетворює рівняння (79) в таке:

$$x = R(1 - \cos\alpha) + \frac{R^2}{2L}\sin^2\alpha. \tag{80}$$

Позначимо: $\frac{R}{L} = \lambda$ (в деяких підручниках позначається $\frac{L}{R} = \lambda$).

Тоді рівняння (80) матиме такий вигляд:

$$x = R\left(1 - \cos\alpha + \frac{\lambda}{2}\sin^2\alpha\right), \tag{81}$$

або

$$x = R\left(1 - \cos\alpha + \frac{\lambda}{4}\cdot 2\sin^2\alpha\right) = R\left[1 - \cos\alpha + \frac{\lambda}{4}(1 - \cos 2\alpha)\right] =$$
$$= R\left[\left(1 + \frac{\lambda}{4}\right) - \left(\cos\alpha + \frac{\lambda}{4}\cos 2\alpha\right)\right]. \tag{82}$$

Для виведення закону зміни швидкостей поршня рівняння (81) або (82) треба продиференціювати:

$$v_B = \frac{dx}{dt} = R\left(\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} + \lambda\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}\right);$$

або

$$v_B = R\omega\left(\sin\alpha + \frac{\lambda}{2}\sin 2\alpha\right). \tag{83}$$

Закон зміни прискорення точки B:

$$w_B = \frac{dv_B}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = R\omega\left(\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} + \lambda\cos 2\alpha\frac{d\alpha}{dt}\right);$$

або

$$w_B = R\omega^2(\cos\alpha + \lambda\cos 2\alpha). \tag{84}$$

Не треба забувати, що рівняння (83) і (84) виражають швидкості й прискорення лише наближено, бо одержані вони з наближеного рівняння (81).

Коли не зупинятися на другому членові розкладу бінома Ньютона: $\left(1 - \frac{R^2}{L^2}\sin^2\alpha\right)^{1/2}$ то формули (82), (83) і (84) після деяких перетворень матимуть вигляд:

$$x = R\left[(1 + A) - (\cos\alpha + B\cos 2\alpha + C\cos 4\alpha + D\cos 6\alpha + \ldots)\right]; \tag{82a}$$

$$v_B = R\omega(\sin\alpha + 2B\sin 2\alpha + 4C\sin 4\alpha + 6D\sin 6\alpha + \ldots); \tag{83a}$$

$$w_B = R\omega^2(\cos\alpha + 4B\cos 2\alpha + 16C\cos 4\alpha + 36D\cos 6\alpha + \ldots); \tag{84a}$$

де

$$A = \frac{\lambda}{4} + \frac{3}{64}\lambda^3 + \frac{5}{256}\lambda^5 + \ldots,$$

$$B = \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{16}\lambda^3 + \frac{15}{512}\lambda^5 + \ldots,$$

$$C = -\frac{1}{64}\lambda^3 - \frac{3}{256}\lambda^5 - \ldots,$$

$$D = \frac{1}{512}\lambda^5 + \ldots$$

Таким чином, величини x, v_B і w_B можна уявити як суму нескінченного ряду синусоід або косинусоід (гармонік).

Обчислюючи швидкості й прискорення поршня за формулами (83) і (84), ми робимо дуже малу похибку, як це видно з рівнянь (83а) і (84а). Припущення при диференціюванні, що ω є величина стала, зумовляє значно більшу похибку.

За формулами (81), (83) і (84) легко визначити переміщення, швидкості й прискорення поршня за час, що відповідає певним кутам повороту кривошипа, а потім побудувати діаграми [s, t], [v, t] і [w, t].

Для полегшення обчислень наводимо таблиці значень, які стоять в дужках цих формул, для різних конструкцій кривошипних механізмів.

Таблиця 1

Значення $\left(1+\frac{\lambda}{4}\right)-\left(\cos\alpha+\frac{\lambda}{4}\cos 2\alpha\right)$ для визначення путей поршня залежно від α і λ

α	λ												α
	$\frac{1}{3,3}$	$\frac{1}{3,4}$	$\frac{1}{3,5}$	$\frac{1}{3,6}$	$\frac{1}{3,7}$	$\frac{1}{3,8}$	$\frac{1}{3,9}$	$\frac{1}{4,0}$	$\frac{1}{4,1}$	$\frac{1}{4,2}$	$\frac{1}{4,3}$	$\frac{1}{4,4}$	
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	360
10	0,020	0,020	0,020	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,018	0,018	0,018	350
20	0,078	0,078	0,077	0,077	0,076	0,076	0,075	0,075	0,075	0,074	0,074	0,074	340
30	0,172	0,171	0,170	0,169	0,168	0,167	0,166	0,165	0,165	0,164	0,163	0,162	330
40	0,297	0,295	0,293	0,291	0,290	0,288	0,287	0,286	0,284	0,284	0,283	0,282	320
50	0,446	0,444	0,441	0,439	0,437	0,434	0,432	0,431	0,429	0,428	0,426	0,424	310
60	0,614	0,610	0,607	0,604	0,601	0,599	0,596	0,594	0,592	0,590	0,588	0,586	300
70	0,792	0,788	0,784	0,781	0,777	0,774	0,771	0,768	0,766	0,764	0,761	0,758	290
80	0,973	0,969	0,965	0,961	0,957	0,954	0,951	0,948	0,945	0,944	0,941	0,938	280
90	1,152	1,147	1,143	1,139	1,135	1,132	1,128	1,125	1,122	1,122	1,119	1,116	270
100	1,321	1,316	1,312	1,308	1,305	1,301	1,298	1,295	1,292	1,290	1,285	1,280	260
110	1,476	1,472	1,468	1,465	1,461	1,458	1,455	1,452	1,450	1,448	1,434	1,420	250
120	1,614	1,610	1,607	1,604	1,601	1,599	1,596	1,594	1,592	1,590	1,588	1,586	240
130	1,732	1,729	1,727	1,724	1,722	1,720	1,718	1,716	1,714	1,712	1,711	1,710	230
140	1,829	1,827	1,825	1,823	1,822	1,820	1,819	1,818	1,816	1,816	1,815	1,814	220
150	1,904	1,903	1,902	1,901	1,900	1,900	1,898	1,897	1,897	1,896	1,895	1,894	210
160	1,957	1,957	1,956	1,956	1,956	1,955	1,955	1,954	1,954	1,954	1,954	1,954	200
170	1,989	1,989	1,989	1,989	1,989	1,989	1,989	1,989	1,989	1,986	1,986	1,986	190
180	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	180

Таблиця 2

Значення $\left(\sin\alpha+\frac{\lambda}{2}\sin 2\alpha\right)$ для визначення швидкостей поршня залежно від α і λ

α	λ									α
	$\frac{1}{3,3}$	$\frac{1}{3,4}$	$\frac{1}{3,5}$	$\frac{1}{3,6}$	$\frac{1}{3,7}$	$\frac{1}{3,8}$	$\frac{1}{3,9}$	$\frac{1}{4,0}$	$\frac{1}{4,1}$	
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	360
10	0,226	0,224	0,223	0,221	0,220	0,219	0,217	0,216	0,215	350
20	0,439	0,437	0,434	0,431	0,429	0,427	0,424	0,422	0,420	340
30	0,631	0,627	0,624	0,620	0,617	0,614	0,611	0,608	0,606	330
40	0,792	0,788	0,784	0,780	0,776	0,772	0,769	0,766	0,763	320
50	0,915	0,911	0,907	0,903	0,899	0,896	0,892	0,889	0,886	310
60	0,997	0,993	0,990	0,986	0,983	0,980	0,977	0,974	0,972	300
70	0,037	1,034	1,032	1,029	1,027	1,024	1,022	1,020	1,018	290
80	1,037	1,035	1,034	1,032	1,031	0,030	1,029	1,028	1,026	280
90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	270
100	0,933	0,935	0,936	0,937	0,939	0,940	0,941	0,942	0,943	260
110	0,842	0,845	0,848	0,850	0,853	0,855	0,857	0,859	0,861	250
120	0,735	0,739	0,742	0,746	0,749	0,752	0,755	0,758	0,760	240
130	0,617	0,621	0,625	0,629	0,633	0,637	0,640	0,643	0,646	230
140	0,494	0,498	0,502	0,506	0,510	0,513	0,516	0,520	0,523	220
150	0,369	0,373	0,376	0,380	0,383	0,386	0,389	0,392	0,394	210
160	0,245	0,248	0,250	0,253	0,255	0,257	0,260	0,262	0,264	200
170	0,122	0,123	0,125	0,126	0,127	0,129	0,130	0,131	0,132	190
180	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	180

Таблиця 3

Значення ($\cos \alpha + \lambda \cos 2 \alpha$) для визначення прискорень поршня залежно від α і λ

α	Знак	λ = $\frac{1}{3,0}$	$\frac{1}{3,1}$	$\frac{1}{3,2}$	$\frac{1}{3,3}$	$\frac{1}{3,4}$	$\frac{1}{3,5}$	$\frac{1}{3,6}$	$\frac{1}{3,7}$	$\frac{1}{3,8}$	$\frac{1}{3,9}$	$\frac{1}{4,0}$	$\frac{1}{4,1}$	$\frac{1}{4,2}$	$\frac{1}{4,3}$	$\frac{1}{4,4}$	$\frac{1}{4,5}$	$\frac{1}{5,0}$	α
1	+	1,333	1,323	1,312	1,303	1,294	1,286	1,278	1,270	1,263	1,256	1,250	1,244	1,238	1,232	1,227	1,222	1,200	360
10	+	1,298	1,288	1,278	1,270	1,261	1,253	1,246	1,239	1,232	1,226	1,220	1,214	1,209	1,203	1,198	1,194	1,173	350
20	+	1,195	1,187	1,178	1,172	1,165	1,159	1,153	1,147	1,141	1,136	1,131	1,126	1,122	1,118	1,114	1,110	1,093	340
30	+	1,033	1,027	1,022	1,018	0,013	1,009	1,005	1,001	0,998	0,994	0,991	0,988	0,985	0,982	0,980	0,977	0,966	330
40	+	0,824	0,822	0,820	0,819	0,817	0,816	0,814	0,813	0,812	0,811	0,810	0,808	0,807	0,806	0,805	0,804	0,801	320
50	+	0,585	0,587	0,589	0,590	0,592	0,593	0,595	0,596	0,597	0,598	0,599	0,600	0,601	0,602	0,603	0,604	0,608	310
60	+	0,333	0,339	0,344	0,348	0,353	0,357	0,361	0,365	0,368	0,372	0,375	0,378	0,381	0,384	0,386	0,389	0,400	300
70	+	0,087	0,095	0,103	0,110	0,117	0,123	0,129	0,135	0,140	0,146	0,150	0,155	0,160	0,164	0,168	0,172	0,189	290
80	—	0,139	0,130	0,120	0,111	0,103	0,095	0,087	0,080	0,074	0,067	0,061	0,055	0,050	0,045	0,040	0,035	0,014	280
90	—	0,333	0,327	0,312	0,303	0,294	0,286	0,278	0,270	0,263	0,256	0,250	0,244	0,238	0,232	0,277	0,222	0,200	270
100	—	0,486	0,477	0,467	0,458	0,450	0,442	0,435	0,428	0,421	0,415	0,409	0,403	0,397	0,392	0,387	0,303	0,362	260
110	—	0,597	0,589	0,581	0,574	0,567	0,561	0,555	0,549	0,544	0,538	0,533	0,529	0,524	0,520	0,516	0,512	0,495	250
120	—	0,667	0,661	0,656	0,651	0,647	0,643	0,639	0,639	0,632	0,628	0,625	0,622	0,619	0,616	0,614	0,611	0,600	240
130	—	0,701	0,700	0,697	0,695	0,694	0,692	0,691	0,690	0,680	0,687	0,686	0,685	0,684	0,683	0,682	0,682	0,678	230
140	—	0,708	0,710	0,712	0,713	0,715	0,716	0,718	0,719	0,720	0,721	0,723	0,724	0,725	0,726	0,727	0,728	0,731	220
150	—	0,699	0,705	0,710	0,714	0,719	0,723	0,727	0,723	0,734	0,738	0,741	0,744	0,747	0,750	0,752	0,755	0,766	210
160	—	0,684	0,693	0,700	0,708	0,714	0,721	0,727	0,733	0,738	0,743	0,748	0,753	0,757	0,762	0,767	0,770	0,787	200
170	—	0,672	0,682	0,692	0,700	0,708	0,716	0,724	0,731	0,735	0,744	0,750	0,756	0,761	0,766	0,771	0,776	0,797	180
180	—	0,667	0,677	0,688	0,697	0,706	0,714	0,722	0,730	0,737	0,744	0,750	0,756	0,762	0,768	0,773	0,778	0,800	180

Кутове переміщення шатуна відносно поршня визначається за рівнянням (78):

$$\sin\beta = \lambda \sin\alpha.$$

Звідси знайдемо кутову швидкість шатуна.

Диференціюємо рівняння (78):

$$\cos\beta \frac{d\beta}{dt} = \lambda \cos\alpha \frac{d\alpha}{dt},$$

або

$$\omega_1 \cos\beta = \lambda\,\omega \cos\alpha$$

і

$$\omega_1 = \omega \frac{\lambda \cos\alpha}{\cos\beta}. \tag{85}$$

Наближено:

$$\cos\beta = 1 - \frac{\lambda^2}{2}\sin^2\alpha,$$

а

$$\omega_1 = \omega \frac{\lambda\cos\alpha}{1 - \frac{\lambda^2}{2}\sin^2\alpha}; \tag{85a}$$

точно:

$$\omega_1 = \omega \frac{\lambda\cos\alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\alpha}}. \tag{85b}$$

Кутове прискорення шатуна знайдемо диференціюванням рівняння (85) за часом:

$$\varepsilon = \frac{d\omega_1}{dt} = \lambda\,\omega \frac{-\sin\alpha \frac{d\alpha}{dt}\cos\beta + \sin\beta \frac{d\beta}{dt}\cos\alpha}{\cos^2\beta} =$$

$$= \lambda\,\omega \frac{-\omega \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \cdot \frac{\lambda\,\omega\cos\alpha}{\cos\beta}}{\cos^2\beta} =$$

$$= \lambda\,\omega^2 \frac{-\sin\alpha\cos^2\beta + \lambda\sin\beta\cos^2\alpha}{\cos^3\beta} =$$

$$= \frac{\lambda\,\omega^2\sin\alpha}{\cos^3\beta}\left(-\cos^2\beta + \frac{\lambda\sin\beta}{\sin\alpha}\cos^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{\lambda\,\omega^2\sin\alpha}{\cos^3\beta}\left(-1 + \lambda^2\sin^2\alpha + \lambda^2\cos^2\alpha\right).$$

Остаточно:

$$\varepsilon = \frac{\lambda\,\omega^2\sin\alpha}{\cos^3\beta}\left(-1 + \lambda^2\right). \tag{86}$$

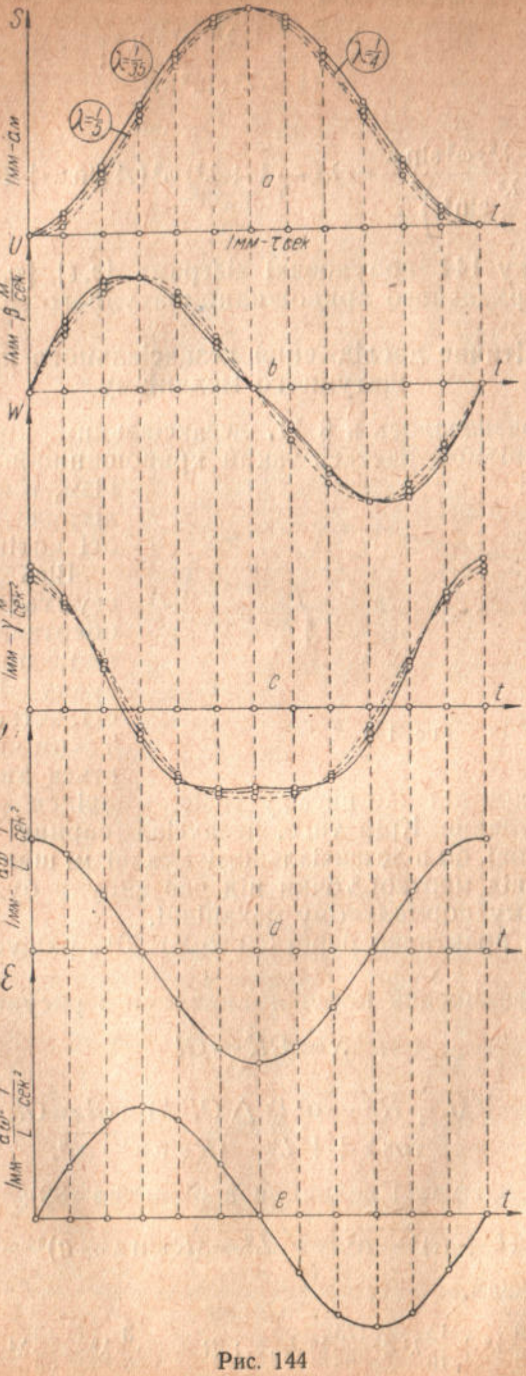

S
λ=1/3,5
λ=1/4
λ=1/3
1мм-ам
a
t
U
1мм-τсек
1мм-β м/сек
b
W
1мм-γ м/сек²
c
ω
1мм-аω/L 1/сек²
d
ε
1мм-аω²/L 1/сек²
e

Рис. 144

Коли β замінимо через α:

точно
$$\varepsilon = \frac{\lambda(-1+\lambda^2)\,\omega^2 \sin\alpha}{(1-\lambda^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}; \tag{87}$$

наближено
$$\varepsilon = \frac{\lambda(-1+\lambda^2)\,\omega^2 \sin\alpha}{\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\sin^2\right)^3} = \lambda(-1+\lambda^2)\,\omega^2\,(A\sin\alpha + B\sin 3\alpha + \ldots)^1 \tag{88}$$

На рисунку 144 побудовані діаграми $[s,t]$, $[v,t]$, $[w,t]$, $[\omega_1,t]$ і $[\varepsilon,t]$ для нормального кривошипно-шатунного механізму.

§ 34. Аналітичне дослідження дезаксіального кривошипно-шатунного механізму

Як уже зазначалось в § 11, дезаксіальним кривошипно-шатунним механізмом зветься такий кривошипно-шатунний механізм, в якому вісь циліндра не перетинає осі колінчастого вала.

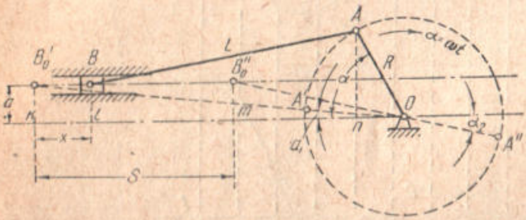


Рис. 145

Вісь циліндра зміщується в напрямі обертання кривошипа, як це показано на рисунку 145. Зміщення осі зветься дезаксіалом. Таким чином, зменшується тиск поршня на стінки циліндра під час вибуху газів, а звідси — менше тертя, менше зношування. Крім того, дезаксіал сприяє термодинамічному процесові, бо в дезаксіальному механізмі швидкість поршня при відході від мертвої точки під час вибуху буде менша, ніж у відповідному нормальному механізмі.

Дезаксіал практично береться коло 20% радіуса кривошипа: $a = 0{,}2\,R$.

Закон переміщення поршня виведемо з рисунку 145:
$$x = OK - Ol. \tag{89}$$

Але
$$OK = \sqrt{(L+R)^2 - a^2}\ (\text{з } \triangle\, OB_0'k),\ \text{а}\ Ol = On + nl =$$
$$= R\cos\alpha + \sqrt{L^2 - (R\sin\alpha - a)^2}.$$

Вставимо одержані величини в рівняння (89):
$$x = \sqrt{(L+R)^2 - a^2} - \sqrt{L^2 - (R\sin\alpha - a)^2} - R\cos\alpha, \tag{90}$$

де a — дезаксіал.

---

[1] $A = 1 + \frac{9}{8}\lambda^2 + \frac{15}{16}\lambda^4 + \frac{175}{508}\lambda^6 + \ldots;\ B = -\frac{3}{8}\lambda^2 - \frac{15}{38}\lambda^4 - \frac{105}{256}\lambda^6 - \ldots$

Рівняння (90) дає точний закон переміщення поршня.

Легко довести, що в дезаксіальному кривошипному механізмі хід поршня більше $2R$.

З рисунку бачимо:

$$B_0'B_0'' > B_0'O - B_0''O. \tag{91}$$

Але

$$B_0'O = L + R,$$

а

$$B_0''O = L - R; \quad B_0'B_0'' = S;$$

і рівняння (91) дасть

$$S > L + R - L + R,$$

або

$$S > 2R. \tag{92}$$

Швидкість поршня знайдемо диференціюванням рівняння (90):

$$v_B = \frac{dx}{dt} = \frac{2(R\sin\alpha - a)R\cos\alpha}{2\sqrt{L^2 - (R\sin\alpha - a)^2}} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + R\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt},$$

або

$$v_B = R\omega\left(\frac{R\sin\alpha - a}{\sqrt{L^2 - (R\sin\alpha - a)^2}}\cos\alpha + \sin\alpha\right). \tag{93}$$

Рівняння (93), яке дає точний вираз для швидкості поршня, незручне через свою складність.

Не буде великої похибки, коли членом $-(R\sin\alpha - a)$ під радикалом — знехтувати. Тоді одержимо:

$$v_B = R\omega\left(\frac{R}{L}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{a}{L}\cos\alpha + \sin\alpha\right),$$

або

$$v_B = R\omega\left(\frac{\lambda\sin 2\alpha}{2} - \frac{a}{L}\cos\alpha + \sin\alpha\right). \tag{94}$$

Наближений вираз для визначення прискорення поршня знайдемо диференціюванням рівняння (94):

$$w_B = \frac{dv_B}{dt} \cong R\omega\left(\frac{2\lambda\cos 2\alpha}{2}\cdot\frac{d\alpha}{dt} + \frac{a}{L}\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} + \cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}\right),$$

або

$$w_B \cong R\omega^2\left(\lambda\cos 2\alpha + \frac{a}{L}\sin\alpha + \cos\alpha\right). \tag{95}$$

§ 35. Контрольні запитання і задачі

1. Наближена формула для переміщень (80, 81 або 82) дає більші результати, ніж точна (79), чи менші?
2. При якому положенні кривошипа похибка при обчисленні за наближеними формулами переміщення буде найбільша?
3. При якому положенні кривошипа прискорення поршня буде максимальне?
4. Як впливає на величину швидкості і прискорення λ?

5. Чому дорівнює кутове прискорення шатуна в мертвих положеннях?

6. Який кривошипний механізм зветься дезаксіальним?

7. Що таке дезаксіал?

8. В яку сторону зміщують вісь циліндра по відношенню до осі вала?

9. Як впливає дезаксіал на кінематику кривошипного механізму?

10. Чи можна кутове прискорення шатуна дезаксіального кривошипного механізму визначити за формулами (87) і (88)?

Задачі

1. Визначити переміщення, швидкості й прискорення через кожні 10° повороту кривошипа для механізму, в якому $R = 85$ *мм*; $L = 340$ *мм*. Число обертів кривошипа $n = 1450$ *об/хв*.

2. За даними задачі 1, визначити кутові швидкості і прискорення шатуна через кожні 30° повороту кривошипа.

3. Визначити, при якому значенні α швидкість поршня буде максимальна, коли $\lambda = \frac{1}{4}$.

4. Дослідити вплив λ на форму діаграми $[w, t]$.

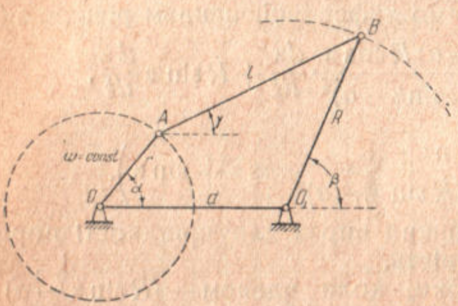


Рис. 146

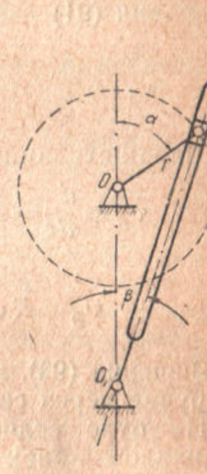


Рис. 147

5. Дослідити аналітично рух ланки R чотирикутного механізму (рис. 146). Побудувати криві кутових переміщень, швидкостей і прискорень за часом для ланки R, вважаючи рух ланки r за рівномірний обертальний ($\alpha = \omega t$; $\omega = \text{const}$) $r = 5$ *см*; $d = 10$ *см*; $l = 12$ *см*; $R = 10$ *см*; число обертів ланки r — $n = 120$ *об/хв*.

Вказівка: проектуючи чотирикутник $OABO_1$ на OO_1, маємо

$$r\cos\alpha + l\cos\gamma - R\cos\beta = d.$$

Проектування його на напрям, перпендикулярний до OO_1, дасть:

$$r\sin\alpha + l\sin\gamma = R\sin\beta.$$

Виключивши з цих рівнянь γ, одержимо:

$$(r\sin\alpha)\sin\beta - (d - r\cos\alpha)\cos\beta = \frac{r^2 + d^2 + R^2 - l^2}{2R} + \frac{dr}{R}\cos\alpha.$$

Коли надавати α значення 0°, 30°, 60°,... то знайдемо з останнього рівняння відповідні значення для β і побудуємо діаграму $[\beta, t]$.

Діаграми кутових швидкостей і прискорень ланки R побудуємо на підставі рівнянь, одержуваних першим і другим диференціюванням рівняння кутових переміщень.

6. Скласти закон зміни кута β залежно від α для кулісного механізму (рис. 147)

Відповідь:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{r\sin\alpha}{d + r\cos\alpha},$$

де $d = OO_1$

ЗУБЧАСТІ КОЛЕСА

§ 36. Обертальний рух

Обертання твердого тіла навколо осі докладно вивчається в курсі теоретичної механіки.

Нагадуємо досить важливий для нас висновок:

$$v = \omega r, \tag{96}$$

тобто: лінійна (колова) швидкість точки v при незмінній кутовій швидкості ω змінюється прямо пропорціонально відстані її від осі обертання r.

Крім того, розглядаючи обертальний рух, як окремий випадок плоского, можна всі висновки, зроблені вище про розподіл швидкостей точок відрізка, що рухається плоским рухом, застосувати і для даного випадку. Маємо:

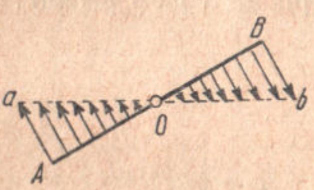


Рис. 148

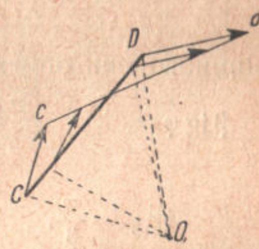


Рис. 149

На рисунку 148 пряма AB обертається в площині рисунку навколо точки O, що лежить на AB.

Швидкість змінюється за законом прямої ab.

На рисунку 149 — пряма OD обертається в площині рисунку навколо точки O_1, що лежить зовні лінії CD. Швидкість в цьому випадку змінюється за законом прямої cd.

Трикутник швидкостей

Уявимо собі диск D, що обертається навколо нерухомого центра O з постійною кутовою швидкістю ω. Колова швидкість точки A (рис. 150) буде рівна добуткові кутової швидкості ω на r, де r є дійсна відстань точки A від осі обертання.

Відкладаємо цю швидкість, як вектор X_A від точки A в сторону руху, перпендикулярно до радіуса OA.

Відношенням дійсної швидкості точки A — v_A до вектора X_A, очевидно, буде масштаб швидкостей, тобто:

$$\frac{v_A}{X_A} = \beta,$$

де β — масштаб швидкостей: 1 *мм* — $\beta \frac{м}{сек}$.

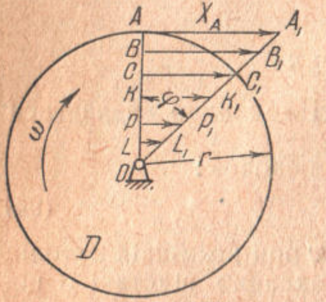


Рис. 150

Сполучивши тепер кінець вектора X_A — точку A_1 — з точкою O, одержимо трикутник OAA_1, що й зветься трикутником швидкостей.

Висновок: трикутник, що дає закон розподілу колових (лінійних) швидкостей на обертовому тілі, зветься трикутником швидкостей.

Доведемо, до $\operatorname{tg}\varphi$ пропорціональний числу обертів n.

Дійсно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_A}{r},$$

або, помноживши обидві частини рівності на β, маємо:

$$\beta \operatorname{tg}\varphi = \frac{X_A \beta}{r} = \frac{v_A}{r} = \omega,$$

або

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega}{\beta}.$$

Відомо, що

$$\omega = \frac{\pi n}{30};$$

тоді

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pi}{30\beta} n; \quad \frac{\pi}{30\beta} = C = \text{const}.$$

Значить

$$\operatorname{tg}\varphi = Cn. \qquad (97)$$

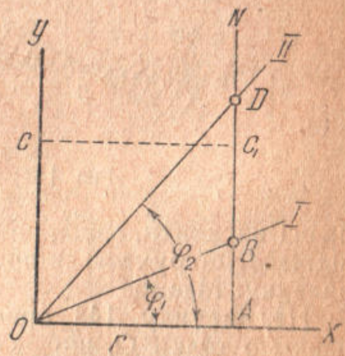


Рис. 151

Позначимо відповідно кути нахилу прямої A_1O для обертів n_1, n_2, n_3,... і т. д. через φ_1, φ_2, φ_3... і т. д.

Знайдені кути відкладаємо від осі OX, проводячи промені I, II і т. д. (рис. 151) з точки O. Далі відкладаємо на осі X відрізок $OA = r$ і проводимо через точку A нормаль. Відрізки AB і AD пропорціональні коловим швидкостям механізму при зміні числа його обертів.

Дійсно:

$$AB = r \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\pi r n_1}{\beta \cdot 30} = \frac{r\omega_1}{\beta},$$

або

$$AB \cdot \beta = r\omega_1 = v_1 \frac{м}{сек};$$

так само і

$$AD \cdot \beta = v_2 \frac{м}{сек} \text{ і т. д.}$$

Покажемо тепер, як можна підібрати число обертів шпінделя токарного верстата для одержання певної швидкості на колі обточуваного предмета (швидкості різання).

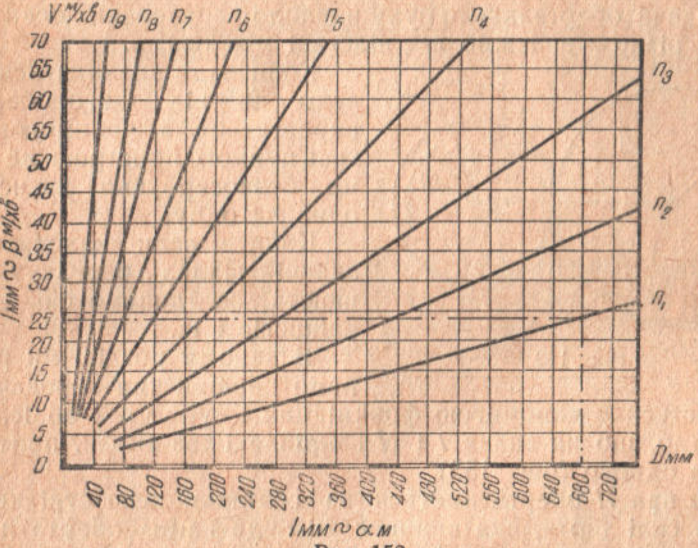


Рис. 152

Припустимо, що треба одержати колову швидкість $v_C \frac{м}{сек}$; ділимо її на β, одержимо відрізок OC, який відкладаємо на осі Oy і проектуємо точку C на нормаль AN. Якщо точка C_1 (проекція точки C) буде ближче до точки D, то верстатові треба надати n_2 обертів, якщо ж вона ближче до точки B, то — n_1 обертів.

Зрозуміло, таке розв'язання задачі дуже наближене, і ми одержимо приблизно задану колову швидкість. Але в сучасних верстатах, які мають многоступінчасті коробки швидкостей, число обертів можна одержати досить точне, бо променів у нашій діаграмі ми одержимо значно більше. Діаграми такого роду звуть діаграмами Пехана.

На рисунку 152 побудована діаграма Пехана для верстата, що має таке число обертів за хвилину: $n_1 = 8{,}9$; $n_2 = 13{,}8$; $n_3 = 21{,}5$; $n_4 = 33{,}5$; $n_5 = 52$; $n_6 = 82$; $n_7 = 128$; $n_8 = 200$; $n_9 = 312$.

Звичайно числа обертів шпінделя змінюються за геометричною прогресією.

В даному прикладі $q = 1{,}56$.

З діаграми бачимо:

1) При діаметрі обточуваного предмета $D = 680$ *мм* і при числі обертів шпінделя $n_1 = 8{,}9$, матимемо швидкість різання $v \cong 24$ *м/хв*.

2) Коли треба обточувати предмет діаметром $D = 360$ *мм* із швидкістю різання, рівною 30 *м/хв*, то верстатові треба надати третю швидкість $n_3 = 21{,}5$ *об/хв* і т. д.

§ 37. Циліндричні фрикційні котки

Передача обертального руху навколо паралельних осей здійснюється різно — залежно від відстані між осями.

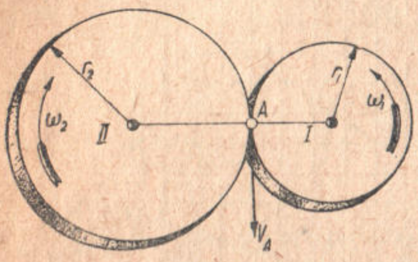


Рис. 153

Коли вали знаходяться недалеко один від одного, обертання передається з допомогою якогось цупкого пристрою, де частини безпосередньо натискують одна на одну.

Коли ж вали знаходяться на значній віддалі, передачу здійснюють за допомогою канатів, ланцюгів і ін.

В даному розділі ми розглянемо перший тип передач, який здійснюється з допомогою фрикційних і зубчастих коліс.

Уявимо, що на валах *I* і *II* закріплені два диски, притиснені один до одного (рис. 153).

Коли вал *II* обертатиметься за годинниковою стрілкою, то завдяки силі тертя, яка виникає між дисками, обертатиметься вал *I* (проти годинникової стрілки).

Вал, від якого передається обертання, звуть ведучим валом, а той вал, якому передається обертання, звуть веденим.

Відношення кутової швидкості веденого вала до кутової швидкості ведучого вала зветься передатним числом і позначається буквою i з відповідними індексами.

Так

$$i_{1,2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \tag{98}$$

де *I* — ведучий вал, а *II* — ведений вал.

Таке саме відношення буде, коли замість кутових швидкостей взяти числа обертів веденого і ведучого валів, тобто:

$$i_{1,2} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{99}$$

Коли диски котяться один по одному без ковзання, то очевидно:

$$v_A = r_1\ \omega_1 = r_2, \omega_2,$$

або

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}; \qquad (100)$$

і передатне число можна виразити так:

$$\boxed{i_{1,2} = \frac{r_1}{r_2}.} \qquad (101)$$

Коли диски мають точний обрис по колу, то передатне число буде сталою величиною.

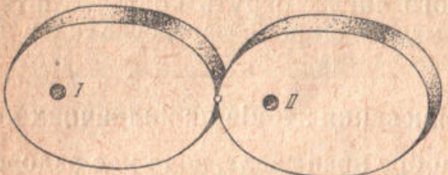


Рис. 154

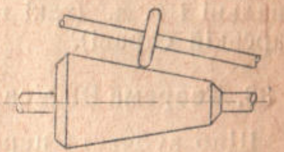


Рис. 155

Коли уявити, що на валах знаходяться еліптичні диски (рис. 154), закріплені в своїх фокусах, то передатне число протягом одного оберта змінюватиметься від максимуму до мінімуму.

Передачу із змінним передатним числом можна здійснити ще так, як показано на рисунках 155 і 156.

Показана на рисунку 156 передача зустрічається в металообробних верстатах, фрикційних пресах і т. д.

Коли припустити, що вал AB, на якому закріплений диск M радіуса R, рівномірно обертається ($\omega = \text{const}$), а вал CD, вісь якого перетинається з віссю вала AB в точці C, пересувається в напрямі, перпендикулярному до AB, то, очевидно, кутова швидкість закріпленого на валу CD диска N радіуса r, змінюватиметься від $\omega_{max} = \frac{\omega R}{r}$ (при стиканні диска N з краєм диска M) до $\omega_{min} = 0$ (при стиканні диска N з центром диска M).

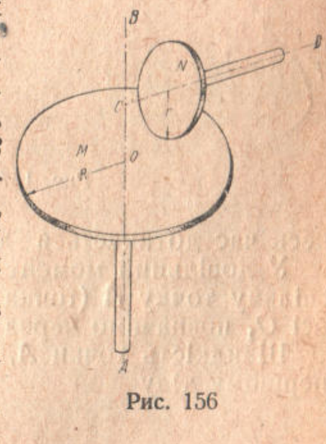


Рис. 156

Коли точка стикання дисків (товщиною диска N нехтуємо) переміститься на другий бік від центра O, вал CD обертатиметься в протилежному напрямі.

Зрозуміло, що закон зміни кутової швидкості диска залежатиме від закону переміщення вала CD вздовж його осі.

Фрикційні колеса не можуть дати певного передатного числа, бо можливе ковзання їх один по одному (при попаданні масла між колесами, при раптових зусиллях і ін.).

Тому така передача застосовується лише там, де необхідно передавати незначні зусилля і без обов'язкового постійного передатного числа.

Застосовують фрикційні колеса ще тоді, коли можливе раптово прикладене зусилля, — колеса просковзують одне по одному, і машина не руйнується.

Зубчасту передачу можна собі уявити так, ніби на фрикційних колесах зроблено пази та виступи, які при обертанні входять одно в одне і тому не допускають просковзування.

Для постійного передатного числа застосовують круглі колеса, для змінного передатного числа беруть колеса еліптичні, овальні і т. д. (такі колеса мають широке застосування в друкарській справі).

§ 38. Теорема Вілліса. Профілювання зубців циліндричних коліс

Щоб зубчаста передача добре працювала, вона має задовольняти таким основним вимогам:

а) передатне число i за весь час руху не повинне змінюватися ($i = \text{const}$);

b) зубці не повинні розчеплюватися до остаточного виходу з зачеплення.

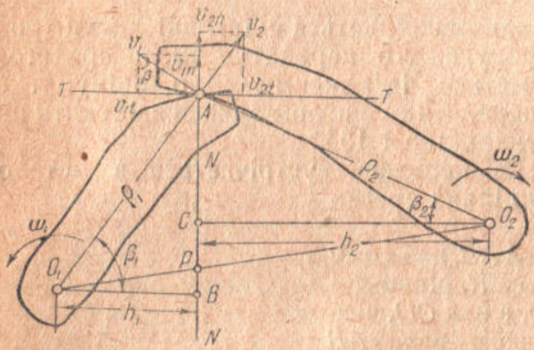


Рис. 157

Для задоволення цих вимог зубці повинні мати суворо певні профілі[1].

Питання раціональної побудови профілів зубців розв'язується теоремою Вілліса (1841 р.).

Припустимо (рис. 157), що будьяке тіло обертається навколо осі O_1. З ним весь час дотикається друге тіло, яке має вісь обертання O_2.

У довільний момент профілі поверхонь дотикання тіл мають спільну точку A (точка дотикання профілів), віддаль якої від осі O_1 позначимо через ρ_1, а від осі O_2 — через ρ_2.

Швидкість точки A, коли вважати, що ця точка належить першому тілу

$$v_1 = \rho_1 \omega_1.$$

Коли вважати, що точка A належить другому тілу, то її швидкість буде

$$v_2 = \rho_2 \omega_2,$$

ω_1 і ω_2 — кутові швидкості тіл.

---

[1] Профілем зубця зветься переріз його в площині, перпендикулярній до осі зубця. (Для циліндричних коліс з прямими зубцями це буде площина, перпендикулярна до осі колеса).

Розкладаємо обидві знайдені швидкості — на напрям спільної нормалі до профілів у точці A і напрям спільної дотичної. Маємо:

$$v_{1n} = v_1 \cos\beta_1 = \rho_1 \omega_1 \cos\beta_1; \quad v_{2n} = v_2 \cos\beta_2 = \rho_2 \omega_2 \cos\beta_2;$$
$$v_{1t} = v_1 \sin\beta_1 = \rho_1 \omega_1 \sin\beta_1; \quad v_{2t} = v_2 \sin\beta_2 = \rho_2 \omega_2 \sin\beta_2.$$

Величини v_{1n} і v_{2n} повинні бути рівні, бо в противному разі ми матимемо або деформацію поверхонь дотикання, або вихід їх із дотикання.

$$v_{1n} = v_{2n} = \rho_1 \omega_1 \cos\beta_1 = \rho_2 \omega_2 \cos\beta_2. \tag{102}$$

З трикутника O_1BA маємо:

$$\rho_1 \cos\beta_1 = h_1,$$

а з трикутника O_2CA маємо:

$$\rho_2 \cos\beta_2 = h_2.$$

Підставивши ці значення у формулу (102), матимемо

$$\omega_1 h_1 = \omega_2 h_2 \tag{103}$$

З подібності трикутників BPO_1 і PCO_2 знаходимо:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{O_1P}{O_2P}, \tag{104}$$

або остаточно:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{O_1P}{O_2P}. \tag{105}$$

Формула (105) і виражає теорему Вілліса.

При обертанні двох профілів, які весь час дотикаються, спільна нормаль, проведена в точці дотикання, ділить лінію центрів обертання на частки, обернено пропорціональні кутовим швидкостям.

Цей висновок можна застосувати при аналізі будьяких механізмів, де обертальний рух однієї ланки передається другій через дотикання.

Коли уявити, що подані на рисунку 157 профілі, які дотикаються в точці A, належать зубцям коліс O_1 і O_2, то для того щоб зберігалася стала величина відношення кутових швидкостей коліс, треба, щоб спільна нормаль до профілів, проведена через точку дотиканна їх, проходила завжди через одну і ту ж точку, яка лежить на лінії центрів.

Ця точка називається полюсом зачеплення. Полюс зачеплення є миттьовий центр відносного обертання коліс.

Дійсно, коли надати всій системі обертального руху з кутовою швидкістю $-\omega_1$, то колесо O_1 зупиниться, а колесо O_2 матиме складний рух: обертання навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω_2 і обертання навколо осі O_1 з кутовою швидкістю $-\omega_1$ (тобто в напрямі ω_2).

З теоретичної механіки відомо, що при складанні таких обертань ми одержимо обертання навколо осі, паралельної O_1 і O_2; при чому вісь складного обертання поділить віддаль між осями O_1 і O_2 на частки, обернено пропорціональні кутовим швидкостям.

Геометричне місце полюсів зачеплення в площині кожного колеса (центроіди у відносному рухові коліс) називається початковим колом даного колеса.

Очевидно це будуть кола, проведені радіусами O_1P і O_2P.

Відносний рух початкових кіл являє собою кочення без ковзання, тому їх часто й визначають як кола, що котяться одне по одному без ковзання.

Початкові кола інакше називають подільними колами.

Порівнюючи v_{1t} і v_{2t}, бачимо, що при рівних нормальних складових вони будуть нерівні. Нерівність цих величин викликає просковзування профілів без порушення їх дотикання.

Це просковзування є основною причиною зношування зубців і різних втрат на тертя.

Очевидно, швидкість ковзання

$$v_{\text{ковз}} = v_{1t} + v_{2t} = \rho_1\omega_1 \sin\beta_1 + \rho_2\omega_2 \sin\beta_2 = \overline{AB}\cdot\omega_1 + \overline{AC}\cdot\omega_2 = (\overline{BP} + \overline{PA})\cdot\omega_1 + (\overline{PA} - \overline{PC})\cdot\omega_2 = \overline{BP}\cdot\omega_1 - \overline{PC}\cdot\omega_2 + PA\,(\omega_1 + \omega_2) = \overline{PA}\,(\omega_1 + \omega_2),$$

бо $\overline{BP}\cdot\omega_1 - \overline{PC}\cdot\omega_2 = 0$, на підставі подібності тих же трикутників ($\triangle PBO_1 \backsim \triangle PCO_2$) і рівності (105):

$$\frac{BP}{PC} = \frac{O_1P}{O_2P} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Звідки:

$$\overline{BP}\cdot\omega_1 = \overline{PC}\cdot\omega_2.$$

Значення швидкості ковзання можна вивести значно простіше, коли взяти до уваги зроблений вище висновок, що P є миттьовий центр відносного обертання коліс, а також те, що швидкість ковзання це є відносна швидкість точок дотикання. Звідси, добуток відносної кутової швидкості на миттьовий радіус відносного обертання і буде швидкість ковзання, тобто

$$v_{\text{ковз}} = (\omega_1 + \omega_2)\cdot\overline{PA}.$$

§ 39. Елементи циліндричних зубчастих коліс

Коло, що обмежує профілі зубців зовні, називається колом виступів. Коло, що обмежує профілі зубців усередині, називається колом западин (рис. 158).

Частина зубця, профіль якого виступає за початкове коло, називається головкою зубця, а та частина, профіль якої знаходиться між початковим колом і колом западин, називається ніжкою зубця.

Відстань, виміряна по початковому колу між двома відповідними точками сусідніх зубців, називається кроком зачеплення. Коли довжину початкового кола поділити на кількість зубців, то це й буде якраз крок.

$$\frac{2\pi r_1}{z_1} = \frac{2\pi r_2}{z_2} = t.$$

Крок являє собою суму товщини зубця $a'b' = c_1$ і ширини западини $a'c' = c_2$.

Обидва ці розміри, як видно з рисунку, взяті по початковому колу.

При однаковому матеріалі зубчастих коліс і старанній обробці товщину зубця й ширину западини беруть однаковими — рівними $\frac{t}{2}$.

В інших випадках при виливанні коліс, при поганій обробці — розміри ці беремо за формулами:

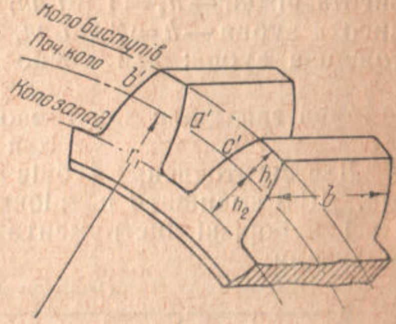


Рис. 158

$$\smile a'b' = c_1 = \left(\frac{19}{40} \div \frac{39}{80}\right) t$$

(товщина зубця);

$$\smile a'c' = c_2 = \left(\frac{21}{40} \div \frac{41}{80}\right) t$$

(ширина западини).

Зазор необхідний для можливості роботи й монтажу, бо без нього через неточність виготовлення профілів зубці „защикуватимуться“.

Інші розміри зубця — висоту головки, висоту ніжки і довжину зубця — беруть за формулами:

$h_1 = 0{,}3\,t$ (висота головки);
$h_2 = 0{,}4\,t$ (висота ніжки);
$b =$ (від 2 до 6) t (довжина зубця);
$h = 0{,}7\,t$ (висота зубця).

Останнім часом широко застосовується обчислення елементів зубця за модулем зачеплення, який являє собою відношення кроку зачеплення до π:

$$\pi \cdot D_{поч} = zt,$$

де z — число зубців на колесі, а t — його крок зачеплення. Звідки

$$D_{поч} = z\,\frac{t}{\pi} = zm$$

(Модуль позначається буквами m або $\mathfrak{M}$ і виражається в міліметрах).

Введення модуля дає можливість виражати діаметри початкових кіл цілими числами, що дуже важливо для точного монтажу коліс.

Фізичне значення модуля — це число міліметрів діаметра початкового кола, яке припадає на один зубець.

Розміри елементів зубчастого колеса, визначені через модуль, мають такі значення:
крок — $t = \pi m$;
діаметр початкового кола $D_{поч} = zm$;
висота головки — $h_1 = m$;
висота ніжки — $h_2 = 1{,}167\ m$, або $1{,}2\ m$;
висота зубця — $h = 2{,}167\ m$, або $2{,}2\ m$;
товщина зубця: для точно виготовлених коліс — $c_1 = 0{,}5\ \pi m$;
для грубо виготовлених — $c_1 = 0{,}48\ \pi m$;
ширина западини: для точно виготовлених коліс — $c_2 = 0{,}5\ \pi m$;
для грубо виготовлених — $c_2 = 0{,}52\ \pi m$.

Для виготовлення зубців потрібний великий набір інструментів. Щоб зменшити потрібний набір, на модулі введений ОСТ, і всі зуборізні інструменти виготовляються за стандартними модулями.

Стандартні модулі ОСТ 1597

0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,25	1,5	1,75
2,0	2,25	2,75	3,0	3,25	3,5	3,75	4,0	4,25	4,5
5	5,5	6	6,5	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	18	20	22	24	26	28
30	33	36	39	42	45	50	—	—	—

В США і в Англії при розрахунках користуються величиною, зворотною модулеві, або так званим „діаметральним кроком“ (diametral pitch), скорочено — „пітчем“. Величина ця показує, скільки зубців припадає на 1″ діаметра початкового кола колеса,

$$p = \frac{z}{D'}, \tag{106}$$

де D' — діаметр початкового кола в дюймах.

Коли через m' позначити модуль в дюймах, тобто $m' = \frac{m}{25{,}4}$, то

$$D' = zm',$$

і з рівняння (106) матимемо:

$$p = \frac{1}{m'}, \tag{107}$$

або

$$p = \frac{25{,}4}{m}. \tag{108}$$

Звідки

$$p \cdot m = 25{,}4 \qquad (109)$$

$$\frac{pD}{z} = 25{,}4, \qquad (110)$$

де D — діаметр початкового кола в міліметрах.

Крок вимірюється по початковому колу, але у виготовленому колесі початкове коло знайти важко; тому для знаходження кроку користуються колом виступів, діаметр якого легко знайти вимірюванням.

Тоді:

$$D_{\text{вст}} = D + 2h_1 = zm + 2m = m(z+2).$$

Звідки

$$m = \frac{D_{\text{вст}}}{z+2}, \qquad (111)$$

а

$$t = \frac{\pi D_{\text{вст}}}{z+2}, \qquad (112)$$

тобто крок одержуємо діленням кола головок на $z+2$.

Коли h_1 дорівнює не m, а $0{,}3\,t$, то замість $z+2$ беремо $z+1{,}885$.

Формули (111) і (112) вірні тільки для зубчастих коліс з нормальною висотою головки зубця.

§ 40. Побудова супряжного профіля методом Рело

Теоремі Вілліса може відповідати дуже багато профілів. Це видно з того, що для всякого, довільно вибраного профіля, можна побудувати супряжний, тобто такий, який при роботі коліс дотикатиметься з заданим, при чому задовольнятимуться такі умови:

1) Зубці не розчеплюватимуться до остаточного виходу з зачеплення.

2) Спільна нормаль до профілів, проведена в точці дотикання, проходитиме через полюс зачеплення.

Побудову цю здійснюють різними способами.

Покажемо побудову методом Рело. Припустимо, що N_1N_1 і N_2N_2 — початкові кола пари зубчастих коліс, які мають осі обертання O_1 і O_2 (рис. 159).

Ці два кола дотикаються в точці P — полюсі зачеплення. APB — профіль довільної форми, що належить зубцеві колеса I.

Візьмемо на цьому профілі довільну точку a і покажемо, як знайти відповідну (супряжну) точку на супряжному профілі, тобто ту точку, з якою вона збігається під час дотикання профілів. Цю точку називатимемо „партнером“ точки a.

Точка a належить колесу I, тому її траєкторія є коло xx, проведене з центра O_1 через точку a.

Проведемо в точці a нормаль aa' до заданого профіля; a' — точка перетину нормалі з початковим колом N_1N_1. На початковому колі N_2N_2 відкладаємо дугу $\smile Pa'' = \smile Pa'$.

Припустимо, що колеса обертаються в напрямах, позначених стрілками. Ми знаємо, що при обертанні коліс, початкові кола котяться одно по одному без ковзання (§ 38), тому точки a' і a'' разом попадуть у полюс (в точку P). В цей момент точка a займе на своїй траекторії положення a_0 (цю точку знайдемо засічкою кола xx радіусом $Pa_0 = a'a$).

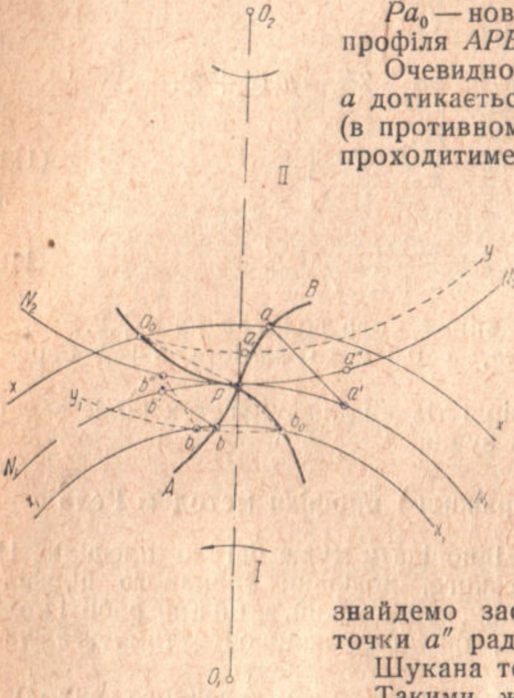


Рис. 159

Pa_0 — нове положення нормалі до профіля APB.

Очевидно, що в положенні a_0 точка a дотикається до супряжного профіля (в противному разі спільна нормаль не проходитиме через полюс P).

Звідси робимо висновок, що „партнер" точки a, в момент, коли a' і a'' збігаються з полюсом P, знаходиться теж у точці a_0, тобто знаходиться на віддалі Pa_0 від a''.

Але, коли ми знаємо одне положення „партнера", ми можемо побудувати його траекторію, — це буде коло a_0y, проведене з центра O_2.

Положення „партнера" в початковий момент знайдемо засічкою його траекторії з точки a'' радіусом Pa_0.

Шукана точка буде a_1.

Такими ж самими міркуваннями і побудовою знайдемо, що точка b профіля APB дотикається з своїм „партнером" у точці b_0, а положення „партнера" в заданий момент буде точка b_1.

Так можна знайти скільки завгодно супряжних точок. Сполучивши їх плавною лінією, одержимо супряжний профіль.

Коли ж сполучити точки дотикання супряжних профілів — a_0, b_0 і т. д. — одержимо *лінію зачеплення* — геометричне місце точок дотикання супряжних профілів на нерухомій площині (на рисунку 159 — лінія a_0Pb_0).

§ 41. Побудова евольвентних профілів зубців

Можливість довільного вибору одного з профілів приваблива: ми можемо вибрати найпростіший профіль; але як показують побудови, другий профіль і лінія зачеплення виходять тоді досить складні, а тому робота їх буде незадовільна, не кажучи вже про складність виготовлення другого колеса.

Раціонально побудовані профілі, крім умов, зазначених на початку § 38, мають відповідати ще таким умовам:

1) Нормалі до профілів не повинні перетинатися до перетину їх з початковими колами (рис. 160 і 161).

2) При рівних дугах ($\smile a'b' = \smile b'c' = \ldots$) на початкових колах, відповідні ділянки на профілях (ab, bc, ...) теж, хоч наближено, повинні бути рівні.

Дійсно, коли профіль APB (рис. 160) обертатиметься проти годинникової стрілки, точки a', b', c', ... послідовно проходитимуть через полюс. Робочі точки (точки дотикання з супряжним профілем a, b, c, ...) лежатимуть на профілі в певній послідовності.

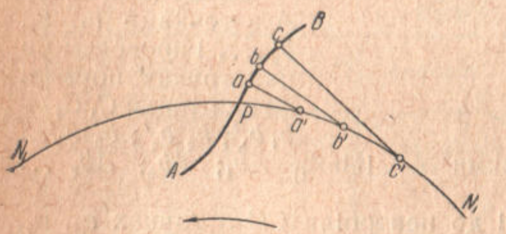


Рис. 160

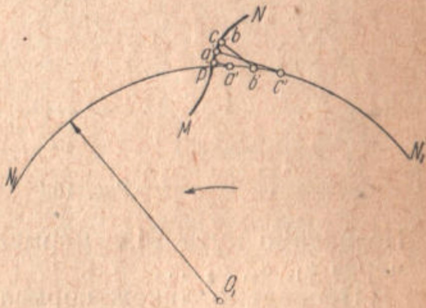


Рис. 161

Зовсім інше буде становище з профілем MPN (рис. 161). Тут робочі точки профілів лежать уже не в тій послідовності, як точки на початковому колі, тому на зубці буде велике ковзання, напрямлене то в ту, то в іншу сторону.

Профілі, які відповідали б усім поставленим умовам, обрисовують за формою рулет: евольвенти, епіциклоїди, гіпоциклоїди і т. д.

Рулетою (від французького слова rouler — котити) зветься лінія, яку вирисовує точка, зв'язана з кривою, коли ця крива котиться по другій кривій без ковзання.

На рисунку 162 показаний загальний спосіб побудови рулети.

Точка A незмінно зв'язана з центроідою C_1C_1, яка котиться без ковзання по центроіді CC.

В даний момент центроіди дотикаються в точці a_1 — миттьовому центрі обертання.

Звідси, точка A в даний момент рухається по колу *11*, описаному з центра a_1 радіусом a_1A.

В наступний момент, коли точка b_2 рухомої центроіди суміститься з точкою a_2 нерухомої ($\smile a_1 a_2 = \smile a_1 b_2$), точка A рухатиметься по колу *22*, проведеному з центра a_2 радіусом b_2 A і т. д.

Дійсна траєкторія точки A буде обвідна дуг 11, 22, 33, $44\dots$

На рисунку 163 показаний спосіб побудови рулети по точках. Точка A незмінно зв'язана з центроідою C_1C_1, яка котиться без ковзання по центроіді CC.

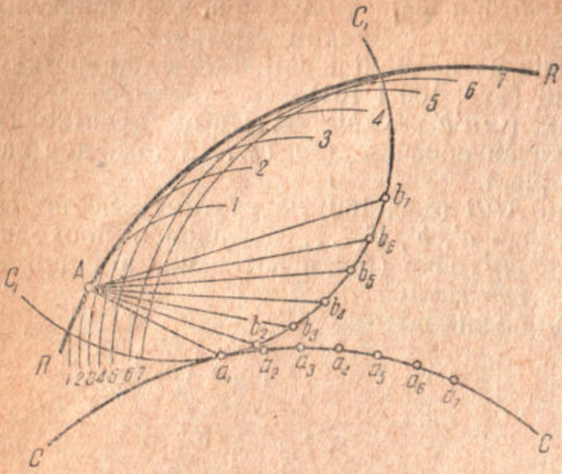


Рис. 162

В даний момент центроіди дотикаються в точці a_0 — миттьовому центрі обертання.

Відкладемо на центроідах відповідно рівні дуги: $\smile a_0a_1 = \smile a_0b_1$; $\smile a_1a_2 = \smile b_1b_2$; $\smile a_2a_3 = \smile b_2b_3$ і т. д.

Сполучимо точку A з точками b_1, b_2, $b_3\dots$ і проведемо в цих точках нормалі до центроіди C_1C_1 — b_1b_1'; b_2b_2'; $b_3b_3'\dots$ Позначимо кути між нормалями й лініями Ab_1; Ab_2; $Ab_3\dots$ через α_1, α_2, $\alpha_3\dots$

Проведемо також нормалі до центроіди CC в точках a_1, a_2, $a_3\dots$ При перекочуванні центроіди C_1C_1 по центроіді CC точки b_1, b_2, $b_3\dots$ попадуть у точки a_1, a_2, $a_3\dots$, а нормалі b_1b_1', b_2b_2', $b_3b_3'\dots$ зіллються з нормалями a_1a_1', a_2a_2', $a_3a_3'\dots$, і положення точки A у відповідні моменти визначаться побудовою кутів α_1, α_2, $\alpha_3\dots$ біля нормалей a_1a_1', a_2a_2', $a_3a_3'\dots$ та відкладанням відрізків $a_1A_1 = b_1A$; $a_2A_2 = b_2A$; $a_3A_3 = b_3A\dots$

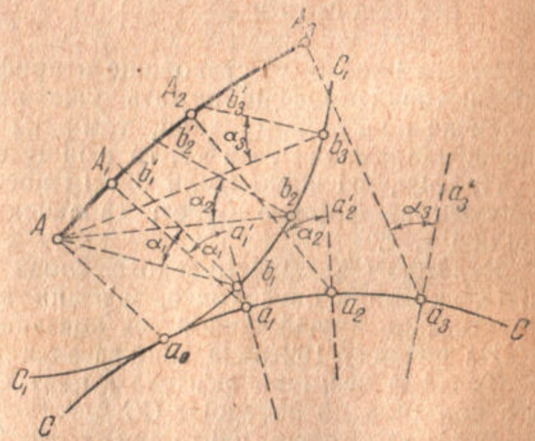


Рис. 163

Коли сполучити точки A, A_1, A_2, $A_3\dots$ з допомогою лекала, одержимо шукану рулету.

В сучасному машинобудуванні застосовується майже виключно вирисовування профілів за евольвентою, винайдене Ейлером.

Пояснюється це тими перевагами, які мають згадані профілі. Про це буде сказано пізніше.

Розглянемо побудову евольвенти і виведемо її властивості, ПОМИЛКА*

Стр	Рядок	Надруковано	Повинно бути
127	14 зн.	буде евольвентна	буде евольвента

* З вини автора

№ 1157/1336

які в дальшому використаємо для доведення, що евольвентні профілі відповідають поставленим вище умовам.

Перший спосіб побудови евольвенти. Візьмемо коло радіуса R і відрізок AB, що дотикається до кола в точці A і має довжину πR (рис. 164).

Поділимо півколо AC і відрізок AB на однакове число рівних частин (на вісім частин), в результаті чого на колі одержимо точки: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, а на відрізку AB — точки: $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ, 7^\circ$. З центрів $1, 2, 3 \ldots$ радіусами, відповідно рівними $A-1^\circ$; $A-2^\circ$; $A-3^\circ, \ldots$, проведемо дуги $I, II, III \ldots$, починаючи з точки дотикання з попередньою. Обвідна цих дуг

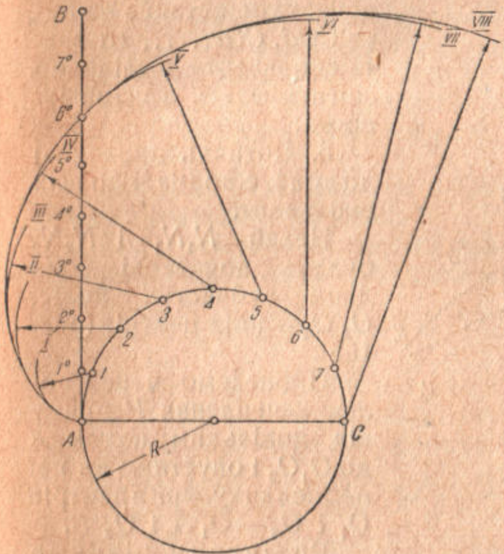


Рис. 164

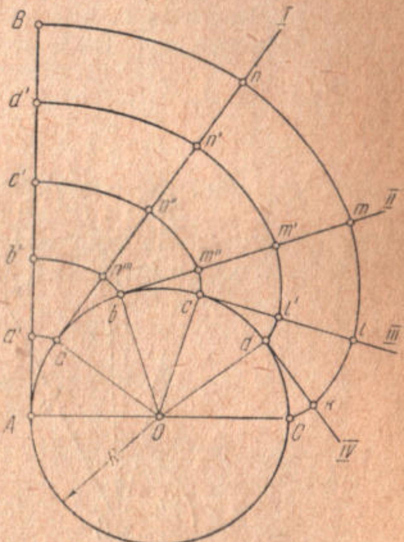


Рис. 165

і буде евольвентна. (Коли точки $1, 2, 3 \ldots$ лежать густо, то обвідної проводити не треба буде, бо дуги вирисують нам евольвенту з достатньою точністю).

Другий спосіб побудови евольвенти. Маємо також коло радіуса R і дотичну до нього $AB = \pi R$ (рис. 165). Ділимо півколо AC і відрізок AB на рівне число частин (на п'ять), в результаті чого на колі одержимо точки — a, b, c, d, а на відрізкові — a', b', c', d'. Проведемо дотичні I, II, III, IV до кола в точках поділу і відкладемо на дотичній I від точки a відрізок, рівний $a'B$, на дотичній II від точки b — відрізок, рівний $b'B$ і т. д.

Сполучивши кінцеві точки C і B з одержаними плавною лінією, матимемо евольвенту $CklmnB$.

Коли б на дотичних відкладати відповідно $a'd'$, $b'd'$, $c'd'$, то ми одержали б евольвенту $dl'm'n'd'$ і т. д.

Висновки:

1. Евольвенти $CklmnB$, $dl'm'n'd'$, $cm''n''c'$ і т. д. є лінії, які вирисовують на площині кола точки B, d', c', ... під час кочення відрізка AB по колу без ковзання.

2. Дотичні $a — I$, $b — II$, $c — III$ і т. д. є окремі положення відрізка AB під час його кочення.

3. Одержані на рисунку 165 евольвенти звуться еквідистантними, і віддалення між ними дорівнює відповідній дузі кола ($nn' = Cd$; $n''n' = cd$ і т. д.).

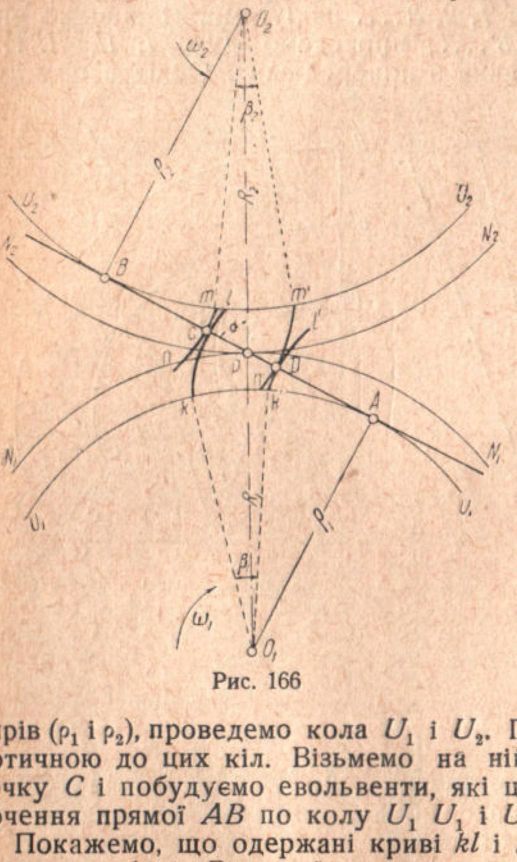


Рис. 166

4. Коли вважати одну з них, наприклад $CklmnB$, зв'язаною з колом, і повертати останнє на кути COd, COc, ..., то взята евольвента послідовно збігатиметься з усіма іншими.

5. Дотичні, проведені до кола, є нормалі до всіх евольвент.

Нехай N_1N_1 і N_2N_2 будуть початкові кола двох зубчастих коліс, $O_1 O_2$—лінія центрів (рис. 166).

Проведемо через полюс зачеплення P пряму під довільним кутом α до O_1O_2 і опустимо на неї перпендикуляри з центрів O_1 і O_2 — $O_1 A$ і $O_2 B$.

Радіусами, рівними довжині цих перпендикулярів (ρ_1 і ρ_2), проведемо кола U_1 і U_2. Пряма AB буде спільною дотичною до цих кіл. Візьмемо на ній (прямій AB) довільну точку C і побудуємо евольвенти, які ця точка утворює під час кочення прямої AB по колу $U_1 U_1$ і $U_2 U_2$ (kl і mn).

Покажемо, що одержані криві kl і mn можна взяти як супряжні профілі В даний момент вони дотикаються в точці C, і спільна нормаль (пряма AB) проходить через P.

Припустимо, що колесо O_1 повернулося на кут β_1, і в той же час колесо O_2 повернулося на кут β_2. Тоді точка k переміститься в точку k', і евольвента kl займе положення $k'l'$, а точка m переміститься в точку m', і евольвента mn займе положення $m'n'$. Евольвенти $k'l'$ і $m'n'$ перетнуть пряму AB в одній і тій же точці D, бо

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \tag{113}$$

звідки

$$\rho_1 \beta_1 = \rho_2 \beta_2, \tag{114}$$

або

$$\smile kk' = \smile m m', \tag{115}$$

а на підставі зробленого вище висновку 3 рівняння (115) продовжуємо:

$$\smile kk' = \smile mm' = \overline{CD} \tag{116}$$

Значить точки перетину евольвент $k'l'$ і $m'n'$ з прямою AB збігаються в точці D, яка буде, очевидно, точкою дотикання[1] побудованих евольвент (kl і mn) в новому їх положенні.

Але ми взяли довільний поворот коліс. Звідси: при обертанні коліс профілі зубців, обрисовані за евольвентами kl і mn:

a) завжди дотикаються (до повного виходу з зачеплення);

b) точки дотикання лежать на прямій лінії;

c) спільна нормаль до профілів (пряма AB) завжди проходить через полюс зачеплення.

Висновки:

1. Профілі, обрисовані за евольвентами, відповідають всім поставленим вище умовам.

2. Лінія зачеплення при евольвентних профілях є пряма, яка проходить через полюс P і нахилена під кутом α до лінії центрів.

Практичну побудову евольвентних профілів покажемо на прикладах.

Приклад перший. Дано: z_1, z_2 і m. Побудувати евольвентні профілі зубців для зовнішнього зачеплення.

Визначаємо радіус початкових кіл за формулами:

$$R_1 = \frac{z_1 m}{2}$$

$$R_2 = \frac{z_2 m}{2}.$$

Беремо центри початкових кіл O_1 і O_2 на віддалі $O_1 O_2 = R_1 + R_2$ і проводимо початкові кола $N_1 N_1$ і $N_2 N_2$ (рис. 167), що дотикаються в точці P.

Через точку P проводимо пряму AB під кутом α до $O_1 O_2$. (Про вибір кута α буде сказано нижче). З центрів O_1 і O_2 опускаємо перпендикуляри на пряму AB: $O_1 A$ і $O_2 B$.

Радіусами $\rho_1 = O_1 A$ і $\rho_2 = O_2 B$ проводимо допоміжні (основні, твірні) кола U_1 і U_2, що дотикатимуться до прямої AB в точках A і B.

За точку, яка вирисовуватиме профілі, візьмемо точку P (полюс). Евольвенти будуємо першим способом.

Відрізок AP ділимо на чотири рівні частини ($A - 1^\circ = 1^\circ - 2^\circ = 2^\circ - 3^\circ = 3^\circ - P$). Відкладаємо $\smile A - 1 = \smile 1 - 2 = \smile 2 - 3 = \smile 3 - p_1 =$

[1] Що точка D є точка дотикання, а не точка перетину евольвент випливає з того, що в цій точці евольвенти мають спільну нормаль.

$= A = 1^\circ$ і по другий бік точки $A: \smile A-5 = \smile 5-6 = \smile 6-7 = = \smile A-5^\circ = 5^\circ - 6^\circ = 6^\circ - 7^\circ \ldots$

З точок $3, 2, 1, A, 5, 6, 7 \ldots$, як із центрів радіусами, відповідно рівними $3^\circ P$, $2^\circ P$, $1^\circ P$, AP, $5^\circ P$, $6^\circ P$, $7^\circ P$, проводимо дуги: першу, починаючи з точки p_1, а всі інші—з точки дотику з попередньою.

Так вирисовується евольвента $p_1 P l_1$, що буде за профіль зубця колеса O_1.

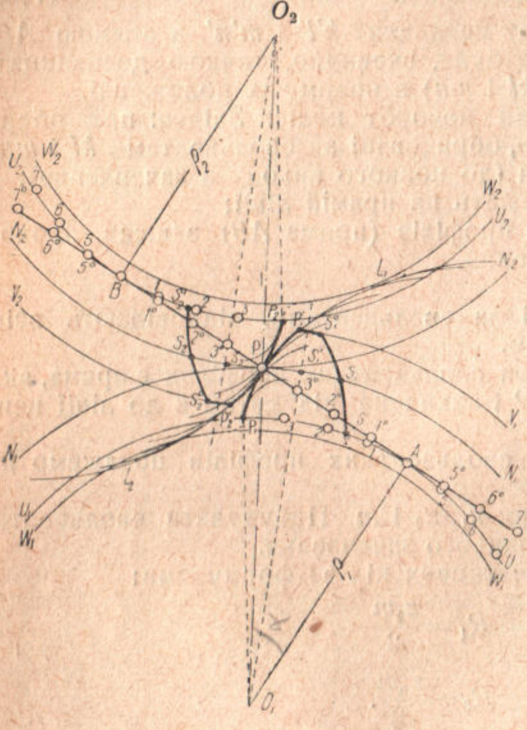


Рис. 167

Аналогічним способом побудована евольвента $p_2 P l_2$.

Для закінчення побудови профіля зубця колеса O_1 проводимо коло виступів V_1 радіусом $R_{вст} = R + h_1$ і коло западин W_1 радіусом $R_{зап} = R_1 - h_2$.

Коло виступів перетинається з евольвентою $p_1 P l_1$ в точці p'_1.

Коло западин може проходити через p_1, може перетинати евольвенту $p_1 P l_1$ між точками p_1 і P і може проходити всередині кола U_1.

Всі ці три варіанти можливі — залежно від співвідношення між числом зубців на колесі і кутом α.

Дійсно. Перший варіант:

$$R_{зап} = \rho_1,$$

або

$$R_1 - h_2 = R_1 \sin \alpha.$$

Підставляємо значення R_1 і h_2:

$$\frac{z_1 m}{2} - 1{,}167\, m = \frac{z_1 m}{2} \sin \alpha.$$

Звідки

$$z_1 = \frac{2{,}334}{1 - \sin \alpha}. \qquad (117)$$

Очевидно, другий варіант $R_{зап} > \rho_1$ буде при

$$z_1 > \frac{2{,}334}{1 - \sin \alpha}, \qquad (118)$$

і третій варіант $R_{\text{зап}} < \rho_1$ буде при

$$z_1 < \frac{2{,}334}{1 - \sin\alpha} \qquad (119)$$

При першому і другому варіантах одна боковина профіля зубця вже буде обрисована. При третьому варіанті треба закінчити частину, яка знаходиться між колами W_1 і U_1 (на рисунку 167 позначена пунктиром).

Ця частина профіля при старих способах виготовлення зубців (з допомогою фрези, на фрезерних верстатах) виконувалася у вигляді радіальної прямої $p_1 O_1$. Як побачимо далі, вона не працює, а тому її можна виготовляти довільно, аби головка зубця другого колеса (точка p'_2) мала можливість вивернутися, не врізаючись у тіло зубця, профіль якого ми будуємо.

Нижче ми покажемо, як треба будувати цю частину зубця, щоб вона відповідала зазначеній умові, а також сучасному технологічному процесові виготовлення зубців.

Другу боковину профіля будуємо так: на початковому колі відкладаємо $\smile PS_1$, рівну товщині зубця. Ділимо її пополам точкою S_1' і через останню проводимо лінію O_1S_1' — це буде лінія симетрії зубця.

Частина профіля зубця — $S_1^{\circ}S_1S''$ — будується за законом симетрії.

Аналогічним способом побудовано профіль зубця другого колеса.

Приклад другий. Дано: z_1, z_2 і m. Побудувати евольвентні профілі зубців для внутрішнього зачеплення.

Покажемо побудову лише для колеса, що має внутрішні зубці. Профілі зубців на шестерні будують так, як це розібрано в попередньому прикладі.

Припустимо, що z_1 — число зубців на шестерні, а z_2 — число зубців на колесі.

Радіус початкового кола колеса буде $R_2 = \frac{mz_2}{2}$.

Радіус головок (виступів) $R_{2\text{г}} = \frac{mz_2}{2} - h_1$.

Радіус ніжок (западин) $R_{2\text{н}} = \frac{mz_2}{2} + h_2$.

З центра O_2 — центра колеса — опишемо три кола (рис. 168).

Початкове коло — радіусом R_2.

Коло головок — радіусом $R_{2\text{г}}$.

Коло ніжок — радіусом $R_{2\text{н}}$.

Проведемо радіальну лінію O_1O_2, яку вважатимемо за лінію центрів зубчастих коліс. Точка перетину її з початковим колом буде полюсом зачеплення — P.

Лінія AB, яка з O_1O_2 складає кут α, буде лінія зачеплення.

Проводимо допоміжне (твірне) коло радіусом, рівним перпендикулярові O_2A_1 до AB.

Будуємо за попереднім прикладом евольвенту, яку описує точка P під час кочення прямої AB по твірному колу U_2U_2 (на рисунку проведена лише частина евольвенти ee_1, між колами головок і ніжок). Ця евольвента і буде однією стороною профіля зубця.

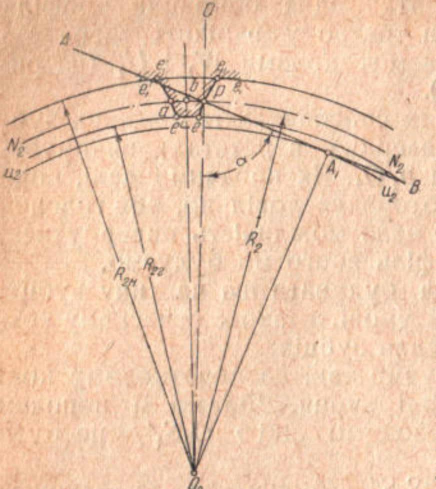


Рис. 168

Для закінчення побудови відкладаємо по початковому колу товщину зубця Pa; поділимо її точкою b пополам, проведемо лінію симетрії зубця O_2b і другий бік профіля між тими самими колами — головок і ніжок — побудуємо за законом симетрії.

Ці дві боковини разом з дугою ee' кола головок і дугами e_1e_1 та $e_1'e_1'$ кола ніжок, дадуть нам повний профіль внутрішнього зубця колеса.

Приклад третій. Побудувати профілі зубців на рейці, яка зчеплюється з шестернею, що має евольвентні профілі зубців.

З попередніх прикладів видно, що профілі зубців даного колеса будують незалежно від другого колеса, яке зчеплюється з даним. Тому будуватимемо профілі зубців на рейці незалежно від шестерні (на шестерні профілі будують за першим прикладом).

Рейку можна уявити як зубчасте колесо з нескінченно великим діаметром, тому початкове коло для неї перетворюється в пряму NN (рис. 169).

На цій прямій довільну точку P візьмемо за полюс зачеплення. Тоді лінія PO, перпендикулярна до NN, буде лінією центрів.

Проведемо AB — лінію зачеплення — під кутом α до лінії PO. Під час зачеплення рейка рухається прямолінійно в напрямі NN, тобто перпендикулярно до PO. Для того щоб боковий (робочий) профіль зубця рейки під час цього руху лишався перпендикулярним до лінії зачеплення, треба обрисувати його по *прямій* ab, перпендикулярній до AB.

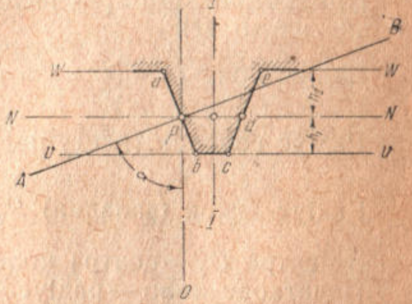


Рис. 169

До висновку, що бокова частина профіля зубця рейки має бути прямолінійна, можна було б дійти і загальним міркуванням: центр рейки, як колеса з нескінченно великим діаметром, знаходиться в нескінченності; основа перпендикуляра, опущеного з цього центра на AB, теж знаходиться в нескінченості.

Значить і миттьовий центр обертання прямої AB, яка при утворенні евольвенти котиться без ковзання по допоміжному колу, знаходиться теж у нескінченості, тому евольвента перетворюється в пряму ab. На рисунку a і b — точки перетину перпендикуляра до AB з прямими ніжок (западин) — WW — і головок (виступів) — VV, які проведені на відповідних відстанях від прямої NN.

Відклавши на прямій NN товщину зубця Pd і провівши лінію ec симетрично з прямою ab до середньої (I-I) лінії зубця (I-I перпендикулярна до NN і $Pn=nd$), закінчимо побудову профіля зубця на рейці.

Таким чином, бачимо, що профіль зубця на рейці, при зачепленні її з евольвентним профілем шестерні, обрисовується дуже просто: він являє *рівнобоку трапецію* з кутами при основі, рівними кутові, який складає лінія зачеплення з лінією центрів, тобто рівним $\alpha = 90^\circ - \varphi$, де φ — кут зачеплення (кут тиску). Ця простота профіля зубця рейки використана у виробництві зубчастих коліс на верстатах Маага (див. нижче — § 51).

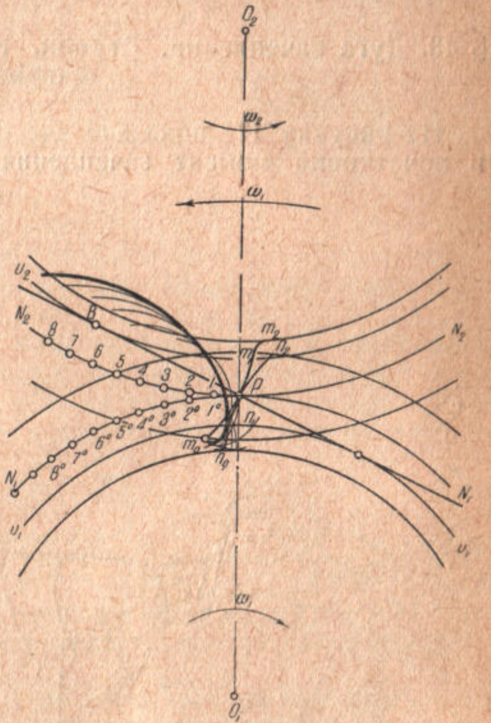


Рис. 170

§ 42. Побудова відносної траєкторії головки

Для раціональної побудови частини профіля, яка знаходиться між колом западин і допоміжним колом, треба вміти побудувати відносну траєкторію крайньої точки головки зубця.

Припустимо, що $n_0n_1Pn_2$ і $m_0Pm_1m_2$ — супряжні профілі зубців двох коліс, що мають початкові кола N_1 і N_2 (рис. 170).

Колеса обертаються з кутовими швидкостями ω_1 і ω_2.

Для визначення траєкторії крайньої точки головки зубця другого колеса (точки m_0) в її рухові відносно першого колеса використаємо висновок, зроблений нами в § 38, що початкові кола є центроіди у відносному рухові коліс. Тоді потрібна траєкторія знайдеться звичайним способом побудови рулет.

Для цього на колах N_1 і N_2 відкладаємо рівні дуги:

$$\smile P1 = \smile 1\text{—}2 = \smile 2\text{—}3 = \smile 3\text{—}4 = \ldots$$
$$\smile P1^\circ = \smile 1^\circ 2^\circ = \smile 2^\circ 3^\circ = \smile 3^\circ 4^\circ = \ldots$$

і з точок P, 1°, 2°, 3°, 4° ....., як з центрів, радіусами відповідно рівними $\overline{Pm_0}$, $\overline{1m_0}$, $\overline{2m_0}$, $\overline{3m_0}$, $\overline{4m_0}$, ..., проведемо дуги.

Обвідна цих дуг і буде шукана траєкторія (епітрахоїда точки m_0). Частина профіля першого зубця n_1n_0 не повинна дотикатися до цієї траєкторії (зазор $\backsim 0{,}5$ *мм*).

Перехід від профіля ніжки до кола западин здійснюється округленням радіусом

$$r = h_2 - h_1 = 0{,}2\ m \cong 0{,}1\ t. \qquad (120)$$

§ 43. Дуга зачеплення. Ступінь перекриття. Робоча частина профіля

На рисунку 171 показано два супряжні евольвентні профілі в початковий момент зачеплення (входження у зачеплення): m_1n_1 і k_1l_1, точка дотику — A_1, і в кінцевий момент зачеплення (виходження із зачеплення): m_2n_2 і k_2l_2, точка дотику — B_1.

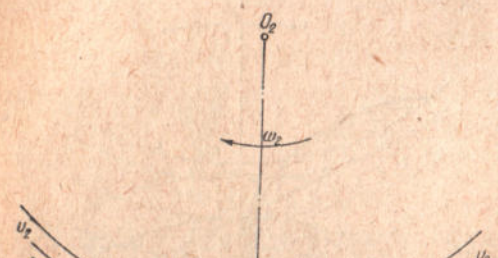


Рис. 171

Ділянка A_1B_1 прямої AB зветься робочою частиною лінії зачеплення. В дальшому ми цю ділянку будемо просто називати лінією зачеплення. Під довжиною лінії зачеплення ми розумітимемо довжину робочої частини лінії зачеплення, тобто довжину відрізка A_1B_1.

Точки перетину профілів з їх початковими колами в цих крайніх положеннях позначимо через a, b, c і d.

Очевидно, дуга ab дорівнює дузі cd, бо початкові кола котяться одно по одному без ковзання. Ці дуги звуться *дугами зачеплення.*

Визначення дуги зачеплення можна дати таке: *дугою зачеплення зветься дуга, на яку перекочується початкове коло під час зачеплення будьякої пари зубців*, або: *дугою зачеплення зветься дуга початкового кола, що відповідає кутові повороту колеса під час зачеплення будьякої пари зубців.*

Встановимо залежність між довжиною дуги зачеплення і довжиною лінії зачеплення (довжиною відрізка A_1B_1).

На підставі рівняння (116) можна написати, що

$$\overline{A_1B_1} = \smile st, \tag{121}$$

де $\smile st$ — відповідна дуга твірного кола U_1.

Дуги st і ab відповідають одному і тому ж центральному кутові, бо кути повороту для всіх точок твердого тіла рівні.

Тому

$$\smile st : \smile ab = \rho_1 : R_1 = R_1 \sin\alpha : R_1 = \sin\alpha.$$

Звідки

$$\smile ab = \frac{\smile st}{\sin\alpha}, \tag{122}$$

і на підставі рівняння (121):

$$\smile ab = \frac{A_1B_1}{\sin\alpha}. \tag{123}$$

Це і є шукана залежність.

Довжина дуги зачеплення великою мірою характеризує роботу зубчастих коліс.

Дійсно, коли б дуга ab була менша, ніж крок зачеплення, то передня пара зубців вийшла б із зачеплення в той час, коли задня пара ще не увійшла в зачеплення. Робота коліс була б з поштовхами і навіть зовсім неможлива. Звідси: дуга ab повинна бути більше t.

На практиці звичайно беруть $\smile ab > 1{,}1\ t$, або

$$\frac{\smile ab}{t} > 1{,}1. \tag{124}$$

Відношення довжини дуги зачеплення до кроку зветься *ступенем перекриття* (ступенем плавності, тривалістю зачеплення) й визначається через τ.

На підставі формули (123) формулу (124) можна переписати так:

$$\frac{A_1B_1}{t\sin\alpha} > 1{,}1 \tag{125}$$

З рисунку 171 видно, що не весь профіль працює.

На зубці першого колеса працює лише частина — A_1an_1, а на зубці другого колеса — частина B_1dk_2.

Це є робочі частини профіля. Взагалі для визначення робочої частини ніжки (головка працює вся) потрібно з центра (рис. 172) колеса (точка O_1) радіусом, рівним відстані цього центра до кінця лінії зачеплення, що лежить всередині початкового кола цього колеса (відрізком O_1A_1), засікти ніжку зубця даного колеса. Частина ніжки — від засічки до початкового кола — і буде робочою частиною ніжки.