Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Навчально-науковий інститут будівництва та архітектури
Кафедра основ архітектурного проєктування, конструювання та
графіки

03-07-99М

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з навчальної дисципліни «Інженерно-будівельне креслення»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійною програмою «Будівництво та цивільна
інженерія» за спеціальністю 192 «Будівництво та цивільна
інженерія» денної і заочної форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною радою
з якості ННІБА
Протокол № 4 від 21.02.2023 р.

Рівне – 2023

Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Інженерно-будівельне креслення» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Будівництво та цивільна інженерія» за спеціальністю 192 «Будівництво та цивільна інженерія» денної і заочної форм навчання. [Електронне видання] / Крівцов В. В., Літніцький С. І. – Рівне : НУВГП, 2023. – 175 с.

Укладачі: Крівцов В. В.– к.т.н., доцент кафедри основ архітектурного проєктування, конструювання та графіки;
Літніцький С. І.– к.т.н., доцент кафедри основ архітектурного проєктування, конструювання та графіки.

Відповідальний за випуск: Ромашко В. М., д.т.н., професор, завідувач кафедри основ архітектурного проєктування, конструювання та графіки.

Керівник групи забезпечення
спеціальності 192 «Будівництво
та цивільна інженерія» Бабич Є. М.

ЗМІСТ

ВСТУП

Відповідно до силабусу навчальної дисципліни «Інженерно-будівельне креслення» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 192 «Будівництво та цивільна інженерія» передбачено 22 години лекційних занять.

Мета конспекту лекцій – дати можливість студентам без значних затрат часу закріпити матеріал лекції, виділити в кожній темі вузлові питання, без опанування яких неможливе успішне вивчення навчальної дисципліни.

В перших семи лекціях розглядаються основні положення курсу нарисної геометрії, які є теоретичною основою утворення технічних та будівельних креслень (креслеників).

Проєкти будівництва водогосподарських, гідротехнічних та інженерно-будівельних споруд, архітектурна частина проєктів грунтується на інформації про земну поверхню. Проєктування таких об’єктів, а також читання та виконання відповідних креслень, потребує знань спеціального методу зображень – методу проєкцій з числовими позначками. Основні положення цього методу розглянуто в лекціях №№ 8-11.

Викладений матеріал дозволяє студентам самостійно оволодівати основними теоретичними положеннями та здобути практичні уміння виконувати різні задачі з курсу нарисної геометрії та в проєкціях з числовими позначками.

Конспект лекцій може бути рекомендований до використання студентами як денної, так і заочної форм навчання.

ЛЕКЦІЯ 1. МЕТОД ПРОЄКЦІЙ. ПРОЄКЦІЮВАННЯ ТОЧКИ

1.1. Завдання нарисної геометрії
1.2. Метод проєкцій. Ортогональні проєкції
1.3. Проєкціювання точки на дві площини проєкцій
1.4. Проєкціювання точки на три площини проєкцій
1.5. Класифікація точок

1.1. ЗАВДАННЯ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

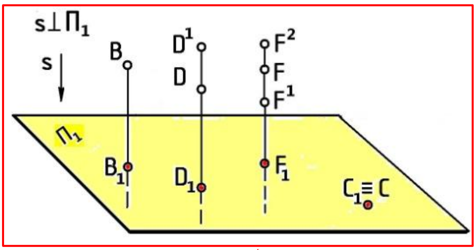
Теоретичні основи утворення зображень на креслениках вивчає нарисна геометрія, яка є одним із розділів математики.

Пряма задача нарисної геометрії – вивчення способів зображення тривимірних просторових об'єктів на площині (аркуші паперу або екрані комп'ютера), що дозволяє із урахуванням вимог стандартів виконувати технічні та будівельні кресленики.

Обернена задача нарисної геометрії – вивчення способів, що дають змогу уявити форми просторових об'єктів за їх плоскими зображеннями, що дозволяє опанувати правила читання креслеників.

В основу нарисної геометрії покладено метод проєкцій.

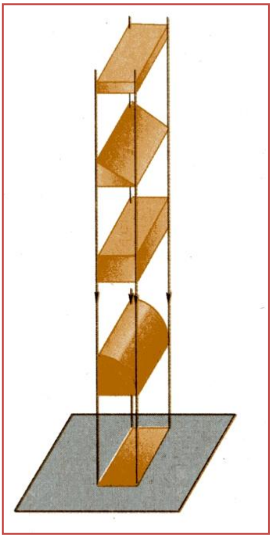
1.2. МЕТОД ПРОЄКЦІЙ. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЄКЦІЇ



B_1, D_1, F_1, D_1,C_1 – ортогональні проєкції точок B, D, D^1, F, F^1, F^2, C (точка C належить Π_1); BB_1, DD_1, FF_1 – проєкціюючі прямі, перпендикулярні площині проєкцій

Висновки:

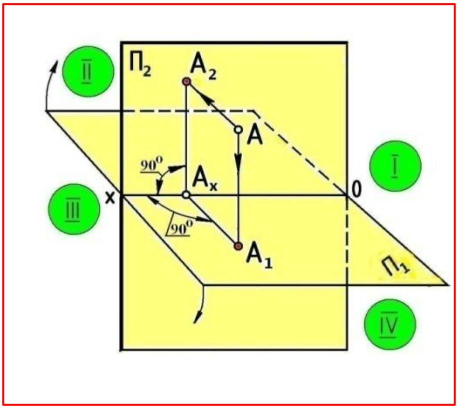
1. Кожна точка простору має тільки одну ортогональну проєкцію.
2. Одна ортогональна проєкція не визначає положення самої точки в просторі, тобто креслення з однією проєкцією (зображенням) об’єкта є невизначеним, необоротним.



Невизначеність форми предмета за однією проєкцією (зображенням)

Французький вчений Гаспар Монж запропонував для усунення неоднозначності креслення проєкціювання здійснювати на дві взаємно перпендикулярні площини проєкцій.

1.3. ПРОЄКЦІЮВАННЯ ТОЧКИ НА ДВІ ПЛОЩИНИ ПРОЄКЦІЙ

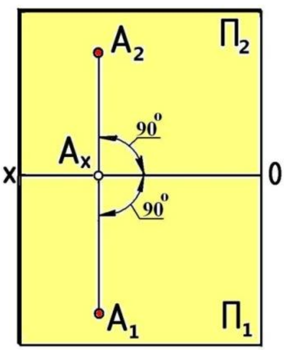


Наочне зображення точки А та її проєкцій A_1, A_2 в системі двох площин проєкцій Π_1 і Π_2

Π_1, Π_2 – відповідно горизонтальна та фронтальна площина проєкцій (позначають ці площини також π_1, π_2)

A_1, A_2 – відповідно горизонтальна та фронтальна проєкція точки А (ортогональні проєкції точки А на площини проєкцій Π_1та Π_2)

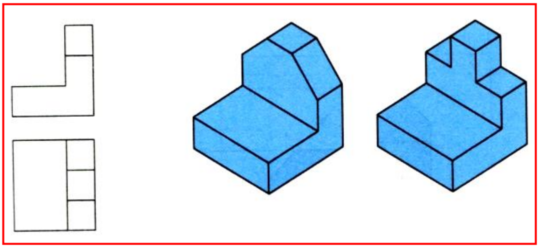
I, II, III, IV – квадранти або чверті простору, на які ділять простір площини Π_1 і Π_2



Епюр точки А в системі двох площин проєкцій Π_1 і Π_2

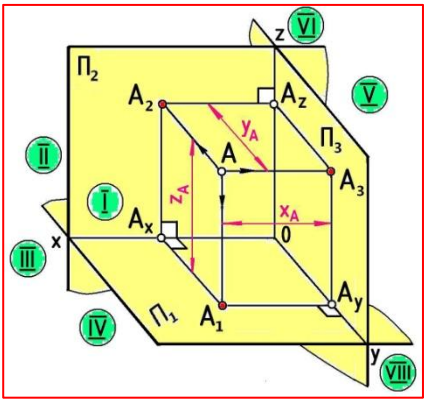
Висновок:
Дві проєкції точки однозначно визначають її положення в просторі відносно площин проєкцій $П_1$ і $П_2$.

Проте форму деяких предметів не завжди можна визначити за двома його проєкціями (зображеннями)

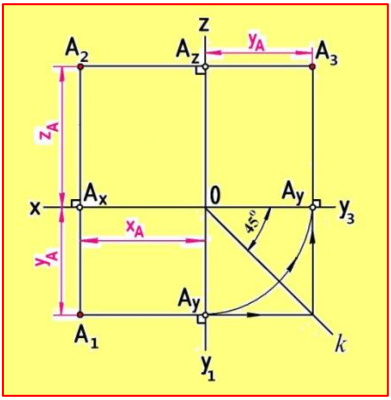


Невизначеність форми предмета за двома проєкціями (зображеннями)

1.4. ПРОЄКЦІЮВАННЯ ТОЧКИ НА ТРИ ПЛОЩИНИ ПРОЄКЦІЙ



Наочне зображення точки А та її проєкцій A_1, A_2, A_3 в системі двох площин проєкцій $П_1$, $П_2$, $П_3$



Епюр точки А в системі трьох площин проєкцій $П_1$, $П_2$, $П_3$

A_3 – профільна проєкція точки А (ортогональна проєкція точки А на площину проєкцій $П_3$)

$П_3$ – профільна площина проєкцій (позначають цю площину також π_3)

0x або x – вісь проєкцій ($x = П_1 \cap П_2$); 0y або y – вісь проєкцій, яка при утворенні епюра розпадається на два променя $0y_1$ (y_1) та $0y_3$ (y_3), причому $y_1 \in П_1$, $y_3 \in П_3$ ($y = П_1 \cap П_3$); 0z або z – вісь проєкцій ($z = П_2 \cap П_3$); *k* – стала пряма креслення

A_1A_2 – вертикальна лінія проєкційного зв'язку, з'єднує горизонтальну та фронтальну проєкції точки ($A_1A_2 \perp x$); A_2A_3 – горизонтальна лінія проєкційного зв'язку, з'єднує фронтальну та профільну проєкції точки ($A_2A_3 \perp z$); A_1A_3 – горизонтально-вертикальна лінія проєкційного зв'язку, з'єднує горизонтальну та профільну проєкції точки ($A_1A_3 \perp y$), розпадається на два відрізки $A_1Ay \perp y_1$ та $A_3Ay \perp y_3$

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII – октанти простору, на які ділять простір площини $П_1$, $П_2$, $П_3$.

Якщо прийняти площини проєкцій за координатні площини, а осі проєкцій за осі координат, можна вимірювати відстані точки до площин проєкцій, вибравши одиницю масштабу:

координата x визначає відстань від точки до площини $П_3$:

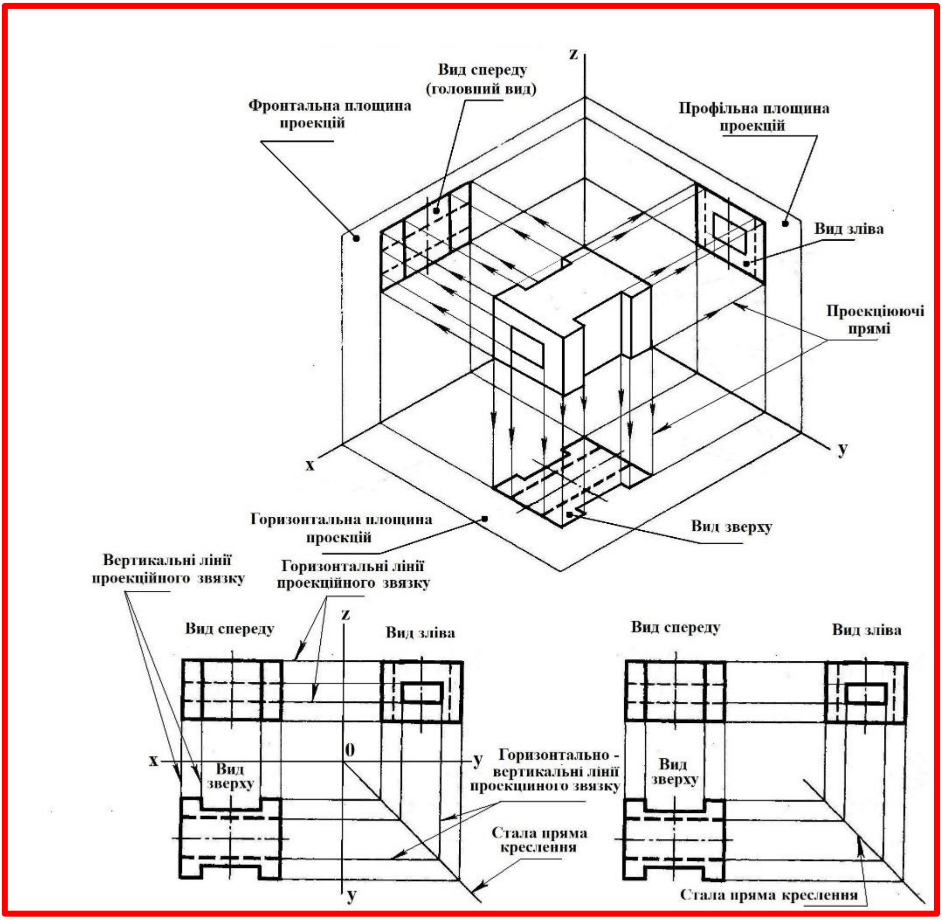
$$x_A = |A, П_3|;$$

координата y визначає відстань від точки до площини $П_2$:

$$y_A = |A, П_2|;$$

координата z визначає відстань від точки до площини $П_1$:

$$x_A = |A, П_1|.$$

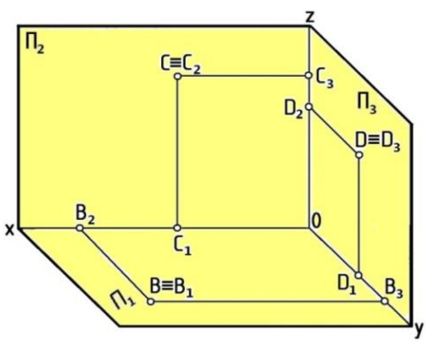


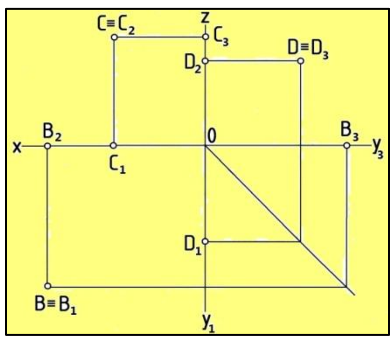
На рисисунку наведена інформація з отримання на технічному кресленику трьох видів предмета в системі трьох площин проєкцій. Вид спереду – це аналог фронтальної проєкції предмета, вид зліва – аналог профільної проєкції, а вид зверху – аналог горизонтальної проєкції предмета. Кресленик трьох видів предмета зображено як з осями проєкцій, так і без них. Слід зазначити, що побудова виду зліва тільки із застосуванням сталої прямої креслення дозволяє розмістити вид зліва в зручному місці креслення по горизонтальному напрямку його можливого переміщення. В той же час проведення на кресленику осей проєкцій обумовлює розміщення виду зліва тільки в одному місці поля кресленика.

1.5. КЛАСИФІКАЦІЯ ТОЧОК

Точки поділяють на такі, що не належать площинам проєкцій, і точки, що належать площинам проєкцій.
У точки, що не належить площинам проєкцій (точка А), всі три координати не дорівнюють нулю і на епюрі жодна з проєкцій не лежить на осі проєкцій.

1.5.1. Наочне зображення та епюр точок, що належать одній площині проєкцій





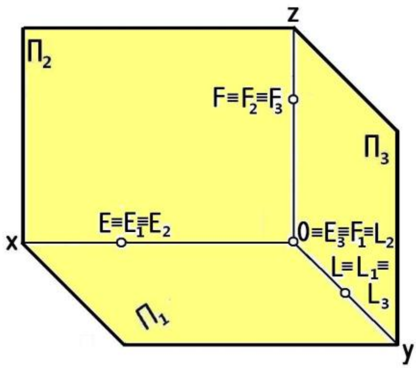
У точок, що належать одній площині проєкцій, одна з координат дорівнює нулю, дві проєкції точки знаходяться на осях проєкцій, а третя збігається з самою точкою:

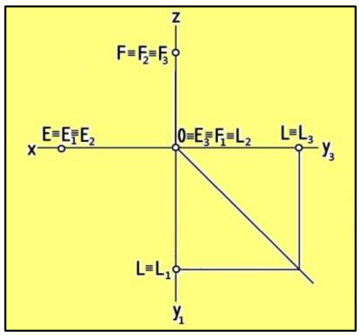
$B \in \Pi_1$, $z_B = 0$, x_B, $y_B \neq 0$;

$C \in \Pi_2$, $y_C = 0$, x_C, $z_C \neq 0$;

$D \in \Pi_3$, $x_D = 0$, y_D, $z_D \neq 0$.

1.5.2. Наочне зображення та епюр точок, що належать двом площинам проєкцій, тобто лежать на осях проєкцій





У точок, що належать осям проєкцій, дві координати дорівнюють нулю, дві проєкції точки збігаються між собою і з самою точкою та лежать на осях проєкцій, а третя проєкція знаходиться в точці початку координат:

$E \in x$, y_E, $z_E = 0$, $x_E \neq 0$;

$L \in y$, x_L, $z_L = 0$, $y_L \neq 0$:

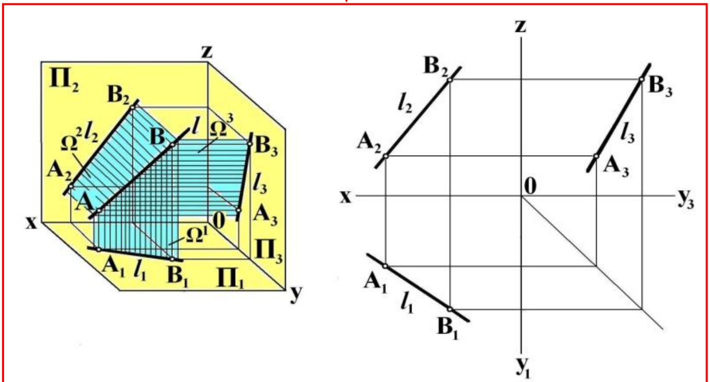
$F \in z$, x_F, $y_F = 0$, $z_F \neq 0$.

ЛЕКЦІЯ 2. ПРОЄКЦІЮВАННЯ ПРЯМОЇ

2.1. ПРОЄКЦІЇ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

Ортогональними проєкціями прямої лінії в загальному випадку є прямі лінії, які можна отримати як лінії перетину площин, що проходять через задану пряму, із площинами проєкцій, до яких ці площини перпендикулярні: $l_1 = \Omega_1 \cap \Pi_1$, $l_2 = \Omega_2 \cap \Pi_2$, $l_3 = \Omega_3 \cap \Pi_3$ ($\Omega_1 \perp \Pi_1$, $\Omega_2 \perp \Pi_2$, $\Omega_3 \perp \Pi_3$).

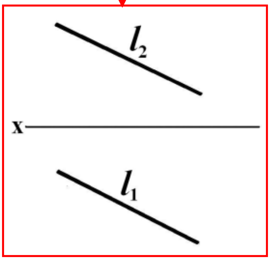
Оскільки пряма лінія в просторі визначається за двома її нетотожними точками, то побудова проєкцій прямої зводиться до побудови проєкцій двох її нетотожних точок: A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 – проєкції точок A і B прямої l на площинах проєкцій Π_1, Π_2, Π_3.

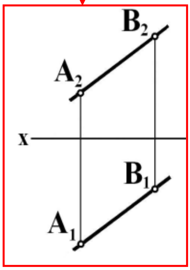


Два способи позначення прямої на епюрі

Малими літерами латинського алфавіту (пряма *l*)

Великими літерами латинського алфавіту за позначенням двох її нетотожних точок (пряма AB)



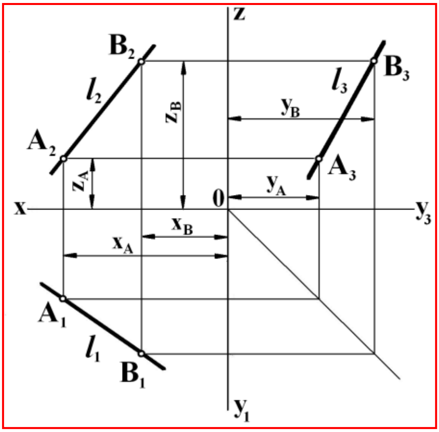


2.2. КЛАСИФІКАЦІЯ ПРЯМИХ

Прямі залежно від їх розміщення відносно площин проєкцій поділяють на прямі загального положення, прямі рівня та проєкціюючі прямі.

2.2.1. Прямі загального положення

Прямі загального положення – це прямі, які не паралельні і не перпендикулярні до жодної з площин проекцій (в 2.1 наведено наочне зображення та епюри прямих загального положення).



Епюр прямої загального положення l з указанням координат x, y, z двох її нетотожних точок A і B.

Проєкційні властивості та координатні характеристики прямої загального положення:

1. Проєкції прямої не паралельні і не перпендикулярні до осей проєкцій – це характерна графічна ознака, що властива лише прямій загального положення і дозволяє відрізнити епюр цієї прямої від епюрів прямих рівня та проєкціюючих.

2. Кожна проєкція відрізка прямої коротша за натуральну (дійсну) величину самого відрізка, оскільки пряма не паралельна до жодної з площин проєкцій.

3. Різниці значень координат x, y, z двох нетотожних точок прямої не дорівнюють нулю.

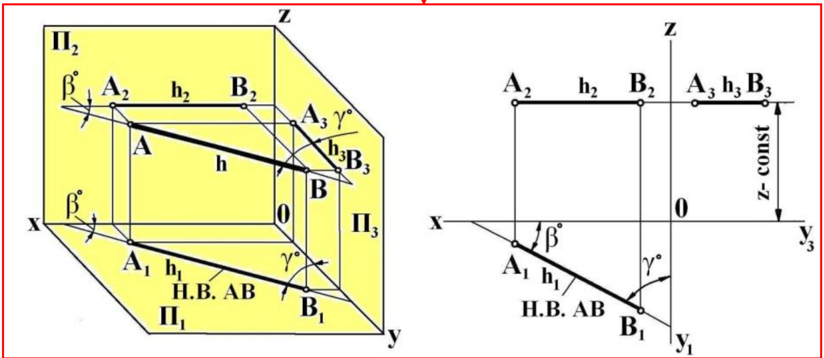
2.2.2. Прямі рівня

Прямі рівня – це прямі, які паралельні до однієї з площин проєкцій: горизонтальна пряма, фронтальна пряма, профільна пряма.

2.2.2.1. Горизонтальна пряма

Горизонтальна пряма або горизонталь – це пряма рівня, яка паралельна до горизонтальної площини проєкцій і позначається буквою h

Наочне зображення та епюр горизонтальної прямої АВ.



Проєкційні властивості та координатні характеристики горизонтальної прямої:

1. Фронтальна та профільні проєкції прямої паралельні до осей проєкцій x і y. Це характерна графічна ознака, що властива лише горизонтальній прямій.

2. Координата z всіх точок прямої є сталою величиною.

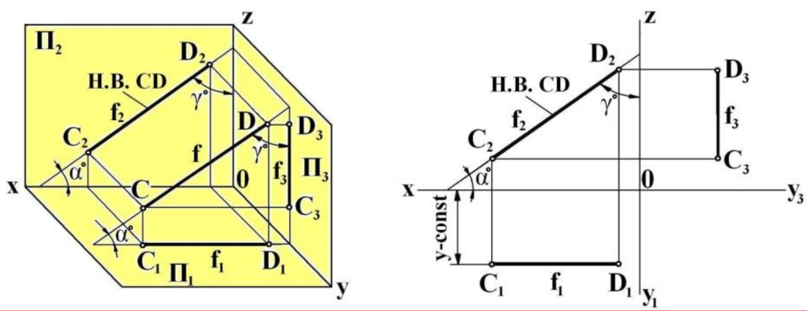
3. Горизонтальна проєкція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка (A_1B_1 = Н.В.АВ).

4. Кути $β^0$ і $γ^0$ – кути нахилу прямої до площин проєкцій відповідно до $П_2$ і $П_3$. Вони визначаються безпосередньо за епюром без додаткових графічних побудов.

2.2.2.2. Фронтальна пряма

Фронтальна пряма або фронталь – це пряма рівня, яка паралельна до фронтальної площини проєкцій і позначається буквою f

Наочне зображення та епюр фронтальної прямої CD



Проєкційні властивості та координатні характеристики фронтальної прямої:

1. Горизонтальна та профільна проєкції прямої паралельні до осей проєкцій x і z. Це характерна графічна ознака, що властива лише фронтальній прямій.

2. Координата y всіх точок прямої є сталою величиною.

3. Фронтальна проєкція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка (C_2D_2 = Н.В.CD).

4. Кути α^0 і γ^0 – кути нахилу прямої до площин проєкцій відповідно $П_1$ і $П_3$. Вони визначаються безпосередньо за епюром без додаткових графічних побудов.

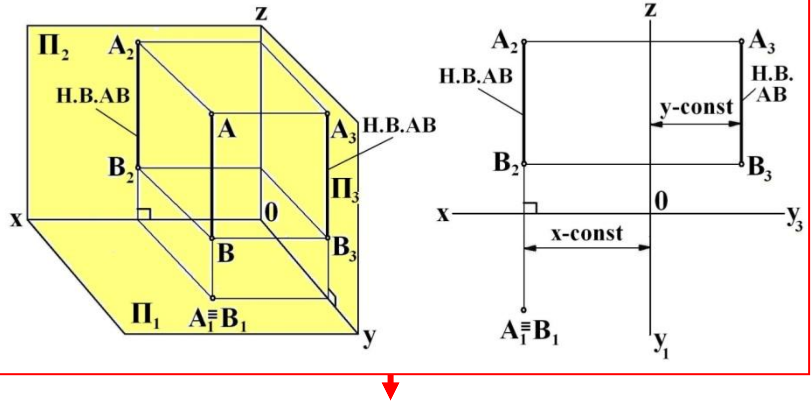
2.2.3. Проєкціюючі прямі

Проєкціюючі прямі – це прямі, які перпендикулярні до однієї з площин проєкцій: горизонтально-проєкціююча пряма, фронтально-проєкціююча пряма, профільно-проєкціююча пряма (ці прямі водночас паралельні до двох інших площин проєкцій).

2.2.3.1. Горизонтально-проєкціююча пряма

Горизонтально-проєкціююча пряма – це проєкціююча пряма, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проєкцій.

Наочне зображення та епюр горизонтально-проєкціюючої прямої AB

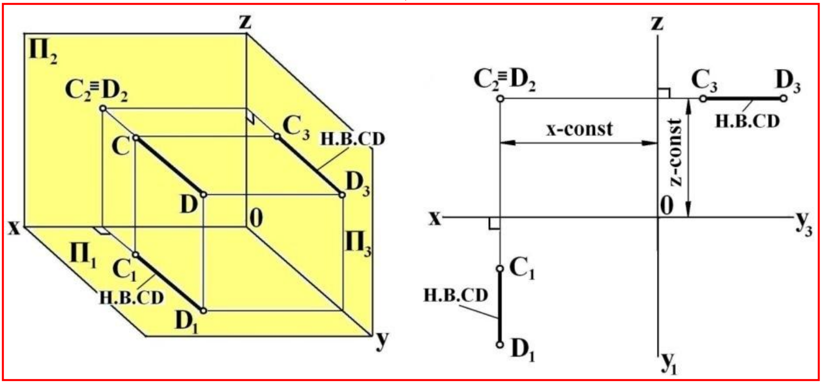


Проєкційні властивості та координатні характеристики горизонтально-проєкціюючої прямої:
1. Горизонтальна проєкція прямої – точка, фронтальна та профільна проєкції перпендикулярні відповідно до осей x і y.
2. Координати x і y всіх точок прямої є сталими величинами.
3. Фронтальна та профільна проєкції відрізка прямої визначають натуральну величину самого відрізка ($A_2B_2 = A_3B_3$ = Н.В.АВ).

2.2.3.2. Фронтально-проєкціююча пряма

Фронтально-проєкціююча пряма – це проєкціююча пряма, яка перпендикулярна до фронтальної площини проєкцій

Наочне зображення та епюр фронтально-проєкціюючої прямої CD



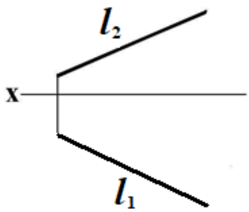
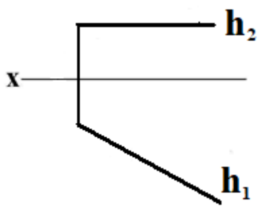
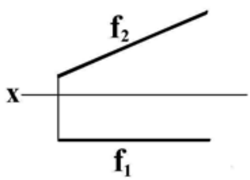
Проєкційні властивості та координатні характеристики фронтально-проєкціюючої прямої:

1. Фронтальна проєкція прямої – точка, горизонтальна та профільна проєкції перпендикулярні відповідно до осей x і z.

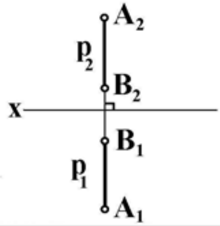
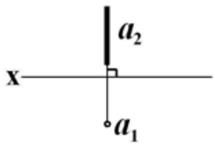
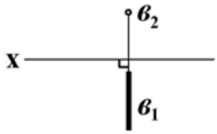
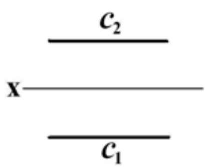
2. Координати x і z всіх точок прямої є сталими величинами.

3. Горизонтальна та профільна проєкції відрізка прямої визначають натуральну величину самого відрізка ($C_1D_1 = C_3D_3$ = Н.В.CD).

Епюри та проєкційні особливості прямих в системі двох площин проєкцій $П_1$ і $П_2$

Назви прямих ліній	Епюри прямих ліній	Графічна ознака прямої лінії на епюрі
Пряма загального положення		Проєкції прямої не паралельні і не перпендикулярні до осі проєкцій x
Горизонтальна пряма (горизонталь)		Фронтальна проєкція паралельна до осі x
Фронтальна пряма (фронталь)		Горизонтальна проєкція паралельна осі x

Продовження таблиці

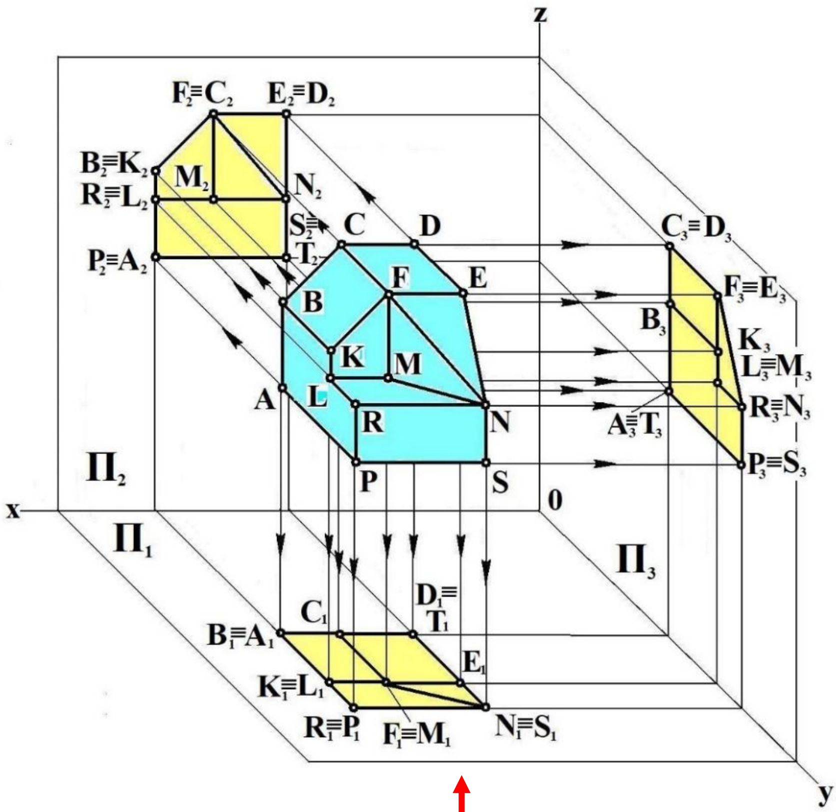
Профільна пряма		Горизонтальна та фронтальна проекції перпендикулярні до осі x Примітка: Для одно – значного визначення прямої потрібно зазначити проекції двох її нетотожних точок
Горизонтально-проекціююча пряма		Горизонтальна проекція - точка, фронтальна проекція перпендикулярна до осі x
Фронтально-проекціююча пряма		Фронтальна проекція - точка, горизонтальна проекція перпендикулярна до осі x
Профільно-проекціююча пряма		Горизонтальна та фронтальна проекції паралельні до осі x

На рисунку наведено три проєкції предмета (багатогранника) із зазначенням його ребер.

Ребро FN займає загальне положення, не паралельне і не перпендикулярне до площин проєкцій $П_1$, $П_2$, $П_3$.

Ребро MN – це відрізок горизонтальної прямої, паралельної до $П_1$: M_1N_1= Н.В. MN.

Ребра BC і KF – це відрізки фронтальних прямих, паралельних до $П_2$: B_2C_2=Н.В.BC, K_2F_2=Н.В. KF.



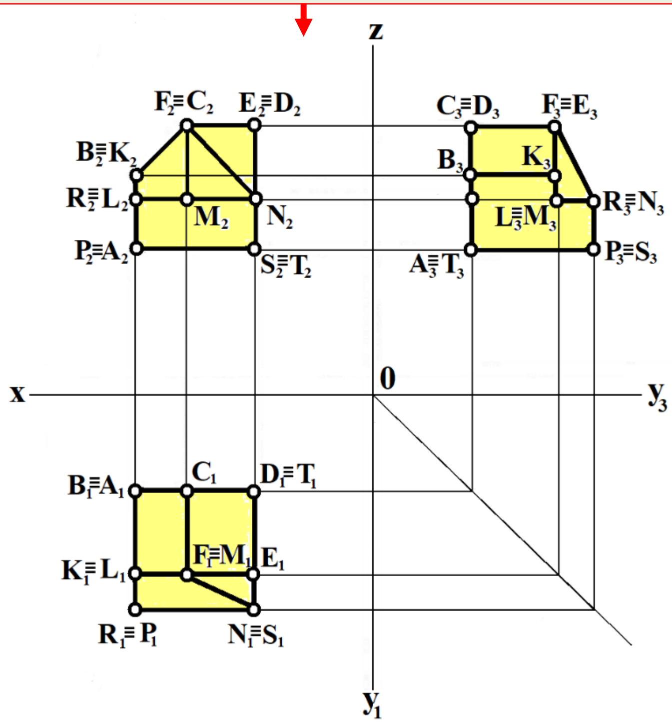
Ребро NE – це відрізок профільної прямої, паралельної до $П_3$: N_3E_3= Н.В.NE.

Ребра AB, KL, FM,RP,NS,DT – це відрізки горизонтально-проєкціюючих прямих, перпендикулярних до $П_1$ (водночас вони паралельні до $П_2$ і $П_3$): A_2B_2= A_3B_3=Н.В. AB і т.д.

Ребра AP, RL, KB, CF, DE, ST – це відрізки фронтально-проєкціюючих прямих, перпендикулярних до $П_2$ (водночас вони парлельні до $П_1$ і $П_3$): A_1P_1=A_3P_3=Н.В.AP і т.д.

Ребра PS, RN, LM, FE, CD, AT – це відрізки профільно-проєкціюючих прямих, перпендикулярних до $П_3$ (водночас вони парлельні до $П_1$ і $П_2$): P_1S_1= P_2S_2=Н.В. PS і т.д.

На рисунку наведено епюр (кресленик) даного предмету

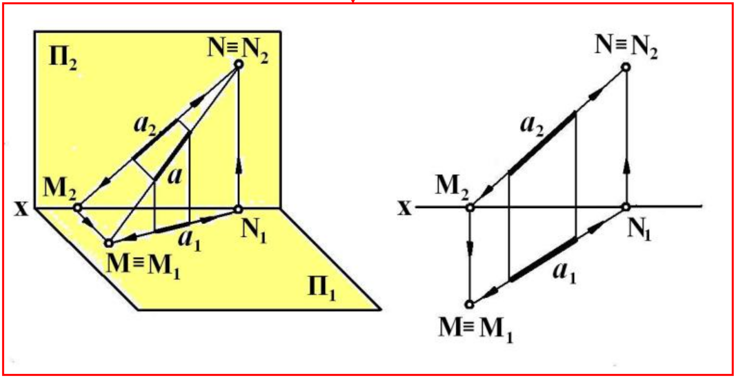


2.3. СЛІДИ ПРЯМОЇ

Слідом прямої називається точка перетину прямої з площиною проєкцій.

В системі трьох площин проєкцій пряма загального положення має три сліди: горизонтальний – точка перетину прямої з $П_1$ (позначається літерою M), фронтальний - точка перетину прямої з $П_2$ (позначається літерою N), профільний - точка перетину прямої з $П_3$ (позначається літерою L). Пряма рівня має два сліди, проєкціююча – один.

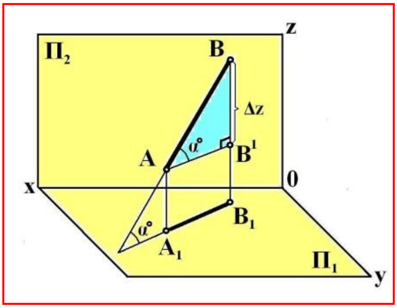
Побудова слідів прямої *a* в системі двох площин

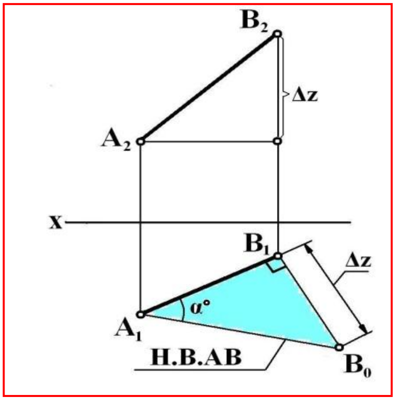


Для визначення сліду прямої потрібно виконати дві умови: 1 - слід повинен знаходитися в площині проєкцій (це означає, що дві проєкції сліду з трьох лежать на осях проєкцій) та 2 – належати прямій. Тому побудову сліду прямої починають із визначення точки перетину з віссю проєкцій тієї проєкції прямої, яка не лежить в площині проєкцій знаходження сліду. Наприклад, для визначення горизонтального сліду прямої спочатку продовжують фронтальну або профільну проєкцію прямої до перетину з віссю проєкцій. Ця точка буде однією з проєкцій сліду, з якої проводять лінію проєкційного зв'язку для знаходження самого сліду за умови, що він належить прямій.

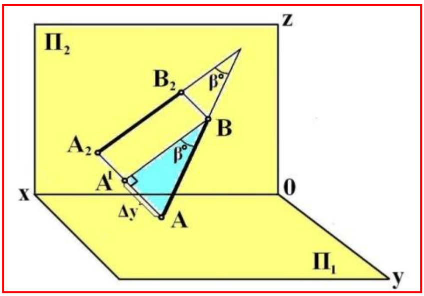
2.4. ВИЗНАЧЕННЯ НАТУРАЛЬНОЇ ВЕЛИЧИНИ ВІДРІЗКА ПРЯМОЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

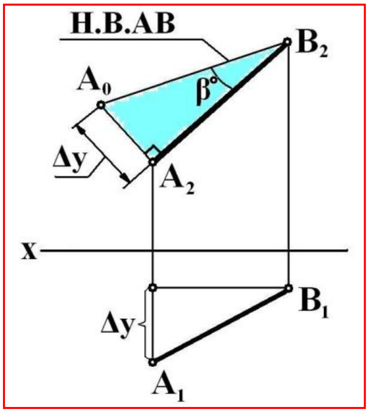
Визначення способом прямокутного трикутника натуральної величини (довжини) відрізка AB прямої загального положення та кута α^o нахилу прямої до горизонтальної площини проєкцій





Визначення способом прямокутного трикутника натуральної величини (довжини) відрізка АВ прямої загального положення та кута β^o нахилу прямої до фронтальної площини проєкцій

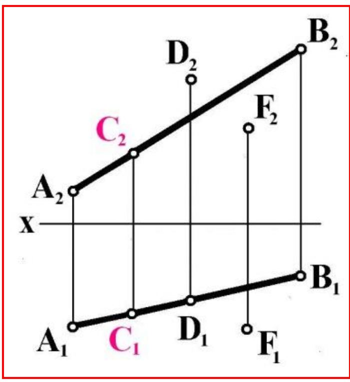




Висновки:
Натуральна величина відрізка прямої загального положення визначається гіпотенузою прямокутного трикутника, у якого один катет – проєкція відрізка прямої на одну з площин проєкцій, а другий катет дорівнює різниці відстаней кінців відрізка прямої до тієї площини проєкцій, на якій будується прямокутний трикутник.
Із цього прямокутного трикутника визначається і кут нахилу прямої до тієї площини проєкцій, на якій будується прямокутний трикутник, як кут між катетом - проєкцією і гіпотенузою.

2.5. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ ЛІНІЙ

Точка належить прямій, якщо її проєкції знаходяться на однойменних проєкціях цієї прямої

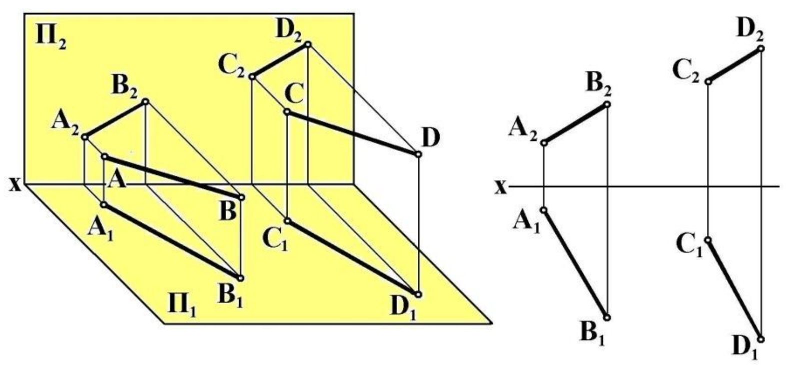


Серед трьох точок C, D і F лише точка C належить прямій AB

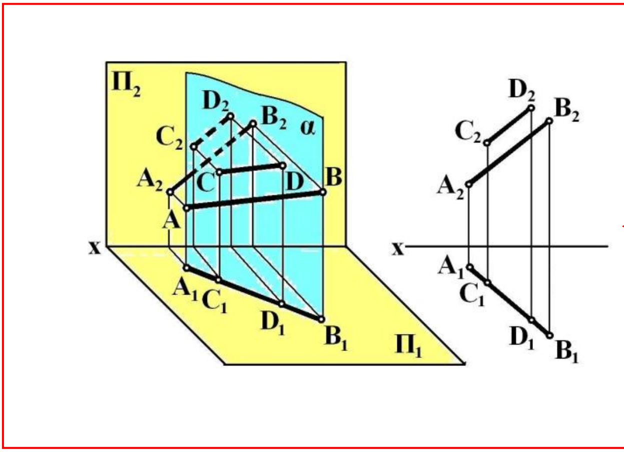
Дві прямі лінії у просторі можуть бути: 1) паралельними, 2) перетинатися, 3) мимобіжними.
Паралельні та прямі, що перетинаються, лежать в одній площині, а мимобіжні прямі не мають спільної точки, тому не лежать в одній площині.

2.5.1. Паралельні прямі

Однойменні проєкції паралельних прямих на площину проєкцій, до якої прямі не перпендикулярні, паралельні між собою



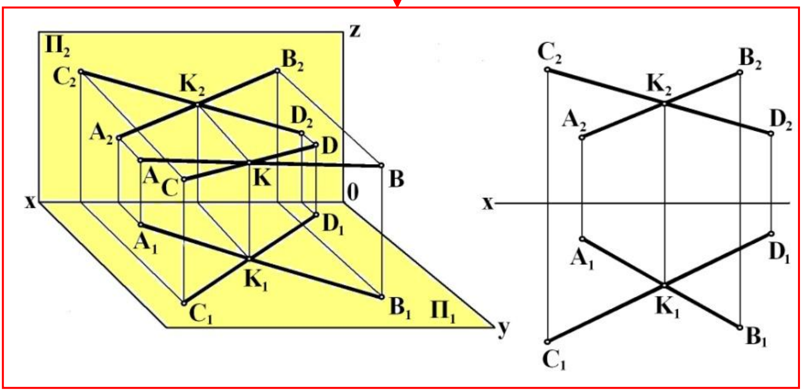
Якщо паралельні прямі лежать в площині, що перпендикулярна до площини проєкцій, то проєкції прямих на цю площину проєкцій збігаються



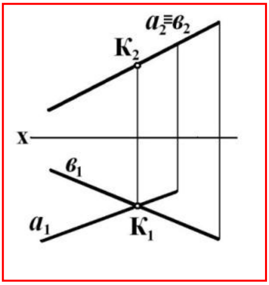
Паралельні прямі AB і CD лежать в площині α, яка перпендикулярна до площини проєкцій $П_1$

2.5.2. Прямі, що перетинаються

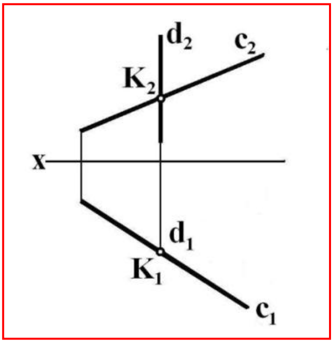
Проєкції прямих, що перетинаються, проєкціюються на площини проєкцій, в загальному випадку, прямими лініями, що також перетинаються, причому точки перетину однойменних проєкцій прямих лежать на одній лінії проєкційного зв'язку, оскільки є проєкціями однієї і тієї ж точки – точки перетину прямих.



Наочне зображення та епюр прямих AB і CD, що перетинаються в точці К. Прямі AB і CD лежать в площині, яка не перпендикулярна до жодної з площин проєкцій.



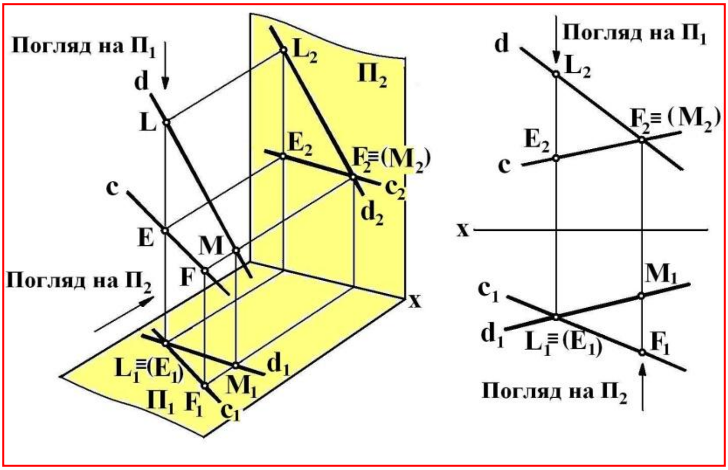
Епюр прямих *а* і *в*, що перетинаються. Прямі *а* і *в* лежать у площині, яка перпендикулярна до $П_2$



Епюр прямих c і d, що перетинаються. Прямі c і d лежать у площині, яка перпендикулярна до $П_1$. Пряма d – горизонтально-проєкціююча пряма

2.5.3. Мимобіжні прямі

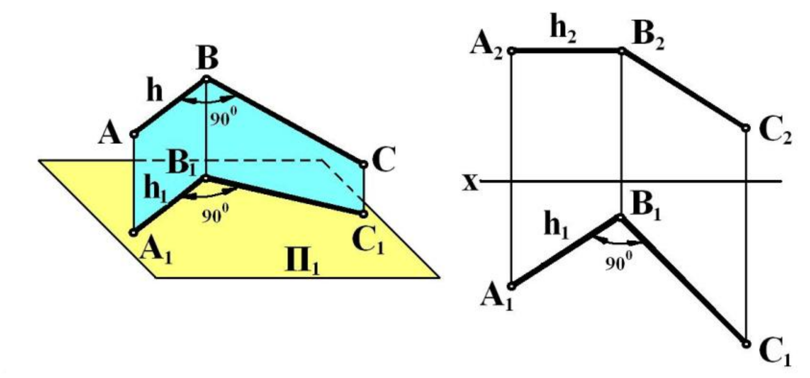
У мимобіжних прямих, тобто прямих, які не паралельні і не перетинаються, точки перетину їх однойменних проєкцій не лежать на одній лінії проєкційного зв’язку, як це має місце у прямих, що перетинаються, а проєкції ніколи не збігаються, оскільки мимобіжні прямі не лежать в одній площині.



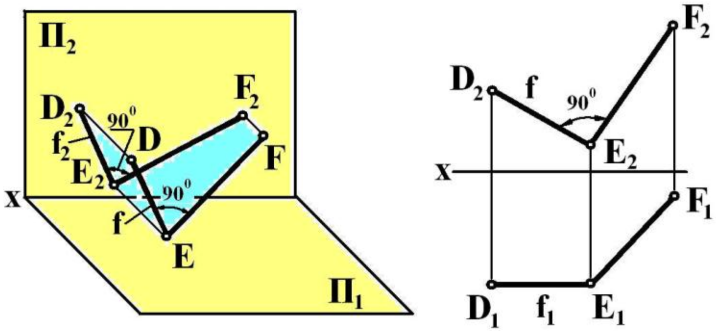
Наочне зображення та епюр мимобіжних прямих c і d.
Для мимобіжних прямих характерна наявність конкуруючих точок, за допомогою яких визначають видимість елементів геометричних фігур на епюрі. Конкуруючими називаються точки, які лежать на одній проєкціюючій прямій. Для мимобіжних прямих c і d пари точок L, E і F, M є конкуруючими точками. Точки L і E утворюють горизонтально-проєкціюючу пряму, де $L_1 \equiv E_1$. Точки F і M утворюють фронтально-проєкціюючу пряму, де $F_2 \equiv M_2$.
З двох конкуруючих точок видимою відносно площин проєкцій буде та, у якої проєкція, що не збігається з проєкцією іншої конкуруючої точки, розміщена далі від осі проєкцій, тобто ця точка буде знаходитися ближче до спостерігача.
Видимість елементів на епюрі розв’язується для кожної проєкції окремо, а саме для тієї проєкції елемента, на якій проєкції конкуруючих точок збігаються.
Серед конкуруючих точок L і E видимою на $П_1$ є точка L, фронтальна проєкція L_2 якої розміщена далі від осі x. Невидимою на $П_1$ буде точка E, тому її горизонтальну проєкцію E_1 взято в дужки (E_1). Серед конкуруючих точок F і M видимою на $П_2$ є точка F, горизонтальна проєкція F_1 якої розміщена далі від осі x. Невидимою на $П_2$ буде точка M, тому її фронтальну проєкцію M_2 беруть в дужки (M_2).

2.6. ПРОЄКЦІЮВАННЯ ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ ПРЯМИХ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ

Прямий кут, утворений перпендикулярними прямими, проєкціюється у вигляді прямого кута на ту площину проєкцій, до якої одна з прямих (сторона кута) паралельна, а друга не перпендикулярна.



Наочне зображення та епюр прямого кута, утвореного сторонами AB і BC, які є відрізками прямих, що перетинаються у вершині B, де AB – відрізок горизонтальної прямої h, паралельної до $П_1$. Горизонтальна проєкція кута $A_1B_1C_1$ складає прямий кут при вершині B_1.



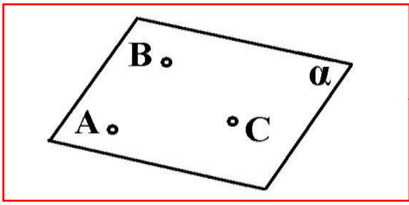
Наочне зображення та епюр прямого кута, утвореного сторонами DE і EF, які є відрізками прямих, що перетинаються у вершині E, де DE – відрізок фронтальної прямої f, паралельної до $П_2$. Фронтальна проєкція кута $D_2E_2F_2$ складає прямий кут при вершині E_2.

Лекція 3. Площина

3.1. Задання площини в просторі і на епюрі
3.2. Класифікація площин
3.3. Задачі на визначення належності точки площині
3.4. Головні лінії площини

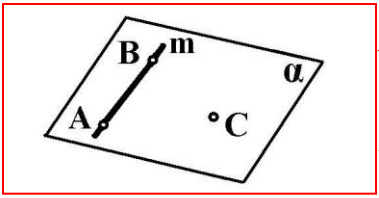
3.1. Задання площини в просторі і на епюрі

Площину в просторі визначають трьома точками, які не лежать на одній прямій



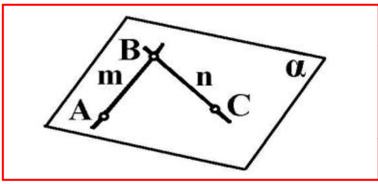
Точки A, B і C є визначником площини α

Розширення визначника площини дозволяє задати її іншими елементами:



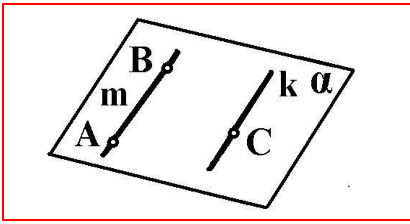
Прямою лінією та точкою, що їй не належить

Площину α задано прямою m та точкою C



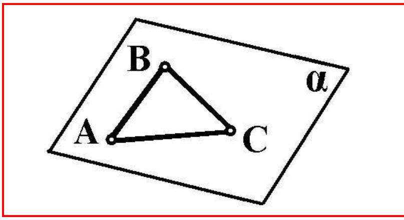
Двома прямими, що перетинаються

Площину α задано прямими m і n, що перетинаються



Двома паралельними прямими

Площину α задано паралельними прямими m і k

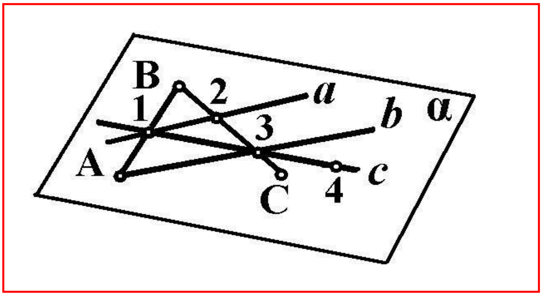


Відтинком площини, наприклад, трикутником

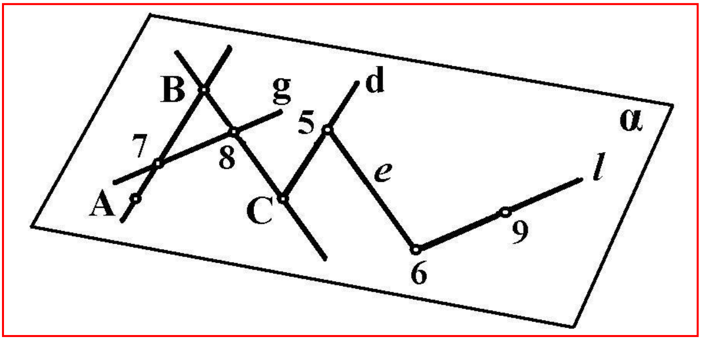
Площину α задано трикутником ABC

Вміння розширювати визначник площини дозволяє будувати потрібні для розв'язування різних задач точки та прямі, що належать площині.

Належність точки та прямої площині: точка належить площині, якщо вона лежить на прямій лінії цієї площини. Пряма лінія належить площині, якщо вона:
1) проходить через дві точки площини або
2) проходить через одну точку і паралельна до прямої цієї площини.

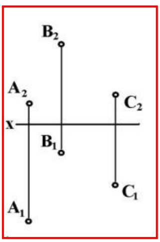


Пряма *a* належить площині α, оскільки проходить через точки 1 і 2 площини α. Прямі *b* і *c* належить площині α, оскільки проходять через точки 1, 3 і А, 3 площини α. Точка 4 належить площині α, оскільки лежить на прямій *c* площини α.

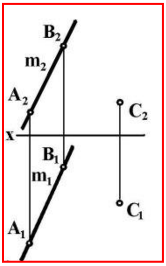


Пряма d належить площині α, оскільки проходить через точку С і паралельна до прямої АВ. Пряма *e* належить площині α, оскільки проходить через точку 5 на прямій d і паралельна до прямої ВС. Пряма *l* належить площині α, оскільки проходить через точку 6 на прямій *e* і паралельна до прямої g площини α.

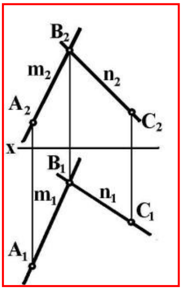
Аналогічно заданню площини в просторі площину на епюрі задають проєкціями:



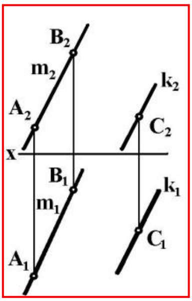
трьох точок, що не лежать на одній прямій



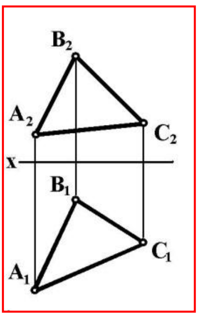
прямої лінії та точки, що їй не належить



двох прямих, що перетинаються



двох паралельних прямих

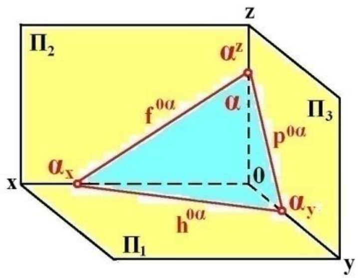


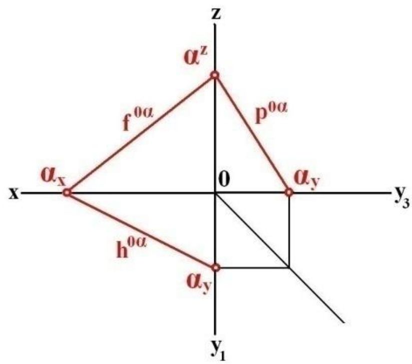
відтинку площини (трикутника)

Часто площину задають не довільними прямими, що перетинаються, а прямими, по яких площина перетинає площини проєкцій.

Пряму, по якій площина перетинає площину проєкцій, називають слідом площини.

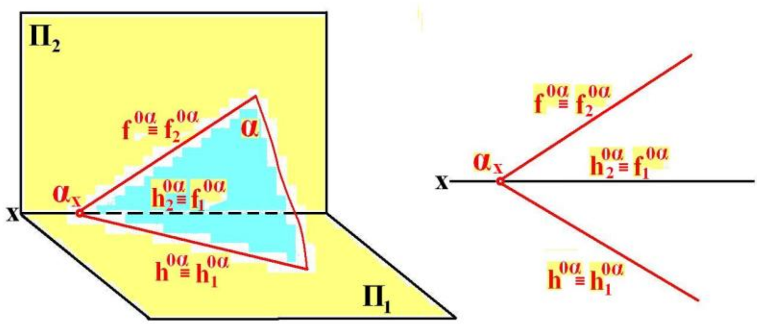
Наочне зображення та епюр площини α, що задана слідами: $h^{0\alpha}$ – горизонтальний слід площини α, $f^{0\alpha}$ – фронтальний слід площини α, $p^{0\alpha}$ – профільний слід площини α, α_x, α_y, α_z – точки сходу слідів площини α



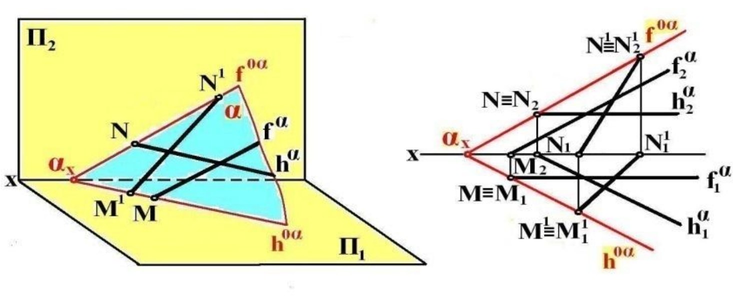


Задання площини слідами має переваги перед іншими варіантами її зображення на епюрі:
по-перше, зберігається наочність зображення, що дозволяє легко уявити положення площини в просторі;
по-друге, при заданні площини потрібно вказати в системі двох площин проєкцій тільки дві прямі (два сліда) замість чотирьох або шести.

Наведемо проєкції слідів площини в системі двох площин проєкцій, які дозволяють будувати проєкції прямих, що лежать в цій площині



У разі задання площини слідами, пряма належить площині, якщо:
1) сліди прямої (тобто її дві точки) належать однойменним слідам площини,
2) пряма має спільну точку з одним із слідів площини і паралельна до іншого сліду.



M^1N^1 – пряма площини α, оскільки $M^1 \in h^{0\alpha}$, $N^1 \in f^{0\alpha}$; h^{α} – горизонтальна пряма площини α (горизонталь площини), у якої $N \in f^{0\alpha}$, $h^{\alpha} // h^{0\alpha}$; f^{α} – фронтальна пряма площини α (фронталь площини), у якої $M \in h^{0\alpha}$, $f^{\alpha} // f^{0\alpha}$.

3.2. Класифікація площин

Площини, як і прямі лінії, залежно від їх розміщення відносно площин проєкцій поділяють на площини загального положення, площини рівня та проєкціюючі площини

3.2.1. Площини загального положення

Площини загального положення – це площини, які не паралельні і не перпендикулярні до жодної з площин проєкцій (в 3.1 наведено наочне зображення та епюри площин загального положення)

У площини загального положення сліди не паралельні і не перпендикулярні до осей проєкцій.
Якщо площину загального положення задано іншими елементами, наприклад, трикутником, то ці елементи на жодну з площин проєкцій не проєкціюються в одну спільну пряму лінію.
У визначника площини координати x, y, z трьох точок, що не лежать на одній прямій, мають різні величини.

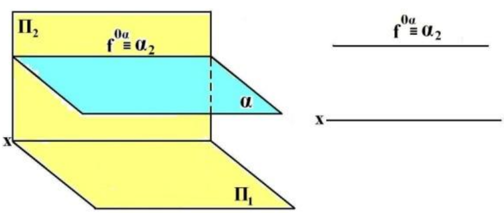
3.2.2. Площини рівня

Площини рівня – це площини, які паралельні до однієї з площин проєкцій

3.2.2.1. Горизонтальна площина

Горизонтальна площина або горизонтальна площина рівня – це площина, яка паралельна до горизонтальної площини проєкцій

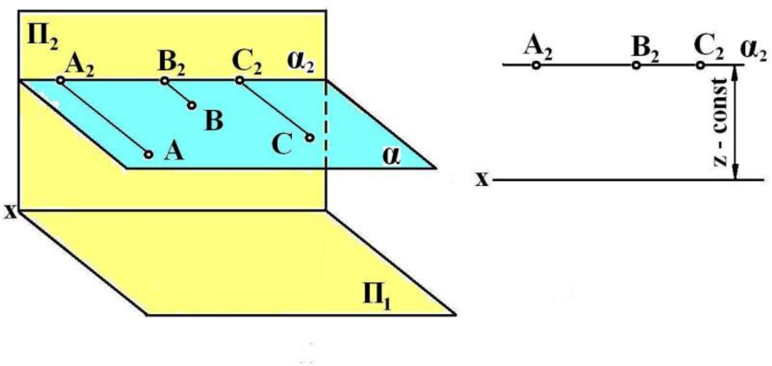
Наочне зображення та епюр горизонтальної площини α

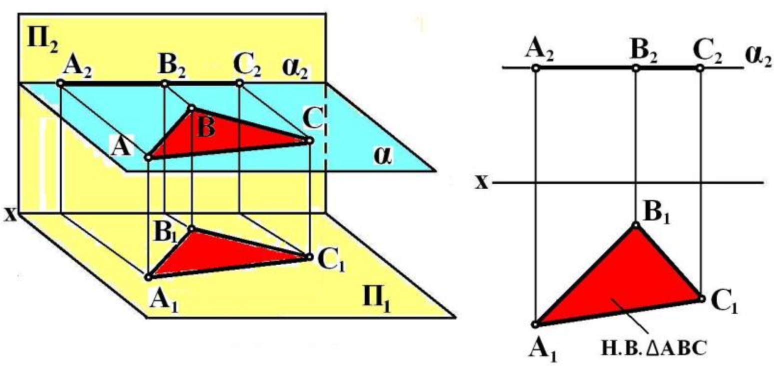


У площині α фронтальний слід $f^{0\alpha}$ паралельний до осі x і є слідом-проєкцією α_2 площини α; горизонтальний слід відсутній.

Слід-проєкція – це лінія перетину площини з площиною проєкцій, до якої вона перпендикулярна.
Слід-проєкція має таку властивість: проєкції точок, прямих ліній, плоских фігур, що знаходяться в площині, яка перпендикулярна до площини проєкцій, проєкціюються саме на слід-проєкцію.
У визначника площини рівня одна з координат x, y, z трьох точок, що не лежать на одній прямій, має однакове

значення (у горизонтальної площини координата z має однакове значення).
Прямі, плоскі фігури, що лежать в площині рівня, проєкціюються на площину проєкцій, до якої площина паралельна, в натуральну величину (горизонтальні проєкції прямих, плоских фігур, що лежать у горизонтальній площині, визначають їх натуральні величини).

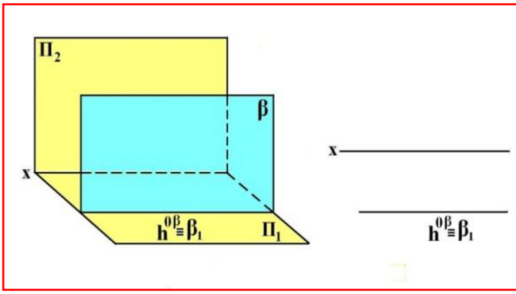




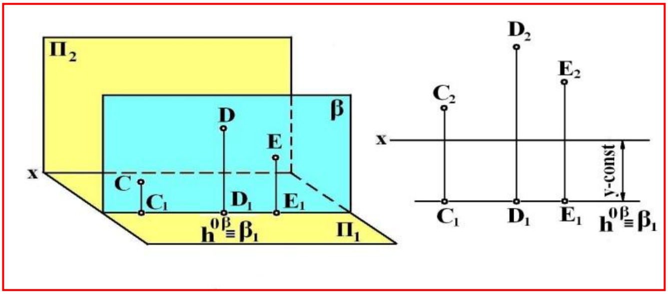
3.2.2.2. Фронтальна площина

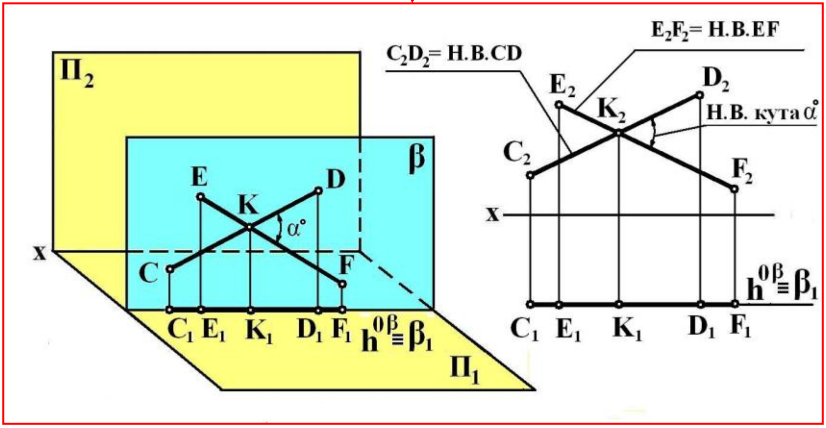
Фронтальна площина або фронтальна площина рівня – це площина, яка паралельна до фронтальної площини проєкцій.

Наочне зображення та епюр фронтальної площини β



У площині β горизонтальний слід $h^{0\beta}$ паралельний до осі x і є слідом-проєкцією β_1 площини β; фронтальний слід відсутній.





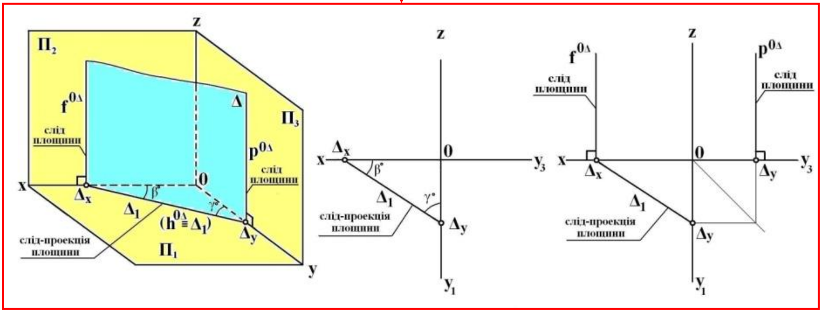
3.2.3. Проєкціюючі площини

Проєкціюючі площини – це площини, які перпендикулярні до однієї з площин проєкцій

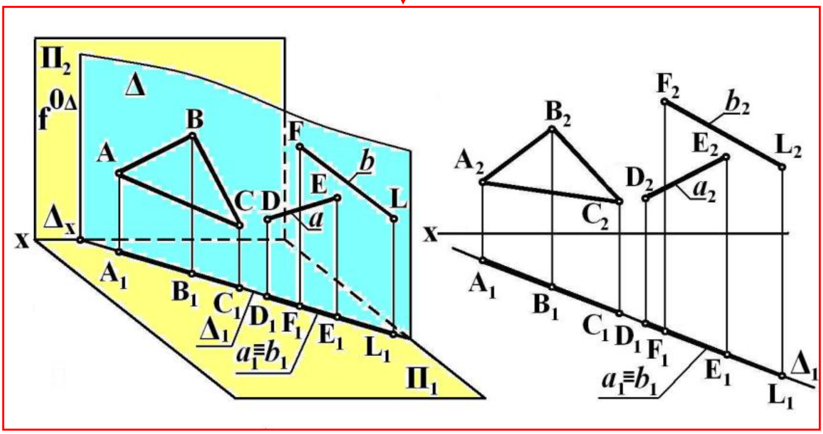
3.2.3.1. Горизонтально-проєкціююча площина

Горизонтально-проєкціююча площина – це площина, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проєкцій.

$f^{0\Delta}$ – фронтальний слід площини Δ, $p^{0\Delta}$ – профільний слід площини Δ, $h^{0\Delta}$ – горизонтальний слід площини Δ є водночас слідом-проєкцією Δ_1 площини Δ (площина Δ на Π_1 проєкціюється у слід-проєкцію Δ_1, який повністю визначає положення площини Δ в просторі за наявності осей проєкцій); β^0, γ^0 – кути нахилу площини Δ до Π_2 і Π_3.

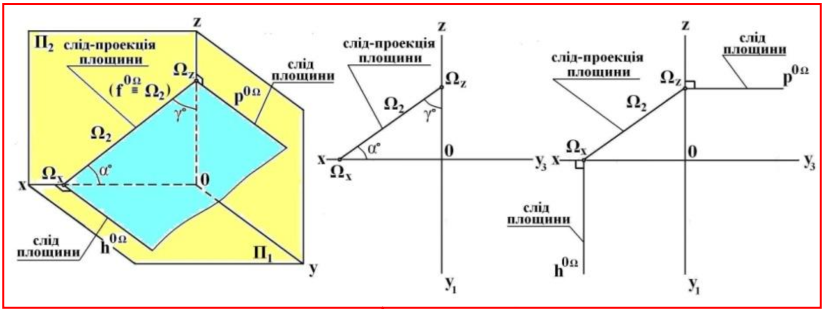


Наочне зображення та епюр трикутника АВС, прямих *a* і *b*, які належать горизонтально-проєкціюючій площині Δ (горизонтальні проєкції цих фігур збігаються зі слідом-проєкцією Δ_1 площини Δ).



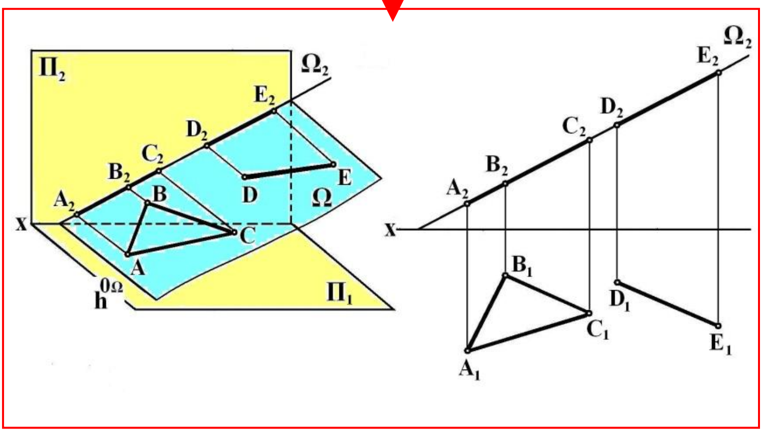
3.2.3.2. Фронтально-проєкціююча площина

Фронтально-проекціююча площина – це площина, яка перпендикулярна до фронтальної площини проєкцій.

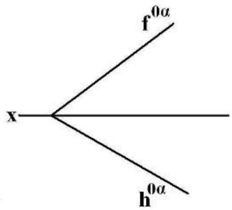
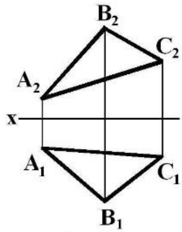
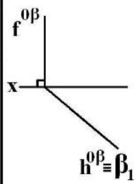
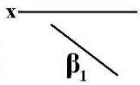
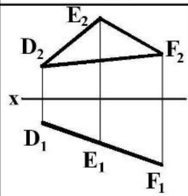
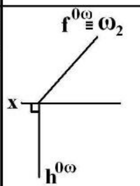
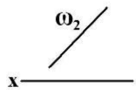
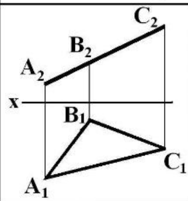
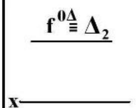
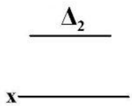
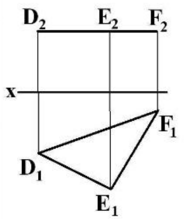
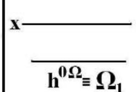
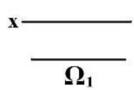
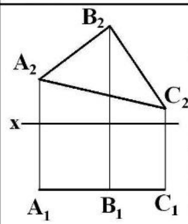


$h^{0\Omega}$ – горизонтальний слід площини Ω, $p^{0\Omega}$ – профільний слід площини Ω, $f^{0\Omega}$ – фронтальний слід площини Ω є водночас слідом-проєкцією Ω_2 площини Ω (площина Ω на Π_2 проєкціюється у слід-проєкцію Ω_2, який повністю визначає положення площини Ω в просторі за наявності осей проєкцій); α^0, γ^0 – кути нахилу площини Ω до Π_1 і Π_3.

Наочне зображення та епюр трикутника ABC, прямої DE, які належать фронтально-проєкціюючій площині Ω (фронтальні проєкції цих фігур збігаються зі слідом-проєкцією Ω_2 площини Ω).

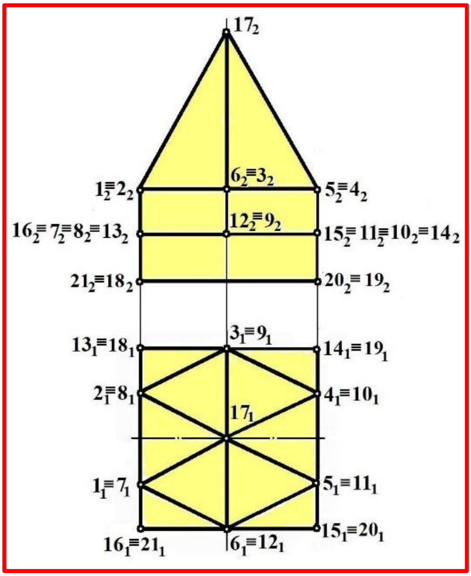


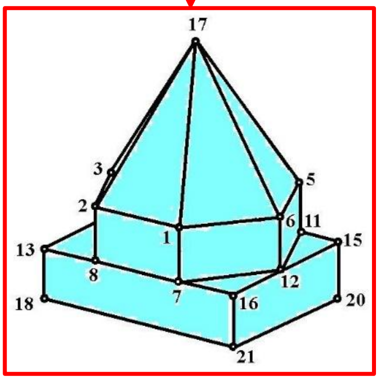
Епюри та проекційні особливості площин

Назви площин	Епюри площин			Графічні ознаки площин на епюрі
	Задання слідами		Задання трикутником	
Площина загального положення				Сліди не паралельні і не перпендикулярні до осі x. Проекції трикутника на площини проекцій– трикутники (на жодну з площин проекцій трикутник не проекціюється в пряму лінію).
Горизонтально-проекціююча площина				Горизонтальний слід є слідом-проекцією. Горизонтальна проекція трикутника — пряма лінія, яка є слідом-проекцією.
Фронтально-проекціююча площина				Фронтальний слід є слідом-проекцією. Фронтальна проекція трикутника — пряма лінія, яка є слідом-проекцією.
Горизонтальна площина				Фронтальний слід є слідом-проекцією і паралельний до осі x. Горизонтальний слід відсутній. Фронтальна проекція трикутника паралельна осі x, горизонтальна — визначає натуральну величину трикутника.
Фронтальна площина				Горизонтальний слід є слідом-проекцією і паралельний до осі x. Фронтальний слід відсутній. Горизонтальна проекція трикутника паралельна осі x, фронтальна — визначає натуральну величину трикутника.

На рисунках зображено вид спереду (фронтальна проєкція), вид зверху (горизонтальна проєкція) та наочне зображення предмета (багатогранника). Грані багатогранника є відтинками площин.

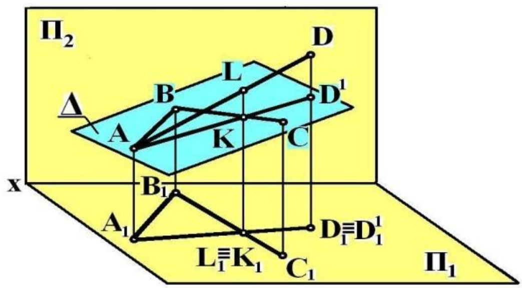
Грані 2-3-17, 3-4-17, 5-6-17, 6-7-17 – відтинки площин загального положення. Грані 1-6-12-7, 2-3-9-8, 3-4-10-9, 5-6-12-11 – відтинки горизонтально-проєкціюючих площин, перпендикулярних до $П_1$. Грані 1-2-17, 4-5-17 - відтінки фронтально-проєкціюючих площин, перпендикулярних до $П_2$. Грань 18-19-20-21 – відтинок горизонтальної площини, паралельної до $П_1$. Грані 16-15-20-21, 13-14-19-18 – відтинки фронтальних площин рівня, парлельних до $П_2$. Грані 1-2-8-7, 5-4-10-11, 16-13-18-21, 15-14-19-20 – відтинки профільної площини, паралельної до $П_3$.





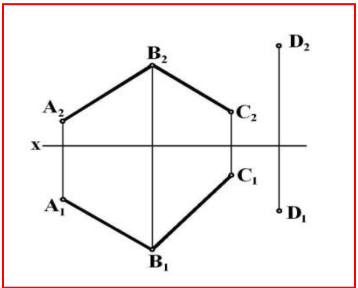
3.3. Задачі на визначення належності точки площині

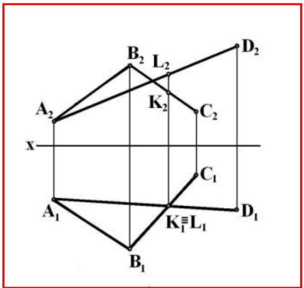
Задача на належність точки площині є однією з основних в геометрії. Точка належить площині, якщо вона лежить на прямій цієї площини.



Площину Δ задано визначником – трьома точками А, В, С. З'єднавши ці точки, отримаємо дві прямі АВ і ВС, що перетинаються. Щоб визначити, чи належить точка D площині Δ, потрібно через точку D провести пряму до перетину з будь-якою точкою площини Δ, наприклад, точкою А. Далі розглядаємо пряму DA і будь-яку іншу пряму площини Δ, яка не проходить через точку А, наприклад, пряму ВС. Якщо вони мимобіжні, то точка D не належить площині Δ як на наведеному рисунку. Проте точка D^1 ($D^1 = D\,D_1 \cap \Delta$) належить площині, оскільки прямі D^1A і ВС є прямими, що перетинаються в спільній точці К.

3.3.1. Перевірка належності довільної точки простору D площині Δ, яку задано двома прямими AB і BC, що перетинаються:





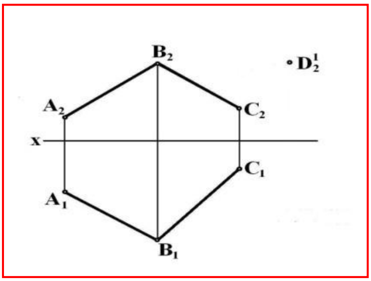
Початкова умова задачі. Визначити, чи належить точка D площині Δ (AB∩BC).

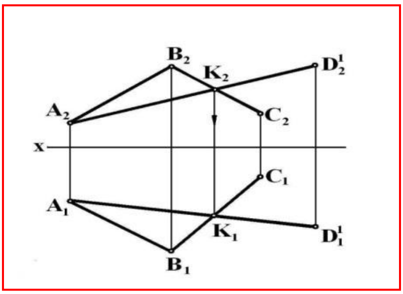
Порядок побудов:

1. З'єднуємо точку D з точкою A площини Δ.

2. Визначаємо взаємне положення прямих DA і BC. Вони є мимобіжними.

3.3.2. Побудова точки D^1, що належить площині Δ (AB∩BC), за однією її проєкцією:





Початкова умова задачі. Визначити, чи належить точка D^1 площині Δ. (AB∩BC).

Порядок побудов:
1. Точку D_2^1 з'єднуємо з A_2.
2. Визначаємо K_2, де $K_2 = A_2 D_2^1 \cap B_2C_2$.
3. Знаходимо K_1 на B_1C_1.
4. Проводимо єдину можливу горизонтальну проєкцію A_1K_1 прямої АК, що належить площині Δ, на якій знаходимо D_1^1.

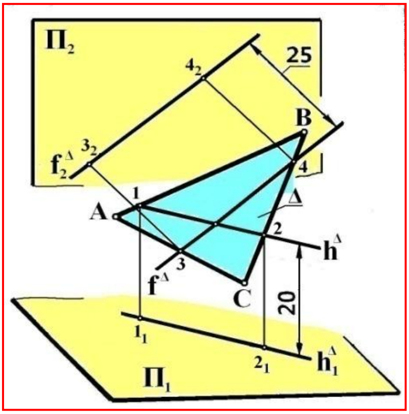
За наявності двох проєкцій точки її положення в просторі визначено, а, отже, можна лише перевірити, чи належить ця точка заданій площині. Якщо задано одну проєкцію точки, тобто положення точки в просторі не визначено, то можна, змінюючи положення відсутньої другої проєкції точки, розмістити саму точку в заданій площині.

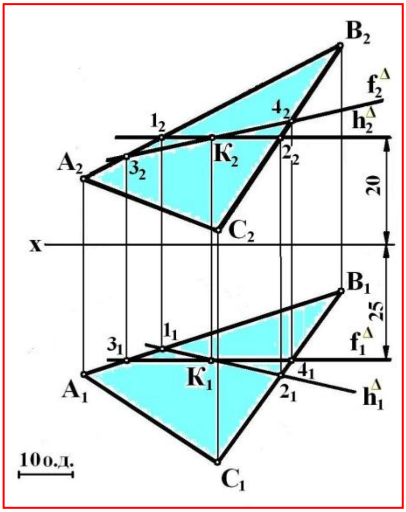
3.3.3. Побудова точки К, що належить площині, за її двома координатами

Умова задачі: В площині Δ, яку задано трикутником АВС, визначити положення точки К, яку розміщено на відстані 20 мм під площини проєкцій $П_1$ і 25 мм від площини проєкцій $П_2$:

Розв'язування задачі на наочному зображенні.

Розв'язування задачі на епюрі.





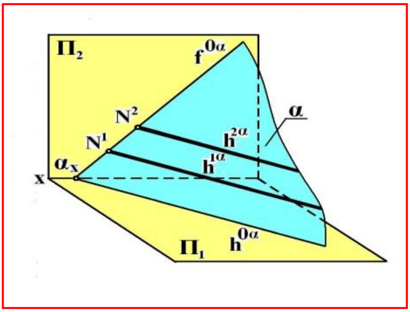
3.4. Головні лінії площини

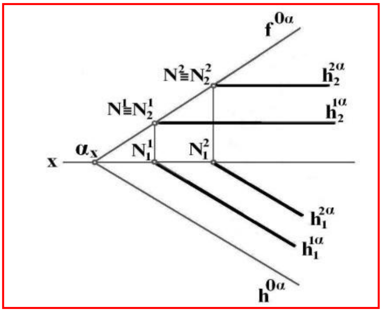
Головні лінії площини – це лінії рівня та лінія найбільшого уклону (ухилу) площини.
Лінії рівня площини – прямі, що лежать в площині і паралельні до однієї з площин проєкцій. Це горизонталі (горизонтальні прямі) та фронталі (фронтальні прямі) площини.

3.4.1. Горизонталі площини – прямі, які належать площині і паралельні до горизонтальної площини проєкцій

Наочне зображення горизонталей $h^{1\alpha}$ і $h^{2\alpha}$, що належать площині α, заданої слідами.

Епюр горизонталей $h^{1\alpha}$ і $h^{2\alpha}$, що належать площині α, заданої слідами.

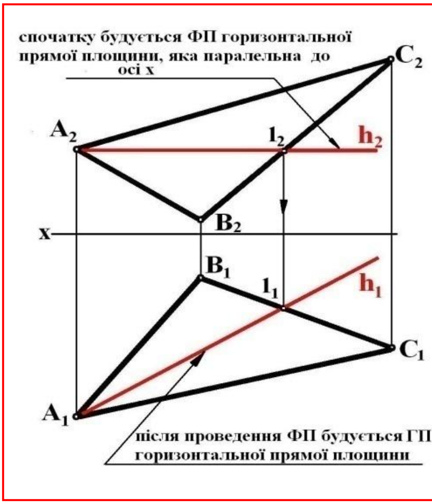




Всі горизонталі площини паралельні між собою і до горизонтального сліду площини.

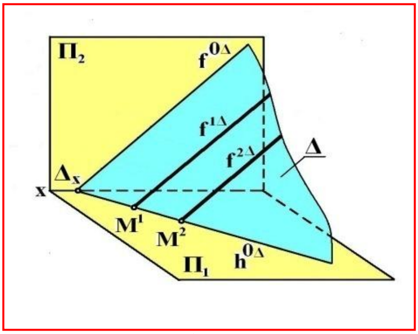
Мають спільну точку з фронтальним слідом і паралельні до горизонтального сліду.

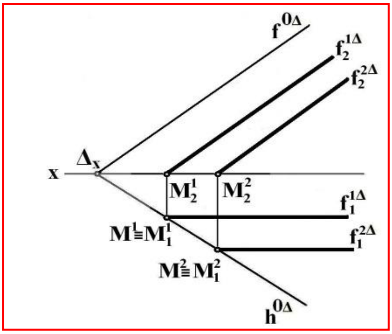
При проведенні на епюрі горизонталі площини спочатку проводять її фронтальну проєкцію паралельно до осі проекцій x.



Проведення через точку А горизонталі площини h, яку задано трикутником АВС (ГП – горизонтальна проєкція, ФП – фронтальна проєкція).

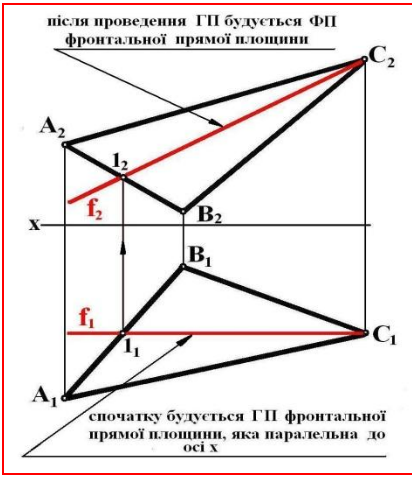
3.4.2. Фронталі площини – прямі, які належать площині і паралельні до фронтальної площини проєкцій





Наочне зображення фронталей $f^{1\Delta}$ і $f^{2\Delta}$, що належать площині Δ, заданої слідами.

Епюр фронталей $f^{1\Delta}$ і $f^{2\Delta}$, що належать площині Δ, заданої слідами.



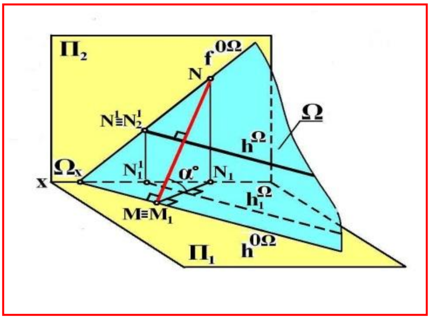
Проведення через точку С фронталі площини f, що задана трикутником ABC (ГП – горизонтальна проєкція, ФП – фронтальна проєкція).

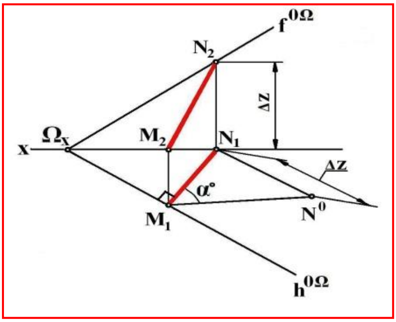
Всі фронталі площини паралельні між собою і до фронтального сліду площини.
Мають спільну точку з горизонтальним слідом і паралельні до фронтального сліду.
При проведенні на епюрі фронталі площини спочатку проводять її горизонтальну проєкцію паралельно до осі проєкцій x.

3.4.3.Лінія найбільшого уклону (ухилу) площини – пряма площини, яка перпендикулярна до горизонталей площини або до горизонтального сліду площини, при цьому кут α^0 її нахилу до площини проєкцій Π_1 визначає кут α^0 нахилу самої площини до тієї ж Π_1.

Побудову ліній найбільшого уклону площини починають з її горизонтальної проєкції, яку проводять перпендикулярно (під прямим кутом) до горизонтальних проєкцій горизонталей площини або до її горизонтального сліду.

Умова задачі: Визначити кут нахилу α^0 площини Ω, яку задано слідами



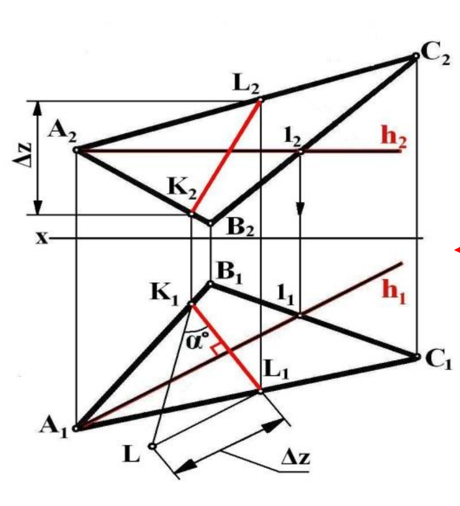


Розв'язування задачі на наочному зображенні

Розв'язування задачі на епюрі

Послідовність побудов:
1. Проведення M_1N_1 перпендикулярно до $h^{0\Omega}$, де M_1N_1 - горизонтальна проєкція відрізка MN лінії найбільшого уклону площини Ω.

2. Побудова M_2N_2.
3. Знаходження способом прямокутного трикутника кута нахилу α^0 лінії найбільшого уклону MN площини до Π_1, який визначає кут нахилу самої площини до Π_1.



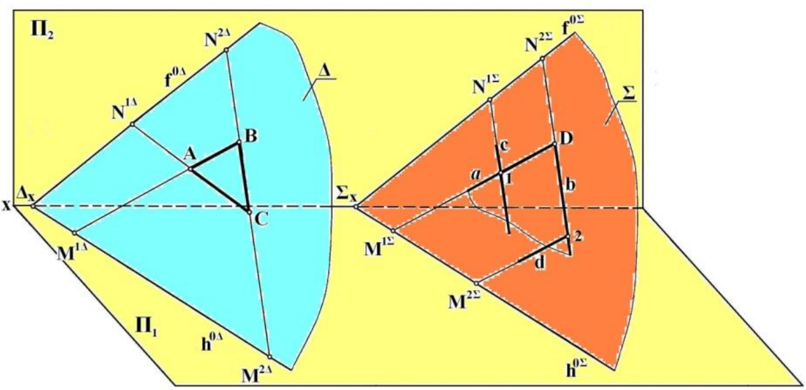
Проведення лінії найбільшого уклону KL в площині, яку задано трикутником ABC, та визначення кута нахилу α^0 площини до Π_1.

ЛЕКЦІЯ 4. ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН, ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

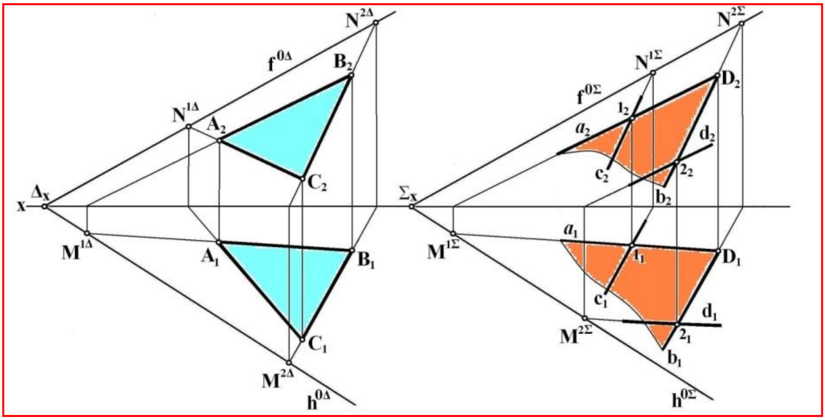
Дві площини між собою в просторі можуть бути:
1) паралельними і 2) перетинатися.

4.1. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ДВОХ ПЛОЩИН, ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Дві площини паралельні, якщо дві прямі, що перетинаються, однією площини відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються, іншої площини.



Наочне зображення паралельних площин Δ і Σ



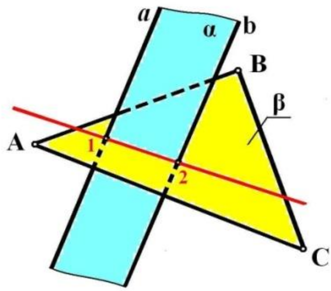
Епюр паралельних площин Δ і Σ

Наочне зображення та епюр паралельних площин Δ і Σ, заданих відповідно трикутником ABC і двома прямими *a* і b, що перетинаються (AB//*a* і BC//b). У паралельних площин сліди паралельні: $h^{0\Delta} // h^{0\Sigma}$ і $f^{0\Delta} // f^{0\Sigma}$. Для площини Δ горизонтальний слід $h^{0\Delta}$ побудовано за точками $M^{1\Delta}$ і $M^{2\Delta}$ ($M^{1\Delta} = AB \cap \Pi_1$, $M^{2\Delta} = BC \cap \Pi_1$), фронтальний слід $f^{0\Delta}$ побудовано за точками $N^{1\Delta}$ і $N^{2\Delta}$ ($N^{1\Delta} = AC \cap \Pi_2$, $N^{2\Delta} = BC \cap \Pi_2$). Для площини Σ горизонтальний слід $h^{0\Sigma}$ побудовано за точками $M^{1\Sigma}$ і $M^{2\Sigma}$ ($M^{1\Sigma} = a \cap \Pi_1$, $M^{2\Sigma} = d \cap \Pi_1$, де d//*a*), фронтальний слід $f^{0\Sigma}$ побудовано за точками $N^{1\Sigma}$ і $N^{2\Sigma}$ ($N^{1\Sigma} = c \cap \Pi_2$, $N^{2\Sigma} = b \cap \Pi_2$, де c//b).
Примітка: якщо побудовано один із слідів площини, то інший слід можна провести через точку сходу та один слід прямої цієї площини.

Пряма паралельна до площини, якщо в цій площині існує пряма, яка паралельна до заданої прямої (пряма паралельна до площини, якщо вона паралельна до будь-якої прямої цієї площини)

4.2. ПЕРЕТИН ДВОХ ПЛОЩИН

Дві площини перетинаються по прямій лінії, для побудови якої потрібно визначити: 1) дві спільні точки, що належать водночас обом площинам, або 2) одну спільну точку при відомому напрямку прямої лінії перетину:

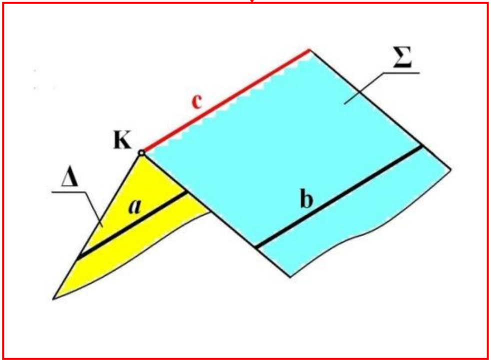


1 спосіб. Побудова лінії перетину двох площин за двома спільними точками

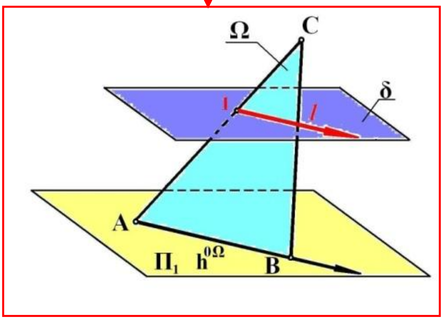
Площину α задано двома паралельними прямими *a* і b, площина β – трикутником ABC. Точки 1 і 2 є спільними точками площин α і β. Лінія перетину 12 площин α і β проходить через точки 1 і 2 (точки 1 і 2 для даного прикладу визначено як точки перетину прямих *a* і b площини α з площиною β).

2 спосіб. Побудова лінії перетину двох площин за однією спільною точкою і відомим напрямом лінії перетину

1 варіант. Точка K – спільна точка площин Δ і Σ, що перетинаються. Якщо прямі *a* і b, що належать відповідно площинам Δ і Σ, паралельні, то лінія перетину c цих площин буде паралельною до прямих *a* і b.



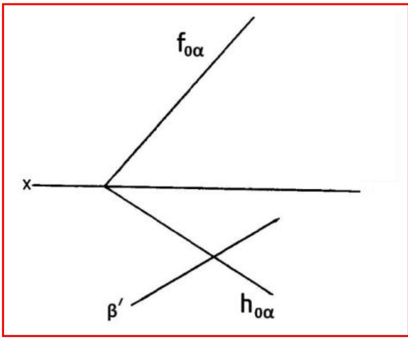
2 варіант. Точка 1 – спільна точка площин Ω і δ, що перетинаються. Оскільки площина δ паралельна до площини проєкцій Π_1, то лінія перетину *l* площин Ω і δ є прямою, що паралельна до Π_1. Якщо в площині Ω відомі горизонтальна пряма або її горизонтальний слід, то лінія перетину *l* буде проходити через точку 1 паралельно до цих прямих площини Ω (для даного прикладу пряма *l* паралельна до горизонтального сліду $h^{0\Omega}$ площини Ω).



4.2.1. Перетин площини загального положення з проєкціюючою площиною та площиною рівня

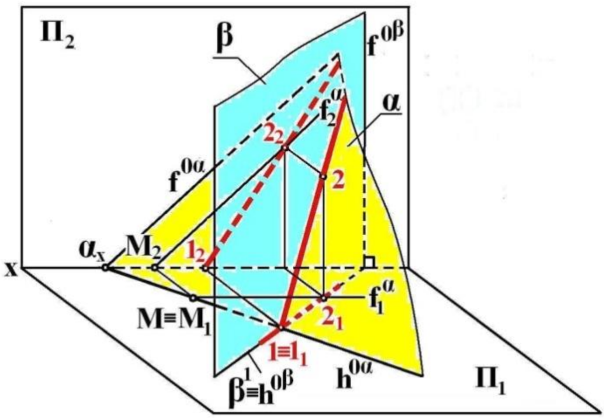
Одна проєкція лінії перетину проєкціюючої площини чи площини рівня з площиною загального положення збігається із слідом-проєкцією цих площин.

Задача № 1

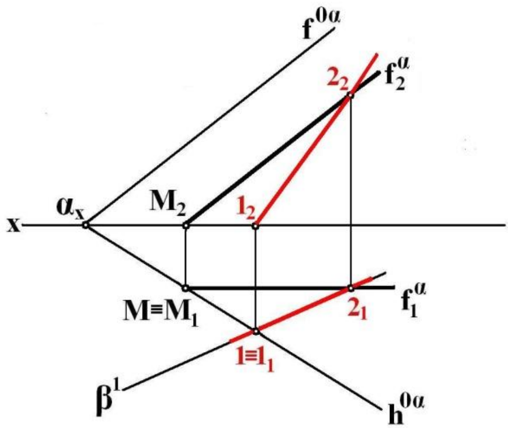


Початкова умова задачі.
Побудувати лінію перетину 12 площини загального положення $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$ з горизонтально-проєкціюючою площиною β.

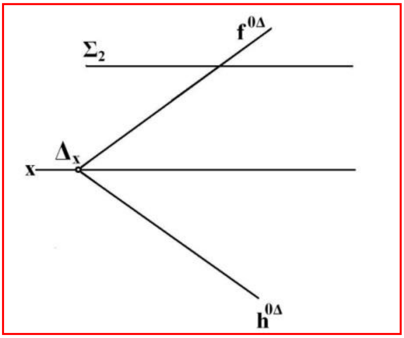
Розв'язування задачі на наочному зображенні.
Одну спільну точку – точку 1 – визначено як точку перетину горизонтальних слідів площин α і β. Другу спільну точку – точку 2 – визначено, виходячи з того, що горизонтальна проєкція лінії перетину площин збігається зі слідом-проєкцією β_1 площини β. На β_1 в довільному місці відмічаємо горизонтальну проєкцію 2_1 точки 2. Це означає, що точка 2 належить площині β. Належність точки 2 площині α визначено за допомогою фронтальної прямої f^{α} площини α.



Розв’язування задачі на епюрі.

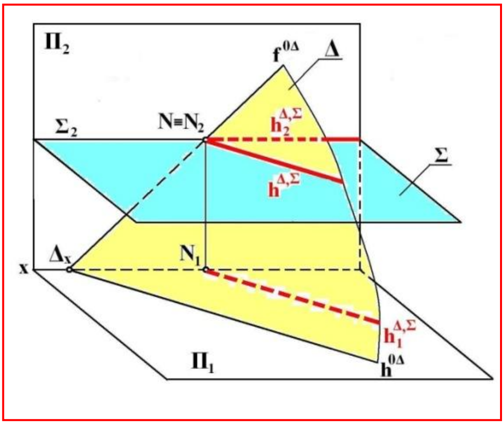


Задача № 2

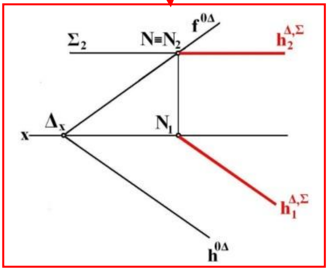


Початкова умова задачі.
Побудувати лінію перетину площини загального положення $\Delta(h^{0\Delta} \cap f^{0\Delta})$ з горизонтальною площиною рівня Σ.

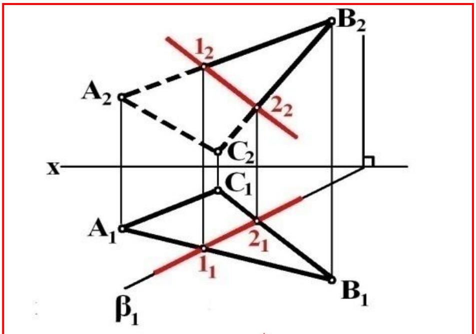
Розв'язування задачі на наочному зображенні.
Одну спільну точку – точку N – визначено як точку перетину фронтальних слідів площин Δ і Σ. Оскільки площина Σ паралельна до площини проєкцій Π_1, то напрямок лінії перетину відомий – він паралельний до Π_1. Тому, провівши через точку N горизонтальну пряму площини Δ, отримаємо лінію перетину $h^{\Delta,\Sigma}$ площин Δ і Σ (індекс «Δ,Σ» означає, що пряма $h^{\Delta,\Sigma}$ належить і площині Δ, і площині Σ).



Розв’язування задачі на епюрі.



Задача № 3

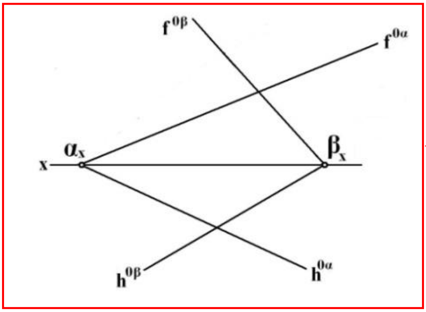


Побудовано лінію перетину 12 площини загального положення α, яку задано трикутником АВС, з горизонтально-проєкціюючою площиною β.

Горизонтальна проєкція лінії перетину збігається зі слідом-проєкцією β_1 площини β. На β_1 фіксуємо точки 1_1 і 2_1. Це буде означати, що точки 1 і 2 належать площині β. Проте точки 1 і 2 повинні належити і площині α. Тому точки 1_1 і 2_1 фіксуємо не на довільному місці β_1, а в точках перетину β_1 з горизонтальними проєкціями A_1B_1 і B_1C_1 сторін трикутника. Фронтальні проєкції 1_2 і 2_2 визначено на A_2B_2 і B_2C_2 за допомогою ліній проєкційного зв’язку. Це означає, що точки 1 і 2 будуть належити і площині α.

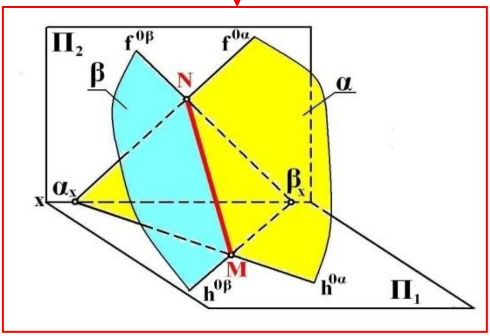
4.2.2. Перетин площин загального положення

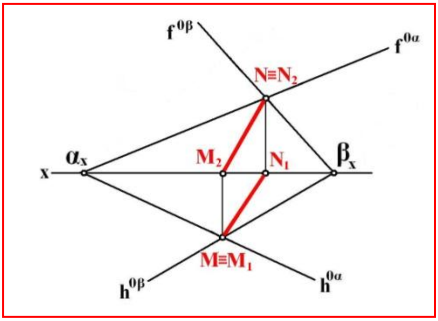
Розглянемо приклад перетину площин, заданих визначниками, які містять по дві прямі, що лежать в одній площині



Початкова умова задачі. Побудувати лінію перетину двох площин загального положення α і β, заданих слідами, які перетинаються в межах креслення.

Розв’язування задачі на наочному зображенні. Спільну точку M двох площин знайдено в перетині їх горизонтальних слідів $h^{0\alpha}$ і $h^{0\beta}$. Ці сліди лежать в одній площині – площині Π_1. Другу спільну точку N знайдено в перетині фронтальних слідів $f^{0\alpha}$ і $f^{0\beta}$, які лежать в одній площині – площині Π_2.

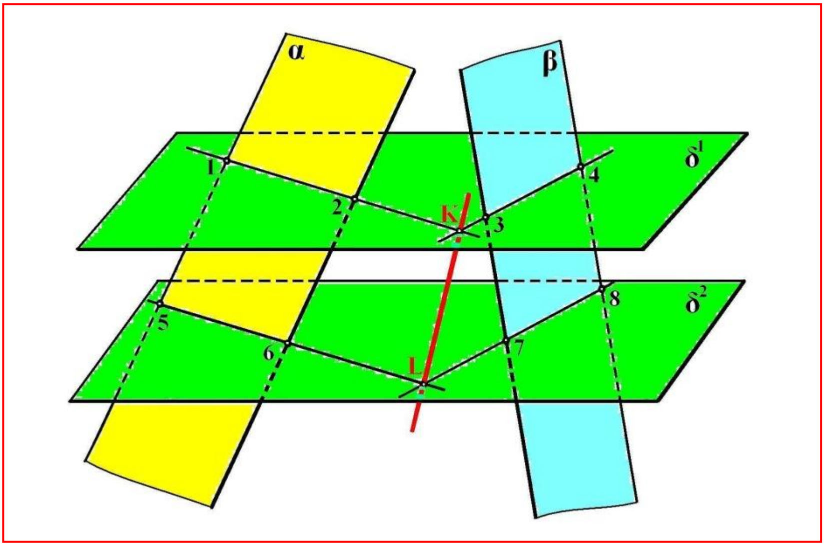




Розв’язування задачі на епюрі.

Якщо задані визначники двох площин, що перетинаються, не містять прямих, які лежать в одній площині, то дві спільні точки визначають за допомогою введення двох нових січних площин-посередників, які перетинають задані площини по прямих лініях, що лежать в цих січних площинах-посередниках. Кожна з січних площин-посередників призначена для визначення спільної точки двох площин, що перетинаються.

Приклад застосування двох січних площин-посередників для побудови лінії перетину двох площин. Цей спосіб, який називають загальним, доцільно застосовувати, коли в межах креслення визначники заданих площин не накладаються один на одний (знаходяться в різних областях креслення).



Послідовність (алгоритм) побудови лінії перетину KL площин α і β:

1. Для визначення першої спільної точки К проводимо допоміжну січну площину δ^1, яка перетинає задані площини α і β.

2. Будуємо лінії перетину 12 і 34 площини δ^1 відповідно з площинами α і β.

3. Оскільки прямі 12 і 34, що належать площинам α і β, лежать в площині δ^1, то точка К їх перетину належить водночас площинам α і β.

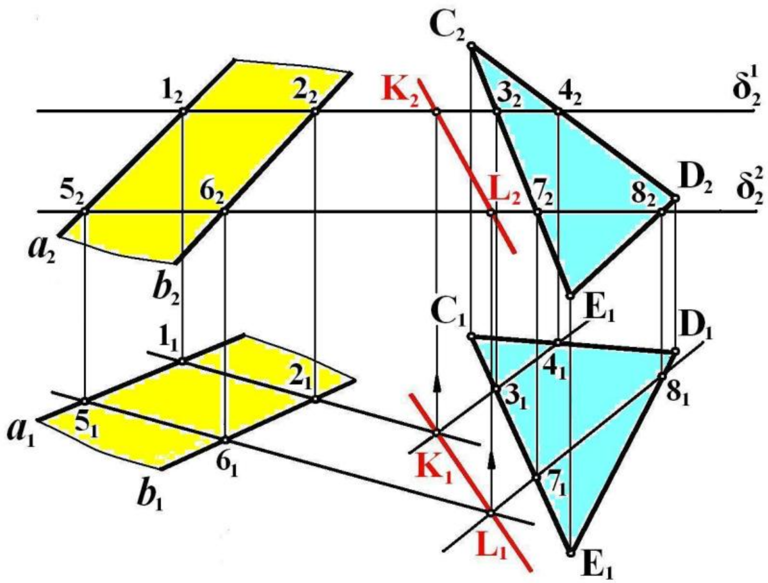
4. Для визначення другої спільної точки L проводимо допоміжну січну площину δ^2, яка перетинає задані площини α і β.

5. Будуємо лінії перетину 56 і 78 площини δ^2 відповідно з площинами α і β.

7. Через точки К і L проводимо пряму KL, яка і буде лінією перетину заданих площин α і β.

Примітка: 1. Якщо січні площини δ^1 і δ^2 задати паралельними, то для побудови ліній перетину 56 і 78 достатньо визначити по одній точці, наприклад 5 і 8, а самі лінії 56 і 78 провести паралельно відповідно до побудованих ліній 12 і 34 (паралельні площини δ^1 і δ^2 перетинають задані площини α і β по паралельних лініях: 12 // 56, 34 // 78).

2. Якщо січні площини δ^1 і δ^2 будуть площинами рівня, то лінії 12, 34, 56, 78 будуть прямими рівня.

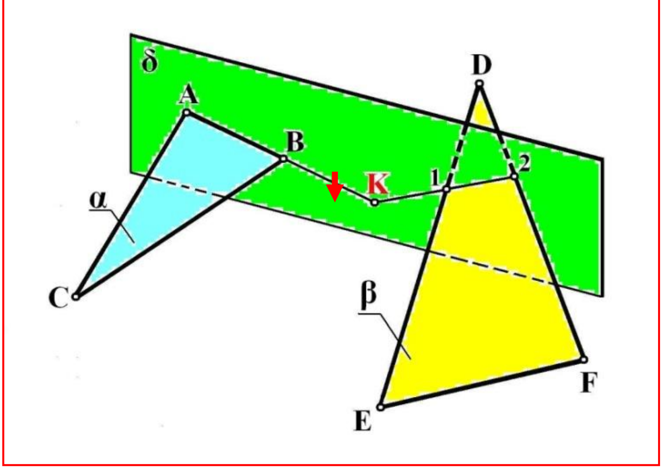


Приклад розв'язування на епюрі задачі на визначення лінії перетину KL площин загального положення α і β, де площину α задано паралельними прямими *a* і *b*, а

площину β − трикутником CDE.
Послідовність дій аналогічна, розглянутим на наочному зображенні (для спрощення виконання побудов січні площини δ^1 і δ^2 є горизонтальними площинами рівня, які перетинають задані площини по горизонтальних прямих 12, 34, 56, 78).

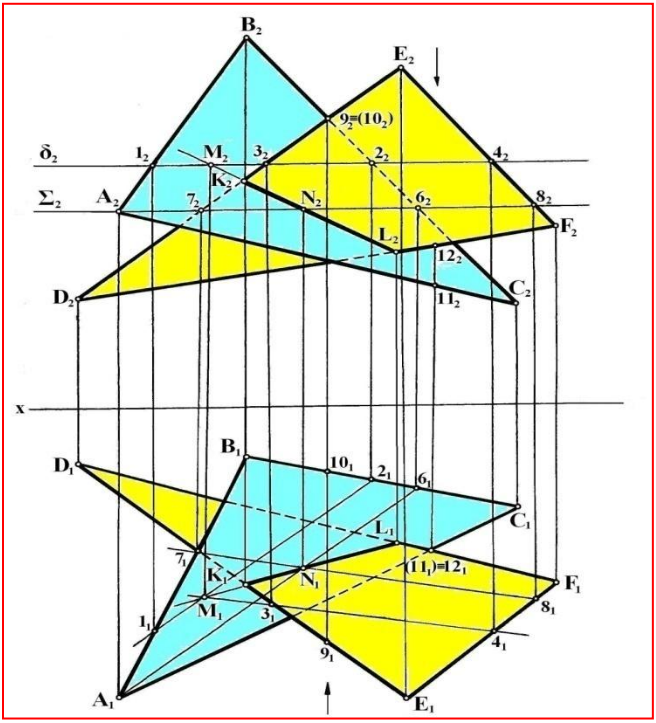
В багатьох випадках простіше побудувати лінію перетину двох площин загального положення, визначники яких не містять прямих, що лежать в одній площині, можна, якщо провести дві допоміжні січні через:
- дві прямі, які належать одній з площин, що перетинаються, або
- одну пряму в кожній із площин, що перетинаються.

На наочному зображенні наведено приклад визначення спільної точки К площини α, заданої трикутником ABC, та площини β, заданої трикутником DEF, шляхом проведення січної площини δ через пряму AB площини α. Площина δ перетинає площини α і β по прямимх AB і 12, які лежать в площині δ. Спільну точку К визначено як точку перетину прямих AB і 12.



Нижче наведено три приклади побудови лінії перетину площин, заданих трикутниками ABC (площина α) і DEF (площина β), трьома різними способами:

1 спосіб

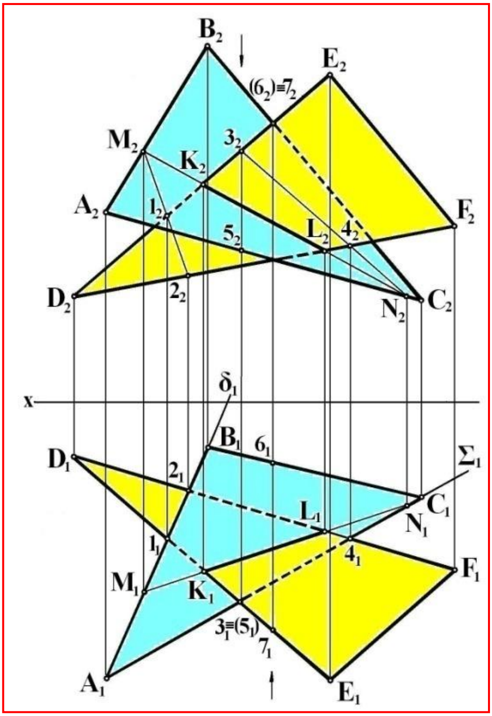


1спосіб. Загальний.

Уведенням першої січної горизонтальної площини рівня δ знаходимо першу спільну точку M (M = 12∩34) двох площин α і β. Уведенням другої січної горизонтальної площини рівня Σ знаходимо другу спільну точку N (N = 56∩78) двох площин α і β. На лінії перетину MN визначено відрізок KL, по якому трикутники врізаються один в одний.

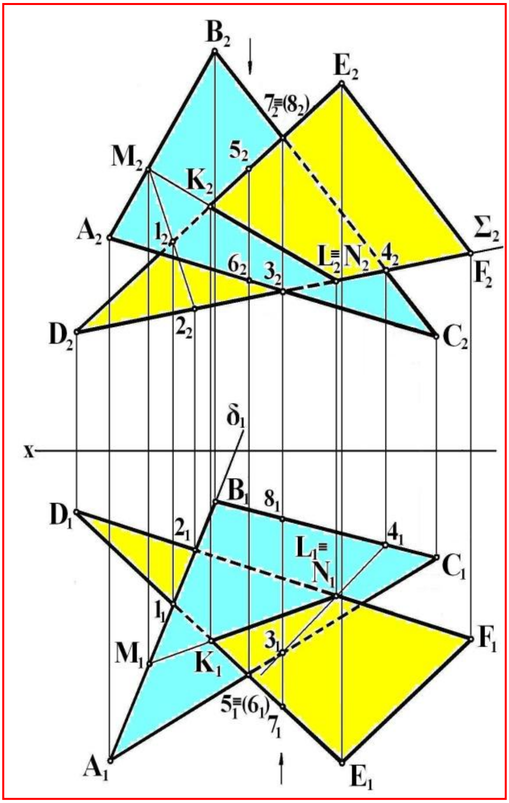
На фронтальній проєкції видимість трикутників визначено за допомогою конкуруючих точок 9 і 10. На горизонтальній проєкції видимість трикутників визначено за допомогою конкуруючих точок 11 і 12.

2 спосіб



2 спосіб. Проведення двох січних площин через дві прямі, які належать одній з площин, що перетинаються. Через прямі (сторони трикутника) AB і AC площини α проведено січні горизонтально-проєкціюючі площини δ і Σ. За допомогою площини δ визначено одну спільну точку M (M = AB∩12), а за допомогою площини Σ – другу спільну точку N (N = AC∩34).

3 спосіб



3 спосіб. Проведення двох січних площин через одну пряму в кожній із площин, що перетинаються.
Через пряму AB площини α проведено січну горизонтально-проєкціюючу площину δ, за допомогою якої визначено спільну точку M (M = AB∩12). Через пряму DF площини β проведено другу січну фронтально-проєкціюючу площину Σ, за допомогою якої визначено другу спільну точку N (N = DF∩34).

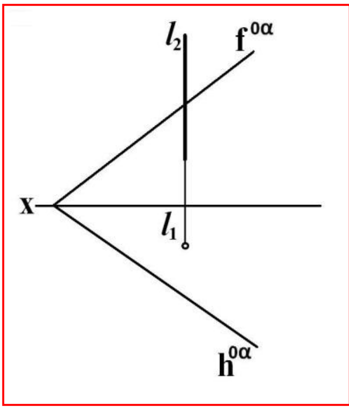
Порівняльний аналіз виконаних побудов:
За наведеним розміщенням на епюрі трикутників, які накладаються один на одний, для визначення лінії перетину площин більш раціональним і точним є 2 і 3 способи, оскільки кількість графічних побудов за цими способами значно менша, ніж за 1 способом.

4.3. ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ З ПЛОЩИНОЮ

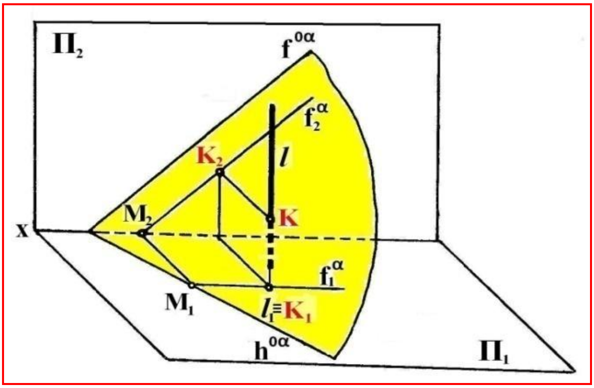
4.3.1. Перетин проєкціюючої прямої з площиною загального положення

При такому перетині одна з проєкцій точки перетину збігається з проєкцією прямої на площину проєкцій, до якої проєкціююча пряма перпендикулярна (ця проєкція проєкціюючої прямої є точкою).

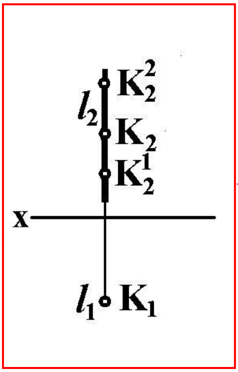
Задача № 1



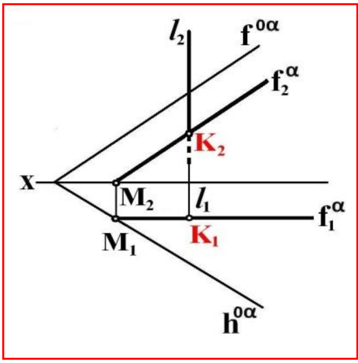
Початкова умова задачі. Побудувати точку К перетину горизонтально-проєкціюючої прямої *l* з площиною загального положення α.



Розв'язування задачі на наочному зображенні:
Оскільки пряма l перпендикулярна до площини $П_1$, то будь-яка точка, що лежить на цій прямій, в тому числі і точка К, проєкціюється на $П_1$ в l_1 (див. пояснення), тобто, якщо $К_1 \equiv l_1$, то точка К належить прямій l.
Точка К повинна належити і площині α. Оскільки відома $К_1$, то фронтальну проєкцію $К_2$ точки К можна знайти за допомогою фронтальної прямої f^α площини α.
Отже, $К = l \cap \alpha$, оскільки $К \in l$ і $К \in \alpha$.

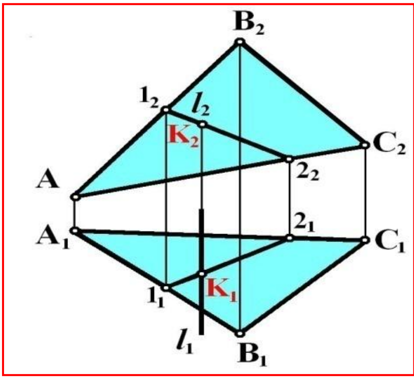


Пояснення до роз'язку.
Незалежно від розміщення на прямій l точок, наприклад $К, К^1, К^2$, їх горизонтальні проєкції збігаються з l_1 ($К_1 \equiv l_1$).



Розв'язування задачі на епюрі.

Задача № 2



В цій задачі побудовано точку К перетину фронтально-проєцiюючої прямої l з площиною загального положення, яку задано трикутником АВС:

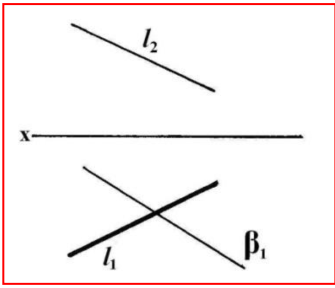
1. $K_2 \equiv l_2$.
2. K_1 знайдено за допомогою прямої 12 трикутника АВС.

Одна проєкція точки перетину проєцiюючої прямої з площиною загального положення визначається за умови належності точки прямій, а друга проєкція цієї точки – за умови її належності площині.

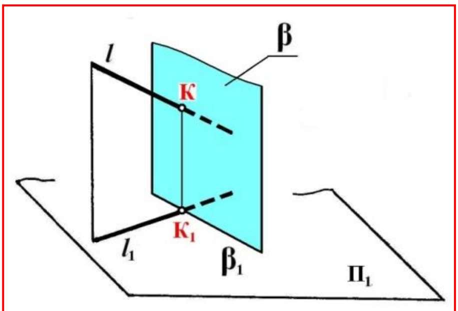
4.3.2. Перетин прямої загального положення з проєкціюючою площиною та площиною рівня

Одна з проєкцій точки перетину знаходиться на сліді-проєкції цих площин, конкретно в тому місці сліду-проекції, де він перетинається з відповідною проєкцією прямої, оскільки точка перетину – це точка, яка водночас належить і площині, і прямій.
Другу проєкцію точки перетину визначають за допомогою лінії проєкційного зв'язку за умови, що ця точка належить прямій.

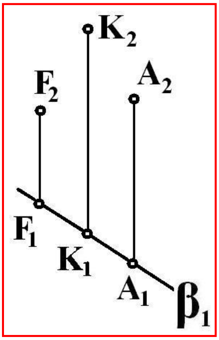
Задача № 1



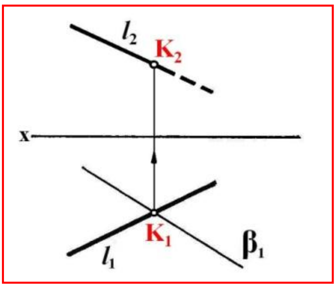
Початкова умова задачі. Побудувати точку К перетину прямої загального положення прямої *l* з горизонтально-проєкціюючою площиною β.



Розв’язування задачі на наочному зображенні:
Горизонтальну проєкцію K_1 точки K перетину прямої l з площиною β знаходимо в точці перетину l_1 з β_1 ($K_1 = l_1 \cap \beta_1$). Якщо $K_1 \equiv \beta_1$, то точка K належить площині β незалежно від того, де знаходиться фронтальна проєкція цієї точки (див. пояснення).
Фронтальну проєкцію K_2 точки K знаходимо за умови, що вона належить прямій l.

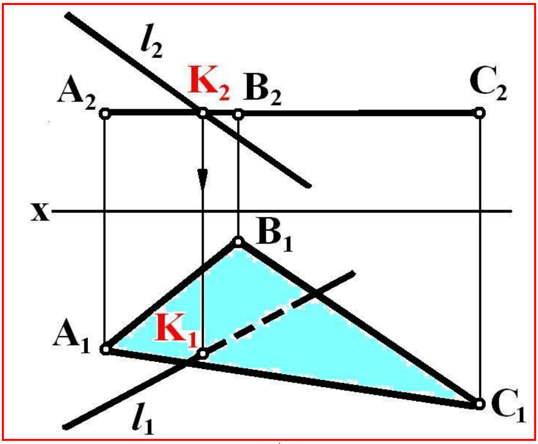


Пояснення до розв’язку.
Точки K, A і F належать горизонтально-проєкціюючій площині β, оскільки їх горизонтальні проєкції K_1, A_1 і F_1 лежать на сліді-проєкції β_1.



Розв’язування задачі на епюрі:
1. $K_1 = l_1 \cap \beta_1$.
2. K_2 визначаємо за допомогою лінії проєкційного зв’язку за умови, що точка належить прямій l.

Задача № 2



В цій задачі побудовано точку К перетину прямої загального положення *l* з горизонтальною площиною рівня, яку задано трикутником АВС:

1. $K_2 = l_2 \cap A_2B_2C_2$, де $A_2B_2C_2$ – слід-проєкція площини рівня ($A_2B_2C_2$ // x). Якщо $K_2 \equiv A_2B_2C_2$, то точка К належить заданій площині.

2. K_1 знайдено за допомогою лінії проєкційного зв'язку за умови, що точка К належить прямій *l*.

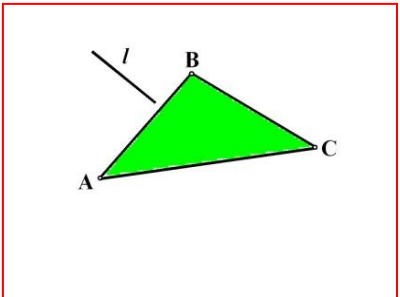
Одна проєкція точки перетину прямої загального положення з проєкціюючою площиною та площиною рівня знаходиться на сліді-проєкції цих площин, тобто за умови належності точки перетину площині. Другу проєкцію точки перетину визначається за умови її належності прямій.

4.3.3. Перетин прямої загального положення з площиною загального положення

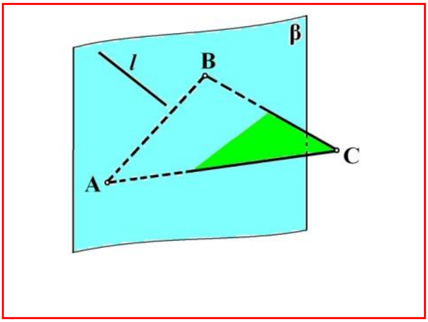
В 4.2.1, 4.2.2 розглянуто приклади перетину прямої з площиною, коли одна з них є проєкціюючою. В цих прикладах одну проєкцію точки перетину визначено без додаткових графічних побудов і уведення нових геометричних фігур.

При перетині прямої з площиною, коли обидві геометричні фігури займають загальне положення, визначити одну з проєкцій точки перетину без додаткових графічних побудов не є можливим. В цьому випадку для визначення точки перетину вводять допоміжну січну площину, яку проводять через задану пряму загального положення.

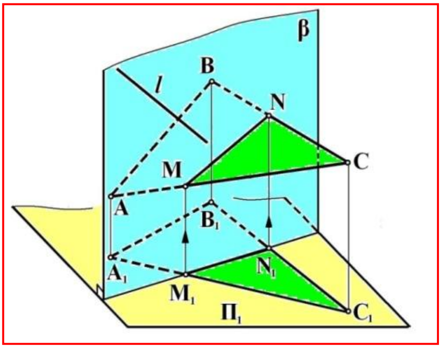
ПОСЛІДОВНІСТЬ (АЛГОРИТМ) ВИЗНАЧЕННЯ ТОЧКИ ПЕРЕТИНУ ПРЯМОЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ З ПЛОЩИНОЮ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ (на наочному зображенні):



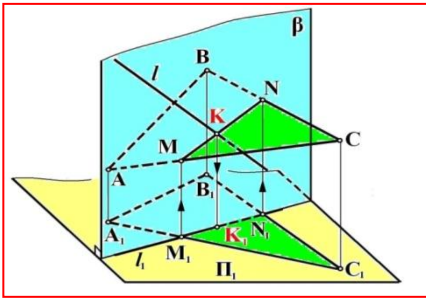
Початкова умова задачі. Побудувати точку K перетину прямої загального положення *l* з площиною загального положення, яку задано трикутником ABC.



1 дія:
Через пряму *l* проводимо допоміжну січну площину β.



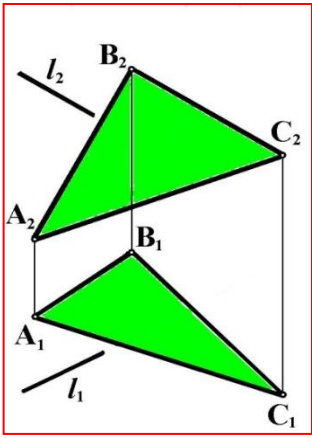
2 дія:
Будуємо лінію перетину MN допоміжної площини β із площиною, заданою трикутником ABC.



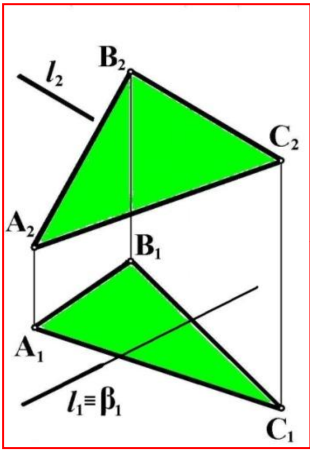
3 дія:
Знаходимо точку К перетину заданої прямої *l* з побудованою лінією перетину MN, яка і буде шуканою точкою

перетину прямої загального положення *l* із площиною загального положення, заданою трикутником ABC (К = *l*∩MN = *l* ∩ трикутник ABC).
Примітка. Пряма l і лінія MN лежать в одній площині β, тому вони перетинаються в точці ***К.***

ПОСЛІДОВНІСТЬ (АЛГОРИТМ) ВИЗНАЧЕННЯ ТОЧКИ ПЕРЕТИНУ ПРЯМОЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ З ПЛОЩИНОЮ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ (на епюрі):



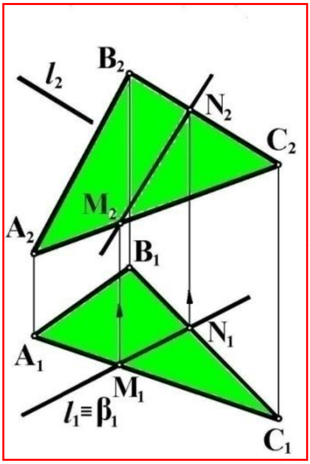
Початкова умова задачі. Побудувати точку К перетину прямої загального положення l з площиною загального положення, яку задано трикутником АВС.



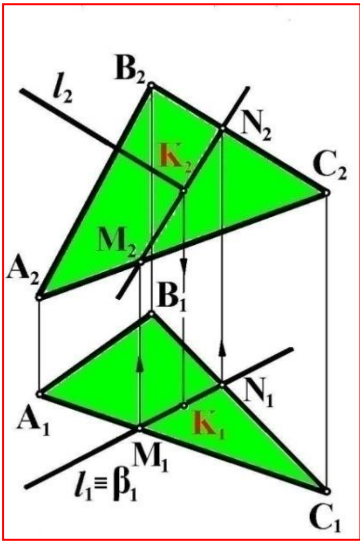
1 дія:

Через пряму l проводимо допоміжну січну площину β: $l_1 \equiv \beta_1 \Rightarrow l \in \beta$.

Січна площина β є горизонтально-проєкціюючою. Вибір її обумовлено тим, що лінія її перетину із заданою площиною будується простіше, ніж при проведенні через пряму l площини загального положення. Тому під час розв'язування таких задач через пряму проводять, як правило, не площину загального положення, а проєкціюючу.



2 дія:
Будуємо лінію перетину MN допоміжної горизонтально-проєкціюючої площини β із заданою трикутником ABC:
$M_1N_1 \equiv \beta_1$, а M_2N_2 знайдено за допомогою ліній проєкційного зв'язку за умови, що MN належить площині трикутника ABC.



3 дія:
Знаходимо точку К перетину заданої прямої *l* з побудованою лінією перетину MN, яка і буде шуканою точкою перетину прямої загального положення *l* із площиною загального положення, заданою трикутником ABC (К = *l* ∩ MN = *l* ∩ трикутник ABC).
Примітка. Пряма l і лінія MN лежать в одній площині β, тому вони перетинаються в точці К.

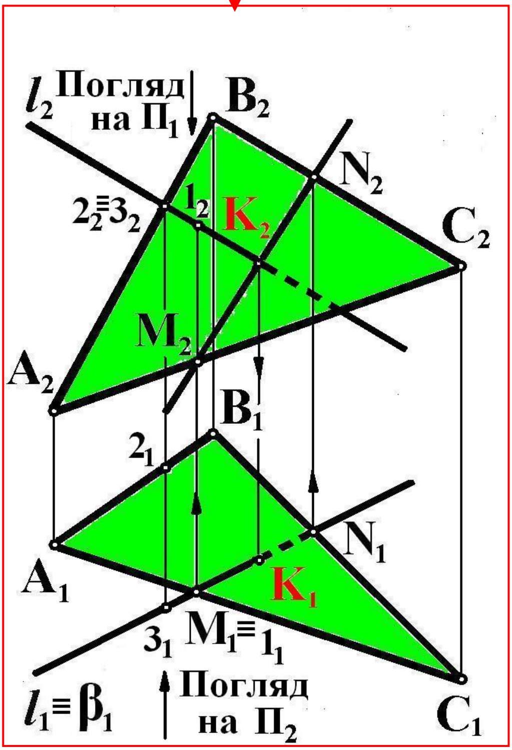
Визначення видимості прямої l відносно трикутника ABC:

1. Видимість на горизонтальній проєкції визначено за допомогою конкуруючих точок M і 1, горизонтальні проєкції яких M_1 і 1_1 збігаються та знаходяться в точці перетину l_1 з A_1C_1 горизонтальної проєкції $A_1B_1C_1$ (на стику горизонтальних проєкцій прямої та площини трикутника).

$M \in AC$, $1 \in l$, видимою на Π_1 буде точка 1.

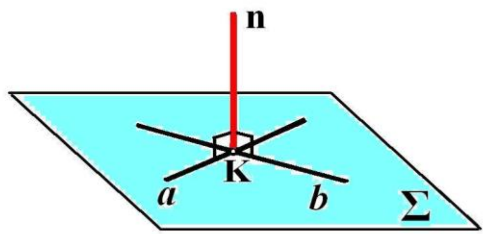
2. Видимість на фронтальній проєкції визначено за допомогою конкуруючих точок 2 і 3, фронтальні проєкції яких 2_2 і 3_2 збігаються та знаходяться в точці перетину l_2 з A_2B_2 фронтальної проєкції $A_2B_2C_2$ (на стику фронтальних проєкцій прямої та площини трикутника).

$2 \in AB$, $3 \in l$, видимою на Π_2 буде точка 3.



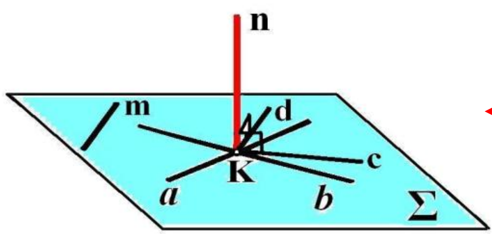
4.4. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ, ДВОХ ПЛОЩИН

Ознака перпендикулярності прямої до площини: *пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, цієї площини.*



Точка К – точка перетину прямої n з площиною Σ. В цій точці перетинаються прямі *a* і *b* площини Σ.

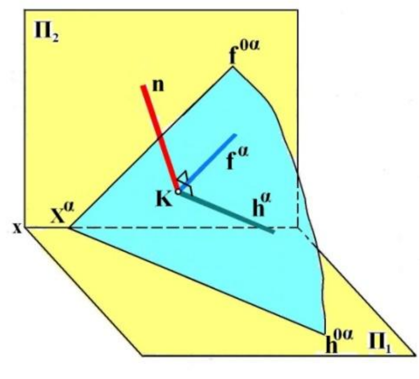
Пряма n перпендикулярна до площини Σ, оскільки вона перпендикулярна до двох прямих *a* і *b*, що перетинаються, цієї площини.



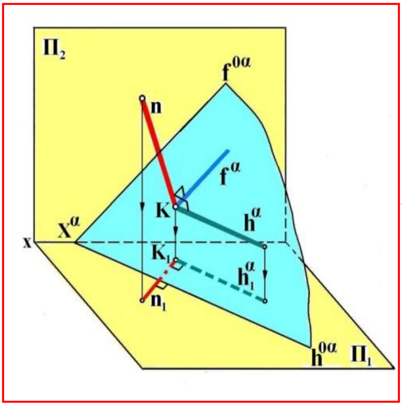
Площину Σ можна розглядати як геометричне місце (множину) прямих, перпендикулярних до прямої n.

Оскільки $n \perp \Sigma$, то, можна сказати, що задана площина Σ перпендикулярна до прямої n. Це означає, що довільна пряма, наприклад *с*, площини Σ, що проходить через точку К, буде перпендикулярною до прямої n. Пряма m, яка не проходить через точку К, також буде перпендикулярною до прямої n, незважаючи на те, що m і n є мимобіжними прямими, оскільки кут між мимобіжними прямими дорівнює куту між паралельними до них прямими, що перетинаються.

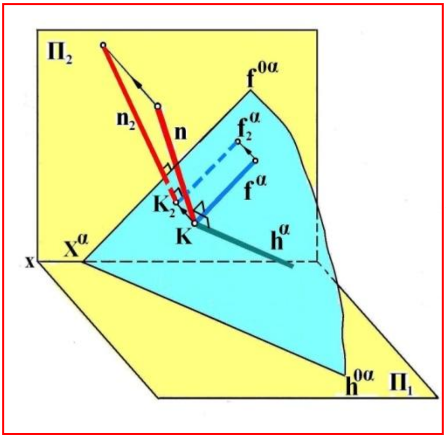
При проведенні на епюрі прямої, перпендикулярної до площини, в останній вибирають не будь-які дві прямі, що перетинаються, а прямі рівня. Це обумовлено тим, що за правилом проєкціювання прямого кута (див. 2.7), прямий кут, утворений двома прямими, одна з яких є прямою рівня, проєкціюється на площину проєкцій, до якої пряма рівня паралельна, також прямим кутом.



Пряма n перпендикулярна до площини α, яку задано слідами $h^{0\alpha}$ і $f^{0\alpha}$, оскільки вона перпендикулярна до прямих рівня цієї площини – горизонталі h^{α} і фронталі f^{α}, які перетинаються в точці К: $n \perp h^{\alpha}, f^{\alpha}$; $K = h^{\alpha} \cap f^{\alpha} \Rightarrow \; n \perp \alpha(h^{\alpha} \cap f^{\alpha})$.

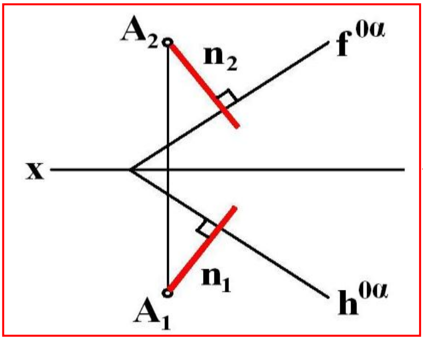


Горизонтальна проекція n_1 прямої n перпендикулярна до горизонтальної проекції h_1^α горизонталі h^α або до горизонтального сліду $h^{0\alpha}$ площини α: $n_1 \perp h_1^\alpha, h^{0\alpha}$.

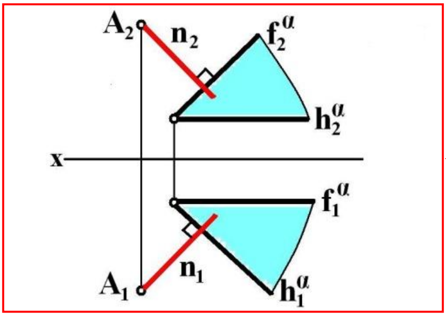


Фронтальна проєкція n_2 прямої n перпендикулярна до фронтальної проєкції f_2^α фронталі f^α або до фронтального сліду $f^{0\alpha}$ площини α: $n_2 \perp f_2^\alpha, f^{0\alpha}$.

На епюрі проєкції прямої, перпендикулярної до площини, проводять: горизонтальну – перпендикулярно до горизонтальної проєкції горизонталі площини або до її горизонтального сліду; фронтальну – перпендикулярно до фронтальної проєкції фронталі площини або до її фронтального сліду: $n_1 \perp h_1^\alpha, h^{0\alpha}$; $n_2 \perp f_2^\alpha, f^{0\alpha}$



Пряма n перпендикулярна до площини α, оскільки $n_1 \perp h^{0\alpha}$ і $n_2 \perp f^{0\alpha}$.



Пряма n перпендикулярна до площини α, оскільки $n_1 \perp h_1^{\alpha}$ і $n_2 \perp f_2^{\alpha}$.

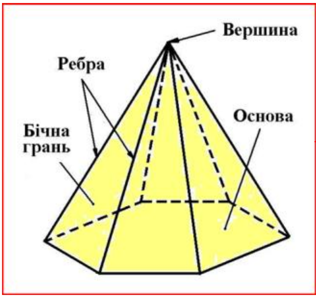
Ознака перпендикулярності двох площин: ***дві площини перпендикулярні, якщо одна з них містить пряму, перпендикулярну до іншої площини.*** **Можна сказати і таким чином: дві площини перпендикулярні, якщо одна з них проходить через пряму, перпендикулярну до іншої площини.**

ЛЕКЦІЯ 5. ПОВЕРХНІ. ТОЧКА НА ПОВЕРХНІ.

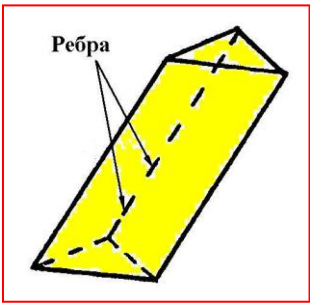
5.1. Багатогранні поверхні та їх зображення
5.2. Криві поверхні та їх зображення

5.1. БАГАТОГРАННІ ПОВЕРХНІ ТА ЇХ ЗОБРАЖЕННЯ

Багатогранною поверхнею називається поверхня, яка утворена відтинками площин, що перетинаються. **Багатогранником** називається тіло, обмежене багатогранною поверхнею, яка складається з плоских багатокутників. Відтинки площин називають **гранями**, в лінії їх перетину – **ребрами**. Точки перетину ребер називають **вершинами**.
Найбільш поширені багатогранники – піраміди та призми.



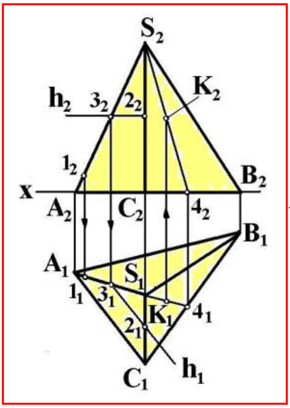
Піраміда – багатогранник, у якого одна грань (основа) – є будь-який багатокутник, а бічні грані – трикутники, що сходяться в одній точці – вершині піраміди.



Призма – багатогранник, всі ребра якого паралельні між собою.

Зображення багатогранника зводиться до зображення його ребер та вершин.

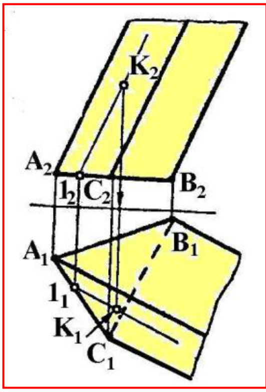
Лінія, яка обмежує проєкцію багатогранника, називається обрисом поверхні багатогранника. Обрис поверхні – завжди видима лінія, вона позначається суцільною основною лінією.



На горизонтальній проєкції обрисом піраміди ABCS є лінія $A_1B_1C_1$, а на фронтальній проекції – лінія $A_2B_2S_2$.

Точка і пряма лінія на поверхні багатогранника визначається так, як і в площині.

Точка 1 належить ребру AS, де горизонтальну проєкцію точки знайдено за допомогою лінії проєкційного зв’язку. Точка 2 належить ребру SC, проте горизонтальну проєкцію точки визначити за допомогою лінії проєкційного зв’язку неможливо, оскільки SC – відрізок профільної прямої, паралельної до площини $П_3$ (у цієї прямої проєкції розміщені на одній лінії, перпендикулярній до осі *x*). В даному випадку горизонтальну проєкцію 2_1 знайдено за допомогою прямої 23, яка проведена в грані ASC піраміди паралельно до сторони AC основи і тому є горизонталлю *h*. Точка К лежить в середині грані BCS, і її фронтальну проєкцію K_2 знайдено за допомогою прямої S4, проведеної в грані BCS. Точка К розміщена на прямій S4 грані BCS і тому належить поверхні піраміди.



На рисунку зображена трикутна призма, нижня основа якої паралельна до горизонтальної площини проєкцій, а верхня не показана. Відома фронтальна проєкція K_2 точки К, що знаходиться на поверхні призми. Оскільки K_2 є видимою, то точка К знаходиться в грані призми, що примикає до сторони АС. Горизонтальну проєкцію K_1 знайдено за допомогою прямої К1, що проведена паралельно до бічних ребер призми.

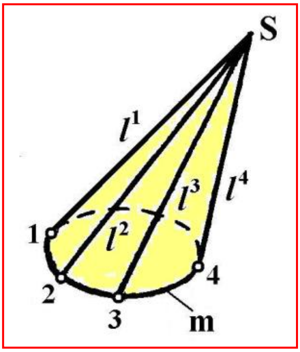
5.2. КРИВІ ПОВЕРХНІ ТА ЇХ ЗОБРАЖЕННЯ

Криві поверхні можна розглядати як сукупність безперервних положень лінії, що називається твірною, яка переміщується по напрямній лінії.

Залежно від виду твірної криві поверхні поділяються на 2 класи: лінійчасті (твірна – пряма лінія) та нелінійчасті або криволійні (твірна – крива лінія).

5.2.1. Конічна поверхня

Конічна поверхня - це лінійчаста поверхня, що утворена рухом прямолінійної твірної *l* уздовж криволійної напрямної *m*, і яка в усіх своїх положеннях перетинає напрямну, причому всі твірні (l^1, l^2, l^3 і т.д.) перетинаються в точці S, яка називається вершиною.



Криві поверхні, зокрема конічні, зображуються на площинах проекцій своїми обрисами поверхні

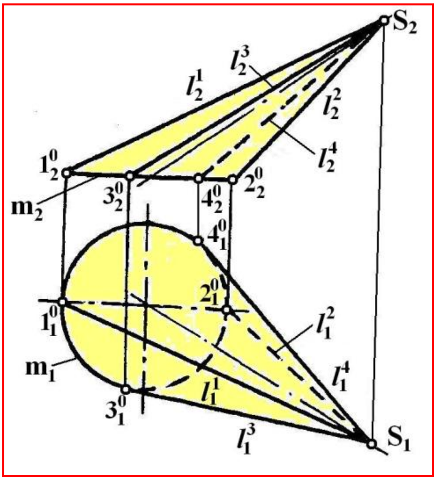
На рисунку зображено обриси геометричного тіла – похилого кругового конуса (еліптичного конуса), обмеженого конічною поверхнею і площиною (основою конуса), що перетинає всі твірні поверхні, причому лінія m називається лінією основи конуса.

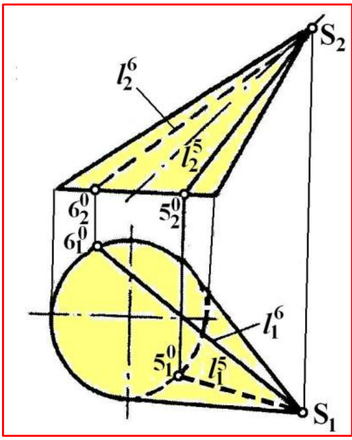
Показано проєкції обрисових твірних l^1, l^2 (на фронтальній проєкції) і l^3, l^4 (на горизонтальній проєкції). Ці твірні проходять через вершину S і перетинають лінію основи *m* в точках 1_0, 2_0, 3_0, 4_0.

Точки лінії основи m, через які проходять обрисові твірні, ділять лінію основи на видиму та невидиму частини. Так, на горизонтальній проєкції твірні l^3 і l^4 ділять горизонтальну проекцію m_1 в точках 3_1^0 і 4_1^0 на видиму та невидиму частини.

На горизонтальній проекції твірні, що перетинають лінію основи між точками 3_1^0- 2_1^0 – 4_1^0 – невидимі (перетинають невидиму зверху частину лінії основи *m*), а між точками 3_1^0- 1_1^0 – 4_1^0 – видимі.

Твірні, які на горизонтальній проєкції перетинають лінію основи *m* між точками 1_1^0 – 3_1^0 – 2_1^0, на фронтальній проєкції видимі, а ті твірні, які перетинають лінію основи між точками 1_1^0 – 4_1^0 – 2_1^0,– невидимі.

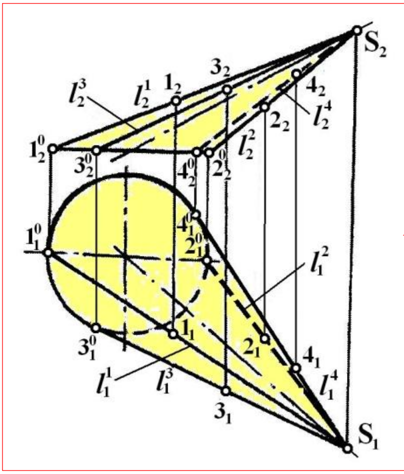




На рисунку показано видимість твірних l^5 і l^6, які проведено в середині обрису конічної поверхні.

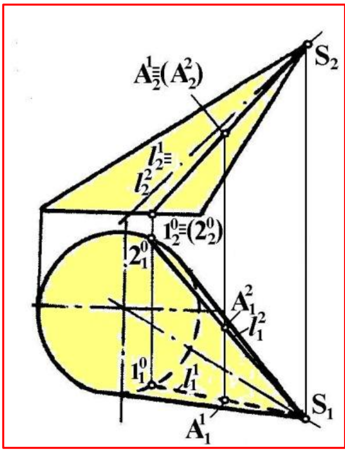
Точка належить поверхні, зокрема конічній, якщо вона знаходиться на лінії цієї поверхні. Точка на конічній поверхні визначається за допомогою твірної, що проходить через цю точку, перетинаючи вершину S і лінію основи m.

Точці, яка лежить на обрисовій твірній, відповідає одна точка поверхні конуса.



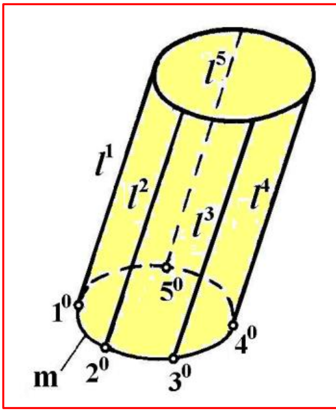
На рисунку показано проєкції точок 1,2,3,4, що лежать на відповідних обрисових твірних l^1, l^2, l^3, l^4 конічної поверхні.

Якщо лінія основи є замкненою лінією, наприклад колом, то точка, що задана на одній проєкції в середині обрису, визначає положення двох точок поверхні геометричного тіла.



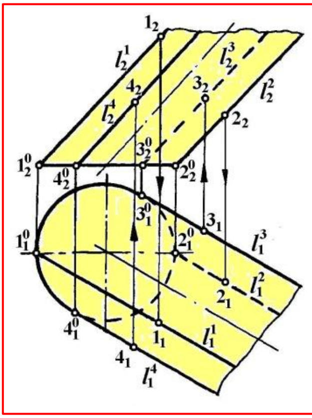
На рисунку точці А, що зазначена в середині обрису на фронтальній проєкції, відповідають дві точки поверхні A^1 і A^2, фронтальні проєкції яких збігаються ($A_2^1 \equiv A_2^2$). Ці точки лежать на твірних l^1 і l^2. Видимість точок A^1 і A^2 на горизонтальній проєкції визначена за видимістю твірних l^1 і l^2.

5.2.2. Циліндрична поверхня

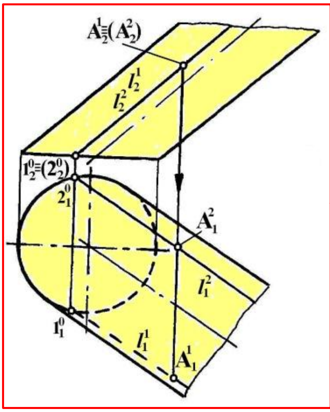


Циліндрична поверхня - це лінійчаста поверхня, яка утворена паралельним рухом прямолінійної твірної *l* уздовж криволійної напрямної *m*, причому всі твірні (l^1, l^2, l^3 і т.д.) паралельні між собою і перетинають напрямну *m* в точках 1^0, 2^0, 3^0 і т.д.

Видимість твірних та точок на циліндричній поверхні визначається так само, як і для конічної



На рисунку показано обриси похилого кругового циліндра (еліптичного циліндра), лінія основи якого – коло (верхня основа циліндра не показана), а також проєкції обрисових твірних l^1, l^2, l^3, l^4 та проєкції точок 1,2,3,4, що на них знаходяться.

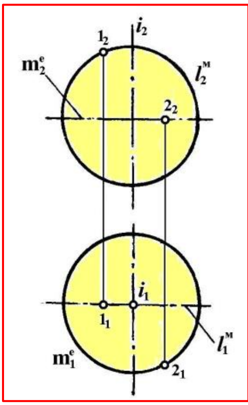


Побудова проєкцій точки А, що розміщена в середині обрису.

5.2.3. Поверхня кулі (сфера)

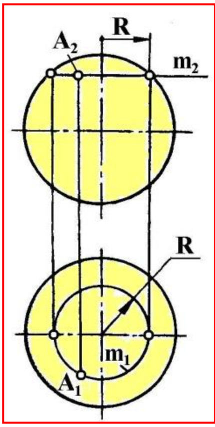
Поверхня кулі (сфера) – це нелінійчаста поверхня, утворена обертанням кола, яке є твірною, навколо осі, що збігається з діаметром кола.

Лініями обрису сфери на горизонтальних та фронтальних площинах проекцій є кола.



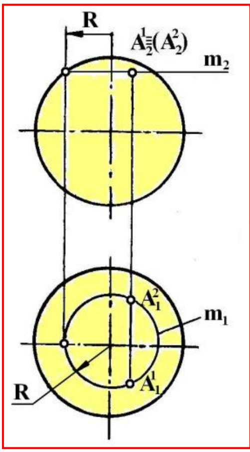
На рисунку показано обриси поверхні кулі, де зазначено: i – вісь обертання ($i \perp П_1$), $l^м$ – головний меридіан (обрис поверхні на $П_2$), $m^е$ – екватор (обрис поверхні на площині $П_1$), а також проєкції точки 1, що належить $l^м$, і точки 2, що належить $m^е$.

Поверхня кулі є поверхнею обертання, тобто точка поверхні при обертанні кулі описує коло відносно осі обертання. Ці кола називаються паралелями поверхні обертання. Найбільша паралель – це екватор.



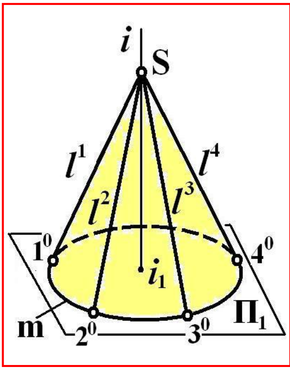
На рисунку показано, що точка A при обертанні кулі описує коло m радіуса R. Оскільки площина кола паралельна площині π_1, то коло, яке називається паралеллю, проєкціюється на $П_1$ в натуральну величину.

Точка на поверхні кулі, яка знаходиться в середині обрису, визначає положення двох точок поверхні і будується за допомогою паралелей поверхні кулі.

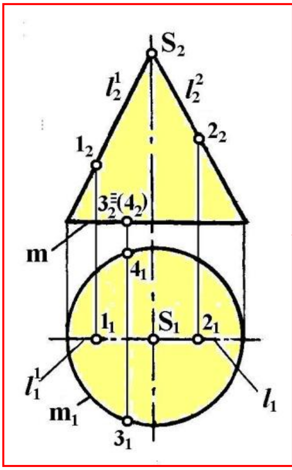


На рисунку точка A, зазначена в середині обрису кулі, визначає положення двох точок A^1 і A^2 поверхні кулі, причому горизонтальні проєкції A_1^1 і A_1^2 побудовані за допомогою паралелі *m* радіуса R.

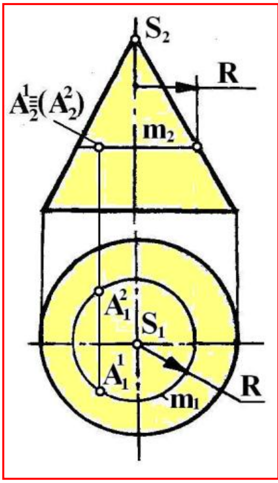
5.2.4. Поверхня прямого кругового конуса (конуса обертання)



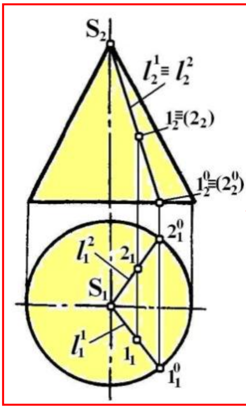
Поверхня прямого кругового конуса утворена обертанням прямолінійної твірної *l* (рис. 5.28) навколо осі *i*, що перпендикулярна до площини $П_1$, і є висотою конуса. Якщо поверхню прямого кругового конуса перетнути площиною, паралельною до $П_1$, то лінією основи m конуса буде коло.



На рисунку зображено прямий круговий конус або конус обертання, на поверхні якого зазначені проєкції точок 1 і 2, що лежать на обрисових твірних l^1 і l^2, а також проєкції точок 3 і 4, що знаходяться на лінії основи m.



Оскільки ця поверхня є поверхнею обертання, то точку на поверхні конуса можна визначити за допомогою паралелі. На рисунку горизонтальні проєкції точок A^1 і A^2 визначені за допомогою паралелі m.



Точку на поверхні такого конуса можна визначити також і за допомогою твірної поверхні. Так, на рисунку горизонтальні проєкції точок 1 і 2 визначені за допомогою твірних l^1 і l^2.

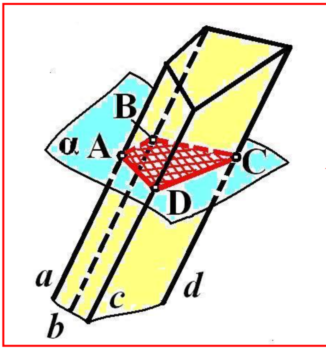
Примітка: точці, зазначеній в середині обрису на фронтальній проєкції конуса, відповідають дві точки поверхні.

Лекція 6. Перетин поверхонь з площиною

6.1. Перетин поверхні багатогранника з площиною
6.2. Перетин кривої поверхні з площиною

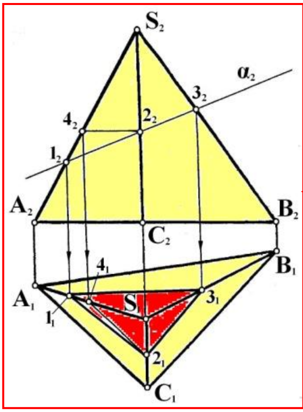
6.1. ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ БАГАТОГРАННИКА З ПЛОЩИНОЮ

Лінія перетину поверхні багатогранника з площиною – плоский замкнений багатокутник, який може бути побудований шляхом визначення його вершин як точок перетину ребер багатогранника із заданою площиною. Видимими будуть ті сторони многокутника лінії перетину, які належать видимим граням багатогранника.

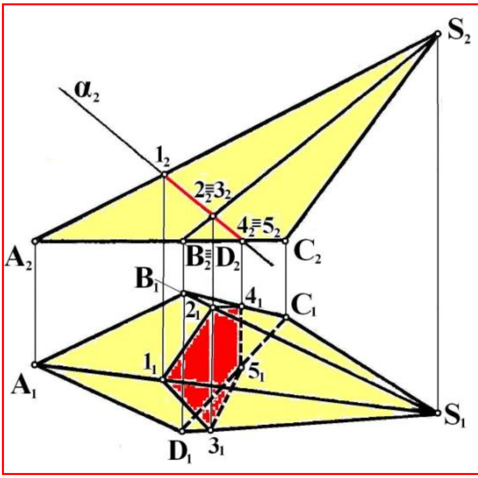


На рисунку замкнена лінія ABCDA є лінією перетину призми з площиною α. Чотири вершини чотирикутника лінії перетину визначені як точки перетину ребер *a*, *b*, *c*, *d* призми з площиною α: $A = a \cap \alpha$, $B = b \cap \alpha$, $C = c \cap \alpha$, $D = d \cap \alpha$.

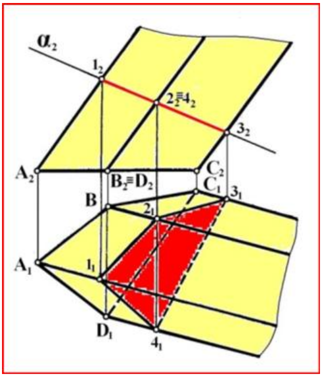
Якщо січна площина є проєкціюючою, то одна проєкція її лінії перетину з поверхнею багатогранника збігається зі слідом-проєкцією січної площини



На рисунку побудована лінія перетину піраміди ABCS з фронтально-проєкціюючими площинами α.
Лінією перетину є трикутник 123, оскільки три бічні ребра піраміди перетинають площину α. Горизонтальні проєкції 1_1 і 3_1 отримано за допомогою ліній проєкційного зв’язку, а точку 2_1 визначено за допомогою горизонталлі 24.

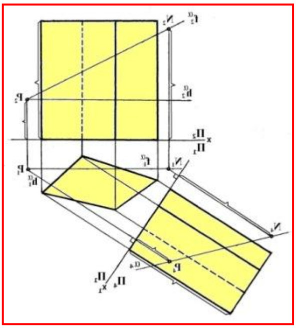


Лінією перетину піраміди ABCDS з площиною α є плоский п’ятикутник 12345, оскільки площину α перетинають три бічні ребра AS, BS, DS та дві сторони лінії основи BC і DC.

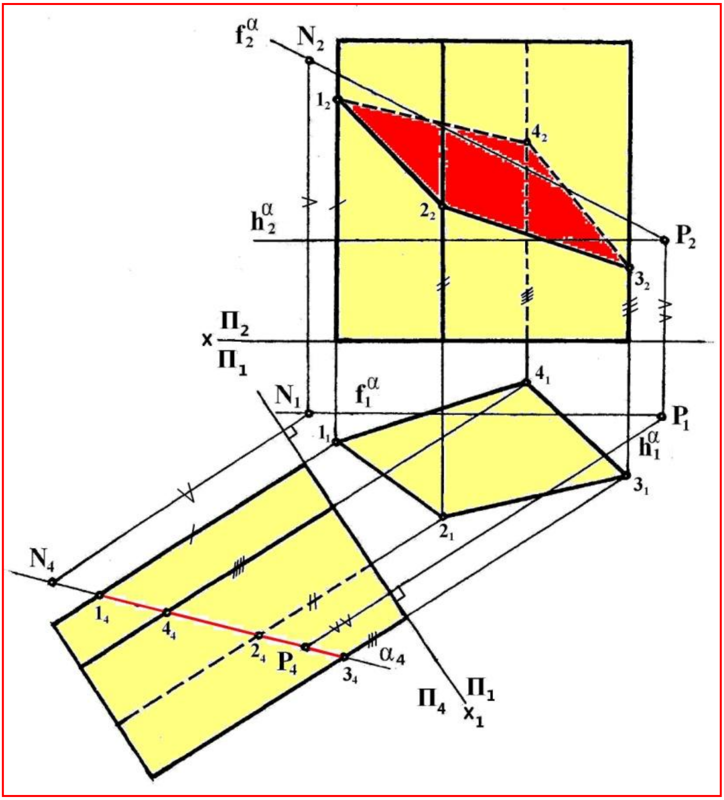


Лінією перетину призми з площиною α є плоский чотирикутник 1234, оскільки площину α перетинають чотири бічні ребра.

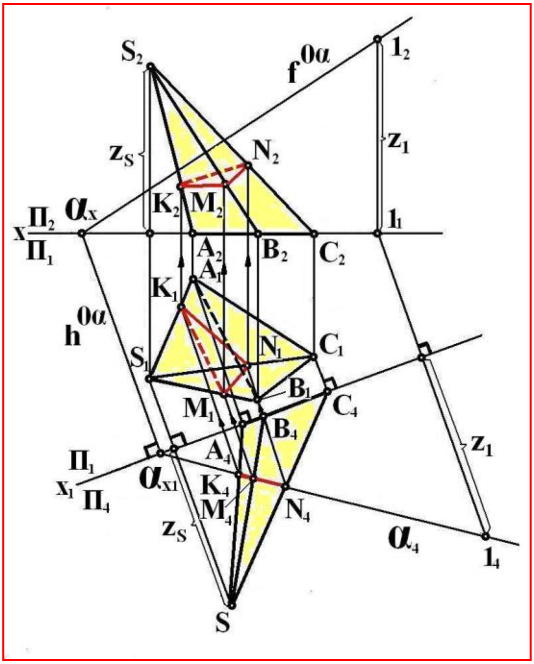
Якщо січною площиною є площина загального положення, то для побудови лінії перетину можна застосовувати спосіб заміни площин проєкцій, за допомогою якого січна площина загального положення перетворюється у новій системі площин проєкцій в проєкціюючу. Це дозволяє тільки за допомогою ліній проєкційного зв’язку визначити проєкції лінії перетину у старій (заданій) системі площин проєкцій.



Перетворення площини загального положення α, що задана лініями рівня, в проєкціюючу площину в новій системі площин проєкцій $П_4/П_1$, а також побудова нової проєкції призми на площині $П_4$.



Побудова лінії перетину 1234 призми з площиною загального положення α ($h^\alpha \cap f^\alpha$) за допомогою способу заміни площин проєкцій



Побудова лінії перетину KMN піраміди ABCS з площиною загального положення α, що задана слідами $h^{0\alpha}$ і $f^{0\alpha}$, за допомогою способу заміни площин проєкцій

6.2. ПЕРЕТИН КРИВОЇ ПОВЕРХНІ З ПЛОЩИНОЮ

Для побудови лінії перетину конічної поверхні з площиною, як і іншої кривої поверхні, визначають проєкції окремих точок лінії перетину і плавно їх з'єднують.

Серед характерних (особливих) точок лінії перетину виділимо точки видимості, які знаходяться на обрисових лініях поверхні, або лежать на лініях, що обмежують площини основ поверхні. В цих точках може змінюватися видимість лінії перетину, крива лінія може переходити в пряму лінію тощо.

Якщо площина, що перетинає криву поверхню, проєкціююча, то одна проєкція лінії перетину збігається зі слідом-проєкцією проєкціюючої площини, а іншу проєкцію можна знайти за допомогою твірних (для конічної та циліндричної поверхонь), а для поверхонь кулі та прямого кругового конуса, які є поверхнями обертання, за допомогою паралелей, які проєкціюються у вигляді простих ліній – кіл та прямих ліній.

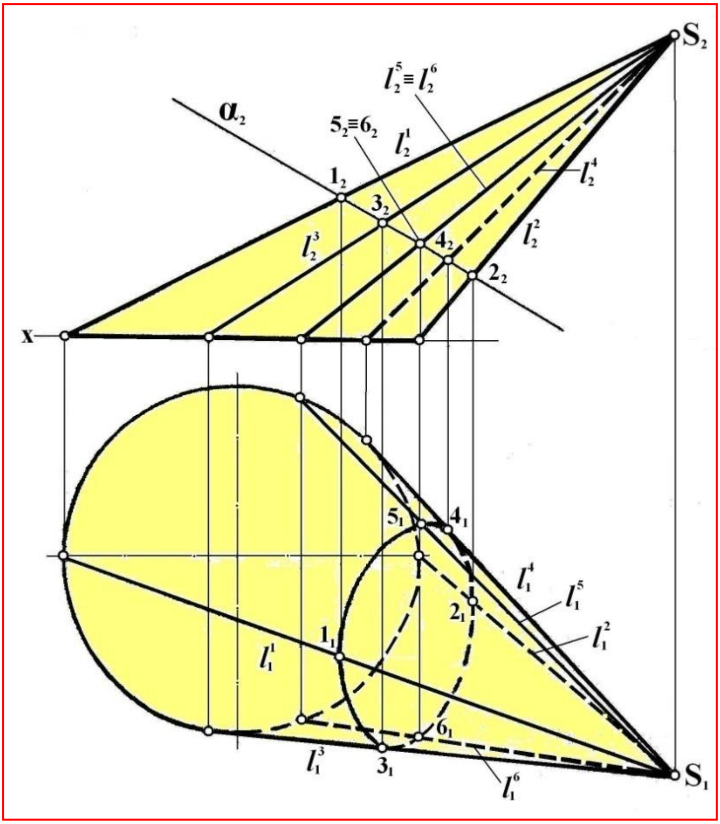
На рисунку побудувано лінію перетину похилого кругового конуса (еліптичного конуса) з фронтально-проєкціюючою площиною α.

Розв'язування:

1. Оскільки фронтальна проєкція лінії перетину збігається зі слідом-проєкцією α_2 площини α, то на фронтальній проєкції вибираємо фронтальні проєкції точок лінії перетину і за допомогою твірних конічної поверхні знаходимо їх горизонтальні проєкції.

Визначаємо характерні точки лінії перетину – точки, які лежать на обрисових твірних: $1 \in l^1$, $2 \in l^2$, $3 \in l^3$, $4 \in l^4$. Для точок 1 і 2 спочатку фіксуємо їх фронтальні проєкції, а потім за допомогою обрисових твірних l^1 і l^2 знаходимо їх горизонтальні проєкції 1_1 і 2_1. В точках 3_1 і 4_1 на горизонтальних проєкціях обрисових твірних l^3 і l^4 буде мінятися видимість лінії перетину, тому для визначення положення точок 3_1 і 4_1 будуємо фронтальні проєкції твірних l^3 і l^4, фіксуємо 3_2 і 4_2 ($3_2 = l_2^3 \cap \alpha_2$, $4_2 = l_2^4 \cap \alpha_2$), а потім за допомогою ліній проєкційного зв'язку знаходимо на l_1^3 і l_1^4 горизонтальні проєкції 3_1 і 4_1.

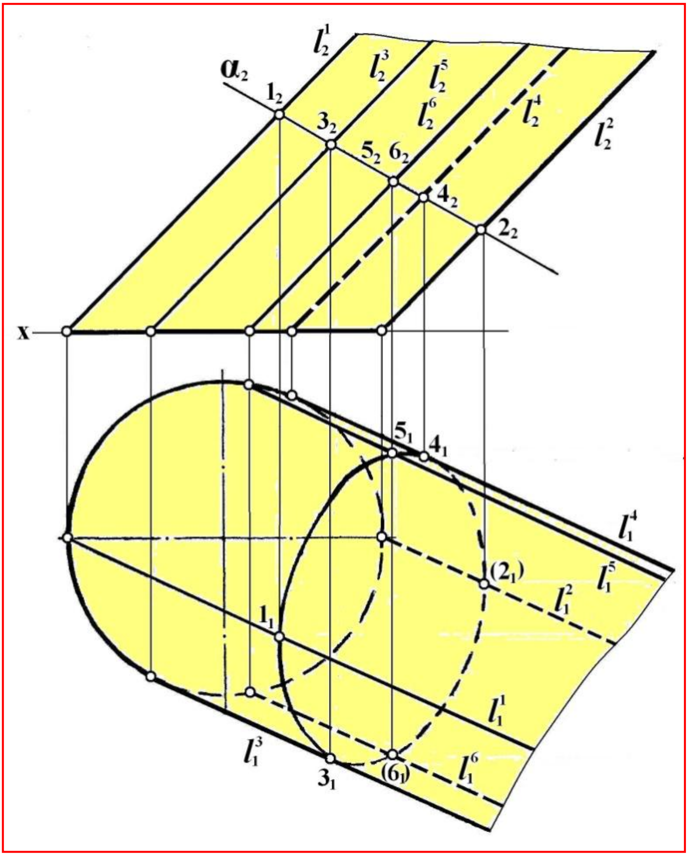
2. Горизонтальні проєкції проміжних точок 5 і 6 визначаємо за допомогою твірних l^5 і l^6 (точка, що зазначена в середині обрису конічної поверхні, визначає положення



двох точок поверхні, тому фіксуємо $5_2 \equiv 6_2$).

3. Отримані горизонтальні проєкції точок 1,2,3,4,5,6 з’єднуємо плавною лінією з урахуванням їх видимості – видимими будуть ті точки лінії перетину, які лежать на твірних, видимих на горизонтальній проєкції.

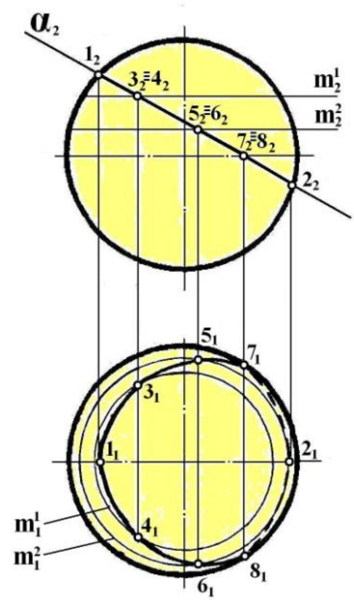
Точки 1_1, 5_1 є видимими, а точки 2_1, 6_1 – невидимими, в точках 3_1 і 4_1, які лежать на обрисових твірних l_3 і l_4, змінюється видимість лінії перетину.



На рисунку побудовано лінію перетину похилого кругового циліндра (еліптичного циліндра) з фронтально-проєкціюючою площиною α.

Під час розв’язування цієї задачі потрібно враховувати, що твірні циліндричної поверхні між собою.

На рисунку побудувано лінію перетину поверхні кулі з фронтально-проєкціюючою площиною α.



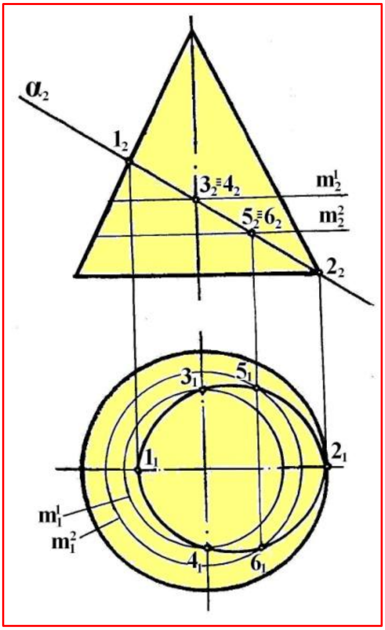
<u>Розв'язування</u>:

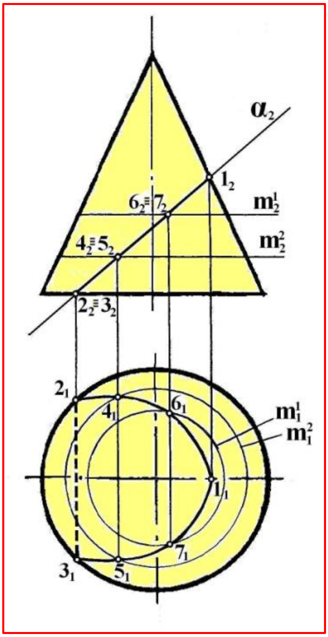
1. На фронтальній проєкції фіксуємо 1_2 і 2_2 точок, що лежать на головному меридіані. Головний меридіан є обрисовою лінією на фронтальній проєкції. За допомогою ліній проєкційного зв'язку знаходимо 1_1 і 2_1.

2. На фронтальній проєкції фіксуємо точки $7_2 \equiv 8_2$ і за допомогою лінії проєкційного зв'язку знаходимо їх горизонтальні проєкції 7_1 і 8_1. В цих точках змінюється видимість горизонтальної проєкції лінії перетину (точки 7, 8 лежать на обрисовій на горизонтальній проєкції лінії - екваторі , що є найбільшою паралеллю).

3. Фіксуємо фронтальні проєкції 3_2,4_2 і 5_2,6_2 проміжних точок 3,4 і 5,6. Оскільки точки зазначені в середині обрису, то $3_2 \equiv 4_2$ і $5_2 \equiv 6_2$. За допомогою паралелей m^1 і m^2 визначаємо горизонтальні проєкції 3_1,4_1 і 5_1,6_1.

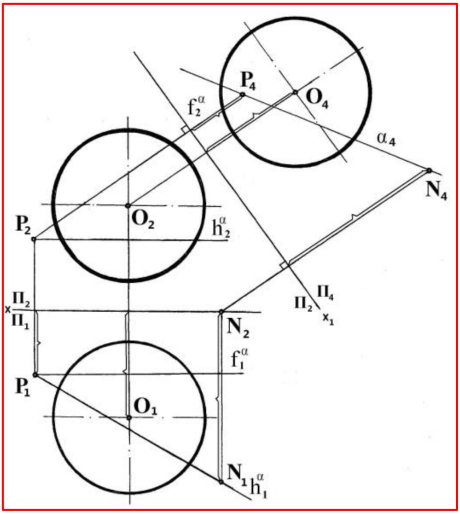
4. З'єднуємо горизонтальні проєкції точок лінії перетину плавною лінією з урахуванням їх видимості.



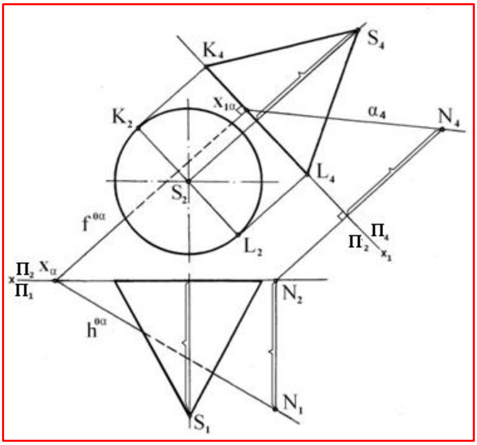


На рисунках побудовано лінії перетину прямих кругових конусів (конусів обертання) з фронтально-проєкціюючими площинами α. Горизонтальні проєкції проміжних точок (точок, що не лежать на обрисових лініях) знайдено за допомогою паралелей m^1 і m^2.

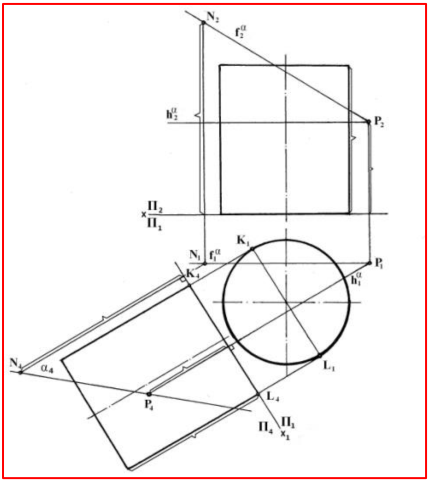
При перетині кривої поверхні з площиною загального положення для визначення лінії перетину можна застосовувати спосіб заміни площин проєкцій, перетворюючи задану площину загального положення в проєкціюючу.



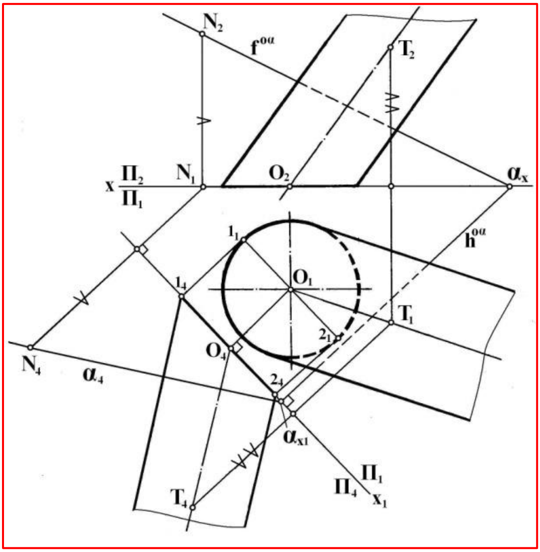
Перетворення площини загального положення α, що задана лініями рівня, в проєкціюючу площину в новій системі площин проєкцій П4/П2, а також побудова нової проєкції поверхні кулі на площині П4



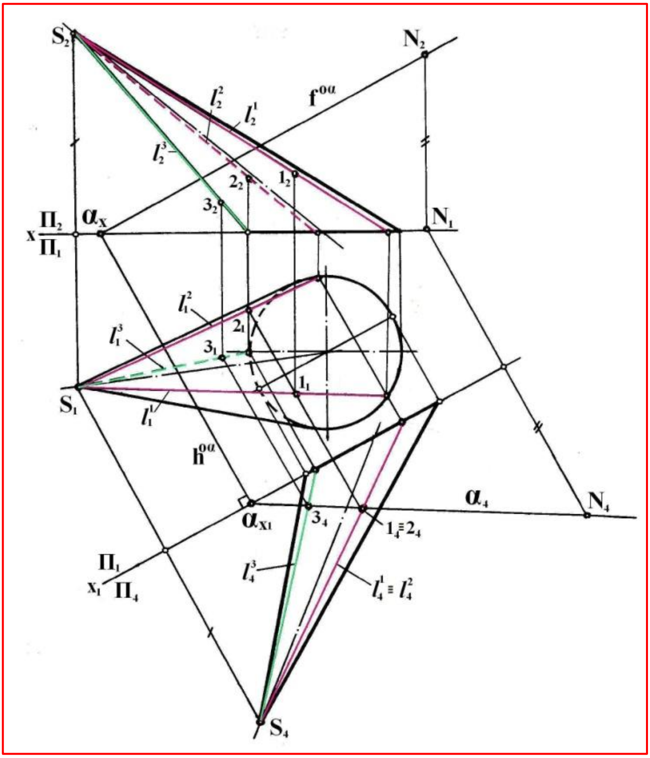
Перетворення площини загального положення α, що задана слідами, в проєкціюючу площину в новій системі площин проєкцій П4/П2, а також побудова нової проєкції конуса обертання на площині П4



Перетворення площини загального положення α, що задана лініями рівня, в проєкціюючу площину в новій системі площин проєкцій $П_4/П_2$, а також побудова нової проєкції прямого кругового циліндра на площині $П_4$



Перетворення площини загального положення α, що задана слідами, в проєкціюючу площину в новій системі площин проекцій $П_4/П_1$, а також побудова нової проєкції похилого кругового циліндра на площині $П_4$

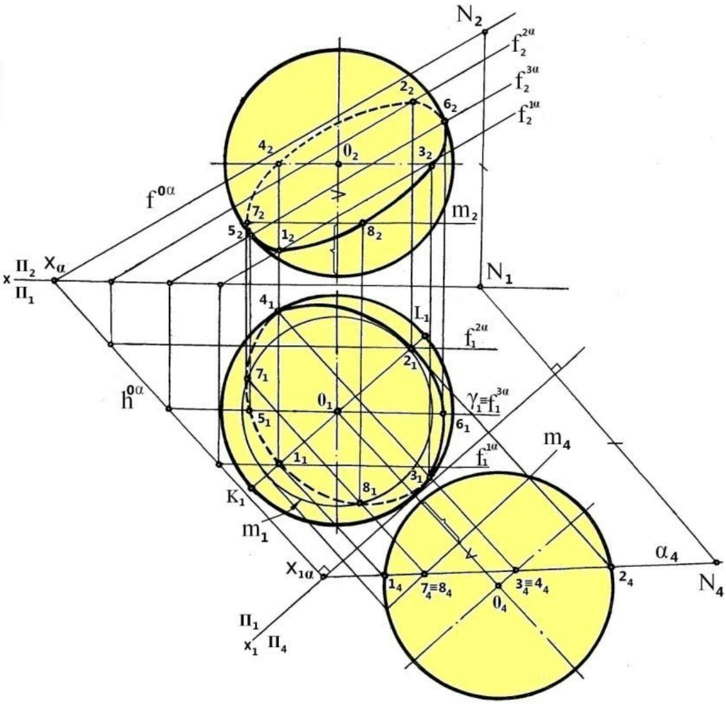


На рисунку показано, як знайдено точки 1,2,3, що належать лінії перетину похилого кругового конуса з площиною загального положення $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{o\alpha})$. Застосовуючи спосіб заміни площин проєкцій, провівши $x_1 \perp h^{0\alpha}$, отримаємо, що площина α в новій системі площин проєкцій Π_4/Π_1 становиться проєкціюючою, перпендикулярною до Π_4, де α_4 – слід-проєкція площини α. На α_4, що розміщена в межах обрису поверхні конуса, взято точки проєкції 1_4, 2_4 точок 1, 2, що належать лінії перетину. Проєкції 1_1, 2_1 і 1_2, 2_2 в старій (заданій) системі Π_2/Π_1 знайдено за допомогою твірних l^1 і l^2.

В точці 3_2 змінюється видимість фронтальної проєкції лінії перетину. Для її визначення спочатку будуємо проєкції l^3 на $П_1$, а потім на $П_4$. Визначаємо точку 3_4: $3_4 = l_4^3 \cap \alpha_4$. Далі за допомогою ліній проєкційного зв'язку знаходимо 3_1 на l_1^3, а потім 3_2 на l_2^3.

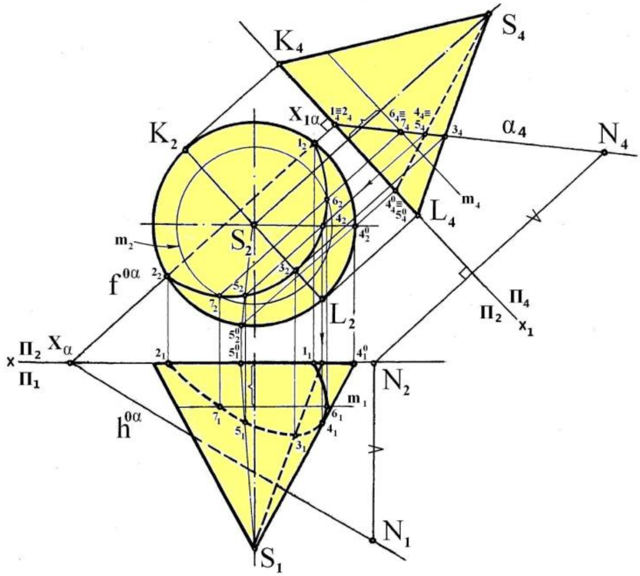
Наведемо приклади побудови лінії перетину кривої поверхні з площиною загального положення за допомогою способу заміни площин проєкцій.

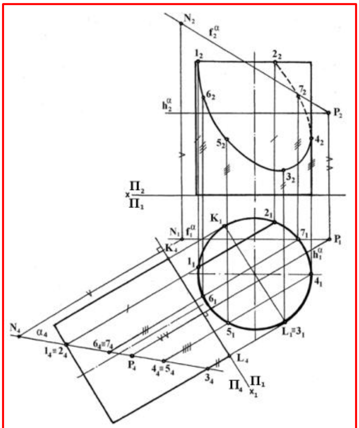
На рисунку побудовано лінію перетину поверхні кулі (сфери) з площиною загального положення $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$. Дамо пояснення до виконання цієї задачі. За допомогою способу заміни площин проєкцій площину загального положення α перетворюємо в проєкціюючу в системі $П_4/П_1$ і знаходимо проєкцію сфери на $П_4$. Відмічаємо точки 1_4 і 2_4 перетину α_4 з обрисом сфери на $П_4$. Між точками 1_4 і 2_4 знаходиться проєкція на $П_4$ лінії перетину сфери з площиною $\alpha(h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha})$. Горизонтальні проєкції 1_1 і 2_1 точок 1 і 2 знаходяться на лінії K_1L_1, яка паралельна до x_1 і є горизонтальною проєкцією обрису сфери на $П_4$. За допомогою фронтальних прямих $f^{1\alpha}$ і $f^{2\alpha}$ площини α знаходимо фронтальні проєкції 1_2 і 2_2 точок 1 і 2. Точки 3 і 4 є точками видимості для горизонтальної проєкції лінії перетину. Вони знаходяться на екваторі сфери. Спочатку зафіксуємо їх проєкції 3_4 і 4_4 на проєкції екватора на $П_4$, а потім їх спроеційуємо на $П_1$ і на $П_2$. Точки 5 і 6 є точками видимості для фронтальної проєкції лінії перетину. Вони знайдені за допомогою січної площини γ, яка проходить через центр сфери і паралельно до площини $П_2$. Площина γ перетинає сферу по головному меридіану, а площину α – по фронталі $f^{3\alpha}$. В точках перетину цих ліній знайдено точки 5 і 6. Проміжні точки 7 і 8 побудовано за допомогою паралелі m.



На рисунку показано побудову лінії перетину поверхні прямого кругового конуса з площиною загального положення $\alpha(h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha})$. Точку 4, в якій міняється видимість горизонтальної проєкції лінії перетину, визначено за допомогою твірної $S4^0$, точку 3 – за допомогою твірної LS, а точку 5 – за допомогою твірної

$S5^0$, точки 6 і 7 – за допомогою паралелі m. Точки 1 і 2 знаходяться на лінії основи конуса.





На рисунку за допомогою способу заміни площин проєкцій побудовано лінію перетину поверхні прямого кругового циліндрі з площиною загального положення, що задана лініями рівня.

Лекція 7. Взаємний перетин поверхонь

7.1. Побудова лінії перетину поверхонь при проєкціюючому положенні однієї з поверхонь відносно площин проєкцій
7.2. Побудова лінії перетину поверхонь при їх загальному положенні

Залежно від розміщення поверхонь, що перетинаються, перетин може бути <u>повним</u> або <u>неповним</u>.

<u>Повним</u> називається перетин, коли <u>всі</u> твірні або ребра поверхні одного з тіл перетинають поверхню іншого тіла.

<u>Неповним</u> називається перетин, при якому <u>не всі</u> твірні або ребра поверхонь обох тіл, що перетинаються, беруть участь в перетині.

Проєкції лінії перетину повинні розміщуватися у межах обрисових ліній як однієї, так і іншою поверхні водночас

Лінія перетину поверхонь видима, якщо вона знаходиться водночас в межах видимих на епюрі поверхонь, що перетинаються.

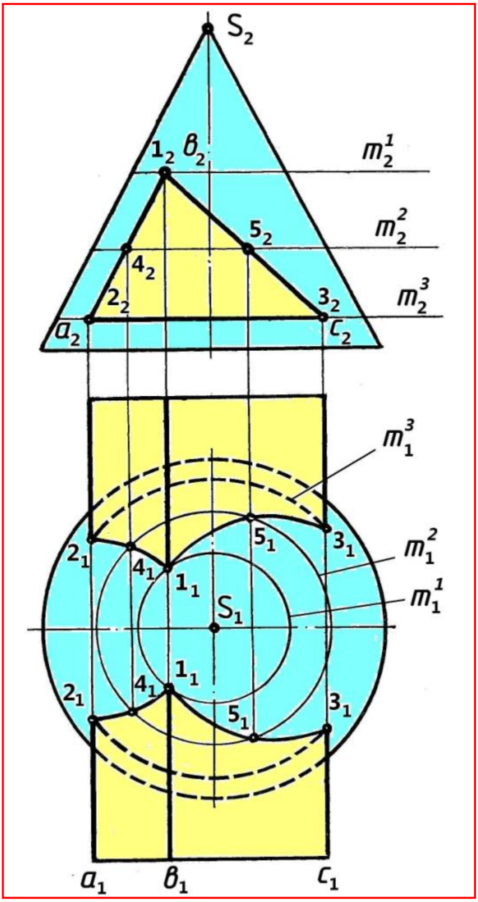
7.1. Побудова лінії перетину поверхонь при проєкціюючому положенні однієї з поверхонь відносно площин проєкцій

В цьому випадку одна проєкція лінії пертину відома – вона збігається з проєкцією поверхні на ту площину проєкцій, до якої ця поверхня перпендикулярна. Відсутню проєкцію будують за допомогою допоміжних ліній (твірних, паралелей) іншої поверхні, що займає загальне положення.

Наведемо приклади на побудову лінії перетину поверхонь, що перетинаються.

На рисунку показано побудову лінії перетину поверхні прямого кругового конуса з поверхнею прямої призми.

Перетин поверхонь є повним, оскільки всі три бічні ребра призми, що займають фронтально-проєціююче положення, перетинають поверхню конуса.



Три бічні грані призми є фронтально-проєціюючими площинами, перпендикулярними до площини π_2. Лінія перетину двох площин знаходиться в трьох бічних гранях призми і проєціюється на площину π_2 у відрізки прямих ліній, які є проєкціями граней призми на ту ж площину π_2, тобто фронтальна проєкція лінії перетину двох поверхонь збігається з фронтальною проєкцією самої призми. Послідовність побудови лінії перетину така:

1. Визначаємо характерні точки лінії перетину – це точки 1,2,3, в яких здійснюється перехід одного виду лінії перетину до іншого.

Просторова крива лінія перетину розпадається на три плоскі лінії, де точки 1,2,3 є кінцями цих ліній:

- лінія 13 знаходиться в грані (*b*//*c*) призми і є неповним еліпсом;
- лінія 12 знаходиться в грані (*a*//*b*) і є параболою, оскільки відрізок $1_2 2_2$ паралельний до обрисової твірної;
- лінія 23 знаходиться в грані (*a*//*c*) і є дугою кола, оскільки грань (*a*//*c*) паралельна до площини основи конуса.

Горизонтальні проєкції точки 1 визначено за допомогою паралелі m^1, а точок 2 і 3 – за допомогою паралелі m^3. Оскільки точці, що зазначена в середині обрису, відповідають дві точки поверхні, то на епюрі фіксується одна фронтальна проєкція точки, наприклад 1_2, але дві горизонтальні проєкції – 1_1 і 1_1.

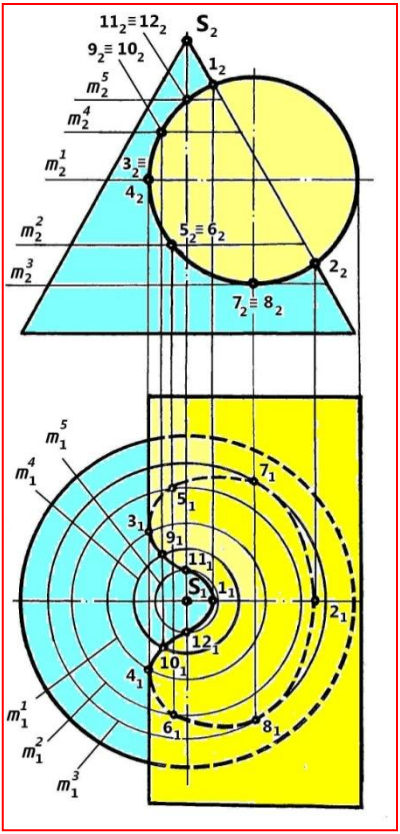
2. Горизонтальні проєкції проміжних точок 4 і 5 побудовано за допомогою паралелі m^2.

3. Горизонтальні проєкції точок лінії перетину з'єднано з урахуванням їх видимості. Грані (*a*//*b*) і (*b*//*c*) на горизонтальній проєкції є видимими, тому лінії $1_1 4_1 2_1$ і $1_1 5_1 3_1$ є видимими, проте грань (*a*//*c*) є невидимою, тому лінія $2_1 3_1$, що є дугою кола, також є невидимою.

Перетин поверхонь є повним, тому на горизонтальній проєкції видно дві окремі замкнені горизонтальні проєкції лінії перетину. На фронтальній проєкції ці дві окремі лінії перетину збігаються в одну спільну, яка, в свою чергу, збігається з фронтальною проєкцією призми.

На рисунку показано побудову лінії перетину поверхні прямого кругового конуса з поверхнею прямого кругового циліндра.

Перетин поверхонь є неповним, оскільки не всі твірні як поверхні конуса, так і поверхні циліндра, беруть участь у перетині.



Бічна поверхня циліндра є проєкціюючою, перпендикулярною до площини π_2, тому лінія перетину, яка розміщена на поверхні циліндра, проєкціюється на фронтальну проєкцію в лінію, що збігається з фронтальною проєкцією циліндра, яка розміщена в межах обрису конічної поверхні.

Послідовність побудови лінії перетину така:

1. Горизонтальні проєкції 1_1 і 2_1 точок 1 і 2, що лежать на обрисовій твірній, визначено за допомогою ліній проєкційного зв’язку.

2. В точках 3_1 і 4_1 змінюється видимість горизонтальної проєкції лінії перетину. Ці точки

визначено за допомогою паралелі m^1.

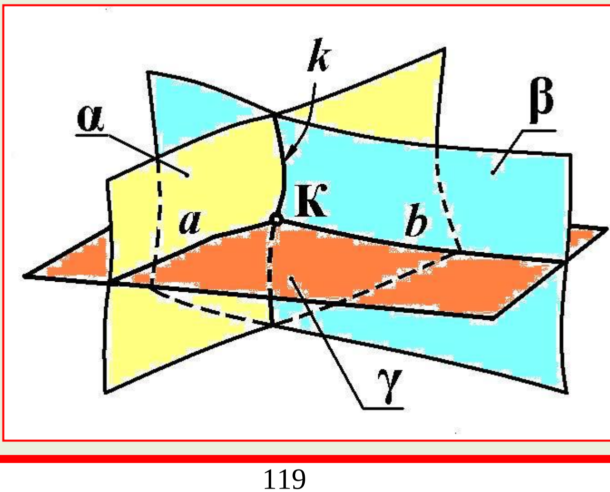
3. Горизонтальні проєкції проміжних точок 5 …12 визначено за допомогою паралелей m^2, m^3, m^4, m^5.

4. Горизонтальні проєкції визначених точок лінії перетину з'єднано з урахуванням їх видимості

7.2. Побудова лінії перетину поверхонь при їх загальному положенні

Якщо в попередніх прикладах поверхня призми або циліндра займала загальне непроєкціююче положення, то слід перетворити епюр так, щоб вона стала проєкціюючою, наприклад, заміною площин проєкцій. Якщо ж жодна з поверхонь принципово не може бути проєкціюючою слід застосовувати загальний спосіб знаходження лінії перетину за допомогою допоміжних січних площин або поверхонь, вже розглянутий при побудові лінії перетину двох площин загального положення.

На рисунку зображено поверхні α і β, що перетинаються. Щоб побудувати лінію k їх перетину потрібно визначити



точки, що належать водночас поверхням α і β, і з'єднати ці точки плавною лінією. Для знаходження довільної точки К, що належить лінії перетину, потрібно:

1) вести допоміжні площини або поверхні (на рисунку ведена допоміжна площина γ);

2) побудувати лінію перетину допоміжної площини або поверхні з кожною із заданих двох поверхонь ($a = \gamma \cap \alpha$, $b = \gamma \cap \beta$);

3) на перетині отриманих ліній знайти шукану точку, що належить водночас двом поверхням ($К = a \cap b$, К є α, β).

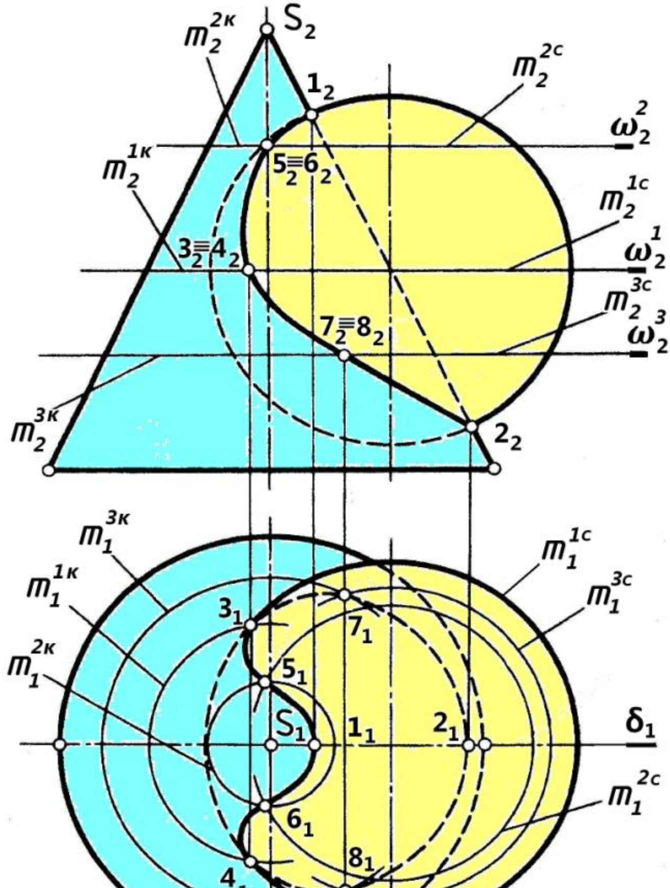
При використанні цього універсального способу визначення лінії перетину важливим є питання про раціональний вибір допоміжної площини-посередника. Ці площини вибирають таким чином, щоб вони перетинали криву поверхню по лініям, що мають вигляд прямих та кіл, котрі легко визначити та зобразити на епюрі.

На рисунку показано побудову лінії перетину поверхні прямого кругового конуса та сфери

Жодна з поверхонь обох тіл, що перетинаються, не може займати проєкціююче положення відносно площин проекцій, а це означає, що визначити хоча б одну з проєкцій лінії перетину без додаткових побудов, як це мало місце на рис. 38. 39, неможливо. Тому для побудови точок, що належать лінії перетину, застосовують допоміжні площини.

Точки 1 і 2 побудовано за допомогою фронтальної площини δ, яка є площиною симетрії для поверхонь обох тіл. Площина δ перетинає поверхні по їх обрисах, що дозволяє визначити фронтальні проєкції 1_2 , 2_2 цих точок, а потім і горизонтальні 1_1, 2_1, які розміщені на δ_1.

В точках 3 і 4 змінюється видимість горизонтальної проєкції лінії перетину. Їх проєкції визначено за допомогою горизонтальної площини ω^1. Площина ω^1 перетинає поверхню конуса по паралелі $m^{1к}$, а сферу – по паралелі $m^{1с}$. В точках перетину горизонтальних проєкцій цих паралелей визначено горизонтальні проєкції 3_1 і 4_1 цих точок. Їх фронтальні проєкції 3_2 і 4_2 розміщені на сліді-проєкції ω_2^1.

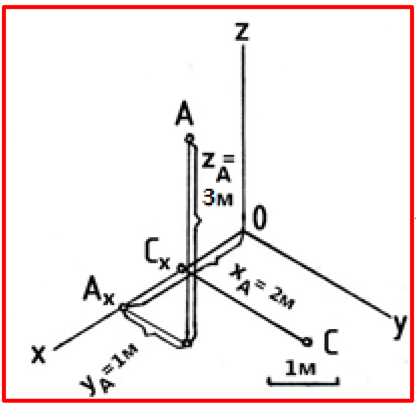


Лекція 8. Сутність методу проєкцій з числовими позначками. Проєкціювання точки та прямої лінії

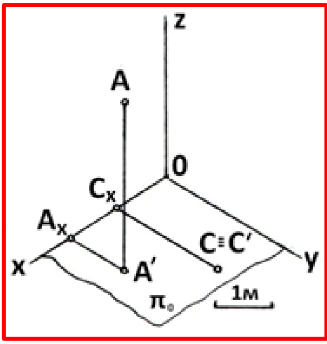
8.1. Сутність методу проєкцій з числовими позначками. Проєкціювання точки. Масштаб
8.2. Проєкціювання прямої лінії. Закладання, підйом, нахил та інтервал прямої лінії
8.3. Градуювання прямої лінії

8.1. Сутність методу проєкцій з числовими позначками. Проєкціювання точки. Масштаб

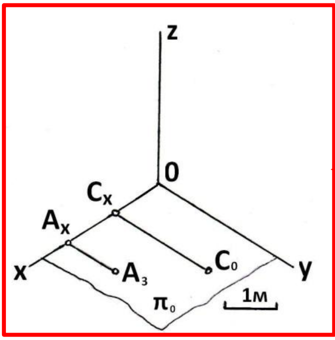
Сутність методу проєкцій з числовими позначками полягає в тому, що об'єкт, наприклад, ділянка земної поверхні, ортогонально проєкціюється тільки на одну, як правило, горизонтальну площину проєкцій. При цьому оберненість креслення досягається тим, що поряд з проєкціями характерних точок об'єкта проставляють числові позначки, які вказують, на скільки одиниць довжини віддалені ці точки від горизонтальної площини проєкцій.



На рисунку побудувано прямокутні ізометричні проєкції точок в масштабі 1:100 за їх координатами в метрах: A (2, 1, 3), C (1, 2, 0).

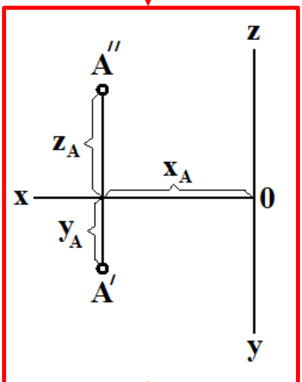


Позначення на площині нульового рівня π_0 горизонтальних проєкцій A' і B' точок A і B.

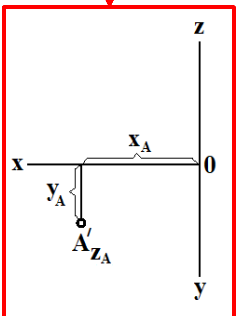


Позначення числових позначок поруч з горизонтальними проєкціями точок.

Відмінність між звичайним комплексним кресленником (класичним епюром) і кресленником в проєкціях з числовими позначками

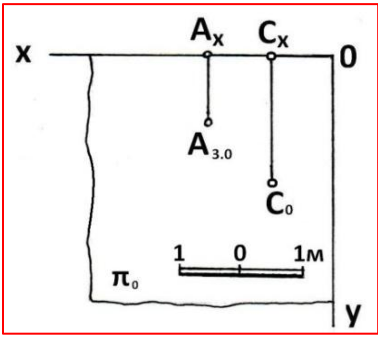


Класичний епюр точки.



Зображення точки в проєкціях з числовими позначками.

За методом проєкцій з числовими позначками проєкціювання об'єктів здійснюється лише на одну, горизонтально розміщену площину проєкцій. Таке зображення дозволяє визначити лише дві з трьох кординат точки А – координати x_A і y_A. За класичним епюром значення координати z_A можна визначити, маючи проєкцію A_2, але на кресленнях з числовими позначками фронтальна проєкція точки А відсутня. Щоб таке креслення було визначеним, оберненим потрібно знати значення координати z_A точки А, яка вказує на віддаленість точки А відносно горизонтальної площини проєкцій. В проєкціях з числовими позначками ця інформація надається числом, яке проставляється у вигляді індексу біля горизонтальної проєкції точки. Це число називають числовою позначкою, і воно є аналогом координати z_A точки А. Звідси випливає, що креслення в проєкціях з числовими позначками стають однозначними, за ними можна виконувати будівельні роботи, тільки тоді, коли на планах проєкції об'єктів будівництва мають певні числові позначки.



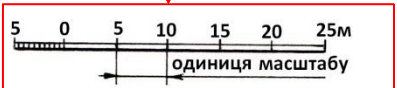
План або креслення в проєкціях з числовими

Особливістю креслень в проєкціях з числовими позначками є те, що розміри на них, як правило, не проставляють. Відсутність розмірів замінюють нанесенням масштабу, в якому виконане креслення.
Масштабом називається відношення довжини лінії на плані до відповідної довжини проєкції цієї лінії на місцевості, наприклад, на ділянці земної поверхні.

Числовий масштаб для зручності користування і порівняння має однаковий вигляд: чисельником дробу завжди є одиниця, а знаменник при цьому безпосередньо виражає ступінь зменшення, наприклад: 1/100 (1:100); 1/200 (1:200) 1/500 (1:500); 1/1000 (1:1000).

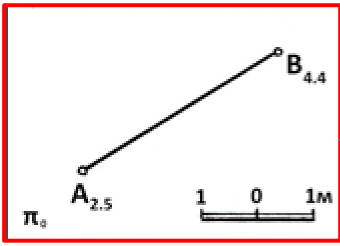
Для побудови планів або визначення довжини відрізків, узятих з плану, використовують **лінійний масштаб**, який наносять на плані у вигляді масштабної шкали.

Лінійний масштаб, що відповідає числовому 1:100.

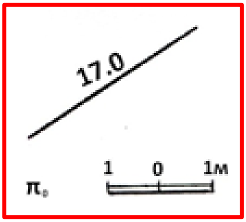


Лінійний масштаб, що відповідає числовому 1:500.

8.2. Проєкціювання прямої лінії. Закладання, підйом, нахил та інтервал прямої лінії

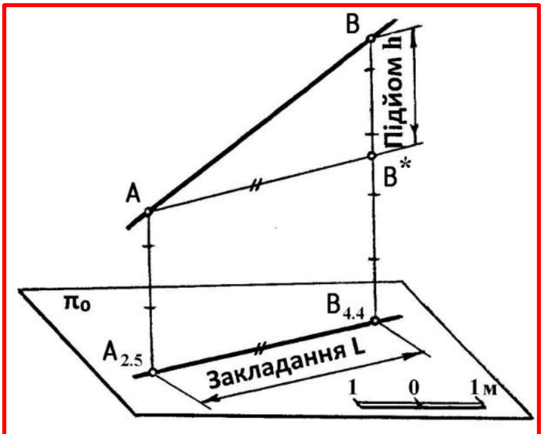


В проєкціях з числовими позначками **пряма загального положення** може бути задана проєкціями будь-яких двох її незбіжних (нетотожних) точок з **обов’язковим** вказуванням їх числових позначок.



Горизонтальну пряму можна зобразити на плані її проєкцією із зазначенням числової позначки прямої, оскільки числові позначки будь-яких двох її точок однакові.

Закладання, підйом иа нахил прямої лінії



Закладанням називається довжина горизонтальної проєкції відрізка прямої на площині нульового позначається буквою *L* (визначається вимірюванням).

Підйомом або **перевищенням** відрізка прямої називається різниця числових позначок точок-кінців цього відрізка прямої і позначається буквою h. Для відрізка AB прямої h = 4,4 – 2,5 = 1,9 м.

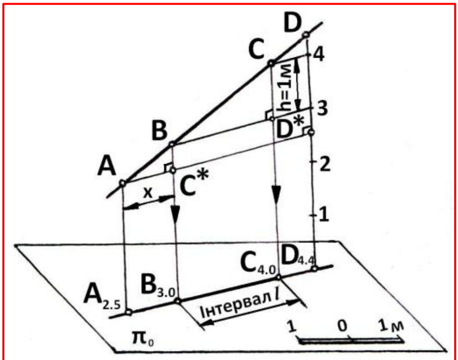
Нахилом або **ухилом** прямої *i* називається відношення підйому будь-якого відрізка прямої до його закладання: $\mathrm{i} = {}^{\mathrm{h}}/_{\mathrm{L}}$.

Щоб знайти нахил прямої, потрібно на цій прямій взяти відрізок, визначити його підйом та закладання, поділити ці величини одна на одну. Отримане відношення визначить нахил прямої.

Нахил прямої задається в десяткових дробах або у вигляді відношення 1: n, де n – будь-яке додатне число.

.

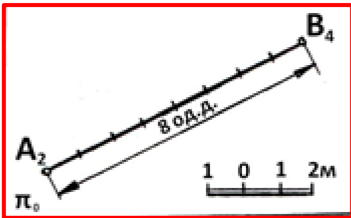
Інтервал прямої лінії



Інтервалом прямої називається довжина горизонтальної проєкції відрізка прямої, підйом якого дорівнює одиниці довжини, і позначається буквою *l*. Інтервал прямої дорівнює відношенню довжини закладання відрізка прямої до його підйому: $l = k \cdot {}^{\mathrm{L}}/_{\mathrm{h}}$, де L – закладання відрізка, м; h – підйом відрізка, *м*; *k* – розмірний коефіцієнт (*k* = *1 м*). При h = 1м інтервал прямої чисельно дорівнює закладанню: *l* = L. Тому інше означення інтервалу прямої: довжина закладання відрізка прямої, підйом якого дорівнює одиниці довжини.

Оскільки $i = {}^{\mathrm{h}}/_{\mathrm{L}}$, а $l = k \cdot {}^{\mathrm{L}}/_{\mathrm{h}}$, то $i = 1 \colon {}^{l}/_{k}$, **тобто нахил та інтервал прямої – взаємно обернені величини.**

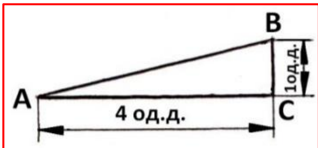
Задача



Початкова умова задачі. Визначити нахил (ухил) та інтервл прямої АВ.

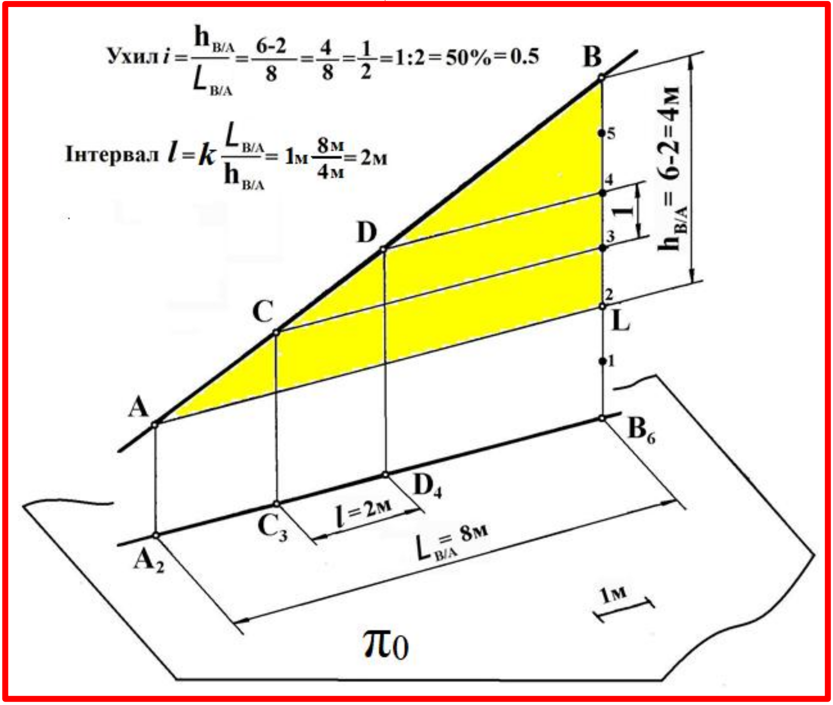
Розв'язування. Підйом відрізка *AB* цієї прямої h = 4 – 2 = 2 *м*. Його закладання L дорівнює 8 м (визначається вимірюванням довжини горизонтальної проєкції відрізка АВ). Тоді нахил прямої i = h : L = 2 : 8 = 1 : 4. Тобто нахил прямої АВ в десяткових дробах дорівнює *i* = 0,25, а у вигляді відношення 1: n – ***i* = 1 : 4 = 25%.**

Інтервал прямої $\boldsymbol{l} = k \cdot {}^{\mathrm{L}}/_{\mathrm{h}} = 1\text{м} \cdot {}^{8\text{м}}/_{2\text{м}} = \mathbf{4м.}$



Щоб краще уявити, що означає нахил прямої *1:4*, треба побудувати прямокутний трикутник, у якого вертикально розміщений катет дорівнює одиниці довжини, а горизонтально розміщений – *4* одиницям довжини. Тоді гіпотенуза цього трикутника, тобто дана пряма, буде мати нахил до горизонтальної площини проєкцій *1:4* (горизонтальний катет *AC* дорівнює довжині горизонтальної проєкції відрізка прямої *AB* підйом якого дорівнює 1 м). Іншими словами, якщо пряма має нахил *i* =1:4, то інтервал цієї прямої *l* = 4 о.д.

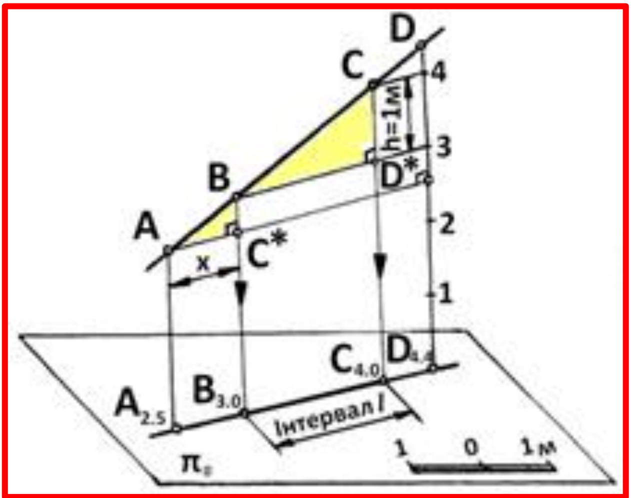
На рисунку показано визначення ухилу *i* та інтервалу *l* прямої АВ



8.3. Градуювання прямої лінії

Градуювання прямої – це визначення на прямій лінії положення точок, що мають цілі числові позначки

8.3.1. Аналітичний спосіб градуювання прямої лінії



Виведемо формулу, за допомогою якої можна визначити положення точки з шуканою числовою позначкою. На рисунку точка *C* з числовою позначкою *3* (шукана точка) віддалена від точки *A* з відомою числовою позначкою *2.5* на відстань *x*. Трикутники ACC^* і CDD^* є подібними, У них однакове за величиною відношення катетів, тобто $AC^*/CC^* = CD^*/DD^*$.

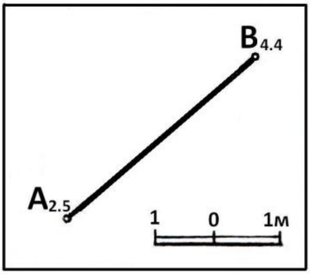
Підставляємо в зазначену пропорцію величини, взяті з рисунку: $^{x}/_{h_{AC}} = {}^{l}/_{1}$, де h_{AC} – підйом відрізка AC, *l* – інтервал прямої. Звідси $x = h_{AC} \cdot l$.

Таким чином, відстань *x* від точки з шуканою числовою позначкою до точки прямої з відомою числовою позначкою визначається за формулою:

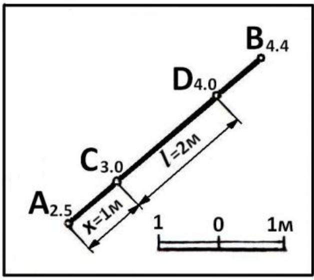
$$\mathbf{x = h \cdot {}^{\mathit{l}}/_{\mathit{k}},}$$

де h – підйом відрізка прямої між точками з шуканою і відомою числовими позначками; *l* – інтервал прямої; *k = 1м*.

Задача



Початкова умова задачі.
Проградуювати аналітичним способом пряму АВ



Розв'язування:

1. Відстань x від точки С з числовою позначкою 3.0 до точки А з числовою позначкою 2.5 визначаємо за формулою $x = h_{AC} \cdot {}^{l}/_{k}$, де h_{AC} - різниця числових позначок між точками С і А ($h_{C,A}$= 3,0 – 2,5 = 0,5 м), l – інтервал прямої, k = 1м.

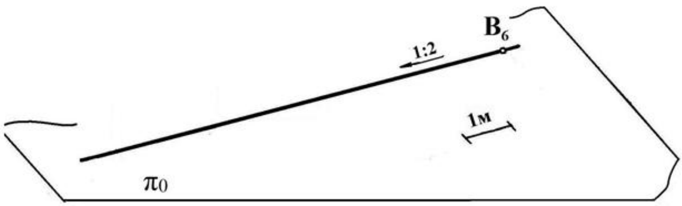
2. Визначаємо інтервал даної прямої за формулою $l = k \cdot {}^{L_{B,A}}/_{h_{B,A}}$, де k = 1м; $L_{B,A}$ – закладання відрізка АВ; $h_{B,A}$ – підйом відрізка АВ. Для нашого випадку, з урахуванням масштабу, маємо: $L_{B,A}$ = 3.8 м (вимірюємо лінійкою довжину відрізка АВ); $h_{B,A}$ = 4,4 – 2,5 = 1,9 м, тобто інтервал l прямої АВ дорівнює: l = 1м $\cdot\ {}^{3.8\text{м}}/_{1.9\text{м}}$ = 2м.

3. Підставляємо величину l в формулу x = 0,5м $\cdot\ {}^{2\text{м}}/_{1\text{м}}$= 1 м.

4. Точка D з числовою позначкою 4.0 розміщена від точки С з числовою позначкою 3.0 на відстані інтервалу l, тобто 2 м.

На рисунках наведено розв'язування задач на визначення відстані до точки із заданою числовою позначкою і визначення числової позначки точки, яка вказана на прямій і віддалена на зазначену відстань від точки з відомою числовою позначкою.

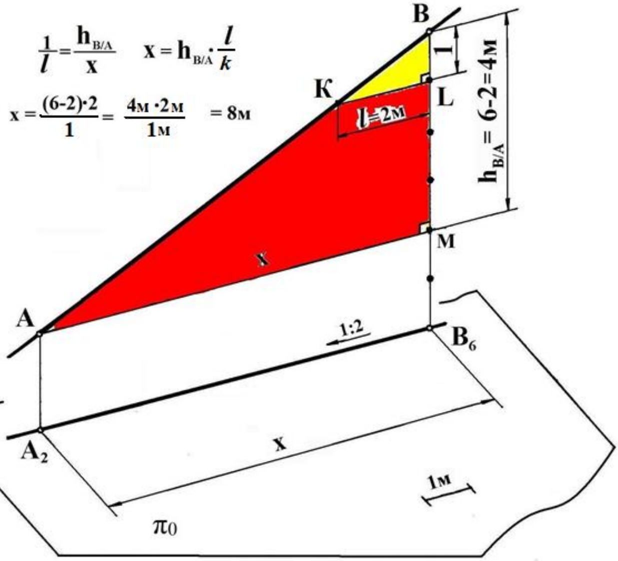
Умова завдання: На якій відстані від точки В знаходиться точка А з числовою позначкою 2м.



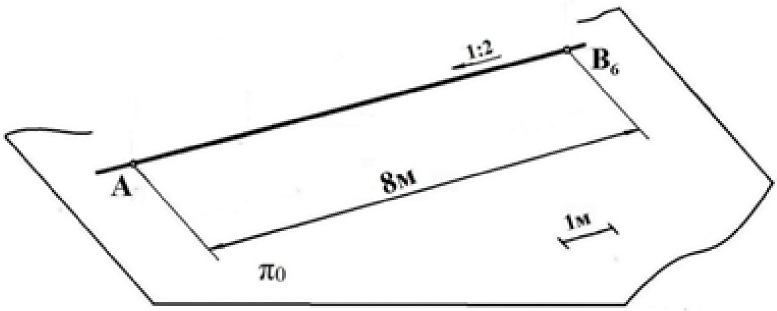
Розв'язування:

$$\frac{1}{l} = \frac{h_{B/A}}{x} \qquad x = h_{B/A} \cdot \frac{l}{k}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{x} \qquad x = \frac{(6-2)\cdot 2}{1} = \frac{4м \cdot 2м}{1м} = 8м$$



Умова завдання: Яку числову позначку має точка А, якщо вона віддалена від точки В на 8м



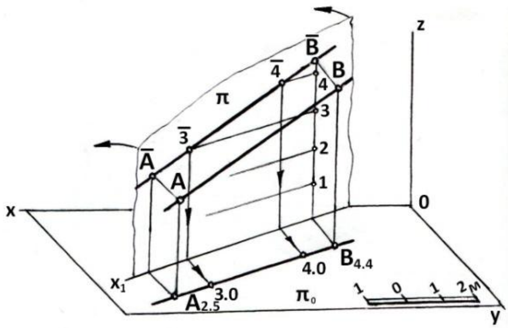
Розв'язування:

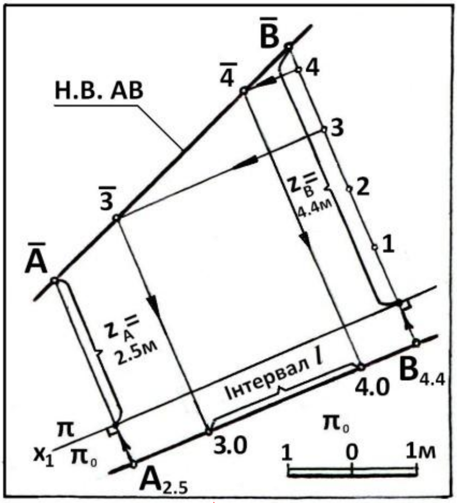
$x = h_{B/A} : l$. $\quad 8 = (6 - Z_A) \cdot 2$, $\quad (6 - Z_A) = \frac{8}{2} = 4$

$(6 - Z_A) = 4 \quad Z_A = 6 - 4 = 2$м.

8.3.2. Градуювання прямої лінії способом профілю

За цим способом будують профіль прямої. В проєкціях з числовими позначками під профілем розуміють ортогональну проєкцію об'єкта на вертикальну площину π ($\overline{A}\overline{B}$ – профіль прямої лінії АВ). За способом профілю будують суміщений з площиною нульового рівня або з іншою горизонтальною площиною профіль прямої.





Задача

На рисунку показано розв'язок задачі на градуювання відрізка прямої АВ способом профілю:

1. Будуємо суміщений з площиною нульового рівня π_0 профіль $\overline{AB}$ відрізка прямої АВ, відкладаючи від осі x_1 висоти (координати z) точок А і В в масштабі плану (в даній задачі x_1 – лінію перетину вертикальної площини π з площиною π_0 – проведено паралельно до $A_{2.5}B_{4.4}$).

2. На прямій $B_{4.4}\overline{B}$ позначаємо точки, що віддалені від осі x_1 на відстані 1, 2, 3, 4 м.

3. Через точки 3 і 4 проводимо паралельно до осі x_1 лінії рівня з числовими позначками 3 і 4.

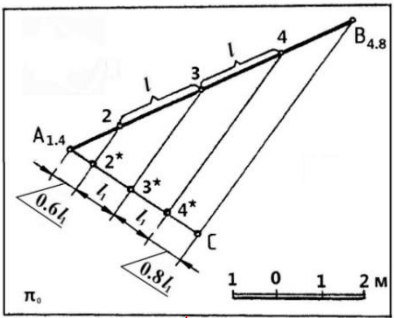
4. Фіксуємо на $\overline{AB}$ точки $\overline{3}$ і $\overline{4}$ – точки перетину ліній рівня 3 і 4 з профілем $\overline{AB}$;

5. Точки $\overline{3}$ і $\overline{4}$ проєкціюємо на горизонтальну проекцію $A_{2.5}B_{4.4}$, і отримуємо проєкції точок прямої з числовими позначками 3.0 і 4.0.

Оскільки вісь x_1 паралельна горизонтальній проєкції прямої (x_1 // $A_{2.5}B_{4.4}$), то вертикальна площина π розміщена паралельно прямій АВ. В цьому випадку відрізок прямої АВ проєкціюється на площину π в натуральну величину.

8.3.3. Градуювання прямої лінії способом пропорціонального ділення

Суть цього способу розглянемо на прикладі градуювання прямої АВ, проєкція якої зображена на рисунку.



З одного кінця відрізка прямої (точки $A_{1,4}$) проведемо допоміжну пряму в довільному напрямі, на якій відкладемо в масштабі плану або в більшому відрізок АС, рівний підйому відрізка АВ : $h = H_B - H_A = (4.8 - 1.4)l_1 = 3{,}4l_1$, де l_1 – одиниця масштабу, в якому вимірюється підйом відрізка АВ.

На прямій АС від точки $A_{1,4}$ відкладемо відрізок, рівний $(2 – 1.4)\ l_1 = 0{,}6l_1$, і позначимо точку 2*, якій на прямій $A_{1.4}B_{4.8}$ буде відповідати точка 2. Точки 3*, 4* віддалені одна від одної на відстань l_1. Їм на прямій $A_{1.4}B_{4.8}$ буде відповідати точки 3 і 4. На рисунку l_1 дорівнює одиниці масштабу плану, тобто l_1 = 1м. Точка С знаходиться від точки 4* на відстані, що дорівнює $0{,}8l_1$.

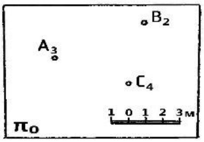
Кінцеву точку С сполучимо з точкою $B_{4,8}$ і з кожної точки поділки (точки 2*, 3*, 4*) проведемо прямі, паралельні $CB_{4,8}$. Ці прямі визначають в перетині з $A_{1,4}\ B_{4,8}$ проекції точок прямої АВ, що мають цілі числові позначки. Це дозволяє визначити також графічно і інтервал прямої l .

Лекція 9. Проєкціювання площин та поверхонь

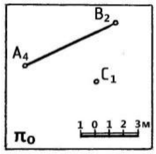
9.1. Проєкції площини
9.2. Градуювання площини
9.3. Поверхня однакового ухилу
9.4. Проєкції земної (топографічної) поверхні

9.1. Проєкції площини

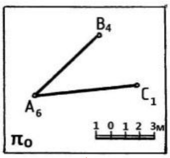
Площину на плані можна задавати такими ж геометричними фігурами, як і в ортогональних проєкціях:



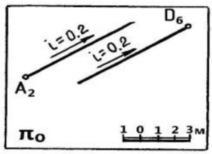
Задання площини на плані трьома точками



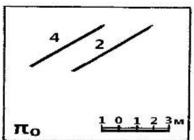
Задання площини на плані прямою та точкою



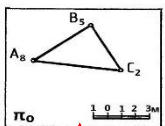
Задання площини на плані двома прямими, що перетинаються



Задання площини на плані двома паралельними прямими загального положення

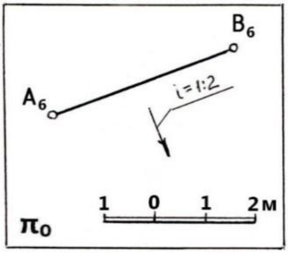


Задання площини на плані двома паралельними горизонтальними прямими

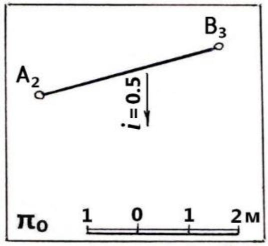


Задання площини на плані трикутником

Поширеним є задання площини прямою лінією та величиною ухилу (нахилу) площини.



Задання площини горизонтальною прямою і величиною ухилу

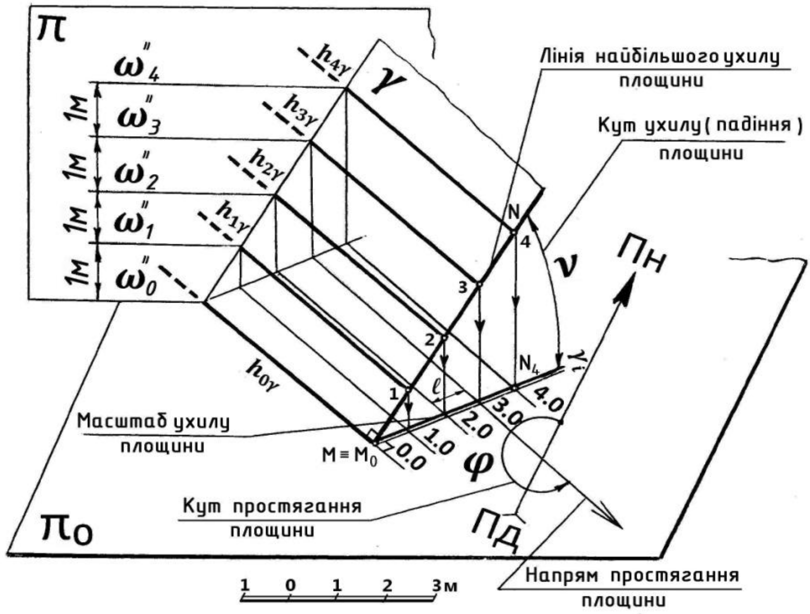


Задання площини прямою загального положення і величиною ухилу

Особливий випадок задання площини простору на плані – це задання її масштабом ухилу площини. **Масштабом ухилу площини** називається проградуйована проєкція лінії найбільшого ухилу (ЛНУ) площини (ЛНУ - це пряма, перпендикулярна до горизонталей площини).

На рисунку MN - лінія найбільшого ухилу. Лінію найбільшого ухилу площини називають також лінією падіння. Вона визначає **кут ухилу або кут падіння площини -** кут ν - кут між лінією найбільшого ухилу MN і її проєкцією M_0N_4 на основну площину π_0. Проєкція M_0N_4 лінії найбільшого ухилу MN із зазначеними на ній інтервалами називається масштабом ухилу площини γ. Таким чином, масштабом ухилу площини називається проградуйована проєкція ЛНС площини.

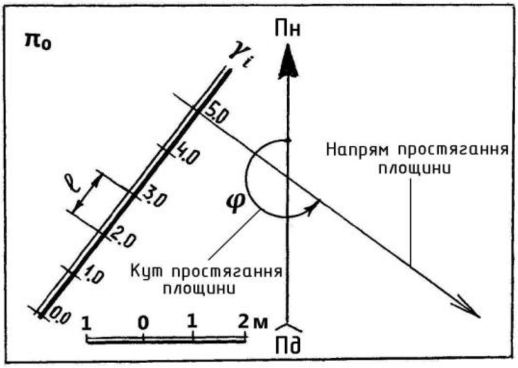
Масштаб ухилу площини зображують у вигляді двох паралельних ліній (подвійною лінією), причому одна лінія товща за іншу і проводиться із нанесенням проєкцій точок, які мають послідовні цілочислові позначки, та позначається буквою з індексом "i", наприклад γ_i .



.

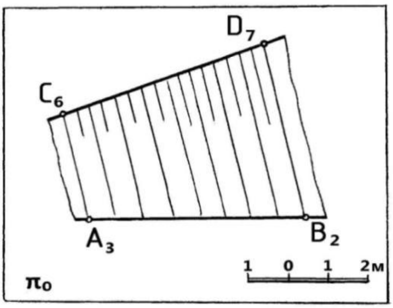
Положення площини в просторі також визначають її кутами ухилу (падіння) ν і простягання φ. **Кутом простягання площини** називають кут в горизонтальній площині між напрямом на північ і напрямом простягання. **Напрямом простягання площини** вважають правий напрямок її горизонталей, якщо дивитися на площину в бік збільшення позначок.

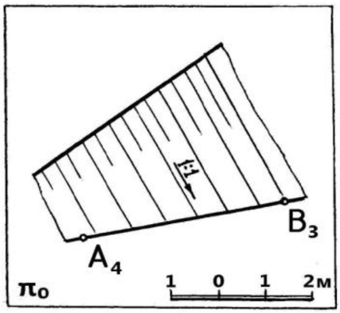
Інтервал та ухил площини дорівнюють відповідно інтервалу та ухилу (нахилу) ЛНУ даної площини. Для того щоб визначити ухил площини, в ній потрібно провести і проградуювати ЛНУ та визначити інтервал. Величина, обернена до інтервалу ЛНС, визначає ухил самої площини.



Задання площини на плані масштабом ухилу площини γ_i з указанням напряму та кута простягання площини

Площини земляних укосів на плані можуть бути задані проєкціями (слово “проєкція“ при цьому не вживається) двох ліній – бровкою та підошвою укосу, однією лінією – бровкою або підошвою із зазначенням величини ухилу укосу (C_6D_7 – бровка, A_3B_2, A_4B_3 –підошви укосу каналу).





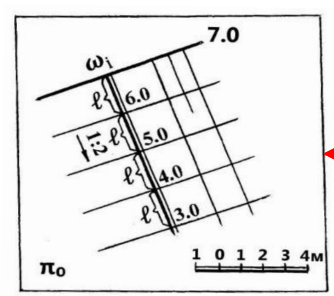
Задання площини земляного укосу двома лініями – бровкою та підошвою

Задання площини земляного укосу однією лінією – підошвою і величиною ухилу

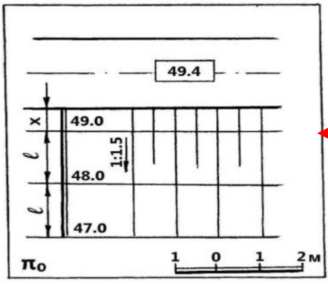
9.2. Градуювання площини

Градуювання площини, що задана горизонтальною прямоюта величиною ухилу площини

В такій площині потрібно спочатку провести лінію найбільшого ухилу площини перпендикулярно до горизонтальної прямої, наприклад, горизонтальної бровки або підошви земляного укосу, а потім проградуювати її, враховуючи, що інтервал $l = 1/i \cdot k$ (i – величина, обернена ухилу площини). Горизонталі площини з цілочисловими позначками проводимо перпендикулярно до масштабу ухилу площини через інтервальні ділення, причому горизонталі площини укосів будуть паралельні прямолінійній горизонтальній бровці або підошві укосу.



Градуювання площини земляного укосу, яку задано горизонтальною бровкою з позначкою 7.0 і величиною ухилу 1:2 (i = 1:2 = 0.5; $l = 1/ i \cdot k$ = **1/0.5□1** = 2 м).



Градуювання площини укосу насипу, що задана горизонтальною бровкою з позначкою 49.4 і величиною ухилу 1:1.5 (x = h$\cdot$ l/k = (49.4 – 49.0)$\cdot$ 1.5/1.0 = 0,6 м; l = 1.5 м).

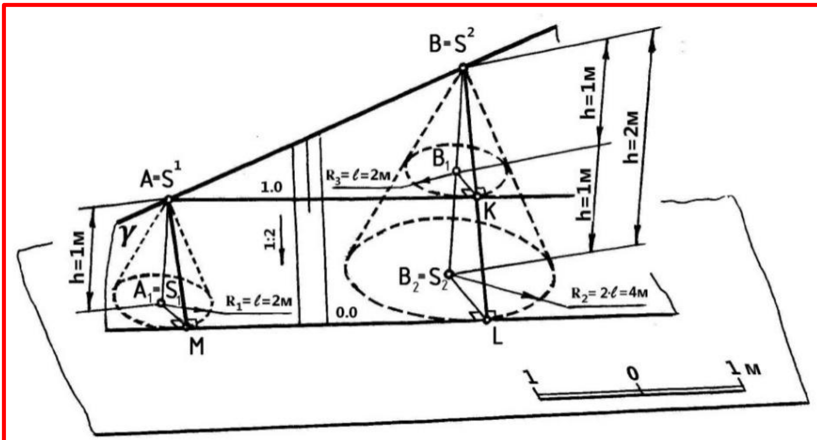
Градуювання площини, що задана прямою загального положення та величиною ухилу площини

Така площина є дотичною до поверхонь прямих конусів обертання, твірні яких мають ухил, що дорівнює ухилу площини, а вершини знаходяться на прямій загального положення, наприклад, бровці або підошві укосу. Лінія, по якій ця площина дотикається до поверхонь конусів, є лінією найбільшого ухилу даної площини. Горизонталі площини укосу, що мають послідовні цілочислові позначки, – це прямі площини, дотичні до кіл прямих колових конусів, які мають однакові числові позначки.

Примітка. Площина, яка задана горизонтальною прямою та величиною ухилу площини, є частковим випадком описаної поверні.

На наочному зображенні показано градуювання площини земляного укосу γ з ухилом 1:2, що прилягає до прямолінійно нахиленої бровки (пряма АВ).

В точках А і В прямої АВ, що мають числові позначки 1 м і 2 м, знаходяться вершини прямих колових конусів S^1 і S^2, висоти яких дорівнюють відповідно 1 м і 2 м, твірні яких мають ухил 1:2.



Точка A_1 – центр основи конуса з вершиною в точці А. Всі точки основи цього конуса мають числову позначку 0.0, оскільки знаходяться в площині π_0. Так як висота конуса AA_1 = 1м, то твірні будуть мати ухил 1:2 тільки при радіусі основи конуса R_1 = 2 м. Точка B_2 – центр основи конуса з вершиною в точці В. Всі точки основи цього конуса також мають числові позначки 0.0, оскільки знаходяться в площині π_0. Так як висота конуса BB_2 = 2 м, то твірні цього конуса будуть мати ухил 1:2 при радіусі основи конуса R_2 = 4 м.

Горизонталь площини укосу з числовою позначкою 0.0 є дотичною до кіл основ прямих колових конусів, всі точки яких мають числові позначки 0.0. Горизонталь площини з числовою позначкою 1.0 проходитиме через точку А, що віддалена від площини π_0 на 1 м і є дотичною до кола конуса з центром в точці B_1, яке також віддалене від площини π_0 на 1 м. Всі точки цього кола з центром B_1 будуть мати числові позначки 1 м, а площина кола є паралельною до площини кола з центром B_2. Радіус даного кола R_3 = 1 м.

Лінії дотику АМ, BL площини γ із конусами з вершинами S^1 та S^2 є лініями найбільшого ухилу площини, перпендикулярними до горизонталей площини укосу.

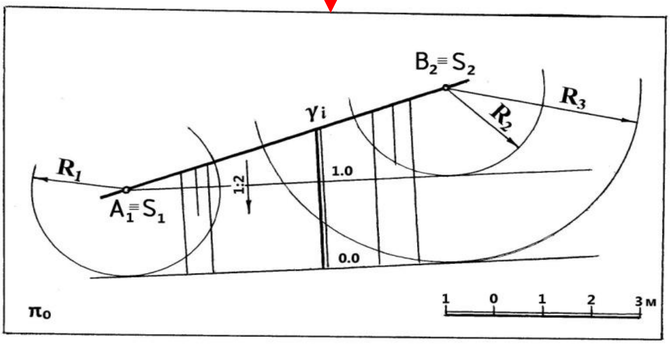
Радіуси R кіл конусів або горизонталей конусів із заданими числовими позначками визначаємо за формулою:

$$\mathbf{R = h \cdot \mathit{l},}$$

де h – різниця числових позначок між відомою числовою позначкою точки площини, в якій знаходиться вершина конуса, і числовою позначкою горизонталі, яку потрібно провести; *l* – інтервал площини, який дорівнює інтервалу лінії найбільшого ухилу площини.

Примітка. Для спрощення запису формули розмірний коефіцієнт k не записано.

Розв'язування задачі на плані



1. Проводимо горизонталь площини з числовою позначкою, що дорівнює 0.0. Для цього проводимо горизонталі конусів, які мають нульову числову позначку (вершини конусів знаходяться в точках А і В): $R_1 = h \cdot l = (1\text{-}0) \cdot 1 = 1$ м; $R_2 = h \cdot l = (2\text{-}0) \cdot 1 = 2$ м.

2. На плані з точок A_1 і B_2 проводимо горизонталі конусів радіусами відповідно R_1 і R_2. Ці горизонталі конусів мають числову позначку 0.0.

3. Проводимо дотичну до горизонталей конусів з нульовою числовою позначкою. Дотична буде горизонталлю площини з числовою позначкою 0.0.

4. Для того, щоб провести на плані горизонталь площини з числовою позначкою 1.0, спочатку з точки B_2 проводимо горизонталь конуса з числовою позначкою 1.0, яка має радіус $R_3 = h \cdot l = (2-1) \cdot 1 = 1м.$. На наочному зображенні (рис. 8.46) це є горизонталь конуса з центром в точці B_1.

5. З точки A_1 (на наочному зображенні це точка А), що має числову позначку 1.0, проводимо дотичну до горизонталі конуса радіуса R_3. Ця дотична і буде горизонталлю площини з числовою позначкою 1.0.

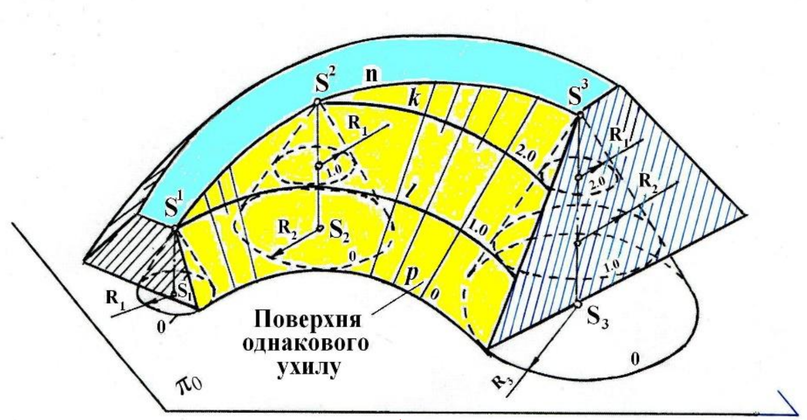
Слід зазначити, що при градуюванні площини не обов’язково будувати горизонталі конусів для проведення чергової горизонталі площини. Достатньо, наприклад, провести горизонталь площини з числовою позначкою 0.0, потім перпендикулярно до цієї горизонталі провести ЛНУ площини, визначити на ній точку з числовою позначкою 1.0 і через цю точку провести горизонталь площини з числовою позначкою 1.0. Можна спочатку накреслити горизонталь площини з числовою позначкою 1.0, потім перпендикулярно до цієї горизонталі провести ЛНУ площини, визначити на ній точку з числовою позначкою 0.0 і через цю точку провести горизонталь площини з числовою позначкою 0.0. Головне при градуюванні площини загального положення побудувати в цій площині хоча б одну горизонталь, що дозволить провести ЛНУ площини.

Проградуювавши ЛНУ площини, можна провести потрібну кількість відповідних горизонталей площини, тобто виконати операцію її градуювання.

На рисунках стрілка, біля якої вказують величину ухилу площини, направлена у бік горизонталей площини з меншою числовою позначкою, перпендикулярно до них або паралельно до ЛНУ площини.

9.3. Поверхня однакового ухилу

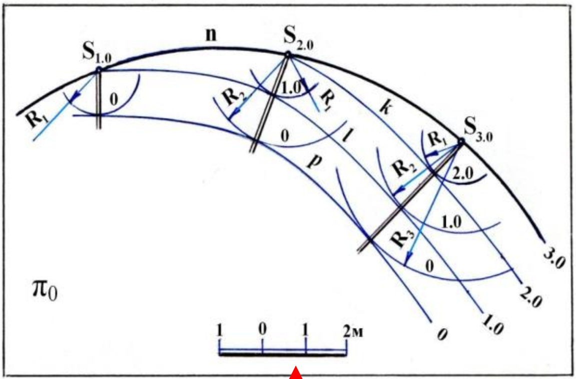
Поверхня однакового ухилу – це лінійчата поверхня, всі прямолінійні твірні якої складають з горизонтальною площиною однаковий кут. Вона утворюється переміщенням вершини S прямого колового конуса по деякій кривій лінії – напрямній, наприклад, бровці n укосу (S^1, S^2, S^3– послідовні положення вершини). Поверхня, що огинає сімейство прямих колових конусів у всіх їх положеннях, і є поверхнею однакового ухилу. На рисунку поверхнею однакового ухилу є поверхня укосу насипу з криволінійною бровкою *n*.



На рисунку показано побудову горизонталей поверхні земляного укосу, заданого ухилу *i*. Вершини S^1, S^2, S^3 прямих колових конусів, інцидентних бровці *n*, мають числові позначки 1, 2 та 3. Для того, щоб побудувати горизонталі поверхні укосу з позначками 0, 1, 2, проведемо в прямих колових конусах з вершинами S^1, S^2, S^3 горизонталі конусів з числовими позначками, що дорівнюють відповідно 1, 2, 3. Радіуси цих горизонталей конусів згідно з формулою дорівнюють відповідно: $R_1 = l$, $R_2 = 2l$, $R_3 = 3l$, де $l = 1/i$.

Потім проводимо плавні криві лінії *p, l, k*, що дотичні до дуг кіл горизонталей конусів з числовими позначками 0, 1, 2. Ці лінії є горизонталями *p, l, k* поверхні укосу з числовими позначками відповідно 0, 1, 2.

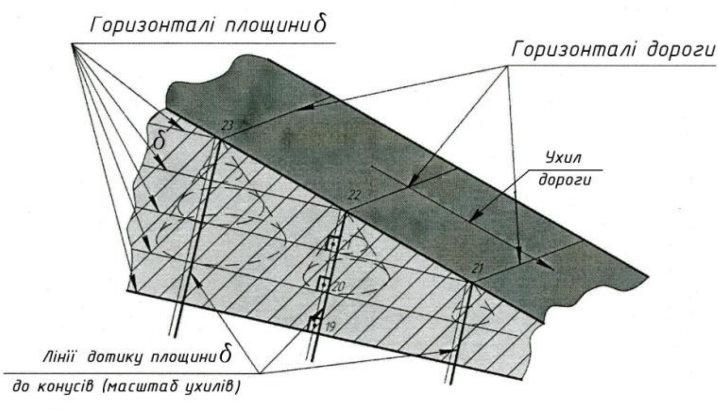
Ці ж побудови (градуювання поверхні земляного укосу) виконано на плані, де укіс має ухил 1:2. Точки S^1, S^2, S^3 криволінійної брівки *n* укосу прийняті за вершини прямих колових конусів, для кожного з яких при ухилі 1:2 твірних побудовані горизонталі конусів $R_1 = l = 2м$, $R_2 = 2l = 4м$, $R_3 = 3l = 6м$. Плавні криві лінії, дотичні до горизонталей



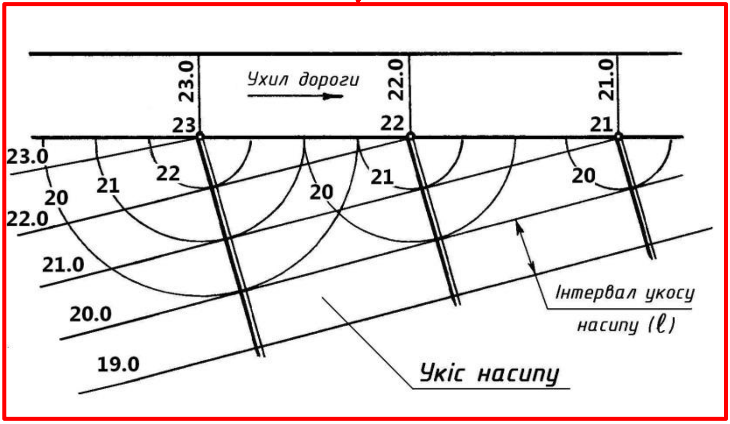
конусів, що мають однакові числові позначки, є горизонталями *k*, *l*, *p* поверхні однакового ухилу (поверхні земляного укосу з криволінійною бровкою).

Примітка. Якщо напрямна поверхні однакового ухилу, наприклад лінія n, є прямою лінією, поверхня є площиною. Площина, яка задана горизонтальною прямою або прямою загального положення та величиною ухилу площини, є частковим випадком поверні однакового ухилу.

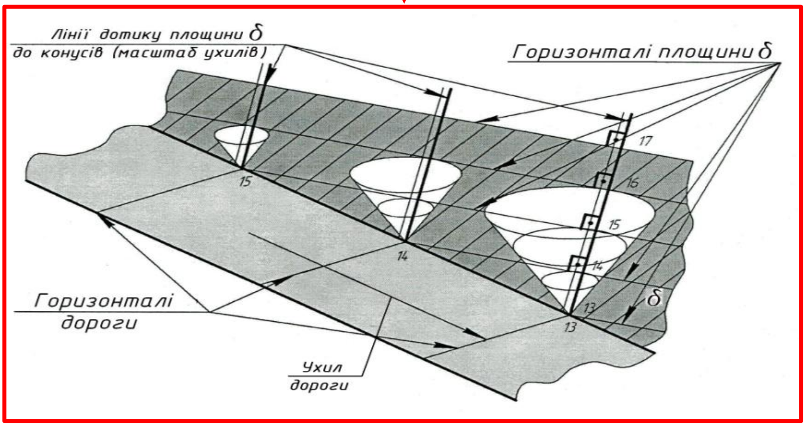
Побудова на наочному зображенні горизонталей в площині укосу насипу δ, що прилягає до дороги з прямолінійно нахиленою бровкою.



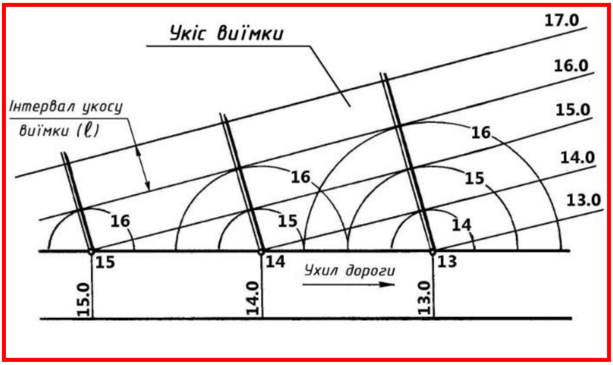
Побудова на плані горизонталей в площині укосу насипу δ



Побудова на наочному зображенні горизонталей в площині укосу виїмки δ, що прилягає до дороги з прямолінійно нахиленою бровкою.



Побудова на плані горизонталей в площині укосу виїмки

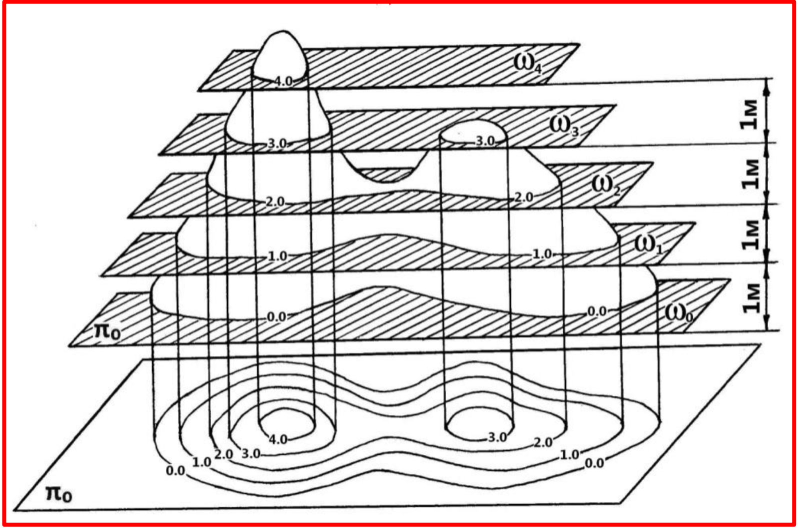


9.4. Проєкції земної (топографічної) поверхні

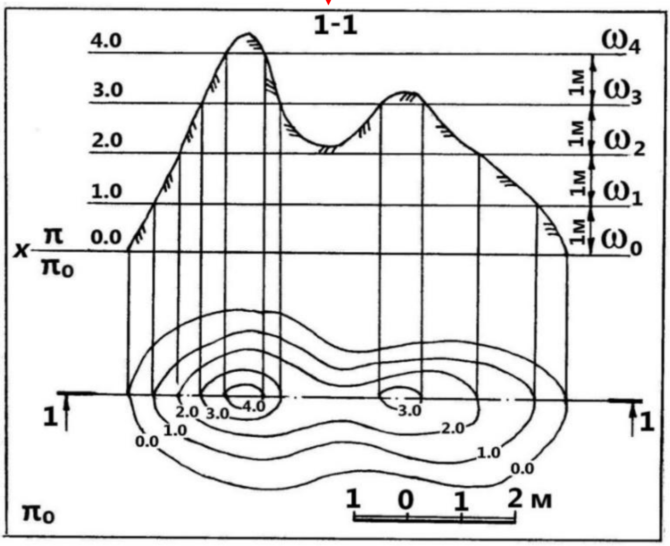
Земну поверхню в проекціях з числовими позначками зображують за допомогою її горизонталей, отриманих шляхом перетину земної поверхні горизонтальними площинами, розміщеними одна від одної на відстані, як правило, 1м.

Нехай на наочному зображенні або на вертикальній площині π зображено частину земної поверхні з двома підвищеннями. Розсічемо її уявно горизонтальними площинами ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, що мають числові позначки відповідно 1, 2, 3, 4 м і віддалені одна від одної на відстань1м. Площина ω_0 збігається з площиною нульового рівня π_0 . Лінії перетину цих площин із земною поверхнею є, в загальному випадку, плоскими замкненими кривими лініями довільного вигляду, всі точки яких мають однакові числові позначки. Ці лінії називають горизонталями земної поверхні. Вони проєкціюються на площину π_0 в натуральну величину. Горизонталі земної поверхні на плані є замкнені неперервні плоскі криві лінії, які не можуть перетинатися або розгалужуватися. За їх взаємним положенням і числовими позначками можна судити про рельєф місцевості. Всі точки одної горизонталі мають однакову висоту (однакову числову позначку).

Утворення на наочному зображенні в площині нульового рівня π_0 горизонталей земної поверхні



Зображення земної поверхні на плані



Лекція 10. Перетин площин, прямої лінії з площиною та поверхнею

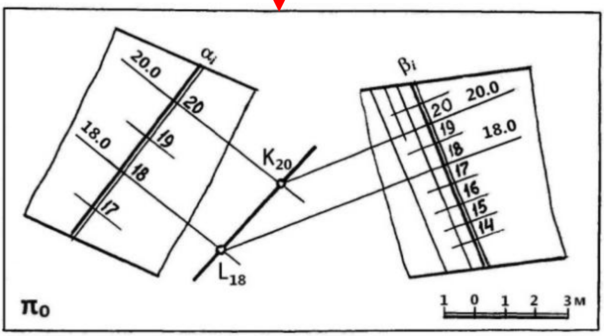
10.1. Перетин площин
10.2. Перетин прямої лінії з площиною
10.3. Перетин поверхні з прямою лінією

10.1. Перетин площин

Побудова лінії перетину двох площин у проєкціях з числовими позначками ґрунтується, як і при побудові ортогональних проєкцій, на способі допоміжних січних площин. Зручно застосовувати горизонтальні допоміжні січні площини, оскільки вони перетинають задані площини по горизонталях. Тому задача на побудову лінії перетину двох площин зводиться до знаходження точок перетину горизонталей з однаковими числовими позначками обох площин.

Задача

На рисунку побудовано лінію перетину KL площин двох земляних укосів α та β, заданих своїми масштабами спаду α_i та β_i.



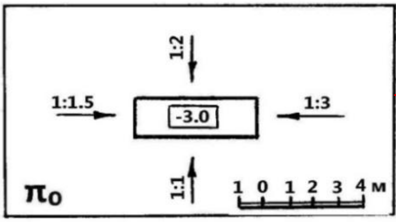
Для цього:

- через числові позначки 20 на масштабах ухилу площин перпендикулярно до α і β проводимо горизонталі 20 і відмічаємо точку K_{20} їх взаємного перетину;

- будуємо аналогічно проекцію L_{18} точки L, що належить лінії перетину;

- проводимо через точки K_{20} і L_{18} пряму лінію, яка є шуканою лінією перетину площин α та β.

Задача

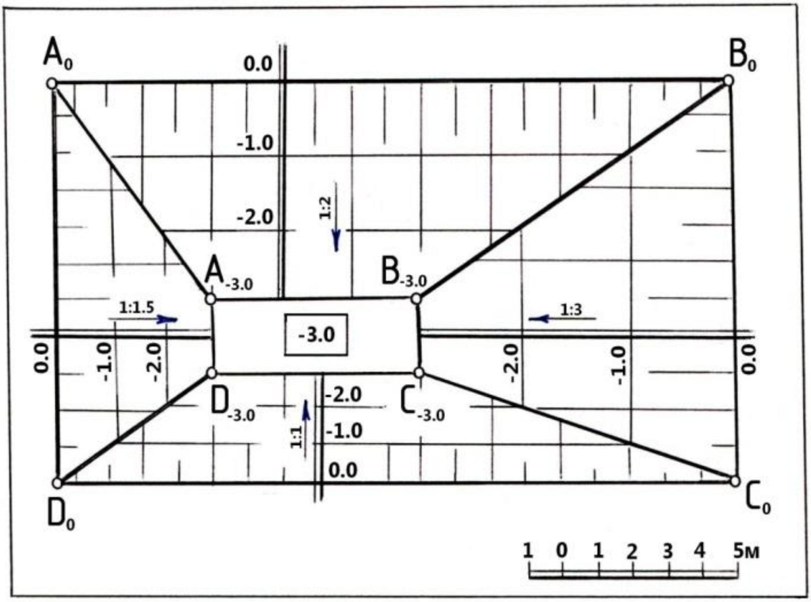


Початкова умова задачі.
Побудувати ліній перетину чотирьох укосів котлована. Дно котлована горизонтальне і має числову позначку – 3.0 м, ухили укосів котлована 1:1; 1:1.5; 1:2 та 1:3. Числова позначка поверхні землі дорівнює нулю і є площиною, що збігається з площиною π_0.

Розв'язування:

Вершини прямокутного дна котлована позначимо $A_{-3.0}$, $B_{-3.0}$, $C_{-3.0}$, $D_{-3.0}$. Вони належать лініям перетину суміжних укосів котлована. Оскільки поверхня землі є горизонтальною площиною з нульовою позначкою, лінії перетину чотирьох укосів котлована з нею є горизонталями укосів з нульовими позначками, які є бровками укосів котлована. Тому побудуємо горизонталі укосів котлована з нульовими позначками і визначимо точки перетину суміжних горизонталей, що і будуть точками, яких не вистачає. Ці точки належать лініям перетину укосів.

Виконуємо такі дії:



1. Проведемо проекції ліній найбільшого ухилу в усіх чотирьох укосах перпендикулярно до підошов укосів (до сторін дна котлована).

2. Відкладемо вздовж проекцій ЛНУ відрізки, що дорівнюють 3.0, 4.5, 6.0 та 9.0 м в укосах котлована із ухилами відповідно 1:1; 1:1.5; 1:2 та 1:3 і одержимо точки з нульовими позначками.

3. Через одержані точки проведемо горизонталі укосів з нульовими позначками, які є лініями перетину укосів із земною поверхнею, і визначимо точки перетину суміжних горизонталей: A_0, B_0, C_0, D_0.

4. Сполучивши точки A_0, B_0, C_0, та D_0 відповідно з точками $A_{-3.0}$, $B_{-3.0}$, $C_{-3.0}$, $D_{-3.0}$, одержимо проєкції ліній перетину укосів котлована між собою. Укоси заштрихуємо.

10.2. Перетин прямої лінії з площиною

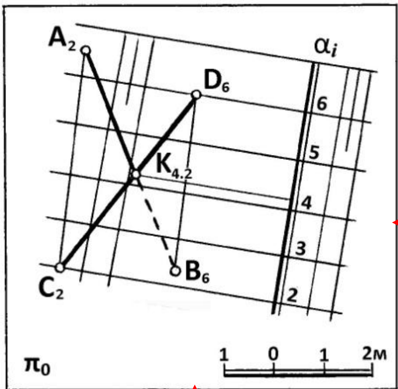
Спосіб горизонталей

За способом горизонталей для визначення точки перетину прямої з площиною:

- проводимо через пряму допоміжну січну площину, задану горизонтлями;

- будуємо лінію перетину допоміжної площини із заданою площиною, яка проходить через точки перетину горизонталей допоміжної площини із заданою, що мають однакові числові позначки;

- знаходимо точку перетину побудованої лінії перетину площин з даною прямою, яка і буде шуканою точкою перетину прямої із заданою площиною.



На рисунку визначено точку перетину осі прямолінійного трубопроводу *AB* з площиною земляного укосу α. Для цього виконуємо такі дії:

1. Проводимо через пряму *AB* довільну площину загального положення, задану горизонталями A_2C_2 та B_6D_6, які проведені таким чином, щоб вони перетинали горизонталі того ж рівня площини α у межах креслення.

2. Визначаємо точки C_2 та D_6, що є проєкціями точок перетину горизонталей A_2C_2 та B_6D_6 допоміжної площини із заданою, і сполучаємо їх прямою лінією C_2D_6, яка є проєкцією лінії перетину допоміжної площини із заданою.

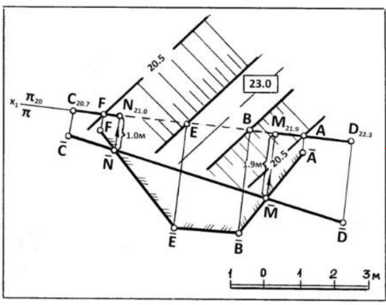
3. Знаходимо точку *К* – проєкцію точки перетину прямої C_2D_6 з даною прямою *АВ*, яка є шуканою проєкцією точки перетину осі прямолінійного трубопроводу *АВ* з площиною земляного укосу α.

Оскільки точка *К* належить площині α, то числову позначку точки *К* можна визначити за допомогою проведення через неї горизонталі площини α (на рисунку це горизонталь 4.2) або градуюванням прямої *АВ*.

Відзначимо, що в проєкціях з числовими позначками допоміжною площиною при застосуванні способу горизонталей може бути будь-яка площина загального положення, але тільки не проєкціююча. Це пов’язано з тим, що застосування допоміжної проєкціюючої площини, наприклад, вертикальної, призвело б до суміщення проєкцій прямих A_2B_6 та C_2D_6 і вимагало б додаткових побудов для визначення шуканої точки перетину.

Спосіб профілю

Якщо числові позначки у точок, що задають пряму лінію, дробові, то допоміжними площинами можуть бути не площини загального положення, як при застосуванні способу горизонталей, а горизонтально-проєкціюючі (вертикальні) площини, тобто такі задачі зручно розв’язувати способом профілю.



Задачу на визначення точок перетину осі прямолінійного трубопроводу *CD* з укосами насипу горизонтально розміщеного полотна дороги раціонально розв’язувати способом профілю, оскільки, по-перше, пряму *CD* задано точками з дробовими числовими позначками, по-друге, вона перетинає одночасно два укоси, що при застосуванні способу горизонталей потребує введення двох допоміжних січних площин. Послідовність розв'язування така:

1. Через пряму CD проводимо вертикальну площину π і будуємо на ній профілі прямої CD та земляної споруди, що складається з площин укосів та полотна дороги: $\overline{C}\overline{D}$ – профіль прямої; $\overline{A}\overline{B}\overline{E}\overline{F}$ – профіль земляної споруди, де прямі $\overline{A}\overline{B}$, $\overline{E}\overline{F}$ – профілі укосів, $\overline{E}\overline{B}$ – профіль полотна дороги (горизонтальної ділянки).

2. Знаходимо в перетині профілів $\overline{C}\overline{D}$ і $\overline{A}\overline{B}\overline{E}\overline{F}$ точки $\overline{M}$, $\overline{N}$.

3. Проєкціюємо точки $\overline{M}$, $\overline{N}$ на вісь проєкцій x_1 і одержуємо точки M, N – проєкції точок перетину осі прямолінійного трубопроводу з укосами насипу земляної споруди. Визначаємо числові позначки точок M та N.

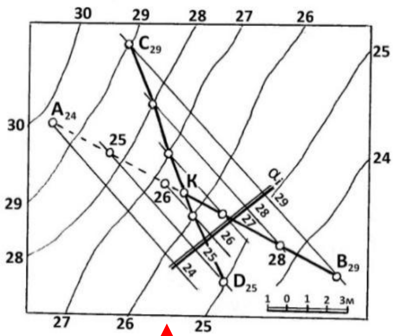
10.3. Перетин поверхні з прямою лінією

Побудову точок перетину прямої лінії з поверхнею розглянемо на прикладі перетину прямої лінії із земною поверхнею, оскільки ця задача має велике практичне застосування і зустрічається при проєктуванні трубопроводів, тунелів та інших споруд.

Побудова точок перетину прямої лінії із земною поверхнею в проєкціях з числовими позначками ґрунтується, як і в ортогональних проєкціях, на застосуванні допоміжних січних площин. При цьому, як і при перетині прямої з площиною, розрізняють два способи – горизонталей та спосіб профілю.

Спосіб горизонталей

В способі горизонталей використовують допоміжну площину загального положення. В цьому випадку пряму градують і через неї проводять площину загального положення, задану горизонталями, які проходять через точки прямої. Визначають точки перетину горизонталей допоміжної січної площини з горизонталями земної поверхні, що мають однакові числові позначки. Потім сполучають ці точки лінією, яка є лінією перетину допоміжної січної площини із земною поверхнею. Точка перетину одержаної лінії з заданою прямою і буде шуканою точкою перетину прямої із земною



На рисунку показано розв'язок задачі на визначення точки К перетину прямої AD із земною поверхнею. Для цього виконаємо такі дії:

1. Градуюємо пряму $A_{24}B_{29}$ і проводимо через пряму допоміжну січну площину α загального положення, яку на плані задано горизонталями, що проходять через відповідні точки прямої A_{24} і B_{29}. На рис. 1.61 побудовано також масштаб ухилу α_i площини α.

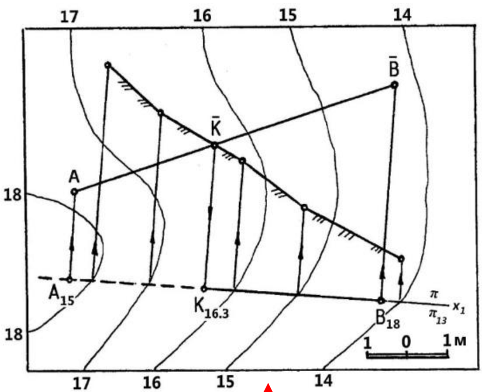
2. Визначаємо точки перетину горизонталей допоміжної січної площини α і горизонталей земної поверхні, що мають однакові числові позначки, і сполучаємо ці точки лінією $C_{29}D_{25}$, яка є проєкцією лінії перетину допоміжної січної площини α із земною поверхнею.

3. Точка *K* перетину одержаної лінії $C_{29}D_{25}$ із заданою прямою $A_{24}B_{23}$ є шуканою точкою перетину прямої *AB* із земною поверхнею.

4. Визначаємо видимість прямої *AB* на плані.

Спосіб профілю

При застосуванні способу профілю через пряму проводять вертикальну площину, в якій будують суміщені з площиною креслення профілі як заданої прямої, так і земної поверхні. Визначивши точку перетину побудованих профілів, переносять цю точку на проєкцію прямої на плані, яка і буде проєкцією шуканої точки перетину прямої із земною поверхнею.



На рисунку показано розв'язок задачі на визначення точки перетину прямої *AB* із земною поверхнею. Для цього виконаємо такі дії:

1. Через пряму АВ (її проєкція на плані $A_{15}B_{17}$) проводимо допоміжну вертикальну площину π і в ній будуємо суміщений з площиною креслення профіль $\overline{A}\overline{B}$ прямої АВ та профіль земної поверхні (виділено штриховкою).

При цьому побудова профілів ведеться в системі $x_1 \dfrac{\pi}{\pi_{13}}$, тобто базовою для побудови профілів є не площина π_0, а горизонтальна площина π_{13} з числовою позначкою 13. Це зроблено для того, щоб відкласти висоти точок не від площини π_0, а від площини π_{13}, що дає можливість розміщувати профілі в межах креслення. Наприклад, щоб побудувати профіль $\overline{A}$, потрібно від точки A_{15} на осі x_1 відкласти відрізок, що дорівнює

2 м (15-13 = 2 м). Якщо базовою була б площина π_0, то для побудови профілю $\overline{A}$ потрібно було б відкласти від осі x вже 15 м.

Зазначимо, що в даному випадку вісь x_1 проведено безпосередньо через пряму $A_{15}B_{17}$, хоча її можна розміщувати для зручності побудови профілів і далі від $A_{15}B_{17}$, причому по обидва боки.

2. Визначаємо точку $\overline{K}$ перетину профілю $\overline{A}\overline{B}$ з профілем земної поверхні.

3. Проєкціюємо точку $\overline{K}$ на пряму $A_{15}B_{17}$ на плані і визначаємо точку $K_{16.2}$, яка буде проєкцією шуканої точки перетину прямої AB із земною поверхнею. Точка К має числову позначку 16.3, яку визначено таким чином: $13+\left|\overline{K}K_{16.2}\right|=13+3{,}3=16{,}3$.

4. Визначаємо видимість $A_{15}B_{17}$ на плані.

Лекція 11. Перетин поверхні з площиною, перетин поверхонь

11.1. Перетин поверхні з площиною
11.2. Перетин поверхонь

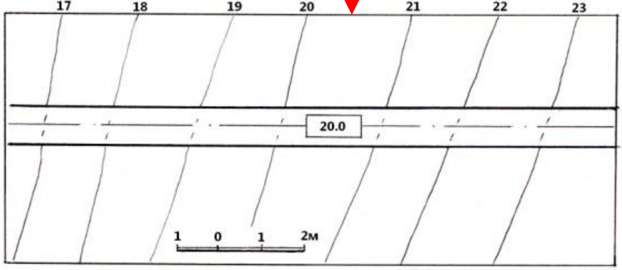
11.1. Перетин поверхні з площиною

Порядок побудови лінії перетину поверхні з площиною такий:

1. Побудувати на плані проєкції горизонталей площини та поверхні, якщо вони не задані.
2. Зафіксувати в межах зображеного плану всі точки перетину горизонталей площини з горизонталями поверхні, які мають однакові числові позначки.
3. Послідовно сполучити одержані точки кривою лінією, якщо поверхня криволінійна, або ламаною, якщо поверхня багатогранна. Ця лінія і буде шуканою лінією перетину поверхні з площиною.

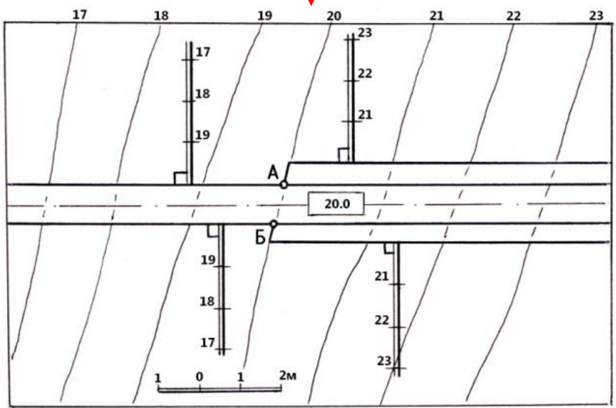
Приклад 1 на визначення лінії перетину площини із земною поверхнею

Початкова умова задачі. Побудувати лінії перетину земляних укосів, що примикають до **горизонтального полотна дороги**, із земною поверхнею. Ухил укосів 1:1, ширина смуг під кювети 0.5 м.



Розв'язування. 1. Визначення точок нульових робіт та типів укосів

Перш ніж виконувати побудови, потрібно з'ясувати, який тип укосів примикає до полотна дороги. В укосах насипу числові позначки точок по мірі віддаленості від дороги зменшуються, а в укосах виїмки – збільшуються. Визначають тип укосів таким чином. Відмічаємо точку перетину крайньої справа горизонталі земної поверхні з числовою позначкою 23 із бровкою споруди (дороги). Оскільки полотно дороги в цьому місці повинно мати числову позначку 20, а земна поверхня має більшу числову позначку, то для спорудження дороги землю потрібно забирати, а отже, справа на плані до дороги примикає укіс виїмки. Тепер візьмемо крайню зліва точку перетину горизонталі земної поверхні з числовою позначкою 17 із бровкою дороги. Оскільки дорога в цьому місці повинна мати також числову позначку 20, а земна



поверхня має меншу числову позначку, то для спорудження дороги землю потрібно підсипати, а отже, зліва на плані до дороги примикає укіс насипу.

Звідси логічно випливає, що на бровці дороги повинна бути точка, в якій укіс виїмки переходить в укіс насипу і навпаки.

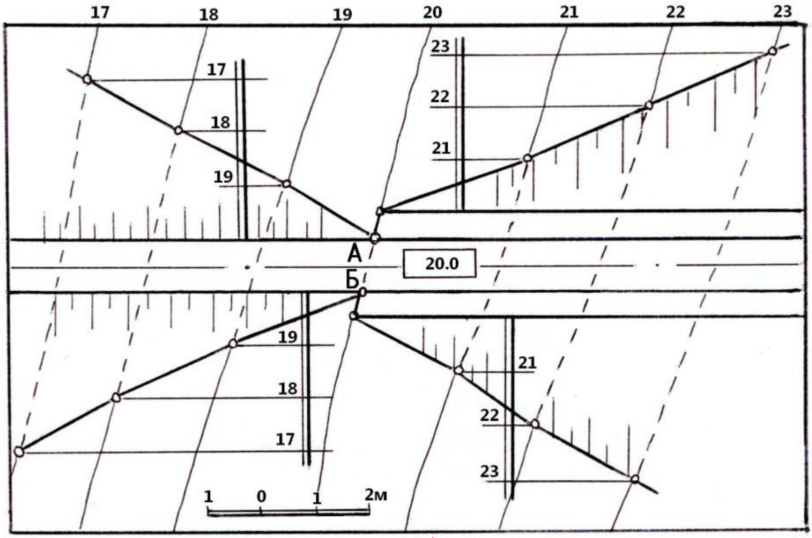
Зрозуміло, що це точка перетину бровок дороги із земною поверхнею. На рисунку дані точки позначені літерами А і Б. Точки А і Б називають точками нульових робіт. Отже, **точки нульових робіт –** ***це точки перетину ліній контуру споруди із земною поверхнею.*** В цих точках ніяких земляних робіт не виконують, укіс виїмки переходить в укіс насипу і навпаки. Проте слід зазначити, що не тільки укіс виїмки переходить в укіс насипу в точці нульових робіт, а можуть переходити в цій точці один в одний і однотипні укоси. Детальніше про це буде сказано нижче.

Визначивши точки А і Б нульових робіт, в укосах виїмки проводимо смуги під кювети, до яких вже будуть прилягати укоси виїмки. Кювети виконують з метою відводу води з укосів виїмки, наприклад, під час дощу, щоб вода не збиралася на полотні дороги.

На рисунку в межах плану до полотна дороги з двох боків примикають два укоси насипу і два укоси виїмки. В кожному укосі проводимо ЛНУ перпендикулярно до бровки дороги в укосах насипу і до лінії контуру кювету в укосах виїмки. Потім градуюємо ЛНУ площин. Оскільки ухили всіх укосів 1:1, то відстань між точками ЛНУ, що мають цілочислові значеннями позначок (інтервал ЛНУ), буде складати 1 м

2. Визначення меж земляних робіт укосів

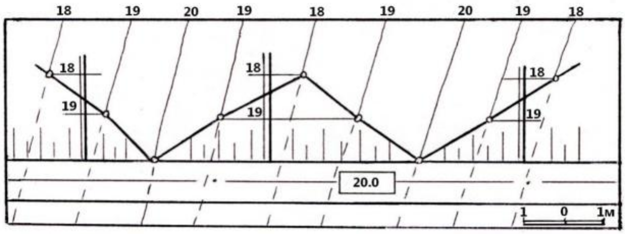
Через точку ЛНУ з цілими числовими позначками проводимо відповідні горизонталі укосів, тобто градуюємо укоси насипу та виїмки. Далі для визначення лінії перетину укосів із земною поверхнею знаходимо точки перетину горизонталей укосів із горизонталями земної поверхні, що мають однакові числові позначки. Через отримані точки проводимо плавну лінію або з'єднуємо суміжні точки відрізками ламаної лінії. Лінії доводимо до точок нульових робіт. Для укосів виїмки вони перемістилися на смугу кювету. ***Лінії перетину земляних укосів із земною поверхнею називають*** **межами земляних робіт**. Після визначення меж земляних робіт земляні укоси



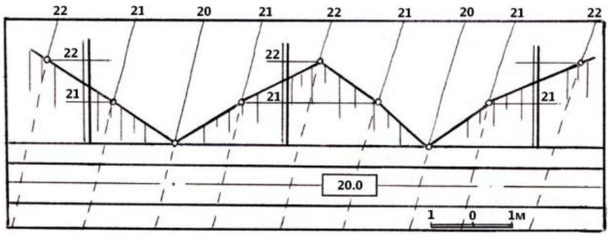
зображають штриховкою паралельними короткими та довгими лініями, так званими **бергштрихами.** Бергштрихи проводять з верхньої кромки укосу перпендикулярно до його горизонталей і в бік горизонталей з меншою числовою позначкою. Для укосів виїмки верхньою кромкою є межа земляних робіт, а для укосів насипу – лінія контуру споруди, до якої примикає укіс насипу. Бергштрихи показують напрям ЛНУ даної площини земляних укосів, тобто вони паралельні до ЛНУ.

В точках нульових робіт не тільки укіс виїмки може переходити в інший тип укосу – укіс насипу, але і однотипні укоси можуть переходити один в одний.

Приклад на примикання до полотна дороги трьох укосів виїмки (з одного боку полотна дороги)



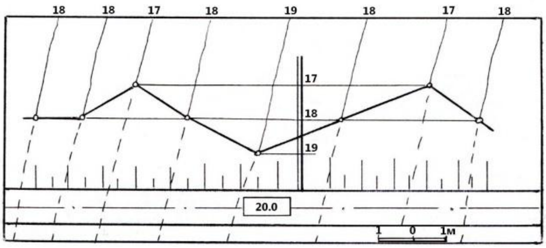
Приклад на примикання до полотна дороги трьох укосів насипу (з одного боку полотна дороги)



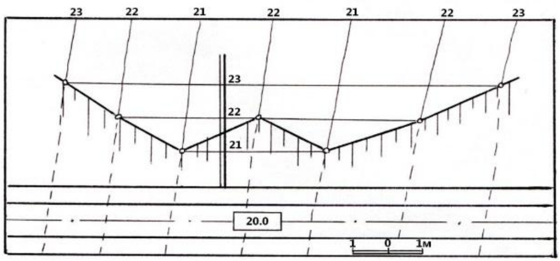
Задачі на побудову меж земляних робіт укосів треба починати розв'язувати із знаходьження точок нульових робіт.

Якщо в межах плану, зображеного на кресленні, немає точок нульових робіт, то це означає, що до споруди примикає тільки один укіс: або укіс насипу, або укіс виїмки.

Приклад, коли до полотна дороги прилягає тільки один **укіс насипу** (в межех плану відсутні точки нульових робіт)

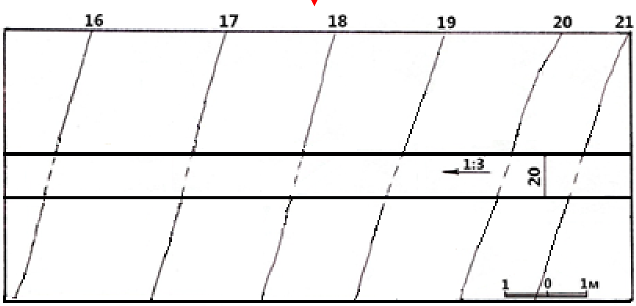


Приклад, коли до полотна дороги прилягає тільки один **укіс виїмки** (в межах плану відсутні точки нульових робіт)



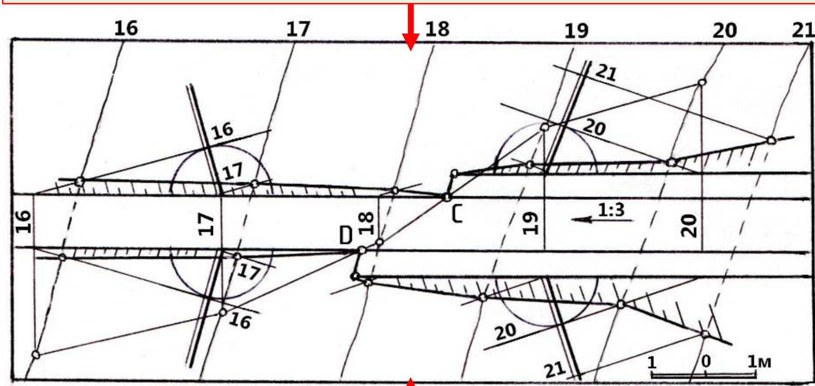
Приклад 2 на визначення лінії перетину площини із земною поверхнею

Початкова умова. Побудувати межі земляних робіт укосів, що примикають до **нахиленого полотна дороги**. Ухил полотна дороги 1:3, ухил укосів 1:1, ширина смуг під кювети 0,5 м.



Розв'язування. Спочатку градуюємо полотно дороги. Оскільки ухил полотна 1:3, то горизонталі полотна дороги відстоять одна від одної на відстані 3 м.

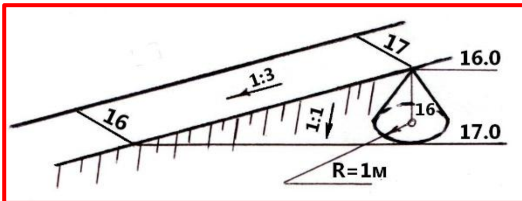
Точки нульових робіт можна визначити різними способами, наприклад, способом профілю, провівши допоміжну вертикальну площину через бровку полотна дороги. На рисунку точки нульових робіт C і D визначені способом горизонталей. За цим способом будують теоретичну лінію перетину площини полотна дороги із земною поверхнею. Для цього знаходять точки перетину горизонталей полотна дороги з горизонталями земної поверхні з однаковими числовими позначки. Через знайдені точки проводять шукану лінію перетину і визначають точки C і D, в яких ця лінія перетинає бровки полотна дороги. Встановлюємо, що справа від точок нульових робіт до дороги примикають укоси виїмки, а зліва – укоси насипу.



Наступний етап – це градуювання укосів, заданих прямими загального положення та величиною ухилу площини укосів. Звернемо увагу на деякі особливості в градуюванні укосів насипу та виїмки. В укосах насипу із двох можливих горизонталей з числовими позначками 16 і 17 спочатку проводять горизонталь з меншою числовою позначкою, що є дотичною до горизонталі конуса, вершина якого знаходиться в точці на бровці з числовою позначкою 17. Радіус горизонталі конуса визначаємо за формулою:

$$R = h \cdot l = (17-16)\cdot 1 = 1м.$$

Побудову горизонталі укосу насипу з числовою позначкою 16 показано на плані і проілюстровано на наочному зображенні.

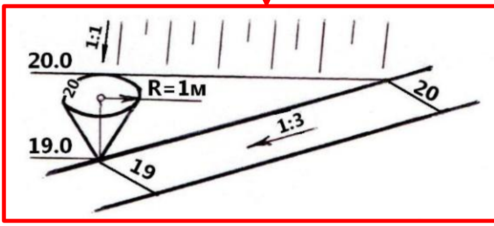


Побудова на наочному зображенні горизонталі 16 в укосі насипу (доповнення до основного рисунка)

Щодо градуювання укосу виїмки, то тут з двох можливих горизонталей 19 та 20 спочатку проводять горизонталь з більшою числовою позначкою. Це необхідно постійно враховувати, градуюючи той чи інший тип земляних укосів. Горизонталь 20 з більшою числовою позначкою є дотичною до горизонталі конуса з вершиною в точці з меншою числовою позначкою 19. Причому використовують верхню полу прямого колового конуса (перевернутий кнус), а його горизонталь і її центр мають числові позначки горизонталі, яку потрібно спочатку провести в укосі виїмки, тобто 20. Радіус цієї горизонталі конуса також визначаємо за формулою (1.2):

$$R = h \cdot l = \left|(19-20)\right| \cdot 1 = 1м.$$

Побудову горизонталі укосу виїмки з числовою позначкою 20 показано на плані і проілюстровано на наочному зображенні.



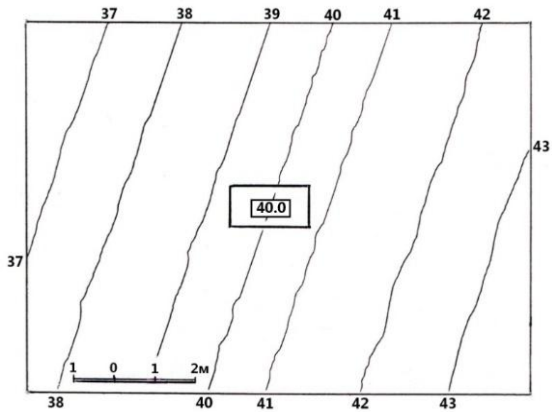
Побудова на наочному зображенні горизонталі 20 в укосі виїмки (доповнення до основного рисунка)

Після того, як в укосах побудовано по одній горизонталі, можна перпендикулярно до них провести ЛНУ площин земляних укосів, які градуюють, і через знайдені точки з цілими числовими поз-начками провести горизонталі укосів. Потім будують межі земляних робіт укосів і виконують штриховку отриманих укосів.

Бергштрихи проводять не перпендикулярно до меж земляних робіт, а перпендикулярно до горизонталей укосів або

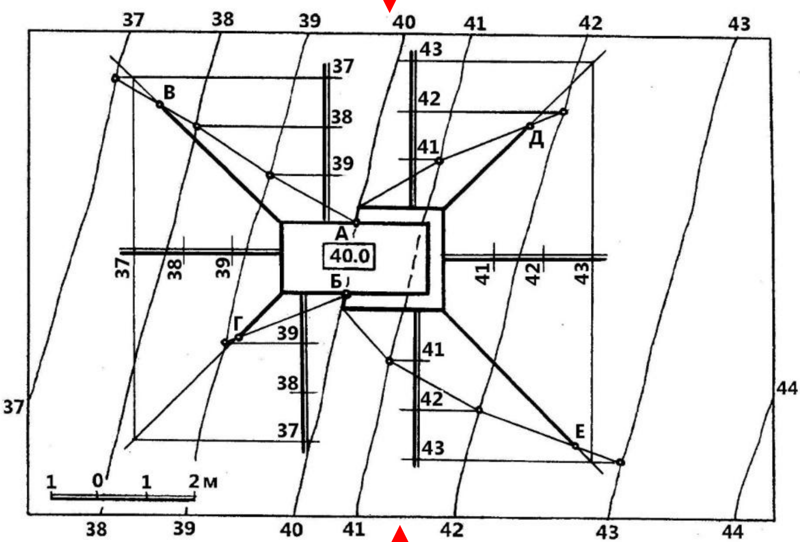
Приклад 3 на визначення лінії перетину площини із земною поверхнею

Початкова умова. Визначити межі земляних робіт укосів будівельного майданчика. Ухил земляних укосів 1:1, ширина смуг під кювети 0,3 м.



Розв'язування. 1. Побудова точок нульових робіт та ліній перетину суміжних укосів.

Точки А і Б – точки нульових робіт, в яких горизонталь земної поверхні з числовою познакою 40 перетинає лінію контура будівельного майданчика, що має числову позначку 40. Зліва від цих точок до майданчика прилягають три укоси насипу, а справа – три укоси виїмки, що примикають до кювету. Детальніше зупинимося на побудовах ліній перетину укосів між собою. Виконаємо градуювання укосів. Оскільки сторони майданчика є горизонталями укосів з числовими позначками 40 м, то проводимо ЛНУ перпендикулярно до сторони контура майданчика в кожному із шести укосів. Градуюємо ЛНУ з урахуванням типу укосів. Потім в укосах насипу проводимо горизонталі з числовою позначкою 37 м, а в укосах виїмки – горизонталі з числовою позначкою 43 м для визначення точки, через яку проходить лінія перетину двох суміжних укосів. Друга точка – перетин сторін контуру майданчика.



Через указані точки проводимо так звану «теоретичну» лінію перетину суміжних укосів за умови, що укоси безмежні, тобто не обмежуються земною поверхнею. Ця «теоретична» лінія перетину в укосах насипу проходить через точки перетину горизонталей суміжних укосів з числовими позначками 37 і 40, а в укосах виїмки – через точки перетину горизонталей суміжних укосів з числовими позначками 40 і 43.

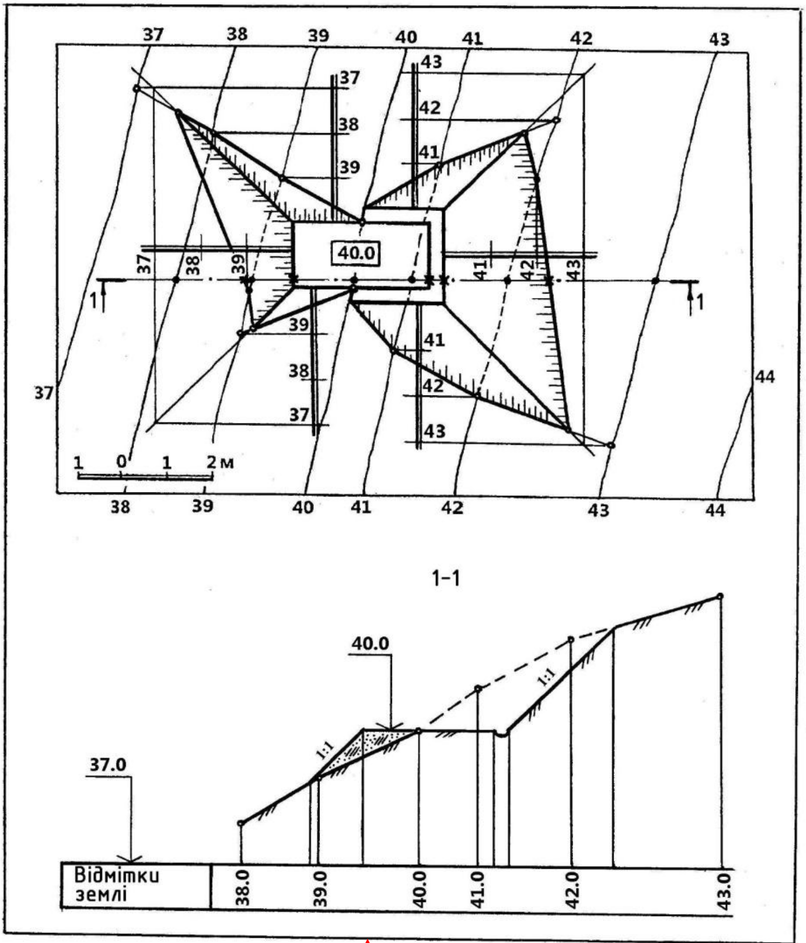
В дійсності «теоретична» лінія обмежується перетином укосів із земною поверхнею. Для її визначення будують межі земляних робіт укосів. Так, на рис. 8.97 межа земляних робіт верхнього укосу насипу перетинає «теоретичну» лінію в точці В, яка і обмежує лінію перетину верхнього і розміщеного зліва укосів (виділена на плані потовщеною лінією). Побудувавши межу земляних робіт нижнього укосу, знаходимо точку *Г*, що обмежує лінію перетину нижнього і розміщеного зліва укосів. Аналогічно знаходимо точки *Д* і *Е*, які обмежують лінію перетину суміжних укосів виїмки.

2. Побудова меж земляних робіт укосів та профілю 1-1 земної поверхні і будівельного майданчика з укосами

Позначена під профілем 1-1 графа «Відмітки землі» - це верхня графа сітки профілю, що є низкою горизонтально розміщених граф (в даному прикладі інші графи не показані), кількість і розміри яких залежать від призначення профілю та області його застосування. Слід зазначити, що слово «відмітка» часто вживається замість терміну «числова позначка».

У графі «Відмітки землі» записують числові позначки точок горизонталей земної поверхні, в яких вони перетинають на плані слід вертикальної площини, проведеної у напрямі 1-1. Ці точки зазначені символами «•». За ними будують профіль земної поверхні. Символами «(**х**)» позначені точки, за якими будується профіль будівельного майданчика з укосами.

Верхню горизонтальну лінію сітки профілю приймають за базу профілю, від якої по вертикалі відкладають відрізки прямих, що відповідають різниці числових позначок точок землі, зафіксованих на напрямі 1-1, та умовної відмітки бази профілю. Умовну відмітку бази профілю вибирають таким чином, щоб зручно було відкладати вертикальні відстані, а лінія профілю не виходила за межі відведеного місця на кресленні. В даній задачі умовна відмітка бази профілю дорівнює 31.0 м – це числова позначка горизонтальної площини, від якої відкладають



відрізки прямих при побудові профілю земної поверхні. Вона вибрана на 1 м нижче найменшої (38.0 м) числової позначки горизонталі земної поверхні в перетині 1-1. Тому умовну відмітку бази профілю беремо на 1 м меншою, тобто 37.0 м.

Потім виконуємо такі побудови:

1. Визначаємо на плані точки перетину горизонталей земної поверхні із слідом вертикальної площини, проведеної у напрямі 1-1. Ці точки позначені «•».

2. Відстані між визначеними точками переносимо на базу профілю.

3. У графі «Відмітка землі» над поділками, що відповідають визначеним точкам, вписуємо числові позначки 38.0, 39.0 … 43.0.

4. Від бази профілю відкладаємо в прийнятому вертикальному масштабі відрізки, що дорівнюють різниці числових позначок точок землі та умовної відмітки (позначки) бази профілю, тобто 38.0-31.0, 39.0-31.0 … 43.0-31.0.

5. Отримані на вертикальних відрізках профілі точок землі сполучаємо плавною лінією або відрізками прямої лінії.

6. Будуємо за зазначеними на плані точками «(**x**)» профіль будівельного майданчика з укосами. Записуємо на профілі 1-1 числову позначку 40.0 горизонтального будівельного майданчика, виконуємо штриховку профілю земної поверхні, а також укосу насипу, як засипку.

11.2. Перетин поверхонь

Побудова лінії взаємного перетину двох поверхонь у проєкціях з числовими позначками, як і при перетині двох площин, поверхні з площиною, ґрунтується на методі допоміжних січних площин.

Як допоміжні використовують горизонтальні площини, які перетинають дані поверхні по їх горизонталях. Точки перетину горизонталей однієї поверхні з горизонталями другої, що мають однакові числові позначки, будуть точками лінії взаємного перетину поверхонь. Практично допоміжні січні площини тільки «тримають в пам'яті», а на планах проводять або використовують готові горизонталі поверхонь.

Порядок побудови лінії взаємного перетину поверхонь такий:

1. Провести проєкції горизонталей обох поверхонь.

2. Зафіксувати точки перетину горизонталей з однаковими числовими позначками.

3. Одержані точки послідовно сполучити лінією, яка і буде лінією взаємного перетину поверхонь.

Побудова меж земляних робіт будівельного майданчика

На рисунку визначені межі земляних робіт горизонтального будівельного майданчика з числовою позначкою 60 м та нахиленим в'їздом, який складається з криволінійної та прямолінійної ділянок. Ухили укосів: насипу – 1:1.5, виїмки – 1:1, ухил в'їзду – 1:6, ширина смуг під кювети становить 1.5 м. Укоси, що примикають до будівельного майданчика та в'їзду на нього, позначені цифрами I … II в кружечках.

Пояснення до розв'язування даної задачі.

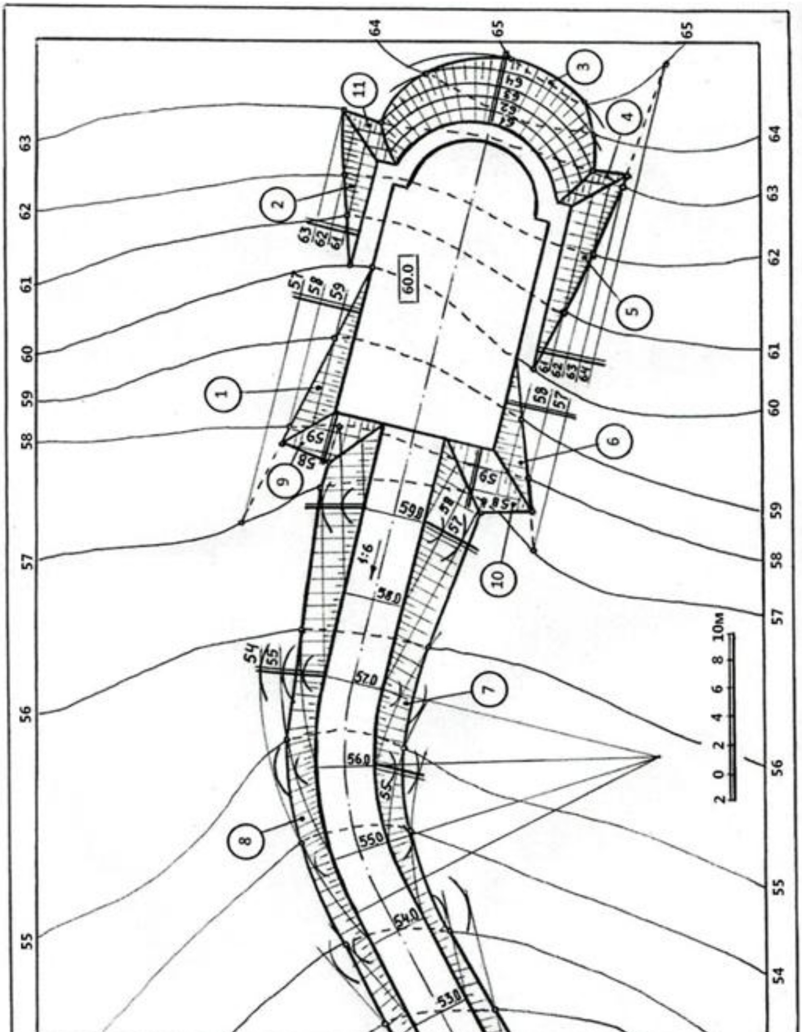
1. Градуювання укосів 1, 9 та 6, 10 насипу, градуювання укосів 2, 11 та 4, 5 виїмки, а також побудова ліній перетину зазначених укосів між собою та із земною поверхнею виконано аналогічно до прикладу, наведеного на рисунку (с.169).

2. Градуювання укосу 3 та визначення ліній перетину його з укосами 4 та 11 виконано з урахуванням того, що укіс 3 є поверхнею прямого колового конуса, розміщеного вершиною донизу (верхня пола конуса).

Кутові точки ліній перетину укосу 3 з укосами 4 та 11 знаходяться як в прикладі, що зображений на рисунку (с.169). Горизонталі укосу 3 продовжено до перетину з наступною горизонталлю земної поверхні.

3. Укоси 7 та 8 насипу нахиленого в'їзду є поверхнями однакового ухилу, градуювання і перетин яких з земною поверхнею виконаємо аналогічно розглянутому на рисунку (с. 164).

Побудова ліній перетину укосів 7 та 10, а також укосів 8 та 9 полягає у визначенні точок перетину горизонталей суміжних укосів з однаковими числовими позначками. Кутові точки ліній перетину суміжних укосів визначаємо як в прикладі, наведеному на рисунку (с. 169).



Список рекомендованої літератури

1. Крівцов В.В., Дєєв С. С. Нарисна геометрія : навч. посібник. Київ : НМК ВО, 1992. 244 с. Наукова бібліотека НУВГП, URL: http://nuwm.edu.ua/MySql/.

2. Крівцов В. В. Нарисна геометрія : навч. посібник. Рівне : НУВГП, 2012. 240 с. Наукова бібліотека НУВГП, URL: http://nuwm.edu.ua/MySql/.

3. Науменко Ю. В., Крівцов В. В. Нарисна геометрія : навчальний посібник. Рівне : НУВГП, 2012. 213 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua./id/eprint/1889/.pdf.

4. Крівцов В. В., Дєєв С. С. Нарисна геометрія: контрольні запитання та відповіді : навч. посібник. Рівне : НУВГП, 2010. 162 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/2152.

5. Крівцов В. В., Тимощук І. О., Приймак С. А. Нарисна геометрія : навчальний посібник з використанням іноземних мов. Рівне : НУВГП, 2016. 280 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/7531.

6. Крівцов В. В., Козяр М. М. Нарисна геометрія (базовий курс) : навч. посібник. Рівне : НУВГП, 2019. 234 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/14021

7. Крівцов В. В., Пугачов Є. В.. Проекції з числовими позначками : навч. посібник. Рівне : НУВГП, 2014. 135 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua./id/eprint/1947/1/.pdf.

8. Крівцов В. В., Караван В. В. Інженерна графіка (спецкурс) : навч. посібник. Рівне : НУВГП, 2015. 191 с. Наукова бібліотека НУВГП, URL: http://nuwm.edu.ua/MySql/.

9. Крівцов В. В., Козяр М. М., Коптюк Р. М. Зображення земляних споруд за допомогою методу проекцій з числовими позначками : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2017. 176 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/8219.

10. Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Інженерна графіка» (Модуль 1. Нарисна геометрія) для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології» денної і заочної форм навчання / Крівцов В. В.

Рівне : НУВГП, 2018. 137 с. (шифр 02-05-92). URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/13538.

11. Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Інженерна графіка» (Змістовий модуль 2. Проекції з числовими позначками) для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології» денної і заочної форм навчання / Крівцов В. В. Рівне : НУВГП, 2018. 85 с. (шифр 02-05-93). URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/13539.

Інформаційні ресурси

1. Національна бібліотека ім. В. І. Вернадського. URL: http://www.nbuv.gov.ua/
2. Рівненська обласна універсальна наукова бібліотека (м. Рівне, майдан Короленка, 6). URL: http://www.libr.rv.ua/
3. Наукова бібліотека НУВГП (м. Рівне, вул. Олекси Новака, 75). URL: http://nuwm.edu.ua/naukova-biblioteka
4. Цифровий репозиторій НУВГП. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/view/types/metods/