Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства
та природокористування

Кафедра хімії та фізики

05-06-45

Методичні вказівки
до виконання практичних і самостійних робіт
із навчальної дисципліни «Фізика»

Розділ «Електрика. Магнетизм»

для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки
денної, заочної та дистанційної форми навчання

Рекомендовано
науково-методичною
радою НУВГП,
протокол № від 2015р.

Рівне 2015

Методичні вказівки до виконання практичних і самостійних робіт із навчальної дисципліни **Фізика**, розділ «Електрика, Магнетизм» для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки денної, заочної та дистанційної форм навчання / Є.С.Никонюк, Б.П.Рудик, Л.В.Соляк, Рівне: НУВГП, 2015, – 52 с.

Упорядники:
Никонюк Є.С.,канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри хімії та фізики;
Рудик Б.П., завідувач лабораторії хімії та фізики;
Соляк Л.В., асистент кафедри хімії та фізики.

Відповідальний за випуск:
Гаращенко В.І., канд. техн. наук, доцент кафедри хімії та фізики.

Зміст

ПЕРЕДМОВА **3**

Тема 1. Електростатика **4**

1.1. Основні закони та співвідношення 4

1.2. Приклади розв'язування задач 7

1.3. Задачі для самостійного розв'язування 18

Тема 2. Електричний струм **22**

2.1.Основні закони та співвідношення 22

2.2 . Приклади розв'язування задач 24

3.3.Задачі для самостійного розв'язування 30

Тема 4. Магнетизм **34**

4.1.Основні закони та співвідношення 34

4.2. Приклади розв'язування задач 37

4.3. Задачі для самостійного розв'язування 45

Довідкові дані **51**

Література **53**

ПЕРЕДМОВА

Мета практичних занять з фізики – закріпити вивчення теоретичного матеріалу шляхом вироблення вмінь та навичок його застосування до розв'язування задач. Історично сформувався певний алгоритм цього процесу:

1. Перш за все потрібно уяснити до якого розділу відноситься розглядувана задача і ознайомитись з теорією цього розділу, бо без знання базових понять науки і зв'язків між ними неможливе правильне оперування цими поняттями.

2. Умову задачі слід записати словесно і скорочено у загальноприйнятих символічних позначеннях (див. **Приклади розв'язування задач**).

3. Дані задачі та необхідні константи перевести до однієї системи одиниць (загальноприйнятою зараз є міжнародна система одиниць СІ).

4. Зробити малюнок до задачі (за винятком окремих очевидних випадків); малюнок допомагає збагнути зміст задачі і часто підказує ідею її розв’язання.

5. Розв’язати задачу у загальному вигляді одержавши робочу формулу шуканої величини. Розв’язання супроводжувати короткими поясненнями, які розкривають логіку міркувань.

6. Підставити у робочу формулу дані задачі та константи і обрахувати числове значення шуканої величини вказавши її одиницю. Точність обчислень не повинна перевищувати точність заданих величин.

7. Переконатись у «розумності» одержаного результату як з точки зору його розмірності, так і з точки зору відповідності до загальних законів природи. Повчально прояснити для себе алгоритм розв’язання даного типу задач.

Тема 1. Електростатика

1.1. Основні закони та співвідношення

- **Закон Кулона**

$$F=\frac{|q_1q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2},$$

де F – модуль сили взаємодії точкових зарядів q_1 і q_2, що розміщені на відстані r один від одного, в середовищі з діелектричною проникністю ε; ε_0 – електрична стала.

- **Напруженість і потенціал електростатичного поля**

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q};\ \varphi=\frac{W_p}{q},$$

де W_p – потенціальна енергія точкового заряду, вміщеного в дану точку поля.

- **Сила, що діє на точковий заряд в електричному полі, і потенціальна енергія цього заряду**

$$\vec{F}=q\vec{E};\ W_p=q\cdot\varphi.$$

- **Напруженість і потенціал поля, створеного системою *N* точкових зарядів (принцип суперпозиції електричних полів)**

$$\vec{E}=\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i;\ \varphi=\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\ ,$$

де $\vec{E}_i, \varphi_i$ – напруженість і потенціал поля, створеного точковим зарядом q_i в даній точці поля.

- **Зв’язок між потенціалом і напруженістю**

$$\vec{E}=-\mathbf{grad}\,\varphi;\ \vec{E}=-\left(\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$ – в загальному вигляді;

$E=\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{d}$ – для однорідного поля (d – відстань між точками з потенціалами φ_1 та φ_2);

$E=-\dfrac{d\varphi}{dr}$ – для поля, що володіє центральною чи осьовою симетрією.

- **Модуль напруженості і потенціал поля точкового заряду**

$$E=\frac{|q|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2};\ \varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

де r – відстань від заряду до точки, в якій визначаються напруженість і потенціал.

- **Модуль напруженості і потенціал поля, створеного зарядженою провідною сферою радіуса *R* на відстані *r* від її центра**

$$E=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\ , & r>R,\\ 0, & r<R;\end{cases}\qquad \varphi=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}, & r>R,\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\dfrac{q}{R}, & r\le R.\end{cases}.$$

- **Модуль напруженості поля, створеного нескінченно довгою прямолінійною рівномірно зарядженою ниткою (тонким циліндром)**

$$E=\frac{|\tau|}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

де r – відстань від нитки або від осі циліндра до точки, в котрій визначається напруженість; $\tau=\dfrac{q}{l}$ – лінійна густина заряду.

- **Модуль напруженості поля створеного нескінченною рівномірно зарядженою площиною**

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

де $\sigma = \dfrac{q}{S}$ – поверхнева густина заряду.

- **Модуль напруженості поля в середині нескінченного зарядженого плоского конденсатора**

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

- **Робота сил поля по переміщенню заряду q з точки поля з потенціалом φ_1 у точку з потенціалом φ_2**

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

- **Електроємність відокремленого провідника**

$$C = \frac{q}{\varphi},$$

де q – заряд провідника, φ – його потенціал.

- **Електроємність (провідної) сфери радіусом R**

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R.$$

- **Електроємність конденсатора**

$$C = \frac{q}{U},$$

де q – заряд пластини, U – різниця потенціалів між пластинами.

- **Електроємність плоского конденсатора**

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

де S – площа пластини, d – відстань між ними.

- **Електроємність батареї конденсаторів**

$\dfrac{1}{C} = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{1}{C_i}$ – при послідовному з’єднанні,

$C = \sum\limits_{i=1}^{N} C_i$ – при паралельному з’єднанні,

де N – кількість конденсаторів, C_i – ємність окремого конденсатора.

- **Енергія зарядженого провідника**

$$W=\frac{q\varphi}{2};\ W=\frac{C\varphi^2}{2};\ W=\frac{q^2}{2C}.$$

- **Енергія зарядженого конденсатора**

$$W=\frac{qU}{2};\ W=\frac{CU^2}{2};\ W=\frac{q^2}{2C}.$$

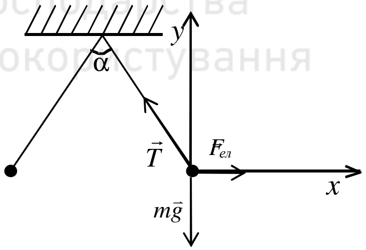
- **Енергія електричного поля**

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0E^2\cdot V$$

1.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Дві однакові металеві кульки масою 0,5г кожна підвішені на нитках однакової довжини так, що їх поверхні дотикаються. Після того, як кулькам був наданий заряд q, вони розійшлися на 10см, а нитки утворили кут 36° (див. рисунок). Визначити наданий кулькам заряд, якщо вони знаходяться в повітрі.

Розв'язання



Дано:
m=1,5г=1,5·10^{-3}кг
r=10 см=0,1м
α=36°

q?

Згідно із законом збереження заряду останній розділиться між кульками порівну (тут враховано, що кульки мають однакові розміри), тобто на кожній кульці буде заряд $q_1=q_2=\dfrac{q}{2}$. На кожну кульку діють три сили: сила тяжіння $m\vec{g}$, сила натягу нитки $\vec{T}$ і сила кулонівського відштовхування $\vec{F}_{ел}$; модуль останньої $F_{ел}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2}{r^2}$. В рівновазі сума цих трьох сил рівна нулю:

$$m\vec{g}+\vec{F}_{ел}+\vec{T}=0.$$

Спроектуємо це векторне рівняння на координатні осі x та y (див. рис.); отримаємо два скалярні рівняння

$$\begin{cases} T\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - mg = 0 \\ F_{ел} - T\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь відносно $F_{ел}$, отримаємо

$$F_{ел} = mg\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = mg\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

або

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{r^2} = mg\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

звідки

$$q = 4r\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Підставляємо чисельні значення.

$$q = 4\cdot 0{,}1\cdot\sqrt{3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8\cdot 0{,}32} = 7{,}3\cdot 10^{-8}\,(Кл).$$

Відповідь: 73 нКл.

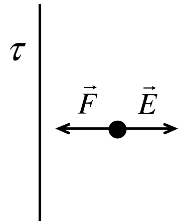
Приклад 2. Знайти силу, що діє на заряд $q = 4{,}5\cdot 10^{-10}\,Кл$, що знаходиться в повітрі на відстані $r = 2\,см$ від нескінченно довгої нитки, зарядженої з лінійною густиною заряду $\tau = 2\cdot 10^{-7}\,\frac{Кл}{м}$. Яку роботу треба виконати, щоб зменшити відстань між зарядом і ниткою вдвічі?

Розв'язання

Дано:
q = 4,5·10^{-3} Кл
r = 2 см = 2·10^{-2} м
τ = 2·10^{-7} Кл/м
$r_2 = r_1/2$

F_1 ?   A ?

Напруженість поля нескінченно довгої нитки, зарядженої з лінійною густиною заряду τ в повітрі, на відстані r від неї,



$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

На заряд, що знаходиться на відстані r_1 від нитки, діє сила $\vec{F}_1$, модуль якої $F_1 = qE_1 = \dfrac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_1}$, напрямлена в той же бік, що і напруженість (адже заряд q – додатній).

$$F_1 = \frac{4{,}5\cdot 10^{-10}\cdot 2\cdot 10^{-4}}{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 2\cdot 10^{-2}} = 0{,}08(H).$$

Щоб наблизити кульку до нитки, треба прикласти силу, рівну за величиною силі електростатичного відштовхування, і напрямлену у протилежний бік. Оскільки ця сила залежить від відстані між зарядом і ниткою, робота сили $A = -\int\limits_{r_1}^{r_2} F dr$;

$$A = -\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = -\frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2} = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2}$$

$$A = \frac{4{,}5\cdot 10^{-10}\cdot 2\cdot 10^{-4}}{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\ln 2 = 1{,}1\cdot 10^{-3}(Дж)$$

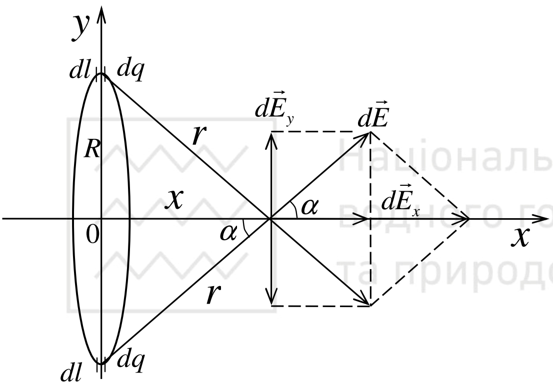
Відповідь: 1,1 мДж.

Приклад 3. Надлишковий заряд q рівномірно розподілений по металевому кільцю радіусом R. Визначити напруженість та потенціал електричного поля в точці, розміщеній на відстані x від центра кільця на осі симетрії, перпендикулярній до площини кільця.

Розв'язання

Дано:
q
R
x
E? φ?

Розглянемо два однакові, діаметрально протилежні елементи кільця з однаковими зарядами dq. Кожен з них створює електричне поле з напруженістю $d\vec{E}$. Розкладемо цей вектор на дві складові: вздовж осі OX $d\vec{E}_x$ і вздовж осі OY $d\vec{E}_y$. Як видно з малюнка, обидві складові вздовж OX мають однаковий напрямок, а складові вздовж OY – протилежні напрямки і їхня сума дорівнює нулю. Тому для визначення результуючої напруженості достатньо знайти суму складових вздовж осі OX.



Будемо вважати заряд dq точковим. Тоді

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}. \quad (1)$$

За теоремою Піфагора

$$r^2 = R^2 + x^2. \quad (2)$$

Заряд dq рівний

$$dq = \frac{q}{2\pi R}dl, \quad (3)$$

де dl – елемент довжини кільця. Підставимо (2) і (3) в (1):

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{2\pi R\left(R^2 + x^2\right)}dl. \quad (4)$$

Виходячи з геометричних міркувань можна записати:

$$dE_x = dE\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$dE_x = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \cdot dE \,. \tag{5}$$

Підставимо (4) в (5):

$$dE_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{2\pi R\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dl \,.$$

Проінтегруємо цей вираз по колу:

$$\int_0^E dE_x = \int_0^{2\pi R} \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{2\pi R\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dl \,,$$

або

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{2\pi R\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^{2\pi R} dl =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{2\pi R\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi R \,.$$

Остаточно

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \,. \tag{7}$$

Формула (7) визначає напруженість електричного поля в точці з координатою $\boldsymbol{x}$.

Запишемо потенціал електричного поля створеного зарядом dq:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r} \,. \tag{8}$$

Підставимо (2) і (3) у (8):

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{2\pi R\sqrt{R^2 + x^2}}\, dl\,. \qquad (9)$$

Проінтегруємо вираз (9) по всьому колу:

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi R} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{2\pi R\sqrt{R^2 + x^2}}\, dl$$

або

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{2\pi R\sqrt{R^2 + x^2}} \int_0^{2\pi R} dl =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{2\pi R\sqrt{R^2 + x^2}}\, 2\pi R\,.$$

Остаточно

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}}\,. \qquad (10)$$

Відповідь: $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}}$.

Приклад 4. Електрон влітає у плоский конденсатор паралельно до його пластин зі швидкістю $\vec{\upsilon}_0$. Довжина пластин конденсатора *L*. Електрон вилітає з конденсатора під кутом α до пластин. Знайти напруженість поля в конденсаторі і кінетичну енергію електрона при вильоті з конденсатора.

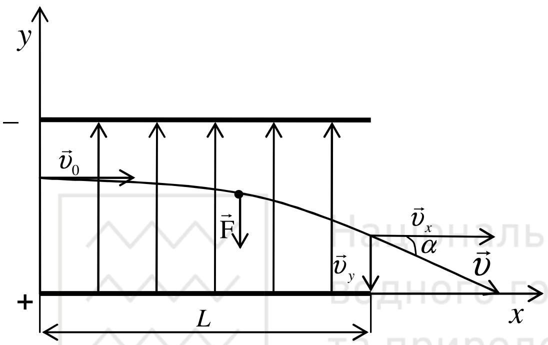
Розв'язання

Дано:	
υ_0; L; α	Будемо розглядати криволінійний рух електрона в конденсаторі як суперпозицію (накладання) двох прямолінійних рухів – рівномірного вздовж осі *x* і рівноприскореного вздовж осі *y*.
E ?	
$W_{кін}$?	

Оскільки вздовж осі x (вздовж пластин) електрон летить рівномірно зі швидкістю $\upsilon_x = \upsilon_0$, то час руху електрона в конденсаторі

$$t = \frac{L}{\upsilon_0}.$$

Вздовж осі у під дією сил поля електрон рухається з прискоренням $a = \frac{F_{ел}}{m} = \frac{eE}{m}$, тому при вильоті з конденсатора проекція швидкості електрона



$$\upsilon_y = at = \frac{eE}{m} \cdot \frac{L}{\upsilon_0}. \quad (1)$$

Як видно з малюнка, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{eEL}{m\upsilon_0^2}$; звідси визначимо напруженість поля

$$E = \frac{m\upsilon_0^2 \operatorname{tg}\alpha}{e \cdot L}. \quad (2)$$

Кінетична енергія електрона при вильоті з конденсатора

$$W_{кін} = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2\right). \quad (3)$$

Після підстановки (1) і (2) у (3) одержимо

$$W_{кін} = \frac{m}{2}\left[\upsilon_0^2 + \left(\frac{eL}{m\upsilon_0}\frac{m{\upsilon_0}^2 tg\alpha}{eL}\right)^2\right] = \frac{m{\upsilon_0}^2}{2}\left(1 + tg^2\alpha\right).$$

Відповідь: $E = \frac{m\upsilon_0^2 \operatorname{tg}\alpha}{e \cdot L}$, $W_{кін} = \frac{m{\upsilon_0}^2}{2}\left(1 + tg^2\alpha\right)$.

Приклад 5. Плоский конденсатор з площею пластин $6{,}2\cdot10^{-3}$м^2 і відстанню між пластинами 2мм заповнений слюдою $(\varepsilon = 6)$. Заряд конденсатора $4\cdot10^{-8}\,Кл$. Визначити: 1) електроємність конденсатора; 2) напругу на пластинах; 3) напруженість поля в конденсаторі; 4) силу взаємного притягування пластин.

Розв'язання

Дано:
$S = 6{,}2\cdot10^{-3}$ м^2
$d = 2$ мм $= 2\cdot10^{-3}$ м
$q = 4\cdot10^{-8}$ Кл
$\varepsilon = 6$

C? U ? E ? F ?

Електроємність конденсатора визначається за формулою

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (1)$$

Напруга на конденсаторі

$$U = \frac{q}{C} \qquad (2).$$

Напруженість поля в конденсаторі зв'язана з напругою на його пластинах співвідношенням

$$E = \frac{U}{d}. \qquad (3)$$

Щоб знайти силу взаємного протягування пластин, скористаємось зв'язком між потенціальною енергією і силою:

$$F = -\frac{dW_n}{dx} \qquad (4)$$

де

$$W_n = \frac{q^2}{2C} - \qquad (5)$$

потенціальна енергія зарядженого конденсатора; при цьому будемо вважати заряд q на пластинах конденсатора незмінним (конденсатор відключений від джерела напруги). Припустимо, що відстань між пластинами може змінюватись, і підставимо у (5) вираз (1) для ємності плоского конденсатора, позначивши змінну відстань між пластинами x (замість d):

$$W_n = \frac{q^2 x}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}. \tag{7}$$

Після підстановки (7) у (4) одержимо:

$$F = -\frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} \tag{8}$$

(знак «-» вказує на те, що різнойменно заряджені пластини конденсатора притягуються).

Після підстановки чисельних значень в формули (1) (2), (3), (8) визначимо шукані величини:

$$C = \frac{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 6\cdot 6{,}2\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{-3}} = 1{,}65\cdot 10^{-10}(\Phi),$$

$$U = \frac{4\cdot 10^{-8}}{1{,}65\cdot 10^{-10}} = 242(B),$$

$$E = \frac{242}{2\cdot 10^{-3}} = 1{,}21\cdot 10^{5}\left(\frac{B}{м}\right),$$

$$|F| = \frac{\left(4\cdot 10^{-8}\right)^2}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 6\cdot 6{,}2\cdot 10^{-3}} = 2{,}42\cdot 10^{-3}(H)$$

Відповідь: C = $1{,}65\cdot 10^{-12}$ Ф, U = 242 В, E = $1{,}21\cdot 10^{5}$ В/м, F= $2{,}42\cdot 10^{-3}$ Н.

Приклад 6. Металеву кулю радіусом R_1 = 2 см, яка заряджена до потенціалу φ_1 =30 В, з’єднали довгою тонкою дротиною з металевою кулею ємністю C_2 = 3 пФ, на якій знаходиться заряд q_2 = 0,6 нКл. Знайти поверхневу густину заряду на кулях після перерозподілу зарядів. Яким стане потенціал куль?

Розв'язання

Дано:
$R_1 = 2\cdot10^{-3}$м
$\varphi_1 = 20$В
$C_2 = 3\cdot10^{-12}$Ф
$q_2 = 0{,}6\cdot10^{-9}$Кл

σ'_1 ? σ'_2 ?
φ'_1? φ'_2?

При сполученні металевих куль провідником заряди будуть переходити з однієї на іншу до тих пір, поки їхні потенціали не зрівняються:

$$\varphi_1' = \varphi_2'. \tag{1}$$

Оскільки дана система тіл є ізольованою, то для неї виконується закон збереження електричного заряду:

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'. \tag{2}$$

Початковий заряд першої кулі рівний

$$q_1 = C_1\varphi_1. \tag{3}$$

Потенціали куль після перерозподілу зарядів рівні

$$\varphi_1' = \frac{q_1'}{C_1}, \quad \varphi_2' = \frac{q_2'}{C_2}, \tag{4}$$

де C_1 і C_2 – ємності куль; q'_1 і q'_2 – заряди куль після їх перерозподілу. Ємність першої кулі визначимо за формулою

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \tag{5}$$

(якщо в умові задачі середовище не вказане, то приймається $\varepsilon = 1$). Підставимо (4) і (5) в (1), а також (3) у (2). Одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \dfrac{q_2'}{C_2} \\ 4\pi\varepsilon_0 R_1\varphi_1 + q_2 = q_1' + q_2' \end{cases}. \tag{6}$$

Розв'язавши систему рівнянь (6), визначимо $q`_1$ та $q`_2$:

$$q_1' = \frac{(4\pi\varepsilon_0 R_1\varphi_1 + q_2)\cdot 4\pi\varepsilon_0 R_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1 + C_2}, \tag{7}$$

$$q_2' = \frac{C_2(4\pi\varepsilon_0 R_1\varphi_1 + q_2)}{4\pi\varepsilon_0 R_1 + C_2}. \tag{8}$$

Поверхневі густини зарядів на кулях знайдемо за формулами

$$\sigma_1' = \frac{q_1'}{4\pi R_1^2}, \tag{9}$$

$$\sigma_2' = \frac{q_2'}{4\pi R_2^2}. \tag{10}$$

Радіус другої кулі виразимо через її ємність із співвідношення

$$C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2; \quad R_2 = \frac{C_2}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{11}$$

Після підстановки (7) у (9), а (8) та (11) в (10), одержимо вирази для знаходження шуканих значень σ_1' і σ_2':

$$\sigma_1' = \frac{\varepsilon_0\left(4\pi\varepsilon_0 R_1\varphi_1 + q_2\right)}{R_1\left(4\pi\varepsilon_0 R_1 + C_2\right)}, \tag{12}$$

$$\sigma_2' = \frac{4\pi\varepsilon_0^2\left(4\pi\varepsilon_0 R_1\varphi_1 + q_2\right)}{C_2\left(4\pi\varepsilon_0 R_1 + C_2\right)}. \tag{13}$$

Потенціали куль після перерозподілу зарядів знайдемо шляхом підстановки (8) у (4):

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \frac{q_2'}{C_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1\varphi_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_1 + C_2}. \tag{14}$$

Після підстановки числових значень у формули (12), (13) і (14) визначимо шукані величини:

$$\sigma_1' = \frac{8{,}85\cdot10^{-12}\left(4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot2\cdot10^{-3}\cdot20+0{,}6\cdot10^{-9}\right)}{2\cdot10^{-3}\left(4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot2\cdot10^{-3}+3\cdot10^{-12}\right)} = 5{,}6\cdot10^{-8}\left(Кл/м^2\right);$$

$$\sigma_2' = \frac{4\cdot3{,}14\left(8{,}85\cdot10^{-12}\right)^2\left(4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot2\cdot10^{-3}\cdot20+0{,}6\cdot10^{-9}\right)}{3\cdot10^{-12}\left(4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot2\cdot10^{-3}+3\cdot10^{-12}\right)} = 4{,}2\cdot10^{-8}\left(Кл/м^2\right)$$

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \frac{4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot2\cdot10^{-3}\cdot20+0{,}6\cdot10^{-9}}{4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot2\cdot10^{-3}+3\cdot10^{-12}} = 130\,(В)$$

Відповідь: $\sigma_1' = 5{,}6 \cdot 10^{-8}\ Кл/м^2$; $\sigma_2' = 4{,}2 \cdot 10^{-8}\ Кл/м^2$, $\varphi_1' = \varphi_2' = 130\,B$.

1.3. Задачі для самостійного розв'язування

1.Знайти силу притягання між ядром атома водню і електроном. Радіус атома водню $r = 0{,}5 \cdot 10^{-10}\ ì$.

2.Згідно з початковими уявленнями Бора, електрон в атомі водню рухається по коловій орбіті радіусом $r = 0{,}5 \cdot 10^{-10}\ ì$. Знайти швидкість електрона.

3.У скільки разів сила гравітаційної взаємодії двох елементарних частинок менша від сили їх електростатичної взаємодії? Задачу розв'язати для: а) протонів; б) електронів.

4.У вершинах правильного трикутника зі стороною 10см знаходяться однакові заряди величиною $1 \cdot 10^{-7}$ *Кл* кожний. Знайти силу, що діє на один з цих зарядів з боку двох інших.

5.Дві кульки з однаковими розмірами та масами підвішені на нитках довжиною $l = 20\,см$ так, що їх поверхні дотикаються. Після того, як кулькам було надано заряд $4 \cdot 10^{-7}\ \hat{E}ë$, нитки розійшлися на кут 60°. Знайти масу кульки.

6.Дві однакові металеві кульки розміщені в повітрі на відстані 60см. Заряди кульок $q_1 = 4 \cdot 10^{-7}\ Кл$ і $q_2 = 0{,}8 \cdot 10^{-7}\ Кл$. На короткий час кульки дотикаються одна до одної, а потім їх розміщують на попередній відстані. Знайти силу їх взаємодії до та після дотикання.

7.∗На тонкому кільці радіусом r рівномірно розподілений заряд Q. Визначити силу, що діє на точковий заряд q, який знаходиться на висоті h над центром кільця. На якій висоті h_0 ця сила буде максимальною?

8.Визначити напруженість і потенціал точкового заряду $8 \cdot 10^{-6}$Кл в точці, що знаходиться на відстані 30см від заряду в повітрі.

9.Чому дорівнює напруженість поля точкового заряду в точці на відстані 3см від заряду, якщо на відстані 12см вона дорівнює $3{,}45 \cdot 10^5\ \hat{A}/ì$?

11.З якою силою електричне поле зарядженої нескінченної площини діє на кожний метр довжини зарядженої нескінченно довгої нитки? Лінійна густина заряду нитки $\tau = 3 \cdot 10^{-6}$ *Êë / ì* , поверхнева густина заряду площини $\sigma = 2 \cdot 10^{-5}$ *Êë/ì* ^{2} .

12.Провідній сфері радіусом 24см надано заряд $6{,}26 \cdot 10^{-9}$ *Êë*. Визначити напруженість і потенціал електричного поля: а) в центрі сфери; б) на відстані 12см від центра; в) на відстані 24см від поверхні сфери.

13.Електричний заряд $4{,}5 \cdot 10^{-7}$ *Кл* вміщено в деяке середовище. Знайти діелектричну проникність цього середовища, якщо на відстані 5см від нього напруженість поля дорівнює $2{,}1 \cdot 10^{5}$ *Â/ì* . Що це за середовище?

14.Два електричні заряди $q_1 = 2 \cdot 10^{-8}$ *Êë* та $q_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ *Êë* розміщені на відстані 5см один від одного в повітрі. Визначити напруженість і потенціал поля в точці, що знаходиться на відстані 3см від першого і 4см від другого заряду.

15.На який кут від вертикалі відхилиться кулька з зарядом $q = 4{,}9 \cdot 10^{-9}$ *Кл* і масою 0,4г, котра підвішена на довгій невагомій нерозтяжній нитці, якщо її вмістити в горизонтальне однорідне поле напруженістю $1 \cdot 10^{5}$ Â/ì ?

16.Електричне поле утворене нескінченно довгою ниткою, зарядженою з лінійною густиною заряду $\tau = 2 \cdot 10^{-9}$ Êë/ì . Якої швидкості набуде електрон, наблизившись до нитки внаслідок притягання з відстані $r_1 = 1см$ до $r_2 = 0{,}5см$?

17.Електрон, що перемістився у плоскому конденсаторі від однієї пластини до другої, набув швидкість $1 \cdot 10^{6}$ *м/с*. Відстань між пластинами 5,6мм. Знайти напруженість поля в конденсаторі та різницю потенціалів між пластинами.

18.Протон і α-частинка, що рухаються з однаковими швидкостями, влітають у плоский конденсатор паралельно до його пластин. У скільки разів відхилення протона полем конденсатора буде більшим, ніж відхилення α-частинки?

19.Протон і α-частинка, прискорені однаковою різницею потенціалів, влітають у плоский конденсатор паралельно до його пластин. Яка з цих двох частинок сильніше відхиляється полем конденсатора? У скільки разів?

20.*Знайти вираз для напруженості електричного поля, утвореного диском радіуса R, з рівномірно розподіленим по ньому зарядом q, в точках на відстані x від центру диска на осі симетрії, перпендикулярній до площини диска. Показати, що у граничних випадках $(x \to 0; x \to \infty)$ отриманий вираз переходить у формули напруженості: а) нескінченної площини; б) точкового заряду.

21.*Електрон влітає у плоский конденсатор паралельно до його пластин зі швидкістю $\upsilon_0 = 9 \cdot 10^6$ *ì /ñ*. Знайти повне, тангенціальне та нормальне прискорення електрона через $1 \cdot 10^{-8}$с після початку його руху в конденсаторі. До пластин прикладена напруга у 120В, відстань між пластинами становить 1 см.

22.Знайти електроємність земної кулі (радіус Землі $R \approx 6{,}4 \cdot 10^6$ *ì*). На скільки зміниться потенціал земної кулі, якщо їй надати заряд 1 Кулон?

23.Металева кулька радіусом 2см заряджена до потенціалу 2000В. Знайти заряд кульки.

24.Кулька, потенціал якої 792В, має поверхневу густину заряду $3{,}33 \cdot 10^{-7}$ *Êë/ì* ^{2}. Знайти радіус кульки.

25. Скільки електронів має бути на поверхні металевої кульки діаметром 2см, щоб енергія електричного поля зарядженої кульки дорівнювала 10^{-10} Дж?

26.Площа пластини плоского повітряного конденсатора 1м^2; відстань між пластинами – 1,5мм. Знайти його електроємність. Якою стане ємність конденсатора, якщо простір між пластинами заповнити слюдою (ε=6)?

27.До пластин плоского повітряного конденсатора прикладена напруга у 300В. Знайти поверхневу густину заряду на пластинах, якщо відстань між ними 3см.

28.Визначити об’ємну густину енергії електричного поля плоского конденсатора. Напруженість поля конденсатора становить $5 \cdot 10^5$ *Â / ì* , діелектриком є гас.

29.Який заряд треба надати горизонтальному плоскому конденсатору ємністю $1{,}5 \cdot 10^{-8}$Ф, щоб порошинка масою $1 \cdot 10^{-11}$г і зарядом $3{,}2 \cdot 10^{-18}$Кл зависла в конденсаторі? Відстань між пластинами 1мм.

30.Пластини плоского конденсатора площею 0,01м^2 кожна притягуються одна до одної з силою $3 \cdot 10^{-2} H$. Простір між пластинами заповнений слюдою. Знайти: а) поверхневу густину зарядів на пластинах; б) напруженість поля конденсатора; в) об’ємну густину енергії поля.

31.Куля, занурена в гас, має потенціал 4500В і поверхневу густину заряду $10^{-5}\ \text{Êë}/\text{ì}^{2}$. Знайти: а) радіус; б) заряд; в) ємність; г) енергію кулі.

32.***Вісім ртутних крапель радіусом 1мм кожна і заряджених однаковим зарядом $10^{-10}\,\text{Êë}$, зливаються в одну велику краплю. Знайти її потенціал.

33.*Дві металеві кульки, перша з зарядом $1 \cdot 10^{-9}\,\text{Êë}$ і радіусом 3см і друга з зарядом $4 \cdot 10^{-9}\,\text{Êë}$ і радіусом 2см, сполучають дротиною. Знайти заряд і потенціал кожної кульки після сполучення. Яка кількість теплоти виділилася у дротині?

34. Заряджена куля радіусом 2см дотикається до незарядженої кулі радіусом 3см. Після того як кулі роз’єднали енергія другої кулі виявилась рівною 0,4 Дж. Визначити заряд першої кулі до дотикання куль.

35.*Плоский повітряний конденсатор з площею пластин 80см^2 і відстанню між пластинами 1,5 мм заряджають від джерела з напругою 100В, після чого відокремлюють від джерела і занурюють у оливу. Як і наскільки зміниться при цьому енергія конденсатора?

36. Скляна пластина (ε=6) товщиною 4мм затиснута між пластинами плоского конденсатора. До конденсатора прикладена напруга 1200В. Визначити напруженість поля в склі, поверхневу густину заряду на пластинах конденсатора, поверхневу густину зв’язаних зарядів на поверхні скла.

Тема 2. Електричний струм

2.1.Основні закони та співвідношення

- **Сила струму**

$I=\dfrac{dq}{dt}$; $I=\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ (для постійного струму або середнє значення сили змінного струму).

- **Модуль густини струму**

$$j=\frac{I}{S},$$

де S – площа поперечного перерізу провідника.

- **Зв'язок густини струму з середньою швидкістю $\langle \upsilon \rangle$ напрямленого руху носіїв струму**

$$\vec{j}=q\cdot n\cdot\langle\vec{\upsilon}\rangle,$$

де q – заряд носія струму; n – концентрація носіїв струму.

- **Закон Ома**

$\vec{j}=\gamma\cdot\vec{E}=\dfrac{\vec{E}}{\rho}$ для однорідної ділянки кола в диференціальній формі,

$I=\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{R}=\dfrac{U}{R}$ – для однорідної ділянки кола в інтегральній формі

де $\varphi_1-\varphi_2=U$ – різниця потенціалів на ділянці кола, R – її опір.

$I=\dfrac{\varphi_1-\varphi_2+\mathcal{E}}{R}$ – для ділянки кола, що містить джерело струму,

де $\mathcal{E}$ – ЕРС джерела; R – повний опір ділянки.

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R+r}\text{ – для повного кола,}$$

де R – опір зовнішньої ділянки кола; r – опір джерела струму.

- **Закони Кірхгофа**

$$\sum_i I_i=0\text{ – перший закон}$$

$$\sum_i I_iR_i=\sum_j\mathcal{E}_j\text{ – другий закон,}$$

де $\sum_i I_i$ – алгебраїчна сума сил струмів, що сходяться у вузлі; $\sum_i I_i R_i$ – алгебраїчна сума спадів напруг на ділянках замкненого контура;

$\sum_j \mathcal{E}_j$ – алгебраїчна сума ЕРС джерел, що діють у контурі.

- **Опір провідника циліндричної форми**

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де ρ – питомий опір матеріалу провідника; l – довжина; S – площа поперечного перерізу.

- **Температурна залежність питомого опору провідника**

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \alpha t^\circ\right),$$

де: ρ_0 – питомий опір при 0°С, ρ – при t°С; α – термічний коефіцієнт опору.

- **Температурна залежність опору провідника**

$$R = R_0 \left(1 + \alpha t^\circ\right),$$

де R_0, R – опір провідника при температурах $0°C$ і $t°C$, відповідно.

- **Опір системи провідників:**

$R = \sum_{i=1}^{N} R_i$ – при послідовному сполученні

$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$ – при паралельному сполученні;

де N – кількість провідників; R_i – опір окремого провідника.

- **Робота струму**

$$A = IUt; \;\; A = I^2 Rt; \;\; A = \frac{U^2}{R} t$$

(перша формула справедлива для будь-якої ділянки кола, а останні дві – для ділянки, що не містить інших елементів крім провідників опором R).

- **Потужність струму**

$$P = \frac{A}{t} = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

- **Закон Джоуля-Ленца**

в інтегральній формі $\quad Q = I^2 Rt$, в диференціальній формі $w = \gamma \cdot E^2 = \vec{j} \cdot \vec{E}$

2.2 . Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Сила струму у провіднику з опором R = 20 Ом зростає на протязі двох секунд за законом $I(t) = 3t$ (сила струму – в амперах, час – в секундах). Знайти: 1) заряд, що перемістився через поперечний переріз провідника за цей проміжок часу; 2) середнє значення сили струму; 3) кількість теплоти, що виділилась у провіднику за час проходження струму.

Розв'язання

Дано:
$R = 6{,}2 \cdot 10^{-3}$ м^3
$I(t) = 3t$
$t_0 = 0$
$t_1 = 2$с

Δq ? $I_{ср}$? Q ?

За означенням, $I = \dfrac{dq}{dt}$ отже заряд, що перемістився через поперечний переріз провідника за проміжок часу від t_0 до t_1,

$$\Delta q = \int_{t_0}^{t_1} I dt = \int_{0}^{t_1} 3t dt = \frac{3t_1^2}{2},$$

$$\Delta q = \frac{3 \cdot 2^2}{2} = 6(Кл).$$

Середнє значення сили струму

$$I_{cp} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{t_1} = \frac{6}{2} = 3(A).$$

Закон Джоуля-Ленца у вигляді $Q = I^2 Rt$ справедливий лише для постійного струму. Оскільки в нашому випадку сила струму змінюється з часом, то для нескінченно малого проміжку часу $dQ = I(t)^2 Rdt = 9Rt^2 dt$. Проінтегрувавши останній вираз, отримаємо

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} 9Rt^2 dt = 3Rt_1^3 = 3 \cdot 20 \cdot 8 = 480(Дж).$$

Відповідь: Q = 480 Дж, I = 3 А.

Приклад 2. Електричний кип’ятильник розрахований на напругу 120В при силі струму 4А. Якої довжини і площі поперечного перерізу треба взяти ніхромовий дріт, щоб виготовити нагрівний елемент кип’ятильника, якщо густина струму повинна бути рівною 10,2 А/мм^2, а питомий опір ніхрому в робочому стані кип’ятильника $1{,}3 \cdot 10^{-6}$ Ом·м.

Розв’язання

Дано:
$U = 120$ В
$I = 4$ А
$j = 10{,}2 \cdot 10^6$ А/м^2
$\rho = 1{,}3 \cdot 10^{-6}$ Ом·м

S ? l ?

Використовуючи закон Ома для ділянки кола $I = \frac{U}{R}$ і означення густини струму $j = \frac{I}{S}$, знайдемо вирази для опору провідника і площі поперечного перерізу

$$R = \frac{U}{I}, \tag{1}$$

$$S = \frac{I}{j}. \tag{2}$$

З відомої залежності опору від матеріалу провідника та його розмірів

$$R = \rho \frac{l}{S} \tag{3}$$

Після підстановки (1) у (3) знайдемо вираз для довжини провідника

$$l = \frac{US}{I\rho}. \tag{4}$$

Підставивши числові значення величин у (2) і (4), отримаємо

$$S = \frac{4}{10{,}2 \cdot 10^6} = 0{,}39 \cdot 10^{-6}\left(м^2\right)$$

$$l = \frac{120 \cdot 0{,}39 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-6}} = 9\left(м\right)$$

Відповідь: $S = 0{,}39 \cdot 10^{-6}$ м^2, $l = 9$м.

Приклад 3. Опір котушки з мідного дроту при температурі 14°С R_1=10 Ом. Після проходження струму опір котушки R_2=12,2 Ом. До якої температури нагрілася котушка? Температурний коефіцієнт опору міді $\alpha = 4{,}15 \cdot 10^{-3} K^{-1}$.

Розв'язання

Дано:
$t_1 = 14°C$
$R_1 = 10$ Ом
$R_2 = 12{,}2$ Ом
$\alpha = 4{,}15$ К$^{-1}$

t_2?

Залежність опору металевого провідника від температури:

$$R = R_0\left(1 + \alpha t^\circ\right)$$

де R_0, – опір провідника при 0°С.

Застосуємо цей вираз для визначення опору провідника при температурах t_1 та t_2:

$$R_1 = R_0\left(1 + \alpha t_1\right)$$

$$R_2 = R_0\left(1 + \alpha t_2\right),$$

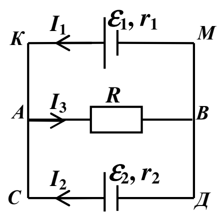
звідки отримаємо

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1},$$

$$t_2 = \frac{R_2\left(1 + \alpha t_1\right) - R_1}{2R_1} = \frac{12{,}2\left(1 + 4{,}15 \cdot 10^3 \cdot 14\right) - 10}{4{,}15 \cdot 10^3 \cdot 10} = 70\ °C$$

Відповідь: $t_2 = 70^\circ C$.

Приклад 4. Два джерела струму з електрорушійними силами 1,6 В і 1,3 В і внутрішніми опорами 1,0 Ом і 0,5 Ом сполучені з опором R = 0,6 Ом, як показано на малюнку. Визначити сили струмів на всіх ділянках кола.



Розв'язання

Дано:
$\varepsilon_1 = 1{,}6$В
$\varepsilon_2 = 1{,}3$В
$r_1 = 1{,}0$ Ом
$r_2 = 0{,}5$ Ом

I_1 –?, I_2 –?, I_3 –?

Виберемо напрямки струмів на ділянках кола, як показано на малюнку. Запишемо перший закон Кірхгофа для вузла *A*:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \qquad (1)$$

Застосуємо другий закон Кірхгофа для контуру *КСДМК* і *КАВМК*. В обох випадках напрям обходу контурів – проти годинникової стрілки; отримаємо:

$$I_1 r_1 - I_2 r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \qquad (2)$$

$$I_1 r_1 + I_3 R = \varepsilon_1 \qquad (3)$$

Складемо систему рівнянь (1), (2) і (3):

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 r_1 - I_2 r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ I_1 r_1 + I_3 R = \varepsilon_1 \end{cases}.$$

Виключивши з першого рівняння I_3 і розв'язавши систему рівнянь відносно I_2 і I_1, одержимо:

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 r_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)R}{r_1 R + r_1 r_2 + r_2 R}; \qquad (4)$$

$$I_2 = \frac{I_1 r_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1}{r_2}; \qquad (5)$$

$$I_3 = I_1 + I_2. \qquad (6)$$

Підставимо числові значення у (4), (5) та (6):

$$I_1 = \frac{1{,}6 \cdot 0{,}5 + (1{,}6 - 1{,}3) \cdot 0{,}6}{0{,}6 + 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}5} = 0{,}7\,(A)$$

$$I_2 = \frac{0{,}7 - 0{,}3}{0{,}5} = 0{,}8\,(A)$$

$$I_3 = 0{,}7 + 0{,}8 = 1{,}5\,(A)$$

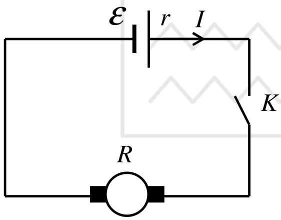
Відповідь: $I_1 = 0,7A; I_2 = 0,8A; I_3 = 1,5A$.

Приклад 5. До акумулятора з електрорушійної силою ε=24В і внутрішнім опором r = 0,03 Ом необхідно підключити електродвигун постійного струму. Яким повинен бути опір обмотки двигуна, щоб отримати максимально можливу потужність. Знайти величину цієї потужності $P_{\max}$ і коефіцієнт корисної дії $\eta_{\max}$.

Розв'язання

Дано:
ε = 24В
r = 0,03 Ом

$P_{\max} - ?$ $\eta_{\max} - ?$



Потужність електродвигуна знайдемо за формулою:

$$P = IU . \tag{1}$$

Силу струму I та електричну напругу U визначимо за законом Ома для повного кола і для ділянки кола:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} , \tag{2}$$

$$I = \frac{U}{R} , \tag{3}$$

$$U = IR . \tag{4}$$

Підставимо (2) і (4) в (1):

$$P = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(R + r)^2} . \tag{5}$$

Коефіцієнт корисної дії рівний відношенню корисної потужності двигуна до загальної потужності струму в електричному колі:

$$\eta = \frac{P_{кор}}{P_{заг}} = \frac{IU}{I\varepsilon} = \frac{U}{\varepsilon} \tag{6}$$

Після підстановки (4) та (2) в (6), одержимо:

$$\eta = \frac{U}{\varepsilon} = \frac{IR}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon R}{(R + r)\varepsilon} = \frac{R}{R + r} . \tag{7}$$

Дослідимо функцію $P(R)$ на екстремум:

$$\frac{dP(R)}{dR} = 0; \tag{8}$$

$$\frac{dP(R)}{dR} = \varepsilon^2 \frac{(R+r)^2 - 2(R+r)R}{(R+r)^4} = \varepsilon^2 \frac{r-R}{(R+r)^3}. \tag{9}$$

Підставимо (9) у (8):

$$\varepsilon^2 \frac{r-R}{(r+R)^3} = 0,$$

звідки

$$r - R = 0; R = r. \tag{10}$$

Як випливає з умови (10), двигун розвиватиме максимальну потужність, якщо опір його обмотки рівний внутрішньому опору джерела струму. Підставивши умову (10) у формули (5) і (7), знайдемо максимальну потужність $P_{\max}$ і коефіцієнт корисної дії $\eta_{\max}$:

$$P_{\max} = \frac{\varepsilon^2 r}{(r+r)^2} = \frac{\varepsilon^2}{4r},$$

$$\eta_{\max} = \frac{r}{r+r} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

$$P_{\max} = \frac{24^2}{4 \cdot 0{,}03} = 4800\, Bm$$

Відповідь: $\eta_{\max} = 0{,}5$, $P_{\max} = 4800\, Bm$

3.3.Задачі для самостійного розв’язування

1. По провіднику з площею поперечного перерізу 1,5мм^2 тече струм силою 0,3А. Концентрація вільних електронів у речовині $1\cdot10^{28}$м$^{-3}$. Визначити середню швидкість напрямленого руху вільних електронів.

2. Сила струму в металевому провіднику рівна 0,8А, поперечний переріз провідника 4мм^2. Концентрація вільних електронів у провіднику $2{,}5\cdot10^{22}$см$^{-3}$. Визначити середню швидкість впорядкованого руху електронів.

3. Густина струму в мідному провіднику рівна 3А/мм^2. Знайти напруженість електричного поля в провіднику.

4. Визначити густину струму, якщо за 0,4 с через поперечний переріз провідника, площа якого 1,2 мм^2, пройшло $6\cdot10^{18}$ електронів.

5. Однорідне провідне середовище з великим питомим опором ρ заповнює простір між двома коаксіальними тонкими металевими циліндрами. Радіуси циліндрів r і R, при цьому $r < R$. Довжина циліндрів l набагато більша від їх радіусів. Знайти опір середовища між циліндрами.

6. Металева куля радіусом r оточена концентричною тонкою металевою сферичною поверхнею радіусом R. Простір між ними заповнено однорідним провідним середовищем з великим питомим опором ρ. Знайти опір середовища.

7.Сила струму у провіднику змінюється з часом згідно рівняння $I = 2 + 5t$, де I виражене в Амперах, а час – в секундах. Який електричний заряд пройшов через поперечний переріз провідника за проміжок часу від $t_1 = 1c$ до $t_2 = 6c$? Визначити середнє значення сили струму за цей проміжок часу.

8**.** До циліндричного провідника приклали деяку напругу. У скільки разів зміниться густина струму в провіднику, якщо його довжину збільшити в 2 рази, а діаметр зменшити в 3 рази?

9. Два резистори опором 1 Ом і 4 Ом сполучили паралельно і під’єднали до джерела напруги. У скільки разів потужність струму у другому резисторі більша, ніж у першому? Котушка з мідного дроту має опір 10,8Ом; її маса – 3,41кг. Знайти довжину і діаметр дроту.

10.Опір вольфрамової нитки розжарення електричної лампи при 20°C – 35,8Ом. Знайти температуру нитки в робочому стані, якщо напруга в мережі 120В, а по нитці тече струм силою 0,33 А. Температурний коефіцієнт опору вольфраму $4{,}6\cdot10^{-6}K^{-1}$.

11.При проходженні електричного струму по залізному провіднику його температура підвищилася від 0°С до 250°С, а опір зріс у два рази. Знайти температурний коефіцієнт опору заліза.

12.Провідник якого опору і яким способом (послідовно чи паралельно) треба під'єднати до провідника опором 24 Ом, щоб отримати еквівалентний опір 20 Ом?

13.Два провідники при послідовному сполученні утворюють еквівалентний опір 27 Ом, а при паралельному – 6 Ом. Визначити опір цих провідників.

14.*На скільки рівних частин треба розрізати провідник опором 64 Ом, щоб сполучивши ці частини паралельно, отримати опір 1 Ом?

15.Джерело має ЕРС 1,5В і внутрішній опір 0,5Ом. Сила струму у колі 0,6А. Знайти опір зовнішньої ділянки кола і напругу на затискачах джерела.

16.Внутрішній опір джерела струму 0,6 Ом. При підключенні до нього зовнішнього опору 6 Ом напруга на затискачах 120 В. Визначити ЕРС джерела і силу струму в колі.

17.Батарейка для кишенькового ліхтарика з ЕРС 4,5 В при підключенні до опору 7,5Ом дає струм силою 0,5 А. Визначити силу струму короткого замикання.

18.Гальванічний елемент дає струм силою 0,3 А при підключенні до опору 6 Ом і 0,15 А – при підключенні до опору 14 Ом. Знайти силу струму короткого замикання.

19.Якщо до джерела струму під'єднати дві лампи опором 8 Ом кожна, сполучені між собою послідовно, то напруга на затискачах джерела 4В; якщо ці дві лампи сполучити між собою паралельно, то напруга на затискачах буде дорівнювати 3В. Знайти внутрішній опір і ЕРС джерела.

20Яку кількість акумуляторів з ЕРС 2,1В і внутрішнім опором 0,2Ом кожний потрібно сполучити послідовно, щоб у провіднику опором 6Ом протікав струм силою 1,5А?

21.Два джерела з ЕРС 6,5 і 3,9В і з однаковими внутрішніми опорами по 2Ом, сполучені паралельно, під'єднали до зовнішнього опору 9Ом. Визначити сили струму у джерелах та зовнішньому опорі.

22.У схемі, що зображена на рисунку, опори $R_1 = 5\,Ом$; $R_2 = 6\,Ом$; $R_3 = 3\,Ом$. Напруга на затискачах джерела струму $U = 2{,}1\,В$. Знайти покази амперметра (опором амперметра знехтувати).

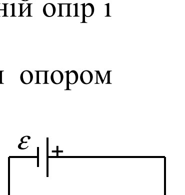


Рис. до №22

23.Знайти величину і напрям електричного струму через опір R у схемі, зображеній на рисунку. ЕРС джерел струму $\varepsilon_1 = 1{,}5\,B$; $\varepsilon_2 = 3{,}7\,B$, опори $R_1 = 5\,Ом$; $R_2 = 20\,Ом$; $R = 5\,Ом$. Внутрішніми опорами джерел струму знехтувати.

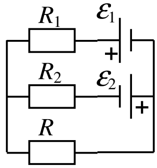


Рис. до №23

24.*Два елементи з ЕРС 1,3 і 1,5В сполучені по схемі, що зображена на рисунку. Показ вольтметра – 1,45В. В котрого елемента внутрішній опір більший? У скільки разів? Опір вольтметра вважати дуже великим.

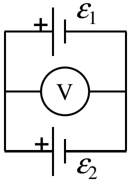


Рис. до №24

25.Три лампи опором 240Ом кожна сполучені паралельно і підключені до мережі з напругою 120В. Визначити потужність, яку споживають лампи, загальну силу струму і енергію, витрачену за 8 годин роботи.

26.Електричний двигун з опором обмотки 2,2Ом працює від джерела електричної енергії з напругою 120В при силі струму 7,5А. Визначити коефіцієнт корисної дії двигуна.

27.Два провідники з опором 5 і 7Ом сполучають паралельно і підключають до джерела. За деякий час у першому провіднику виділилось $1\cdot10^3$Дж теплоти. Яка кількість теплоти виділиться в другому провіднику за цей же час?

28.Провідник з опором 20Ом підключений до джерела струму з ЕРС 220В і внутрішнім опором 0,2 Ом. Визначити загальну та корисну потужність, а також коефіцієнт корисної дії.

29.Знайти внутрішній опір джерела струму, якщо потужність, що виділяється в зовнішній ділянці кола, однакова при двох значеннях опору зовнішньої ділянки: $R_1 = 10\,Ом$; $R_2 = 0{,}1\,Ом$. Знайти коефіцієнт корисної дії джерела в обох випадках.

30.Джерело струму один раз підключають до опору $R_1 = 0{,}5\,Ом$, а другий – до опору $R_2 = 50\,Ом$. В обох випадках у зовнішній ділянці колі щосекунди виділяється 800Дж теплоти. Визначити електрорушійну силу джерела і його внутрішній опір.

31.Джерело струму при короткому замиканні дає струм силою 1,5А. Якщо це джерело підключити до зовнішнього опору 4Ом, то корисна потужність буде 1Вт. Знайти ЕРС і внутрішній опір джерела.

32.*Акумулятор з ЕРС 12В дає максимальну силу струму 240А. Знайти максимальну кількість теплоти, що може бути виділена в зовнішній ділянці колі на протязі 2 хв.

33.*До джерела електричного струму під'єднаний споживач, в якому виділяється максимально можлива для цього джерела потужність. Її величина 110Вт. При цьому сила струму становить 27,5 А. Визначити електрорушійну силу джерела і його внутрішній опір.

34.*Обмотка електричного кип'ятильника має дві секції. Якщо увімкнена лише перша секція, то вода закипає через 15хв; якщо тільки друга – то через 30хв. За який час закипить вода, якщо обидві секції ввімкнуті послідовно? Паралельно?

Тема 4. Магнетизм

4.1. Основні закони та співвідношення

- **За законом Біо-Савара-Лапласа елемент струму $I \cdot d\vec{l}$ в деякій точці простору створює магнітне поле, індукція якого**

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

де: $d\vec{l}$ – елемент довжини провідника зі струмом силою I (напрям вектора $d\vec{l}$ співпадає з напрямом струму); $\vec{r}$ – вектор, проведений від елемента $d\vec{l}$ до точки простору; μ_0 – магнітна стала; μ – магнітна проникність середовища (для слабомагнітних речовин – пара- і діамагнетиків – незначно відрізняється від одиниці, у феромагнетиків $\mu \gg 1$ і залежить від зовнішнього магнітного поля – див. приклад 6). Напрям вектора $d\vec{B}$ шукають як напрям векторного добутку $d\vec{l} \times \vec{r}$ або за правилом свердлика. Модуль вектора $d\vec{B}$

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\sin\alpha, \quad \alpha \equiv \left(\widehat{d\vec{l}, \vec{r}}\right).$$

- **Принцип суперпозиції**

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i,$$

де: $\vec{B}_i$ – індукція магнітного поля, створеного i-тим провідником зі струмом; $\vec{B}$ – індукція поля, створеного системою багатьох струмів.

- **Зв'язок магнітної індукції з напруженістю $\vec{H}$ магнітного поля**

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}.$$

- **Формули для модулів напруженостей магнітних полів, виведені на основі закону Біо-Савара-Лапласа і принципу суперпозиції:**

а) для поля в центрі колового струму

$$H = \frac{I}{2R},$$

R – радіус контура;

б) для поля прямолінійного провідника зі струмом на відстані R від нього

$$H = \frac{I}{4\pi R}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right),$$

α_1 і α_2 – кути між напрямками векторів $d\vec{l}$ та $\vec{r}$ на початку й кінці провідника;

в) для поля нескінченно довгого провідника зі струмом

$$H = \frac{I}{2\pi R};$$

г) для поля всередині нескінченно довгого соленоїда

$$H = nI;$$

де $n = N/l$ – густота витків (N – число витків, що припадає на довжину l соленоїда; $N \cdot I$ – число ампер-витків).

- **В однорідному магнітному полі на прямолінійний провідник зі струмом довжиною *l* діє сила Ампера**

$$\vec{F}_A = I\vec{l} \times \vec{B};$$

модуль цієї сили

$$F_A = IBl\sin\alpha,$$

α – кут між напрямками векторів $\vec{l}$ та $\vec{B}$. Напрям сили Ампера знаходять за правилом векторного добутку або за правилом лівої руки ($\vec{B}$ – в долоню!).

- **Модуль сили взаємодії двох довгих паралельних провідників зі струмами**

$$F = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l,$$

де: l – довжина провідника; I_1 та I_2 – сили струмів; d – відстань між провідниками.

- **Сила Лоренца, що діє з боку магнітного поля на рухомий електричний заряд**

$$\vec{F}_{Ë} = q\vec{v} \times \vec{B},$$

де: q – заряд; $\vec{v}$ – швидкість цього заряду; $\vec{B}$ – магнітна індукція. Напрям сили Лоренца знаходять для позитивного заряду за правилом векторного добутку або за правилом лівої руки (для негативного заряду буде протилежний напрямок сили). Модуль сили Лоренца

$$F_{Л} = |q| \mathrm{v} B \sin\alpha, \quad \alpha \equiv \left(\widehat{\vec{\mathrm{v}}, \vec{B}}\right).$$

- **На плоский контур зі струмом у магнітному полі діє момент сили (обертальний момент)**

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B},$$

де: $\vec{P}_m$ – магнітний момент контура зі струмом;

$$\vec{P}_m = IS\vec{n},$$

I – сила струму, S – площа контура, $\vec{n}$ – одиничний вектор позитивної нормалі до площини контура. Модуль обертального моменту

$$M = P_m B \sin\alpha,$$

$$\alpha \equiv \left(\widehat{\vec{P}_m, \vec{B}}\right), \quad P_m = IS.$$

- **Магнітний потік через деяку плоску поверхню в однорідному магнітному полі**

$$\Phi = BS\cos\alpha,$$

$\alpha \equiv \left(\widehat{\vec{B}, \vec{n}}\right)$, $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до площини, S – площа поверхні.

- **Робота переміщення контура зі струмом у магнітному полі**

$$A = I \cdot \Delta\Phi,$$

де: I – сила струму; $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ – зміна магнітного потоку через площадку, обмежену контуром; індекси “1” та “2” символізують вихідний і кінцевий стани, відповідно.

- **Основний закон електромагнітної індукції:**

$$\mathcal{E}_{інд} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$\mathcal{E}_{інд}$ – ЕРС індукції в контурі, що виникає при зміні магнітного потоку через поверхню, охоплену контуром. Якщо магнітний потік пронизує одночасно багато контурів (наприклад, соленоїд), то в законі потрібно замість потоку Φ через один контур писати повний магнітний потік (потокозчеплення) $\Psi = \sum \Phi$.

- **Магнітний потік, створений контуром зі струмом**

$$\Phi = LI\ ,$$

I – сила струму, L – індуктивність контура. У випадку системи з багатьох контурів потокозчеплення $\Psi = LI$, де L – індуктивність цієї системи.

- **Індуктивність соленоїда (довгого порівняно з діаметром)**

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S\ ,$$

де: N – число витків, що припадають на ділянку соленоїда довжиною l; S – площа поперечного перерізу соленоїда.

- **ЕРС самоіндукції**

$$\mathcal{E}_{ci} = -L\frac{dI}{dt}\ ,$$

де: L – індуктивність контура; I – сила струму; t – час.

- **Енергія магнітного поля струму**

$$W = \frac{LI^2}{2}\ .$$

- **Густина енергії магнітного поля**

$$w = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}\ .$$

4.2. Приклади розв'язування задач

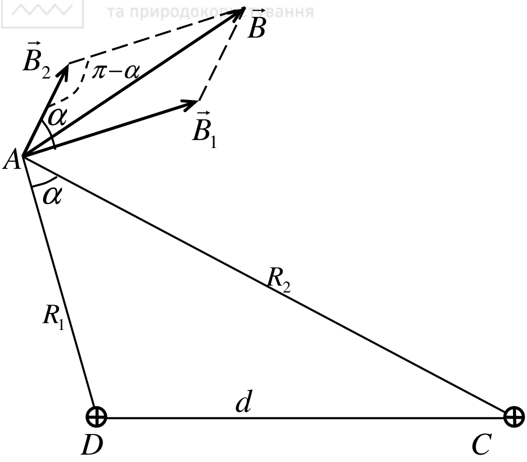
Приклад 1. Два паралельні безмежно довгі провідники D і C, по яких течуть в одному напрямку електричні струми силою $I = 60\,A$, розміщені на відстані $d = 10\,см$ один від другого. Визначити модуль магнітної індукції В поля, створеного провідниками зі струмом у точці A, що на відстані $R_1 = 5\,см$ від одного і $R_2 = 12\,см$ від другого провідника.

Розв'язання

Дано:
I = 60 А
d = 10 см
R_1 = 5 см
R_2 = 12 см

B?

Зобразимо провідники зі струмами перпендикулярно до площини рисунка, тоді решта ліній будуть у цій площині. Напрямки векторів $\vec{B}_1$ та $\vec{B}_2$ індукції магнітних полів, створених у точці A провідниками зі струмами D і C, знаходимо або за правилом векторного добутку (див. закон Біо-Савара-



Лапласа), або за правилом свердлика. Оскільки вектор $\vec{B}_1$ перпендикулярний до прямої AD, а $\vec{B}_2$ – до прямої AC, то маємо на рисунку два рівні кути α, як кути зі взаємно перпендикулярними сторонами.

На основі принципу суперпозиції

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 ,$$

а модуль вектора $\vec{B}$ знайдемо за теоремою косинусів:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos\alpha} . \qquad (1)$$

Модулі магнітної індукції B_1 та B_2 розраховуються за формулами

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R_1}, \quad B_2 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R_2},$$

μ_0 – магнітна стала, μ – магнітна проникність середовища. Підставляючи ці вирази у формулу (1), маємо

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{2}{R_1 R_2}\cos\alpha} .$$

Кут α розрахуємо за теоремою косинусів:

$$d^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos\alpha .$$

Звідси

$$\cos\alpha = \frac{R_1^2 + R_2^2 - d^2}{2R_1 R_2} .$$

Остаточно робоча формула має вигляд

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{R_1^2 + R_2^2 - d^2}{R_1^2 R_2^2}} .$$

Випишемо необхідні величини в одиницях СІ:

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Ãí/ì ; $\mu = 1$ (для вакууму, оскільки в умові задачі про середовище не згадувалося); $R_1 = 0{,}05\,м$; $R_2 = 0{,}12\,м$; $d = 0{,}1\,м$. Виконаємо розрахунок.

$$B = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 60}{2 \cdot 3{,}14} \sqrt{\frac{1}{(0{,}05)^2} + \frac{1}{(0{,}12)^2} + \frac{(0{,}05)^2 + (0{,}12)^2 - (0{,}10)^2}{(0{,}05)^2 \cdot (0{,}12)^2}} =$$

$$= 3{,}1 \cdot 10^{-4}\,(Тл).$$

Примітка. Ми виконали розрахунок для однієї з точок A простору, що підходять за умовою задачі. Легко переконатися, що таких точок є безліч, але для кожної з них результат розрахунку буде той самий.

Відповідь: 0,31 мТл.

Приклад 2. Електрон влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній індукції. Модуль швидкості електрона $\mathrm{v} = 4 \cdot 10^7\ м/с$, а модуль індукції магнітного поля $B = 1\,мТл$. Знайти модулі тангенціального a_τ та нормального a_n прискорення електрона в полі.

Розв'язання

Дано: $\vec{\mathrm{v}} \perp \vec{B}$

$\mathrm{v} = 4 \cdot 10^7\ м/с$

$B = 1\,мТл$

$\vec{B} \notin f(x, y, z)$

---

a_τ ? a_n ?

На заряджену рухому частинку в магнітному полі діє сила Лоренца, модуль якої розраховується за формулою

$$F_Л = |q| \mathrm{v} B \sin\alpha,$$

де q – заряд частинки, $\alpha = \left(\widehat{\vec{\mathrm{v}}, \vec{B}} \right)$.

Сила Лоренца не виконує механічну роботу, бо $\vec{F}_л \perp \vec{\mathrm{v}}$; з теореми про зміну кінетичної енергії в такому випадку маємо, що кінетична енергія, а внаслідок цього і модуль швидкості частинки, в полі не зміниться. Тому

$$a_\tau = \left| \frac{d\mathrm{v}}{dt} \right| = 0.$$

Сила Лоренца призводить лише до зміни напряму вектора швидкості. Вона є нормальною силою (надає частинці нормального прискорення):

$$\vec{F}_л = m\vec{a}_n,$$

m – маса частинки. Тому у проекціях на напрям вектора $\vec{a}_n$ маємо

$$|q|\mathrm{v}B\sin\alpha = ma_n,$$

звідки

$$a_n = \frac{|q|\mathrm{v}B\sin\alpha}{m}.$$

Остання формула є робочою для розрахунку величини a_n.

Випишемо тепер значення фізичних величин в СІ і виконаємо числовий розрахунок.

$B = 1\cdot 10^{-3}\,Тл$; $|q| = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,Кл$; $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}\,кг$, $\alpha = \pi/2$.

$$a_n = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 4\cdot 10^{-7}\cdot 10^{-3}}{9{,}1\cdot 10^{-31}} = 7\cdot 10^{15}\left(м/с^2\right).$$

Відповідь: $a_\tau = 0$, $a_n = 7\cdot 10^{15}\ м/с^2$.

Приклад 3. Плоский квадратний контур зі стороною *a* = 10 см, по якому тече струм силою I = 100 А, вільно установився в однорідному магнітному полі, модуль індукції якого B = 1 Тл. Визначити роботу *A* зовнішніх сил при повороті контура навколо осі, що проходить через середини його протилежних сторін, на кут $\varphi = 90^\circ$.

Розв'язання

Дано:
a = 10 см
I = 100 А
B = 1 Тл
$\varphi = 90^\circ$

A?

На контур зі струмом у магнітному полі діє обертальний момент

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}, \tag{1}$$

де $\vec{P}_m$ – магнітний момент контура. Модуль моменту сили

$$M = P_m B\sin\varphi, \tag{2}$$

$\varphi = \left(\widehat{\vec{P}_m, \vec{B}}\right)$; в даній задачі φ є одночасно кутом повороту контура. За умовою задачі у вихідному положенні $M = 0$, а значить $\varphi = 0$, тобто $\vec{P}_m \parallel \vec{B}$.

Якщо зовнішні сили виведуть контур з положення рівноваги, то виникне момент сили (1), що прагнутиме повернути контур у вихідне положенні. Проти цього моменту і буде виконана шукана робота А.

Оскільки момент сили змінний (залежить від кута φ), то спочатку розрахуємо елементарну роботу

$$\delta A = M d\varphi .$$

Підставимо сюди вираз (2) і врахуємо, що $P_m = I \cdot S$, де $S = a^2$ – площа, охоплена контуром. Тоді

$$\delta A = a^2 BI \sin\varphi \, d\varphi .$$

Інтегруючи цей вираз, знайдемо повну роботу при повороті на скінченний кут, рівний $\pi/2$:

$$A = a^2 BI \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \, d\varphi = -a^2 BI \cos\varphi \Big|_0^{\pi/2} = a^2 BI .$$

Остаточно

$$A = a^2 BI .$$

Проведемо числовий розрахунок (в одиницях СІ).

$A = (0{,}1)^2 \cdot 100 = 1 (Дж)$.

Відповідь: 1 Дж.

Приклад 4. Коловий дротяний виток площею S = 0,01 м^2 розміщений в однорідному магнітному полі, модуль індукції якого B = 1 Тл. Площина витка перпендикулярна до ліній індукції поля. Знайти середню ЕРС індукції $\langle \mathcal{E}_i \rangle$, що виникає у витку при вимиканні поля протягом часу $\Delta t = 10\, мс$.

Розв'язання

Дано:
S = 0,01 м^2
B = 1 Тл
$\vec{B} \notin f(x, y, z)$
$\vec{n} \parallel \vec{B}$
$\Delta t = 10\, мс$

$\langle \mathcal{E}_i \rangle$?

Основний закон електромагнітної індукції математично записують так:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} ,$$

де Ф – магнітний потік через поверхню *S*, $\mathcal{E}_i$ – миттєве значення ЕРС індукції, *t* – час. Відповідно, середнє значення ЕРС розраховується за формулою

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} ,$$

де ΔФ – скінченний приріст магнітного потоку за проміжок часу Δ*t*. За означенням

$$\Delta\Phi = \Phi_{кінц.} - \Phi_{поч.},$$

причому кінцеве значення потоку $\Phi_{кінц.} = 0$ за умовою задачі. Початкове значення магнітного потоку розпишемо, виходячи з означення Ф, у частковому випадку однорідного магнітного поля і плоскої поверхні, котру пронизують лінії індукції:

$$\Phi_{поч.} = BS\cos\alpha,$$

де $\alpha = \left(\widehat{\vec{n}, \vec{B}}\right)$, $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до площини.

Отримуємо робочу формулу

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle = \frac{BS\cos\alpha}{\Delta t}.$$

В СІ $\Delta t = 0{,}01 c$; $\alpha = 0$ (за умовою задачі).

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle = \frac{0{,}01}{0{,}01} = 1(B).$$

Відповідь: 1 В.

Приклад 5. Соленоїд з осердям із немагнітного матеріалу має N = 1200 витків дроту, що тісно прилягають один до другого. При силі струму I = 4 А магнітний потік Φ_0 = 6 мкВб. Визначити індуктивність L соленоїда та енергію W його магнітного поля.

Розв'язання

Дано:
N = 1200
I = 4 А
Φ_0 = 6 мкВб

L? W?

Індуктивність зв'язана з повним магнітним потоком (потокозчепленням) Ψ і силою струму співвідношенням

$$\Psi = LI.$$

Потокозчеплення, у свою чергу,

$$\Psi = N\Phi_0,$$

тому

$$L = \frac{N\Phi_0}{I}.$$

Енергія магнітного поля всякого провідника зі струмом (в тому числі і соленоїда)

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Підставляючи сюди отриманий вище вираз для індуктивності, маємо

$$W = \frac{IN\Phi_0}{2}.$$

Числовий розрахунок:

$\Phi_0 = 6\cdot10^{-6}$ Вб, N = $1{,}2\cdot10^{3}$;

$$L = \frac{1{,}2\cdot10^3\cdot6\cdot10^{-6}}{4} = 1{,}8\cdot10^{-3}(\mathit{Гн});$$

$$W = \frac{4\cdot1{,}2\cdot10^3\cdot6\cdot10^{-6}}{2} = 14\cdot10^{-3}(\mathit{Дж}).$$

Відповідь: L = 1,8 мГн, W = 14 мДж.

Приклад 6. На залізний стрижень довжиною 50 см і перерізом 2 см^2 намотаний в один шар провід так, що на кожний сантиметр довжини стрижня припадає 20 витків. Визначити енергію магнітного поля в осерді соленоїда, якщо сила струму в обмотці 0,5 А.

Розв'язання

Дано: l = 50 см
S = 2 см^2
n = 20 см$^{-1}$
I = 0,5 А
W?

Енергію магнітного поля струму розраховують за формулою

$$W = \frac{LI^2}{2},$$

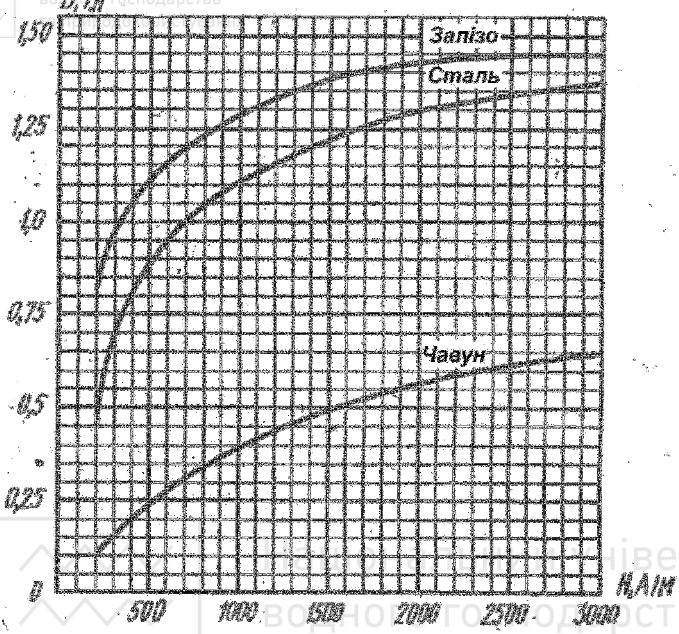
де L – індуктивність системи.

Індуктивність соленоїда

$$L = \mu\mu_0 n^2 V,$$

де μ – магнітна проникність речовини всередині котушки, μ_0 – магнітна стала, n – щільність витків, V – об'єм соленоїда. Очевидно, що $V = l\cdot S$.

Магнітна проникність феромагнетика (а таким є залізо) не є постійною величиною, а залежить від напруженості зовнішнього магнітного поля. Цю величину можна розрахувати, виходячи зі зв'язку магнітної індукції з напруженістю $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, скориставшись графіком залежності магнітної індукції від напруженості (експериментальні дані):



Щоб використати графік, треба спочатку розрахувати модуль напруженості магнітного поля соленоїда за формулою

$$H = In\,.$$

В одиницях СІ $n = 2\cdot10^3\,м^{-1}$, тому $H = 2\cdot10^3\cdot0{,}5 = 1000\,(А/м)$. З графіка тепер знаходимо, що для заліза в цьому випадку B = 1,3 Тл.

Підставимо тепер формулу для об'єму соленоїда і вираз $\mu\mu_0 = \dfrac{B}{H}$ у співвідношення для розрахунку індуктивності:

$$L = \frac{B}{H}n^2 lS\,.$$

Шукана енергія тепер

$$W = \frac{1}{2}\frac{B}{H}n^2 I^2 lS\,.$$

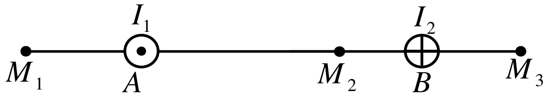
В одиницях СІ: l = 0,5 м; S = $2\cdot10^{-4}$ м^2. Тому

$$W = \frac{1}{2}\frac{1{,}3}{1\cdot10^3}\left(2\cdot10^3\right)^2\cdot(0{,}5)^2\cdot0{,}5\cdot2\cdot10^{-4} = 0{,}065\,(Дж)\,.$$

Відповідь: 65 мДж.

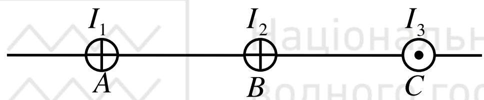
4.3. Задачі для самостійного розв'язування

1. На рис. зображено переріз двох прямолінійних безмежно довгих провідників зі струмами. Відстань AB між провідниками рівна 10 см, сили струмів $I_1 = 20$ А та $I_2 = 30$ А. Знайти модулі напруженостей H магнітного поля, створеного двома струмами в точках M_1, M_2 і M_3. Відстані $M_1A = 2$ см, $AM_2 = 4$ см та $BM_3 = 3$ см.



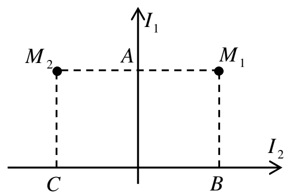
2. Розв'язати попередню задачу, якщо струми течуть в одному напрямку.

3. На рис. зображено переріз трьох прямолінійних безмежно довгих провідників зі струмами. Відстані AB=BC=5 см, сили струмів $I_1 = I_2 = I$ та $I_3 = 2$I. Знайти точки на прямій AC, в яких напруженість магнітного поля, створеного трьома струмами, рівна нулю.

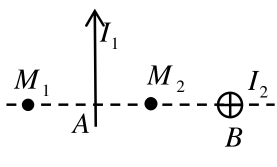


4. Розв'язати попередню задачу, якщо струми течуть в одному напрямку.

5. Два прямолінійні безмежно довгі провідники розміщені перпендикулярно один до другого і знаходяться в одній площині. Знайти модулі напруженостей H_1 і H_2 магнітного поля в точках M_1 та M_2, якщо сили струмів I_1=2А й I_2=3А. Відстані AM_1=AM_2=1 см і BM_1=CM_2=2см.



6. Два прямолінійні безмежно довгі провідники розміщені перпендикулярно один до другого і знаходяться у взаємно перпендикулярних площинах. Знайти модулі напруженостей H_1 та H_2 магнітного поля в точках M_1 і M_2, якщо сили струмів I_1=2А та I_2=3А. Відстані AM_1=AM_2=1см і AB=2см.



7. По довгому вертикальному провіднику зверху вниз тече струм силою I=8А. На якій відстані a від нього напруженість, що одержується від складання земного магнітного поля і поля струму,

направлена вертикально вверх? Модуль горизонтальної складової напруженості земного поля $H_г = 16$ А/м.

8. Знайти модуль напруженості H магнітного поля, створеного відрізком AB прямолінійного провідника зі струмом, в точці C, розміщеній на перпендикулярі до середини цього відрізка на відстані a=5см від нього. По провіднику тече струм силою I=20А. Відрізок AB провідника видно з точки C під кутом 60°.

9. Розв’язати попередню задачу, якщо сила струму у провіднику I=30А і відрізок провідника видно з точки C під кутом 90°. Точка C розміщена на відстані $a = 6$ см від провідника.

10. Струм силою I=20А тече по довгому провіднику, зігнутому під прямим кутом. Знайти модуль напруженості H магнітного поля в точці, що лежить на бісектрисі цього кута на відстані $a = 10$ см від його вершини.

11. Струм силою I=20А, протікаючи по кільцю з мідного дроту перерізом S=1,0мм^2, створює в центрі кільця магнітне поле напруженістю 178 А/м. Яка різниця потенціалів U прикладена до кінців дроту, що утворює кільце? Питомий опір міді $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

12. З дроту довжиною l=1м зроблена квадратна рамка. По рамці тече струм силою $I = 10$ А. Знайти модуль напруженості H магнітного поля в центрі рамки.

13. В центрі круглого дротяного витка створюється магнітне поле напруженістю $\vec{H}$ при різниці потенціалів U_1 на кінцях витка. Яку треба прикласти різницю потенціалів U_2, щоб отримати магнітне поле такої ж напруженості в центрі витка вдвічі більшого радіуса, зробленого з такого ж дроту?

14. По дротяній рамці у формі правильного шестикутника тече струм силою I=2А. В центрі рамки цим струмом створюється магнітне поле напруженістю 33А/м. Знайти довжину l дроту. Примітка: довжина сторони правильного шестикутника рівна радіусу описаного навколо нього кола.

15. Обмотка котушки зроблена з дроту діаметром d=0,8мм. Витки тісно прилягають один до другого. Вважаючи котушку достатньо довгою, знайти напруженість магнітного поля всередині котушки при силі струму $I = 1$ А.

16. Потік α-частинок (ядер гелію), прискорених різницею потенціалів U=1 МВ, влітає в однорідне магнітне поле напруженістю 1,2кА/м. Швидкість кожної частинки перпендикулярна до ліній

напруженості магнітного поля. Знайти модуль сили F, що діє на частинку.

17. Знайти кінетичну енергію (в електрон-вольтах) протона, що рухається по дузі кола радіусом 60см у магнітному полі з індукцією 1Тл.

18. Протон і електрон, рухаючись з однаковою швидкістю, влітають в однорідне магнітне поле. У скільки разів радіус кривизни R_1 траєкторії протона більший від радіуса кривизни R_2 траєкторії електрона?

19. Протон і електрон, прискорені однаковою різницею потенціалів, влітають в однорідне магнітне поле. У скільки разів радіус кривизни R_1 траєкторії протона більший від радіуса кривизни R_2 траєкторії електрона?

20. На фотографії, отриманій у камері Вільсона, траєкторія електрона в однорідному магнітному полі є дугою радіусом R = 10 см. Модуль індукції поля B = 10 мТл. Знайти кінетичну енергію електрона W (в електрон-вольтах).

21. Заряджена частинка рухається в магнітному полі по колу зі швидкістю, модуль якої рівний $1 \cdot 10^6$ м/с. Модуль індукції магнітного поля рівний 0,3 Тл. Радіус кола 4 см. Знайти заряд частинки, якщо відомо, що її кінетична енергія рівна 12 кеВ.

22. Протон і α-частинка влітають в однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній індукції. У скільки разів період обертання T_1 протона в магнітному полі менший від періоду обертання T_2 α-частинки?

23. α-частинка, кінетична енергія якої $W = 500$ еВ, влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній індукції. Модуль індукції магнітного поля B=0,1 Тл. Знайти модуль сили F, що діє на α-частинку, і радіус R кола, по якому рухається частинка.

24. Виходячи з умови попередньої задачі, знайти період обертання α-частинки.

25. α-частинка, модуль моменту імпульсу якої $L = 1{,}33 \cdot 10^{-22}\,(кг \cdot м^2)/с$, влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній індукції. Модуль індукції магнітного поля B=24мТл. Знайти кінетичну енергію W α-частинки.

26. Однозарядні іони ізотопів $^{39}_{19}K$ та $^{41}_{19}K$ прискорюються різницею потенціалів $U = 300$ В; потім вони попадають в однорідне магнітне поле, лінії індукції якого перпендикулярні до напряму їх

руху. Модуль вектора магнітної індукції $B = 0{,}08$ Тл. Знайти радіуси кривизни R_1 і R_2 траєкторій цих іонів.

27. Знайти відношення q/m (питомий заряд) для зарядженої частинки, якщо вона, влітаючи з модулем швидкості $1\cdot10^6$ м/с в однорідне магнітне поле, модуль напруженості якого 200кА/м, рухається по дузі кола радіусом 8,3см. Напрям руху частинки перпендикулярний до ліній напруженості магнітного поля. Порівняти розраховану величину зі значенням q/m для електрона, протона і α-частинки.

28. Напруженості магнітного поля $\vec{H}$ та електричного поля $\vec{E}$ направлені однаково; $H = 8$ кА/м, $E = 1$ кВ/м. Електрон влітає в таке електромагнітне поле зі швидкістю $1\cdot10^5$м/с. Знайти модулі нормального (a_n), тангенціального (a_τ) і повного (a) прискорення електрона, якщо він рухався паралельно до вектора напруженості електричного поля.

29. Розв'язати попередню задачу, якщо електрон рухався перпендикулярно до вектора $\vec{E}$.

30. Індукція магнітного поля $\vec{B}$ та напруженість електричного поля $\vec{E}$ взаємно перпендикулярні; В = 0,5 мТл, Е = 1 кВ/м. Пучок електронів влітає в таке електромагнітне поле, причому швидкість $\vec{v}$ їх перпендикулярна до площини, в якій лежать вектори $\vec{B}$ та $\vec{E}$. Знайти швидкість електронів $\vec{v}$, якщо при одночасній дії обох полів пучок не відхиляється від заданого напряму

31. В однорідному магнітному полі, модуль напруженості якого 79,6 кА/м, розміщена квадратна рамка, площина якої складає з напрямком вектора індукції кут 45°. Довжина сторони рамки 4см. Знайти магнітний потік, що пронизує рамку.

32. В магнітному полі, модуль індукції якого B=0,05Тл, обертається стрижень довжиною $l = 1$ м. Вісь обертання проходить через один з кінців стрижня і паралельна до вектора $\vec{B}$. Знайти магнітний потік Ф, що перетинається стрижнем при кожному оберті.

33. Скільки ампер-витків треба для того, щоб усередині соленоїда малого діаметру із залізним осердям, довжиною 120 см і площею 3см^2, створити магнітний потік $4{,}2\cdot10^{-4}$ Вб?

34. Два прямолінійні довгі паралельні провідники розміщені на відстані $d_1 = 10$ см один від другого. По провідниках в одному напрямку течуть струми силами $I_1 = 20$ А та $I_2 = 30$ А. Яку роботу A_l,

що припадає на одиницю довжини провідників, треба виконати, щоб розсунути ці провідники до відстані d_2 =20 см?

35. З дроту довжиною 20 см зроблені квадратний і коловий контури. Знайти модулі моментів сил M_1 та M_2, що діють на кожний контур, розміщений в однорідному магнітному полі з модулем індукції 0,1 Тл. По контурах тече струм силою 2 А. Площина кожного з контурів складає з напрямком магнітної індукції кут 45°.

36. Котушка гальванометра з $N = 400$ витків тонкого дроту, намотаного на прямокутний каркас довжиною $l = 3$ см і шириною $b = 2$ см, підвішена на нитці у магнітному полі, модуль індукції якого $B = 0{,}1$ Тл. По котушці тече струм силою $I = 0{,}1$ мкА. Знайти модуль обертального моменту M, що діє на котушку гальванометра, якщо площина котушки: а)паралельна до вектора магнітної індукції; б) складає кут $\alpha = 60°$ з напрямком магнітної індукції.

37. Коловий контур розміщений в однорідному магнітному полі так, що площина контура перпендикулярна до напрямку магнітної індукції. Модуль напруженості магнітного поля $H = 150$ кА/м. По контуру тече струм силою $I = 2$ А. Радіус контура $R = 2$ см. Яку роботу А треба виконати, щоб повернути контур на кут $\varphi = 90°$ навколо осі, що співпадає з діаметром контура?

38. В однорідному магнітному полі, модуль індукції якого $B = 0{,}1$ Тл, рухається провідник довжиною $l = 10$ см. Модуль швидкості провідника $v = 15$ м/с, а вектор $\vec{v}$ направлений перпендикулярно до вектора $\vec{B}$. Знайти індуковану у провіднику ЕРС $\mathscr{E}_i$.

39. Котушка діаметром $D = 10$ см має $N = 500$ витків дроту і поміщена в магнітне поле. Знайти середню ЕРС індукції $\langle \mathscr{E}_i \rangle$, що виникає в цій котушці, якщо модуль індукції магнітного поля В зростає протягом часу $t = 0.1$ с від 0 до 2Тл.

40. Котушка довжиною l=20см і діаметром D=3см має N=400 витків. По котушці тече струм силою I=2А. Знайти індуктивність L котушки та магнітний потік Φ, що пронизує площу її поперечного перерізу.

41. Скільки витків дроту діаметром d=0,6мм має одношарова обмотка котушки, індуктивність якої L=1мГн і діаметр D=4см? Витки тісно прилягають один до другого.

42. Соленоїд довжиною $l = 50$ см і площею поперечного перерізу $S = 2$ см^2 має індуктивність $L = 0{,}2$ мкГн. При якій силі струму I

об'ємна густина енергії магнітного поля всередині соленоїда $w = 1$ мДж/м^3?

43. Скільки витків має котушка, індуктивність якої $L = 1$ мГн, якщо при силі струму $I = 1$ А магнітний потік через котушку Ф = 2 мкВб?

44. Квадратна рамка з мідного дроту перерізом $s = 1$ мм^2 поміщена в магнітне поле, модуль індукції якого змінюється з часом за законом $B = B_0 \sin \omega t$, де $B_0 = 0{,}01$ Тл, $\omega = 2\pi/T$ і $T = 0{,}02$ с. Площа рамки $S = 25$ см^2. Площина рамки перпендикулярна до напрямку магнітної індукції. Знайти залежність від часу t і найбільше значення: а) магнітного потоку Ф, що пронизує рамку; б) ЕРС індукції $\mathscr{E}_i$, що виникає в рамці; в) силу струму I, що тече по рамці.

45. Через котушку, індуктивність якої L=21мГн, тече струм, сила якого змінюється з часом за законом $I = I_0 \sin \omega t$, де $I_0 = 5$ А, $\omega = 2\pi/T$, $T = 0{,}02$ с. Знайти залежність від часу t: а) ЕРС самоіндукції $\mathscr{E}_{ci}$, що виникає в котушці; б) енергії W магнітного поля котушки.

46. Скільки ампер-витків треба для того, щоб усередині соленоїда малого діаметру і довжиною $l = 30$ см об'ємна густина енергії магнітного поля була рівна $w = 1{,}75$ Дж/м^3?

Довідкові дані

Фундаментальні фізичні сталі

Стала Авогадро	$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ *ìîëü*
Стала Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ *Äæ / Ê*
Електрична стала	$\varepsilon_0 = 8{,}885 \cdot 10^{-12}$ *Ф/м*
Магнітна стала	$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Маса електрона	$m_e = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ *êã*
Маса протона	$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ *кг*
Елементарний заряд	$\mathring{a} = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ *Êë*

Густина деяких речовин

Речовина	$\rho \cdot 10^3$ (кг/м^3)
мідь	8,6
залізо	7,9
свинець	11,3
ртуть	13,6

Діелектрична проникність деяких речовин

Речовина	ε	Речовина	ε
віск	7,7	олива	2,5
вода	81	парафін	2,2
гас	2	скло	7
масло трансформаторне	2,2	слюда	6

Питомі опори деяких металів

Метал	$\rho(Ом \cdot$	Метал	$\rho(Ом \cdot$
ніхром	$1{,}0 \cdot 10^{-6}$	нікелін	$4{,}2 \cdot 10^{-7}$

мідь	$1,7 \cdot 10^{-8}$	срібло	$1,6 \cdot 10^{-8}$
залізо	$8,7 \cdot 10^{-8}$		

Література

1. Загальна фізика. Ч.І / за редакцією Ковалець М.О., Орленка В.Ф/. Інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення. Рівне, 2009.

2. Загальна фізика. Частина II / за редакцією Олексина Д.І., ОрленкаВ.Ф. / Інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення. Рівне, 2009.

3. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики, – М., "Наука", I985-I989.

4.. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.–М., “Наука”, 1987.

5. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – М., "Наука", 1982.

6. Чертов А.Г., Воробьев А.А., Федоров М.В. Задачник по физике. – М., "Высшая школа", 1988.