Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки

Кафедра вищої математики

04-02-56М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи та підготовки до практичних занять з навчальної дисципліни **«Вища математика»** для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Цифрові технології дистанційної освіти» спеціальності 15.39 «Професійна освіта» та за освітньо-професійною програмою «Інформаційні системи і технології» спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» денної та заочної форм навчання

Рекомендовано науково-методичною радою з якості ННІАКОТ
Протокол № 3 від 31.01.2023 р.

Рівне – 2023

Методичні вказівки до самостійної роботи та підготовки до практичних занять з навчальної дисципліни **«Вища математика»** для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Цифрові технології дистанційної освіти» спеціальності 15.39 «Професійна освіта» та за освітньо-професійною програмою «Інформаційні системи і технології» спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» денної та заочної форм навчання [Електронне видання] / Тадеєв П. О., Дейнека О. Ю. – Рівне : НУВГП, 2031. – 46 с.

Укладачі:

Тадеєв П. О., к.фіз.-мат.н., д.п.н., професор, завідувач кафедри вищої математики;

Дейнека О. Ю., к.т.н, доцент кафедри вищої математики.

Методичні вказівки схвалені на засіданні кафедри
Протокол № 6 від 25 січня 2023 року.

Відповідальний за випуск:

Тадеєв П. О., к.фіз.-мат.н., д.п.н., професор, завідувач кафедри вищої математики.

Керівник (гарант) ОП ЦТ: Парфенюк О. В. к.п.н., доцент.

Керівник (гарант) ОП ІСТ: Гладка О. М. к.т.н., доцент.

ЗМІСТ

	Вступ	4
1.	Тема 1. Основні поняття функції багатьох змінних	5
2.	Тема 2. Похідні і повний диференціал функції багатьох змінних	9
3.	Тема 3. Дотична площина і нормаль до поверхні	13
4.	Тема 4. Наближені обчислення за допомогою повного диференціала	15
5.	Тема 5. Похідна складної функції	18
6.	Тема 6. Похідна неявно заданої функції	21
7.	Тема 7. Похідна за напрямком. Градієнт	22
8.	Тема 8. Частинні похідні вищих порядків	27
9.	Тема 9. Екстремум функції декількох змінних	31
10.	Тема 10. Умовний екстремум	34
	Завдання для самостійної роботи	38
	Використана та рекомендована література	46

Вступ

Вища математика є важливим складником підготовки фахівців в інформаційних технологій. Курс вищої математики є одним із способів розвитку логічного й алгоритмічного мислення студентів та зокрема здатності розв'язувати складні спеціалізовані задачі з інформатики. В результаті вивчення дисципліни студенти оволодіють математичним апаратом, достатнім для створення і опрацьовування математичних моделей цифрових технологій, пов'язаних з їх подальшою практичною діяльністю, що дозволяє формувати фахівців здатних застосовувати та удосконалювати існуючі методи в професійній освіті та інформаційних системах і технологіях.

Мета навчальної дисципліни „Вища математика" – формування системи теоретичних знань і практичних навичок з основ вищої математики.

Завдання навчальної дисципліни ,,Вища математика" – вивчення основних принципів та засобів математичного апарату, який використовується для розв'язування задач за фахом.

У результаті вивчення даного курсу студент повинен:

знати: правила аналітичних перетворень, методи розв'язання математичних задач; розуміти основні математичні поняття; формулювання та доведення базових теорем; основні властивості математичних об'єктів та можливості їх застосування до розв'язання конкретних задач із використання цифрових технологій.

уміти: використовувати набуті математичні знання для розв'язання фахових задач; розв'язувати типові математичні задачі з приведенням їх до практичного результату використовуючи різні обчислювальні методи; аналізувати одержані результати та на їх основі розробляти практичні рекомендації; самостійно вивчати новітню літературу з вищої математики.

У методичних рекомендаціях подано кроткі теоретичні відомості з курсу «Диференціальне числення функції декількох змінних». Описані приклади розв'язання типових задач, що виносяться на модульну роботу. Для закріплення здобутих студентами знань і формування навичок розв'язання задач окрім прикладів, наведено завдання для самостійної роботи.

Основні поняття функції багатьох змінних

Функції багатьох змінних досить широко використовуються в сучасній науці наприклад у фізиці: другий закон Ньютона, рівняння Менделєєва-Клапейрона, формула Пуассона; в математиці стереометрія, диференціальна геометрія, рівняння в частинних похідних; в економіці функція Кобба-Дугласа і т. п.

При вивченні функцій декількох змінних достатньо обмежитися докладним описом функцій двох змінних, оскільки всі отримані результати будуть справедливі для функцій довільного числа змінних.

Означення: Якщо кожній парі незалежних чисел (x, y) з деякої множини за певним правилу ставиться у відповідність одне або декілька значень змінної z, то змінна z називається функцією двох змінних.

$$z = f(x, y).$$

Означення: Якщо парі чисел (x, y) відповідає одне значення z, то функція називається однозначною, а якщо більш за одне, то – багатозначною.

Означення: Областю визначення функції z називається сукупність пар (x, y), при яких функція z існує.

До основних правил знаходження області визначення можна віднести

1. Ділити на 0 не можна;

2. $\sqrt[2n]{f(x, y)}, \quad f(x, y) \ge 0$;

3. $\log_a f(x,y),\ f(x,y)>0$;

4. $\arcsin f(x,y),\ \arccos f(x,y),\ |f(x,y)|\le 1$.

<u>Приклади:</u> Знайти область визначення наступних функцій:

а) $z=\arcsin(x/y),\ |x/y|\le 1,\ \dfrac{|x|}{|y|}\le 1.$

Відповідь: $\{(x,\ y): x^2+y^2\}.$

б) $z=\ln(16-x^2-y^2)+\sqrt{x^2+y^2-9}$.

Відповідь: $\{(x,\ y): 3\le x^2+y^2<4\}.$

<u>Означення:</u> Околом точки $M_0(x_0,y_0)$ радіуса r називається сукупність всіх точок (x,y), які задовольняють умову.

<u>Означення:</u> Число A називається границею функції $f(x,y)$ при наближенні точки $M(x,y)$ до точки $M_0(x_0,y_0)$, якщо дана функція визначена в околі точки M_0 і для кожного числа $\varepsilon<0$ знайдеться таке число $r>0$, що для будь-якої точки $M(x,y)$, для якої вірна умова $MM_0<r$ тобто $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$ виконується умова $\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$.

Це записується наступним чином: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$.

В більшості випадків для обчислення подвійної границі переходять до повторної

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

Означення: Нехай точка $M_0(x_0, y_0)$ належить області визначення функції $f(x,y)$ і визначена в околі цієї точки. Тоді функція $z = f(x,y)$ називається неперервною в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)\,, \qquad (1)$$

при цьому точка $M(x,y)$ прямує до точки $M_0(x_0, y_0)$ довільним чином.

Якщо в деякій точці рівність (1) не виконується, то ця точка називається точкою розриву функції $f(x,y)$. Це може бути в наступних випадках:

1) Не існує границя $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.

2) Ця границя існує, але вона не дорівнює $f(x_0, y_0)$.

Приклад: Дослідити на неперервність функцію $z = \dfrac{x+y}{x-y}$ в точці $(0, 0)$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y} = |y = kx| = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+kx}{x-kx} = \frac{1+k}{1-k} \text{ – границі не існує}$$

в точці $(0, 0)$ розрив функції.

Властивість. Неперервна функція в замкнутій і обмеженій області D досягає принаймні один раз найбільшого значення і один раз найменшого значення.

Властивість. Якщо функція $f(x,y)$ визначена і неперервна в замкнутій, обмеженій області D, а M і m – відповідно найбільше і найменше значення функції в цій області, то для будь-якого значення $\mu \in [M, m]$ існує точка $N_0(x_0, y_0)$: така, що $f(x_0, y_0) = \mu$.

Властивість. Функція $f(x, y)$, неперервна в замкнутій обмеженій області D, обмежена в цій області, якщо існує таке число $K > 0$, що для всіх точок області вірна нерівність $|f(x, y)| < K$.

Властивість. Якщо функція $f(x, y)$ визначена і неперервна в замкнутій, обмеженій області D, то вона рівномірно неперервна в цій області, тобто для будь-якого додатного числа ε існує таке число $\Delta > 0$, що для будь-яких двох точок (x_1, y_1) і (x_2, y_2) області, що знаходяться на відстані, меншої за Δ, виконується нерівність

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon .$$

Наведені вище властивості аналогічні властивостям функцій однієї змінної, неперервних на відрізку.

Похідні і повний диференціал функції багатьох змінних

Означення: Нехай в деякій області задана функція $z = f(x,y)$. Виберемо довільну точку $M(x,y)$ і задамо приріст Δx по змінній x. Тоді величина $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ називається частинним приростом функції по x, а відповідно величина $\Delta_y z = f(x,y) - f(x, y+\Delta y) -$ частинним приростом по y, коли задавати приріст Δy по змінній y.

Тому можна записати

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta x} = \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Тоді, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ називається частинною похідною функції $z = f(x,y)$ по змінній x і відповідно $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta x}$ називатиметься частинною похідною по змінній y.

Для запису частинних похідних використовують наступні позначення: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$; $f'_y(x,y)$.

Ці позначення відповідають записам

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

$$f'_y(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Функція $z=f(x,y)$ зображується в трьохвимірному декартовому просторі, де задана прямокутна система координат (x,y,z), як правило поверхнею – геометричним місцем точок $(x,y,(x,y))$, тут (x,y) належить області визначення даної функції. З геометричної точки зору величина $f'_x(x_0,y_0)$ (якщо вона існує) дорівнює тангенсу кута нахилу до прямої паралельної осі Ox (із визначеним цією віссю напрямком), дотичної до перерізу цієї поверхні площиною $y=y_0$ в точці з абсцисою x_0. Аналогічно величина $f'_y(x_0,y_0)$ (якщо вона існує) дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до перерізу цієї поверхні площиною $x=x_0$ в точці з абсцисою y_0 до прямої паралельної осі Oy (із визначеним цією віссю напрямком).

Означення: Повним приростом функції $f(x,y)$ називається вираз $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$.

Якщо функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні, то після певних перетворень

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=$$
$$=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]$$

можна використати теорему Лагранжа до виразів, що стоять в квадратних дужках.

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}\Delta y,$$

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x$$

тут $\bar{y}\in(y,y+\Delta y),\ \bar{x}\in(x,x+\Delta x)$.

Тоді отримуємо

$$\Delta z = \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}\Delta y .$$

Оскільки частинні похідні неперервні, то можна записати рівність:

$$\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \varepsilon_1 ,$$

$$\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \varepsilon_2 ,$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, як тільки $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$.

<u>Означення:</u> Вираз $\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$ називається повним приростом функції $f(x,y)$ в деякій точці (x,y), де ε_1 і ε_2 – нескінченно малі величини при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ відповідно.

<u>Означення:</u> Повним диференціалом функції $f(x,y)$ називається головна лінійна відносно Δx і Δy частина приросту функції Δz в точці (x,y).

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy .$$

<u>Означення:</u> Диференційованість функції $f(x,y)$ в точці (x,y) полягає в тому, що її приріст в цій точці можна подати у вигляді суми двох складових: головної лінійної частини – $A\Delta x + B\Delta y$ і – $\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$ нелінійної, яка залежить від приростів $\Delta x, \Delta y$ і прямує до нуля швидше ніж $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

На відміну від функцій однієї змінної, для яких, як відомо, диференційованість в точці рівносильна існуванню похідної в цій точці, щодо функцій багатьох змінних справедливе наступне твердження.

Теорема. Для того, щоб функція $f(x,y)$ була диференційованою в точці (x,y), необхідно, щоб вона мала в цій точці частинні похідні, і достатньо, щоб ці похідні були неперервні.

Іншими словами властивість функції бути диференційованою в точці вужче (сильніше) властивості мати частинні похідні в точці, але ширше (слабкіше) мати неперервні частинні похідні в точці.

Зрозуміло, що для функції довільного (скінченного) числа змінних:

$$df(x,y,z,...,t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + ... + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

<u>Приклад.</u> Знайти повний диференціал функції $u = x^{y^3 z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^3 z x^{y^3 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^3 z}\ln x \cdot 3y^2 z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^3 z}\ln x \cdot y^3;$$

$$du = y^3 z x^{y^3 z-1}dx + 3\ln(x) y^2 z x^{y^2 z}dy + \ln(x) y^3 x^{y^3 z}dz$$

<u>Приклад.</u> Знайти повний диференціал функції

$$z = \frac{2x^2 - 5y^2}{3x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4x(3x^2+y^2)-6x(2x^2-5y^2)}{(3x^2+y^2)^2}=\frac{34xy^2}{(3x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-10y(3x^2+y^2)-2y(2x^2-5y^2)}{(3x^2+y^2)^2}=\frac{-34x^2y}{(3x^2+y^2)^2},$$

$$dz=\frac{34xy(ydx-xdy)}{(3x^2+y^2)^2}.$$

Дотична площина і нормаль до поверхні

Означення: Площина α називається дотичною площиною в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до поверхні S, заданої рівнянням $z=f(x,y)$, якщо відстань $\rho(P,\alpha)$ довільної точки $P(x,y,z)\in S$ прямує до нуля швидше ніж $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ і саме граничне положення січної площини є дотичною.

Означення: Нормаллю до поверхні в точці M_0 називається пряма, що проходить через точку M_0 перпендикулярно дотичної площині до цієї поверхні в даній точці.

Якщо поверхня задана рівнянням $z=f(x,y)$, де $f(x,y)$ – функція, диференційована в точці $M_0(x_0,y_0)$, дотична площина в точці $M_0(x_0,y_0,(x_0,y_0))$ існує і має рівняння:

$$z-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Рівняння нормалі до поверхні в цій точці:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-f(x_0,y_0)}{-1}.$$

Для неявно заданої функції $F(x,\ y,\ z)=0$ в точці $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$

$$dF(x,\ y,\ z)=F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)dx+F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)dy+F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)dz$$

і рівняння дотичної площини має вигляд

$$F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)(z-z_0)=0,$$

нормалі –

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)}.$$

Геометричним змістом повного диференціала функції двох змінних $f(x,y)$ в точці (x_0,y_0) є приріст аплікати (координати z) дотичної площини до поверхні при переході від точки (x_0,y_0) до точки $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.

Як бачимо, геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних є просторовим аналогом геометричного приросту диференціала функції однієї змінної.

Приклад. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

$$z=x^2-2xy+y^2-x+2y$$

у точці $A(1,\ 1),\ \ z(1,\ 1)=1$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2\ ;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\,1)} = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\,1)} = 2.$$

Рівняння дотичної площини:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \qquad x - 2y + z = 0.$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1} \text{ або } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

Загалом, наявність у поверхні $z = f(x, y)$ дотичної площини в точці $M(x_0, y_0, z_0)$ рівносильна диференційованості функції $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0).

Наближені обчислення за допомогою повного диференціала

Нехай функція $f(x, y)$ диференційована в точці (x_0, y_0). Знайдемо повний приріст цієї функції:

$$\Delta z(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta z$$

Якщо підставити в цю формулу вираз

$$\Delta z(x_0, y_0) \approx dz(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y,$$

тоді отримаємо наближену формулу:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Приклад. Обчислити наближено значення $\sqrt{1{,}03^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$, використовуючи значення функції $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ обчислене в точці $M(1,\ 2,\ 1)$, $(x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ z_0 = 1)$.

Визначимо:

$\Delta x = 1{,}03 - 1 = 0{,}03$; $\Delta y = 1{,}99 - 2 = -0{,}01$; $\Delta z = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$.

Знайдемо значення функції $u(M) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$.

Обчислимо частинні похідні в точці M:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.\frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}\right|_M = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left.\frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}}\right|_M = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \left.\frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}\right|_M = \frac{1}{2}.$$

Повний диференціал функції u рівний:

$$du(M)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \Delta x+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \Delta y+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \Delta z=$$

$$=1\cdot 0{,}03-0\cdot 0{,}01+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02=0{,}03+0{,}01=0{,}04,$$

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}\approx u(1,2,1)+du(1,2,1)=1+0{,}04=1{,}04.$$

Точне значення цього виразу: 1,03941766596.

<u>Приклади.</u>

$\sqrt{3{,}03^2+3{,}98^2}$; $\quad z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\quad x_0=3$; $\;y_0=4$; $\quad \Delta x=0{,}03$;

$\Delta y=-0{,}02$; $\;z_0=\sqrt{3^2+4^2}=5$; $\;x=x_0+\Delta x$; $\quad y=y_0+\Delta y$;

$$z(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\approx z(x_0,\ y_0)+z'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+z'_y(x_0,\ y_0)\Delta y;$$

$$z(3{,}03,\ 3{,}98)\approx z(3,\ 4)+z'_x(3,\ 4)0{,}03+z'_y(3,\ 4)(-0{,}02);$$

$$z'_x(x,\ y)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}};\quad z'_x(3,\ 4)=\frac{3}{5}=0{,}6;$$

$$z'_y(x,\ y)=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}};\quad z'_y(3,\ 4)=\frac{4}{5}=0{,}8;$$

$$z(3{,}03,\ 3{,}98)\approx 5+0{,}6\cdot 0{,}03+0{,}8\cdot(-0{,}02)=5{,}002.$$

$1{,}04^{2{,}02}$, $\;z=x^y$, $\quad x_0=1$; $\;y_0=2$; $\quad \Delta x=0{,}04$; $\quad \Delta y=0{,}02$; $\;z_0=1^2=1$;

$x=x_0+\Delta x$; $\quad y=y_0+\Delta y$;

$$z(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\approx z(x_0,\ y_0)+z'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+z'_y(x_0,\ y_0)\Delta y;$$

$$z(1{,}04,\ 2{,}02)\approx z(1,\ 2)+z'_x(1,\ 2)0{,}04+z'_y(1,\ 2)0{,}02$$

$$z'_x(x,\ y)=yx^{y-1};\quad z'_x(1,\ 2)=2;$$

$$z'_y(x,\ y)=x^y\ln x;\quad z'_y(1,\ 2)=0;$$

$$z(1{,}04,\ 2{,}02)\approx 1+2\cdot 0{,}04+0\cdot 0{,}02=1{,}08.$$

Похідна складної функції

Нехай задано функцію $u = f(x,y,z)$ в деякій області D і кожна із змінних є функцією від t на деякому числовому проміжку

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t).$$

Крім того, того зміна t не залишає значення (x,y,z) в даній області D.

Підставляючи $x,\ y$ і z в u отримаємо складну функцію

$$u = f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)).$$

Припустимо, що u має неперервні частинні похідні по x,y,z і що частинні похідні $\varphi'_t = u'_x,\ \psi'_t = u'_y,\ \chi'_t = u'_z$ існують.

Тоді,

$$\Delta u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + u'_z \Delta z + \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \gamma \Delta z,$$

де $\alpha,\ \beta,\ \gamma \to 0$ при $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z \to 0$. Поділивши обидві частини рівності на Δt отримаємо

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = u'_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + u'_y \frac{\Delta y}{\Delta t} + u'_z \frac{\Delta z}{\Delta t} + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Тепер, якщо $\Delta t \to 0$, то $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z \to 0$ (згідно із неперервністю $u(x,y,z)$), а тому $\alpha,\beta,\gamma \to 0$. Отже в границі отримаємо

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Далі, у випадку коли

$$x = \varphi(t,s),\ y = \psi(t,s),\ z = \chi(t,s),$$

отримаємо наступні співвідношення

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

І в кінці розглянемо випадок, коли

$$x = x,\ y = \psi(x),\ z = \chi(x)$$

тоді маємо наступну формулу

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}.$$

Приклад. Показати, що функція $z = \varphi(x^2 + y^2)$ задовольняє рівняння $y\frac{\partial z}{\partial x} = x\frac{\partial z}{\partial y}$.

Дана функція φ залежить від x і y через проміжну змінну $x^2 + y^2 = t$, тому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(x^2 + y^2)2x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = \varphi'(x^2 + y^2)2y.$$

після підстановки в рівність $y\frac{\partial z}{\partial x} = x\frac{\partial z}{\partial y}$, отримаємо

$$y\varphi'(x^2 + y^2)2x = x\varphi'(x^2 + y^2)2y.$$

Розглянемо однорідну (степені m) функцію $f(x,y,z)$, яка має в області D неперервні частинні похідні по всім змінним, тоді для фіксованої точки (x_0,y_0,z_0) і $t>0$ справедлива тотожність

$$f(tx_0,ty_0,tz_0)\equiv t^m f(x_0,y_0,z_0).$$

Диференціюючи її по t: праву частину за правилом диференціювання складної функції, ліву як степеневу маємо:

$$f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)x_0+f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)y_0+f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)z_0=mt^{m-1}f(x_0,y_0,z_0).$$

Якщо надати значення $t=1$, отримаємо таку формулу

$$f'_x x_0,y_0,z_0)x_0+f'_y(x_0,y_0,z_0)y_0+f'_z(x_0,y_0,z_0)z_0=mf(x_0,y_0,z_0).$$

Таким чином для довільної точки (x,y,z) із області D справедлива рівність

$$f'_x x,y,z)x+f'_y(x,y,z)y+f'_z(x,y,z)z=mf(x,y,z) -$$

це так звана формула Ейлера.

Зокрема, коли $m=0$

$$f'_x x,y,z)x+f'_y(x,y,z)y+f'_z(x,y,z)z=0.$$

Приклад. Розглянемо функцію нульового порядку однорідності

$$z=\frac{3x^2-2y^2}{4x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{6x(4x^2+y^2)-8x(3x^2-2y^2)}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{22xy^2}{(3x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-4y(4x^2+y^2)-2y(3x^2-2y^2)}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{-22x^2y}{(3x^2+y^2)^2},$$

$$x\frac{22xy^2}{(3x^2+y^2)^2}+y\frac{-22x^2y}{(3x^2+y^2)^2}=0.$$

Похідна неявно заданої функції

Нехай рівняння

$$F(x,y,z)=0$$

визначає неявну функцію $z=f(x,y)$, яка має частинні похідні

$$z'_x=\varphi(x,y);\ z'_y=\psi(x,y).$$

Підставляючи $z=f(x,y)$ у рівняння $F(x,y,z)=0$ ми повинні отримувати тотожність $0=0$, тому що $z=f(x,y)$ є розв'язком цього рівняння.

Застосовуючи правило диференціювання складної функції по змінній x, до рівняння $F(x,y,z)=0$ отримаємо

$$F'_x(x,y,z)+F'_z(x,y,z)z'_x(x,y)=0,$$

звідки

$$z'_x(x,y)=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

Аналогічно, диференціюючи по змінній y маємо

$$z'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

Приклад. Знайти y'_x та для неявно заданої функції

$$x^3 + y^3 + 3\sin(xy) + 2 = 0.$$

$$F'_x(x,\ y) = 3x^2 + 3y\cos(xy),$$

$$F'_y(x,\ y) = 3y^2 + 3x\cos(xy),$$

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{x^2 + y\cos(xy)}{y^2 + x\cos(xy)}.$$

Похідна за напрямком. Градієнт

Нехай задано функцію $u(x,y,z)$ та вектор $\vec{s}$. Точки $M(x_0,y_0,z_0)$ і біжуча $\widetilde{M}(x,y,z)$ належать області визначення цієї функції.

Кути нахилу даного вектора даного вектора з координатними осями OX, OY, OZ позначимо через $\alpha, \beta, \gamma,$ відповідно і вимагатимемо, щоб напрямні косинусами вектора $\overrightarrow{M\widetilde{M}}$ не змінювалися при зміні координат точки $\widetilde{M}$. Відстань між точками $M\widetilde{M}$ будемо вважати рівною t.

$$t = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Далі припустимо, що функція $u(x,y,z)$ неперервна і має неперервні частинні похідні по змінним $x,\ y,\ z$ в заданій області.

Крім того відмітимо, що

$$x - x_0 = t\cos\alpha, \quad y - y_0 = t\cos\beta, \quad z - z_0 = t\cos\gamma\,.$$

Отже, в напрямку вектора $\overrightarrow{M\tilde{M}}$, або в напрямку осі l (яка починається в точці M та проходить через точу $\tilde{M}$ і визначається напрямними косинусами) координати $x,\ y,\ z$ можна розглядати, як функції від t:

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\cos\beta, \quad z = z_0 + t\cos\gamma,$$

а функцію $u(x,y,z)$ – як складну функцію $\varphi(t)$ від t.

Введемо наступне

<u>Означення:</u> Похідною від функції u в точці $M(x,y,z)$ в напрямку вектора $\overrightarrow{M\tilde{M}}$ називається границя $\dfrac{\partial u(M)}{\partial \vec{s}} = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{u(\tilde{M}) - u(M)}{t}$ (якщо вона існує), при умові що $\overrightarrow{M\tilde{M}} = t\vec{s}$.

Таким чином

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{s}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{u(\tilde{M}) - u(M)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$$

і остаточно

$$\boxed{\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\cos\gamma}\,.$$

Пояснимо на прикладі.

Приклад. Обчислити похідну функції $z = yx^2 + xy^2$ в точці $A(1,\ 2)$ в напрямі вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $B(4,\ 6)$.

Насамперед необхідно визначити координати вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (4-1,\ 6-2) = 3\vec{i} + 4\vec{j}\ .$$

Далі визначуваний модуль цього вектора:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| == \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,.$$

Знаходимо частинні похідні функції z в загальному вигляді:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2yx,$$

та значення цих виразів в точці A: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = 8; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = 5.$

Знайдемо значення напрямних косинусів вектора $\overrightarrow{AB}$ виконаємо наступне перетворення:

$$\vec{S} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\ \vec{j} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\ ,$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5};\ \cos\beta = \frac{4}{5}.$$

Остаточно отримуємо: $\dfrac{\partial z(A)}{\partial \overrightarrow{AB}} = 8 \cdot \dfrac{3}{5} + 5 \cdot \dfrac{4}{5} = 8{,}8$ – значення похідної заданої функції в напрямі вектора $\overrightarrow{AB}$ у точці A.

<u>Означення:</u> Якщо в деякій області D задана функція $u(x, y, z)$ і деякий вектор, проекції якого на координатні осі рівні значенням частинних похідних функції u у відповідній точці

$$\frac{\partial u}{\partial x};\quad \frac{\partial u}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

то цей вектор називається градієнтом функції u і позначається $\overrightarrow{grad\, u}$.

Тобто,

$$\overrightarrow{grad\, u} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

При цьому говорять, що в області D задано поле градієнтів.

Теорема: Нехай задана функція $u(x, y, z)$ і поле градієнтів

$$\overrightarrow{grad\, u} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Тоді похідна $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ по напряму деякого вектора $\vec{s}$ дорівнює проекції вектора $\overrightarrow{grad\, u}$ на вектор $\vec{s}$.

Доведення: Для деякого одиничного вектора $\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \vec{i}\cos\alpha +$ $+\vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ та функції $u = u(x, y, z)$ і знайдемо скалярний добуток векторів $\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$ і $\overrightarrow{grad u}$.

$$\overrightarrow{grad\,u} \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma .$$

Вираз, що стоїть в правій частині цієї рівності є похідною функції u по напряму $\vec{s}$.

Тобто, $\overrightarrow{grad\,u} \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$. Якщо кут між векторами $\overrightarrow{grad\,u}$ і $\vec{s}$ позначити через φ, то скалярний добуток можна записати у вигляді добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. На підставі того, що вектор $\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$ одиничний, його довжина рівна одиниці, можна записати:

$$\left|\overrightarrow{grad\,u}\right| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$$

Вираз, що стоїть в лівій частині цієї рівності і є проекцією вектора $\overrightarrow{grad\,u}$ на вектор $\vec{s}$.

Іншими словами

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = Пр_{\vec{s}}\,\overrightarrow{grad\,u} = \frac{\overrightarrow{grad\,u} \cdot \vec{s}}{|\,\vec{s}\,|}.$$

<u>Приклад</u>. Для функції_ $z = \ln(3x + y^2)$ в точці $A(-5,\ 4)$ знайти градієнт та похідну в напрямку вектора $\vec{a} = (1,\ -1)$.

$$z'_x = \frac{3}{3x+y^2}, \quad z'_x(A) = 3, \;\; z'_y = \frac{2y}{3x+y^2}, \quad z'_y(A) = 8,$$

$$grad\, z(A) = (3,\, 8),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_{(-5,\,4)} = \frac{(3,\,8)(1,\,-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3\cdot 1+8\cdot(-1)}{\sqrt{2}} = -\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

З вище сказаного випливає, що градієнт u функції в точці (x, y, z) – це вектор з такими властивостями:

1) довжина його дорівнює максимальному значенню похідної за напрямом $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ в точці (x, y, z);
2) якщо його довжина не рівна нулю, то він напрямлений в ту саму сторону, що і вектор $\vec{s}$, вздовж якого похідна $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ досягає максимального значення;
3) градієнт перпендикулярний до поверхні рівня функції.

За геометричного та фізичного змісту градієнта відмітимо, що це вектор, який вказує на напрям найшвидшої зміни деякого поля $u(x,\, y,\, z)$ в даній точці. У фізиці існують такі поняття як градієнт швидкості, імпульсу, температури, тиску і тому подібне.

Частинні похідні вищих порядків

Коли функція $f(x, y)$ визначена в деякій області D, то її частинні похідні $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ теж можуть будуть визначені в тій же області або її частині.

Частинні похідні $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ називатимемо частинними похідними першого порядку.

Похідні цих функцій, за умови їх існування будуть частинними похідними другого порядку.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

Диференціюючи отримані вирази, отримаємо частинні похідні вищих порядків.

Означення: Змішаними частинними похідними називаються частинні похідні взяті по різним змінним, тобто частинні похідні вигляду $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}...$ і так далі.

Теорема. Якщо функції $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ визначені в деякому околі точки (x_0, y_0) і її частинні похідні $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ неперервні в точці (x_0, y_0), то

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x},$$

тобто її змішані частинні похідні другого порядку рівні в кожній точці, де вони неперервні.

Дійсно, можна переписати наступні перетворення:

$$\Delta_{xh}\Delta_{yh} f(x, y) = \Delta_{xh}[f(x, y+h) - f(x, y)] = f(x+h, y+h) -$$
$$- f(x+h, y) - f(x, y+h) + f(x, y) = \Delta_{yh}\Delta_{xh} f(x, y).$$

$$\Delta_{yh}\Delta_{xh} f(x, y) = \Delta_{yh}[f(x+h, y) - f(x, y)] = h[f'_y(x+h, y+\theta h) -$$
$$- f'_y(x, y+\theta h)] = h^2 f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta h) = h^2[f''_{xy}(x, y) + \varepsilon],$$

тут $\varepsilon \to 0$, коли $h \to 0$.

Пояснимо наведені співвідношення наступним чином. Оскільки похідна $f''_{xy}(x_0, y_0)$ неперервна в точці (x_0, y_0), то в досить малому околі і в цій точці існує $f'_y(x_0, y_0)$. З а досить малого h ми не виходимо з досить малого околу і застосовуємо теорему про середнє по y до функції $f(x+h, y) - f(x, y)$. Застосування цієї ж самої теореми по x до $f'_y(x, y)$ дає нам передостанню рівність. Неперервність $f''_{xy}(x_0, y_0)$ в точці (x_0, y_0), за умови $\varepsilon \to 0$, коли $h \to 0$ дає нам останню рівність.

Іншими словами, відповідно до вище наведених міркувань мішані частинні похідні вищих порядків (того ж самого порядку і однакового набору змінних) в переважній кількості випадків не залежать від вибору порядку диференціювання.

Звідси випливає, що

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{yh} \Delta_{xh} f(x_0, y_0)}{h^2} = f''_{xy}(x_0, y_0),$$

та

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{xh} \Delta_{yh} f(x_0, y_0)}{h^2} = f''_{yx}(x_0, y_0),$$

а враховуючи, що $\Delta_{xh} \Delta_{yh} f(x_0, y_0) = \Delta_{yh} \Delta_{xh} f(x_0, y_0)$ для досить малих h маємо твердження теореми.

Приклад. Нехай

$$z = x^8 + 8x^2 y^4 - 5y^6 - \cos 3x + \sin 2y - 12x + 10y + 100,$$

тоді

$z'_x = 8x^7 + 16xy^4 + 3\sin 3x - 12,$

$z'_y = 32x^2y^3 - 30y^5 + 2\cos 2y + 10,$

$z''_{xx} = 56x^6 + 16y^4 + 9\cos 3x,$

$z''_{yy} = 96x^2y^2 - 150y^4 - 4\sin 2y,$

$z''_{xy} = 64xy^3 = z''_{yx}.$

На останок наведемо контрприклад Шварца.

для функції

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ f(0,\ 0) = 0, \end{cases}$$

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} y\left[\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}\right], & x^2 + y^2 > 0; \\ f(0,\ 0) = 0, \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} x\left[\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \dfrac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}\right], & x^2 + y^2 > 0; \\ f(0,\ 0) = 0, \end{cases}$$

$$f''_{xy}(0,0) = -1, \qquad f''_{yx}(0,0) = 1, \qquad f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0).$$

Подібним чином визначаються диференціали вищих порядків.

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)\,,$$

$$d^2z = d\left[f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy\right] = f''_{xx}(x,y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{yy}(x,y)(dy)^2,$$

$$d^3z = f'''_{xxx}(x,y)(dx)^3 + 3f'''_{xxy}(x,y)(dx)^2dy + 3f'''_{xyy}(x,y)dx(dy)^2 + f'''_{yyy}(x,y)(dy)^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)} f(x,y).$$

Тут (n) – символічний порядок похідної, такий що не замінює реальний степінь після формального піднесення у формулі бінома Ньютона виразу, що стоїть в дужках і «дописується» до кожного символу $f(x,y)$.

Екстремум функції декількох змінних

Означення: Функції $z = f(x,y)$ досягає локального максимуму в точці $M_0(x_0,y_0)$, якщо її значення в цій точці більші ніж значення в деякому її околі в будь-якій іншій точці $M(x,y)$, тобто $f(x_0,y_0) > f(x,y)$ для всіх точок $M(x,y)$, що задовольняють умову $|M_0M| < \delta$, де δ – досить мале додатне число.

Означення: Функції $z = f(x,y)$ досягає локального мінімуму в точці $M_0(x_0,y_0)$, якщо її значення в цій точці менші ніж значення в деякому її околі в будь-якій іншій точці $M(x,y)$, тобто $f(x_0,y_0) < f(x,y)$ для всіх точок $M(x,y)$, що задовольняють умову $|M_0M| < \delta$, де δ –досить мале додатне число.

В сукупності ці точки (x_0, y_0) максимуму або мінімуму функції називається її екстремумами.

Теорема. (Необхідні умови екстремуму).

Якщо функція $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) має екстремум, то в цій точці або обидві її частинні похідні першого порядку рівні нулю $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ або хоча б одна з них не існує.

Точку (x_0, y_0) де принаймні одна з частинних похідних не існує називають критичною точкою. Критичні точки у яких частинні похідні рівні нулю називають стаціонарними.

Для диференційованої функції стаціонарними є ті точки у яких градієнт рівний нулю.

На підставі формули Тейлора

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2] +$$

$$+o(\rho^2), \quad \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \lim_{\rho^2 \to 0} o(\rho^2) = 0;$$

рівняння дотичної площини

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0);$$

та згідно критерію Сільвестра знакододатності та знаковід'ємності квадратичних форм, маємо наступне твердження.

Теорема. (Достатні умови екстремуму).

Якщо в околі стаціонарної точки (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно,

тоді ввівши позначення:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0);\ B = f''_{xy}(x_0, y_0);\ C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

і обчисливши дискримінант $\Delta = AC - B$, матимемо такі результати:

1) якщо $\Delta > 0$, то функція має в точці (x_0, y_0) екстремум, а саме максимум коли $A < 0$ (або $C < 0$) і мінімум коли $A > 0$ (або $C > 0$);
2) якщо $\Delta < 0$, то в точці (x_0, y_0) екстремум відсутній;
3) якщо $\Delta = 0$, то потрібні подальші дослідження із застосуванням частинних похідних вищих порядків.

<u>Приклад.</u> Дослідити на екстремум функцію

$$z = 9xy - x^3 - y^3 + 1.$$

Найдемо частинні похідні першого порядку:

$$f'_x(x, y) = 9y - 3x^2. \quad f'_y(x, y) = 9x - 3y^2.$$

Використавши необхідні умовами існування екстремуму, знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} 9y - 3x^2 = 0, \\ 9x - 3y^2 = 0, \end{cases} \text{звідки } x_1 = y_1 = 0,\ x_2 = y_2 = 3.$$

Отже, маємо дві стаціонарні точки – $M_1(0, 0)$ та $M_2(3, 3)$.

Обчислимо значення частинних похідних другого порядку в точці M_1

$$f''_{xx}(x_1, y_1) = f''_{yy}(x_1, y_1) = 0; \ f''_{xy}(x_1, y_1) = 9$$

та складемо дискримінант $\Delta_1 = A_1C_1 - B_1 = 0 \cdot 0 - 81 < 0$. Звідси робимо висновок про відсутність екстремуму в точці $M_1(0, 0)$.

Далі, визначаємо значення частинних похідних в точці M_2.

$$f''_{xx}(x_2, y_2) = f''_{yy}(x_2, y_2) = -18; \; f''_{xy}(x_2, y_2) = 9.$$

В цьому випадку $\Delta_2 = A_2C_2 - B_2 = (-18) \cdot (-18) - 9^2 > 0$; $A_2 < 0$. Таким чином в точці $M_2(3, 3)$ функція має максимум. Значення функції в цій точці $z_{\max} = z(3, 3) = 28$.

<u>Приклад.</u> Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \\ z'_y = 4y^3 - 4x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 = y, \\ y^3 = x, \end{cases} \quad x^9 = x, \; x(x^8 - 1) = 0, \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \; \textit{або} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} \textit{або} \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$$

$$M_1(0, 0), \; M_2(1, 1), \; M_3(-1, -1) - \textit{стаціонарі точки..}$$

$$A_1 = z''_{xx}(M_1) = 12x^2\Big|_{(0,\,0)} = 0, \; B_1 = z''_{xy}(M_1) = -4, \; C_1 = z''_{yy}(M_1) = 12y^2\Big|_{(0,\,0)} = 0,$$
$$\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^{\,2} = -16 < 0, \; \textit{в т.} \, M_1 \; \textit{екстремум відсутній..}$$

$$A_2 = z''_{xx}(M_2) = 12x^2\Big|_{(1,\,1)} = 12, \; B_2 = z''_{xy}(M_2) = -4, \; C_2 = z''_{yy}(M_2) = 12y^2\Big|_{(1,\,1)} = 12,$$
$$\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^{\,2} = 12 \cdot 12 - (-4)^2 = 128 > 0, \; A > 0 \Rightarrow \textit{в т.} \, M_2 - \textit{мінімум}, \; z(1, 1) = -1.$$

$$A_3 = z''_{xx}(M_3) = 12x^2\Big|_{(-1,\,-1)} = 12, \; B_3 = z''_{xy}(M_3) = -4, \; C_3 = z''_{yy}(M_3) = 12y^2\Big|_{(-1,\,-1)} = 12,$$
$$\Delta_3 = A_3C_3 - B_3^{\,2} = (-12) \cdot (-12) - (-4)^2 = 128 > 0, \; A > 0 \Rightarrow \textit{в т.} \, M_2 - \textit{мінімум}, \; z(1, 1) = -1.$$

Умовний екстремум

Задача про умовний екстремум ставиться, якщо змінні x та y, що входять до функції $z = f(x, y)$, не є незалежними, тобто існує деяке співвідношення $\varphi(x, y) = 0$, що їх пов’язує і носить назву рівняння зв’язку.

В цьому випадку із змінних x і y тільки одна буде незалежною, оскільки інша може бути виражена через неї з рівняння зв'язку.

Тому $z = f(x, y(x))$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

В точках екстремуму:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (1)$$

Крім того:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0\,. \qquad (2)$$

Помноживши рівність (2) на число λ і додавши до рівності (1) матимемо.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

або

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0\,.$$

Виконання даної умови в усіх заданих точках забезпечить невизначений коефіцієнт λ такий, щоб виконувалася система трьох рівнянь

$$\begin{cases} \partial f/\partial x + \lambda\,\partial\varphi/\partial x = 0, \\ \partial f/\partial y + \lambda\,\partial\varphi/\partial y = 0, \\ \varphi(x,y) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

а також відповідні значення x та y.

Отримана система описує необхідні вимоги для знаходження умовного екстремуму. Проте вони не є достатніми. Тому після знаходженні критичних точок потрібне додаткове дослідження на екстремум.

На практиці, щоб знайти умовний екстремум функції $f(x,y)$ при наявності зв’язку $\varphi(x,y)=0$ складають так звану функцію Лагранжа $u = f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$. Звичайне дослідження задачі на умовний екстремум зводиться до вище записаної системи (3). Після чого питання про наявність чи характер екстремуму з’ясовується шляхом визначення знака другого диференціала функції Лагранжа

$$d^2u(x,y) = u''_{xx}(x,y)dx^2 + 2u''_{xy}(x,y)dxdy + u''_{yy}(x,y)dy^2$$

для відомих значень x, y, λ, отриманих із системи (3) при умові, що dx та dy пов’язані рівнянням

$$\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0 \quad (dx^2 + dy^2 \neq 0).$$

Отже, функція $f(x,y)$ має умовний максимум, якщо $d^2u(x,y) < 0$, і умовний мінімум, якщо $d^2u(x,y) > 0$.

Приклад. Знайти умовний екстремум функції $z = 7 - 4x - 3y$, якщо змінні x і y задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 25$.

Складемо функцію Лагранжа

$$u(x, y) = 7 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

Тоді, $u'_x = -4 + 2\lambda x;\ u'_y = -3 + 2\lambda y$. Необхідні умови дають систему рівнянь

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0, \\ -3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

розв'язками, якої є

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = 4, \quad y_1 = 3$$

і

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = -4, \quad y_2 = -3.$$

Так як

$$u''_{xx}(x, y) = 2\lambda; \quad u''_{xy}(x, y) = 0; \quad u''_{yy}(x, y) = 2\lambda,$$

то

$$d^2u(x, y) = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

Зокрема для першого розв'язку $d^2u(x, y) > 0$, і як наслідок. в цій точці функція має умовний мінімум. А для другого розв'язку $d^2u(x, y) < 0$, тому в цій точці умовний максимум.

Таким чином,

$$z_{\max} = 7 + 16 + 9 = 32; \qquad z_{\min} = 7 - 16 - 9 = -18.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ №1

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)\ z = e^{x^2+xy-y^2}$; $b)\ z = \dfrac{2x-3y}{9x+y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = ln(2x-3y);\ A(2,\,1);\ \vec{a} = (12,\,5)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 8$. (5 балів)

ВАРІАНТ №2

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)\ z = e^{x^2+4xy+y^2}$; $b)\ z = \dfrac{7x-3y}{9x+5y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = ln(4x-3y);\ A(1,\,1);\ \vec{a} = (12,\,-5)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 10y + 1$. (5 балів)

ВАРІАНТ №3

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)\ z = cos(x^2 + xy + y^{2)};\ b)\ z = \dfrac{5x-3y}{12x+y}.$ (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A),\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = \sqrt{2x-3y^2};\ A(2,\,1);\ \vec{a} = (4,\,-3)\,.$ (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = 2x^2 - 2xy + y^2 - 10x + 4y + 2\,.$ (5 балів)

ВАРІАНТ №4

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)\ z = sin\left(x^2 + xy - y^2\right);\ b)\ z = \dfrac{2x-3y}{6x+7y}.$ (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A),\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = \sqrt{x^2 - 3y}\ \ A(2,\,1);\ \vec{a} = (3,\,-4)\,.$ (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = x^2 - 5xy + 2y^2 - 2x + 8y\,.$ (5 балів)

ВАРІАНТ №5

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)\ z = e^{x^2+xy-y^2};\ b)\ z = \dfrac{2x-3y}{9x+y}.$ (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A),\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = ln(2x-3y);\ A(2,\,1);\ \vec{a} = (12,\,5)\,.$ (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 8$. (5 балів)

ВАРІАНТ №6

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)\ z = e^{x^2+4xy+y^2}$; $b)\ z = \dfrac{7x-3y}{9x+5y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = ln(4x-3y)$; $A(1, 1)$; $\vec{a} = (12, -5)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 10y + 1$. (5 балів)

ВАРІАНТ №7

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)\ z = cos(x^2 + xy + y^{2)}$; $b)\ z = \dfrac{5x-3y}{12x+y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = \sqrt{2x-3y^2}$; $A(2, 1)$; $\vec{a} = (4, -3)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = 2x^2 - 2xy + y^2 - 10x + 4y + 2$. (5 балів)

ВАРІАНТ №8

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)$ $z = sin\left(x^2 + xy - y^2\right)$; $b)$ $z = \dfrac{2x - 3y}{6x + 7y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = \sqrt{x^2 - 3y}$ $A(2, 1)$; $\vec{a} = (3, -4)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = x^2 - 5xy + 2y^2 - 2x + 8y$. (5 балів)

ВАРІАНТ №9

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)$ $z = e^{x^2 + xy - y^2}$; $b)$ $z = \dfrac{2x - 3y}{9x + y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = ln(2x - 3y)$; $A(2, 1)$; $\vec{a} = (12, 5)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 8$. (5 балів)

ВАРІАНТ №10

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)$ $z = e^{x^2 + 4xy + y^2}$; $b)$ $z = \dfrac{7x - 3y}{9x + 5y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = ln(4x - 3y);\ A(1,\ 1);\ \vec{a} = (12,\ -5)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 10y + 1$. (5 балів)

ВАРІАНТ №11

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)\ z = cos(x^2 + xy + y^{2)};\ b)\ z = \frac{5x - 3y}{12x + y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = \sqrt{2x - 3y^2};\ A(2,\ 1);\ \vec{a} = (4,\ -3)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = 2x^2 - 2xy + y^2 - 10x + 4y + 2$. (5 балів)

ВАРІАНТ №12

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)\ z = sin\left(x^2 + xy - y^2\right);\ b)\ z = \frac{2x - 3y}{6x + 7y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = \sqrt{x^2 - 3y}\ \ A(2,\ 1);\ \vec{a} = (3,\ -4)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = x^2 - 5xy + 2y^2 - 2x + 8y$. (5 балів)

ВАРІАНТ №13

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)\ z = e^{x^2+xy-y^2}$; $b)\ z = \dfrac{2x-3y}{9x+y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = ln(2x-3y);\ A(2,\,1);\ \vec{a} = (12,\,5)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 8$. (5 балів)

ВАРІАНТ №14

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)\ z = e^{x^2+4xy+y^2}$; $b)\ z = \dfrac{7x-3y}{9x+5y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = ln(4x-3y);\ A(1,\,1);\ \vec{a} = (12,\,-5)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 10y + 1$. (5 балів)

ВАРІАНТ №15

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)\ z = cos(x^2 + xy + y^{2)}$; $b)\ z = \dfrac{5x-3y}{12x+y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = \sqrt{2x-3y^2};\ A(2,\,1);\ \vec{a} = (4,\,-3)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = 2x^2 - 2xy + y^2 - 10x + 4y + 2$. (5 балів)

ВАРІАНТ №16

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)\ z = sin(x^2 + xy - y^2);\ b)\ z = \dfrac{2x-3y}{6x+7y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A),\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = \sqrt{x^2 - 3y}\ \ A(2,\ 1);\ \vec{a} = (3,\ -4)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = x^2 - 5xy + 2y^2 - 2x + 8y$. (5 балів)

ВАРІАНТ №17

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)\ z = e^{x^2+4xy+y^2};\ b)\ z = \dfrac{7x-3y}{9x+5y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A),\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = ln(4x - 3y);\ A(1,\ 1);\ \vec{a} = (12,\ -5)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 10y + 1$. (5 балів)

ВАРІАНТ №18

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)\ z = cos(x^2 + xy + y^{2)};\ b)\ z = \dfrac{5x-3y}{12x+y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = \sqrt{2x - 3y^2}$; $A(2,\ 1)$; $\vec{a} = (4,\ -3)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = 2x^2 - 2xy + y^2 - 10x + 4y + 2$. (5 балів)

ВАРІАНТ №19

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)$ $z = sin\left(x^2 + xy - y^2\right)$; $b)$ $z = \frac{2x - 3y}{6x + 7y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = \sqrt{x^2 - 3y}$ $A(2,\ 1)$; $\vec{a} = (3,\ -4)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = x^2 - 5xy + 2y^2 - 2x + 8y$. (5 балів)

ВАРІАНТ №20

1) Знайти в $a)$ диференціал функції у $b)$ похідні другого порядку

$a)$ $z = e^{x^2 + xy - y^2}$; $b)$ $z = \frac{2x - 3y}{9x + y}$. (8 балів)

2) Знайти $grad\, z(A)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_A$ якщо

$z = ln(2x - 3y)$; $A(2,\ 1)$; $\vec{a} = (12,\ 5)$. (7 балів)

3) Дослідити на екстремум функцію

$z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 8$. (5 балів)

Використана та рекомендована література

1. Антонюк Р. А. Вища математика : навчальний посібник. Рівне : НУВГП, 2005. 246 с.
2. Валєєв К. Г., Джаладова І. А. Вища математика : навч. посіб. : / у 2-х ч.; ч. 1. К. : КНЕУ, 2001. 546 с.
3. Гайдей В. О. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння : конспект лекцій. / Уклад.: В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алєксєєва, О. О. Диховичний. К. : НТУУ «КПІ», 2013. 144 с.
4. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. К. : А.С.К., 2006. 647 с. ISBN 966-539-320-0.
5. Лубенська Т. В., Чупаха Л.Д. Вища математика в таблицях : довідник. К. : МАУП, 1999. 88 с.
6. Овчинников П. П. Вища математика : підручник / У 2 ч. ; ч. 2. К. : Техніка, 2003. 792 с. ISBN: 966-575-153-0.
7. Соколенко О. І. Вища математика : підруч. К. : Академія, 2002. 432 с.
8. Ярмуш Я. І. Самолюк І. В. Вища математика. Практикум : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2015. 148 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/5632/