

В.М. ТРАЧ, А.В. ПОДВОРНИЙ

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ
(спеціальний курс),
ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ ТА
ПЛАСТИЧНОСТІ**

*Підручник
для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за спеціальністю
«Будівництво та цивільна інженерія»*

*Затверджено вченою радою
Національного університету
водного господарства
та природокористування, м. Рівне*

КИЇВ «КАРАВЕЛА» 2016

УДК 539.3(075)
ББК 30.121 я 7
Т 65

Гриф надано
вченою радою НУВГП
(Протокол № 4 від 29 квітня 2016 року)

Рецензенти:

Г.М. Іванченко – доктор технічних наук, професор, декан будівельного факультету Київського національного університету будівництва і архітектури;

В.І. Шваб'юк - доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри промислового та цивільного будівництва Луцького національного технічного університету;

Є.М. Бабич – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри промислового, цивільного будівництва та інженерних споруд Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне.

Т 65 Трач В.М., Подворний А.В. Опір матеріалів (спеціальний курс), теорія пружності та пластичності / [Підручник для студентів вищих навчальних закладів]. - Київ: Каравела, 2016. – 434 с.

У підручнику наведено основи предмету “Опір матеріалів (спеціальний курс), теорія пружності та пластичності”, який вивчається студентами-будівельниками. Він складається з чотирнадцяти розділів в яких приведені підходи до встановлення напружено-деформованого стану тонкостінних стержнів, що зазнають кручення. Розрахунків балок на динамічні навантаження. Урахування в роботі балочних конструкцій у моделі матеріалу пластичних деформацій. Представлено основи теорії пружності. Викладено метод скінченних елементів для плоскої задачі. Проведено розрахунки на міцність і стійкість прямокутних пластин. Розв’язано плоску задачу теорії пружності в полярних координатах для згину круглих й кільцевих пластин. А також у підручнику викладено основи загальної теорії тонких однорідних оболонок.

Підручник призначено для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальністю «Будівництво та цивільна інженерія». Побудова та зміст підручника дає змогу читачеві використовувати його для самостійного поглибленого вивчення спеціального курсу опору матеріалів і будівельної механіки, теорії пружності та інших суміжних предметів. Він також буде корисний для бакалаврів і магістрів будівельників, аспірантів в їх науково-дослідницькій чи проектувальній діяльності.

ISBN 978-966-222-981-3

УДК 539.3(075)
ББК 30.121 я 7
© Трач В.М., Подворний А.В., 2016
© Видавництво «Каравела», 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	11
------------------------	----

РОЗДІЛ I. СЕКТОРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕРІЗІВ ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ.....13

1.1. Основні відомості.....	13
1.2. Секторальні характеристики перерізу.....	15
1.2.1. Секторальна площа або секторальна координата.....	16
1.2.2. Секторальний статичний момент.....	22
1.2.3. Секторально-лінійні статичні моменти перерізу.....	26
1.2.4. Формула переходу для секторальної координати щодо зміни початку відліку.....	33
1.2.5. Формула переходу для секторальної координати щодо зміни полюса.....	34
1.2.6. Центр згину.....	37
1.2.6.а.Фізичний спосіб визначення центру згину.....	38
1.2.6.б.Геометричний спосіб визначення центру згину.....	40
1.2.7. Головна секторальна нульова точка.....	46
1.2.8. Головні секторальні координати.....	49
1.2.9. Секторальний момент інерції.....	50
<i>Контрольні запитання</i>	52

РОЗДІЛ II. НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ ЩОДО СКУТОГО КРУЧЕННЯ.....54

2.1. Основні гіпотези.....	54
2.2. Найпростіші випадки роботи тонкостінних стержнів.....	57
2.3. Вільне та скуте кручення тонкостінних стержнів.....	58
2.3.1. Вільне (нескуте або чисте) кручення.....	58
2.3.2. Скуте (згинове) кручення.....	60

2.4. Зусилля в перерізах тонкостінного стержня при скутому крученні.....	62
2.5. Переміщення та деформації при скутому крученні.....	66
2.6. Секторальні нормальні напруження.....	70
2.7. Аналіз рівнянь рівноваги тонкостінного стержня при скутому крученні.....	73
2.8. Диференціальні залежності між силовими чинниками при скутому крученні.....	74
2.8.1. Залежність між секторальними нормальними σ_{ω} і секторальними дотичними τ_{ω} напруженнями.....	74
2.8.2. Залежність між згиново-закрутовим бімоментом B_{ω} і згиново-закрутовим моментом T_{ω}	76
2.9. Секторальні дотичні напруження.....	78
2.10. Розрахункові формули для складного опору тонкостінних стержнів.....	81
<i>Контрольні запитання.....</i>	<i>83</i>

РОЗДІЛ III. СИЛОВІ ЧИННИКИ ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ ПРИ СКУТОМУ КРУЧЕННІ.....

3.1. Основні залежності між силовими чинниками.....	84
3.2. Диференціальне рівняння деформацій.....	85
3.3. Диференціальне рівняння бімоментів.....	88
3.4. Диференціальне рівняння закрутових моментів.....	90
3.5. Крайові умови для тонкостінних балок.....	93
3.6. Дія зосередженої сили перпендикулярно до перерізу.....	97
3.7. Трансформація ядра перерізу в ядрові відрізки для тонкостінних стержнів відкритого профілю в умовах скутого кручення.....	104
<i>Контрольні запитання.....</i>	<i>109</i>

РОЗДІЛ IV. РОЗРАХУНКИ НА УДАР.....

4.1. Загальні відомості про ударне навантаження.....	111
4.2. Розрахунок стержнів на ударне навантаження без урахування	

власної ваги. Повздовжній, поперечний та горизонтальний удари.....	114
4.3. Динамічний коефіцієнт щодо повздовжнього удару для стержнів змінного перерізу. Вплив амортизаційних пристроїв.....	121
4.4. Урахування маси стержня, що зазнає удару.....	125
4.5. Зведена маса. Визначення коефіцієнтів зведеної маси.....	128
4.6. Динамічний коефіцієнт для раптової зупинки троса, що опускається з вантажем.....	134
4.7. Механічні властивості матеріалів щодо удару.....	139
<i>Контрольні запитання</i>	142
РОЗДІЛ V. КОЛИВАННЯ БАЛОК	143
5.1. Вступ.....	143
5.2. Власні коливання пружних невагомих балок з одним ступенем вільності.....	145
5.3. Вимушені коливання пружних невагомих балок з одним ступенем вільності.....	155
5.4. Явище резонансу.....	161
5.5. Явище биття.....	163
5.6. Власні згасаючі коливання пружної невагомої балки з одним ступенем вільності.....	166
5.7. Вимушені згасаючі коливання пружної невагомої балки з одним ступенем вільності.....	171
5.8. Розв'язування проблем коливання в будівництві та в техніці.....	176
<i>Контрольні запитання</i>	178
РОЗДІЛ VI. РОЗРАХУНКИ БАЛОК З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ	180
6.1. Тримальна здатність балок щодо чистого згину.....	180
6.2. Розрахунок статично визначених двоопорних балок за методом тримальної здатності.....	185
6.3. Розрахунок однопрогонових статично невизначених балок	

методом тримальної здатності.....	188
6.4. Розрахунки нерозрізних балок на тримальну здатність.....	197
6.4.1. Перевірочний розрахунок нерозрізних балок. Добір граничних навантажень.....	197
6.4.2. Проектувальний розрахунок нерозрізних балок. Добір перерізів.....	201
6.5. Розрахунок балок з урахуванням розвитку пластичних деформацій.....	203
6.6. Розвантаження та залишкові напруження.....	205
6.6.1. Дослідження напруженого стану.....	205
6.6.2. Дослідження деформованого стану.....	207
<i>Контрольні запитання.....</i>	<i>210</i>
РОЗДІЛ VII. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ.....	212
7.1. Основні співвідношення теорії пружності. Статичні рівняння.....	212
7.1.1. Зв'язок теорії пружності з іншими предметами.....	212
7.1.2. Позначення сил, напружень і правило знаків для них.....	213
7.1.3. Диференціальні рівняння рівноваги.....	215
7.1.4. Умови на поверхні тіла. Напруження на похилих площинках.....	218
7.1.5. Головні напруження. Інваріанти напруженого стану.....	220
7.2. Основні співвідношення теорії пружності. Геометричні та фізичні рівняння.....	223
7.2.1. Диференціальні залежності між деформаціями та переміщеннями.....	223
7.2.2. Рівняння нерозривності деформацій.....	227
7.2.3. Лінійно-пружна модель деформованого твердого тіла. Узагальнений закон Гука.....	230
7.2.4. Постановка основної задачі теорії пружності.....	233
7.3. Плоска задача теорії пружності в декартових координатах.....	234

7.3.1. Плоска деформація. Основні рівняння.....	234
7.3.2. Плоский напружений стан.....	238
7.3.3. Розв'язування плоскої задачі в напруженнях.....	243
7.4. Розв'язування плоскої задачі за допомогою функції напружень.....	245
7.4.1. Функція напружень для плоскої задачі.....	245
7.4.1.1. Загальний розв'язок рівнянь (7.23).....	245
7.4.1.2. Частинний розв'язок рівнянь (7.23).....	248
7.4.2. Бігармонічне рівняння Максвелла.....	249
7.4.3. Розв'язання плоскої задачі для прямокутних однозв'язних областей в алгебричних поліномах.....	251
<i>Контрольні запитання.....</i>	<i>254</i>

РОЗДІЛ VIII. МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ

ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ.....	255
8.1. Вступ.....	255
8.2. Напружено-деформований стан і матриця жорсткості скінченного елемента.....	255
8.3. Матриця жорсткості скінченноелементної моделі. Основне співвідношення.....	260
8.4. Перехід від матриці жорсткості скінченного елемента в локальній системі координат до матриці жорсткості в глобальній системі координат.....	262
8.5. Визначення коефіцієнтів матриці глобальної жорсткості.....	264
8.6. Трикутниковий скінченний елемент.....	266
8.7. Прямокутниковий скінченний елемент.....	270
8.8. Приклад розрахунку балки-стілки.....	273
<i>Контрольні запитання.....</i>	<i>285</i>

РОЗДІЛ ІХ. ТЕХНІЧНА ТЕОРІЯ ЗГИНУ ПРЯМОКУТНИХ ТОНКИХ ЖОРСТКИХ ПЛАСТИН	286
9.1. Основні поняття та гіпотези.....	286
9.2. Переміщення, деформації та напруження в прямокутній пластині	288
9.3. Диференціальне рівняння пружної поверхні прямокутної пластини.....	292
9.4. Зусилля в пластині. Вираження напружень через зусилля.....	294
9.5. Умови на контурі пластини.....	297
9.6. Потенціальна енергія у випадку згину пластини.....	299
9.7. Розрахунок еліптичної пластини оберненим методом.....	301
<i>Контрольні запитання та задачі</i>	303
РОЗДІЛ Х. ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД РІТЦА-ТИМОШЕНКА	305
10.1. Основні поняття варіаційного методу.....	305
10.2. Метод Рітца-Тимошенка.....	309
10.3. Приклад застосування методу Рітца-Тимошенка в разі згину балок.....	310
10.4. Приклад застосування методу Рітца-Тимошенка в разі згину прямокутної пластини.....	313
<i>Контрольні запитання та задачі</i>	317
РОЗДІЛ ХІ. СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ ПЛАСТИН	318
11.1. Вступні зауваження.....	318
11.2. Статичний метод визначення критичного навантаження. Диференціальне рівняння згину прямокутної пластини при сумісній дії перерізувальних, зсувних і нормальних сил.....	320
11.3. Приклад застосування статичного методу визначення критичного навантаження для стиснутої пластини.....	327
11.4. Енергетичний метод визначення критичних навантажень. Робота зовнішніх сил щодо випинання (втрати стійкості) пластини.....	334
11.5. Приклад застосування енергетичного методу	

визначення критичного навантаження для стиснутої пластини.....	341
<i>Контрольні запитання та задачі.....</i>	<i>344</i>

РОЗДІЛ XII. ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В

ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ.....345

12.1. Вступ.....	345
12.2. Основні рівняння плоскої задачі теорії пружності в полярних координатах.....	345
12.3. Вісесиметрична задача.....	349
12.3.1. Задача Ламе.....	351
12.3.2. Задача Х. С. Головіна.....	353
12.4. Задача Фламана. Зосереджена сила, що прикладена до межі пружної півплощини.....	355
12.4.1. Кола Буссінеска.....	358
12.5. Дія розподіленого навантаження, прикладеного до межі пружної півплощини.....	359
<i>Контрольні запитання та задачі.....</i>	<i>362</i>

РОЗДІЛ XIII. ЗГИН ТОНКИХ ЖОРСТКИХ КРУГЛИХ І

КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН.....363

13.1. Основні рівняння вісесиметричного (полярно-симетричного) згину круглій пластини.....	363
13.2. Зусилля та напруження в перерізах круглих пластин при вісесиметричному навантаженні.....	366
13.3. Згин кільцевої пластини сталої товщини під дією вісесиметричного навантаження.....	370
13.4. Приклад розрахунку кільцевої пластини сталої товщини на вісесиметричний згин.....	372
<i>Контрольні запитання та задачі.....</i>	<i>378</i>

РОЗДІЛ XIV. ГІПОТЕЗИ, ЗАГАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА

СПІВВІДНОШЕННЯ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК.....	379
14.1. Означення. Гіпотези.....	379
14.2. Зміна переміщень за товщиною оболонки.....	382
14.3. Деформації оболонки та її серединної поверхні.....	387
14.4. Рівняння нерозривності деформацій серединної поверхні.....	393
14.5. Внутрішні сили та моменти.....	394
14.6. Рівновага елемента серединної поверхні.....	398
14.7. Потенціальна енергія деформації.....	403
14.8. Співвідношення між зусиллями та деформаціями серединної поверхні.....	406
14.9. Рівняння нерозривності деформацій серединної поверхні в зусиллях.....	409
14.10. Постановка задач загальної теорії оболонок.....	410
14.11. Крайові умови в задачах розрахунку оболонок.....	411
14.12. Загальні рівняння для циліндричних оболонок.....	415
14.13. Безмоментний напружений стан оболонок.....	423
<i>Контрольні запитання.....</i>	<i>429</i>
ЛІТЕРАТУРА.....	430

ПЕРЕДМОВА

Підручник „Опір матеріалів (спеціальний курс), основи теорії пружності та пластичності” написаний відповідно до вимог освітньо-практичної підготовки та освітньо-професійної характеристики для навчання інженерів-будівельників. За змістом викладеного матеріалу пропонується підручник можливо поділити на сім окремих частин.

Перша включає три розділи, що присвячені теорії та розрахунку на міцність і жорсткість тонкостінних стержнів відкритого профілю. У ній розглянуто теми: секторальні характеристики перерізів стержнів, їх напружено-деформований стан і визначення внутрішніх зусиль. У другій частині зосереджена увага на динамічних задачах, а саме розрахунках балок на удар і коливання. В ній акцентована увага читача на використанні технічної теорії удару. Тут також представлена теорія та приклади розрахунків балок на вібраційні коливання. З широкого класу механічних коливань розглянуто лише вільні та вимушені. Третя частина – шостий розділ – включає в себе розрахунки балок із урахуванням пластичних деформацій. Запропоновано читачеві скористатись відомою наближеною моделлю роботи реального матеріалу. Четверта частина (розділи 7–8) присвячена основним співвідношенням просторової й плоскої задачі теорії пружності та методу скінченних елементів. У п'ятій частині (розділи 9-11) представлено розрахунки на міцність, жорсткість і стійкість прямокутних тонких жорстких пластин. Автори пропонують читачеві оволодіти розрахунком тонких жорстких пластин на основі технічної теорії згину, що спирається на геометричні та фізичні гіпотези Кірхгофа. Тут також представлені варіаційні методи теорії пружності. Завершується ця частина основами розрахунків на стійкість стиснутих прямокутних пластин. В шостій – (розділи 12 і 13) розрахунок плоскої задачі теорії пружності реалізовано згин круглих і кільцевих пластин за використанням полярних координат. І в останній сьомій частині (розділ 14) подані основні питання загальної та технічної теорій оболонок, приведені деякі приклади аналітичних розрахунків оболонок, що поширені в будівельній практиці. У кожній частині теоретичний матеріал проілюстрований чисельними прикладами, вдало підібраними до відповідних тем.

У цілому пропонований підручник являє собою перелік сучасних теоретичних положень опору матеріалів, теорії пружності не лише для підготовки бакалаврів й магістрів будівельного спрямування, але і для інших суміжних інженерних напрямків. Побудова та зміст підручника дає змогу читачеві використовувати його для самостійного поглибленого вивчення спеціального курсу опору матеріалів і будівельної механіки, теорії пружності, інших суміжних предметів, а також для можливої науково-дослідної діяльності магістрам, аспірантам й проєктувальникам.

Для подальшого поглибленого вивчення викладеного матеріалу в кінці навчального посібника наведено короткий, але цілком достатній за обсягом розглянутої тематики список використаної та рекомендованої літератури.

При написанні підручника автори послуговувались деякими матеріалами навчального посібника “Опір матеріалів (спеціальний курс)”, досвідом одного з його авторів професора кафедри опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування А.О.Мартиненка. Автори висловлюють щирю вдячність рецензентам докторам технічних наук, професорам Г.М. Іванченку, В.І.Шваб’юку, Є.М.Бабичу за ряд слушних зауважень і пропозицій, що, на нашу думку, сприяли покращенню змісту підручника. Також вважаємо за обов’язок висловити вдячність інженеру кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування О.П.Тіток за виявлені творчі здібності при складанні макету підручника.

Читачам будемо вдячні за висловлені зауваження та пропозиції (висилати на електронну адресу kaf-ombm@nuwm.edu.ua), що зможуть покращити, сподіваємось, наступне видання підручника.

Видання цього підручника стало можливим завдяки спонсорській підтримці Генерального директора ТОВ “Київська торгівельно-інвестиційна компанія” пана Максима Воротинцева за що автори висловлюють йому особливу вдячність.

Автори: В.Трач, А. Подворний

РОЗДІЛ І

СЕКТОРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕРІЗІВ ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ

1.1. Основні відомості

В інженерних спорудах досить часто використовуються конструкції, що складаються з окремих тонкостінних стержнів (рис. 1.1). Такі конструктивні елементи значно знижують власну вагу конструкції без зменшення її міцності та жорсткості. Саме цим і пояснюється їхнє широке застосування в будівництві та інших галузях інженерної справи (авіа-, корабле-, вагонобудуванні тощо).

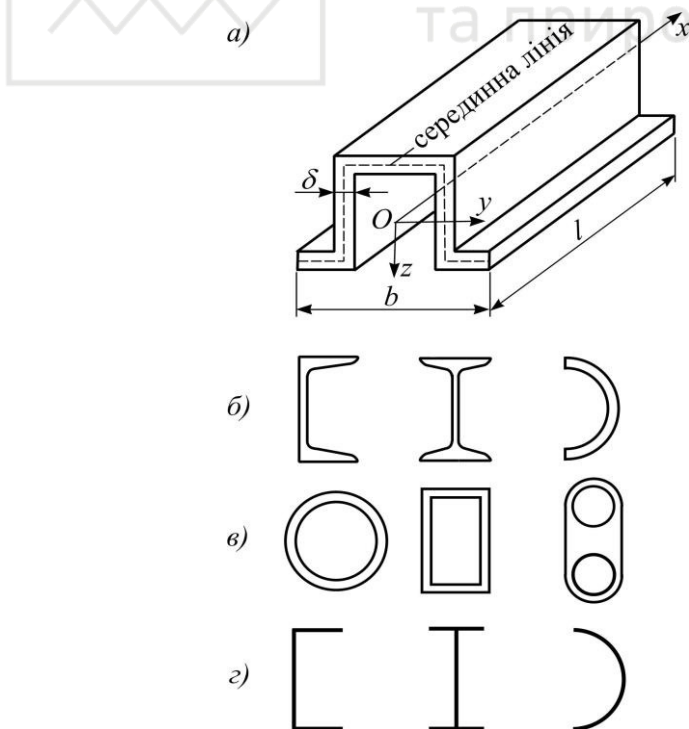


Рис. 1.1. Тонкостінні стержні відкритого (*a*, *б*, *г*) і замкнутого профілю (*в*)

Розрізняють тонкостінні стержні відкритого (незамкнутого) профілю (рис. 1.1, *a*, *б*, *г*) і замкнутого профілю (рис. 1.1, *в*).

Тонкостінний стержень відкритого профілю – це геометричний об’єкт циліндричної або призматичної форми з прямолінійною, ламаною чи криволінійною віссю, який, по-перше, задовольняє умові однозв’язності. Тобто його контур окреслений лише однією замкненою неперервною лінією, а по-друге – відповідає певним, нині експериментально усталеним геометричним співвідношенням, а саме (за В.З. Власовим): $\delta/b \leq 0,1$; $b/l < 0,1$, де δ – товщина стінки перерізу (поперечного перерізу), b – максимальний розмір перерізу, l – довжина стержня (рис. 1.1, а).

Профіль тонкостінного стержня в деяких випадках зображають серединною лінією (рис. 1.1, з). Серединна лінія ділить у всіх своїх точках товщину стінок профілю навпіл, що й показано штрихами на рис. 1.1, а.

Робота замкненого тонкостінного стержня відповідає гіпотезі плоских перерізів і порівняно мало відрізняється від роботи суцільного масивного стержня за умови відсутності деформування контуру поперечного перерізу.

Для тонкостінних стержнів відкритого (незамкненого) профілю гіпотеза плоских перерізів має обмежену область застосування та справедлива лише у тому випадку, коли зовнішня сила проходить через, так званий, центр згину.

Тонкостінні стержні виготовляють вальцюванням, штампуванням, зварюванням і навіть склеюванням.

За теперішнього часу створено струнку теорію розрахунку тонкостінних стержнів відкритого профілю на міцність, жорсткість і стійкість. Основоположником цієї теорії вважають проф. С.П. Тимошенка, який ще у 1905–1906 роках досліджував стійкість плоскої форми згину двотаврової балки, а згодом коротко виклав теорію згину, кручення та стійкості відкритих тонкостінних стержнів. Окремі питання специфічної роботи тонкостінних стержнів у свій час розглядали багато інших вчених, вітчизняних і зарубіжних.

Узагальнення здобутих результатів і поширення розробки теорії розрахунку тонкостінних стержнів відкритого профілю здійснив проф. В.З. Власов (1932-1940 рр.).

1.2. Секторальні характеристики перерізу

Дослідження напружено-деформованого стану (НДС) тонкостінних стержнів має свої особливості. Кожну точку M_i контуру поперечного перерізу визначають трьома координатами: двома лінійними (z і y) та однією секторальною (ω).

Для відліку лінійних координат треба знати центр ваги перерізу O і головні центральні осі z і y . Для відліку секторальних координат потрібно знати, крім того, ще й інші характеристики: так звані, центр згину A_0 і початкову точку відліку секторальних координат M_0 , яку ще називають головною секторальною точкою перерізу. M_i – довільна точка контуру (рис.1.2.).

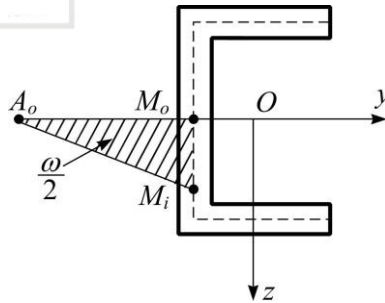


Рис. 1.2. Секторальна координата ω точки M_i

У теорії НДС тонкостінних стержнів поряд із загальновідомими механічними характеристиками перерізу:

$$\text{статичними моментами площі } S_y = \int_A z dA, S_z = \int_A y dA;$$

$$\text{осьовими моментами інерції } I_y = \int_A z^2 dA; I_z = \int_A y^2 dA;$$

$$\text{відцентровим моментом інерції } I_{zy} = \int_A zy dA$$

потрібно знати нові механічні характеристики, що пов'язані з секторальною координатою ω й такими є:

$$\text{секторальний статичний момент } S_\omega = \int_A \omega dA, \text{ см}^4;$$

секторально-лінійні статичні моменти: $S_{\omega y} = \int_A \omega y dA$, і $S_{\omega z} = \int_A \omega z dA$, см^5 ;

секторальний момент інерції: $I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA$, см^6 .

Величини S_{ω} , $S_{\omega y}$, $S_{\omega z}$ можуть бути додатними, від'ємними і дорівнювати нулю, а I_{ω} – величина додатна, оскільки координата ω входить у підінтегральний вираз у квадраті.

1.2.1. Секторальна площа або секторальна координата

Розглянемо переріз довільної форми тонкостінного стержня (рис. 1.3). Нехай буде відомо положення головних центральних осей zOy . Вважатимемо, що товщина перерізу δ в усіх точках профілю може бути різною.

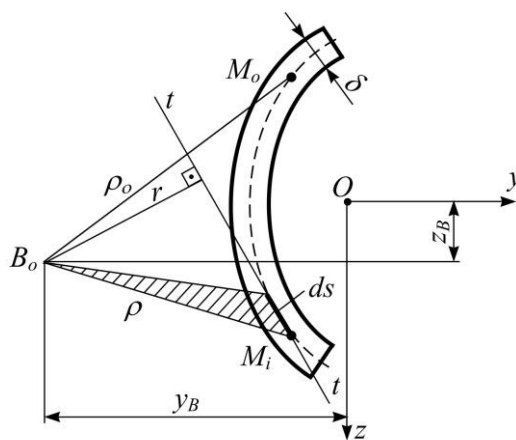


Рис. 1.3. До визначення секторальної координати

На серединній лінії (на рис. 1.3 показано штрихами) відмітимо деяку довільну точку M_0 як початкову точку відліку секторальної координати. Поза контуром перерізу оберемо довільну точку B_0 з координатами z_B , y_B , яку називатимемо полюсом секторальних координат. То положення будь-якої точки M_i можна визначити дуговою координатою $s_i = \cup M_0 M_i$ або однозначно таким

інтегралом:

$$\omega = \int_{s_i} r ds, \quad (1.1)$$

де ω – секторальна площа або секторальна координата, що має одиницю вимірювання, м^2 ; r – перпендикуляр, опущений із полюса B_o на дотичну $t-t$ до серединної лінії в точці M_i ; ds – диференціал дуги серединної лінії (рис. 1.3).

При цьому відрізок $B_o M_o$ вважають початковим радіусом ρ_o , а $B_o M_i$ – рухомих радіусом ρ . Підінтегральна величина $r ds$ дорівнює подвоєній площі трикутника з вершиною в точці B_o і основою ds . Увесь же інтеграл (1.1) являє собою секторальну координату (секторальну площу) точки M_i і дорівнює подвоєній площі сектора $B_o M_o M_i$ (рис. 1.3).

Очевидно, що створений інтеграл (1.1) визначає деяку величину, що характеризує геометрію перерізу з механічного погляду і залежить від положення точки M_i та вибору полюса B_o й початкової точки M_o . Коли руханий радіус ρ обертається відносно полюса B_o від точки M_o до визначеної точки M_i за ходом стрілки годинника, то секторальну координату вважають додатньою: $\omega > 0$, розглядаючи, при цьому, праву відсічену частину стержня вздовж додатного напрямку головної осі Ox .

Приклад 1.1. Підрахувати значення секторальних координат ω_i для точок 1-6 (рис. 1.4) серединної лінії швелера № 20а (ДСТУ 3436-96), замінюючи його сторони прямокутниками (рис. 1.4, розміри – в см). Обрати: 1) нульову точку M_o на перетині осі y і серединної лінії стінки швелера; 2) полюс B_o на осі y на відстані 3 см від серединної лінії стінки.

Розв'язок. Визначаємо для швелера № 20а площу перерізу A , осьові моменти інерції I_y, I_z і відстань y_o до центру ваги перерізу:

$$A = 20 \cdot 0,52 + 2 \cdot 7,48 \cdot 0,97 = 24,91 \text{ см}^2,$$

$$I_y = \frac{0,52 \cdot 20^3}{12} + 2 \cdot \frac{7,48 \cdot 0,97^3}{12} + 2 \cdot 9,515^2 \cdot 7,48 \cdot 0,97 = 166,166 \text{ см}^4,$$

$$y_0 = \frac{2 \cdot 7,48 \cdot 0,97 \cdot 4}{24,91} = 2,33 \text{ см},$$

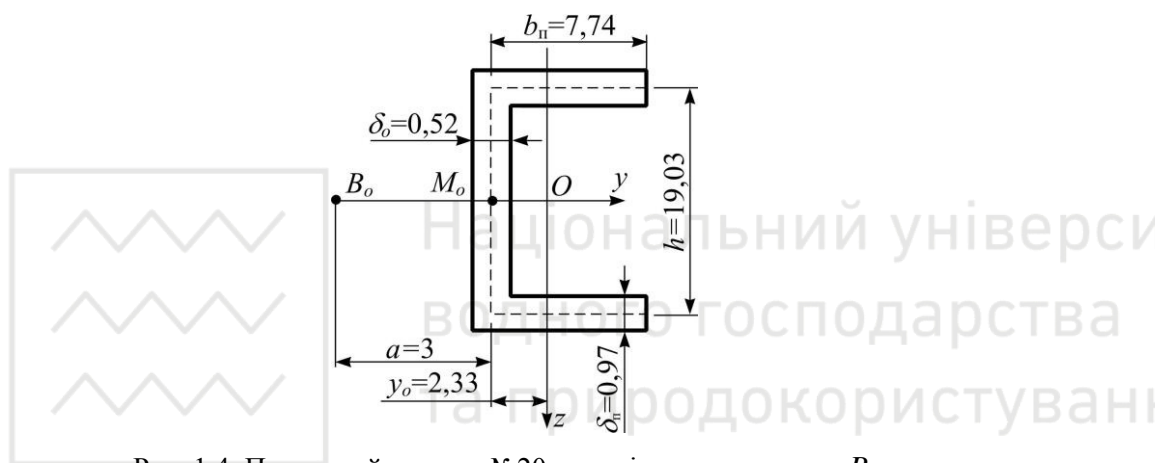


Рис. 1.4. Прокатний швелер №20а з довільним полюсом B_o і нульовою точкою M_o

$$I_z = \frac{20 \cdot 0,52^3}{12} + 2,33^2 \cdot 20 \cdot 0,52 + \frac{2 \cdot 0,97 \cdot 7,48^3}{12} + 2 \cdot 1,67^2 \cdot 7,48 \cdot 0,97 = 16482 \text{ см}^4.$$

На прямих відрізках профілю секторальна координата дорівнює подвоєній площі трикутника $B_o - M_o - 1$ (рис. 1.5). На відрізку профілю від M_o до точки 1 секторальна координата буде від'ємною (радіус-вектор $B_o M_o$ від нульової точки до точки 1 повертається проти ходу стрілки годинника):

$$\omega_1 = -3 \cdot \frac{19,03}{2} = -28,55 \text{ см}^2. \quad (\text{а})$$

На відрізку 1-3 радіус-вектор ρ обертається за ходом стрілки годинника і тому секторальна координата сумарно дорівнюватиме:

$$\omega_3 = -28,55 + 7,74 \cdot \frac{19,03}{2} = 45,1 \text{ см}^2. \quad (\text{б})$$

Очевидно, що на відрізку від точки 1 до точки 3 існує точка 2, для якої $\omega = 0$. Відрізок a_{1-2} знайдемо із співвідношення:

$$a_{1-2}:28,55 = (7,74 - a_{1-2}):45,1.$$

Звідси $a_{1-2} = 3,0$ см, і тоді

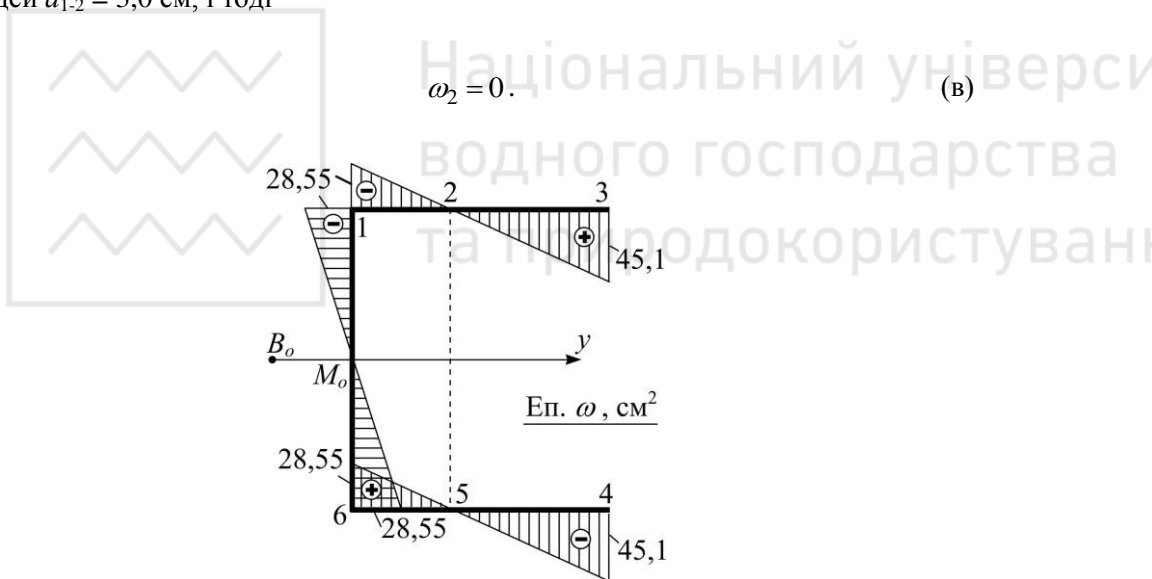


Рис. 1.5. Епюра секторальних координат для швелера

На відрізку $M_o - 6$ радіус ρ обертається за ходом стрілки годинника й тоді:

$$\omega_6 = +3 \cdot \frac{19,03}{2} = 28,55 \text{ см}^2. \quad (\text{г})$$

Для точки 4 маємо:

$$\omega_4 = 28,55 - 7,74 \cdot \frac{19,03}{2} = -45,1 \text{ см}^2. \quad (\text{д})$$

Відстань між точками 6 і 5 дорівнює $a_{6-5} = a_{1-2} = 3,0$ см

$$\omega_5 = 0. \quad (e)$$

Для розрахунку тонкостінних стержнів для зручності будують графік зміни секторальних координат по всьому його контуру. Такий графік називають епюрою секторальних координат ω . Для ламаного профілю з прямолінійними відрізками епюра ω окреслена прямими лініями. Лише для криволінійних відрізків епюра ω має криволінійний обрис.

Епюра секторальних координат ω для швелера (рис. 1.4) має такий характер (рис. 1.5): нульова лінія, тобто база епюри ω – це серединна лінія профілю, координати ω_i відкладено перпендикулярно до неї, додатні значення – всередину профілю, від’ємні – назовні (можна й навпаки). При цьому, як виявляється, крім початкової нульової точки M_o є й інші нульові точки 2 і 5, для яких теж $\omega = 0$.

Приклад 1.2. Побудувати епюру секторальних координат ω для перерізу тонкостінної труби з повздовжнім розрізом, обравши за полюс точку A_o , що лежить на горизонтальній осі симетрії на відстані $2R$ від центру перерізу в бік, протилежний розрізу. За початок відліку секторальних координат обрати точку M_o , що розташована на перетині серединної лінії контуру з віссю симетрії (рис. 1.6).

Розв’язок. Обчислимо секторальну координату ω довільної точки M при полюсі A_o .

Перпендикуляр r , опущений із точки A_o на напрямок дотичної $t-t$ до серединної лінії профілю в точці M дорівнює (рис. 1.6):

$$r = OK - OM = 2R \cos \varphi - R = R(2 \cos \varphi - 1).$$

Диференціал дуги серединної лінії ds дорівнює $ds = R d\varphi$.

Секторальна координата для точки M має додатний знак, оскільки радіус-вектор ρ обертається за ходом годинникової стрілки:

$$\omega_M = \int_0^\varphi r ds = \int_0^\varphi R(2 \cos \varphi - 1) R d\varphi = R^2(2 \sin \varphi - \varphi).$$

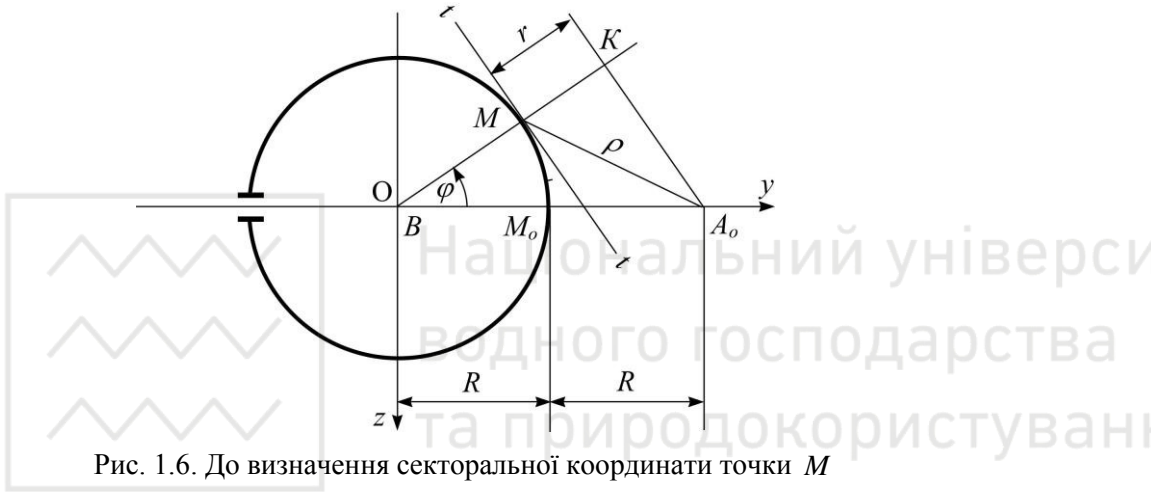


Рис. 1.6. До визначення секторальної координати точки M

Задаючись конкретними значеннями кута φ , дістанемо відповідні розміри секторальних координат, які потім відкладаємо від точок контуру труби вздовж її радіусів. На підставі цих розрахунків будуємо епюру секторальних координат ω (рис. 1.7). У таблиці 1.1 приведено значення секторальних координат для деяких точок контуру залежно від кута φ .

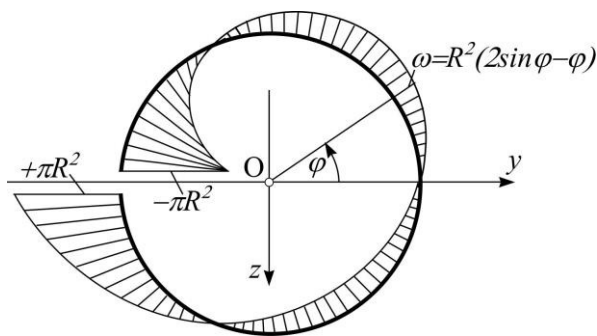


Рис. 1.7. Епюра секторальних координат для розрізаного кільця

Таблиця 1.1

Значення секторальних координат для розрізаного кільця

Кут φ	0	30 ⁰	60 ⁰	90 ⁰	120 ⁰	150 ⁰	180 ⁰
$\frac{\omega}{R^2}$	0	0,48	0,68	0,43	-0,36	-1,62	-3,14

1.2.2. Секторальний статичний момент

Секторальний статичний момент S_ω – це інтеграл із добутку секторальної координати ω на диференціал площі перерізу dA , взятий по всьому перерізу або деякій його частині:

$$S_\omega = \int_A \omega dA. \quad (1.2)$$

Коли переріз тонкостінного стержня на всіх своїх прямолінійних відрізках має сталу товщину стінок, то значення S_ω можна підрахувати за такою формулою:

$$S_\omega = \sum_{i=1}^n \delta_i \Omega_i, \quad (1.3)$$

де δ_i – товщина стінки i -того відрізка; Ω_i – площа ділянки епюри ω , що відповідає довжині i -того відрізка s_i (рис. 1.8, 1.9).

Доведемо, що до розглядуваного випадку маємо:

$$\int_A \omega dA = \sum_{i=1}^n \delta_i \Omega_i. \quad (1.4)$$

Оскільки $dA = \delta_i ds$ (рис. 1.8), то формулу (1.2) можна записати так:

$$S_{\omega} = \sum_{i=1}^n \delta_i \int_{s_i} \omega ds .$$

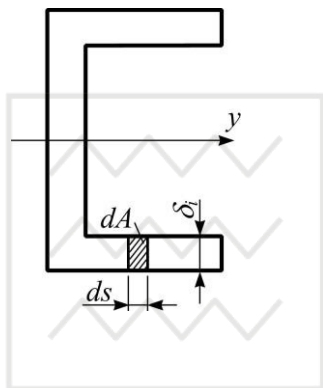


Рис. 1.8. Елемент площі dA швелера

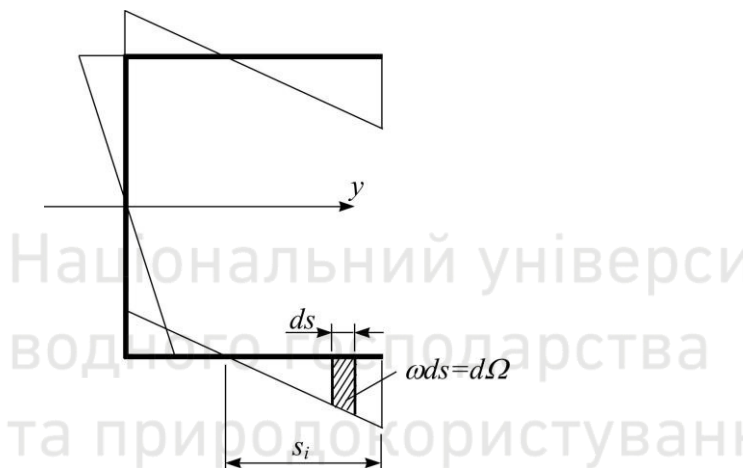


Рис. 1.9. Елемент секторальної площі $d\Omega$

Тут межі інтегрування змінено, оскільки змінено незалежну змінну A на s .

Із епюри ω (рис. 1.9) визначаємо

$$\omega ds = d\Omega$$

і тоді $\int_{s_i} \omega ds = \Omega_i$.

Таким чином, доведено, що для перерізів із сталою товщиною його прямолінійних стінок формулу (1.2), з метою спрощення розрахунків, можна замінити формулою (1.3).

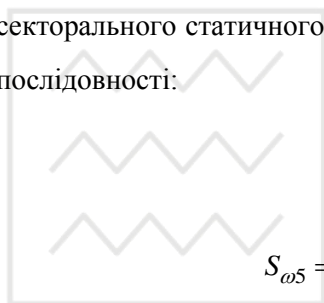
Приклад 1.3. Підрахувати значення секторального статичного моменту S_{ω} для точок 1-6 (рис. 1.5) швелера (рис. 1.4).

Розв'язок. Оскільки епюра ω для швелера, складеного з прямокутників, окреслена прямими лініями, то для побудови епюри S_{ω} використовуємо формулу (1.3):

$$S_{\omega} = \sum_{i=1}^n \delta_i \Omega_i,$$

де δ_i – товщина i -того відрізка швелера; Ω_i – площа секторальної координати на i -тому відрізку контуру (враховується зі своїми математичними знаками «плюс» або «мінус»).

Використовуючи значення епюри ω (рис. 1.4 і 1.5), обчислимо розміри секторального статичного моменту S_{ω} для точок 1-6 контуру (рис. 1.10) у такій послідовності:



$$S_{\omega 4} = 0;$$

$$S_{\omega 5} = -0,97 \cdot 45,1 \cdot 4,74 \cdot 0,5 = -103,68 \text{ см}^4;$$

$$S_{\omega 6} = -103,68 + 0,97 \cdot 28,55 \cdot 3 \cdot 0,5 = -62,14 \text{ см}^4;$$

$$S_{\omega 0} = -62,14 + 0,52 \cdot 9,515 \cdot 28,55 \cdot 0,5 = 8,49 \text{ см}^4;$$

$$S_{\omega 1} = 8,49 - 0,52 \cdot 9,515 \cdot 28,55 \cdot 0,5 = -62,14 \text{ см}^4;$$

$$S_{\omega 2} = -62,14 - 0,97 \cdot 28,55 \cdot 3 \cdot 0,5 = -103,68 \text{ см}^4;$$

$$S_{\omega 3} = -103,68 + 0,97 \cdot 45,1 \cdot 4,74 \cdot 0,5 = 0 \text{ см}^4.$$

Таким чином, епюра секторального статичного моменту S_{ω} має симетричний характер відносно осі y . Побудовану епюру S_{ω} зображено на рис. 1.10.

Приклад 1.4. Побудувати епюру секторальних статичних моментів S_{ω} для перерізу труби з повздовжнім розрізом. Закон зміни секторальних координат ω , залежно від кута φ (рис. 1.7), відомий: $\omega = R^2(2 \sin \varphi - \varphi)$. Товщина труби – δ .

Розв'язок. Беручи до уваги зміну значення ω і враховуючи, що диференціал площі $dA = \delta ds = \delta R d\varphi$, дістанемо на підставі формули (1.2) аналітичний вираз

для секторального статичного моменту S_ω :

$$\begin{aligned}
 S_\omega &= \int_A \omega dA = R^2 \int_{-\pi}^{\varphi} (2 \sin \varphi - \varphi) R d\varphi = R^3 \delta \int_{-\pi}^{\varphi} (2 \sin \varphi - \varphi) d\varphi = \\
 &= R^3 \delta \left[-2 \cos \varphi - \frac{\varphi^2}{2} \right]_{-\pi}^{\varphi} = -R^3 \delta \left[2 \cos \varphi + \frac{\varphi^2}{2} \right]_{-\pi}^{\varphi} = \\
 &= -R^3 \delta \left[2 \cos \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - (-2) - \frac{\pi^2}{2} \right] = -R^3 \delta \left(2 \cos \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - 2,9348 \right).
 \end{aligned}$$



Рис. 1.10. Епюра секторального статичного моменту для швелера

Складаємо таблицю 1.2 значень секторальних статичних моментів S_ω та будуємо епюру S_ω (рис. 1.11).

Таблиця 1.2

Значення секторальних статичних моментів для розрізаного кільця

Кут φ	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°
Відношення $\frac{S_{\omega}}{R^3 \delta}$	0,93	1,07	1,39	1,70	1,74	1,24	0

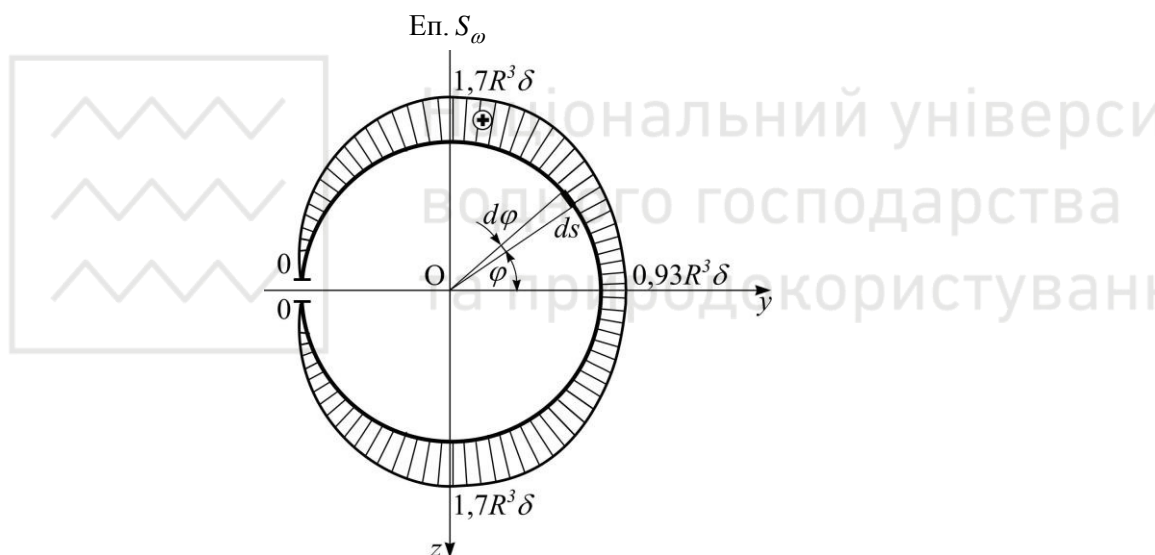


Рис. 1.11. Епюра секторального статичного моменту для розрізаного кільця

1.2.3. Секторально-лінійні статичні моменти перерізу

Секторально-лінійними статичними моментами перерізу відносно головних центральних осей y і z називають інтеграли, взяті по всій площі перерізу з добутку секторальної координати ω і лінійної декартової координати y або z та диференціала площі dA . Позначають ці величини символами $S_{\omega y}$ і $S_{\omega z}$. Одиниця вимірювання – см^5 . Вони можуть бути додатними, від’ємними і дорівнювати нулеві. Отже,

$$S_{\omega y} = \int_A \omega y dA, \text{ і } S_{\omega z} = \int_A \omega z dA. \quad (1.5)$$

Якщо переріз складено з окремих прямолінійних відрізків сталої товщини, то в цьому випадку, як і для S_{ω} , можна записати $dA = \delta_i ds$ і тоді формули (1.5) набирають такого вигляду:

$$S_{\omega y} = \sum_{i=1}^n \delta_i \int_{s_i} \omega y ds, \quad \text{і} \quad S_{\omega z} = \sum_{i=1}^n \delta_i \int_{s_i} \omega z ds. \quad (1.6)$$

Під знаком інтегралу у формулах (1.6) стоять добутки двох функцій ω і y та ω і z однієї і тієї самої незалежної змінної s . Інтеграли такого типу обчислюють за правилами Верещагіна або Сімпсона-Корноухова. Зазвичай ці операції вивчають в опорі матеріалів чи будівельній механіці. Нагадаємо коротко обчислення інтегралів типу (1.6).

Правило Верещагіна. За ним інтеграли типу

$$\int_{s_i} \varphi(s) f(s) ds,$$

де $\varphi(s)$ – будь-яка (лінійна або нелінійна) функція, а $f(s)$ – тільки лінійна функція (рис.1.12), обчислюють за формулою:

$$\int_{s_i} \varphi(s) f(s) ds = \sum_{i=1}^n \Omega_i f_i^c, \quad (1.7)$$

де Ω_i – площа ділянки епюри функції $\varphi(s)$ на відрізку s_i ; f_i^c – координата на графіку лінійної функції $f(s)$, що розташована під центром ваги площі графіка іншої (лінійної або нелінійної) функції $\varphi(s)$ (рис. 1.12).

Використовуючи формулу (1.7) залежність (1.6) набирає такого вигляду:

$$S_{\omega y} = \sum_{i=1}^n \delta_i \Omega_{i\omega} f_{iy}^c \quad \text{і} \quad S_{\omega z} = \sum_{i=1}^n \delta_i \Omega_{i\omega} f_{iz}^c, \quad (1.8)$$

де $\Omega_{i\omega}$ – площа ділянки епюри ω на i -тому відрізку контуру; f_{iy}^c і f_{iz}^c – координати на епюрах y та z під центром ваги епюри ω на i -тому відрізку контуру.

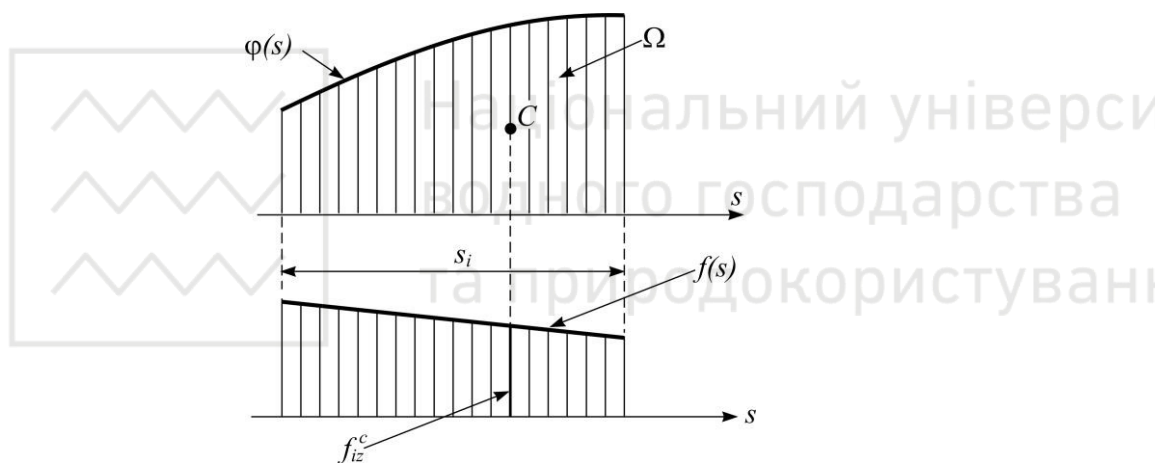


Рис. 1.12. Епюри лінійної f_i і нелінійної φ_i функції

Правило Верещагіна використовують лише для прямолінійних відрізків стержня сталого перерізу, коли хоча б одна з епюр $\varphi(s)$ або $f(s)$ окреслена прямою лінією. У цьому випадку згідно з формулою (1.7) здійснюють, так зване, перемноження епюр.

Перемножуючи епюри, слід дотримуватися такого правила знаків: якщо ординати на одній і другій епюрі розташовані по один бік від серединної лінії контуру, добуток епюр буде величиною додатньою, а якщо по різні боки – від’ємною.

У тому випадку коли обидві підінтегральні функції лінійні, тоді байдуже з якого графіка брати площу Ω , а з якого координату f^c .

Коли одна з епюр має складний обрис (наприклад, ламаний характер), то, щоб полегшити обчислювання, доцільно поділити її на прості фігури.

Слід окремо зазначити, що, коли обидві епюри криволінійні, правило

Верещагіна обмежене до використання.

Правилом Верещагіна (1.7) звичайно користуються для обчислення секторально-лінійних статичних моментів $S_{\omega y}$ і $S_{\omega z}$ замість безпосереднього інтегрування за формулами (1.5). Для цього потрібно попередньо побудувати графіки, тобто епюри функцій ω , y та z , а потім взяти їхні відповідні комбінації або, як умовно кажуть, перемножити відповідні епюри.

Правило Верещагіна значно спрощує обчислення розглянутих інтегралів (1.5).

Приклад 1.5. Вирахувати за правилом Верещагіна секторально-лінійні статичні моменти $S_{\omega y}$ і $S_{\omega z}$ для швелера (рис. 1.13, а) при полюсі B_o і початку відліку в точці M_o . Обидві точки (B_o і M_o) розташовані на перетині осі y з серединною лінією стінки швелера. Розміри швелера вказано на рис.1.4.

Розв'язок. Обране розташування точок B_o і M_o дозволяє побудувати просту епюру секторальних координат ω (рис. 1.13, б):

$$\omega_3 = 0,5 \cdot 19,03 \cdot 7,74 = 73,65 \text{ см}^2;$$

$$\omega_4 = -0,5 \cdot 19,03 \cdot 7,74 = -73,65 \text{ см}^2;$$

Для визначення величин $S_{\omega y}$ і $S_{\omega z}$ використовуємо формули (1.8):

$$S_{\omega y} = \sum_{i=1}^n \delta_i \Omega_i \omega f_{iy}^c \quad \text{і} \quad S_{\omega z} = \sum_{i=1}^n \delta_i \Omega_i \omega f_{iz}^c.$$

Будуємо епюри z (рис. 1.13, в) і y в декартових координатах (рис. 1.13, г).

Перемножуючи епюри ω і y за правилом Верещагіна, маємо $S_{\omega y} = 0$, оскільки кососиметрична епюра ω перемножується на симетричну епюру y .

Перемножуючи епюри ω і z , дістанемо:

$$S_{\omega z} = \sum_{i=1}^2 \delta_i \Omega_i \omega f_{iz}^c = -2 \cdot 0,97 \cdot (0,5 \cdot 73,65 \cdot 7,74 \cdot 9,515) = -526131 \text{ см}^5.$$

Отже, $S_{\omega y} = 0$; $S_{\omega x} = -5261,31 \text{ см}^5$.

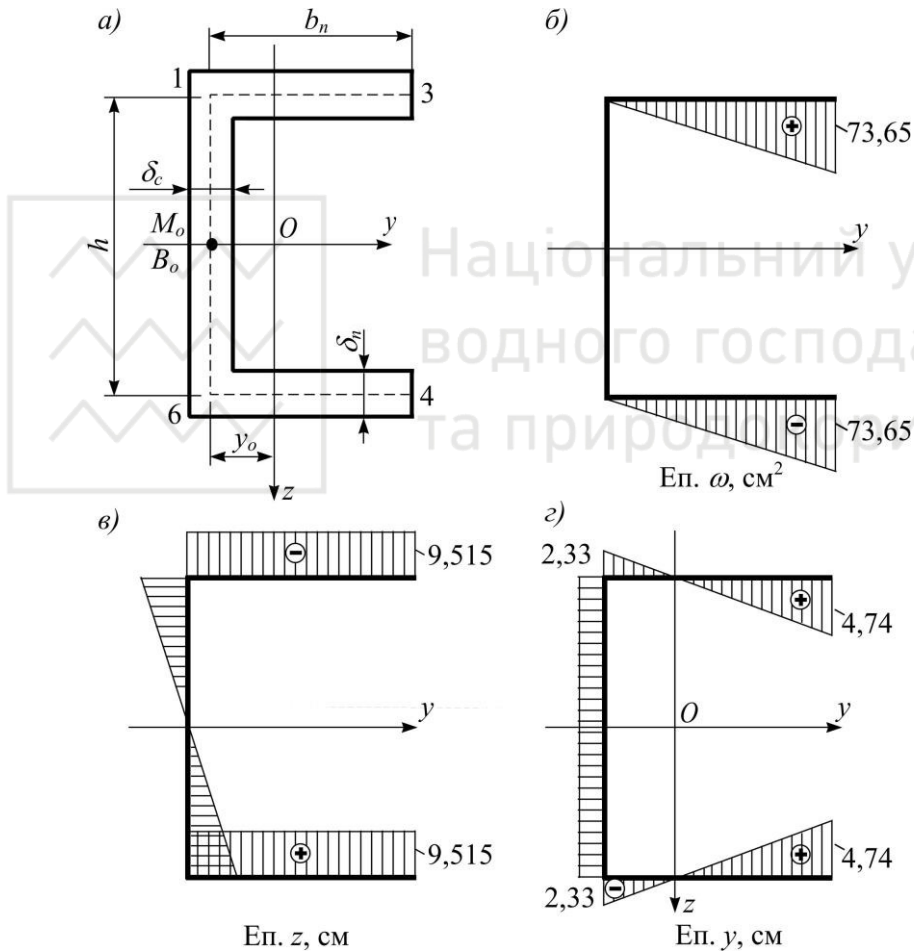


Рис. 1.13. До визначення статичних моментів $S_{\omega y}$ (б, г) і $S_{\omega x}$ (б, в) для швелера (а)

Спосіб Сімпсона–Корноухова. Підінтегральні функції в інтегралах типу (1.6) і (1.7) є неперервні та диференційовані на кожному i -му відрізку контуру. Тобто на кожній i -ій ділянці епюри не містять ні стрибків, ні зламів тому можуть бути обчислені за формулою Сімпсона–Корноухова (рис. 1.14):

$$\int_{s_i} \varphi(s) f(s) ds = \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{6} (f_i^l \varphi_i^l + 4f_i^c \varphi_i^c + f_i^n \varphi_i^n), \quad (1.9)$$

де $f_i^l, \varphi_i^l, f_i^n, \varphi_i^n$ – ліві (л) і праві (п) ординати епюр, що перемножуються; f_i^c, φ_i^c – ординати тих самих епюр посередині довжини відрізка s_i . І тоді розрахункові формули (1.6) набувають такого вигляду:

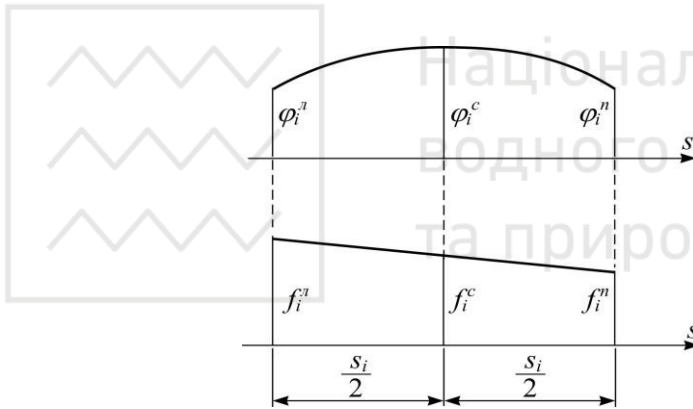


Рис. 1.14. Координати лінійної f_i і нелінійної φ_i функцій

$$\text{а) } S_{\omega y} = \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{S_i}{6} (f_{i\omega}^l \varphi_{iy}^l + 4f_{i\omega}^c \varphi_{iy}^c + f_{i\omega}^n \varphi_{iy}^n);$$

$$\text{б) } S_{\omega z} = \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{S_i}{6} (f_{i\omega}^l \varphi_{iz}^l + 4f_{i\omega}^c \varphi_{iz}^c + f_{i\omega}^n \varphi_{iz}^n). \quad (1.10)$$

Індекси ω, y, z при координатах f і φ відповідають епюрам ω, y, z ; δ_i – товщина стінки профілю на якій відбувається добуток епюр.

Добуток координат f_i і φ_i додатний, якщо ординати епюр відкладено по один бік від осі s , і від’ємний, якщо – по різні боки. Коли епюри, що перемножуються мають стрибки чи злами вздовж осі s , то ці епюри поділяють на окремі відрізки від стрибка до стрибка, від зламу до зламу. І тоді для кожного такого відрізка застосовують формули (1.10).

Приклад 1.6. Обчислити за способом Сімпсона–Корноухова секторально-лінійний статичний момент $S_{\omega z}$ для швелера (рис. 1.13, а) при полюсі B_o і початку відліку в точці M_o . Розміри швелера вказано на рис. 1.4. Використати для розрахунку епюри ω і z із прикладу 1.5 (рис. 1.13, б, в).

Розв’язок. Для обчислення секторально-лінійного статичного моменту $S_{\omega z}$ використаємо формулу (1.10, б) Сімпсона–Корноухова:

$$S_{\omega z} = \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{S_i}{6} (f_{i\omega}^n \varphi_{iz}^n + 4f_{i\omega}^c \varphi_{iz}^c + f_{i\omega}^n \varphi_{iz}^n).$$

Ординати f і φ відмічаємо на відповідних епюрах ω і z (рис. 1.15), для чого використовуємо епюри ω і z із прикладу 1.5 (рис. 1.13, б, в).

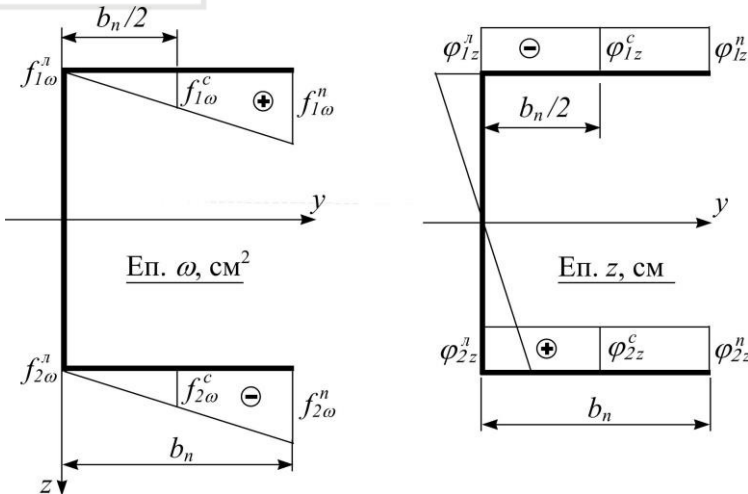


Рис. 1.15. До визначення статичного моменту $S_{\omega z}$ способом Сімпсона–Корноухова

Вираховуємо ординати епюр:

$$f_{2\omega}^n = -f_{1\omega}^n = 0;$$

$$-f_{2\omega}^c = f_{1\omega}^c = 0,5 \cdot 73,65 = 36,825 \text{ cm}^2;$$

$$-f_{2\omega}^n = f_{1\omega}^n = 73,65 \text{ см}^2;$$

$$\varphi_{1z}^n = -\varphi_{2z}^n = -9,515 \text{ см}^2;$$

$$\varphi_{1z}^c = -\varphi_{2z}^c = -9,515 \text{ см}^2;$$

$$\varphi_{1z}^n = -\varphi_{2z}^n = -9,515 \text{ см}^2.$$

Секторально-лінійний статичний момент $S_{\omega z}$ згідно з формулою (1.10, б) дорівнює (оскільки добутки ординат ω і z для нижньої і верхньої половини перерізу однакові, то розрахунок для верхньої половини $\delta_i = 0,97 \text{ см}$ подвоюємо):

$$S_{\omega z} = -2 \cdot 0,97 \cdot \frac{7,74}{6} (0 + 4 \cdot 36,825 \cdot 9,515 + 73,65 \cdot 9,515) = -5261,31 \text{ см}^5,$$

що повністю збігається з результатом, знайденим у прикладі 1.5.

1.2.4. Формула переходу для секторальної координати щодо зміни початку відліку

Розглянемо в загальному вигляді як змінюється секторальна координата заданої точки M від зміни початкової точки відліку M_1 на нову початкову точку M_o . Відлік координат здійснюємо вздовж серединної лінії профілю (рис. 1.16).

Секторальна координата ω_1 точки M щодо початку відліку в точці M_1 дорівнює подвоєній заштрихованій площі сектора M_1MA при полюсі A (рис. 1.16, а):

$$\omega_1 = 2 \text{ пл. } M_1MA .$$

Секторальна координата ω_0 точки M_0 щодо початку відріку в точці M_1 дорівнює подвоєній не заштрихованій площі сектора M_1M_0A при полюсі A (рис. 1.16, б):

$$\omega_0 = 2 \text{ пл. } M_1M_0A.$$

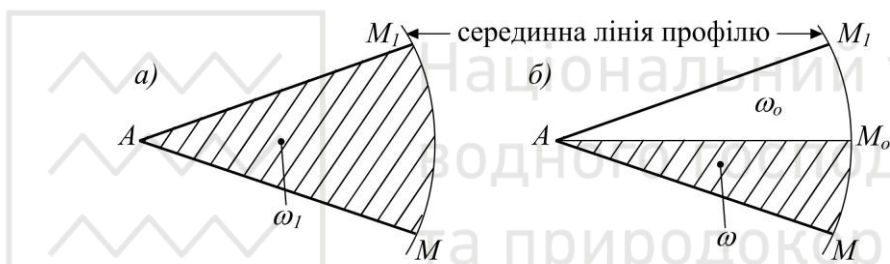


Рис. 1.16. Секторальна координата точки M до (а) і після (б) зміни початкової точки відріку

Якщо перенести для точки M початок відріку із точки M_1 в точку M_0 , то її секторальна координата ω зміниться на подвоєну площу сектора M_1M_0A , тобто її розмір зменшиться на ω_0 :

$$\omega = \omega_1 - \omega_0. \quad (1.11)$$

Таким чином, при переході від першої початкової точки відріку M_1 до другої початкової точки M_0 щодо незмінного полюса A секторальна координата довільної точки M зменшується на сталие значення, яке дорівнює секторальній координаті точки M_0 відносно точки M_1 .

1.2.5. Формула переходу для секторальної координати при зміні полюса

Формулу переходу для секторальної координати у випадку перенесення

полюса із точки O (центр ваги) в довільну точку A можна здійснити з таких міркувань (рис. 1.17).

Візьмемо на серединній лінії перерізу KL будь-яку точку $m(y, z)$ в системі головних центральних координат yOz , де O – центр ваги тонкостінного перерізу і одночасно полюс секторальної системи координат. У цьому випадку диференціал секторальної координати для полюса O дорівнює:

$$d\omega_0 = r_o ds,$$

де r_o – перпендикуляр, опущений із полюса O на дотичну MN , яку проведено до серединної лінії KL у точці m .

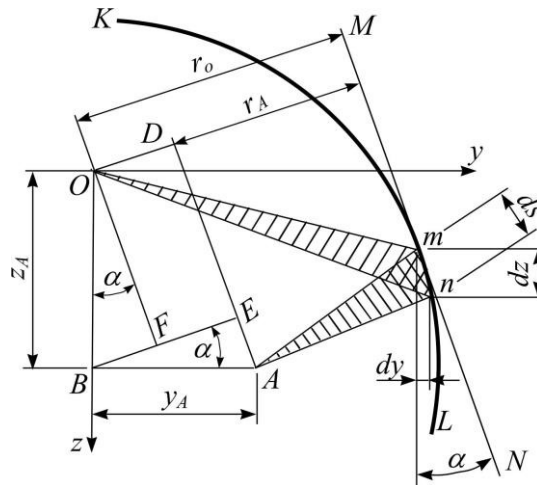


Рис. 1.17. Зміна полюса O на полюс A

Розглянемо нове положення полюса в точці A з координатами y_A і z_A . Диференціал секторальної координати для нового полюса A дорівнює:

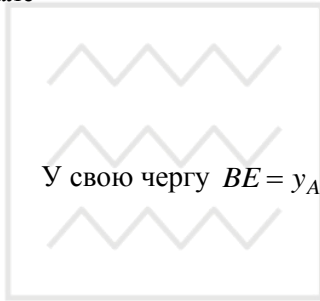
$$d\omega_A = r_A ds, \tag{a}$$

де r_A – перпендикуляр, опущений із полюса A на дотичну MN .

Довжину перпендикуляра r_A виразимо через довжину r_o таким чином (див. рис. 1.17):

$$r_A = r_o - OD,$$

але



Національний університет водного господарства та природокористування

У свою чергу $BE = y_A \cos \alpha$, $BF = z_A \sin \alpha$ і тоді:

$$r_A = r_o - y_A \cos \alpha + z_A \sin \alpha, \quad (б)$$

де α – кут між віссю z і дотичною MN .

Із рис. 1.17 видно, що :

$$\sin \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \alpha = \frac{dz}{ds}. \quad (в)$$

Підставляючи вирази (в) у вираз (б), маємо :

$$r_A = r_o + z_A \frac{dy}{ds} - y_A \frac{dz}{ds}. \quad (г)$$

Помноживши вираз (г) на ds , і маючи на увазі вираз (а), дістанемо:

$$d\omega_A = d\omega_o + z_A dy - y_A dz. \quad (д)$$

Проінтегрувавши вираз (д), знайдемо:

$$\omega_A = \omega_o + z_A y - y_A z + K. \quad (1.12)$$

Формула (1.12) є формулою переходу від колишнього полюса O до нового полюса A ; тут ω_o – секторальна координата точки m відносно довільного полюса O ; y_A і z_A – координати нового полюса A в системі головних центральних осей; K – довільна константа інтегрування, яка залежить від вибору початку відліку.

1.2.6. Центр згину

Центр згину – це точка в перерізі або поза ним, відносно якої момент внутрішніх і зовнішніх поперечних сил дорівнює нулю. Інакше кажучи, центр згину – це точка, через яку проходить рівнодійна дотичних сил у перерізі.

Якщо рівнодійна зовнішніх (перерізувальних) сил проходить через центр згину, то стержень зазнає тільки плоского згину (рис. 1.18).

Якщо рівнодійна зовнішніх (перерізувальних) сил не проходить через центр згину, то в цьому випадку навіть тоді, коли рівнодійна діє вздовж головної осі перерізу, стержень зазнає складного деформування – згину з крученням (рис. 1.19).

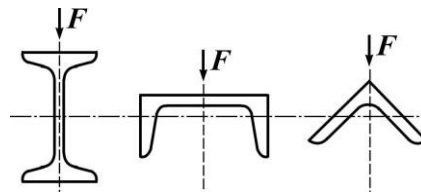


Рис. 1.18. Плоский згин профілів

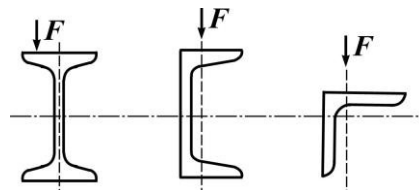


Рис. 1.19. Згин з крученням прокатних профілів

1.2.6.a. Фізичний спосіб визначення центру згину

Фізичний спосіб визначення центру згину розглянемо на прикладі швелера, який згинається зосередженою (перерізувальною) силою F (рис. 1.20, а). В теорії плоского згину доведено, що в перерізі тонкостінного стержня в разі дії поперечних сил виникають дотичні напруження певного напрямку, що складаються з сили P_1 і $P_2 = Q$ (рис. 1.20, а). Ці сили створюють закрутовий момент T_K в площині zOy : $T_K = P_2 y_0 + P_1 h$ і стержень зазнає кручення. Якщо перерізувальну силу F розташувати в деякій точці A_o (в центрі згину) на відстані e від осі стінки (рис. 1.20, б), то закрутовий момент T_K дорівнюватиме нулю:

$$T_K = P_1 h - P_2 e = 0.$$

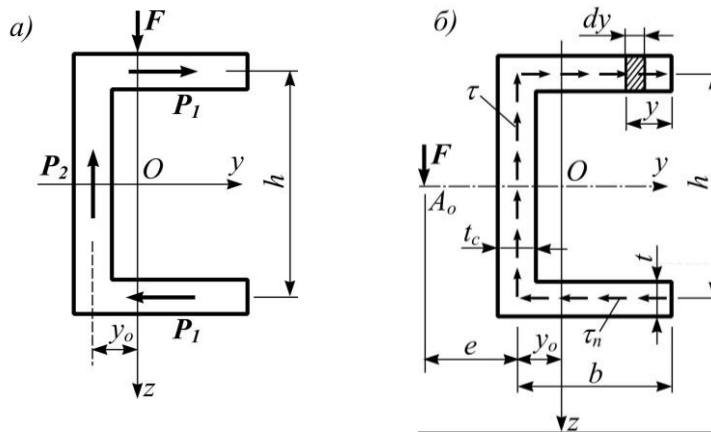


Рис. 1.20. Розподіл дотичних сил (а) і дотичних напруг (б) в прокатному профілі
Звідси значення e (відстань до центра згину A_o) дорівнює:

$$e = \frac{P_1 h}{P_2}. \quad (a)$$

Сила $P_2 = Q$, де Q – поперечна сила в перерізі.

Дотичні напруження в перерізі згідно з формулою Д.І.Журавського дорівнюють:

$$\tau = \frac{QS_y^B}{I_y \cdot t},$$

а для полиці статичний момент відрізаної частини площі S_y^B дорівнює $S_y^B = yth/2$, де $t = \delta_n$ (рис. 1.20, б), і тоді для полиць дотичні напруження дорівнюватимуть:



$$\tau_n = \frac{Qh}{2I_y} y,$$

а дотична сила P_1 набирає такого вигляду:

$$P_1 = \int_0^b \tau_n t dy = \int_0^b \frac{Qh}{2I_y} y t dy = \frac{Qhb^2 t}{4I_y}. \quad (6)$$

Підставляючи вираз (б) у формулу (а), матимемо:

$$e = \frac{Qhb^2 th}{4I_y Q} = \frac{h^2 b^2 t}{4I_y}. \quad (1.13)$$

Приклад 1.7. Визначити центр згину швелера (рис. 1.4) фізичним способом за формулою (1.13). Вважати відомими: висоту швелера $h = 19,03$ см; ширину полиці $b = 7,74$ см; товщину полиці (рис. 1.20, б) $\delta_n = t = 0,97$ см; осьовий момент інерції $I_y = 166166$ см⁴.

Розв'язок. Для симетричного профілю центр згину знаходиться на осі симетрії. Відстань від серединної лінії до центра згину A_o (рис. 1.20, б) згідно з формулою (1.13) дорівнює:

$$e = \frac{h^2 b^2 t}{4I_y} = \frac{19,04^2 \cdot 7,74^2 \cdot 0,97}{4 \cdot 166166} = 3,17 \text{ см.}$$

1.2.6.6. Геометричний спосіб визначення центру згину

Визначення центру згину геометричним способом ґрунтується на використанні рівностей (1.5), що дорівнюють нулю:

$$\text{а) } S_{\omega y} = \int_A \omega y dA = 0, \quad \text{б) } S_{\omega z} = \int_A \omega z dA = 0. \quad (1.14)$$

Звідси можна дати інше означення центру згину. Центром згину називають головний секторальний полюс A_o , для якого секторально-лінійні статичні моменти $S_{\omega y}$ і $S_{\omega z}$ дорівнюють нулю, тобто відповідають рівностям (1.14).

Доведемо це положення.

Якщо (перерізувальна) сила F проходить через точку A_o (через центр згину), то, помноживши дотичні напруження τ , що виникають в перерізі тонкостінного стержня (рис. 1.20, б) в разі поперечного згину, на величину $rtds$, де $t = \delta$ (рис. 1.3), ці дотичні напруження створюють відносно точки A_o елементарний закрутовий момент: $dT_A = \tau rtds$, де, як відомо, дотичне напруження $\tau = \frac{QS_y^B}{I_y \cdot t}$, і тоді закрутовий момент T_A дорівнюватиме:

$$T_A = \frac{Q}{I_y} \int S_y^B rds.$$

Враховуючи, що $rds = d\omega$ (1.1), матимемо звідси:

$$T_A = \frac{Q}{I_y} \int S_y^B d\omega. \quad (\text{а})$$

Обчислюючи частинами інтеграл у виразі (а), і враховуючи, що $d(S_y^B) = zdA$, дістанемо:

$$T_A = \frac{Q}{I_y} \left(S_y^B \omega \Big|_A - \int_A \omega z dA \right) = 0. \quad (б)$$

Оскільки перший доданок у дужках рівності (б) дорівнює нулю, тому статичний момент всього перерізу відносно центральної осі Oy (рис. 1.20, б) дорівнює нулю. Другий доданок за означенням дорівнює нулю згідно з формулою (1.14, б), оскільки було припущено, що сила F проходить через центр згину.

Таким чином, закрутовий момент T_A дорівнює нулю і тому зовнішня, згинальна сила F , що проходить через центр згину A_o , не викликає кручення тонкостінного стержня.

Відшукаємо положення центру згину на підставі геометричних співвідношень (1.12) і (1.14). Підставимо значення $\omega_A = \omega$ із виразу (1.12) у рівність (1.14, б):

$$S_{\omega z} = \int_A \omega_A z dA = \int_A \omega_0 z dA + z_A \int_A z y dA - y_A \int_A z^2 dA + K \int_A z dA = 0, \quad (в)$$

де $\omega_0 = \omega$ – секторальна координата, яку відраховують від довільного полюса O (рис. 1.17), y_A і z_A – координати центра згину A_o .

Оскільки осі Oy та Oz – головні центральні осі перерізу, то звідси слід прирівнювати до нуля відцентровий момент інерції I_{zy} і статичний момент площі перерізу S_y :

$$I_{zy} = \int_A z y dA = 0 \quad \text{і} \quad S_y = \int_A z dA = 0.$$

Взявши до уваги, що осьовий момент інерції $I_y = \int_A z^2 dA$, із виразу (в)

дістанемо:

$$\int_A \omega z dA - y_A I_y = 0,$$

звідси:

$$y_A = \frac{\int_A \omega z dA}{I_y} = \frac{S_{\omega z}}{I_y}. \quad (\text{г})$$

Аналогічно із співвідношень (1.12) і (1.14, а) матимемо:

$$\int_A \omega_A y dA = \int_A \omega_0 y dA + z_A \int_A y^2 dA - y_A \int_A z y dA + K \int_A y dA = 0, \quad (\text{д})$$

де, як показано вище, $\omega = \omega_0$; $I_{zy} = \int_A z y dA = 0$; $S_z = \int_A y dA = 0$; $I_z = \int_A y^2 dA$.

І тоді маємо із виразу (д):

$$z_A = -\frac{\int_A \omega y dA}{I_z} = -\frac{S_{\omega y}}{I_z}. \quad (\text{е})$$

Таким чином, для визначення геометричним способом координат центру згину в системі головних центральних осей перерізу треба попередньо підрахувати секторально-лінійні статичні моменти площі перерізу відносно довільного полюса O і головних центральних осей yOz (рис. 1.20, б) і поділити їх на відповідні моменти інерції згідно з формулами (г) і (е):

$$\text{а) } y_A = \frac{S_{\omega z}}{I_y}; \quad \text{б) } z_A = -\frac{S_{\omega y}}{I_z}. \quad (1.15)$$

За початковий допоміжний полюс O (рис. 1.17) чи полюс B_0 (рис. 1.13, а) можна прийняти будь-яку точку в площині перерізу. Від цієї точки відкладаються вздовж осей Oy і Oz (B_0y і B_0z) шукані координати z_A і y_A .

Якщо переріз має вісь симетрії, то, обравши допоміжний полюс і початкову точку відліку секторальних координат на цій осі, матимемо те, що секторально-лінійний момент відносно цього полюса і цієї осі дорівнюватиме нулю. А це означатиме, що центр згину A лежить у цьому випадку на осі симетрії (рис. 1.21).

Якщо переріз має дві осі симетрії або й більше, то центр згину лежить у точці перетину цих осей, тобто збігається з центром ваги перерізу. Центр згину A для зетоподібного профілю (рис. 1.21, *a*) збігається також із центром ваги перерізу O . Центр згину кутикового (рис. 1.21, *б*), таврового (рис. 1.21, *в*), хрестоподібного (рис. 1.21, *г*), а також будь-якого іншого профілю, який складається з деякої кількості прямокутників (рис. 1.21, *д*) знаходиться в точці перетину серединних ліній цих прямокутників.

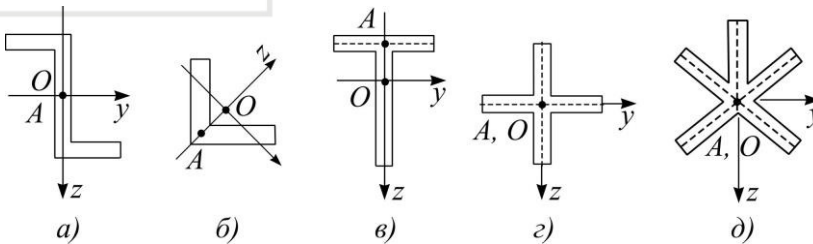


Рис. 1.21. Центр згину профілів, складених із прямокутників (*a*, *б*, *в*, *г*, *д*)

Приклад 1.8. Визначити центр згину швелера (рис.1.4) геометричним способом за формулою (1.15, *a*). Осьовий момент інерції (див. приклад 1.1) дорівнює $I_y = 1661,66 \text{ см}^4$ і секторально-лінійний статичний момент (див. приклад 1.5) дорівнює $S_{\omega z} = -526,131 \text{ см}^5$.

Розв'язок. Запишемо розрахункову формулу (1.15, *a*) геометричного способу визначення координати $y_A = e$ (див. рис. 1.20, *б*; рис. 1.22):

$$y_A = e = \frac{S_{\omega z}}{I_y},$$

де $y_A = e$ – відстань від серединної лінії стінки швелера до центра згину A_0

(рис.1.20, б). Отже,

$$y_A = e = -\frac{526,31}{166,66} = -3,17 \text{ см.}$$

Цей результат повністю збігається з розміром e в прикладі 1.7.

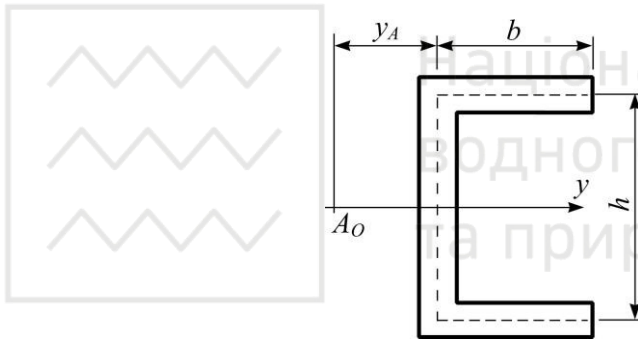


Рис. 1.22. До визначення центру згину A_0

Приклад 1.9. Визначити положення головного секторального полюса і головної нульової точки для тонкостінного кільця з вузьким розрізом. Товщина кільця δ (рис. 1.6).

Розв'язок. Секторальні координати з полюсом B в центрі кола відповідають рівнянню (рис. 1.6):

$$\omega = R \cdot \cup M_o M = R \cdot R\varphi = R^2\varphi.$$

Декартові координати точки M : $y = R \cos\varphi$, $z = R \sin\varphi$. Секторально-лінійні статичні моменти $S_{\omega y} = \int_A \omega y dA$, $S_{\omega z} = \int_A \omega z dA$. Елементарна площа $dA = \delta R d\varphi$. Тоді секторально-лінійні статичні моменти дорівнюють:

$$S_{\omega y} = \int_{-\pi}^{\pi} R^2 \varphi R \cos \varphi \delta R d\varphi =$$

$$= R^4 \delta \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \cos \varphi d\varphi = R^4 \delta | \cos \varphi + \varphi \sin \varphi |_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$S_{\omega z} = \int_{-\pi}^{\pi} R^2 \varphi R \sin \varphi \delta R d\varphi =$$

$$= R^4 \delta \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \sin \varphi d\varphi = R^4 \delta | \sin \varphi - \varphi \cos \varphi |_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \delta R^4.$$

Осьовий момент інерції тонкого кільця:

$$I_y = I_z = \frac{1}{2} I_p = \frac{1}{2} R^2 2\pi R \delta = \pi \delta R^3.$$

Координати центру згину згідно з формулами (1.15) дорівнюють:

$$y_A = \frac{A \int \omega z dA}{I_y} = \frac{S_{\omega z}}{I_y} = \frac{2\pi \delta R^4}{\pi \delta R^3} = 2R;$$

$$z_A = \frac{-\int \omega y dA}{I_z} = \frac{-S_{\omega y}}{I_z} = \frac{0}{\pi \delta R^3} = 0.$$

Отже, головний секторальний полюс A_o знаходиться на осі Oy на відстані $2R$ від центра ваги O в бік додатних абсцис (рис. 1.6).

Залишаючи без зміни положення нульової точки M_o на рис 1.6, перенесемо полюс із точки B в точку A_o . Перевіримо, чи не є точка M_o – головною початковою точкою відліку координат ω . У цьому випадку секторально–лінійні статичні моменти мають дорівнювати нулю. Головна секторальна координата змінюється за законом $\omega = R^2(2 \sin \varphi - \varphi)$ і тоді

$$S_{\omega z} = \int_A \omega z dA = R^4 \delta \int_{-\pi}^{\pi} (2 \sin \varphi - \varphi) \sin \varphi d\varphi = 0;$$

$$S_{\omega y} = \int_A \omega y dA = R^4 \delta \int_{-\pi}^{\pi} (2 \sin \varphi - \varphi) \cos \varphi d\varphi = 0.$$

Оскільки секторально-лінійні статичні моменти дорівнюють нулю ($S_{\omega z} = S_{\omega y} = 0$), то це означає, що раніше прийнята за початок відліку точка M_o є головною нульовою секторальною точкою, вона найближче із нульових точок розташована до головного полюса A_o .

1.2.7. Головна секторальна нульова точка

Положення головної секторальної нульової точки визначають за допомогою рівняння:

$$S_{\omega} = \int_A \omega dA = 0,$$

де секторальну координату ω відкладають від полюса A_o , який є центром згину (рис. 1.20, б).

Підставляємо в це рівняння замість секторальної координати ω її значення за перехідною формулою (1.11):

$$S_{\omega} = \int_A (\omega_1 - \omega_0) dA = \int_A \omega_1 dA - \omega_0 \int_A dA = 0.$$

Звідки маємо:

$$\omega_0 = \frac{\int_A \omega_1 dA}{A} = \frac{S_{\omega_1}}{A}, \quad (1.16)$$

де ω_1 – секторальна координата точок для попередньої системи відліків з

довільною точкою M_1 (рис. 1.16); ω_0 – секторальна координата шуканої нульової точки (стала величина і тому винесена за знак інтеграла); A – площа перерізу тонкостінного профілю; S_{ω_1} – секторальний статичний момент відносно головного полюсу для довільного початку відліку координат.

Кажучи взагалі, формулу (1.16) може задовольнити не одна, а декілька нульових точок профілю. В такому разі головною секторальною точкою вважають ту, яка найближче розташована до центру згину. Якщо переріз має вісь симетрії, то головна нульова секторальна точка лежить у точці перетину цієї осі зі серединною лінією профілю.

Приклад 1.10. Знайти положення головної нульової секторальної точки M_0 для швелерного перерізу, зображеного на рис 1.23, а.

Розв’язок. Для знаходження положення головної нульової точки M_0 для швелерного перерізу, зображеного на рис. 1.23, а, скористаємося формулою (1.16):

$$\omega_0 = \frac{S_{\omega_1}}{A}.$$

Обираємо початок відліку M_1 в довільній точці 1. (Нумерацію точок залишаємо такою самою, як на рис. 1.5). Будуємо епюру ω' від полюсу A_0 , тобто від центру згину (рис. 1.23, а). Тоді маємо для точок профілю (1, 3, 0, 6, 4) такі значення секторальних координат:

$$\omega_1 = 0;$$

$$\omega_0 = 3,17 \cdot 0,5 \cdot 19,03 = 30,165 \text{ см}^2;$$

$$\omega_6 = 3,17 \cdot 19,03 = 60,33 \text{ см}^2;$$

$$\omega_3 = 7,74 \cdot 0,5 \cdot 19,03 = 73,65 \text{ см}^2;$$

$$\omega_4 = 60,33 - 7,74 \cdot 0,5 \cdot 19,03 = -13,32 \text{ см}^2.$$

Виразуємо секторальний статичний момент S_{ω_1} за формулою (1.3):

$$S_{\omega_1} = \sum_{i=1}^n \delta_i \Omega_i; S_{\omega_1} = 0,5[0,97 \cdot 73,65 \cdot 7,74 + 0,97(60,33 - 13,32)7,74 + 0,52 \cdot 60,33 \cdot 19,03] = 751,4463 \text{ см}^4.$$

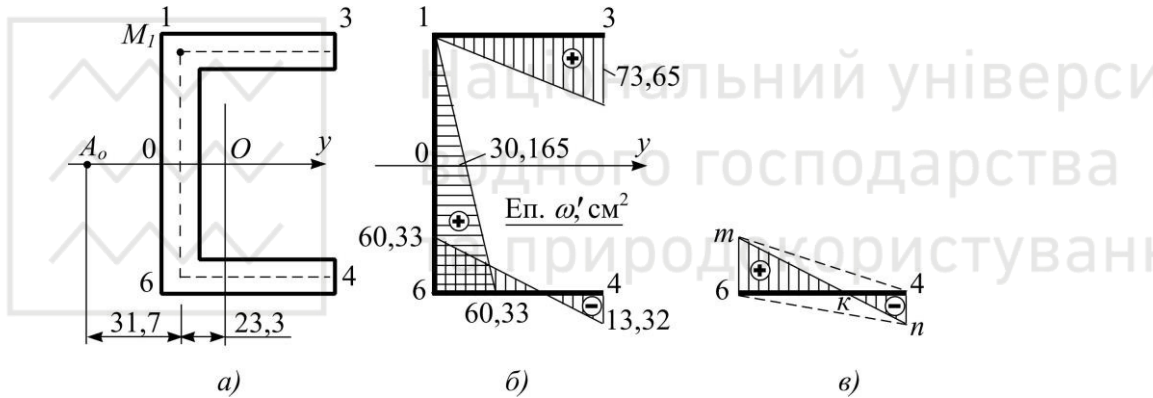


Рис. 1.23. До визначення статичного моменту S_{ω_1} (б, в) для швелера (а)

Площу на відріжку 6-4 швелерного профілю підраховуємо таким чином. Епюру ω' на відріжку 6-4 (рис.1.23, б) доповнюємо двома рівновеликими трикутниками $\Delta(m-k-4)$ і $\Delta(6-k-n)$ різних знаків (рис.1.23, в). Рівність площ доданих трикутників (на рис. 1.23, в – ці площі не заштриховано) впливає із таких міркувань: трикутники $\Delta(6-m-4)$ і $\Delta(6-m-n)$ мають спільну основу $(6-m)$ і спільну висоту $(6-4)$. Віднімаючи з цих трикутників одну і ту саму площу трикутника $\Delta(6-m-k)$ матимемо: площі трикутників $\Delta(m-k-4)$ і $\Delta(6-k-n)$ однакові. Тому сумарну площу трикутників $\Delta(6-m-k)$ і $\Delta(k-4-n)$ вираховуємо як суму площ трикутників $\Delta(6-m-4)$ і $\Delta(6-4-n)$, враховуючи їх знаки.

Площа A перерізу швелера дорівнює:

$$A = 20 \cdot 0,52 + 2 \cdot 7,48 \cdot 0,97 = 24,9112 \text{ см}^2.$$

Секторальна координата ω_o нульових точок швелерного профілю дорівнюватиме:

$$\omega_o = \frac{S_{\omega_1}}{A} = \frac{751,4463}{24,9112} = 30,165 \text{ см}^2.$$

Отже, нульових точок із координатою $\omega_o = 30,165 \text{ см}^2$ маємо три: одна нульова точка O на стінці швелера і по одній нульовій точці на кожній полиці швелера. За головну нульову точку обираємо найближчу точку до полюса. Це буде точка O на перетині серединної лінії стінки та осі y (рис. 1.23, *a, б*).

1.2.8. Головні секторальні координати

Полюс у центрі згину A_o і початок відліку від головної нульової точки M_o сумісно з рухомим радіусом – вектором $\rho = A_o M_o$ (рис. 1.24, *a*) створюють систему головних секторальних координат. Епюру секторальних координат ω_o , що будують у цій системі, називають епюрою головних секторальних координат (рис. 1.24, *б*). Цю епюру використовують для розрахунку тонкостінних стержнів відкритого профілю на міцність і жорсткість.

Приклад 1.11. Побудувати епюру головних секторальних координат ω_o для швелерного перерізу, зображеного на рис. 1.24, *a*. (Розміри швелера – в мм).

Розв’язок. Для побудови епюри головних секторальних координат ω_o обираємо полюс A_o в центрі згину та початок відліку від головної нульової секторальної точки M_o (рис. 1.24, *a*).

Обчислюємо значення секторальних координат в точках 1, 3, 4, 6 (рис. 1.24, *б*):

$$\omega_1 = -3,17 \cdot 9,515 = -30,16 \text{ см}^2;$$

$$\omega_3 = -30,16 + 7,74 \cdot 9,515 = 43,49 \text{ см}^2;$$

$$\omega_6 = 3,17 \cdot 9,515 = 30,16 \text{ см}^2;$$

$$\omega_4 = 30,16 - 7,74 \cdot 9,515 = -43,49 \text{ см}^2.$$

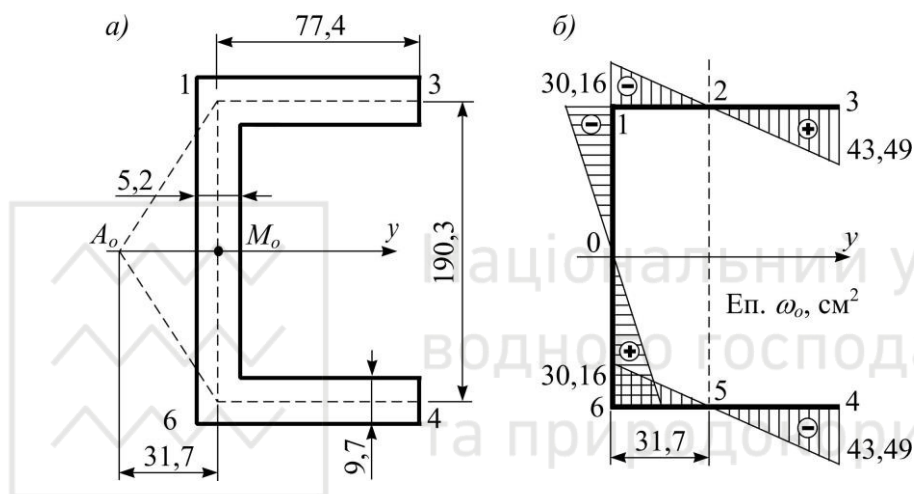


Рис. 1.24. Головні секторальні координати (б) для швелера (а)

На рис. 1.24, б побудовано епюру головних секторальних координат ω_o , в см^2 .

1.2.9. Секторальний момент інерції

Секторальний момент інерції – це інтеграл

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA, \text{ см}^6, \quad (1.17)$$

який має завжди додатне значення, а одиницю виміру – см^6 . Отже, секторальний момент інерції – це інтеграл добутку квадрата головних секторальних координат $\omega = \omega_o$ і диференціала площі, поширеної на всю поверхню перерізу A .

Коли переріз складено з прямокутників сталої ширини δ , цей інтеграл записують так:

$$I_{\omega} = \sum_{i=1}^n \delta_i \int_{s_i} \omega \omega ds, \quad (1.18)$$

де δ_i – ширина окремого прямокутника; s_i – його довжина; ω – головна секторальна координата.

Для перерізів, складених із прямокутників, для обчислення секторального моменту інерції зручно скористатися формулами Верещагіна або Сімпсона–Корноухова.

Приклад 1.12. Обчислити секторальний момент інерції I_{ω} для швелера, зображеного на рис. 1.23, а.

Розв’язок. Для обчислення секторального моменту інерції I_{ω} за формулою (1.17) скористаємося формулою Сімпсона–Корноухова (див. формулу 1.9). Інтеграл I_{ω} дорівнює:

$$I_{\omega} = \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{S_i}{6} (\omega_i^n \cdot \omega_i^n + 4\omega_i^c \omega_i^c + \omega_i^n \omega_i^n).$$

Значення секторальних координат ω_i візьмемо з епюри ω_0 (рис. 1.24, б):

а) для відрізка 0–1 $s_i = 9,515$ см;

$$\omega^n = 0; \omega^c = 15,08 \text{ см}^2; \omega^n = 30,16 \text{ см}^2;$$

б) для відрізка 1–2 $s_i = 3,17$ см;

$$\omega^n = 30,16 \text{ см}^2; \omega^c = 15,08 \text{ см}^2; \omega^n = 0;$$

в) для відрізка 2–3 $s_i = 7,74 - 3,17 = 4,57$ см;

$$\omega^n = 0; \omega^c = 21,745 \text{ см}^2; \omega^n = 43,49 \text{ см}^2.$$

Секторальні координати нижньої частини епюри ω_0 для відповідних

відрізків (рис. 1.24, б) ті самі, що і для верхньої частини, тільки з протилежним знаком і тому просто подвоюємо результат перемноження координат для верхньої частини. І тоді маємо:

$$I_{\omega} = 2 \left[\frac{9,515}{6} (4 \cdot 15,08^2 + 30,16^2) + \frac{3,17}{6} (30,16^2 + 4 \cdot 15,08^2) + \frac{4,57}{6} (4 \cdot 21,745^2 + 43,49^2) \right] = 134548 \text{ см}^6.$$

Приклад 1.13. Підрахувати секторальний момент інерції для розрізаного кільця радіусом $R = 5$ см і товщиною $\delta = 0,4$ см (рис. 1.7). Головна секторальна координата дорівнює :

$$\omega = \omega_o = R^2 (2 \sin \varphi - \varphi).$$

Розв'язок. Обчислюємо інтеграл (1.17) $I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA$ аналітично.

Диференціал дуги $dA = \delta ds = R \delta d\varphi$ (рис. 1.11) і тоді:

$$\begin{aligned} I_{\omega} &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[R^2 (2 \sin \varphi - \varphi) \right]^2 R \delta d\varphi = R^5 \delta \int_{-\pi}^{\pi} (2 \sin \varphi - \varphi)^2 d\varphi = \\ &= 2\pi \left(\frac{\pi^2}{3} - 2 \right) R^5 \delta = 2\pi \left(\frac{\pi^2}{3} - 2 \right) 5^5 \cdot 0,4 = 10099,286 \approx 10099 \text{ см}^6. \end{aligned}$$

Контрольні запитання

1. Кого вважають авторами сучасної теорії тонкостінних стержнів відкритого профілю?
2. Який поперечний переріз називають однозв'язним, тонкостінним?
3. Що таке секторальна координата (секторальна площа)? Яке правило знаків для неї? Яка її одиниця вимірювання?
4. Які точки в площині перерізу називають полюсом і початковою (нульовою) точкою відліку координат?
5. Як обчислюють секторальну координату і будують її епюру?

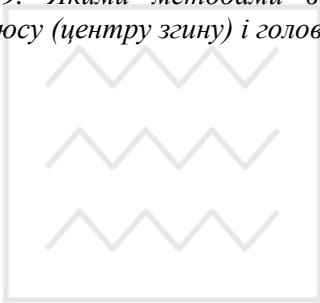
Розділ I. Секторальні характеристики перерізів тонкостінних стержнів відкритого профілю

6. Які механічні характеристики перерізу називаються: а) секторальним статичним моментом; б) секторально-лінійним статичним моментом; в) секторальним моментом інерції? Якими символами їх позначають, яким інтегралам вони відповідають і які їхні одиниці вимірювання?

7. Як впливає на значення секторальної координати перехід до нової початкової (нульової) точки при незмінному полюсі?

8. Як змінюється секторальна координата щодо переходу до нового полюса при незмінній нульовій точці? Який зв'язок існує в цьому випадку між координатами колишнього і нового полюса?

9. Якими методами визначають положення головного секторального полюсу (центру згину) і головної нульової секторальної точки?



Національний університет
водного господарства
та природокористування

РОЗДІЛ II

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ ЩОДО СКУТОГО КРУЧЕННЯ

2.1. Основні гіпотези

Технічна теорія тонкостінних стержнів відкритого профілю ґрунтується на двох основних гіпотезах, введених В.З. Власовим, і кількох допоміжних.

1. У процесі деформування контур поперечного перерізу стержня не змінюється, залишається абсолютно жорстким. Це означає, що проекції контуру на площину початкового (недеформованого) перерізу в деформованому і недеформованому станах тотожні, при цьому проекція відстані між двома будь-якими точками контуру не змінюється в процесі деформування, тобто переріз може повертатися, може бути депланованим так чи інакше, але після деформування проекція деформованого перерізу на площину початкового перерізу залишається незмінною. Цю гіпотезу для двотаврового перерізу ілюструє рис. 2.1.

Перша гіпотеза В.З. Власова підтверджується експериментально для жорстких тонкостінних стержнів, що використовуються в будівельних конструкціях.

2. Кутові деформації серединної поверхні стержня дорівнюють нулю. Пояснимо цю гіпотезу. Розглянемо прямокутний елемент серединної поверхні стержня $ABCD$ з розмірами dx уздовж напрямної стержня і ds уздовж його твірної (рис. 2.2).

Той факт, що кутові деформації на серединній поверхні дорівнюють нулю ($\gamma = 0$), ще не означає, що згідно з законом Гука і дотичні напруження мають дорівнювати нулю. Гіпотеза – це лише припущення, яке задовольняє практику та полегшує теоретичні розробки. Тут, у цьому плані доречно порівняти другу гіпотезу В.З. Власова з гіпотезою плоских перерізів у теорії поперечного згину стержнів. Дотичні напруження там трохи викривляють поперечні перерізи, але це викривлення, ці дотичні напруження в незначній мірі впливають на величини

нормальних напружень. Тому ними нехтують під час визначення розрахункових формул для нормальних напружень.

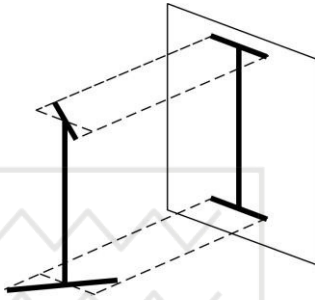


Рис. 2.1. Проекція деформованого двотавра

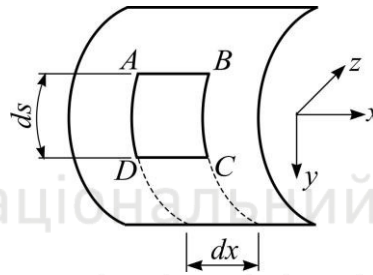


Рис. 2.2. Елемент ABCD до деформування

Саме так і в теорії тонкостінних стержнів нехтують за певних обставин кутовими деформаціями, оскільки вони в незначній мірі впливають на величини нормальних напружень. Але це зовсім не вказує на те, що дотичні напруження в перерізах тонкостінних стержнів дорівнюють нулю. Навпаки вони в значній мірі впливають на кручення тонкостінних стержнів.

Крім цих двох, розглянутих вище основних гіпотез, в технічній теорії тонкостінних стержнів відкритого профілю використовують ще кілька додаткових гіпотез.

а). Внаслідок малювання товщини стінки стержня нормальні напруження σ в перерізі з достатньою для практики точністю вважають рівномірно розподіленими за товщиною стінки (рис. 2.4).

б). Дотичні напруження в будь-якій точці перерізу спрямовані паралельно дотичній до серединної лінії контуру. Сумарні дотичні напруження τ від дії поперечних сил (τ_F) і додаткових сил від змінної депланації (τ_ω) розподілені рівномірно вздовж товщини стінки (рис. 2.5, а). Дотичні напруження τ_k від вільного кручення розподілені вздовж товщини за лінійним законом (рис. 2.5, б). Епюра розподілу сумарних дотичних напружень, уздовж товщини стінки, має форму трапеції (рис. 2.5, в).

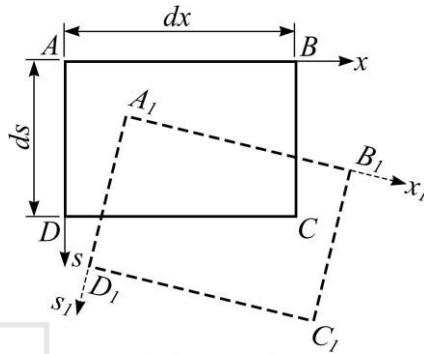


Рис. 2.3. Елемент $ABCD$ після деформування ($A_1B_1C_1D_1$)



Рис. 2.4. Розподіл нормальних (σ) та дотичних (τ) напружень за товщиною контуру

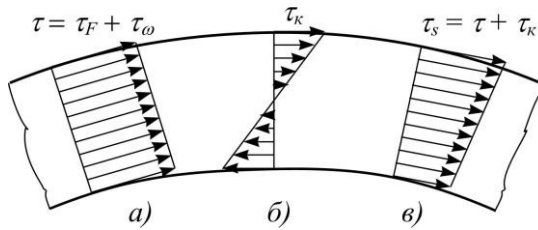


Рис. 2.5. Епюри дотичних напружень τ (а), τ_k (б), τ_s (в)

в) Вважають, що за товщиною δ (рис. 2.4) волокна одне на одне не тиснуть, тобто напружений стан, оскільки товщина незначна, приймають за лінійний.

Прийняті гіпотези значно спрощують теоретичні дослідження напружено-деформованого стану тонкостінних стержнів відкритого профілю, не знижуючи практичної значимості.

2.2. Найпростіші випадки роботи тонкостінних стержнів

До найпростіших форм роботи тонкостінних стержнів відкритого профілю належать такі випадки, коли депланація перерізів зовсім не спостерігається або є сталою вздовж стержня (випадок вільного, нескрутого кручення).

Найпростіші форми роботи стержнів є такими.

1. *Центральний (осьовий) розтяг чи стиск.* Зовнішні сили або їх рівнодійні прикладено вздовж центральної осі стержня та обов'язково в, так званій, нульовій секторальній точці. Тоді значення напружень обчислюють за звичайною розрахунковою формулою:

$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (2.1)$$

2. *Поперечний плоский згин.* Зовнішні сили мають лежати в площині, що перетинає, так звану, лінію центрів згину паралельно головній центральній осі стержня. Лише в цьому випадку не відбувається закручування стержня та для розрахунку придатні відомі формули з опору матеріалів:

$$\sigma = \frac{M_y z}{I_y} \quad \text{або} \quad \sigma = \frac{M_z y}{I_z}. \quad (2.2)$$

3. *Поперечний навскісний згин.* Зовнішні сили розташовані в площині, що перетинає згадану лінію центрів згину під певним кутом до головної центральної осі стержня. Підрахунки в цьому разі виконують за формулою навскісного поперечного згину:

$$\sigma = \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z}. \quad (2.3)$$

4. *Позацентровий розтяг або стиск.* Зовнішню силу прикладено в зоні ядра перерізу та неодмінно на лінії нульових секторальних точок. І тільки тоді є сенс

використовувати розрахункові формули опору матеріалів:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} \quad \text{або} \quad \sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F z}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_z^2} \right). \quad (2.4)$$

У формулах (2.1 – 2.4) прийнято такі позначення:

σ – нормальні напруження;

F – зосереджена зовнішня сила;

A – площа перерізу;

I_y, I_z – головні центральні моменти інерції площі перерізу;

z, y – координати точок перерізу, де визначають напруження;

M_y, M_z – згиніві моменти відносно головних центральних осей Oy і Oz ;

y_F, z_F – координати точок перерізу, в яких прикладено зовнішню позадцентрову силу F ;

i_y, i_z – головні радіуси інерції перерізу.

2.3. Вільне та скруте кручення тонкостінних стержнів

2.3.1. Вільне (нескруте або чисте) кручення

Вільним або чистим чи нескрутим крученням вважають таке кручення стержня, коли всі його перерізи вільні від нормальних напружень, а дотичні за всіма перерізами стержня розподілені однаково. У цьому випадку перерізи суцільних і трубчастих круглих стержнів залишаються плоскими, а перерізи некруглих стержнів втрачають плоску форму, депланують. Але всі їхні перерізи залишаються еквідистантними, тобто набувають однакову форму вздовж усього стержня.

Отже, вільне кручення некруглих тонкостінних стержнів можливе лише тоді, коли немає жодних перешкод для депланації перерізів. У цьому випадку всі перерізи депланують однаково, повздовжні волокна не змінюють свою довжину

і в перерізах, крім дотичних τ_k , не виникають нормальні напруження σ . Слід зауважити, що в чистому вигляді вільне кручення некруглих тонкостінних стержнів відкритого профілю практично майже ніколи не відбувається, але воно є складовою частиною загального випадку кручення.

Дотичні напруження τ_k від чистого кручення розподілені всередині прямокутного елемента тонкостінного стержня за лінійним законом (рис.2.6) і їх максимальне значення наближено дорівнює:

$$\max \tau_k = \frac{T_k \delta}{I_k}, \quad (2.5)$$

де T_k – закрутний момент; δ – товщина прямокутного елемента; I_k – момент інерції щодо чистого кручення некруглих стержнів.

Закрутний момент T_k – дорівнює:

$$T_k = GI_k \theta', \quad (2.6)$$

де G – модуль зсуву матеріалу стержня; θ' - відносний кут закручування, тобто кут взаємного повороту двох перерізів віддалених один від одного на одиницю довжини (характеризує депланацію перерізу).

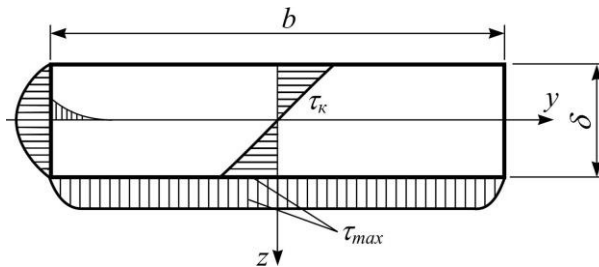


Рис. 2.6. Розподіл дотичних напружень від чистого кручення

Момент інерції I_k для окремого прямокутника дорівнює:

$$I_k = \frac{1}{3} \delta^3 (b - 0,63\delta) \approx \frac{b\delta^3}{3}, \quad (2.7)$$

де δ – розмір короткої сторони прямокутника (рис. 2.6); b – розмір довгої сторони.

Для перерізів, що складені з декількох прямокутників n (наприклад, швелер, двотавр тощо) момент інерції I_k буде дорівнювати:


$$I_k = \frac{1}{3} \eta \sum_{i=1}^n b_i \delta_i^3, \quad (2.8)$$

де η – коефіцієнт, який залежить від форми перерізу.

Для кутика – $\eta = 1,0 \div 1,1$; двотавра – $1,2$; швелера – $1,12$; тавра – $1,15$.

Отже, вільне (чисте, нескуте) кручення має місце тоді, коли депланації перерізів вільні, не скуті. У цьому випадку дотичні напруження τ_k розподілені у всіх перерізах стержня однаково. Відстань між перерізами вздовж будь-якого повздовжнього волокна не змінюється, і, таким чином, нормальні напруження в перерізах не виникають.

2.3.2. Скуте (згинове) кручення

Кручення, внаслідок якого вздовж стержня виникають змінні, неоднакові депланації перерізів, називають скутим або згиновим. У цьому випадку в перерізах, перпендикулярних до осі стержня, виникають, крім дотичних напружень τ_k від чистого кручення, ще й нормальні та дотичні напруження від згину. Вони мають назву секторальних нормальних σ_ω і секторальних дотичних τ_ω напружень, оскільки їх значення безпосередньо залежать від секторальних координат ω .

Неоднаковість депланацій має місце за певних умов закручування та залежить від типу закріплення, від способу завантаження стержня або від зміни його жорсткості вздовж своєї осі (рис. 2.7).

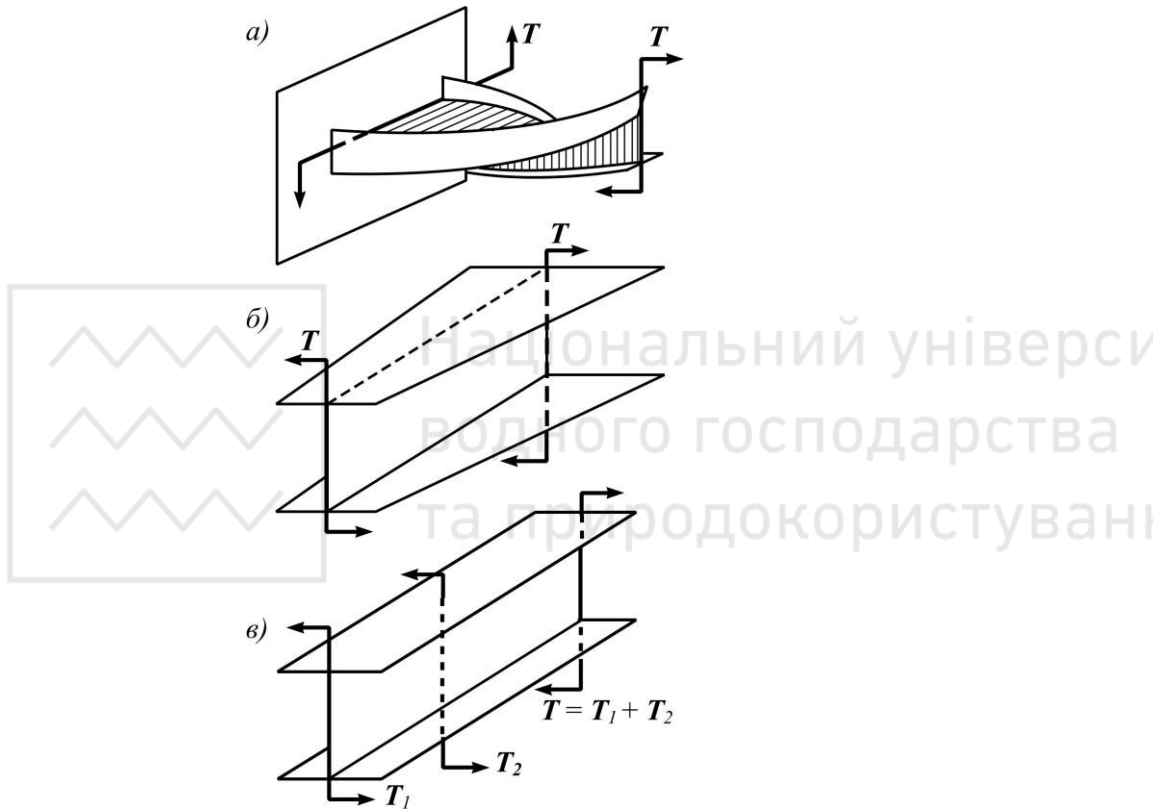


Рис. 2.7. До депланації перерізів сталюї (а) і змінної (б) форми та складнонавантаженого стержня (в)

Наприклад, коли один кінець стержня жорстко зацмлений, а другий вільний від закріплення, завантажений скручувальною парою сил (закрутовим моментом), то вільна депланація перерізів стає неможливою (рис. 2.7, а). У напрямку від вільного кінця до жорстко затисненого внаслідок обмеження, деформацій, депланації будуть згасати і в зацмленні переріз залишиться плоским. При цьому відстані між суміжними перерізами вздовж будь-якого поздовжнього волокна змінюватимуться, поздовжні волокна подовжуватимуться або скорочуватимуться і в перерізах, крім дотичних напружень τ_k від чистого кручення (рис. 2.7, а), виникнуть дотичні τ_ω і нормальні напруження σ_ω від змінної депланації.

Скручення зі змінною вздовж стержня депланацією перерізів

виникатиме і під час скручування стержня змінної жорсткості (зі змінним перерізом), якщо його скручування обумовлено парами сил T , що прикладені до торців стержня (рис. 2.7, б).

Якщо стержень сталого перерізу завантажений кількома парами сил (закрутовими моментами $T = T_1 + T_2$), то внаслідок різниці в кутах закручування на різних відрізках стержня депланація перерізів буде неоднаковою і стержень зазнаватиме скрутого кручення (рис. 2.7, в).

2.4. Зусилля в перерізах тонкостінного стержня при скрутому крученні

Щоб з'ясувати питання, які зусилля виникають у тонкостінному стержні при скрутому крученні, розглянемо елемент dx (рис. 2.8, а), вирізаний, скажімо із депланованого двотавра. Полиці двотавра під дією моментів M і $M + dM$ згинаються в різні сторони, оскільки згинові моменти напрямлені в протилежні боки.

Моменти M змінюються вздовж осі x і тому в полицях додатково виникають поперечні сили Q (рис. 2.8, а). На рис. 2.8, б схематично зображено біпару B як зовнішній силовий чинник, що спричиняє депланацію перерізів. Пара сил F на верхній полиці створює згинальний момент $M = Fa$. На нижній полиці створено такий самий момент протилежного напрямку. Вони згинають полиці двотавра. Сукупність двох пар сил, розташованих в рівнобіжних (паралельних) площинах і спрямованих у протилежні сторони, створюють біпару $B = Mh$. Можна інтерпретувати створення біпари й інакше: дві пари з протилежним напрямком $M' = Fh$ створюють таку ж саму біпару $B = M'a$. Одиницею виміру біпари є $\text{Н}\cdot\text{м}^2$. Інакше біпару називають ще згинально-скручувальним бімоментом B , на відміну від згиново-закрутового бімоменту B_ω , який як внутрішній силовий чинник протистоїть зовнішньому силовому чиннику B .

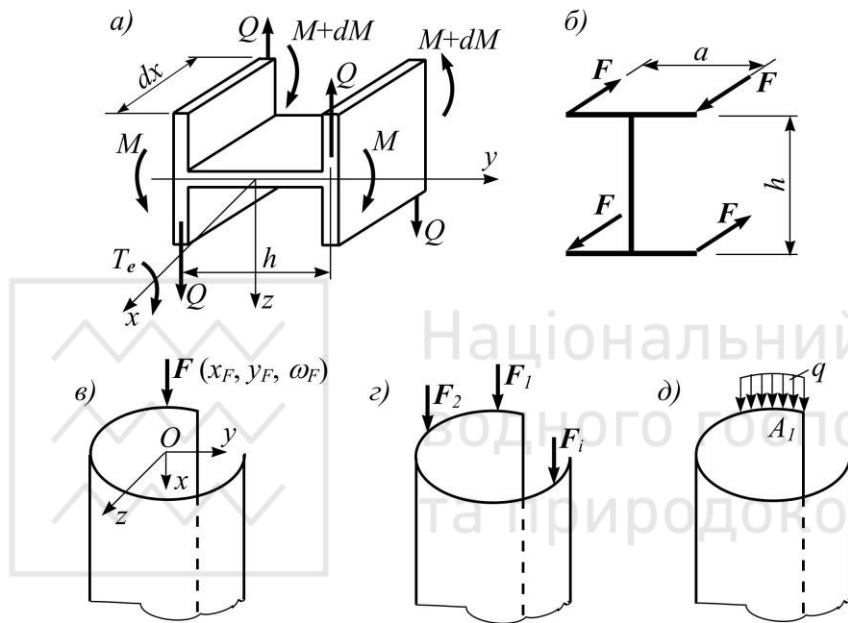


Рис. 2.8. Силві чинники в елементі депланованого двотавра (а), схема створення біпари (б), виникнення біпари (в, з, д)

Біпара (згинально–скручувальний бімомент) створюється і тоді, коли зовнішню зосереджену силу F прикладено перпендикулярно до перерізу тонкостінного стержня в ненульовій секторальній точці, тобто з певною секторальною координатою ω_F (рис. 2.8, в). У цьому випадку сила F створює біпару B – згинально-скручувальний бімомент (подвійний момент):

$$B = F\omega_F. \quad (2.9)$$

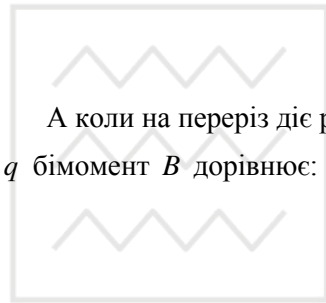
Згинально-скручувальний бімомент B спричинює депланацію перерізів. Цьому бімоменту B відповідає (чинить опір) внутрішній, згиново-закрутовий бімомент B_ω , який протидіє викривленню (депанації) перерізів.

Формула (2.9) придатна для визначення зовнішніх бімоментів лише для випадків, коли крутильна жорсткість перерізу стержня нехтовно мала:

$$GI_k \approx 0.$$

Якщо в зазначеному напрямку (рис. 2.8, *з*) діють декілька зосереджених сил F_i , то бімомент цих сил дорівнює:

$$B = \sum_{i=1}^n F_i \omega_{F_i}. \quad (2.10)$$



$$B = \int_{A_1} q \omega dA. \quad (2.11)$$

Дія бімоменту B спричиняє появу в перерізах нормальних напружень σ_ω , з яких і складається внутрішній бімомент B_ω , що дорівнює:

$$B_\omega = \int_{A_1} \sigma_\omega \omega dA. \quad (2.12)$$

Бімомент являє собою систему сил, статично еквівалентну нулю. Така його фізична особливість.

Бімомент B_ω вважають додатним, коли він відповідає закручуванню правої частини стержня за ходом стрілки годинника. Якщо при цьому дивитися на переріз (праву частину стержня) зі сторони лівої частини – вздовж осі x . Наприклад, в ситуації, що зображено на рис. 2.8, *а*, бімомент має знак плюс (дивимося на праву частину стержня зі сторони лівої, вздовж осі x , зовнішній момент T_e закручує переріз за ходом стрілки годинника).

Отже, бімоменту B_ω відповідають секторальні нормальні напруження σ_ω (рис. 2.9, *а*).

Сумарний скручувальний момент T_e (*e* – *external* – зовнішній) щодо деформування тонкостінних стержнів поділяється на два фізично різні моменти:

- 1) T_k – момент чистого закруту, що спричинює появу дотичних напружень чистого закруту τ_k (рис. 2.9, б);
- 2) T_ω – згиново-закрутовий момент, який відповідає секторальним дотичним напруженням τ_ω (рис. 2.9, в).

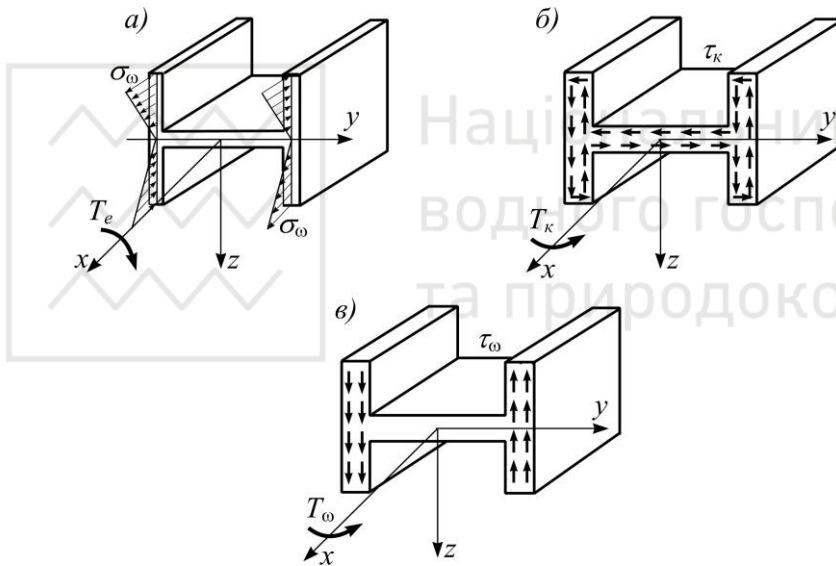


Рис. 2.9. Поділ сумарного моменту T_e (а) на моменти T_k (б) і T_ω (в)

Оскільки дія закрутового моменту T_e викликає в перерізах стержня появу еквівалентних йому трьох типів напружень σ_ω , τ_k , τ_ω (рис. 2.9, а, б, в), то для їх визначення можна скласти такі чотири рівняння:

$$\sum X = 0: \int_A \sigma_\omega dA = 0; \quad (2.13)$$

$$\sum M_y = 0: \int_A \sigma_\omega z dA = 0; \quad (2.14)$$

$$\sum M_z = 0: \int_A \sigma_\omega y dA = 0; \quad (2.15)$$

$$\sum M_{x_1} = 0: T_e - T_k - T_\omega = 0,$$

звідки

$$T_e = T_k + T_\omega. \quad (2.16)$$

Тут вісь x_1 проходить через центри кручення (центри згину).

Рівняння рівноваги (2.13 – 2.16) не можна використати в наведеному запису, оскільки закон зміни секторальних нормальних напружень σ_ω наразі невідомий.

Задача їх визначення в перерізах тонкостінних стержнів відкритого профілю є один раз статично невизначною. Для її розв'язку потрібно вдаватися до розгляду пружних деформацій.

2.5. Переміщення та деформації при скуютому крученні

Розглянемо деякі переміщення та лінійні деформації на прикладі скуютого (згинового) кручення тонкостінного стержня довільного профілю (рис. 2.10).

Внаслідок малої товщини стінок стержня розглядатимемо лише деформації серединної поверхні профілю. Для визначення лінійної деформації ε_x будь-якої точки n , яка зміщується просторово, розглянемо рис. 2.11.

Для цього просторове переміщення точки n розкладемо на складові частини: на тангенційну (вздовж дотичної лінії Dn , відрізок $n - n_2 = ds = dv$), на нормальну (перпендикулярно до дотичної Dn , відрізок $n_1 - n_2 = dw$) і на повздовжню складову (вздовж твірної, відрізок du на рис. 2.12).

Якщо довільний переріз BC повернувся на елементарний кут $d\theta$ відносно перерізу $B''C''$, що розташований на відстані dx від перерізу BC (рис. 2.10 і рис. 2.13), то тоді в результаті депланації точка n переміститься (на підставі першої гіпотези про незмінність контуру перерізу) в точку n_1 на контурі $B'C'$ (рис. 2.11). Згідно з прийнятою гіпотезою переріз BC повертається навколо центру згину A_0 як жорстке тіло, а це означає, що переміщення $n - n_1$ дорівнює:

$$(n - n_1) = \rho d\theta. \quad (a)$$

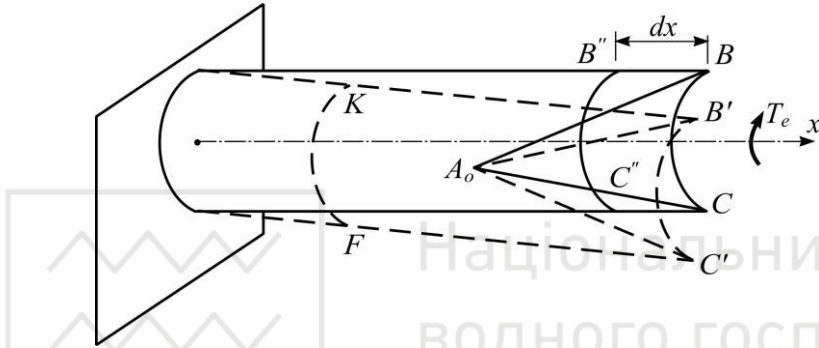


Рис. 2.10. Скруте кручення тонкостінного стержня

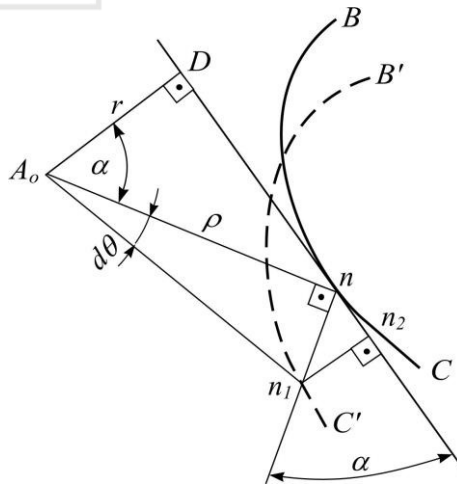


Рис. 2.11. Схема депланації перерізу BC

Переміщення $n - n_2$ із прямокутного трикутника $\Delta n n_1 n_2$ дорівнює :

$$(n - n_2) = ds = \rho d\theta \cdot \cos \alpha, \quad (б)$$

оскільки кут $\angle DAn$ дорівнює куту $\angle n_1 n n_2$.

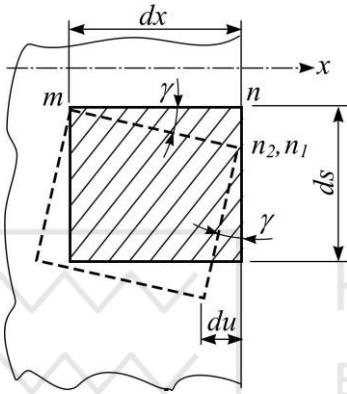


Рис. 2.12. Створення лінійного переміщення du

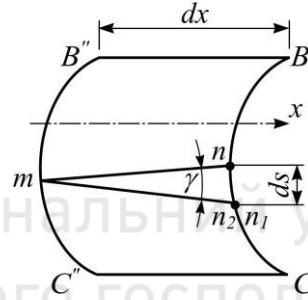


Рис. 2.13. Кутове переміщення γ

Із рис. 2.11 видно, що

$$r = \rho \cos \alpha. \quad (в)$$

Підставляючи вираз (в) у вираз (б), маємо

$$ds = rd\theta. \quad (г)$$

Щоб перейти до розгляду повздовжньої складової du , розглянемо два суміжні перерізи BC та $B''C''$ на відстані dx один від одного (рис. 2.10 і рис. 2.13). Коли переріз BC повертається відносно перерізу $B''C''$ на елементарний кут $d\theta$, а точка n переходить у нове положення n_1 (рис. 2.11), то твірна $m-n$ повертається на кут γ (рис. 2.13) і тоді

$$\gamma = \frac{ds}{dx}. \quad (д)$$

Враховуючи залежність (г), вираз (д) набуває такого вигляду:

$$\gamma = \frac{rd\theta}{dx} = r\theta', \quad (\text{е})$$

де $\theta' = \frac{d\theta}{dx}$ – відносний кут закручування.

Повздовжню складову du переміщення точки n визначимо на підставі другої гіпотези про рівність нулю кутової деформації на серединній поверхні стержня. З цією метою виділимо на серединній поверхні біля точки n елементарний прямокутник зі сторонами dx і ds (рис. 2.12). Згідно з другою гіпотезою елементарний прямокутник в результаті деформації перерізів переміститься в нове положення без перекосу прямих кутів. У цьому випадку переміщення du дорівнюватиме:

$$du = -ds \cdot \sin \gamma \approx -ds \cdot \gamma. \quad (\text{ж})$$

Враховуючи вираз (е), залежність (ж) запишемо в такому вигляді:

$$du = -\theta' r ds. \quad (\text{ж})$$

Елементарне переміщення du має знак мінус тому, що його напрямок протилежний осі x (рис. 2.12). Повне значення повздовжнього переміщення точки n по осі x внаслідок дії закрутового моменту T_e дорівнює сумі:

$$u = \int_0^x du = -\int_s \theta' r ds = -\theta' \int_s d\omega = -\theta' \omega,$$

тобто повздовжнє переміщення u дорівнює:

$$u = -\frac{d\theta}{dx} \omega = -\theta' \omega, \quad (2.17)$$

де ω – секторальна координата точки n .

Із формули (2.17) випливає, що значення повздовжнього переміщення точки n прямо пропорційне її секторальній координаті ω . Таким чином, секторальні координати є мірою депланації перерізу, що розглядається, оскільки θ' залежить від x , то і депланація перерізу залежить від відносного кута закручування

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx}.$$

Для підрахунку лінійної деформації ε_x треба визначити абсолютне видовження (тут – абсолютне скорочення) $du = \Delta dx$ волокна $mn = dx$.

Оскільки $u = -\frac{d\theta}{dx}\omega$ і ω не залежить від x , а θ є функцією лише однієї змінної x , то відносне видовження (відносне скорочення) волокна mn дорівнюватиме:

$$\varepsilon = \varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{du}{dx} = -\frac{d^2\theta}{dx^2}\omega,$$

тобто

$$\varepsilon_x = -\omega\theta'' . \quad (2.18)$$

Таким чином, лінійні деформації (відносні видовження і відносні скорочення) прямо пропорційно залежать від секторальної координати ω .

2.6. Секторальні нормальні напруження

Враховуючи гіпотезу про не натиснення волокон одне на одне за висотою перерізу, можна знайти значення секторальних нормальних напружень σ_ω при скрутому крученні, користуючись при цьому законом Гука для лінійного

напруженого стану та лінійною деформацією за формулою (2.18):

$$\sigma_{\omega} = E\varepsilon = -E\omega\theta'' = -E\theta''\omega, \quad (2.19)$$

де E – модуль пружності матеріалу; σ_{ω} – секторальне нормальне напруження, що залежить від секторальної координати ω .

Формула (2.19) – це закон Гука при скрутому крученні.

Таким чином, секторальні нормальні напруження залежать від головної секторальної координати ω і від другої похідної кута закручування θ .

Щоб не визначати щоразу другу похідну від θ за dx , змінимо трохи конфігурацію формули (2.19), помноживши її ліву і праву частини на ωdA і проінтегруємо потім цей вираз за всією площею перерізу A :

$$\int_A \sigma_{\omega} dA = -E\theta'' \int_A \omega^2 dA, \quad (2.20)$$

де $\int_A \omega^2 dA = I_{\omega}$ - секторальний момент інерції;

$\int_A \sigma_{\omega} dA = B_{\omega}$ - згиново-закрутовий (внутрішній) бімомент за формулою (2.12).

Тоді формула бімоменту набирає такого вигляду:

$$B_{\omega} = -EI_{\omega}\theta'', \quad (2.21)$$

де EI_{ω} – секторальна жорсткість депланації.

Із формули (2.21) випливає:

$$-E\theta'' = \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}}. \quad (2.22)$$

Підставляючи вираз $-E\theta''$ за формулою (2.22) у рівність (2.19), дістанемо розрахункову формулу для секторальних нормальних напружень:

$$\sigma_{\omega} = \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega. \quad (2.23)$$

Значимо, що відношення $\frac{B_{\omega}}{I_{\omega}}$ для одного і того самого перерізу залишається незмінним, змінюється лише значення секторальної координати ω . Звідси випливає, що секторальні нормальні напруження змінюються в перерізі за законом зміни головної секторальної координати ω .

Приклад 2.1. Побудувати епюру секторальних нормальних напружень σ_{ω} для перерізу тонкостінного швелерного стержня (див. рис. 1.24, а), для якого маємо побудовану епюру головних секторальних координат ω_0 (рис. 1.24, б). Відомо, що бімомент у перерізі дорівнює $B_{\omega} = 550 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$, а секторальний момент інерції $I_{\omega} = 134548 \text{ см}^6$.

Розв'язок. Для побудови епюри секторальних нормальних напружень σ_{ω} скористаємося формулою (2.23): $\sigma_{\omega} = \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega$.

Обчислюємо напруження в точках 1, 3, 4, 6 (рис. 1.24, б):

$$\sigma_1 = -\frac{550}{134548 \cdot 10^{-12}} \cdot 30,16 \cdot 10^{-4} = -1233 \cdot 10^6 \text{ Па} = -1233 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{550}{134548 \cdot 10^{-12}} \cdot 43,49 \cdot 10^{-4} = 177,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 177,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = -\frac{550}{134548 \cdot 10^{-12}} \cdot 43,49 \cdot 10^{-4} = -177,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_6 = \frac{550}{134548 \cdot 10^{-12}} \cdot 30,16 \cdot 10^{-4} = 1233 \text{ МПа}.$$

На підставі зроблених розрахунків будемо епюру секторальних нормальних напружень (рис. 2.14), і зіставляючи фігури на рисунках 1.24, б і 2.14, відзначаємо цілком передбачений результат: епюри подібні, відрізняються лише

на множник B_ω / I_ω .

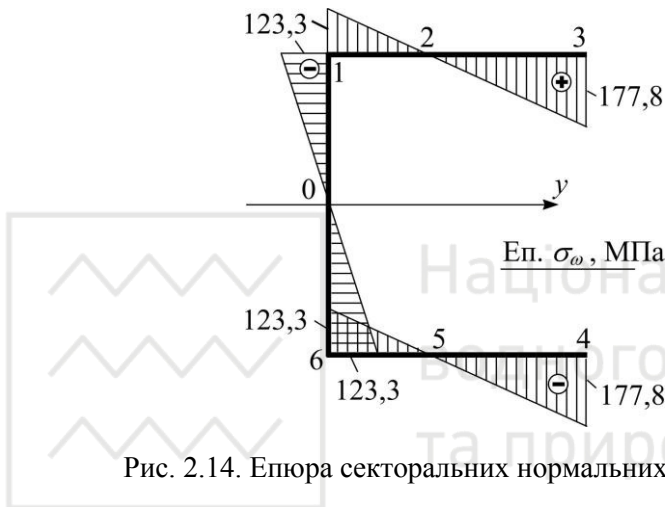


Рис. 2.14. Епюра секторальних нормальних напружень

2.7. Аналіз рівнянь рівноваги тонкостінного стержня при скрученні

Проаналізуємо рівняння рівноваги (2.13–2.16). Підставимо в рівняння (2.13) значення секторального нормального напруження σ_ω за формулою (2.19):

$$-\int_A E\theta'' \omega dA = -E\theta'' \int_A \omega dA = 0.$$

Оскільки для окремого перерізу $E\theta'' = const$, то тоді секторальний статичний момент S_ω має дорівнювати нулю: $S_\omega = \int_A \omega dA = 0$.

Це свідчить про те, що рівняння (2.13) вимагає, щоб початок відліку секторальних координат (точка M_o) був взятий у головній нульовій секторальній точці, для якої $S_\omega = 0$.

Із рівнянь (2.14) і (2.15) випливає, якщо в них підставити за формулою (2.19) значення $\sigma_\omega = -E\theta'' \omega$:

$$-\int_A E\theta'' \omega z dA = -E\theta'' \int_A \omega z dA = 0.$$

Маємо:

$$I_{\omega z} = \int_A \omega z dA = 0;$$

$$-\int_A E\theta'' \omega y dA = -E\theta'' \int_A \omega y dA = 0,$$

звідки отримуємо: $I_{\omega y} = \int_A \omega y dA = 0$.

Отже, рівняння (2.14) і (2.15) свідчать, що секторально-лінійні статичні моменти площі дорівнюють нулю $I_{\omega y} = I_{\omega z} = 0$, а це означає, що центри кручення збігаються з центрами згину. Звідси робимо висновок, що розглянуті три рівняння рівноваги (2.13–2.15) обумовлюють вибір системи секторальних координат. А саме вона, ця система секторальних координат, повинна мати полюс A_o в центрі згину, а початок відліку має знаходитися в головній нульовій секторальній точці M_o .

Рівняння (2.16): $T_e = T_k + T_\omega$ – зв'язує щодо скрутого кручення зовнішній закрутовий момент T_e з внутрішнім моментом чистого кручення T_k і згиново-закрутовим моментом T_ω .

2.8. Диференціальні залежності між силовими чинниками при скрутому крученні

2.8.1. Залежність між секторальними нормальними σ_ω і секторальними дотичними τ_ω напруженнями

Для визначення залежності між σ_ω і τ_ω виріжемо із тонкостінного стержня, що знаходиться в умовах скрутого кручення (рис. 2.10) елемент зі сторонами ds і

dx . На рис. 2.15 зображено лише дотичні напруження τ_ω , що відповідають згиново-закрутовому моменту T_ω (рис. 2.9, в). Дотичні напруження τ_k , що відповідають моменту чистого кручення T_k на рис. 2.15 не зображені, оскільки вони розподілені по перерізу за законом прямої лінії (рис. 2.6 і рис. 2.9, б) і створюють елементарні сили, рівнодійна яких дорівнює нулю. Дотичні напруження τ_F від поперечного згину спрямовані перпендикулярно до осі x , на рис. 2.15 не зображені, оскільки проекції елементарних сил від цих напружень на вісь x дорівнюють нулю.

Додаткові дотичні напруження τ_ω розподілені за перерізом рівномірно (рис. 2.9, в) і тому елементарні сили від них зводяться до рівнодійної сили, що не дорівнює нулю (рис. 2.15).

Проектуючи всі сили, що зображені на гранях виділеного елемента (рис. 2.15), на вісь x , матимемо:

$$-\sigma_\omega \delta ds + (\sigma_\omega + \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} dx) \delta ds + (\tau_\omega + \frac{\partial \tau_\omega}{\partial s} ds) \delta dx - \tau_\omega \delta dx = 0,$$

звідки дістаємо:

$$\frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_\omega}{\partial s}. \quad (2.24)$$

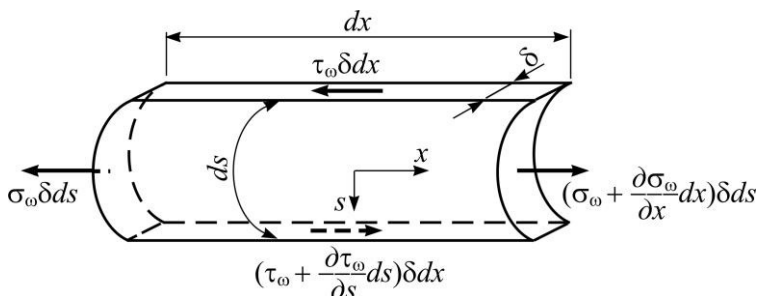


Рис. 2.15. Секторальні нормальні та дотичні напруження в перерізах

2.8.2. Залежність між згиново-закрутовим бімоментом B_ω і згиново-закрутовим моментом T_ω

Визначимо, чому дорівнює момент T_ω . Розглянемо для цього рис. 2.16, з якого з'ясуємо, що елементарна зсувна сила $\tau_\omega dA$ дає елементарний момент dT_ω відносно центра кручення A_0 (центра згину): $\tau_\omega r dA = dT_\omega$, де r – перпендикуляр, спроектований із центра згину, точки A_0 , на напрямок дотичного зусилля $\tau_\omega dA$. Тобто на напрямок дотичної лінії $t-t$ до серединної лінії контуру. В цілому згиново-закрутовий момент T_ω дорівнює:

$$T_\omega = \int_A \tau_\omega r dA, \quad (2.25)$$

де A – площа перерізу тонкостінного профілю.

Згиново-закрутовий бімомент B_ω згідно з формулою (2.12) дорівнює:

$$B_\omega = \int_A \sigma_\omega \omega dA.$$

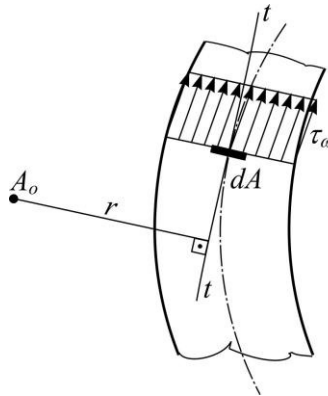


Рис. 2.16. До визначення згиново-закрутового моменту

Продиференціюємо вираз (2.12) за змінною x :

$$\frac{dB_\omega}{dx} = \int_A \frac{d\sigma_\omega}{dx} \omega dA.$$

Враховуючи залежність (2.24) і замінюючи $dA = \delta ds$, дістанемо:

$$\frac{dB_\omega}{dx} = - \int_A \frac{d\tau_\omega}{ds} \omega \delta ds = - \int_A \omega d(\tau_\omega \delta).$$

Інтегруючи тут правий інтеграл частинами і беручи до уваги формулу $(uv)' = uv' + u'v$, в якій приймаємо $u = \omega$, а $v' = d(\tau_\omega \delta)$, матимемо:

$$\frac{dB_\omega}{dx} = -\tau_\omega \delta \omega \Big|_A + \int_A \tau_\omega \delta d\omega.$$

Границі для підстановки в перший доданок візьмемо згідно з умовами рис. 2.10 на довільній дузі KF . Оскільки на контурі не прикладено жодних сил, то секторальні дотичні напруги при $\omega = \omega_F$ і $\omega = \omega_K$ дорівнюють нулю: $\tau_\omega = 0$, тобто перший доданок у вище наведеній формулі набирає такого вигляду:

$$-\tau_\omega \delta \omega \Big|_A = -\tau_\omega \delta \omega \Big|_F^K = -\tau_{\omega K} \cdot \omega_K \delta + \tau_{\omega F} \omega_F \delta = 0$$

і тоді маємо:

$$\frac{dB_\omega}{dx} = \int_A \tau_\omega \delta d\omega,$$

але згідно з формулою (1.1) $d\omega = r ds$ і тоді виходить, що

$$\frac{dB_\omega}{dx} = \int_A \tau_\omega \delta d\omega = \int_A \tau_\omega r \delta ds = \int_A \tau_\omega r dA.$$

Враховуючи тут формулу (2.25), остаточно маємо:

$$T_{\omega} = \frac{dB_{\omega}}{dx}, \quad (2.26)$$

тобто перша похідна від бімоменту B_{ω} за змінною x дорівнює згиново-закрутовому моменту T_{ω} .

Маючи на увазі значення бімоменту B_{ω} за формулою (2.21), а саме $B_{\omega} = -EI_{\omega}\theta''$, і залежність (2.26), дістанемо:

$$T_{\omega} = -EI_{\omega}\theta'''. \quad (2.27)$$

2.9. Секторальні дотичні напруження

До розгляду беремо тонкостінний стержень відкритого довільного профілю, що зазнає скрутного кручення (рис. 2.17, а). Виріжемо з нього заштрихований на рис. 2.17, а елемент $abcd$ трьома перерізами: двома вертикальними ab і cd та одним горизонтальним bc . Зобразимо виділений елемент окремо в збільшеному розмірі (рис. 2.17, б).

Прикладемо до площин розрізу лише секторальні нормальні σ_{ω} і секторальні дотичні τ_{ω} напруження. Застосовуючи гіпотезу про незмінність напружень за товщиною елемента, спроектуємо всі сили на вісь x :

$$\sum X = 0: -\tau_{\omega}\delta dx - \int_{A_b} \sigma_{\omega} dA + \int_{A_b} (\sigma_{\omega} + d\sigma_{\omega}) dA = 0,$$

де A_b – площа відрізаної частини перерізу, а саме пл. $abb'a'$ і пл. $dcc'd'$ (рис. 2.17, б).

Після спрощення, попереднього виразу, маємо:

$$-\tau_{\omega}\delta dx + \int_{A_b} d\sigma_{\omega} dA = 0.$$

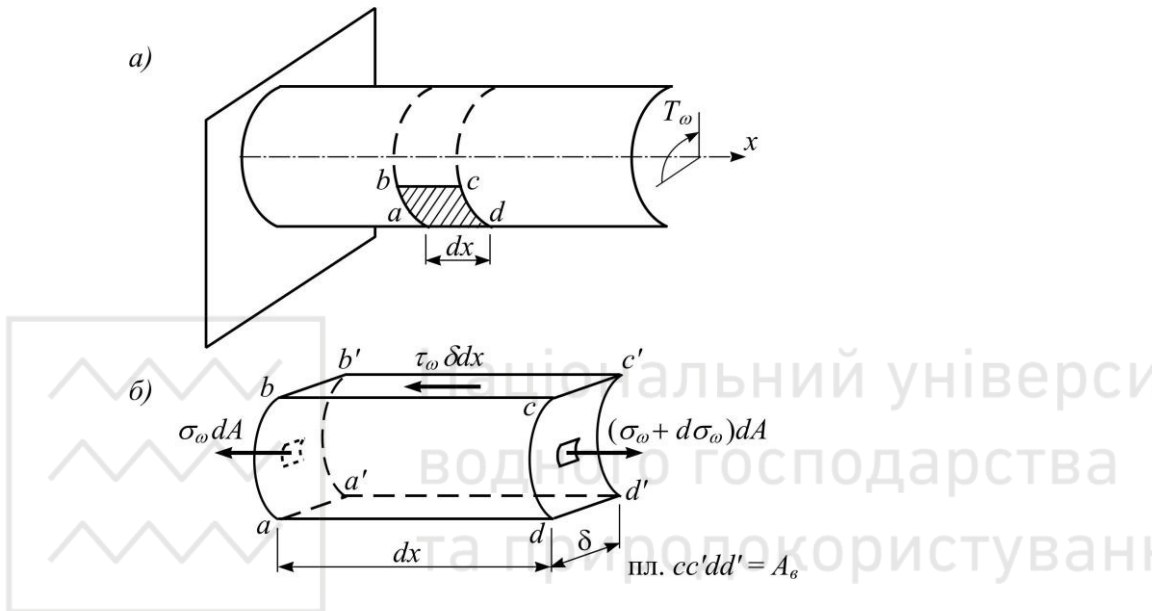


Рис. 2.17. Скуте кручення тонкостінного стержня (а) і напружений стан елемента $abcd$ (б)

Підставивши сюди диференціал $d\sigma_\omega$ відповідно до формули (2.23), тобто:

$$d\sigma_\omega = \frac{dB_\omega}{I_\omega} \omega$$

матимемо:

$$-\tau_\omega \delta dx + \frac{dB_\omega}{I_\omega} \int_{A_b} \omega dA = 0. \quad (a)$$

Зауважимо, що $\int_{A_b} \omega dA = S_\omega^b$ – є секторальний статичний момент відрізаної частини перерізу S_ω^b . І тоді формулу (а) перепишемо так:

$$\tau_\omega = \frac{dB_\omega}{dx} \cdot \frac{S_\omega^b}{\delta I_\omega}. \quad (б)$$

Враховуючи залежність (2.26): $\frac{dB_\omega}{dx} = T_\omega$, дістанемо розрахункову формулу

для секторальних дотичних напружень:

$$\tau_\omega = \frac{T_\omega S_\omega^b}{I_\omega \delta}. \quad (2.28)$$

У процесі скрутого кручення тонкостінних стержнів в їхніх перерізах виникають два типи дотичних напружень: секторальні дотичні напруження τ_ω і дотичні напруження τ_k чистого кручення.

Слід зауважити, що: а) секторальні дотичні напруження набувають максимального значення в точках перерізу, де секторальний статичний момент S_ω^a досягає максимального розміру; б) у більшості випадків практичних розрахунків значення секторальних дотичних напружень τ_ω порівняно з дотичними напруженнями τ_k від чистого кручення незначні і тому розрахункові найбільші дотичні напруження визначають за формулою (2.5): $\tau_k = \frac{T_k \delta}{I_k}$ – для чистого кручення.

Приклад 2.2. Визначити найбільше значення для секторального дотичного напруження τ_ω в перерізі швелерного стержня (рис. 1.24, а), якщо відомі епюри головних секторальних координат ω_o (рис. 1.24, б), а також такі величини:

- згинно-закрутовий момент $T_\omega = 6000 \text{ Н} \cdot \text{м}$;
- секторальний момент інерції $I_\omega = 134548 \text{ см}^6$;
- товщина стінки швелера $\delta_c = 0,52 \text{ см}$;
- товщина полиць швелера $\delta_n = 0,97 \text{ см}$.

Розв'язок. Екстремальні значення секторальних дотичних напружень τ_ω будуть у тих точках, де секторальний статичний момент S_ω досягає екстремальних значень, а це будуть нульові точки на епюрі ω_o секторальних координат (див. рис. 1.24, б).

Визначимо значення S_ω для нульових точок 2 ; 5 і 0 (рис. 1.24, б),

користуючись формулою (1.3): $S_{\omega} = \sum_{i=1}^n \delta_i \Omega_i$.

Секторальний статичний момент для точок 2 і 5 – однаковий за модулем:

$$S_{\omega 2} = S_{\omega 5} = 43,49(7,74 - 3,17) \cdot 0,97 \cdot 0,5 = 96,39 \text{ см}^4.$$

Для точки 0 маємо:

$$S_{\omega 0} = 96,39 - 0,5 \cdot 0,97 \cdot 30,16 - 3,17 - 0,52 \cdot 0,5 \cdot 9,515 \cdot 30,16 = -24,59 \text{ см}^4.$$

Дотичні напруження підраховуємо в точках 5; 2 і 0 за формулою (2.28):

$$\tau_{\omega} = \frac{T_{\omega} S_{\omega}^b}{I_{\omega} \delta};$$

$$\tau_{\omega 0} = \frac{6000 \cdot 24,59 \cdot 10^{-8}}{134548 \cdot 10^{-12} \cdot 0,52 \cdot 10^{-2}} = 21,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 21,1 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\omega 5} = \tau_{\omega 2} = \frac{6000 \cdot 96,39 \cdot 10^{-8}}{134548 \cdot 10^{-12} \cdot 0,97 \cdot 10^{-2}} = 44,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 44,3 \text{ МПа}.$$

Отже, максимальних значень секторальні дотичні напруження досягають у точках 2 і 5 і дорівнюють $\tau_{\omega 5} = \tau_{\omega 2} = 44,3 \text{ МПа}$.

2.10. Розрахункові формули для складного опору тонкостінних стержнів

Для визначення напружень у перерізах тонкостінного стержня відкритого профілю при скрутому крученні за умови пружних і малих деформацій для практичних розрахунків використовують принцип незалежності дії сил (принцип накладання). І тоді розрахункові формули на міцність дістають

підсумовуванням напружень від кожної окремої деформації. Для нормальних напружень це будуть такі залежності:

1. Якщо секторальна координата точки прикладання осьової сили не дорівнює нулю, то ця сила, крім центрального розтягу-стиску, спричинюватиме появу й скрутного кручення. У цьому випадку нормальні напруження від сумісної дії центрального розтягу-стиску і скрутного кручення визначають за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega. \quad (2.29)$$

2. Коли стискаючі (розтягуючі) сили прикладено навіть у зоні ядра перерізу, але їхні секторальні координати не дорівнюють нулю, то вони, ці сили, крім позacentрового стиску (розтягу), викликають і скрутке кручення. Нормальні напруження від спільної дії позacentрової сили і скрутного кручення дорівнюють:

$$\sigma = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{z_F z}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_z^2} \right) + \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega. \quad (2.30)$$

3. Для випадку, коли згинальні сили розташовані в головних центральних площинах, але не проходять через лінію центрів згину, то тоді ці згинальні сили, крім плоского згину, викликають появу скрутного кручення в стержні, й сумісні нормальні напруження від цієї складної деформації дорівнюють:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega. \quad (2.31)$$

4. Коли згинальні сили розташовані в площині, що знаходиться під певним кутом до головних центральних площин і не проходить через лінію центрів згину, то вони, ці сили, крім навскісного згину, спричинюють в стержні й скрутке кручення. Нормальні напруження від такої складної деформації дорівнюють:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{B_\omega}{I_\omega} \omega. \quad (2.32)$$

Контрольні запитання

1. Що називають депланацією перерізу?
2. Яке кручення тонкостінного стержня є вільним, а яке скрутним? Наведіть приклади.
3. Які робочі гіпотези покладено в основу технічної теорії розрахунку тонкостінних стержнів на скруте (згинове) кручення?
4. Що таке біпара (згинально-скручувальний бімомент B)? Яка її одиниця вимірювання?
5. Що таке згиново-закрутовий бімомент (B_ω), згиново-закрутовий момент (T_ω) і яким напруженням вони відповідають?
6. Чому дорівнюють при скрутному крученні кутові (γ) деформації, лінійні (u) переміщення і відносні видовження чи скорочення (лінійні деформації – ε)?
7. Які диференціальні залежності існують на основі кута закручування (θ) між закрутовим моментом (T_k), згиново-закрутовим бімоментом (B_ω) і згиново-закрутовим моментом (T_ω)?
8. Який вигляд мають розрахункові формули для секторальних нормальних і секторальних дотичних напружень?
9. За яких умов навантаження тонкостінних стержнів виникають найпростіші форми їхньої роботи (без появи в перерізах секторальних нормальних напружень) і складні форми роботи (з появою в перерізах секторальних нормальних напружень)?

РОЗДІЛ III

СИЛОВІ ЧИННИКИ ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ ПРИ СКУТОМУ КРУЧЕННІ

3.1. Основні залежності між силловими чинниками

Внаслідок того, що згиново-закрутовий бімомент B_ω є взаємно зрівноваженою системою внутрішніх сил у перерізі, а закрутовий момент T_k і згиново-закрутовий момент T_ω є складовими повного закрутового моменту T_i (i – *internal*, внутрішній), який дорівнює за модулем скручувальному моменту T_e (e – *external*, зовнішній): $T_i = T_e$, то звідси виходить, що внутрішні силлові чинники щодо скрутого кручення не можна визначити з умов рівноваги відсіченої частини тонкостінного стержня. Ці внутрішні силлові чинники (B_ω , T_k , T_ω) знаходять шляхом дослідження деформацій, а саме шляхом визначення кута закручування θ .

Величини B_ω , T_k і T_ω пов'язані з кутом закручування θ такими диференційними залежностями:

$T_k = GI_k \theta^I$ за формулою (2.6), $B_\omega = -EI_\omega \theta^{II}$ за формулою (2.21) і $T_\omega = -EI_\omega \theta^{III}$ за формулою (2.27). Зіставляючи ці формули одну з одною, можна знайти такі залежності:

$$T_\omega = -\frac{T_k^{II}}{\alpha^2}; \quad (3.1)$$

$$B_\omega = -\frac{T_k^I}{\alpha^2}, \quad (3.2)$$

де

$$\alpha^2 = \frac{GI_k}{EI_\omega}. \quad (3.3)$$

Нагадаємо, що закрутовий момент T_e за формулою (2.16) дорівнює $T_e = T_k + T_\omega$.

У розрахунковій практиці користуються принаймні трьома способами визначення внутрішніх силових чинників у перерізах тонкостінних стержнів відкритого профілю для випадку скрутого кручення. Всі ці три способи ґрунтуються на аналізі рівнянь рівноваги (2.16).

3.2. Диференціальне рівняння деформацій

Якщо в рівнянні рівноваги (2.16) підставити вирази закрутового моменту T_k (2.6) і згиново-закрутового моменту T_ω (2.27), то дістанемо таку залежність:

$$T_e = GI_k \theta' - EI_\omega \theta'''. \quad (3.4)$$

Диференціюючи рівняння (3.4) за змінною x і, позначаючи

$$\frac{dT_e}{dx} = m, \quad (3.5)$$

матимемо диференціальне рівняння деформацій щодо скрутого кручення:

$$m = GI_k \theta'' - EI_\omega \theta''''$$

або в загально прийнятій формі:

$$\theta'''' - \alpha^2 \theta'' = -\frac{m}{EI_\omega}. \quad (3.6)$$

За допомогою рівняння (3.6) складним математичним шляхом визначають кут θ , а потім внутрішні силкові чинники T_k , T_ω і B_ω за відповідними формулами (2.6), (2.27) і (2.21).

Диференціальне рівняння (3.6) є універсальним рівнянням, оскільки за його допомогою можна визначати як деформації, так і внутрішні сили чинники (T_k , T_ω і B_ω).

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (3.6) має такий вигляд:

$$\theta = C_1 + C_2x + C_3sh\alpha x + C_4ch\alpha x + \theta_0, \quad (3.7)$$

де θ_0 – який-небудь частинний розв'язок рівняння (3.6), що підбирається залежно від типу навантаження.

Довільні константи C_1, C_2, C_3 і C_4 визначають з умов закріплення кінців стержня з урахуванням залежностей для T_k (2.6), B_ω (2.21) і T_ω (2.27).

Наведемо декілька розв'язків для рівняння (3.6), що запозичені з літератури (рис.3.1). На рисунках 3.1 розмір e – відстань від центральної осі стержня до лінії центрів згину.

Сукупність кутів закручування θ вздовж осі стержня в межах пружних деформацій називають пружною лінією кутів закручування.

Рівняння пружної лінії кутів закручування θ тонкостінних стержнів від різних закручувальних навантажень для деяких опорних закріплень, що заперечують обертання стержня навколо повздовжньої осі (рис. 3.1), показано нижче [41, с. 445-446].

До схеми рис. 3.1, а:

$$\theta = \frac{Fe}{\alpha^3 EI_\omega ch\alpha l} [\alpha x ch\alpha l - sh\alpha l + sh\alpha(l-x)]. \quad (3.8)$$

До схеми рис. 3.1, б:

$$\theta = \frac{qe}{\alpha^4 EI_\omega ch\alpha l} \left[\alpha^2 \left(l - \frac{x}{2} \right) x ch\alpha l + ch\alpha x - 1 - \alpha l sh\alpha l + \alpha l sh\alpha(l-x) \right]. \quad (3.9)$$

До схеми рис. 3.1, в (для першого відрізка балки – 1):

$$\theta_1 = \frac{Fe}{2\alpha^3 EI_\omega} \left(\alpha x - \frac{sh\alpha x}{ch\frac{\alpha l}{2}} \right). \quad (3.10)$$

До схеми рис. 3.1, з:

$$\theta = \frac{qe}{\alpha^4 EI_\omega} \left[\frac{\alpha^2 x(l-x)}{2} + \frac{ch\alpha\left(\frac{l}{2}-x\right)}{ch\frac{\alpha l}{2}} - 1 \right]. \quad (3.11)$$

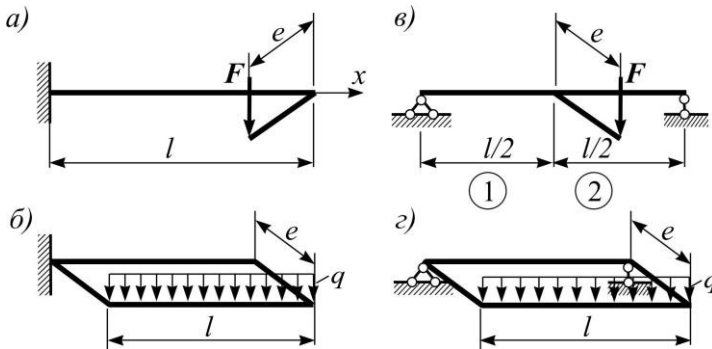


Рис. 3.1. Зосереджене (а, в) і рівномірно розподілене навантаження (б, з) тонкостінних стержнів

Після визначення кута θ підраховують закрутовий момент T_k від чистого кручення за формулою (2.6), згиново-закрутовий момент T_ω – за формулою (2.27) і згиново-закрутовий бімомент B_ω – за формулою (2.21).

3.3. Диференціальне рівняння бімоментів

Для випадку, коли необхідно визначити лише силкові чинники, що виникають у перерізах тонкостінного стержня відкритого профілю, зазвичай використовують інші способи, зокрема спосіб розв'язування диференціального рівняння бімоментів.

Велика кількість сталих інтегрування, що треба знаходити за допомогою граничних умов балки, змушує замість інтегрування диференціального рівняння (3.6) відшукувати інші, більш прості способи визначення зусиль для скрутого кручення. Одним із таких способів є розв'язування диференціального рівняння бімоментів.

Підставляючи в рівняння (3.6) значення бімоменту B_ω за формулою (2.21) $B_\omega = -EI_\omega \theta^{II}$, а також $\theta^{IV} = -\frac{B_\omega^{II}}{EI_\omega}$, матимемо таке диференціальне рівняння бімоментів:

$$B_\omega^{II} - \alpha^2 B_\omega = m. \quad (3.12)$$

Рівняння (3.12) дає змогу визначити більш простим способом, ніж рівняння (3.6), згиново-закрутовий бімомент B_ω , а потім за формулою (2.26) $T_\omega = \frac{dB_\omega}{dx}$ підрахувати і згиново-закрутовий момент T_ω .

Закрутовий момент T_k на підставі вже відомих значень скручувального моменту T_e і згиново-закрутового моменту T_ω визначають із рівняння рівноваги (2.16):

$$T_k = T_e - T_\omega. \quad (3.13)$$

Загальний розв'язок рівняння (3.12) має таку форму:

$$B_\omega = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x + B_c, \quad (3.14)$$

де B_c – який-небудь частинний розв’язок рівняння (3.12), що підбирають зважаючи на тип навантаження.

Наведемо розв’язки бімоментів B_ω , що запозичені з літератури [7, с.552–553] для балок, зображених на рис. 3.1.

До схеми рис. 3.1, а:

$$B_\omega = -\frac{Fesh\alpha(l-x)}{\alpha ch\alpha l}, \quad \max B_\omega = -Fe \frac{th\alpha l}{\alpha} \text{ при } x=0. \quad (3.15)$$

До схеми рис. 3.1, б:

$$B_\omega = -\frac{qe}{\alpha^2 ch\alpha l} [\alpha lsh\alpha(l-x) - ch\alpha l + ch\alpha x],$$

при $x=0$:

$$\max B_\omega = \frac{qe(\alpha lsh\alpha l - ch\alpha l + 1)}{\alpha^2 ch\alpha l}. \quad (3.16)$$

До схеми рис. 3.1, в (для першого відрізка балки – 1):

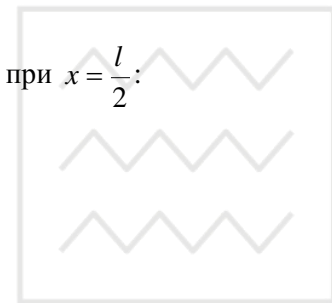
$$B_{\omega 1} = \frac{Fe}{2\alpha} \cdot \frac{sh\alpha x}{ch \frac{\alpha l}{2}},$$

при $x = \frac{l}{2}$:

$$\max B_{\omega 1} = \frac{Fe}{2\alpha} th\alpha \frac{l}{2}. \quad (3.17)$$

До схеми рис. 3.1, з:

$$B_{\omega} = \frac{qe}{\alpha^2} \left[1 - \frac{ch\alpha\left(\frac{l}{2} - x\right)}{ch\frac{\alpha l}{2}} \right],$$



$$\max B_{\omega} = qe \left(\frac{ch\frac{\alpha l}{2} - 1}{\alpha^2 ch\frac{\alpha l}{2}} \right). \quad (3.18)$$

Після визначення згиново-закрутового бімоменту B_{ω} визначають за формулою (2.26) $T_{\omega} = \frac{dB_{\omega}}{dx}$ - згиново-закрутовий момент і потім за формулою (2.16) підраховують закрутовий момент від чистого кручення $T_k = T_e - T_{\omega}$.

3.4. Диференціальне рівняння закрутових моментів

Певним недоліком рівняння (3.12) є те, що для перевірки правильності його розв'язку не лишається в активі жодного додаткового рівняння. Помилка з будь-якої причини у визначенні моменту T_{ω} із рівняння (3.12) автоматично веде до помилки значення моменту T_k , оскільки останній визначають у цьому разі із рівняння (3.13). Саме цей факт і спонукає до пошуків іншого, більш раціонального способу визначення внутрішніх силових чинників щодо скрутого кручення тонкостінних стержнів відкритого профілю.

Спосіб визначення внутрішніх силових чинників у перерізах тонкостінного стержня за допомогою диференціального рівняння закрутових моментів є

найбільш раціональним із відомих способів. Він також впливає з розгляду рівняння рівноваги (2.16): $T_e = T_k + T_\omega$.

Визначимо згиново-закрутовий момент T_ω через закрутовий момент T_k за формулою (3.1): $T_\omega = -\frac{T_k''}{\alpha^2}$ і підставимо в рівняння рівноваги (2.16):

$$T_e = T_k - \frac{T_k''}{\alpha^2}.$$

Звідси після деяких спрощень дістанемо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$T_k'' - \alpha^2 T_k = -\alpha^2 T_e. \quad (3.19)$$

Загальний розв'язок рівняння (3.19) має такий вигляд:

$$T_k = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x + T_0, \quad (3.20)$$

де T_0 – який-небудь частинний розв'язок рівняння (3.19), що підбирається зважаючи на тип навантаження.

Наведемо розв'язки, запозичені з літератури [7, с.552–553], для закрутового моменту T_k і для згиново-закрутового моменту T_ω для балок, зображених на рис. 3.1.

До схеми рис. 3.1, а:

$$T_k = \frac{Fe[\operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{ch} \alpha(l-x)]}{\operatorname{ch} \alpha l}, \quad (3.21)$$

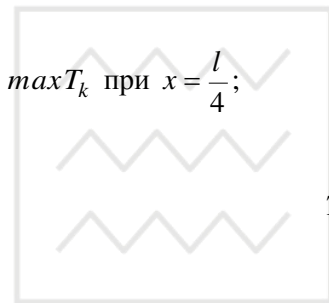
$\max T_k$ при $x=l$;

$$T_\omega = \frac{Fe \operatorname{ch} \alpha(l-x)}{\operatorname{ch} \alpha l}, \quad (3.22)$$

$\max T_{\omega}$ при $x = 0$.

До схеми рис. 3.1, б:

$$T_k = \frac{qe[\alpha(l-x)ch\alpha l + sh\alpha x - \alpha lch\alpha(l-x)]}{ch\alpha l}, \quad (3.23)$$



$$T_{\omega} = \frac{qe[\alpha lch\alpha(l-x) - sh\alpha x]}{\alpha ch\alpha l}, \quad (3.24)$$

$\max T_{\omega}$ при $x = 0$.

До схеми рис. 3.1, в (для першого відрізка балки – 1):

$$T_{k1} = \frac{Fe}{2} \left(1 - \frac{ch\alpha x}{ch\frac{\alpha l}{2}} \right), \quad (3.25)$$

$\max T_{k1}$ при $x = 0$;

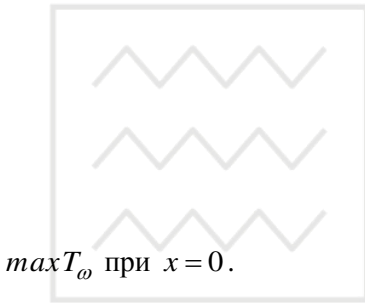
$$T_{\omega 1} = \frac{Fech\alpha x}{2ch\frac{\alpha l}{2}}, \quad (3.26)$$

$\max T_{\omega 1}$ при $x = \frac{l}{2}$.

До схеми рис. 3.1, з:

$$T_k = \frac{qe}{\alpha} \left[\alpha \left(\frac{l}{2} - x \right) - \frac{\operatorname{sh} \alpha \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2}} \right], \quad (3.27)$$

$\max T_k$ при $x = 0$;



$$T_\omega = \frac{qe}{\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2}}, \quad (3.28)$$

Отже, після визначення закрутового моменту T_k від чистого кручення підраховують за формулою (3.2) згиново-закрутовий бімомент B_ω , а потім за формулою (3.1) знаходять згиново-закрутовий момент T_ω . Для перевірки правильності підрахування моментів T_k і T_ω використовують рівняння рівноваги (2.16).

3.5. Крайові умови для тонкостінних балок

Для користування розрахунковими формулами (3.14) і (3.20) треба спочатку визначити сталі інтегрування з крайових умов балки. Останні залежать від характеру опорних закріплень або їхньої відсутності у балок, що розглядаються (рис. 3.1).

1. Для схеми балок на рис. 3.1, а, б, коли лівий кінець балки затиснутий, а правий вільний від закріплень, маємо: при $x = 0$ $T_k = 0$, тому що опорний згиново-закрутовий момент дорівнює сумі всіх закручувальних моментів, прикладених до балки: $T_\omega = T_e$. При $x = l$ $B_\omega = 0$, оскільки ніщо не перешкоджає депланації правого кінця балки.

2. Для схеми балок на рис. 3.1, ν , z опори допускають вільну депланачію кінцевих перерізів і перешкоджають їхньому закручуванню. У цьому випадку при $x=0$ $B_\omega=0$ і при $x=l$ $B_\omega=0$.

3. Для стержня, затисненого двома кінцями (рис. 3.2), реакції якого дорівнюють $T_A = bT_e/l$ і $T_B = aT_e/l$ маємо такі межові умови: при $x=0$ $T_\omega = T_A$; при $x=l$ $T_\omega = T_B$.

4. Для стержня, один кінець якого затиснений, а другий шарнірно обертий (рис. 3.3), маємо: при $x=0$ $T_\omega = T_A$, а при $x=l$ $B_\omega=0$.

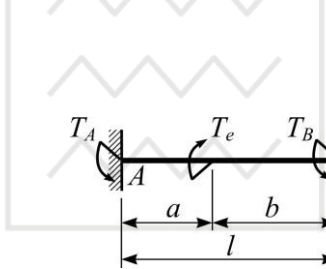


Рис. 3.2. Тонкостінна балка з двома опорними моментами

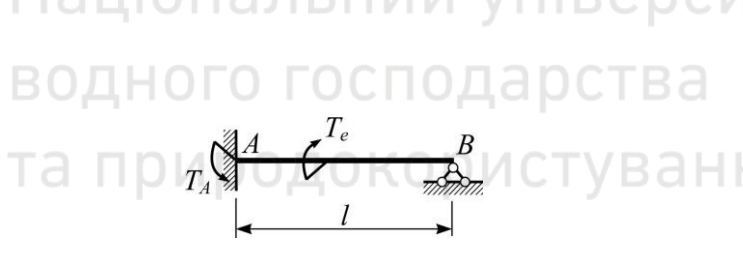


Рис. 3.3. Тонкостінна балка з одним опорним моментом

Приклад 3.1. Користуючись розв'язком диференціального рівняння закрутових моментів (3.20), отримати частинний розв'язок T_0 , обчислити сталі інтегрування C_1 і C_2 . Визначити силкові чинники T_k , B_ω і T_ω та побудувати їх епюри для балки (рис. 3.4, а), якщо відомі такі величини: зосереджена сила $F=1$ кН; відстань від прикладеної сили F до лінії центрів згину $e=0,1$ м; довжина балки $l=2,5$ м; пружна згиново-закрутова характеристика $\alpha=0,4$ м⁻¹.

Розв'язок. Частинний розв'язок T_0 рівняння (3.19) є T_e , оскільки закрутовий момент $T_e = Fl = const$ і він повністю задовольняє рівняння (3.19). У цьому випадку розв'язок цього рівняння (3.20) набирає такого вигляду при $T_0 = T_e$:

$$T_k = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x + T_e. \quad (a)$$

Визначасмо сталі інтегрування C_1 і C_2 із крайових умов:

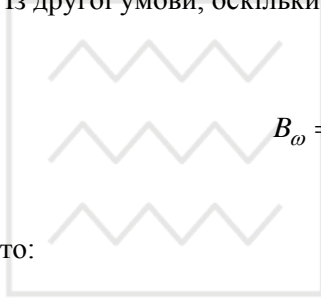
1) при $x=0$ $T_k = 0$;

2) при $x=l$ $B_\omega = 0$.

Із першої умови випливає:

$$C_2 = -T_e. \quad (б)$$

Із другої умови, оскільки $B_\omega = -\frac{T_k^l}{\alpha^2}$ (3.2), маємо:



тобто:

$$B_\omega = -\frac{1}{\alpha^2}(C_1 \alpha ch \alpha x + C_2 \alpha sh \alpha x),$$

$$B_\omega = 0 = -\frac{1}{\alpha^2}(C_1 \alpha ch \alpha l + T_e \alpha sh \alpha x),$$

звідки:

$$C_1 = \frac{T_e sh \alpha l}{ch \alpha l}. \quad (в)$$

Таким чином, враховуючи значення констант C_1 і C_2 за формулами (б) і (в), для закрутового моменту T_k маємо:

$$T_k = T_e \left(\frac{sh \alpha l}{ch \alpha l} sh \alpha x - ch \alpha x + 1 \right) \quad (г)$$

або в кінцевому варіанті:

$$T_k = T_e \frac{[ch \alpha l - ch \alpha (l - x)]}{ch \alpha l}. \quad (д)$$

Із рівності (г), маючи на увазі, що за формулами (3.2) $B_{\omega} = -T_k^I / \alpha^2$, дістанемо значення згиново-закрутового бімоменту:

$$B_{\omega} = -\frac{T_e}{\alpha} \left(\frac{sh \alpha l}{ch \alpha l} ch \alpha x - sh \alpha x \right) \quad (e)$$

або після спрощень:

$$B_{\omega} = -\frac{T_e}{\alpha} \left[\frac{sh \alpha (l-x)}{ch \alpha l} \right]. \quad (e)$$

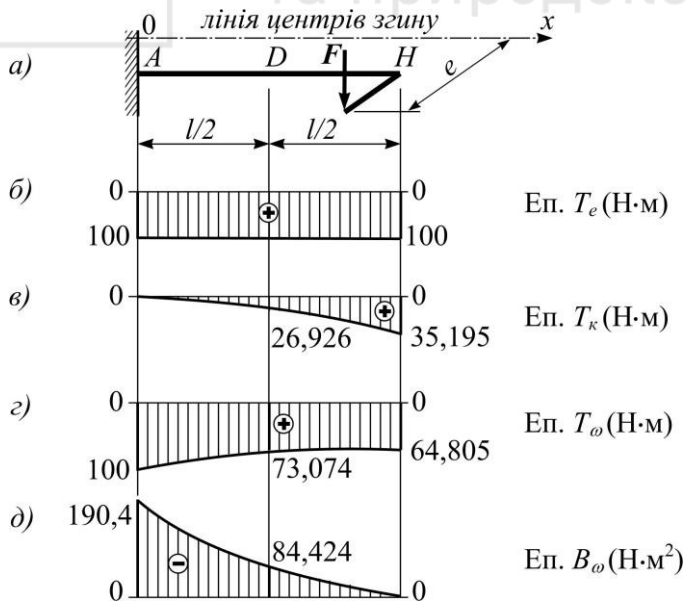


Рис. 3.4. Епюра силових чинників (б, в, з, д) для балки (а)

Беручи до уваги залежність за формулою (2.26) $T_{\omega} = dB_{\omega}/dx$, запишемо вираз для згиново-закрутового моменту T_{ω} згідно з формулою (е):

$$T_{\omega} = \frac{dB_{\omega}}{dx} = -\frac{T_e}{\alpha} \left(\frac{sh \alpha l}{ch \alpha l} sh \alpha x - ch \alpha x \right). \quad (ж)$$

Спростивши вираз (ж), матимемо:

$$T_{\omega} = T_e \frac{ch \alpha (l - x)}{ch \alpha l}. \quad (і)$$

Для перевірки правильності здобутих значень T_{ω} і T_k скористаємося рівнянням (2.16):

$$T_e = T_k + T_{\omega},$$

підставивши сюди значення T_{ω} за формулою (і) і значення T_k за формулою (д). Перевірка дає тотожність $T_e \equiv T_e$, що свідчить про правильність і точність проведеного розв'язку диференціального рівняння (3.19).

Епюри зовнішніх і внутрішніх силових чинників T_e , T_k , B_{ω} і T_{ω} згідно з заданими величинами F , e , l , α зображено на рис. 3.4, б, в, г, д.

Таким чином диференціальне рівняння (3.19) дає змогу не тільки більш раціональним способом знайти внутрішні силові чинники T_k , T_{ω} і B_{ω} в перерізах тонкостінних стержнів, а й додатково перевірити правильність здобутих величин за допомогою рівняння рівноваги (2.16).

3.6. Дія зосередженої сили перпендикулярно до перерізу

Досвід свідчить і теорія обґрунтовує, що поява депланації перерізів тонкостінних стержнів відкритого профілю має місце не лише внаслідок дії закрутових моментів, а й через дію стискаючо-розтягуючих сил, що перпендикулярні до перерізу та секторальні координати їхніх точок прикладання не дорівнюють нулю.

Якщо, наприклад, розтягуючу силу прикладено в крайніх перерізах

швелерного стержня (рис. 3.5), то в цих перерізах створюються біпари, що дорівнюють згідно з формулою (2.9): $B = F\omega_F$ і які й спричиняють депланасію перерізів всього стержня.

Визначимо, які зусилля виникають у перерізах під дією позакентрово прикладеної сили F . Оскільки до стержня або до балки, що лежить на шарнірних опорах, не прикладено закрутових моментів, тобто $T_e = 0$ у формулі (2.16), то тоді рівняння рівноваги закрутових моментів (3.19) набирає такого вигляду:

$$T_k'' - \alpha^2 T_k = 0. \quad (3.29)$$

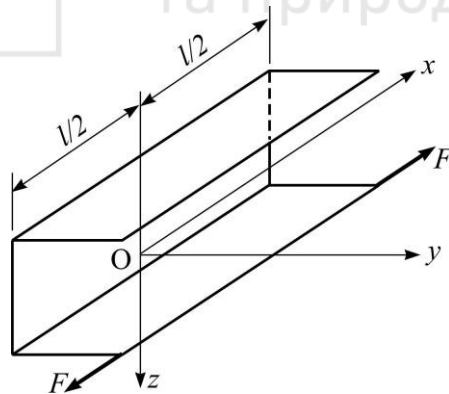


Рис. 3.5. Схема позакентрового розтягу стержня

Розв'язок цього рівняння:

$$T_k = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x. \quad (3.30)$$

Визначаємо сталі інтегрування C_1 і C_2 . В силу симетрії умов задачі (рис. 3.5) початок координат розміщуємо в середині стержня і тоді крайові умови матимуть такі значення:

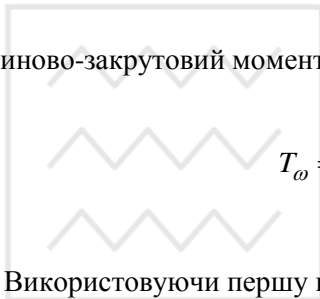
1) при $x = 0$ $T_\omega = 0$ (внаслідок симетрії навантаження);

2) при $x = \frac{l}{2}$ $B_\omega = B = F\omega_F$.

Для розв'язку (3.30) згиново-закрутовий бімомент B_ω дорівнює:

$$B_\omega = -\frac{T_k^l}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}(C_1 \operatorname{ch} \alpha x + C_2 \operatorname{sh} \alpha x). \quad (3.31)$$

а згиново-закрутовий момент:



$$T_\omega = \frac{dB_\omega}{dx} = -(C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x). \quad (3.32)$$

Використовуючи першу крайову умову, маємо:

$$0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1$$

звідки $C_2 = 0$ і тоді рівняння (3.30) матиме вигляд:

$$T_k = C_1 \operatorname{sh} \alpha x,$$

а рівняння (3.31) – таку форму:

$$B_\omega = -\frac{1}{\alpha} C_1 \operatorname{ch} \alpha x.$$

Використовуючи другу крайову умову, дістанемо:

$$B_\omega = -\frac{C_1 \operatorname{ch} \alpha \frac{l}{2}}{\alpha} = F\omega_F.$$

Звідси

$$C_1 = -\frac{F\omega_F\alpha}{ch\alpha\frac{l}{2}} = -\frac{B\alpha}{ch\alpha\frac{l}{2}}.$$

Враховуючи значення сталих інтегрування C_1 і C_2 , остаточно матимемо:



$$T_k = -\frac{F\omega_F\alpha \cdot sh\alpha x}{ch\alpha\frac{l}{2}} = -\frac{B\alpha sh\alpha x}{ch\alpha\frac{l}{2}}; \quad (3.33)$$

$$B_\omega = -\frac{F\omega_F\alpha \cdot ch\alpha x}{ch\alpha\frac{l}{2}} = -\frac{B\alpha ch\alpha x}{ch\alpha\frac{l}{2}}; \quad (3.34)$$

$$T_\omega = \frac{F\omega_F\alpha \cdot sh\alpha x}{ch\alpha\frac{l}{2}} = \frac{B\alpha sh\alpha x}{ch\alpha\frac{l}{2}}. \quad (3.35)$$

Порівнюючи формули (3.33) і (3.35), констатуємо, що $T_k = -T_\omega$, що, власне, для розглядуваного випадку ($T_e = 0$) безпосередньо впливає із рівняння рівноваги (2.16): $T_k + T_\omega = 0$.

Приклад 3.2. Тонкостінний стержень швелерного перерізу, розміри якого наведено на рис. 1.24, а, зазнає позацентрового розтягу силами $F = 18$ кН, що прикладені по краю верхньої полиці (в точках 4 на рис. 1.24, б). Визначити максимальні нормальні та дотичні напруження в перерізі, якщо відомо: площа перерізу $A = 24,91 \text{ см}^2$; відстань від серединної лінії стінки до центра ваги O (рис. 1.23, а) $y_0 = 2,33$ см; головні осьові моменти $I_y = 1661,66 \text{ см}^4$ і $I_z = 164,82 \text{ см}^4$; секторальна координата точки прикладання сили F : $\omega_F = -43,49 \text{ см}^2$; довжина стержня $l = 200$ см; секторальний момент інерції $I_\omega = 134548 \text{ см}^6$; модуль пружності $E = 200$ ГПа; модуль зсуву $G = 80$ ГПа.

Розв'язок. Визначимо момент інерції I_k при вільному крученні, а також пружну згиново-закрутову характеристику α .

Підрахуємо момент інерції I_k за формулою (2.8), де для швелера коефіцієнт форми перерізу $\eta = 1,12$:

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{\eta}{3} \sum_{i=1}^n b_i \delta_i^3 = \frac{1,12}{3} (h \delta_c^3 + 2b_n \delta_n^3) = \\ &= \frac{1,12}{3} (20 \cdot 0,52^3 + 2 \cdot 7,48 \cdot 0,97^3) = 6,15 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Параметр α підраховуємо за формулою (3.3):

$$\alpha = \sqrt{\frac{GI_K}{EI_\omega}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 10^9 \cdot 6,15 \cdot 10^{-8}}{200 \cdot 10^9 \cdot 134548 \cdot 10^{-12}}} = 1,3522 \text{ м}^{-1}.$$

Розрахунок нормальних напружень здійснюємо за формулою (2.30):

$$\sigma = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{z_F z}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_z^2} \right) + \frac{B_\omega}{I_\omega} \omega.$$

Повздовжня сила $N = F = 18 \text{ кН} = 18000 \text{ Н}$; площа перерізу $A = 24,91 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; координати точки прикладання сили F (рис. 1.24, а):

$$z_F = \frac{h}{2} - \frac{\delta_n}{2} = \frac{20}{2} - \frac{0,97}{2} = 9,511 \text{ см};$$

$$y_F = b_n - y_0 = 7,74 - 2,33 = 5,41 \text{ см}.$$

Найбільші нормальні напруження від дії позацентрної сили будуть у найвіддаленіших точках контуру: $z_3 = 0,09511 \text{ м}$; $y_3 = 0,0541 \text{ м}$; $z_4 = -0,09511 \text{ м}$; $y_4 = 0,0541 \text{ м}$.

Квадрати головних радіусів дорівнюють:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{166166}{24,91} = 66,7 \text{ см}^2 = 66,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{164,82}{24,91} = 6,6 \text{ см}^2 = 6,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Згиново-закрутовий бімомент згідно з формулою (2.9) дорівнює $B = B_\omega = F\omega_F = 18 \cdot 10^3 (-43,49) \cdot 10^{-4} = -78,28 \text{ Нм}^2$; секторальні координати $\omega_{F3} = 43,49 \text{ см}^2$, $\omega_{F4} = -43,49 \text{ см}^2$. Секторальний момент інерції $I_\omega = 134548 \text{ см}^6 = 134548 \cdot 10^{-12} \text{ м}^6$.

Нормальні напруження від позацентрового розтягу складають в точках 3 і 4 (рис. 1.24, б):

$$\begin{aligned} \sigma_{F_3} &= \frac{N}{A} \left(1 + \frac{z_F z}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_z^2} \right) = \\ &= \frac{18 \cdot 10^3}{24,91 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{0,09511 \cdot 0,09511}{66,7 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,0541 \cdot 0,0541}{6,6 \cdot 10^{-4}} \right) = \\ &= 49,07 \cdot 10^6 \text{ Па} \approx 49,1 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{F_4} &= \frac{18 \cdot 10^3}{24,91 \cdot 10^{-4}} \left(1 - \frac{0,09511 \cdot 0,09511}{66,7 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,0541 \cdot 0,0541}{6,6 \cdot 10^{-4}} \right) = \\ &= 29,47 \cdot 10^6 \text{ Па} \approx 29,5 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Нормальні напруження від скрутого кручення дорівнюють:

$$\sigma_{\omega_3} = \frac{B_\omega \omega}{I_\omega} = \frac{-78,28 \cdot 43,49 \cdot 10^{-4}}{134548 \cdot 10^{-12}} = -28,56 \cdot 10^6 \text{ Па} \approx -28,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\omega_4} = \frac{-78,28 \cdot (-43,49 \cdot 10^{-4})}{134548 \cdot 10^{-12}} = 28,56 \cdot 10^6 \text{ Па} \approx 28,6 \text{ МПа}.$$

Таким чином, сумарні нормальні напруження в точці 3 дорівнюють:

$$\sigma_3 = \sigma_{F_3} + \sigma_{\omega_3} = 49,1 - 28,6 = 20,5 \text{ МПа},$$

а в точці 4:

$$\sigma_4 = \sigma_{F_4} + \sigma_{\omega_4} = 29,5 + 28,6 = 58,1 \text{ МПа}.$$

Внаслідок депланції перерізів сумарні напруження збільшено на 18,3% порівняно з напруженнями від простого позacentрового розтягу.

Розрахунок секторальних дотичних напружень проводимо за формулою (2.28):

$$\tau_{\omega} = \frac{T_{\omega} S_{\omega}^B}{I_{\omega} \delta},$$

а дотичні - від чистого кручення за формулою (2.5):

$$\tau_k = \frac{T_k \delta}{I_k}.$$

Секторальні дотичні напруження досягають максимальних значень у тих точках профілю, де секторальний статичний момент має максимальне значення, тобто в точках, де секторальні координати дорівнюють нулю: $\omega = 0$. Це будуть точки 2 і 5 на рис. 1.24, б. Для цих точок секторальний статичний момент за формулою (1.3) дорівнює:

$$S_{\omega} = \sum_{i=1}^n \delta_i \Omega_i = 0,5 \cdot 0,97(-43,49)(7,74 - 3,17) = -96,39 \text{ см}^4 = -96,39 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Згиново-закрутовий момент T_{ω} згідно з формулою (3.35) дорівнює для $x = \frac{l}{2}$:

$$\begin{aligned}
 T_{\omega} &= \frac{F \omega_F \alpha \operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha \frac{l}{2}} \Big|_{x=\frac{l}{2}=\frac{2}{2}=1} = F \omega_F \alpha \operatorname{th} \alpha \frac{l}{2} = \\
 &= 18 \cdot 10^3 (-43,49 \cdot 10^{-4}) 1,3522 \cdot \operatorname{th} 1,3522 \cdot 1 = \\
 &= -18 \cdot 10^3 \cdot 43,49 \cdot 10^{-4} \cdot 1,3522 \cdot 0,8741 = -95,53 \text{ Н}\cdot\text{м}.
 \end{aligned}$$

Секторальні дотичні напруження дорівнюють:

$$\tau_{\omega} = \frac{-95,53 (-96,39 \cdot 10^{-8})}{134548 \cdot 10^{-12} \cdot 0,97 \cdot 10^{-2}} = 0,7055 \cdot 10^6 \text{ Па} \approx 0,71 \text{ МПа}.$$

Момент чистого кручення $T_k = -T_{\omega}$ згідно з формулою (2.16), для $T_e = 0$, тобто $T_k = 95,53 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Дотичні напруження τ_k від чистого кручення дорівнюють:

$$\tau_k = \frac{95,53 \cdot 0,97 \cdot 10^{-2}}{6,15 \cdot 10^{-8}} = 15,07 \cdot 10^6 \text{ Па} \approx 15,1 \text{ МПа}.$$

Таким чином, у цьому прикладі, як і в багатьох інших практичних задачах, згиново-закрутові дотичні напруження τ_{ω} дуже малі порівняно з дотичними напруженнями чистого кручення τ_k .

У цілому результат цього розрахунку свідчить, що основне значення для перевірки міцності тонкостінних стержнів мають нормальні напруження.

3.7. Трансформація ядра перерізу в ядрові відрізки для тонкостінних стержнів відкритого профілю в умовах скрутого кручення

Ядро перерізу – це зона навколо центру ваги перерізу, прикладання стискаючої (або розтягуючої) сили в якій не спричиняє появи в жодній точці

всього перерізу нормальних напружень різних знаків. Таким чином, щоб в перерізі не виникали напруження різних знаків, треба стискаючі (або розтягуючі) сили спрямовувати паралельно до центральної осі стержня в зоні ядра перерізу.

Теорія ядра перерізу стосується масивних стержнів щодо позacentрового їхнього навантаження. Але здебільшого цю теорію поширюють і на роботу тонкостінних стержнів без належного урахування особливостей їхніх конструктивних форм. Для визначення контуру ядра перерізу використовують зазвичай такі розрахункові формули:

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}, \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_F}, \quad (3.36)$$

де a_y , a_z – відрізки, що відсікаються нейтральною лінією на головних центральних осях y і z ; i_z^2 , i_y^2 – квадрати радіусів інерції площі перерізу; z_F , y_F – координати контурних точок прикладання сили.

Для урахування значень нормальних напружень при сумісній дії позacentрового стиску (розтягу) і скutoго кручення маємо залежність (2.30)

$$\sigma = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{z_F z}{i_z^2} + \frac{y_F y}{i_y^2} \right) + \frac{B_\omega}{I_\omega} \omega.$$

Аналізуючи цю залежність, можна дійти таких висновків. Ядро перерізу, що побудовано за допомогою формул (3.36) для тонкостінних стержнів відкритого профілю, у випадку скutoго кручення відповідає неповністю тому призначенню, що йому надається теорією позacentрового стиску (розтягу) масивних стержнів. Це означає, що сила, яку прикладено в зоні ядра перерізу не завжди викликає в усьому перерізі напруження одного знаку. Навіть навпаки. Якщо секторальна координата точки прикладання сили, що розташована в ядрі перерізу, не дорівнює нулю, то, як це впливає з формули (2.30), напруження в перерізі може бути різних знаків за рахунок останнього доданку в цій формулі.

Для перерізу тонкостінного стержня відкритого профілю, який стиснутий (розтягнутий) позацентровою силою, обов'язковою умовою того, що напруження в усьому перерізі будуть одного знаку ϵ для ядра перерізу рівність нулю секторальної координати ω_F точки прикладання сили:

$$\omega_F = 0. \quad (3.37)$$

За цієї умови ядро перерізу для тонкостінних стержнів відкритого профілю трансформується, перетворюється в деякі лінії – ядрові відрізки (рис. 3.6), що розташовані в зоні звичайного ядра, яке будується за формулами (3.36).

Ядрові відрізки в перерізі тонкостінного стержня відкритого профілю відіграють таку ж саму роль, як і ядро перерізу для масивних стержнів: сили, що прикладені в точках ядрових відрізків, не спричиняють появи нормальних напружень різних знаків у всьому перерізі.

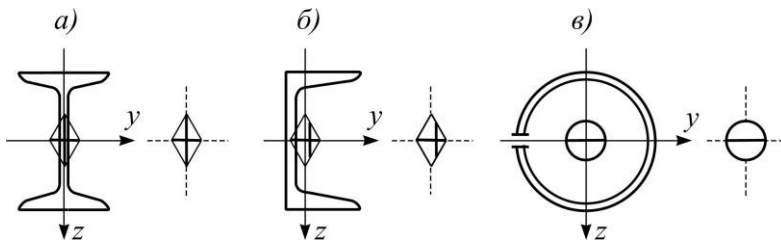


Рис. 3.6. Ядрові відрізки для двотавра (а), швелера (б) і розрізаного кільця (в)

Звичайно ядро перерізу, яке будують для перерізів масивних стержнів за формулами (3.36), для перерізів тонкостінних стержнів відкритого профілю трансформується в лінії – ядрові відрізки, що лежать у зоні звичайного ядра перерізу.

Відшуковуючи у перерізах тонкостінних стержнів точки, в яких слід прикладати позацентрові сили, щоб вони – ці сили – не викликали появи в перерізах нормальних напружень різних знаків, треба спочатку визначити місце розташування ядрових відрізків.

Таким чином, ядро перерізу, що будують за звичайними формулами (3.36), для тонкостінних стержнів відкритого профілю не функціонує повністю за своїм призначенням, але відіграє допоміжну роль для пошуку ядрових відрізків.

Можлива кількість ядрових відрізків залежить від форми профілю. Для двотавра і швелера маємо два ядрових відрізки (рис. 3.6, *a*, *б*) для розрізаного тонкого кільця – один ядровий відрізок (рис. 3.6, *в*), для зетового профілю – жодного ядрового відрізка, лише одну «ядрову» точку, а саме – центр ваги перерізу.

Приклад 3.3. Визначити для швелерного перерізу розміри і положення ядрових відрізків. Розміри швелера наведено на рис. 1.24, *a*. Квадрати радіусів інерції відомі:

$$i_z^2 = 6,6 \text{ см}^2, \quad i_y^2 = 66,7 \text{ см}^2.$$

Припускається, що гнучкість стержня забезпечує його стійкість.

Розв'язок. Будуємо ядро перерізу, використовуючи формули (3.36). Умовно прикладаємо сили по контуру швелера (рис. 1.24) в його точках $O_{ш}$, 1, 3 – для симетричної частини перерізу, визначаємо координати цих точок, а потім відмічаємо відрізки a_{yi} , a_{zi} які нульові лінії відсікають на координатних осях.

Визначаємо координати точок прикладання сил для верхньої, симетричної частини профілю (рис. 3.7, *a*):

$$z_0 = 0, \quad y_0 = -2,33 \text{ см};$$

$$z_1 = -9,515 \text{ см}, \quad y_1 = -2,33 \text{ см};$$

$$z_3 = -9,515 \text{ см}, \quad y_3 = 5,41 \text{ см}.$$

Відрізки, що відсікають на координатних осях нульові лінії:

$$a_{y_0} = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{6,6}{-2,33} = 2,83 \text{ см};$$

$$a_{z_0} = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{66,7}{0} = -\infty;$$

$$a_{y_1} = -\frac{i_z^2}{y_1} = -\frac{6,6}{-2,33} = 2,83 \text{ см};$$

$$a_{z_1} = -\frac{i_y^2}{z_1} = -\frac{66,7}{-9,515} = 7,01 \text{ см};$$

$$a_{y_3} = -\frac{i_z^2}{y_3} = -\frac{6,6}{5,41} = -1,22 \text{ см};$$

$$a_{z_3} = -\frac{i_y^2}{z_3} = -\frac{66,7}{-9,515} = 7,01 \text{ см}.$$



Будуємо ядро перерізу, використовуючи симетрію профілю відносно осі Oy .

Проводимо нульові лінії, що обмежують ядро перерізу для нижньої частини профілю: лінію $O_{ш}-O_{ш}$ ($a_{y_0} = 2,83 \text{ см}; a_{z_0} = \infty$); лінію 1 – 1 ($a_{y_1} = 2,83 \text{ см}; a_{z_1} = 7,01 \text{ см}$); лінію 3 – 3 ($a_{y_3} = -1,22 \text{ см}; a_{z_3} = 7,01 \text{ см}$). Верхню частину ядра перерізу добудовуємо як симетричну частину (рис. 3.7, а)

Визначаємо ядрові відрізки. Останній доданок у формулі (2.30) вимагає, щоб для всіх точок ядрового відрізка їхні головні секторальні координати дорівнювали нулю. Для цього використаємо епюру головних секторальних координат (рис. 1.24, б). Горизонтальну частину ядрового відрізка $m-m$ наочно видно з креслення (рис. 1.24, а): він, цей відрізок $m-m$, є продовженням нульової лінії A_oM_o в межах ядра перерізу. Вертикальна частина ядрового відрізка $n-n$ лежить на нульовій лінії 2-5 (рис. 1.24, б) в межах ядра перерізу (рис. 3.7, б).

Визначаємо довжини ядрових відрізків. Очевидно, що довжина l_{m-m}

ядрового відрізка $m - m$ дорівнює:

$$l_{m-m} = 1,22 + 2,83 = 4,05 \text{ см.}$$

Довжину l_{n-n} відрізка $n - n$ визначаємо з подібності трикутників (рис. 3.7, б) $\Delta(k - k - m)$ і $\Delta(n - n - m)$:

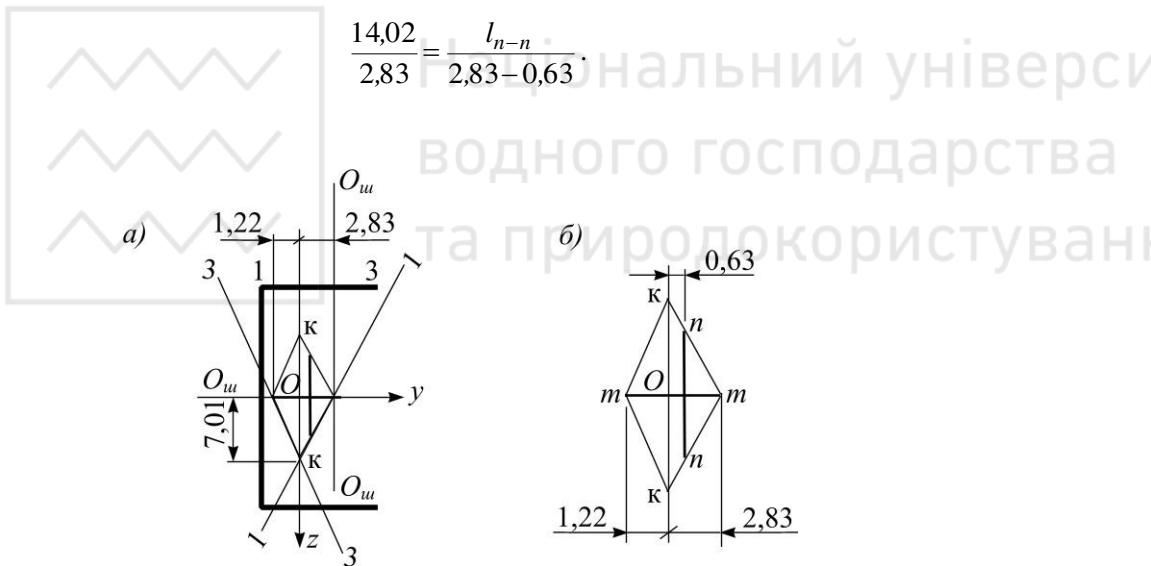


Рис. 3.7. Ядро перерізу (а) з ядровими відрізками (б) для швелера (а)

Звідки довжина l_{n-n} відрізка $n - n$ дорівнює:

$$l_{n-n} = 10,89 \text{ см.}$$

Контрольні запитання

1. Чи можна знайти згиново-закрутовий бімомент (B_{ω}) і згиново-закрутовий момент (T_{ω}) з умов рівноваги стержня?

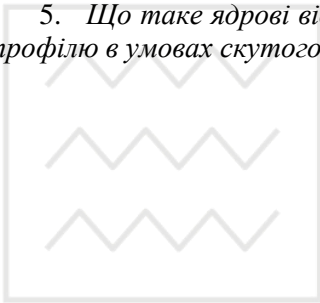
Розділ III. Силкові чинники тонкостінних стержнів відкритого профілю при скрутому крученні

2. Запишіть при скрутому крученні: диференціальне рівняння деформацій (θ), диференціальне рівняння бімоментів (B_w) і диференціальне рівняння закрутових моментів (T_k). У чому полягають їх вади і переваги?

3. Що таке пружна згиново-закрутова характеристика (α)? Яку вона має одиницю вимірювання?

4. В яких випадках виникає депланація в тонкостінних стержнях щодо дії стискальних (розтягувальних) сил, спрямованих перпендикулярно до перерізів? Чому дорівнюють у цьому випадку біпари (згинально-закрутові бімоменти – B)?

5. Що таке ядрові відрізки в перерізах тонкостінних стержнів відкритого профілю в умовах скрутого кручення і як їх визначають?



Національний університет
водного господарства
та природокористування

РОЗДІЛ IV

РОЗРАХУНКИ НА УДАР

4.1. Загальні відомості про ударне навантаження

Явище удару утворюється тоді, коли швидкість тіла, що падає, наприклад, на конструкцію, за короткий проміжок часу змінюється до нуля. Під час удару виникають деформації двох типів: місцеві та загальні. В подальшому розглядатимемо лише загальні деформації.

Залежно від способу прикладання ударного навантаження розрізняють такі типи удару: поздовжній (стискаючий, рис. 4.1, *а*; розтягуючий, рис. 4.1, *б*), поперечний (згинальний, рис. 4.1, *в*), позацентровий (згинально-стискаючий, рис. 4.1, *з*; згинально-розтягуючий), крутильний (на відрізьку $m-n$, рис. 4.1, *д*) та їх комбінації.

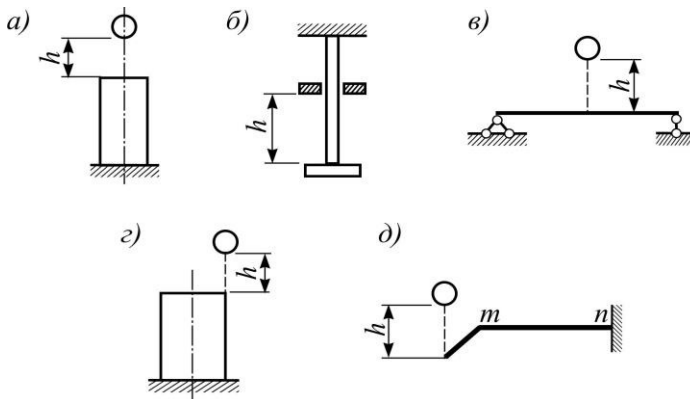


Рис. 4.1. Типи удару: поздовжній (*а*, *б*), поперечний (*в*) і комбінований (*з*, *д*)

Ударне навантаження спричиняє в тілі, що зазнає удару, прискорення i , як наслідок, внутрішні сили. Сили, напруження, переміщення, деформації ударного навантаження називають динамічними і позначають відповідними символами з індексом d : F_d , σ_d , δ_d , ε_d тощо. Задача визначення впливу на міцність і жорсткість конструкції динамічних навантажень складна як для точних теоретичних розробок, так і для експериментальних досліджень. Тому для розв'язування задач на удар використовують наближені, енергетичні методи.

В інженерній практиці названі труднощі долають за допомогою спрощеної, так званої, технічної теорії удару. У фізичному плані це дещо наближена розрахункова теорія, але така, що відповідає інженерним вимогам практики завдяки застосуванню певних припущень (гіпотез). Головні з них такі:

1. Напруження в стержні, що зазнає удару не перевищують границі пропорційності, в крайньому разі – границі пружності.

2. Опорні пристрої вважаються, як правило, абсолютно жорсткими, непіддатливими.

3. Динамічні деформації стержня, що зазнає удару миттєво поширюються на весь стержень і підкоряються, як і від статичного навантаження, лінійній залежності (закону Гука).

4. Тіло, що наносить удар під час удару не відокремлюється від стержня, що зазнає удару, воно ніби приліплюється до нього (так званий абсолютно непружний удар).

5. Тіло, що наносить удар вважають абсолютно твердим, тобто його деформації не враховуються.

6. У мить стикання з стержнем тіло, що наносить удар має кінетичну енергію T . Остання перетворюється в потенційну енергію динамічної деформації U_d стержня, що зазнає удару та в кінетичну енергію T_1 руху стержня. Втрати енергії на місцеві деформації нехтують. І тоді закон зберігання енергії для тіл, що зіткнулись записують у такому вигляді:

$$T = U_d + T_1, \quad (4.1)$$

де U_d – потенціальна енергія динамічної деформації стержня, що зазнає удару, яка на підставі третього припущення дорівнює:

$$U_d = \frac{1}{2} G_d \delta_d, \quad (4.2)$$

де G_d – вага тіла, що наносить удар, при цьому $\max G_d \leq F_{pr}$. Де F_{pr} – сила, що відповідає границі пропорційності (рис. 4.2). На рис. 4.2 показано графік зміни

узагальненого переміщення від дії узагальненої динамічної сили F_d ; заштрихована площа на рисунку відповідає потенціальній енергії U_d .

Коли маса стержня, що зазнає удару мала порівняно з масою тіла, яке наносить удар, то величиною T_1 нехтують і рівняння (4.1) набирає такої форми:

$$T = U_d . \quad (4.3)$$

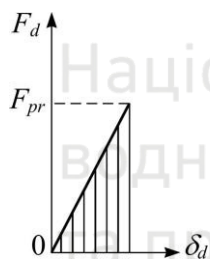


Рис. 4.2. Діаграма потенціальній енергії

7. Вважають, що механічна система «тіло, яке наносить удар – стержень, що зазнає удару» під час зіткнення має один ступінь вільності. Інакше кажучи, тіла, що зіткнулись визначаються лише однією геометричною координатою. Також припущення, у випадку, коли вага стержня, що зазнає удару велика порівняно з вагою тіла, яке наносить удар, вимагає таке. Для стержнів, що зазнають удару, з розподіленою масою знаходять їх зведену масу в точці стикання з тілом, яке наносить удар.

Дотримання наведених припущень (гіпотез) спрощує аналіз явища удару та дає в межах пружності матеріалу хоча й наближені, але цілком прийнятні для інженерної практики теоретичні результати.

Зміну переміщень і напружень внаслідок ударної дії вантажу порівняно з його статичною дією характеризує єдиний параметр – динамічний коефіцієнт K_d . Коли відоме значення K_d , то динамічні переміщення δ_d і напруження σ_d виражають через відповідні статичні переміщення δ_{st} і напруження σ_{st} такими формулами:

$$\delta_d = K_d \delta_{st} ; \quad (4.4)$$

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st} \quad (4.5)$$

4.2. Розрахунок стержнів на ударне навантаження без врахування власної ваги. Повздовжній, поперечний та горизонтальний удари

Як визначити динамічний коефіцієнт K_d ? Це питання розв'язується наближено за допомогою енергетичних методів. Розглянемо випадок повздовжнього розтягуючого удару (рис. 4.3, а).

Нехай вантаж G з масою $m = G/g$, де g прискорення вільного падіння, вільно падає з висоти h вздовж осі стержня завдовжки l і, досягнувши швидкості $v = \sqrt{2gh}$, раптово зупиняється, зіткнувшись з буртиком на нижньому кінці стержня. При цьому кінетична енергія вантажу T досягає найбільшого свого значення:

$$T = \frac{mv^2}{2} = Gh. \quad (4.6)$$

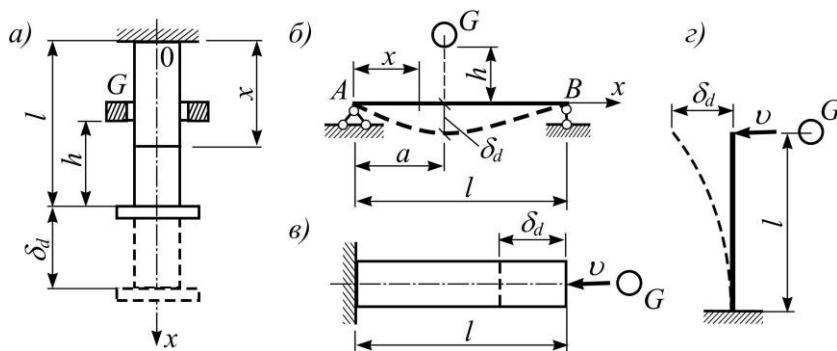


Рис. 4.3. До визначення динамічного коефіцієнта для повздовжнього (а), поперечного (б) та горизонтального (в, г) ударів

Напевне, треба було б врахувати й кінетичну енергію T_1 стержня, що зазнає удару. Проте нею наразі нехтуємо. Це означає, що не враховуємо масу стержня,

який зазнає удару. В результаті в мить удару кінетична енергія тіла, яке наносить удар, згідно з прийнятими припущеннями, повністю перетворюється в потенціальну енергію пружної деформації стержня, що зазнає удару за формулою (4.3): $T = U_d$.

Кінетична енергія вантажу з урахуванням динамічного переміщення δ_d дорівнює:

$$T = G(h + \delta_d). \quad (4.7)$$

Потенціальна енергія пружної деформації стержня, що зазнає удару U_d від наразі невідомої динамічної повздовжньої сили F_d становитиме:

$$U_d = \frac{F_d \delta_d}{2}. \quad (4.8)$$

Враховуючи відповідне припущення технічної теорії удару щодо прямої пропорційності між динамічними силами та переміщеннями (рис. 4.2), матимемо:

$$\delta_d = \frac{F_d l}{EA}, \quad (4.9)$$

де l – довжина стержня, що зазнає удару, E – модуль пружності матеріалу стержня, A – площа поперечного перерізу стержня.

Із виразу (4.9) дістанемо:

$$F_d = \frac{EA \delta_d}{l}. \quad (4.10)$$

І тоді рівність (4.8) з урахуванням значення F_d (4.10) набирає вигляду:

$$U_d = \frac{EA \delta_d^2}{2l}. \quad (4.11)$$

Підставляючи вирази (4.7) і (4.11) у рівність (4.3), матимемо:

$$Gh + G\delta_d = \frac{EA\delta_d^2}{2l}.$$

Після деяких перетворень:



$$\delta_d^2 - \frac{2Gl}{EA}\delta_d - 2\frac{Gl}{EA}h = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{Gl}{EA} = \delta_{st}, \quad (4.13)$$

де δ_{st} - пружне переміщення від статичної дії сили G .

Враховуючи вираз (4.13), рівняння (4.12) запишемо так:

$$\delta_d^2 - 2\delta_{st}\delta_d - 2\delta_{st}h = 0 \quad (4.14)$$

звідки

$$\delta_d = \delta_{st} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} \right). \quad (4.15)$$

Перед радикалом (4.15) залишаємо знак «плюс» тому, що знак «мінус» не відповідає фізичному розумінню задачі.

Оскільки за формулою (4.4) $\delta_d = K_d\delta_{st}$, то, поділивши вираз (4.15) на δ_{st} , остаточно матимемо вираз для динамічного коефіцієнта K_d :

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}. \quad (4.16)$$

Лінійні переміщення δ_d і δ_{st} для повздовжнього (розтягуючого і стискаючого) удару беруть у розрахункові формули за абсолютним значенням.

Поділивши ліву і праву частину рівності (4.15) на довжину стержня l і помноживши на модуль E , на підставі закону Гука матимемо для динамічних напружень таку залежність:

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st}. \quad (4.17)$$

Із формули (4.16) бачимо, що динамічний коефіцієнт K_d залежить від висоти падіння вантажу h і від статичного лінійного переміщення δ_{st} . Щоб більше переміщення δ_{st} , то менші динамічні коефіцієнти K_d .

Для стискаючого удару треба мати на увазі – що динамічні напруження заради уникнення втрати стійкості не перевищували критичних значень.

Щодо поперечного (згинального) удару (рис. 4.3, б) формула (4.16) набирає такого вигляду (при $\delta_{st} = u_{st}$):

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{u_{st}}}, \quad (4.18)$$

де $u_{st} = |u_{st}|$ – статичний прогин балки в місці удару (береться теж за абсолютним значенням).

Для вільного падіння вантажу маємо $h = v^2 / 2g$, де v – максимальна швидкість вантажу у початкову мить його дотику до стержня, що зазнає удару, і тоді формула (4.16) набирає вигляду:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \delta_{st}}}. \quad (4.19)$$

Якщо у формулі (4.16) перетворити величину $2h / \delta_{st}$ до такого вигляду:

$$\frac{2h}{\delta_{st}} = \frac{h}{\frac{\delta_{st}}{2}} = \frac{Gh}{\frac{1}{2}G\delta_{st}} = \frac{T_0}{U_{st}}, \quad (4.20)$$

де T_0 – кінетична енергія вантажу вагою G на початку удару, U_{st} – потенціальна енергія деформації стержня, що зазнає удару щодо статичного прикладання вантажу G , то тоді вона матиме такий вигляд:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{st}}}. \quad (4.21)$$

Розглянемо окремі випадки удару.

1. Якщо висота падіння вантажу $h=0$, то має місце так званий миттєвий удар, для якого згідно з формулами (4.16) і (4.18) динамічний коефіцієнт $K_d = 2$. Таким чином, для миттєво прикладеного навантаження переміщення і напруження збільшуються вдвічі порівняно зі статично прикладеним навантаженням. І тоді маємо: $\sigma_d = 2\sigma_{st}$, $\delta_d = 2\delta_{st}$.

2. Якщо висота h падіння вантажу G значно більше від статичного переміщення δ_{st} (при $10 < (2h/\delta_{st}) < 100$), то тоді одиницею під радикалом у формулах (4.16), (4.18), (4.19) і (4.21) можна знехтувати і дістати такі наближені формули:

а)
$$K_d = 1 + \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}};$$

б)
$$K_d = 1 + \sqrt{\frac{2h}{u_{st}}};$$

в)
$$K_d = 1 + \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{st}}};$$

$$\text{г)} \quad K_d = 1 + \sqrt{\frac{T_0}{U_{st}}} . \quad (4.22)$$

3. Для випадку, коли підкореневі вирази у формулах (4.22) дуже великі ($\frac{2h}{\delta_{st}} \geq 100$), можна знехтувати і одиницею перед коренями:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & K_d = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}} ; \\ \text{б)} \quad & K_d = \sqrt{\frac{2h}{u_{st}}} ; \\ \text{в)} \quad & K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{st}}} ; \\ \text{г)} \quad & K_d = \sqrt{\frac{T_0}{U_{st}}} . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Зазначимо при цьому, що вже при $\frac{2h}{\delta_{st}} = 100$ користуватися наведеними формулами (4.23) недоцільно через недостатню точність положень, прийнятих за основу їх виведення (зокрема не враховується маса тіла, що зазнає удару, поширення напружень вздовж стержня тощо).

4. Вирази (4.23, в, з) відповідають динамічному коефіцієнту у випадку горизонтального удару (рис. 4.3, в, з). Доведемо це положення. Припустимо, що вантаж G до початку удару мав горизонтальну швидкість v і кінетичну енергію:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{Gv^2}{2g} . \quad (4.24)$$

Потенціальна енергія динамічної деформації стержня, що зазнає удару

згідно з формулою (4.2) дорівнює:

$$U_d = \frac{1}{2} G_d \delta_d .$$

На підставі залежності (4.3) і залежності (4.24) маємо:



$$\frac{Gv^2}{2g} = \frac{G_d \delta_d}{2}$$

$$\frac{G_d \delta_d}{2G} = \frac{v^2}{2g} .$$

Поділимо ліву і праву частину останнього виразу на δ_{st} :

$$\frac{G_d \delta_d}{2G \delta_{st}} = \frac{v^2}{2g \delta_{st}}$$

звідки маємо $K_d = \frac{v^2}{g \delta_{st}}$ і тоді:

$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g \delta_{st}}} . \quad (4.25)$$

Формула (4.25) повністю збігається з формулою (4.23, в) та підтверджує зроблений висновок.

4.3. Динамічний коефіцієнт щодо повздовжнього удару для стержнів змінного перерізу. Вплив амортизаційних пристроїв

Місцеві послаблення стержня, що зазнає удару, значно погіршують його роботу на удар. Розглянемо з цього приводу такий приклад. Нехай два стержні (рис. 4.4) з однакового матеріалу (модуль E) мають однакову довжину l . Але перший стержень (рис. 4.4, а) має сталий поперечний переріз A , а другий (рис. 4.4, б) – має площу A лише на невеликому ослабленому відрізку $l_c = \frac{l}{m}$, де $m > 1$. Решта довжини другого стержня дорівнює:

$$l - \frac{l}{m} = \frac{l(m-1)}{m}$$

і має площу поперечного перерізу nA ($n > 1$).

Доведемо, що динамічний коефіцієнт для ослабленого, другого стержня буде більшим, ніж для першого.

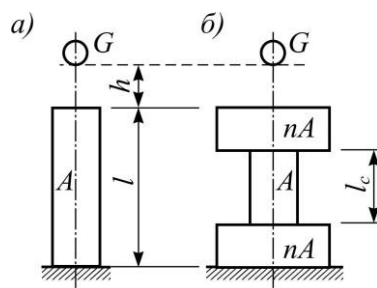


Рис. 4.4. Удар стержнів сталого (а) і змінного перерізів (б)

Підрахуємо статичні переміщення для першого (а) і другого (б) стержнів:

$$\Delta l_{st}^a = \frac{Gl}{EA}; \quad \Delta l_{st}^b = \frac{Gl(m-1)}{m \cdot nAE} + \frac{Gl}{mAE} = \frac{Gl(n+m-1)}{mnAE}.$$

Визначимо динамічні коефіцієнти для обох стержнів за наближеною формулою (4.23, а):

а) для першого стержня (рис. 4.4, а):

$$K_d^a = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{2hAE}{Gl}};$$

б) для другого стержня (рис. 4.4, б):

$$K_d^b = \sqrt{\frac{2hmnAE}{Gl(n+m-1)}}.$$

Для ослабленого стержня динамічний коефіцієнт більший, ніж динамічний коефіцієнт для стержня сталого перерізу:

$$\frac{K_d^a}{K_d^b} = \frac{1}{\sqrt{\frac{mn}{n+m-1}}}.$$

Так, наприклад, для значень $m = 20$ і $n = 5$ маємо $\frac{K_d^a}{K_d^b} = \frac{1}{2,04}$.

З цього погляду виходить, що краще зменшувати площу поперечного перерізу за всю довжиною стержня. Технологічно це можна здійснити шляхом висвердлювання повздовжнього внутрішнього отвору в неослабленій частині стержня.

На значення динамічних коефіцієнтів щодо удару, крім місцевого послаблення перерізів у стержні, суттєвий вплив справляють амортизаційні пристрої. Розглянемо щодо цього такий приклад.

Приклад 4.1. На сталеву двотаврову балку № 27 з прогоном $l = 3$ м падає посередині прогону (рис. 4.5, а) вантаж $G = 1,2$ кН з висоти $h = 10$ см. Осьовий момент інерції двотавра $I_x = 5010$ см⁴, осьовий момент опору $W_x = 371$ см³, модуль пружності $E = 200$ ГПа.

Визначити найбільший прогин балки f_d і максимальні напруження $\max \sigma_d$

в небезпечному поперечному перерізі.

Підрахувати, як зміняться f_d і $\max \sigma_d$ у випадку, коли в місці удару вантажу поставити на балку для амортизації удару циліндричну гвинтову пружину з малим кроком (рис. 4.5, б). Середній радіус якої $R=10$ см, радіус перерізу дроту її витків $r=1$ см, кількість витків $n=8$, модуль зсуву сталевого матеріалу $G_c=80$ ГПа.

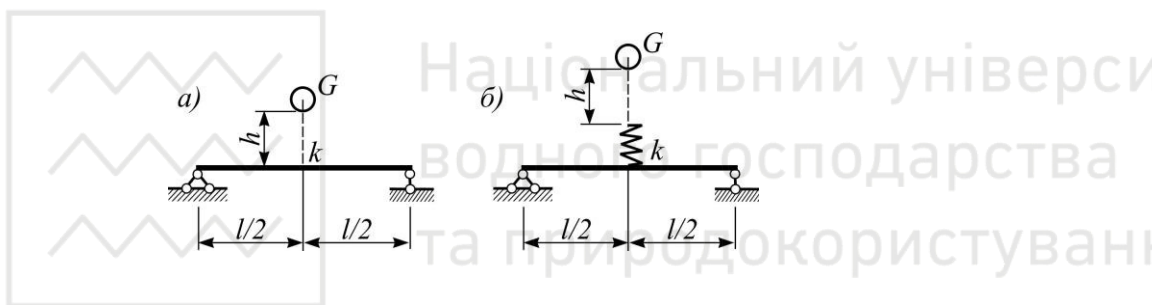


Рис. 4.5. Поперечний удар без (а) і з (б) амортизатором

Розв'язок. Підрахуємо статичний прогин f_{st} балки в місці падіння вантажу за формулою:

$$f_{st} = \frac{Gl^3}{48EI_x} = \frac{1200 \cdot 3^3}{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 0,0067 \text{ м.}$$

Динамічний коефіцієнт для цього випадку дорівнює за формулою (4.18):

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,0067}} = 5,56.$$

Максимальний динамічний прогин дорівнює:

$$f_d = K_d f_{st} = 5,56 \cdot 0,0067 = 0,03725 \text{ см.}$$

Згинувий момент для небезпечного перерізу ($l=1,5$ м) дорівнює $M=1200 \cdot 1,5/2=900$ Н·м.

Максимальне статичне напруження:

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W_x} = \frac{900}{371 \cdot 10^{-6}} = 2,43 \cdot 10^6 \text{ Па} = 2,43 \text{ МПа}.$$

Максимальне динамічне напруження:

$$\max \sigma_d = K_d \sigma_{st} = 5,56 \cdot 2,43 = 13,51 \text{ МПа}.$$

У випадку застосування амортизаційної пружини (рис. 4.5, б) її осадка λ_{st} дорівнює:

$$\lambda_{st} = \frac{4GR^3 n}{G_c r^4} = \frac{4 \cdot 1200 \cdot 0,1^3 \cdot 8}{80 \cdot 10^9 \cdot 0,01^4} = 0,048 \text{ м} = 4,8 \text{ см}.$$

Загальне статичне лінійне переміщення складає:

$$\delta_{st} = f_{st} + \lambda_{st} = 0,0067 + 4,8 = 4,8067 \text{ см}.$$

Динамічний коефіцієнт тоді дорівнює:

$$K'_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{4,8067}} = 3,27.$$

З урахуванням осадки амортизатора максимальні напруження зменшуються до

$$\max \sigma'_d = K'_d \cdot \sigma_{st} = 3,27 \cdot 2,43 = 7,95 \text{ МПа}.$$

Результати розрахунків свідчать, що використання амортизаторів значно зменшує динамічні напруження.

4.4. Урахування маси стержня, що зазнає удару

Експериментальні та теоретичні дослідження доводять: що не врахування маси стержня, що зазнає удару дає похибку до 10% і навіть більше, якщо:

$$\frac{2h}{\delta_{st}} \geq 100. \quad (4.26)$$

Для більш точних розрахунків, особливо при

$$\frac{2h}{\delta_{st}} > 100, \quad (4.27)$$

треба враховувати масу тіла, що зазнає удару.

Для урахування маси тіла, що зазнає удару поділяємо процес поздовжнього зіткнення двох тіл на два етапи (рис. 4.3, *a*).

1. Перший етап удару охоплює відтинок часу від моменту зіткнення вантажу масою $m = G/g$ з буртиком на нижньому кінці стержня (маса стержня – $m_0 = G_0/g$, де G_0 – вага стержня) до моменту вирівнювання швидкості вантажу, як тіла, яке наносить удар, так і стержня, що зазнає удару до значення швидкості v_1 . До моменту удару вантаж досягає найбільшої швидкості $v_{max} = \sqrt{2gh}$ і зменшує її потім до значення v_1 . Нижній же кінець стержня, навпаки збільшує свою швидкість від нуля до v_1 .

2. Другий етап удару починається з моменту вирівнювання швидкостей вантажу та стержня під час спільного руху. При цьому переміщення перерізів поширюються на всю довжину стержня за лінійним (припускається!) законом від v_1 на нижньому, вільному кінці до нуля – на верхньому, закріпленому кінці стержня. Значимо, що після зіткнення вантаж рухається разом зі стержнем і їхня сумісна швидкість руху v_1 поступово зменшується аж до нуля в момент досягнення максимальної деформації. Потім починається зворотній рух і система «вантаж – стержень» у подальшому робить хвильові рухи.

Для першого етапу удару, використовуючи закон збереження кількості руху для механічної системи «вантаж – стержень», можемо записати:

$$mv_{max} = (m + \alpha_1 m_0) \cdot v_1,$$

де α_1 – коефіцієнт зведення маси з кількості руху.

Звідси спільна швидкість системи v_1 дорівнює:

$$v_1 = \frac{v_{max}}{1 + \frac{\alpha_1 m_0}{m}}. \quad (4.28)$$

Для другого етапу удару можемо записати кінетичну енергію T механічної системи «вантаж – стержень», враховуючи значення v_1 за формулою (4.28):

$$T = (m + \alpha_2 m_0) \frac{v_1^2}{2} = \frac{mv_{max}^2 \left(1 + \frac{\alpha_2 m_0}{m}\right)}{2 \left(1 + \frac{\alpha_1 m_0}{m}\right)^2},$$

де α_2 – коефіцієнт зведення маси з кінетичної енергії.

Оскільки (див. формулу 4.6) $mv_{max}^2/2 = Gh$, то

$$T = Gh \frac{\left(1 + \frac{\alpha_2 m_0}{m}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha_1 m_0}{m}\right)^2} = Gh_{red}, \quad (4.29)$$

де h_{red} – зведена (редукована) висота падіння вантажу G , яка дорівнює:

$$h_{red} = h \frac{\left(1 + \frac{\alpha_2 m_0}{m}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha_1 m_0}{m}\right)^2} = \beta h, \quad (4.30)$$

де β – коефіцієнт зведення висоти падіння вантажу, який дорівнює:

$$\beta = \frac{\left(1 + \frac{\alpha_2 m_0}{m}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha_1 m_0}{m}\right)^2}. \quad (4.31)$$

Із розглянутого випливає: врахування маси стержня, що зазнає удару, виконують простою підстановкою у формули (4.16) і (4.18) для динамічного коефіцієнта K_d певного значення висоти h_{red} :

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h_{red}}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\beta h}{\delta_{st}}}. \quad (4.32)$$

Оскільки $\frac{G}{g} \frac{v_{max}^2}{2} = Gh$ (4.6), то можна замінити у формулі (4.32) висоту

$h = \frac{v_{max}^2}{2g}$ і тоді коефіцієнт K_d набуває такого вигляду:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{\beta v_{max}^2}{g \delta_{st}}}. \quad (4.33)$$

Слід зазначити, що в багатьох випадках з метою спрощення розрахунків приймають $\alpha_1 = \alpha_2$ і тоді коефіцієнт зведення висоти β згідно з формулою (4.31) набуває такого значення:

$$\beta = \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha_2 m_0}{m}\right)}. \quad (4.34)$$

Для горизонтального удару розрахункова формула (4.33) згідно з (4.23, в) для динамічного коефіцієнта K_d набуває вигляду:

$$K_d = \sqrt{\frac{\beta v_{max}^2}{g \delta_{st}}} . \quad (4.35)$$

Здобуті розрахункові формули (4.31) і (4.34) разом із формулами (4.32), (4.33) і (4.35) відповідають наближеній технічній теорії пружного повздовжнього та поперечного удару. Остання не враховує в силу прийнятих припущень (гіпотез) ряд чинників, зокрема місцевих деформацій, хвильового характеру деформування, теплових втрат та ін.

Існує більш точна, але все ж наближена формула для динамічного коефіцієнта K_d , здобутого на підставі врахування хвильового характеру деформування тіла по якому наноситься удар:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}} \cdot \left(1 + \frac{\alpha_2 m_0}{m}\right)^{-3}} . \quad (4.36)$$

Слід окремо зазначити: всі динамічні коефіцієнти, що здобуті енергетичними методами, навіть з урахуванням хвильового характеру удару, – дають завищені результати, що врешті-решт іде в запас міцності.

4.5. Зведена маса. Визначення коефіцієнтів зведеної маси

У наведених вище формулах (4.29), (4.30) та ін. було застосовано два типи зведених мас для стержня, що зазнає удару:

$\alpha_1 m_0$ – зведена маса з кількості руху,

$\alpha_2 m_0$ – зведена маса з кінетичної енергії.

Зведена маса це така зосереджена маса, яка, рухаючись зі швидкістю точки зведення, має щодо α_2 таку саму кінетичну енергію (кількість руху – щодо α_1), яку мають усі разом матеріальні елементи пружної системи в процесі їх руху. Для спрощення розв'язування задачі щодо удару масу пружної системи при

ударі зводять до точки удару, яку і називають точкою зведення.

Щоб визначити коефіцієнти зведення маси треба знати співвідношення швидкостей точок пружної системи при ударі. Згідно з прийнятими припущеннями (гіпотезами) співвідношення швидкостей точок для удару дорівнює співвідношенню переміщень цих же точок (рис. 4.3, а):

$$\frac{v_x}{v_l} = \frac{\delta_{xd}}{\delta_d} = \frac{K_d \delta_{xst}}{K_d \delta_{st}} = \frac{\delta_{xst}}{\delta_{st}}, \quad (4.37)$$

де v_x – швидкість перерізу на відстані x від початку координат.

Кількість руху стержня, що зазнає удару в момент безпосередньо після удару дорівнює:

$$\frac{\alpha_1 G_0 v_l}{g} = \int \frac{v_x}{v} dG_0,$$

де G_0 – вага стержня, що зазнає удару, V – об'єм матеріалу стержня, що зазнає удару.

Звідси маємо:

$$\alpha_1 = \frac{1}{G_0} \int \frac{v_x}{v} dG_0 = \frac{1}{G_0} \int \left(\frac{\delta_x}{\delta} \right)_{st} dG_0. \quad (4.38)$$

За допомогою формули (4.38) визначають α_1 – коефіцієнти зведення маси з кількості руху.

Кінетична енергія стержня, що зазнає удару в момент безпосередньо після удару має таке значення:

$$\frac{\alpha_2 G_0 v_l^2}{2g} = \int \frac{v_x^2}{2g} dG_0.$$

Звідки коефіцієнти зведення маси з кінетичної енергії дорівнюють:

$$\alpha_2 = \frac{1}{G_0} \int_V \left(\frac{v_x}{v_l} \right)^2 dG_0 = \frac{1}{G_0} \int_V \left(\frac{\delta_x}{\delta} \right)_{st}^2 dG_0. \quad (4.39)$$

Таким чином, коефіцієнти зведення мас α_1 і α_2 залежать від переміщень δ_{xst} і δ_{st} , що викликані вантажем, який наносить удар G і прикладається статично до пружного стержня, що зазнає удару.

Для двоопорної балки без консолей (рис. 4.3, б, рис. 4.6, а) коефіцієнти зведення маси α_1 і α_2 наведено в таблиці 4.1.

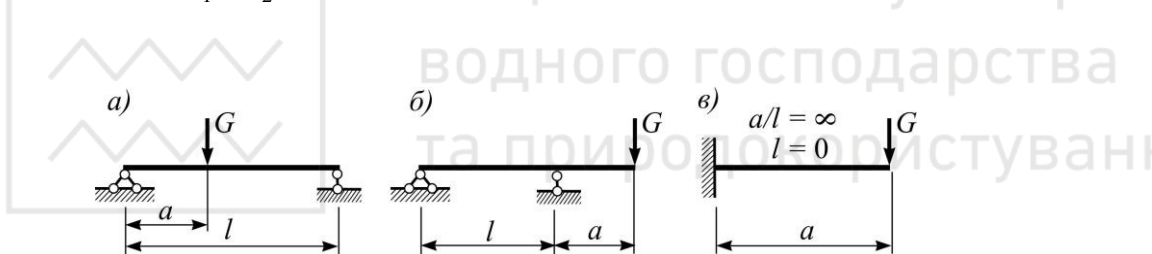


Рис. 4.6. Схеми двоопорної (а) і консольних (б, в) балок

Таблиця 4.1

Коефіцієнти зведення маси α_1 і α_2 для двоопорної балки без консолей

a/l	α_1	α_2
0,05	2,752	9,2727
0,10	1,501	2,863
0,15	1,105	1,499
0,20	0,906	1,012
0,25	0,792	0,774
0,30	0,720	0,641
0,35	0,674	0,564
0,40	0,644	0,518
0,45	0,630	0,493
0,50	$5/8=0,625$	$17/35=0,486$

Для двоопорної балки з консолю (рис. 4.6, б, в) коефіцієнти зведення мас

α_1 і α_2 наведено в таблиці 4.2.

Співвідношення $a/l = \infty$ відповідає консолі, яку жорстко затиснено одним своїм кінцем і завантажено силою G на вільному кінці (рис. 4.6, в).

З методикою підрахунку значень коефіцієнтів α_1 і α_2 ознайомимся на таких двох прикладах.

Таблиця 4.2

Коефіцієнти зведення маси α_1 і α_2 для двоопорної балки з консоллю і для консолі

a/l	α_1	α_2
0,1	-0,989	1,460
0,3	-0,138	0,1673
0,5	0,0417	0,1214
0,7	0,123	0,1267
0,9	0,170	0,1373
1,0	0,1875	0,1423
2,0	0,271	0,1762
5,0	0,329	0,2078
10,0	0,351	0,2209
∞	$3/8=0,375$	$33/140=0,2357$

Приклад 4.2. Визначити коефіцієнти зведення маси з кількості руху α_1 і з кінетичної енергії α_2 для повздовжнього удару стержня (рис. 4.3, а) з площею поперечного перерізу A , модулем пружності матеріалу E і питомою вагою матеріалу γ .

Розв'язок. Визначаємо статичні переміщення вантажу, що наносить удар G на відстані x від верхнього, затисненого кінця стержня:

$$\delta_{x\,st} = \Delta l_{x\,st} = \frac{Gx}{EA}$$

і на відстані l – в точці прикладання вантажу:

$$\delta_{st} = \Delta l_{st} = \frac{Gl}{EA}.$$

Співвідношення $\frac{\delta_{xst}}{\delta_{st}}$ дорівнює:

$$\left(\frac{\delta_x}{\delta} \right)_{st} = \frac{x}{l}. \quad (a)$$

Враховуючи співвідношення (a), за допомогою формули (4.38) визначасмо коефіцієнт α_1 :

$$\alpha_1 = \frac{1}{G_0 V} \int \left(\frac{\delta_x}{\delta} \right)_{st} dG_0 = \frac{1}{\gamma Al} \int_0^l \frac{x}{l} \gamma A dx = \frac{x^2}{2l^2} \Big|_0^l = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}. \quad (б)$$

За формулою (4.39) з урахуванням співвідношення (a) визначасмо коефіцієнти α_2 :

$$\alpha_2 = \frac{1}{G_0 V} \int \left(\frac{\delta_x}{\delta} \right)_{st}^2 dG_0 = \frac{1}{\gamma Al} \int_0^l \left(\frac{x}{l} \right)^2 \gamma A dx = \frac{x^3}{3l^3} \Big|_0^l = \frac{1}{3}.$$

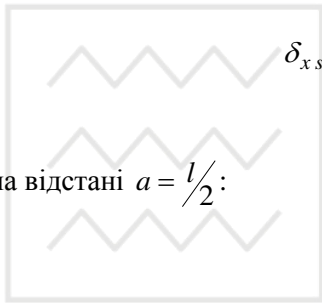
Отже,

$$\alpha_2 = \frac{1}{3} \approx 0.333. \quad (в)$$

Таким чином, коефіцієнти зведення маси з кількості руху (б) і з кінетичної енергії (в) для повздовжнього удару стержня дорівнюють: $\alpha_1 = 0,5$; $\alpha_2 = 0,333$.

Приклад 4.3. Визначити коефіцієнти зведення маси з кількості руху α_1 і з кінетичної енергії α_2 для згинального удару. Вантаж G (рис. 4.3, б; рис. 4.6, а) падає на середину шарнірно закріпленої балки з прогоном l ($a = l/2$). Згинова жорсткість балки – EI . Прогин балки в точці падіння вантажу від статичного прикладання дорівнює:

а) на відстані x від лівої опори:



б) на відстані $a = l/2$:

$$\delta_{x, st} = u_{x, st} = -\left(\frac{Gl^2 x}{16EI} - \frac{Gx^3}{12EI}\right);$$

$$\delta_{st} = u_{st} = -\frac{Gl^3}{48EI}.$$

Площа поперечного перерізу балки – A , питома вага матеріалу балки – γ .

Розв'язок. Підраховуємо співвідношення $(\frac{\delta_x}{\delta})_{st}$ від статичного прикладання вантажу G :

$$\left(\frac{\delta_x}{\delta}\right)_{st} = \left(\frac{Gl^2 x}{16EI} - \frac{Gx^3}{12EI}\right) : \left(\frac{Gl^3}{48EI}\right) = \frac{1}{l^3}(3l^2 x - 4x^3). \quad (a)$$

Використовуючи формулу (4.38) з урахуванням співвідношення (а), визначаємо коефіцієнт зведення маси з кількості руху α_1 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{G_0} \int_V \left(\frac{\delta_x}{\delta}\right)_{st} dG_0 = \frac{2}{\gamma Al} \int_0^{l/2} \frac{1}{l^3} (3l^2 x - 4x^3) \gamma A dx = \\ &= \frac{2}{l^4} \left(\frac{3}{8} l^4 - \frac{l^4}{16}\right) = \frac{5}{8} = 0,625. \end{aligned} \quad (б)$$

У другому доданку виразу (б) інтегрування взято до половини балки

($x = l/2$). Тому для повного об'єму, що передбачено першим доданком, взято перед інтегралом множник 2.

Аналогічно, для коефіцієнта зведення маси з кінетичної енергії α_2 використовуємо формули (4.39) і (а):

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{G_0 v} \int \left(\frac{\delta_x}{\delta} \right)^2 dG_0 = \frac{2}{\gamma A l} \int_0^{l/2} \frac{1}{l^6} (3l^2 x - 4x^3)^2 \gamma A dx = \\ &= \frac{2}{l^7} \left(\frac{9l^7}{24} - \frac{24l^7}{160} + \frac{16l^7}{896} \right) = \frac{17}{35} = 0,4857. \end{aligned} \quad (в)$$

Отже, коефіцієнти зведення маси з кількості руху (б) і з кінетичної енергії (в) для згинального удару посередині двохопорної балки без консолі відповідно дорівнюють:

$$\alpha_1 = 0,625; \quad \alpha_2 = 0,4857.$$

4.6. Динамічний коефіцієнт для раптової зупинки троса, що опускається з вантажем

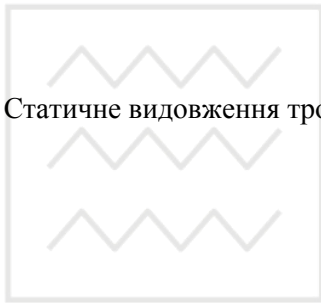
Раптова зупинка троса, що опускається з вантажем, рівносильна поздовжньому удару, який розтягує трос. Визначимо динамічний коефіцієнт і динамічне напруження для випадку, коли відомі такі величини: G – вантаж, який опускається; довжина троса l у момент зупинки вантажу; A – площа поперечного перерізу троса; E – модуль пружності матеріалу троса; v – швидкість опускання вантажу.

Кінетична енергія троса, що опускається, безпосередньо перед зупинкою дорівнює

$$T_1 = \frac{Gv^2}{2g}, \quad (4.40)$$

де g – прискорення вільного падіння, v – швидкість опускання троса.

Потенціальна енергія деформації U_1 троса, який розтягується статичною силою G , дорівнює:



Статичне видовження троса $\delta_{st} = \Delta l_{st}$ визначаємо за формулою:

$$U_1 = G\delta_{st}/2.$$

$$\delta_{st} = \Delta l_{st} = \frac{Gl}{EA}$$

звідси $G = \delta_{st} \cdot \frac{EA}{l}$ і тоді

$$U_1 = \frac{\delta_{st}EA}{l} \cdot \frac{\delta_{st}}{2} = \frac{\delta_{st}^2 EA}{2l}. \quad (4.41)$$

Після раптової зупинки вантаж G за інерцією пройде ще деяку відстань $\delta_d = \Delta l_d$ (рис. 4.7, а), додатково подовживши трос і витративши на це додаткову кінетичну енергію T_2 :

$$T_2 = G \delta_d. \quad (4.42)$$

Проходячи відстань $\delta_d = \Delta l_d$, вантаж втрачає свою швидкість до нуля й вся його кінетична енергія

$$T = T_1 + T_2 \quad (4.43)$$

перейде в додаткову потенціальну енергію деформації троса

$$U_2 = U - U_1, \quad (4.44)$$

де повна потенціальна енергія U в цей момент відповідно до формули (4.41) становить:

$$U = \frac{(\delta_{st} + \delta_d)^2 EA}{2l}. \quad (4.45)$$

Тут $(\delta_{st} + \delta_d)$ – повне видовження троса під час його раптової зупинки.

Таким чином, уся кінетична енергія вантажу (4.43) переходить у додаткову потенціальну енергію механічної системи «трос – вантаж» (4.44):

$$T_1 + T_2 = U - U_1. \quad (4.46)$$

Замінюючи послідовно всі величини в рівнянні (4.46) на їхні вирази (4.40), (4.42) і (4.45), (4.41), матимемо:

$$\frac{Gv^2}{2g} + G\delta_d = \frac{(\delta_{st} + \delta_d)^2 EA}{2l} - \frac{\delta_{st}^2 EA}{2l}.$$

Ділимо цей вираз на $\frac{EA}{2l}$ і тоді дістанемо таке рівняння:

$$\frac{Gl v^2}{gEA} + \frac{2Gl}{EA} \delta_d = (\delta_{st} + \delta_d)^2 - \delta_{st}^2.$$

В цьому рівнянні замінюємо $\frac{Gl}{EA} = \delta_{st}$ і спрощуємо здобутий вираз до такого вигляду:

$$\frac{\delta_{st} v^2}{g} = \delta_d^2.$$

Звідки

$$\delta_d = v \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}. \quad (4.47)$$

Динамічний коефіцієнт K_d дорівнює співвідношенню повного видовження під час удару ($\delta_{st} + \delta_d$) до статичного видовження δ_{st} :

$$K_d = \frac{(\delta_{st} + \delta_d)}{\delta_{st}} = 1 + \frac{\delta_d}{\delta_{st}} = 1 + \frac{v \sqrt{\delta_{st}}}{\delta_{st} \sqrt{g}} = 1 + \frac{v}{\sqrt{g \delta_{st}}}.$$

Отже, динамічний коефіцієнт для механічної системи «трос – вантаж» при раптовій зупинці вантажу остаточно має такий вигляд:

$$K_d = 1 + \frac{v}{\sqrt{g \delta_{st}}}. \quad (4.48)$$

Динамічні напруження в цьому випадку дорівнюють:

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st}.$$

Приклад 4.4. Визначимо під час раптової зупинки вантажу $G = 10 \text{ кН}$ динамічні нормальні напруження в тросі у випадку, коли між тросом і вантажем розміщено гвинтову циліндричну пружину з малим кроком витків (рис. 4.7, б). Швидкість опускання вантажу $v = 0,5 \text{ м/с}$, довжина троса в момент зупинки вантажу $l = 1,5 \text{ м}$, площа перерізу троса $A = 1,4 \text{ см}^2$, модуль пружності матеріалу троса $E = 200 \text{ ГПа}$. Пружина має такі параметри: середній радіус витків пружини $R = 12 \text{ см}$, радіус перерізу дроту її витків $r = 1,5 \text{ см}$, кількість витків $n = 10$, модуль зсуву матеріалу пружини $G = 80 \text{ ГПа}$, прискорення вільного падіння $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Розв'язок. Визначаємо повне статичне видовження $\delta_{st}^n = \delta_{st} + \lambda$, де δ_{st} – видовження троса від статичного навантаження G ; λ – статичне видовження

пружини від G .

$$\delta_{st} = \frac{Gl}{EA} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{200 \cdot 10^9 \cdot 1,4 \cdot 10^{-4}} = 0,000536 \text{ м} = 0,0536 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{4GR^3 n}{Gr^4} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{80 \cdot 10^9 \cdot 1,5^4 \cdot 10^{-8}} = 0,171 \text{ м} = 17,1 \text{ см}.$$

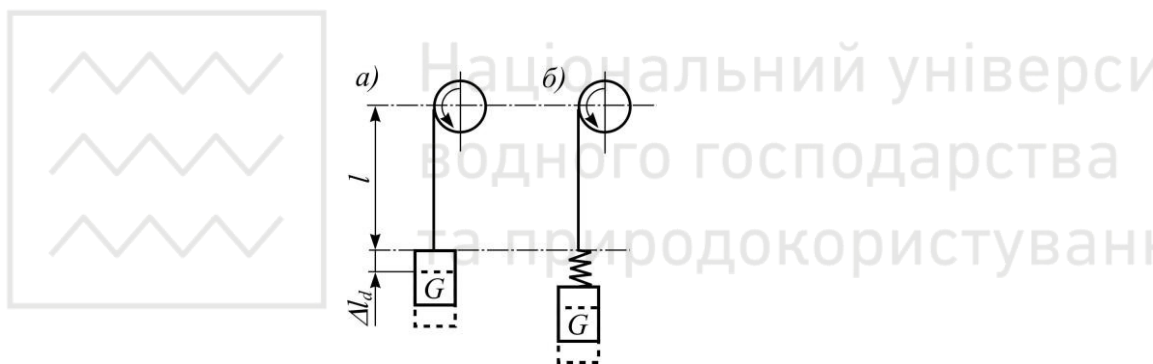


Рис. 4.7. Повздовжній удар без (а) і з (б) амортизатором

Повне статичне видовження дорівнює:

$$\delta_{st}^n = \delta_{st} + \lambda = 0,0536 + 17,1 = 17,1536 \text{ см}.$$

Згідно з формулою (4.48) маємо для динамічного коефіцієнта:

а) без урахування амортизатора:

$$K_d = 1 + \frac{v}{\sqrt{g \delta_{st}}} = 1 + \frac{0,5}{\sqrt{9,81 \cdot 0,000536}} = 1 + 6,895 = 7,895;$$

б) при урахуванні амортизатора:

$$K_d = 1 + \frac{v}{\sqrt{g \delta_{st}^n}} = 1 + \frac{0,5}{\sqrt{9,81 \cdot 17,1536}} = 1 + 0,0385 = 1,0385.$$

Статичне напруження σ_{st} в тросі дорівнює:

$$\sigma_{st} = \frac{N}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{1,4 \cdot 10^{-4}} = 71,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 71,4 \text{ МПа};$$

а) динамічне напруження без урахування амортизації пружини:

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st} = 7,895 \cdot 71,4 = 563,7 \text{ МПа};$$

б) динамічне напруження з урахуванням амортизатора:

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st} = 1,0385 \cdot 71,4 = 74,15 \text{ МПа}.$$

Перший результат (а) $\sigma_d = 563,7 \text{ МПа}$ зашкалює всі можливі границі міцності матеріалу (сталі).

Другий результат (б) $\sigma_d = 74,15 \text{ МПа}$ відповідає можливим допустимим напруженням.

Таким чином, амортизатори деформацій значно знижують значення нормальних напружень.

4.7. Механічні властивості матеріалів щодо удару

Механічні властивості матеріалу щодо удару помітно змінюються порівняно зі статичним навантаженням. Для випадку, коли швидкість навантаження v збільшується, то діаграма розтягу зразка змінює свої обриси в бік збільшення границі міцності σ_u і зменшення пластичності, про що свідчать площі (рис. 4.8, а, б, в) під дослідними кривими (v – швидкість навантаження).

Наприклад, під час удару границя міцності σ_u зростає на 10% – 30% порівняно зі статичним навантаженням. Але пластичність від зростання швидкості деформування значно спадає і, значить, зростає крихкість матеріалу. Зростання границі міцності не компенсує міцність матеріалу для ударних

навантажень.

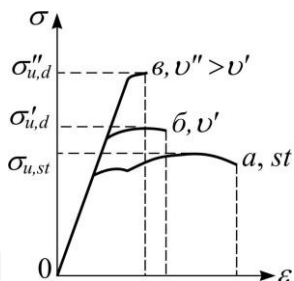


Рис. 4.8. Статична (а) і динамічна (б, в) діаграми розтягу сталевого зразка

Допустиме напруження σ_{adm} матеріалів, що зазнають ударних навантажень, зменшують порівняно зі статичними навантаженнями.

Для точного розрахунку треба було б і для ударного навантаження будувати діаграми ударного розтягу зразка на кшталт його статичного розтягу. Але для цього треба мати дорогі та дуже складні дослідницькі машини.

Для спрощення якісної оцінки опірності матеріалу щодо ударного навантаження використовують інший спосіб, а саме так звану ударну пробу матеріалу. Щоправда, результати ударної проби матеріалу не можна використати для чисельних розрахунків на міцність, проте вони дають змогу якісно оцінити схильність матеріалу до крихкого руйнування і обрати правильне рішення щодо застосування того чи того матеріалу для ударного навантаження.

У дослідженнях на ударну пробу використовують зразки стандартної форми (рис. 4.9, а) з надрізом, який полегшує руйнування зразка через концентрацію напружень навколо надрізу, що виникає після удару. Випробування зразків здійснюють на маятникових копрах, схему якого наведено на рис. 4.9, б.

Ниж маятника, піднятий на висоту h_1 , опускаючись, руйнує зразок, ударяючи його в точці K (рис. 4.9, а) і за рахунок кінетичної енергії, що лишається після удару, піднімається на висоту $h_2 < h_1$.

Відношення роботи W до площі A перерізу зразка в місці надрізу приймають за характеристику здатності матеріалу чинити опір ударному навантаженню:

$$KC = \frac{W}{A}, \text{ кДж/м}^2. \quad (4.49)$$

Величину KC називають ударною в'язкістю матеріалу. Абревіатура KC читається як «кей-сі» і походить від англійського «kinetic coefficient» - ударна в'язкість.

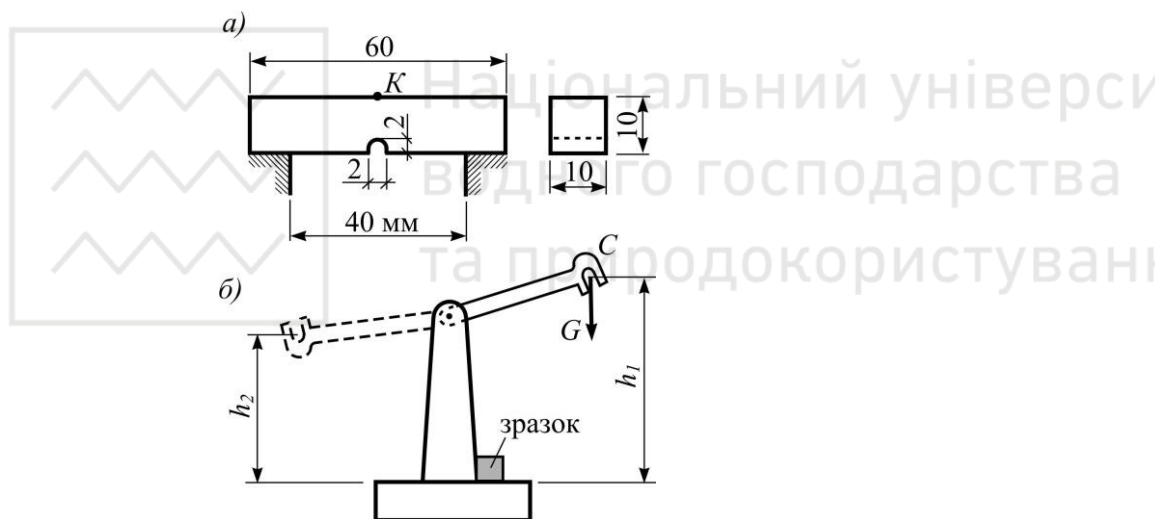


Рис. 4.9. Зразок (а) і маятниковий копер (б) для ударної проби матеріалів

Ударною в'язкістю матеріалу (KC) називають роботу, витрачену на руйнування стандартного зразка, віднесену до його найменшої площі поперечного перерізу.

Ударну в'язкість для розрахунків на міцність чи жорсткість безпосередньо кількісно використати не можна. Ударна в'язкість як якісна характеристика пластичності матеріалу дає змогу оцінити схильність матеріалу до крихкого руйнування при динамічних навантаженнях.

При $KC = 200-400 \text{ кДж/м}^2$ матеріал вважають крихким. При $KC = 400-800 \text{ кДж/м}^2$ - напівкрихким. При $KC = 800-1200 \text{ кДж/м}^2$ матеріал має пластичні властивості щодо удару.

Низька ударна в'язкість є підставою того, щоб забракувати матеріал для роботи в умовах ударного навантаження. Деталі та елементи конструкції, що

працюють в умовах динамічних навантажень, повинні мати ударну в'язкість не меншу, ніж 800 кДж/м^2 .

Контрольні запитання

1. Яке навантаження на стержень вважають ударним? На які типи їх поділяють?

2. Які гіпотези використовують в інженерній практиці для розрахунку стержнів на удар?

3. Що характеризує динамічний коефіцієнт (K_d) і за якими формулами його визначають у розрахунках на поздовжній удар стержнів без урахування їхньої власної ваги?

4. Як впливає зміна перерізу стержнів на значення динамічного коефіцієнта щодо поздовжнього удару?

5. В яких випадках для динамічних розрахунків стержнів, що зазнають удару, враховують їхню масу? Чому тоді дорівнює динамічний коефіцієнт?

6. Що таке зведена маса і зведена (розрахункова) висота падіння вантажу? Як визначають коефіцієнти зведеної маси з кількості руху і з кінетичної енергії? За якою формулою підраховують коефіцієнт зведеної висоти падіння вантажу?

7. Як впливають амортизатори деформацій на значення динамічних коефіцієнтів для стержнів, що зазнають удару?

8. Як змінюються механічні характеристики матеріалів щодо ударного навантаження?

9. Що таке ударна проба матеріалів і для чого її використовують? Що являє собою ударна в'язкість матеріалу, як її позначають і в яких одиницях вимірюють?

10. У яких межах коливаються значення K_C для крихких, напівкрихких і пластичних матеріалів?

РОЗДІЛ V КОЛИВАННЯ БАЛОК

5.1. Вступ

Світ повен коливань. Природа їхня різноманітна. Із цього різноманіття зупинимось на розгляді лише вібрацій, механічних коливань, що суттєво впливають на міцність і жорсткість пружних систем. Вібрації завдають чималой шкоди пружним системам, навіть руйнують всілякі споруди. На рис. 5.1, *а* показано балку висячого моста, що була зруйнована коливаннями під дією вітру. Проте вібрації можуть приносити й користь, як наприклад, під час віброзанурювання будівельних паль (рис 5.1, *б*).

Із великого класу механічних коливань розглянемо тільки вільні (власні) та вимушені коливання. Коливання бувають періодичні, неперіодичні та майже періодичні. Серед класу періодичних коливань важливу роль у техніці відіграють гармонійні (синусоїдні та косинусоїдні) коливання, що змінюються за законом синусоїди або косинусоїди.

Серед типу неперіодичних коливань мають місце спадаючі та зростаючі коливання. Наведених ознак коливних (вібраційних) процесів явно недостатньо для повної систематизації можливих різновидів коливань. Для стержневих систем розрізняють повздовжні (розтягуючі та стискаючі), поперечні (згинові), крутильні коливання та їхні комбінації.

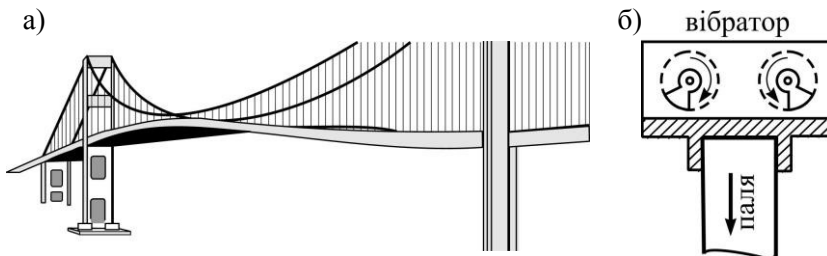


Рис. 5.1. Руйнування моста від дії вітру (*а*) і схема віброзанурювання будівельних паль (*б*)

Теоретичне та експериментальне дослідження коливань являє собою доволі складну й дуже цікаву задачу. Для спрощення її розв'язування коливну систему схематизують за кількістю ступенів вільності. Ступінь вільності – це кількість незалежних геометричних параметрів, що визначають положення всіх мас для будь-яких можливих пружних систем від вихідного рівноважного стану. Слід розрізняти поняття «ступінь вільності» для коливної системи та для кінематичної схеми конструкції. Так, наприклад, звичайна двоопорна балка розподіленої маси з кінематичного погляду має нульовий ступінь вільності, а з погляду механічних коливань вона дорівнює нескінченності. В той же час для інженерних розрахунків цю реальну балку, яка зазвичай дуже далека від пружної системи зі скінченною кількістю ступенів вільності, на практиці замінюють спеціально добраною, еквівалентною за остаточним результатом умовною балкою з одним або двома ступенями вільності.

На рис. 5.2, а показано умовно невагому балку з однією точковою масою m . Така балка має один ступінь вільності, тому що положення маси на цій балці визначається одним параметром – прогином y .

Невагома балка – умовна назва балки, вагою якої порівняно з вагою вантажу в практичних розрахунках можна знехтувати.

Точкова маса – маса, яку схематично вважаємо зосередженою в одній точці, зазвичай у центрі ваги прикладеного вантажу.

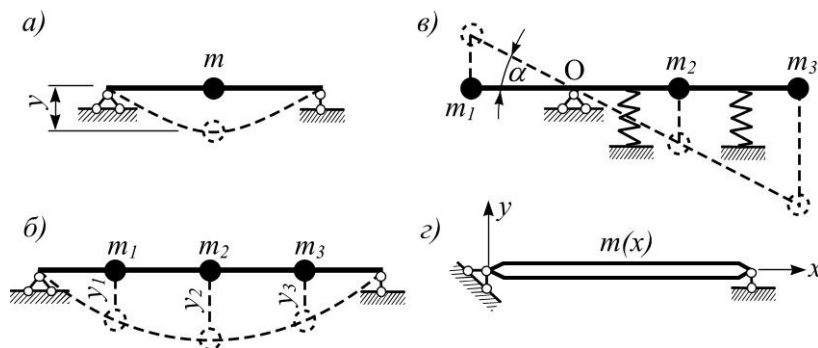


Рис. 5.2. Один (а, в), три (б) і безліч (г) ступенів вільності балок

Невагома балка з трьома точковими масами, що зображена на рис. 5.2, б, має

три ступені вільності. Абсолютно жорстка балка (рис. 5.2, в), що обертається навколо нерухомої точки O , являє собою систему з одним ступенем вільності незалежно від кількості точкових мас і пружних опор, оскільки положення всіх мас можна визначити лише одним параметром α - кутом повороту балки відносно центра O . Якщо врахувати власну розподілену масу балки (рис. 5.2, г), то ступінь вільності такої балки дорівнюватиме нескінченності. Точно кажучи, всі балки, всі пружні системи мають не точкову, а розподілену масу, і тому вони завжди мають нескінченну кількість ступенів вільності. Проте в багатьох випадках можна ідеалізувати розрахункову схему та звести пружну систему з розподіленими масами до розрахунку систем зі скінченною кількістю ступенів вільності включно до одного. Але таке зведення мас має бути доцільним з погляду точності розрахунків, у межах допустимих похибок. У всякому разі, точність теоретичних розрахунків у багатьох випадках можна перевірити результатами експерименту.

5.2. Власні коливання пружних невагомих балок з одним ступенем вільності

Якщо пружну балку вивести зі стану рівноваги будь-яким навантаженням, то після зняття навантаження балка здійснюватиме вільні (власні) коливання. Визначення власних частот коливної пружної системи відіграє велику роль у розрахунках на міцність і жорсткість.

Розглянемо власні коливання консольної балки (рис. 5.3), жорстко затисненої лівим кінцем, з точковою масою m на вільному кінці. На підставі другого закону Ньютона маса дорівнює:

$$m = \frac{G}{g}. \quad (5.1)$$

Тобто $G = mg$, де m – маса вантажу, кг; G – вага вантажу, що діє на невагому балку, Н; $g = 9,80665 \approx 9,81$ – прискорення вільного падіння, м/с^2 .

Від статичної дії вантажу G балка в його точці прикладання прогнеться на величину y_{st} . На рис. 5.3 суцільною кривою лінією показано пружну лінію балки від статичного навантаження силою G .

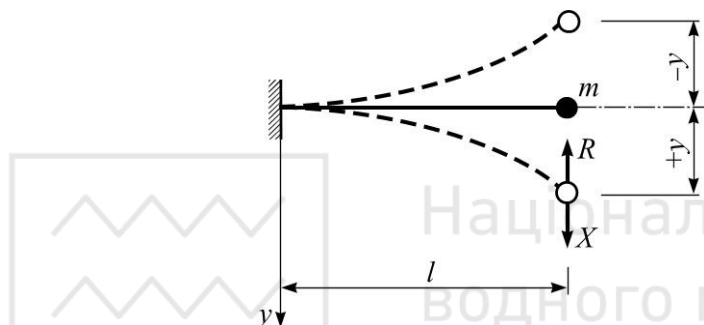


Рис. 5.3. Схема власних коливань невагомий балки з одним ступенем вільності

Під час власних коливань консольної балки у будь-яку мить на масу m , яка відхилилась на величину y від положення статичної рівноваги (суцільна крива лінія на рис. 5.3), діятиме відновлювальна сила R . Це та сила пружної реакції балки, яка намагається повернути масу m в положення статичної рівноваги балки. Відновлювальна сила R пропорційна відхиленню y – точки прикладання маси m :

$$R = ry, \quad (5.2)$$

де r – коефіцієнт жорсткості, Н/м, який визначає пружну реакцію балки в розглядуваній точці для одиничного її переміщення. Коефіцієнт жорсткості залежить від пружних характеристик балки та її геометричних розмірів і дорівнює:

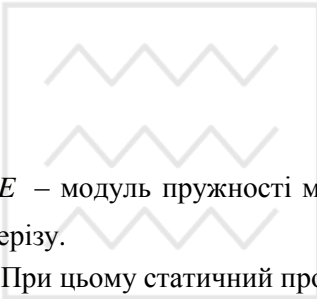
$$r = \frac{1}{\delta}, \quad (5.3)$$

де δ – піддатливість пружних систем, що дорівнює статичному переміщенню точки прикладання одиничної сили в напрямку цієї сили.

Наприклад, для балки, що розглядається (рис. 5.3), від дії одиничної сили $\bar{G}=1$ для коефіцієнта r матимемо:

$$\delta = \frac{\bar{G}l^3}{3EI} = \frac{l^3}{3EI}$$

і тоді:



$$r = \frac{3EI}{l^3},$$

де E – модуль пружності матеріалу балки; I – осьовий момент інерції площі перерізу.

При цьому статичний прогин балки y_{st} від вантажу G дорівнюватиме:

$$y_{st} = \delta G. \quad (5.4)$$

На підставі принципу Д'Аламбера маса m перебуватиме у динамічній рівновазі, коли до неї, крім відновлювальної сили R , прикласти силу інерції X , яка дорівнюватиме добутку маси m на її прискорення $w = \frac{d^2y}{dt^2}$. Сила X спрямована в протилежну сторону прискоренню:

$$X = -m \frac{d^2y}{dt^2} = -m\ddot{y}, \quad (5.5)$$

де t – час.

У цьому випадку рівняння динамічної рівноваги для рухомої точки m набере такої форми (рис. 5.3)


$$\sum Y = -R + X = 0. \quad (5.6)$$

Маючи на увазі значення R і X за формулами (5.2) і (5.5), рівняння (5.6)

запишемо так:

$$m\ddot{y} + ry = 0. \quad (5.7)$$

Рівняння (5.7) – це звичайне однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку, розв’язок якого відомий. Перепишемо рівняння таким чином:

де 

$$\ddot{y} + \frac{r}{m}y = 0, \quad \text{або} \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (5.8)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{r}{m}} \quad (5.9)$$

носить назву колової (циклічної) частоти.

Загальний розв’язок рівняння (5.8) має вигляд:

$$y = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (5.10)$$

Розв’язок (5.10) означає, що має місце незгасаючий коливний процес, який періодично повторюється через певні інтервали.

Сталі інтегрування A і B визначають з початкових умов коливного процесу:

при $t = 0$

$$y = y_0 = B,$$

при $t = 0$

$$v = \dot{y} = v_0, \quad (5.11)$$

де v – швидкість коливного процесу, яка дорівнює:

$$v = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = \omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t .$$

Використовуючи другу початкову умову, матимемо:

$$A = \frac{v_0}{\omega} . \quad (5.12)$$

Підставляючи сталі інтегрування A і B за формулами (5.11) і (5.12) в рівняння (5.10), дістанемо рівняння гармонійного коливання:

$$y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + y_0 \cos \omega t . \quad (5.13)$$

Якщо підставити сталі інтегрування A і B у формі:

$$A = \frac{v_0}{\omega} = a \cos \varphi_0 \quad \text{і} \quad B = y_0 = a \sin \varphi_0 , \quad (5.14)$$

то вираз (5.13) можна записати так:

$$y = a \cos \varphi_0 \sin \omega t + a \sin \varphi_0 \cos \omega t$$

або в більш стислому вигляді:

$$y = a \sin(\omega t + \varphi_0) , \quad (5.15)$$

де a – амплітуда коливань, м; φ_0 – початкова фаза коливань.

Амплітуда a характеризує розмах коливань (рис. 5.4), тобто a – це найбільше відхилення точкової маси m від її середнього положення.

Початкова фаза коливання φ_0 характеризує відхилення точкової маси в

початковий момент коливного процесу. Фазою коливання називають значення аргументу $\omega t + \varphi_0 - 2n\pi$, де n – ціле число. При цьому значення аргументу змінюється періодично в межах від 0 до 2π . На рис. 5.4 зображено графік рівняння (5.15), тобто графік коливного руху пружної системи з одним ступенем вільності без збудовальної сили. Це графік синусоїдальних гармонійних коливань у координатах $y-t$.

У формулу (5.15) входять такі величини:

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y_0^2}. \quad (5.16)$$

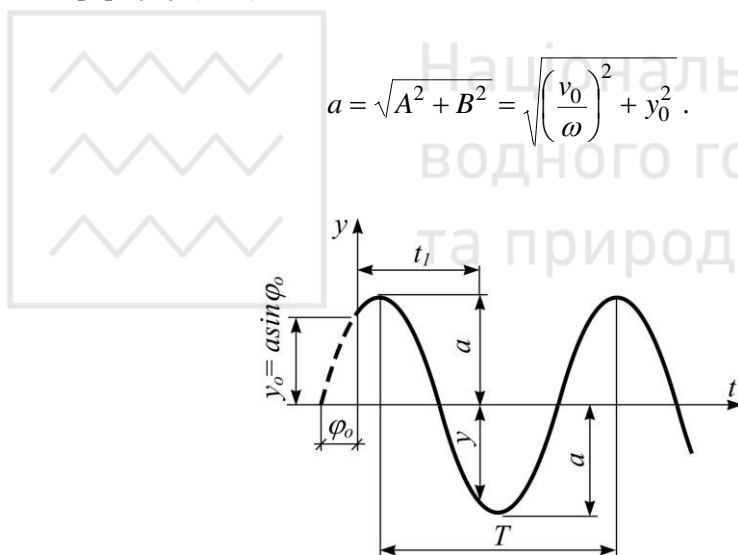


Рис. 5.4. Графік коливного руху

Із формул (5.14) знаходимо φ_0 :

$$\varphi_0 = \frac{B}{A} = \operatorname{arctg} \frac{\omega y_0}{v_0} \quad (5.17)$$

або

$$\varphi_0 = \operatorname{arcsin} \frac{y_0}{a} \quad (5.18)$$

оскільки із рівняння (5.15) при $t = 0$, маємо:

$$y_0 = a \sin \varphi_0. \quad (5.18 \text{ а})$$

Для визначення розмірів амплітуди продиференціюємо рівняння (5.15):

$$\dot{y} = v = a\omega \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (5.19)$$

Тут при $t = 0$:

$$v_0 = a\omega \cos \varphi_0. \quad (5.20)$$

Розглядаючи сумісно вирази (5.18а) і (5.20), дістанемо вже відомий вираз для амплітуди a за формулою (5.16).

Рівняння (5.15) дає однакові значення для y (рис. 5.4) при $t = t_1$, при $t = t_1 + \frac{2\pi}{\omega}$, $t = t_1 + \frac{4\pi}{\omega}$, ... $t = t_1 + \frac{2n\pi}{\omega}$. Це означає, що коливний процес періодично повторюється через інтервал T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ с}, \quad (5.21)$$

T – тривалість повного циклу коливань у секундах.

Інтервал часу між двома сусідніми однозначними амплітудами (на рис. 5.4 це відрізок T) називається періодом коливання.

Із рівнянь (5.9) і (5.21) випливає, що частота ω і період вільних коливань T не залежать від початкових умов, а залежать лише від параметрів пружної системи.

Маса m характеризує інертність пружної системи, а коефіцієнт жорсткості r – пружні властивостя коливної системи.

Кількість повних циклів коливань за 1 секунду виражають в герцах і називають частотою коливання λ :

$$\lambda = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (5.22)$$

Кількість коливань упродовж 2π секунд називають коловою (циклічною) частотою і її визначають за формулою (5.9) та ще (коли врахувати формули (5.1) і (5.3), (5.4): $r = \frac{1}{\delta}$, $m = \frac{G}{g}$, $\delta = \frac{y_{st}}{G}$) за такими:

$$\omega = \sqrt{\frac{r}{m}} = \frac{1}{\sqrt{\delta m}} = \sqrt{\frac{g}{y_{st}}}. \quad (5.23)$$

Із формул (5.23) випливає, що колова частота ω зменшується, коли статичний прогин пружної балки y_{st} збільшується та збільшується маса m . І навпаки, частота ω збільшується, коли зростає жорсткість балки r .

Кількість коливань за хвилину називають технічною частотою, яка дорівнює:

$$n = 60\lambda = \frac{60}{T} = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{y_{st}}}. \quad (5.24)$$

Період власних коливань і частота коливань, що пов'язана з ним, є головними динамічними характеристиками пружних систем.

Якщо навантаження зростає або взагалі зазнає змін за проміжок часу, який дорівнює менше двох–трьох періодів власних коливань, то таке навантаження стосовно пружної системи вважають динамічним або швидкозмінним.

Якщо ж навантаження зростає або змінюється протягом часу, що дорівнює п'ятьом–десятьом і більше періодам, то ефект таких навантажень наблизатиметься до статичних.

Частота власних коливань балки залежить від способу закріплення балки, який впливає на розмір коефіцієнта жорсткості r . Якщо, наприклад, дібрати довжину консолі (рис. 5.5, а) з двотавровим перерізом так, щоб для певного вантажу її частота власних коливань дорівнювала $\omega = 10$ Гц, то для тих самих розмірів, форми перерізу, матеріалу та навантаження для двоопорної балки (рис. 5.5, б) $\omega = 40$ Гц, а для двостороннє затисненої балки (рис. 5.5, в) $\omega = 80$ Гц.

Крім способу закріплення балки її частота власних коливань залежить ще від механічних властивостей матеріалу, від розмірів і форми перерізу та від маси вантажу.

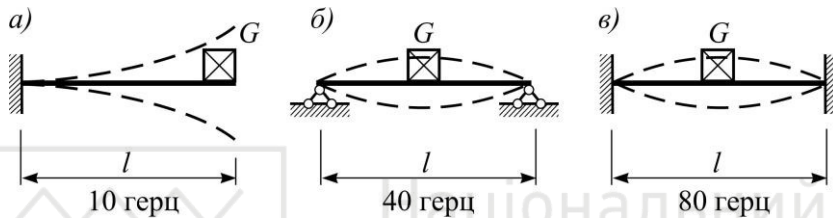


Рис. 5.5. Вплив способу закріплення балки на частоту власних коливань

Власні коливання можливі завдяки тому, що пружні системи мають масу, через що під час коливного руху можуть накопичувати кінетичну енергію та ще через те, що можуть накопичувати потенціальну енергію, коли відхиляються від стану рівноваги. Проте треба зазначити одну характерну особливість власних коливань: вони з часом згасають, і ця їхня властивість пояснюється тертям як внутрішнім, так і зовнішнім. У цьому випадку явище тертя називають демпфуванням або демпфувальним ефектом.

Може постати питання, для чого потрібно вивчати власні коливання, розраховувати їхні власні частоти, виявляти їхні форми, досліджувати їхнє демпфування? Коливний тип руху має фундаментальне значення для інженерів. Частота, форми, можливість демпфування визначають так звану динамічну індивідуальність пружної системи.

Знаючи динамічні характеристики тої чи тої пружної системи, можна передбачати її поведінку в різних умовах вібраційного навантаження.

Приклад 5.1. Визначити колову частоту ω власних коливань двоопорної балки (рис. 5.6, а) із зосередженим вантажем $G = 35 \text{ кН}$. Профіль балки – двотавр №30 ($I_x = 7080 \text{ см}^4$), матеріал балки – сталь ($E = 200 \text{ ГПа}$). Власну вагу балки не враховувати.

Розв'язок. Визначаємо статичний прогин балки під вантажем G в точці C , для чого будуємо епюру згинових моментів від вантажу $G = 35 \text{ кН}$ (рис. 5.6, б) і епюру згинових моментів від одиничного вантажу $\bar{G} = 1$,

прикладеного в точці C .

Прогин балки визначаємо за інтегралом Мора $y = \frac{1}{EI_0} \int M \bar{M} dx$, розв'язок якого виконуємо за способом Сімпсона–Корноухова:

$$y_{st} = \frac{1}{6EI} \left[1 \cdot (0 + 4 \cdot 14 \cdot 0,4 + 28 \cdot 0,8) \cdot 10^3 + \right. \\ \left. + 4(28 \cdot 0,8 + 4 \cdot 14 \cdot 0,4) \cdot 10^3 \right] = \frac{224 \cdot 10^3}{6 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = 0,00264 \text{ м} = \\ = 0,264 \text{ см.}$$

Колову частоту визначаємо за формулою (5.23):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{st}}} = \sqrt{\frac{981}{0,264}} = 61 \text{ с}^{-1}.$$

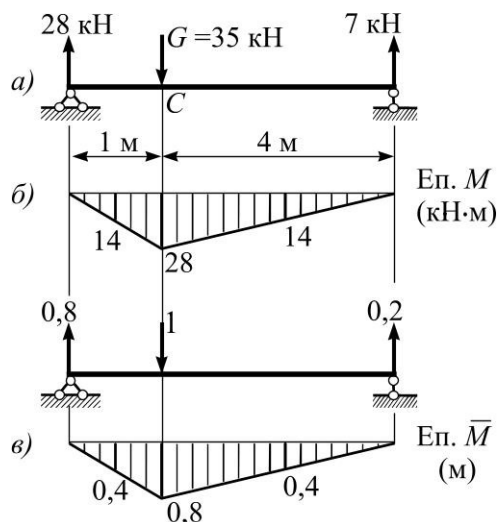


Рис. 5.6. Епюри M і \bar{M} для заданої (а, б) і одиничної (в) балки

5.3. Вимушені коливання пружних невагомих балок з одним ступенем вільності

Суттєву роль відіграють в роботі пружних балок вимушені коливання. На відміну від власних, вимушені коливання не згасають доки існує зовнішнє джерело, доки діють зовнішні сили, що збуджують і далі підтримують коливний процес. Вимушені коливання – це такі коливання, що виникають в коливній системі, коли вона зазнає впливу змінних сил. Сили, що періодично міняють своє значення і напрямок й тим самим підтримують вимушені коливання, називаються збуджувальними силами.

Розглянемо вимушені пружні коливання на прикладі невагомої балки з однією точковою масою m , на яку, крім відновлювальної сили R і сили інерції X , діє ще й збуджувальна сила $P(t)$, що змінюється в часі (рис. 5.7).

Збуджувальні сили можуть змінюватися в часі за будь-яким законом. Найбільше практичне значення для розрахунків пружних систем мають вібраційні гармонійні навантаження, що змінюються в часі за законом синуса або косинуса:

$$P(t) = P_0 \sin \theta t, \quad (5.25)$$

де P_0 – амплітуда збуджувальної сили; θ – колова частота збуджувальної сили.

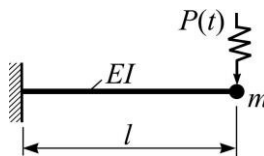


Рис. 5.7. Схема вимушених коливань

За гармонійним законом змінюються, наприклад, складові відцентрової сили – горизонтальна P_x і вертикальна P_y – під час рівномірного обертання незрівноваженої маси m (рис. 5.8).

Коли до невагомої балки (рис. 5.3), крім сил R і X , прикладено гармонійну

збурювальну силу $P(t)$, яку визначає рівність (5.25), то замість однорідного диференціального рівняння (5.7) матимемо неоднорідне рівняння:

$$m\ddot{y} + ry = P_0 \sin \theta t \quad (5.26)$$

або після спрощення:



$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P_0}{m} \sin \theta t. \quad (5.27)$$

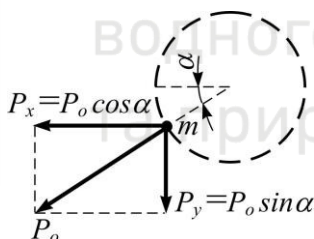


Рис. 5.8. Зміна складових відцентрової сили P_0

Частинний розв'язок рівняння (5.27) шукатимемо у вигляді

$$y = Y \sin \theta t. \quad (5.28)$$

Підставивши вираз (5.28) у рівняння (5.27) і скоротивши на $\sin \theta t$, дістанемо:

$$-m\theta^2 Y + rY = P_0.$$

Звідки величина Y дорівнює:

$$Y = \frac{P_0}{r - m\theta^2} = \frac{P_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}$$

тобто

$$Y = \frac{P_0}{m\omega^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)}, \quad (5.29)$$

де $\omega^2 = \frac{r}{m}$ - квадрат частоти власних коливань пружної балки.

Повний розв'язок рівняння (5.27) складається із загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (5.15) і частинного розв'язку (5.28) і (5.29) неоднорідного рівняння (5.27):

$$y = a \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{P_0 \sin \theta t}{m\omega^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)}. \quad (5.30)$$

Перший доданок рівняння (5.30) визначає власні (вільні) коливання, а другий – вимушені.

Як буде доведено нижче, власні коливання швидко згасають завдяки внутрішнім і зовнішнім силам опору. З часом установлюються вимушені коливання з частотою θ за таким законом:

$$y = \frac{P_0 \sin \theta t}{m\omega^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)}. \quad (5.31)$$

Рівняння (5.31) піддається спрощенню завдяки залежностям $r = \frac{1}{\delta}$, (5.3) і $r = \omega^2 m$, (5.9):

$$y = \frac{P_0 \sin \theta t}{m\omega^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} = \frac{P_0 \sin \theta t}{r \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} = \frac{\delta P_0 \sin \theta t}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = \mu y_{st}(P) \cdot \sin \theta t, \quad (5.32)$$

де $\delta P_0 = y_{st}(P)$ – статичний угин пружної балки від сили P_0 в напрямку дії цієї сили; μ – коефіцієнт наростання коливань, який показує у скільки разів динамічна дія сили $P(t)$ перевищує статичну дію її амплітуди P_0 :

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}. \quad (5.33)$$

Добуток $\mu y_{st}(P)$ у формулі (5.32) називають динамічним прогином $y_d(P)$ від сили $P(t)$. Добуток $\mu y_{st}(P)$ дорівнює амплітуді вимушених коливань.

Значення динамічного коефіцієнта μ згідно з формулою (5.33) залежить від співвідношення θ/ω , тобто від відношення частоти збудовальної сили θ до частоти власних коливань ω . Цю залежність зображено графіком на рис. 5.9. Якщо на графіку відкладати абсолютні значення коефіцієнта μ , то замість суцільної кривої лінії у правому нижньому квадранті зображають пунктирною лінією у верхньому правому квадранті, як це зображено на рис. 5.9.

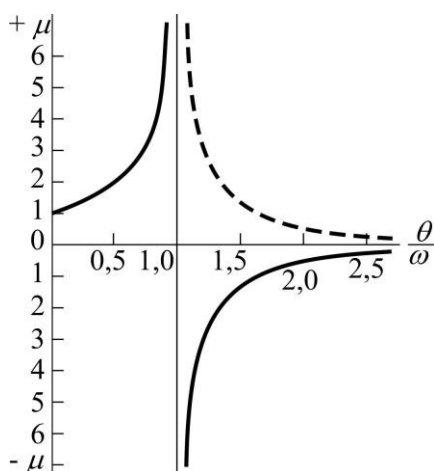


Рис. 5.9. Залежність коефіцієнта μ від співвідношення θ/ω

При $\theta < \omega$ коефіцієнт μ має додатне значення: $\mu > 1$. Це означає, що вимушені коливання відбуваються в тій самій фазі, що і коливання збудовальної

сили $P(t)$.

При $\theta > \omega$ коефіцієнт μ має від'ємне значення: $\mu < 1$ і це говорить про те, що коливання сили $P(t)$ і маси m відбуваються в протилежних фазах, тобто в протилежних напрямках: коли рух сили $P(t)$ спрямований донизу, то точкова маса m переміщується догори і навпаки.

При $\theta = \omega$ відбувається резонанс і теоретично згідно з формулою (5.33) розмір коефіцієнта μ досягає нескінченності: $\mu = \pm\infty$. Частота θ збудовальної сили у цьому випадку називається критичною.

Приклад 5.2 Визначити динамічний коефіцієнт μ , амплітуду змущених коливань $\mu y_{st}(P)$ і найбільші нормальні напруження σ_{max} в балці, яка розглянута в прикладі 5.1, якщо зосереджений вантаж $G = 35$ кН являє собою двигун, що здійснює $n = 420$ об/хв і дає вертикальну складову відцентрової сили $P(t) = P_0 \sin \theta t$, де $P_0 = 8$ кН.

Розв'язок. Колова частота власних коливань підрахована в прикладі 5.1 і дорівнює $\omega = 61 \text{ с}^{-1}$. Колова частота вимушених коливань дорівнюватиме частоті збудовальної сили:

$$\theta = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 420}{60} = 43,96 \text{ с}^{-1}.$$

Динамічний коефіцієнт вимушених коливань (коефіцієнт наростання коливань) за формулою (5.33) дорівнює:

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{43,96}{61}\right)^2} = 2,080.$$

Статичний прогин $\mu y_{st}(P)$ від сили $P_0 = 8$ кН знайдемо із пропорції, використовуючи результат, здобутий в прикладі 5.1 для сили $G = 35$ кН:

$$\frac{y_{st}(P)}{y_{st}} = \frac{P_0}{G}.$$

Звідси

$$y_{st}(P) = y_{st} \frac{P_0}{G} = 0,264 \cdot \frac{8}{35} = 0,0603 \text{ см.}$$

Амплітуда вимушених коливань дорівнює динамічному прогину $y_d(P)$:

$$y_d(P) = \mu y_{st}(P) = 2,08 \cdot 0,0603 = 0,1254 \text{ см.}$$

Повний прогин балки y_c під силою $P(t)$ і силою G в точці C дорівнює статичному прогину y_{st} від сили G плюс динамічний прогин $y_d(P)$ від сили $P(t)$:

$$y_c = y_{st} + y_d(P) = 0,264 + 0,1254 = 0,3894 \text{ см.}$$

Максимальний прогин балки y_{max} буде десь близько її середини і дорівнюватиме трохи більше ніж прогин в точці C : $y_{max} > y_c$.

Найбільший згинувий момент M_{max} з урахуванням динамічної дії сили $P(t)$ дорівнює:

$$M_{max} = (G + \mu P_0) \frac{ab}{l} = (35 + 2,08 \cdot 8) \cdot 10^3 \frac{1,4}{5} = 41,31 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Для двотавра №30 осьовий момент опору $W_x = 472 \text{ см}^3$ і тоді найбільше нормальне напруження в небезпечному перерізі C матиме таке значення:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{41,31 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} = 87,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 87,5 \text{ МПа.}$$

У випадку, коли двигун не працює, тобто коли $P_0 = 0$, маємо:

$$M_{max}^0 = \frac{Gab}{l} = \frac{35 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 4}{5} = 28 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м;}$$

$$\sigma_{max}^0 = \frac{M_{max}^0}{W_x} = \frac{28 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} = 59,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 59,3 \text{ МПа}.$$

Таким чином, у прикладі 5.2 показано, що динамічне навантаження збільшує напруження на $\frac{87,5}{59,3} \cdot 100\% = 147,6\%$.

В інших випадках таке збільшення може досягти руйнівних значень.

5.4. Явище резонансу

Те, що згідно з формулою (5.33) для випадку, коли частота збурювальної сили θ дорівнює частоті власних коливань ω , тобто під час резонансу, амплітуда коливань збільшується до нескінченності, – є абстракцією. В дійсності завжди існують чинники внутрішні та зовнішні, що обмежують розмір амплітуди. Щоб докладніше з'ясувати явище резонансу в ідеальному вигляді, без впливу гальмувальних сил, розглянемо рівняння (5.27) для критичної частоти θ , тобто при $\theta = \omega$, і тоді матимемо:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P_0}{m} \sin \omega t. \quad (5.34)$$

Частинний розв'язок рівняння (5.34) шукатимемо у формі:

$$y = f t \cos \omega t, \quad (5.35)$$

де f – наразі невідомий параметр.

Підставивши вираз (5.35) у рівняння (5.34), дістанемо:

$$\left(-\omega^2 f t \cos \omega t - 2\omega f \sin \omega t + \omega^2 f t \cos \omega t \right) = \frac{P_0}{m} \sin \omega t.$$

Після спрощення, скоротивши на $\sin \omega t \neq 0$, остаточно матимемо:

$$-2\omega f = \frac{P_0}{m},$$

звідки шуканий параметр f дорівнює:

$$f = -\frac{P_0}{2\omega m} \quad (5.36)$$

або, якщо врахувати вираз (5.23):

$$f = -\frac{P_0}{2\sqrt{mr}}, \quad (5.37)$$

Враховуючи вираз (5.37) частинний розв'язок рівняння (5.34) набирає, згідно з формулою (5.35), такого вигляду:

$$y = -\frac{P_0 t}{2\sqrt{mr}} \cos \omega t. \quad (5.38)$$

Графік цього коливання зображено на рис. 5.10. Розмір амплітуди коливань поступово збільшується, безмежно зростаючи в часі за лінійним законом. Таке явище мало б місце тоді, коли б в коливній пружній системі не було сил опору. Але таких коливних інженерних систем не існує.

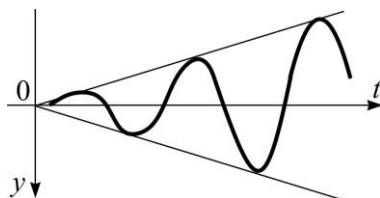


Рис. 5.10. Графік коливання пружної системи під час резонансу без впливу гальмувальних сил

В реальних системах амплітуди коливань можуть досягати хоч і великих розмірів, навіть руйнівних, та все ж таки скінченних.

5.5. Явище биття

Дуже небезпечним явищем є биття, коли частота θ збурювальної сили майже дорівнює частоті ω власних коливань пружної системи. Биття виникає тоді, коли коливання відбуваються в зоні, яка близька до резонансу: $\theta \approx \omega$. У цьому випадку можна прийняти

$$\frac{\theta}{\omega} \approx 1;$$

$$\theta + \omega = 2\omega;$$

$$\omega^2 - \theta^2 = (\omega + \theta) \cdot (\omega - \theta) \approx 2\omega(\omega - \theta).$$

Якщо на початку коливань, при $t = 0$, пружна система була в рівноважному невідхиленому стані, то, щоб задовольнити початковим умовам, слід до частинного розв'язку (5.31) додати загальний розв'язок однорідного рівняння (5.10):

$$y = \frac{P_0 \sin \theta t}{m\omega^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} + A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (5.39)$$

Сталі інтегрування A і B знаходимо з початкових умов:

а) при $t = 0$ $y = 0$ і тоді із рівняння (5.39) маємо $B = 0$.

б) при $t = 0$ $v_0 = \dot{y} = 0$ і тоді із рівняння

$$\dot{y} = \frac{P_0 \theta \cos \theta t}{m \omega^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} + \omega A \cos \omega t = 0$$

маємо:

$$A = -\frac{\theta P_0}{m \omega^3 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)}.$$

Враховуючи значення сталих A і B , рівняння (5.39) набирає вигляду:

$$y = \frac{P_0}{m \omega^3 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} (\omega \sin \theta t - \theta \sin \omega t). \quad (5.40)$$

Перетворимо тут вираз синусів за тригонометричною формулою $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$, де приймемо $\alpha = \theta t$ і $\beta = \omega t$:

$$\begin{aligned} & \omega \sin \theta t - \theta \sin \omega t + (\omega \sin \omega t - \omega \sin \theta t) = \\ & = \omega (\sin \theta t - \sin \omega t) + (\omega - \theta) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Останнім доданком у цьому виразі нехтуємо через його мализну, а вираз іншого доданка замінимо на:

$$\omega (\sin \theta t - \sin \omega t) = 2 \omega \sin \left(\frac{\theta - \omega}{2} t \right) \cdot \cos \left(\frac{\theta + \omega}{2} t \right).$$

Маючи на увазі цей результат, рівність (5.40) набере таку форму:

$$y = \frac{2\omega P_0 \sin\left(\frac{\theta - \omega}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta + \omega}{2}t\right)}{m\omega^3\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} = \frac{2P_0 \sin\left(\frac{\theta - \omega}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta + \omega}{2}t\right)}{m(\omega^2 - \theta^2)}. \quad (5.41)$$

Рівняння (5.41) відповідає вимушеним коливанням пружної системи (балки) у випадку биття. Амплітуда цих коливань a_b дорівнює:

$$a_b = \frac{2P_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} \sin\left(\frac{\theta - \omega}{2}t\right). \quad (5.42)$$

Амплітуда процесу биття a_b дуже повільно змінюється в часі з періодом T_b :

$$T_b = \frac{2\pi}{\frac{\theta - \omega}{2}} = \frac{4\pi}{\theta - \omega}. \quad (5.43)$$

Період вимушених коливань T дорівнює:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\theta + \omega}{2}} = \frac{4\pi}{\theta + \omega} = \frac{2\pi}{\theta}. \quad (5.44)$$

Оскільки $\theta \approx \omega$, то $T_b \gg T$.

Графік коливання биття зображено на рис. 5.11.

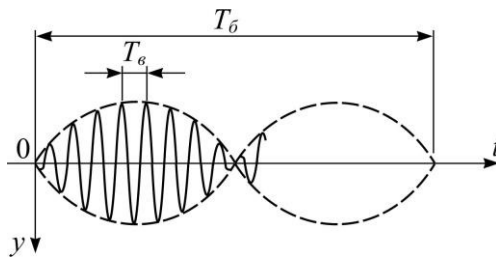


Рис. 5.11. Графік коливання пружної системи у випадку биття

Розглянуті коливання биття виникають за формою, що графічно зображено на рис. 5.11, лише тоді, коли не враховуються сили опору.

5.6. Власні згасаючі коливання пружної невагомої балки з одним ступенем вільності

Власні згасаючі коливання з демпфуванням – це власні коливання щодо сил опору, але без впливу збурювальних сил.

Розглянемо власні коливання пружної системи (невагомої балки) з одним ступенем вільності (рис. 5.12), коли сила опору F (інакше демпфувальна сила) пропорційна швидкості коливань \dot{y} . Сила F прикладена до точкової маси m і спрямована в бік, протилежний її руху:

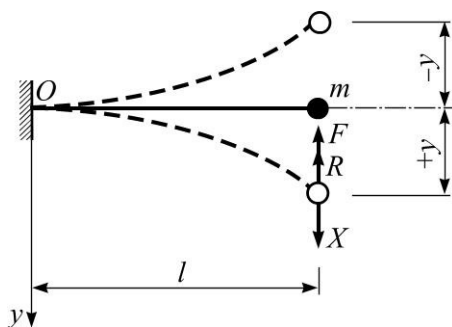


Рис. 5.12. Схема власних згасаючих коливань із демпфуванням

$$F = k\dot{y}, \quad (5.45)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, фізичний зміст якого з'ясуємо нижче.

Рівняння динамічної рівноваги всіх сил, що діють на точкову масу m (рис. 5.12), має вигляд:

$$\sum y = -F - R + X = 0, \quad (5.46)$$

де відновлювальна сила $R = ry$, (5.2), а сила інерції $X = -m\ddot{y}$, (5.5).

Сила $G = mg$ в рівняння (5.46) не входить, тому що її дію враховано переміщеннями $(-y)$ і $(+y)$, що відраховуються не від нульового положення балки, а від рівня статичної рівноваги (рис. 5.12).

Підставивши в рівняння (5.46) значення сил F , R і X згідно з формулами (5.45), (5.2) і (5.5), поділивши потім здобуте рівняння на m і змінивши знаки на протилежні, дістанемо звичайне однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку щодо демпфування:



$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{r}{m}y = 0. \quad (5.47)$$

Розв'язок диференціального рівняння (5.47) відомий:

$$y = a_0 e^{-kt/2m} \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}), \quad (5.48)$$

де a_0 – початкова амплітуда власних коливань з урахуванням демпфування (гальмувальних сил):

$$a_0 = \sqrt{y_{01}^2 + \left(\frac{v_0 + y_{01} \frac{k}{2m}}{\omega_1} \right)^2}; \quad (5.49)$$

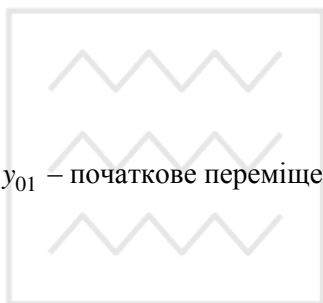
$e = 2,728$ – основа натуральних логарифмів; ω_1 – колова частота власних коливань з урахуванням згасання коливань:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{r}{m} - \left(\frac{k}{2m} \right)^2}, \quad (5.50)$$

яка, враховуючи залежності (5.23), дорівнює

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{k}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{g}{y_{st}} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2}. \quad (5.51)$$

Крім того у формули (5.48–5.51) входять такі величини: φ_{01} – початкова фаза власних коливань, що характеризує відхилення точкової маси щодо демпфування:



$$\varphi_{01} = \arcsin\left(\frac{y_{01}}{a_0}\right); \quad (5.52)$$

y_{01} – початкове переміщення щодо демпфування:

$$y_{01} = a_0 \sin \varphi_{01}. \quad (5.53)$$

Період T_1 , тобто тривалість повного циклу в секундах щодо демпфування:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}. \quad (5.54)$$

Графік власних згасаючих коливань зображено на рис. 5.13.

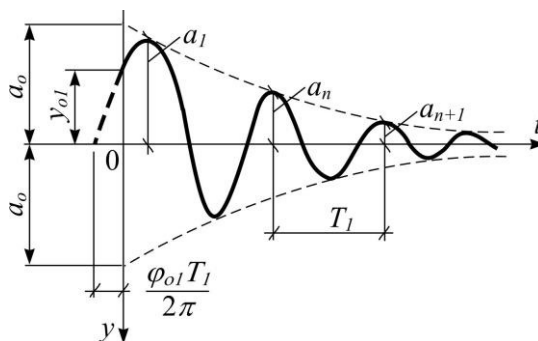


Рис. 5.13. Графік власних згасаючих коливань

Визначимо швидкість згасання коливань. Для цього визначимо δ_d – натуральний логарифм співвідношення двох послідовних однозначних амплітуд

власних коливань (див. рис. 5.13):

$$\delta_d = \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \ln \frac{e^{-\frac{kt_n}{2m}}}{e^{-\frac{kt_{n+1}}{2m}}} = \ln e^{\frac{k(t_{n+1}-t_n)}{2m}} = \ln e^{\frac{kT_1}{2m}} = \frac{kT_1}{2m} = \alpha T_1. \quad (5.55)$$

Параметр δ_d характеризує швидкість згасання коливань щодо демпфування та називається логарифмічним декрементом згасання коливань, а параметр $\alpha = \frac{k}{2m}$ – коефіцієнт згасання коливань.

Визначимо коефіцієнт ψ поглинання енергії для власних згасаючих коливань. Коефіцієнт ψ визначає відношення роботи ΔW непружних сил опору матеріалу за повний цикл коливання до роботи W пружних сил за чверть циклу коливань, тобто до роботи пружних сил на шляху від незавантаженого стану пружної системи до її скінченного деформованого стану.

У пружній системі із згасанням залежність між будь-якою зовнішньою силою Φ і переміщенням y є нелінійною. Відомо, що для кожного циклу коливань на діаграмі $\Phi - y$ утворюється замкнена крива лінія, яку називають петлею гістерези (рис. 5.14).

Вважають, що для гармонійних коливань петля гістерези має форму еліпса з центром O на початку координат.

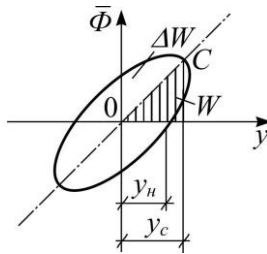


Рис. 5.14. Петля гістерези для гармонійних коливань

На графіку (рис. 5.14) площа еліпса дорівнює ΔW , а площа заштрихованого трикутника – W , при цьому

$$W = \frac{W_c \cdot y_c}{2} = \frac{y_c^2}{2\delta_{11}};$$

$$dW = \frac{y}{\delta_{11}} dy,$$

де δ_{11} - лінійне переміщення одиничної сили $\bar{\Phi} = 1$.

У цьому випадку коефіцієнт поглинання енергії ψ дорівнює:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\Delta W}{W} = - \int_t^{t+T_1} \frac{dW}{W} = -2 \int_t^{t+T} \frac{dy}{y} = -2[\ln(t+T_1) - \ln t] = \\ &= 2 \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = 2\delta_d. \end{aligned} \quad (5.56)$$

У розрахунках звичайно користуються, так званим, коефіцієнтом γ непружного опору внутрішніх сил матеріалу стержня:

$$\gamma = \frac{y_h}{y_c} = \frac{\psi}{2\pi} = \frac{\delta_d}{\pi} = \frac{kT_1}{2\pi n} = \frac{k}{m\omega}. \quad (5.57)$$

Значення коефіцієнта γ для деяких матеріалів і для різних розмірів амплітуд інерційних сил машин зведено в таблицю 5.1.

Таблиця 5.1

Розміри коефіцієнта γ

Амплітуда інерційної сили X , кН	Залізобетон		Цегляне мурування	Деревина	Сталь прокатна
	Попередньо напружений	Ненапружений			
<1,0	0,025	0,05	0,04	0,03	0,01
$\geq 1,0$	0,05	0,10	0,08	0,05	0,025

Формули (5.57) дозволяють виразити раніше прийнятий коефіцієнт k (5.45)

через інші характеристики згасання коливань:

$$k = \frac{2m\delta_d}{T_1} = \frac{m\psi}{T_1} = m\gamma\omega_1 = 2m\alpha = \gamma\sqrt{rm}. \quad (5.58)$$

Із формул (5.58) випливає, що коефіцієнт k не є фізичною константою матеріалу. Він залежить від маси та жорсткості пружної системи.

Слід зауважити, що при $k=0$ із формул (5.47–5.54) впливають формули для характеристик власних коливань без урахування демпфувального ефекту: (5.7–5.9), (5.15–5.18), (5.22–5.24) та ін.

5.7. Вимушені згасаючі коливання пружної невагомої балки з одним ступенем вільності

Якщо до пружної невагомої балки з одним ступенем вільності (рис. 5.12) прикласти гармонійну збурювальну силу $P = P_0 \sin \theta \cdot t$ (рис. 5.7), то, крім сил R , F і X , у рівняння динамічної рівноваги ввійде сила P , і тоді однорідне диференціальне рівняння (5.47) трансформується в неоднорідне диференціальне рівняння з правою частиною:

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} \dot{y} + \frac{r}{m} y = \frac{P_0}{m} \sin \theta t. \quad (5.59)$$

Повний розв'язок рівняння (5.59) складатиметься із загального розв'язку однорідного рівняння (5.48) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння (5.59) у такому вигляді:

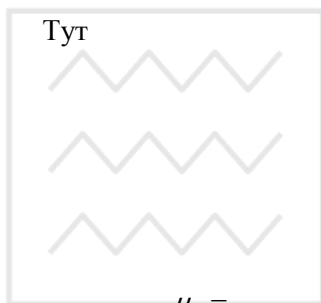
$$y = a_0 e^{\frac{-kt}{2m}} \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) + \mu_0 y_{st}(P) \sin(\theta t - \varepsilon). \quad (5.60)$$

Перший член рівняння (5.60) відображає власні згасаючі коливання, а другий змушені згасаючі.

Власні коливання, як було показано раніше, швидко загасають і тоді установлюються змушені коливання з частотою θ .

Другий доданок формули (5.60) має такі величини:

ε – зсув фази вимушених коливань стосовно до коливань збудовальної сили P ; $y_{st}(P)$ – статичний згин у напрямку дії збудовальної сили від цієї ж сили в точці її прикладання; μ_0 – динамічний коефіцієнт гармонійного навантаження P з урахуванням згасання пружної системи.



$$\varepsilon = \arctg \frac{\frac{k}{m} \theta}{\omega_1^2 - \theta^2}; \quad (5.61)$$

$$\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(\frac{k\theta}{m\omega_1^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(\gamma \frac{\theta}{\omega_1}\right)^2}}. \quad (5.62)$$

Із формули (5.51) для ω_1 випливає, що згасання коливань веде до зменшення частоти власних коливань.

Дослідимо вплив демпфування на частоту власних коливань.

Із (5.51) частота власних згасаючих коливань становить:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{k}{2m}\right)^2},$$

а за формулою (5.58) $k = m\gamma\omega_1$, за формулою (5.57) $k = \frac{\delta_d m \omega}{\pi}$ і $\gamma = \frac{\delta_d}{\pi}$. У

цьому випадку співвідношення $\frac{\omega_1}{\omega}$ дорівнює:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta_d}{2\pi}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \quad (5.63)$$

Розміри співвідношення (5.63) відображено в таблиці 5.2. Наведена таблиця знайомить із характером зміни співвідношення $\frac{\omega_1}{\omega}$ щодо зростання логарифмічного декременту δ_d згасання коливань. Навіть для значного згасання, коли, наприклад, $\gamma = 0,3$ частота ω_1 менша від частоти ω всього на 1,13%, а для $\gamma = 0,5$ – не перевищує 3,2%. Це говорить про те, що згасання коливань майже не впливає на частоту власних коливань. Тому частоту вимушених згасаючих коливань можна визначити без урахування сил опору коливанням, особливо, коли останні невідомі.

Спрощений підхід до визначення частот, коли приймають $\omega_1 \approx \omega$, є особливо раціональним для розрахунку пружних невагомих балок з двома і більше ступенями вільності.

Таблиця 5.2

Вплив сил опору на частоту вимушених коливань ω_1

γ	0	0,2	0,3	0,4	0,5
δ_d	0	0,6283	0,9425	1,2567	1,5708
$\frac{\omega_1}{\omega}$	1	0,9950	0,9887	0,9798	0,9682
$\frac{\omega_1 - \omega}{\omega} \cdot 100\%$	0	0,5%	1,13%	2,02%	3,18%

Амплітуди вимушених коливань і динамічні коефіцієнти завдяки згасанню зменшуються. Вони залишаються скінченними навіть під час резонансу, коли частоти власних і вимушених коливань співпадають, хоча цей випадок дуже небезпечний.

У разі збігу частот ($\theta = \omega$) із формули (5.62) випливає залежність для динамічного коефіцієнта μ_0 з урахуванням згасання коливання:

$$\mu_0 = \frac{1}{\gamma} = \frac{2\pi}{\psi} = \frac{\pi}{\delta_d}. \quad (5.64)$$

Найвищого розміру динамічний коефіцієнт досягає за умови:

$$\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{\gamma^2}{2},$$

коли

$$\mu_{max} = \frac{1}{\frac{\gamma}{2}\sqrt{4-\gamma^2}}. \quad (5.65)$$

Різниця між значеннями динамічного коефіцієнта за формулами (5.64) і (5.65) дуже мала. Графік динамічного коефіцієнта μ_0 у разі згасання коливань зображений на рис. 5.15.

У випадку резонансу амплітуда вимушених коливань обернено пропорційна логарифмічному декременту згасання коливань. Зсув фази коливання стосовно до збудовальної сили дорівнює при цьому $\varepsilon = -\frac{\pi}{2}$, тобто $\frac{1}{4}$ періоду T_1 . Це означає, що переміщення за умов резонансу досягають найбільших розмірів у ті моменти, коли значення збудовальної сили досягає нуля.

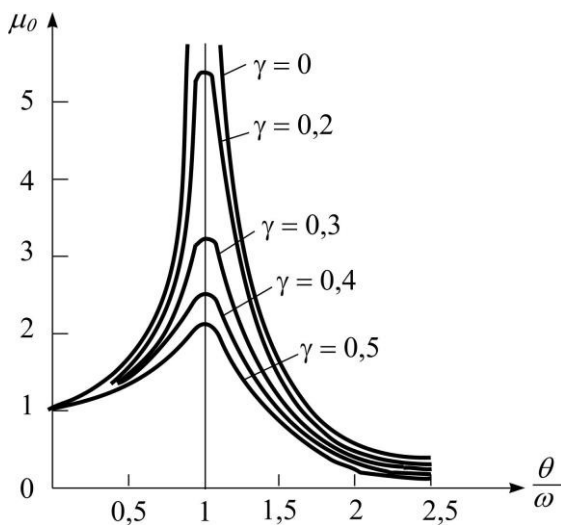


Рис. 5.15. Графік зміни коефіцієнта μ_0 у випадку згасання коливань

У разі дуже великих значень коефіцієнта поглинання енергії ($\psi > 4$), коли коливання відбуваються у в'язкій рідині, частота ω_1 за формулами (5.50–5.51) може стати уявною величиною. Це означатиме, що коливання не буде і що пружна невагома балка з точковим вантажем буде повільно повертатися в початковий стан рівноваги, якщо до цього вона була виведена з нього.

При $\theta > \omega_1$ без урахування згасання коливань ($k = 0$) за формулою (5.62) динамічний коефіцієнт μ_0 стає від'ємною величиною, і коливання збудовувальної сили і точкової маси відбуваються в протилежні сторони.

Приклад 5.3. Визначити з урахуванням згасання динамічний коефіцієнт μ_0 і його розмір у випадку резонансу для балки попереднього прикладу 5.2.

Розв'язок. Із розв'язків прикладів 5.1 і 5.2 використаємо тут колову частоту власних коливань – $\omega = 61 \text{ c}^{-1}$, колову частоту вимушених коливань – $\theta = 43,96 \text{ c}^{-1}$ і динамічний коефіцієнт вимушених коливань – $\mu = 2,080$.

Із таблиці 5.1 визначаємо коефіцієнт непружного опору внутрішніх сил матеріалу – γ . Оскільки балка сталева і амплітуда вертикальної складової відцентрової сили $F_0 = 8 \text{ кН} > 1 \text{ кН}$, то $\gamma = 0,025$.

Беремо також до уваги, що колова частота власних коливань з урахуванням згасання – ω_1 на підставі результатів таблиці 5.2 наближено дорівнює коловій частоті без урахування згасання – ω : $\omega_1 = \omega = 61 \text{ c}^{-1}$.

Динамічний коефіцієнт μ_0 з урахуванням згасання підраховуємо за формулою (5.62):

$$\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(\gamma \frac{\theta}{\omega_1}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{43,96^2}{61^2}\right)^2 + \left(0,025 \frac{43,96}{61}\right)^2}} = 2,079.$$

Таким чином, розмір динамічного коефіцієнта μ_0 з урахуванням згасання майже не змінився порівняно з динамічним коефіцієнтом μ без урахування згасання: $\mu_0 = 2,079$, а $\mu = 2,080$, різниця складає значно менше 1%.

У разі резонансу ($\theta = \omega_1$) з урахуванням згасання за формулою (5.64) маємо:

$$\mu_0 = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{0,025} = 40.$$

Як бачимо, динамічний коефіцієнт у разі резонансу хоч і не стає нескінченно великим, та все ж досягає значної величини. Цей факт змушує інженерів уникати резонансу в конструкціях, що проектуються.

5.8. Розв'язування проблем коливання в будівництві та в техніці

Коливання в цілому становлять цікаву та складну проблему, що вимагає постійної уваги й серйозного вивчення. І що уважніше ставитися до коливальних процесів, то складнішими виникають питання. Світ, справді, повен різноманітних коливань. Коливання можуть справляти шкідливі впливи і на людей, і на обладнання, і на споруди та окремі їхні елементи.

Експериментально виявлено, що критерієм чутливості людей до коливань з низькими частотами (від 1Гц до 10Гц) служать прискорення коливань, а до коливань з високими частотами (понад 10Гц) – їх швидкість.

Якщо в результаті динамічних розрахунків пружної системи виявлено, що вимоги до неї стосовно її міцності і жорсткості в деякій мірі не задоволено або не відповідають повністю нормативним характеристикам впливу на людину, то в цих випадках належить здійснювати певні заходи щодо боротьби з коливаннями.

Для динамічних розрахунків будь-якої пружної системи застосовують ті самі розрахункові формули, що й для статичних навантажень, лише при цьому їх корегують на розмір динамічного коефіцієнта.

У процесі дії динамічного навантаження суттєво змінюються й механічні характеристики матеріалу. Для лінійного напруженого стану, наприклад, в разі динамічних навантажень з цієї причини зменшують допустимі напруження та допустимі переміщення:

- а) $\sigma_{d,max} = k_d \cdot \sigma_{st,max} \leq \sigma_{adm,d} < \sigma_{adm,st}$;
- б) $\delta_{d,max} = k_d \cdot \delta_{st,max} \leq \delta_{adm,d} < \delta_{adm,st}$. (5.66)

Тут $\sigma_{adm,d}$ і $\delta_{adm,d}$ – відповідно допустимі напруження і допустимі переміщення щодо динамічного навантаження.

Для зменшення, а то і повної ліквідації шкідливого впливу на людей, на обладнання та споруди застосовують певні експлуатаційні та конструктивні заходи: доцільне розміщення обладнання, змінення жорсткості балок, змінення режиму роботи машин, застосування вібропогашувачів і віброізоляції.

Виявляється, що віброізоляція є найбільш простим і надійним способом у боротьбі зі шкідливими наслідками коливання. Розрізняють активне та пасивне віброізолювання.

Активну віброізоляцію призначають для зменшення динамічних сил, які машина передає на тримальні балки. Пасивна віброізоляція використовується з метою ізолювати окремі робочі місця від коливання тримальних балок.

Розрахунок активної віброізоляції здійснюють на підставі розгляду розрахункової схеми об'єкта. Одну із таких схем зображено на рис. 5.16. При цьому масу m , що знаходиться на амортизаторі, вважають за систему з одним ступенем вільності (здійснює лише вертикальні коливання).

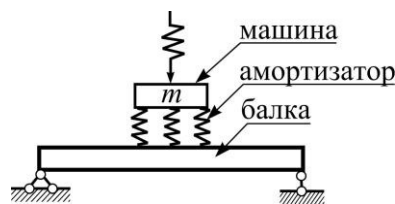


Рис. 5.16. Схема активної віброізоляції

Динамічний коефіцієнт μ_0 для цієї схеми підраховують за відомою формулою (5.62).

Ефективність віброізоляційних пристроїв оцінюють коефіцієнтом η передачі сили, який дорівнює:

$$\eta = \frac{1}{\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 - 1}. \quad (5.67)$$

Для ефективності віброізоляції співвідношення $\frac{\theta}{\omega}$ має бути не менше, ніж 4.

У цьому випадку $\eta \leq \frac{1}{15}$ і ефективність віброізоляції за літературними даними досягає 93,5%.

У випадку малих значень вимушених частот θ , коли коефіцієнт $\eta \approx 1$, віброізоляція виявляється некорисною.

При $\frac{\theta}{\omega} < 1,41$ і $\eta > 1$ віброізоляція проявляє навіть шкідливу дію.

В разі $\left(\frac{\theta}{\omega}\right) \approx 1$ настає резонанс, який може бути небезпечним перш за все для пружинних амортизаторів.

Для гасіння коливань із середніми частотами (6–25 Гц) найчастіше використовують пружинні амортизатори. Саме вони дають велику осадку і дозволяють понизити частоти власних коливань пружних балок, що піддаються ізоляції.

І взагалі, вібропогашувач будь-якої конструкції лише тоді повністю відповідає своєму призначенню, коли його власна частота коливання дорівнює частоті збурювальної сили.

Контрольні запитання

1. Що таке ступінь вільності пружної системи (стержня, балки, конструкції) з погляду механічних коливань? Що таке невагома балка, точкова маса?
2. Що таке вільні (власні) та вимушені коливання пружних систем? Які сили діють на пружну систему під час вільних коливань?
3. Запишіть та поясніть диференціальне рівняння вільних коливань пружної системи з одним ступенем вільності та його розв'язок. Що таке гармонійні коливання?

4. Як визначити амплітуду та початкову фазу вільних (власних) коливань пружної системи з одним ступенем вільності?
5. Назвіть основні характеристики власних коливань пружної системи з одним ступенем вільності та що ці характеристики означають?
6. Від яких параметрів залежить колова (циклічна) частота та період вільних коливань пружної системи? Запишіть та поясніть відповідні формули.
7. В яких одиницях вимірюють кількість повних циклів коливань за одну секунду? Що називають технічною частотою коливань?
8. Запишіть і поясніть диференціальне рівняння вимушених коливань і його розв'язок.
9. Чому дорівнює частота та коефіцієнт вимушених коливань (коефіцієнт наростання коливань)? За якою формулою визначають амплітуду вільних коливань?
10. Що являє собою резонанс і в чому полягає його небезпека?
11. Яке явище називають биттям і наслідком чого воно виникає?
12. Які коливання називають власними згасаючими? А які вимушеними згасаючими?
13. Запишіть і поясніть диференціальне рівняння власних згасаючих коливань пружної системи з одним ступенем вільності та його розв'язок.
14. Чому дорівнює амплітуда власних коливань з урахуванням демпфування (гальмувальних сил)?
15. Чому дорівнює частота та період власних коливань з урахуванням згасання коливань?
16. Що характеризує логарифмічний декремент згасання коливань і чому дорівнює коефіцієнт згасання коливань?
17. Запишіть і поясніть диференціальне рівняння вимушених згасаючих коливань пружної системи з одним ступенем вільності та його розв'язок.
18. Які заходи застосовують для зменшення шкідливого впливу коливань на людей і пружні системи (на споруди та на їх елементи)?

РОЗДІЛ VI

РОЗРАХУНКИ БАЛОК З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ

6.1. Тримальна здатність балок щодо чистого згину

У випадку чистого згину балки в її перерізах виникають нормальні напруження, які в межах пружності деформування розподіляються за висотою поперечного перерізу лінійно і відповідають теоретичній залежності

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y, \quad (6.1)$$

де M – згинувий момент у перерізі; I_z – осьовий момент інерції площі перерізу; y – відстань від нейтральної осі до волокна, що розглядається.

Граничним станом для пружного деформування балок є досягнення в небезпечному перерізу напруження, що дорівнює границі текучості матеріалу σ_y . У цьому разі згинувий момент у перерізі досягає для пружного деформування небезпечного значення M_y (рис. 6.1, а). Проте тримальну (несну) здатність балки ще не вичерпано, оскільки основна частина перерізу продовжує працювати в зоні пружного деформування. Постає питання: яким чином можна повністю використати тримальну (несну) здатність балки?

Щоб спростити відповідь на це непросте питання, треба скористатись певною моделлю для реального матеріалу. Наближено це можна уявити як роботу ідеального пружно-пластичного матеріалу.

Ідеальний пружно-пластичний матеріал – це модель реального матеріалу, деформування якого умовно описує діаграма Прандтля, яка для згину має двозначний характер (рис. 6.2.). Такий матеріал не зміцнюється, тобто його здатність чинити опір пластичному деформуванню залишається сталою. До границі текучості σ_y зберігається прямо пропорційна залежність між напруженням σ і деформацією ε , а далі поличка текучості (дійсна чи умовна) продовжується аж до границі міцності матеріалу: до деформації $(+\varepsilon_u)$ в разі

розтягу, і до деформації ($-\varepsilon_u$) в разі стиску матеріалу. Величина σ_y на діаграмі відповідає границі текучості матеріалу щодо розтягу, $\sigma'_y = \psi\sigma_y$ – для стиску. При цьому для сталі коефіцієнт $\psi = 1$.



Рис. 6.1. Схема розвитку пластичних деформацій

Таким чином, обравши за модель ідеальний пружно-пластичний матеріал, нехтують зміцненням матеріалу за межами його границі текучості, що йде, взагалі кажучи, на користь запасу міцності.

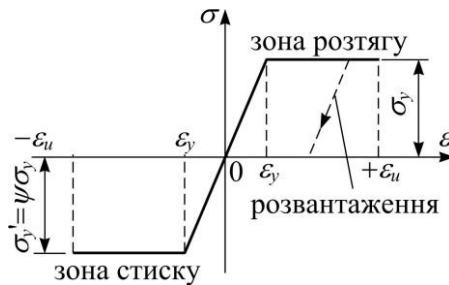


Рис. 6.2. Діаграма Прандтля.

Розглянемо, як розвивається пластичне деформування за моделлю ідеального пружно-пластичного матеріалу у випадку чистого згину балки, коли в площині її симетрії yOx (рис. 6.3, *a*) прикладено згинальні (зовнішні) моменти m .

Досягнувши в периферійних волокнах границі текучості σ_y , напруження в цих волокнах перерізу припиняють зростати, але деформації продовжують зростати. Зі збільшенням навантаження текучість матеріалу проникає дедалі

глибше і глибше по перерізу, поширюючись на нові волокна, але в середній частині перерізу наразі зберігається пружне ядро заввишки η (рис. 6.1, б).

Наведений стан матеріалу характеризує пружно-пластичну стадію роботи балки, якій відповідає, умовно кажучи, пружно-пластичний згиновий момент M_η .

Збільшуючи навантаження далі, епюра нормальних напружень у небезпечному перерізу досягає граничного пружно-пластичного стану (рис. 6.1, в), для якого висота пружного ядра зменшується до нормативного мінімуму, який визначають деформацією ε_u , що відповідає руйнівній деформації крайніх (зовнішніх, периферійних) волокон. Так, для сталі згідно з будівельними нормами співвідношення η_{min}/h , де h – висота балки, надзвичайно мала та дорівнює двохсотій частині від висоти балки: $\eta_{min}/h = 1/200$.

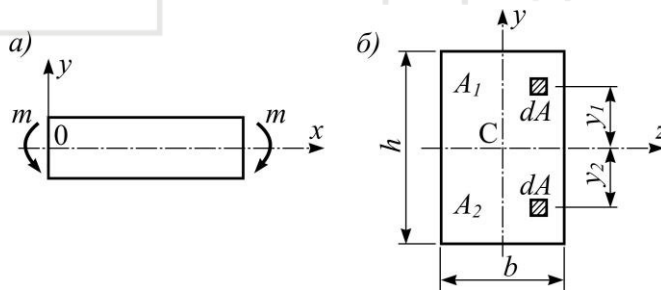


Рис. 6.3. Чистий згин балки (а) з симетричним перерізом (б)

Згиновий момент M_{lim} досягає свого граничного значення для мінімально допустимої висоти η_{min} пружного ядра.

Можна вважати, що подальше збільшення навантаження в решті-решт може привести нормальні напруження за всю висоту перерізу h до границі текучості σ_y , як це показано на рис. 6.1, з.

Збільшення до границі текучості всіх напружень за висотою перерізу створює в цьому перерізі так званий пластичний шарнір (рис. 6.1, з), який перетворює статично визначну (ізостатичну) балку в змінювану систему, в механізм, а ступінь статично невизначної балки знижує на одиницю.

Згиновий момент, який відповідає появі (виникненню) в перерізі балки пластичного шарніра, умовно називають пластичним згиновим моментом M_{pl}

(рис. 6.1, з).

З'ясуємо, як оцінюють тримальну здатність балки на прикладі симетричного перерізу (рис. 6.3, б), який працює в умовах чистого згину. Коли всі напруження в перерізі досягають границі текучості σ_y , то тоді пластичний згинувий момент M_{pl} дорівнюватиме:

$$M_{pl} = \int_{(A_1)} \sigma_y y dA + \int_{(A_2)} (-\sigma_y)(-y) dA = \sigma_y S_z + \sigma_y S_z = 2\sigma_y S_z, \quad (6.2)$$

де S_z – статичний момент площі півперерізу відносно нейтральної (центральної) осі перерізу.

Отже

$$M_{pl} = \sigma_y W_{pl}, \quad (6.3)$$

де W_{pl} – пластичний момент опору, який дорівнює:

$$W_{pl} = 2S_z. \quad (6.4)$$

Як приклад, підрахуємо пластичний момент опору W_{pl} для прямокутного перерізу заввишки h і завширшки b (рис. 6.3, б):

$$W_{pl} = 2S_z = 2 \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4}. \quad (6.5)$$

Ступінь збільшення запасу міцності за методом тримальної здатності порівняно з розрахунками за методом допустимих напружень характеризують відношенням $\frac{W_{pl}}{W_z}$, що, наприклад, для прямокутника дорівнює:

$$\frac{W_{pl}}{W_z} = \left(\frac{bh^2}{4} \right) : \left(\frac{bh^2}{6} \right) = 1,5. \quad (6.6)$$

Для двотаврових перерізів це співвідношення дорівнює 1,15 – 1,18; для круглих – 1,7; для трубчастих – 1,27.

Оскільки для пружної стадії роботи максимальний згинувий момент дорівнює $M_y = \sigma_y W_z$, а пластичний згинувий момент $M_{pl} = \sigma_y W_{pl}$, то виходить, що

$$\frac{W_{pl}}{W_z} = \frac{M_{pl}}{M_y}.$$

Коли переріз балки має лише одну вісь симетрії, вздовж якої діє навантаження, то у випадку виникнення пластичного шарніра нейтральна вісь для нього не проходить через центр ваги перерізу C . Положення нейтральної осі z_0 в цьому випадку можна визначити з рівності (рис. 6.4), яка випливає з того, що поздовжня сила щодо згину дорівнює нулеві:

$$\int_{(A)} \sigma_y dA = \int_{(A_1)} \sigma_y dA + \int_{(A_2)} (-\sigma_y) dA = 0,$$

звідки маємо:

$$A_1 - A_2 = 0, \quad \text{або} \quad A_1 = A_2, \quad (6.7)$$

де A_1 – площа розтягнутої зони перерізу (на рис. 6.4 заштрихована); A_2 – площа стиснутої зони, $A = A_1 + A_2$.

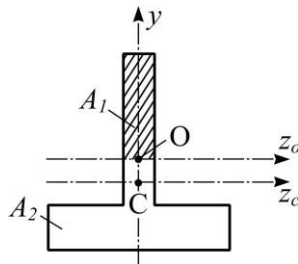


Рис. 6.4. Нейтральна (Oz_0) і центральна (Cz_c) вісі в пластичному шарнірі

Рівність (6.7) означає, що для граничного пластичного стану нейтральна вісь поперечного перерізу ділить його площу навпіл.

У випадку утворення в несиметричному перерізі пластичного шарніра пластичний момент M_{pl} у ньому згідно з умовою (6.2) дорівнює:

$$M_{pl} = \sigma_y (S_t + S_c), \quad (6.8)$$

де S_t - статичний момент розтягнутої частини площі перерізу відносно нейтральної осі; S_c - теж саме для стиснутої зони перерізу.

Пластичний момент опору для несиметричних перерізів дорівнює

$$W_{pl} = S_t + S_c. \quad (6.9)$$

6.2. Розрахунок статично визначених двоопорних балок за методом тримальної здатності

Метод тримальної здатності – це метод, який максимально враховує пластичні деформації.

Розглянемо розрахунок статично визначеної двоопорної балки, яку завантажено силами F (рис. 6.5, а). Припустимо, що переріз має дві осі симетрії, одна з яких збігається з силовою площиною. Розраховуючи таку балку за методом тримальної здатності, знехтуємо дотичними напруженнями в перерізах балки так само, як і для розрахунків за методом допустимих напружень.

У випадку розрахунків за допустимими напруженнями граничною буде таке значення сили F , що в зовнішніх волокнах найбільш навантаженого перерізу викликати нормальні напруження, які дорівнюватимуть границі текучості σ_y .

Граничне значення згинаючого моменту для пружної роботи балки (рис. 6.1, а) визначають за формулою:

$$M_T = \sigma_y W_z . \quad (6.10)$$

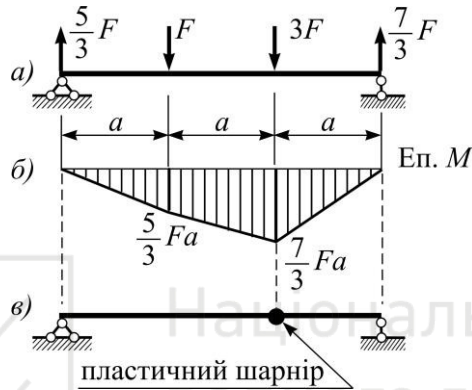


Рис. 6.5. Балка (а) з епюрою M (б) і пластичним шарніром (в)

Звідси потім можна визначити для пружного деформування і граничне значення сили F_T . Але в цьому випадку тримальну здатність балки не буде вичерпано повністю доти, доки нормальні напруження за висотою перерізу не досягнуть значення σ_y (рис. 6.1, з). Тобто доки не виникне пластичний шарнір (рис. 6.5, в). У цьому випадку для розрахунків користуються формулою (6.3):

$$M_{pl} = \sigma_y W_{pl} .$$

Напруження – функції неперервні і тому не можуть змінюватися стрибкоподібно. Поблизу нейтральної лінії хоч невелика, але існує пружна зона (рис. 6.1, в), впливом якої для визначення пластичного моменту M_{pl} нехтують. Пластичний шарнір створюється в найбільш напруженому перерізі, тобто там, де виникає максимальний згинувий момент.

Для пружно-пластичного стану прогини балки визначають, виходячи з деформування її пружної частини аж до створення пластичного шарніра. Шарнір перетворює двоопорну балку в механізм, тобто балка стає геометрично змінною системою, що як раз і свідчить про вичерпаність тримальної здатності балки.

Приклад 6.1. Для однопрогонової сталеві балки прямокутного перерізу $b \times h = 3 \times 8 \text{ см}^2$, яка зазнає дії двох зосереджених сил F і $3F$ (рис. 6.5, а), визначити найбільші допустимі значення сили F_{adm} із розрахунків на міцність

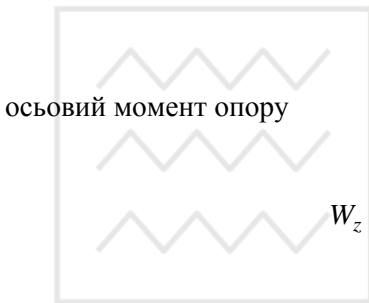
за методом тримальної здатності, якщо границя текучості матеріалу балки $\sigma_y = 240\text{МПа}$; коефіцієнт запасу міцності $k = 1,5$; відрізок балки $a = 0,9\text{м}$.

Розв'язок.

а) *Розрахунок балки за методом допустимих напружень.*

Максимальний згинувий момент (рис. 6.5, б) дорівнює:

$$M = \frac{7Fa}{3} = \frac{7F \cdot 0,9}{3} = 2,1F, \text{ Н}\cdot\text{м};$$



$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{3 \cdot 8^2}{6} = 32 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

допустиме напруження:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{k} = \frac{240}{1,5} = 160\text{МПа} = 160 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

За розрахунковою формулою $\frac{M}{W_z} \leq \sigma_{adm}$ визначаємо допустиму силу F'_{adm} :

$$\frac{2,1F'}{32 \cdot 10^{-6}} \leq 160 \cdot 10^6, \text{ звідки допустима сила } F'_{adm} \leq 2438\text{Н}.$$

б) *Розрахунок балки за методом тримальної здатності.*

У випадку створення пластичного шарніра в перерізі, де виник максимальний згинувий момент (рис. 6.5, в), пластичний згинувий момент дорівнює:

$$M_{pl} = \frac{7F_{pl}a}{3} = 2,1F_{pl}, \text{ Н}\cdot\text{м};$$

пластичний момент опору

$$W_{pl} = \frac{bh^2}{4} = \frac{3 \cdot 8^2}{4} = 48 \text{ см}^3 = 48 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Виходячи з формули (6.3): $M_{pl} = \sigma_y W_{pl}$, визначаємо:

$$2,1F_{pl} = 240 \cdot 10^6 \cdot 48 \cdot 10^{-6},$$

звідки

$$F_{pl} = 5486 \text{ Н.}$$

Враховуючи коефіцієнт запасу міцності, маємо допустиме значення сила F_{adm}'' з розрахунку за методом тримальної здатності:

$$F_{adm}'' = \frac{F_{pl}}{k} = \frac{5486}{1,5} = 3657 \text{ Н.}$$

Таким чином, для прямокутного перерізу, як слід було очікувати згідно з формулою (6.6), співвідношення $\frac{F_{adm}''}{F_{adm}'} = \frac{W_{pl}}{W_z} = 1,5$.

6.3. Розрахунок однопрогонових статично невизначених балок за методом тримальної здатності

Статично визначна балка не має "зайвих" в'язей, і тому виникнення хоча б одного пластичного шарніра перетворює таку балку в геометрично змінну систему.

Статично невизначна балка має "зайві" в'язі, тому для перетворення її в геометричну змінну систему при n "зайвих" в'язей потрібно мати $n+1$ пластичних шарнірів.

Але іноді при багатьох надлишкових в'язях навіть один-однісінький шарнір

може зробити рухомою одну якусь частину балки і тоді вся балка вичерпує свою тримальну здатність. Це добре ілюструє балка на рис. 6.6. У ній максимальний згинувий момент виникає над шарнірною опорою і саме тут створюється перший пластичний шарнір, який перетворює консоль у механізм. А сила, що створює цей шарнір, стає граничною для всієї балки.

Приклад 6.2. Балка прямокутного перерізу $b \times h = 6 \times 8 \text{ см}^2$ (рис. 6.7, а) зазнає дії зосередженої сили F . Визначити найбільше значення цієї сили F'_{adm} з розрахунку за методом допустимих напружень і найбільше значення сили F''_{adm} з розрахунку за методом тримальної здатності, якщо границя текучості матеріалу $\sigma_y = 240 \text{ МПа}$, коефіцієнт запасу міцності $k = 1,5$ і відрізок балки $a = 1,6 \text{ м}$.

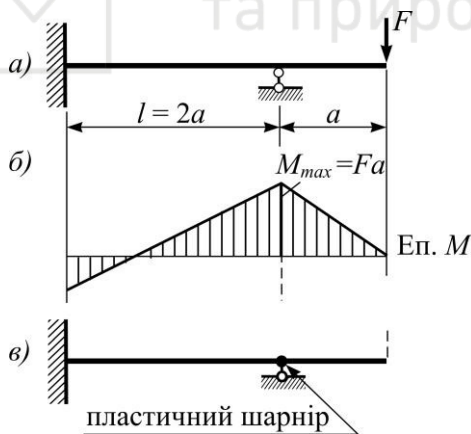


Рис. 6.6. Вплив консолі (а) на створення пластичного шарніра (б, в)

Розв'язок.

а) *Розрахунок балки за методом допустимих напружень.*

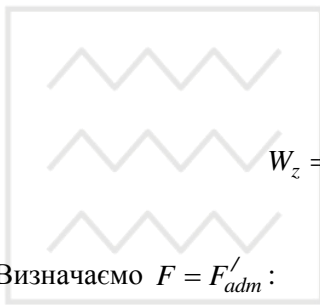
Епюру згинувих моментів M_1 для заданої балки (рис. 6.7, б) побудовано за загальними правилами опору матеріалів. Максимальний згинувий момент виникає на опорі А і дорівнює:

$$M_{max} = \frac{3Fa}{8} = \frac{3F \cdot 1,6}{8} = 0,6F, \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

За формулою

$$\frac{M_{max}}{W_z} \leq \sigma_{adm},$$

де



$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{k} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа},$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{6 \cdot 8^2}{6} = 64 \text{ см}^3 = 64 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

$$F'_{adm} = 17067 \text{ Н} = 17,067 \text{ кН}.$$

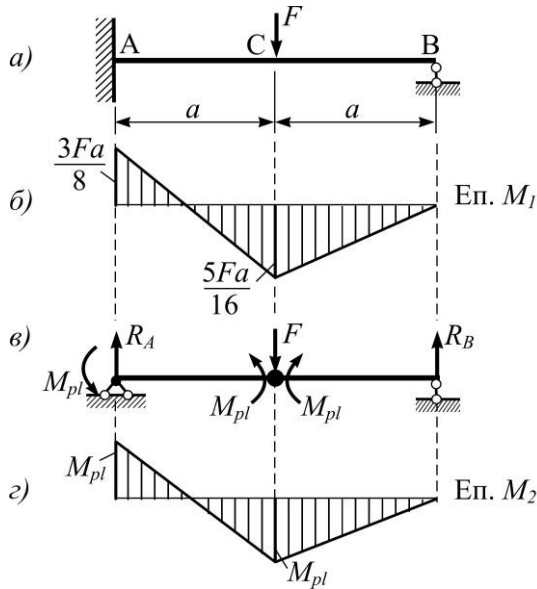


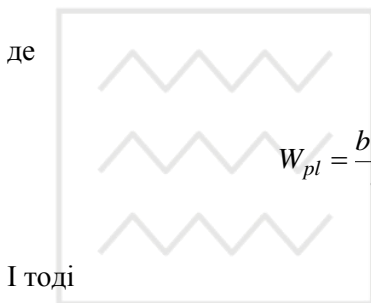
Рис. 6.7. До розрахунку статично невизначної балки (а, б) за методом тримальної здатності (в, г)

б) *Розрахунок за методом тримальної здатності.*

Перший пластичний шарнір у балці створюється в тому перерізі, де виникає найбільший згинувий момент, а це переріз A , де $M_{max} = 3Fa/8$ (рис. 6.7, б).

Згідно з формулою (6.3) пластичний згинувий момент у перерізі A дорівнює:

$$M_{pl}^A = \sigma_y W_{pl},$$



$$W_{pl} = \frac{bh^2}{4} = \frac{6 \cdot 8^2}{4} = 96 \text{ см}^3 = 96 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

$$M_{pl}^A = \sigma_y W_{pl} = 240 \cdot 10^6 \cdot 96 \cdot 10^{-6} = 23040 \text{ Н} \cdot \text{м} = 23,04 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Після утворення в перерізі A пластичного шарніра розрахункова схема балки зміниться. Балка AB перетворюється в шарнірно оперту балку (рис. 6.7, в), яка зазнає дії зосередженого (опорного) моменту на опорі A зі значенням $M_{pl}^A = 23,04 \text{ кН} \cdot \text{м}$ і дії зосередженої сили F , яка зростає доти, доки в перерізі C (саме тут буде максимальний згинувий момент в балці) не утвориться пластичний шарнір з моментом $M_{pl}^C = 23,04 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 6.7, в, г).

Відносно шарніра C сума моментів усіх сил по один будь-який бік від шарніра має дорівнювати нулеві:

$$\sum \text{mom}_c^{\text{left}} = M_{pl}^A + M_{pl}^C - \frac{F_{pl}a}{2} - M_{pl}^A \frac{a}{2a} = 0.$$

Оскільки $M_{pl}^A = M_{pl}^C = M_{pl} = 23,04 \text{ кН} \cdot \text{м}$, то для руйнівної сили F_{pl} матимемо:

$$F_{pl} = \frac{3M_{pl}}{a} = \frac{3 \cdot 23,04}{1,6} = 43,2 \text{ кН.}$$

Допустиме навантаження $F_{adm}^{//}$ з тримальної здатності дорівнює:

$$F_{adm}^{//} = \frac{F_{pl}}{k} = \frac{43,2}{1,5} = 28,8 \text{ кН.}$$

Співвідношення допустимих сил:

$$\frac{F_{adm}^{//}}{F_{adm}^{'}} = \frac{28,8}{17,067} = 1,69.$$

Для статично визначної балки співвідношення $\frac{F_{adm}^{//}}{F_{adm}^{'}} = 1,5$. Для статично

невизначної балки це співвідношення зростає за рахунок перерозподілу згинувих моментів після утворення першого пластичного шарніра.

У прикладі 6.2 після появи пластичного шарніра в перерізі A згинувий момент у ньому залишається сталим в разі зростання навантаження F , хоча в усіх інших перерізах згинуві моменти зростають доти, доки балка не перетвориться в змінювану систему через появу ще одного шарніра в перерізі C (рис. 6.7, в).

Таким чином, перерозподіл згинувих моментів у цілому збільшує тримальну здатність статично невизначної балки.

Приклад 6.3. Визначити граничне навантаження F_{pl} для статично невизначної балки (рис. 6.8, а), яку симетрично завантажено двома зосередженими силами F .

Розв'язок. Для запропонованої схеми навантаження можливі два варіанти створення пластичних шарнірів:

- 1) Шарніри виникають у перерізах A і C (рис. 6.8, б);
- 2) Шарніри виникають у перерізах A і D (рис. 6.8, в).

У цьому випадку треба провести додаткове дослідження.

- 1) Для схеми (рис. 6.8, б) маємо:

$$R'_A = \frac{2M_{pl}}{a},$$

$$\begin{aligned} \sum \text{mom}_B = F'_{pl}a + F'_{pl}2a + M_{pl} - R'_A \cdot 3a = F'_{pl}a + F'_{pl}2a + \\ + M_{pl} - \frac{2M_{pl}}{a} \cdot 3a = 0. \end{aligned}$$

Звідки дістанемо:

$$F'_{pl} = \frac{5M_{pl}}{3a};$$

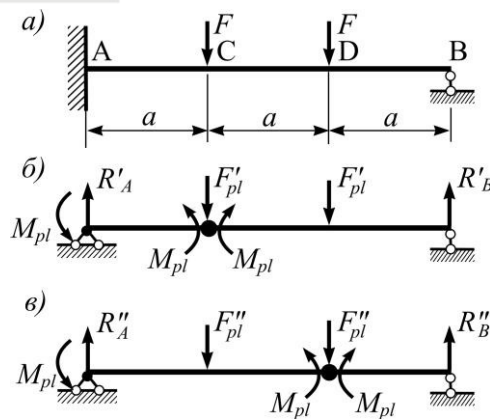


Рис. 6.8. До визначення граничного навантаження (б, в) для статично невизначної балки (а)

2) Для схеми (рис. 6.8, в) маємо:

$$R''_B = \frac{M_{pl}}{a};$$

$$\begin{aligned} \sum \text{mom}_A &= M_{pl} + R_B'' 3a - F_{pl}'' a - F_{pl}'' 2a = M_{pl} + \\ &+ \frac{M_{pl}}{a} \cdot 3a - F_{pl}'' a - F_{pl}'' \cdot 2a = 0 \end{aligned}$$

звідки дістаємо:

$$F_{pl}'' = \frac{4}{3} \frac{M_{pl}}{a}.$$

Виходить, що друга схема (рис. 6.8, в) дає граничне навантаження менше за першу: $F_{pl}'' < F_{pl}'$. Отже, граничне навантаження для заданої балки дорівнює:

$$F_{pl} = F_{pl}'' = \frac{4}{3} \frac{M_{pl}}{a}.$$

Таким чином, для визначення мінімальної граничної сили F_{pl} було потрібним провести додатковий аналіз двох можливих варіантів.

Приклад 6.4. Визначити переріз, в якому створюється пластичний шарнір у прогоні балки (рис. 6.9, а), а також розмір граничної інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження q_{pl} .

Розв'язок. Для визначення перерізу, де виникає в прогоні балки пластичний шарнір, треба скласти вираз згинового моменту M_x для довільного перерізу x (рис. 6.9, а):

$$M_x = R_A x - M_A - \frac{q x^2}{2},$$

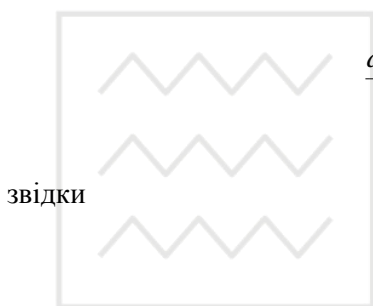
де реакція

$$R_A = \frac{ql}{2} + \frac{M_A}{l}$$

і тоді

$$M_x = \frac{ql}{2}x + \frac{M_A}{l}x - M_A - \frac{qx^2}{2}. \quad (\text{а})$$

Оскільки згинувий момент у прогоні має бути максимальним для створення пластичного шарніра, то для визначення цього перерізу треба взяти похідну від M_x за змінною x і прирівняти до нуля:



$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{ql}{2} + \frac{M_A}{l} - qx = 0,$$

$$x_0 = \frac{l}{2} + \frac{M_A}{ql}. \quad (\text{б})$$

У випадку створення пластичного шарніра на відстані x_0 від опори A , тобто в точці C (рис. 6.9, б), складаємо рівняння рівноваги відносно точки C , використовуючи для цього рівняння (а) і (б), а також враховуючи всі сили по один, лівий бік від шарніра C разом із пластичним моментом $M_{pl}^c = M_{pl}$. Прирівнявши записане таким чином рівняння до нуля, дістанемо:

$$\begin{aligned} \Sigma m_c^{left} &= \frac{q_{pl}l^2}{4} + \frac{M_{pl}}{2} + \frac{M_{pl}}{2} + \frac{M_{pl}^2}{ql^2} - M_{pl} - \\ & - \frac{q_{pl}l^2}{8} - \frac{M_{pl}}{2} - \frac{M_{pl}^2}{2ql^2} - M_{pl} = 0. \end{aligned} \quad (\text{в})$$

Після зведення подібних членів і деяких перетворень вираз (в) набирає такого вигляду:

$$M_{pl}^2 - 3q_{pl}l^2M_{pl} + \frac{q_{pl}^2l^4}{4} = 0.$$

Це квадратне рівняння відносно граничного (пластичного) моменту M_{pl} , має два корені, але практичному значенню відповідає лише один, а саме:

$$M_{pl} = 1,5q_{pl}l^2 - 1,4142q_{pl}l^2 = 0,08579q_{pl}l^2, \quad (\text{г})$$

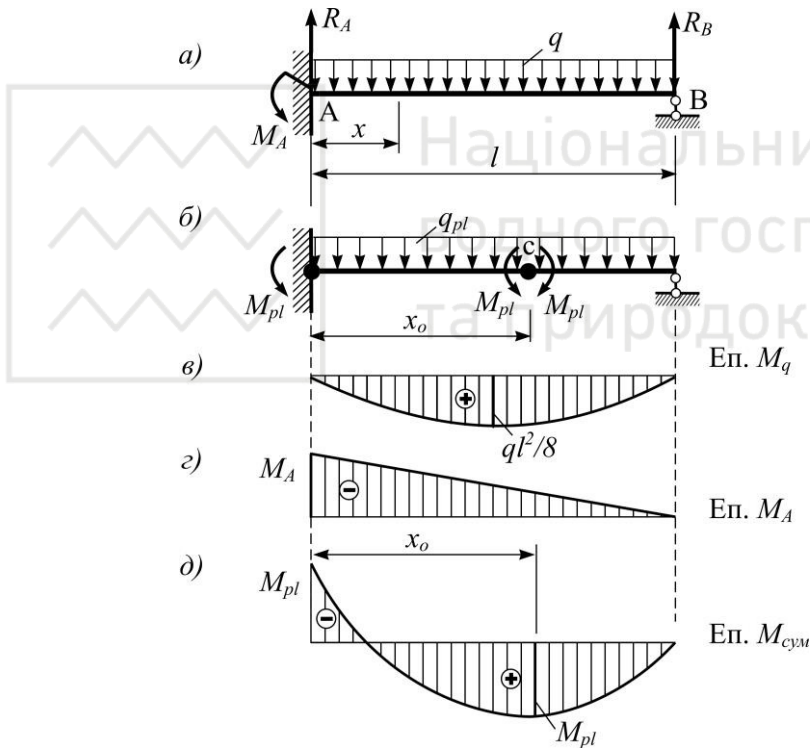


Рис. 6.9. До визначення граничної інтенсивності q (б, в, з, д) для балки (а)

Звідки граничний розмір інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження дорівнює:

$$q_{pl} = 11,656 \frac{M_{pl}}{l^2}. \quad (\text{д})$$

Враховуючи значення пластичного моменту $M_A = M_{pl}$ за формулою (г), із виразу (б) матимемо відстань x_0 до пластичного шарніра в точці С (рис. 6.9, б, д):

$$x_0 = \frac{l}{2} + \frac{0,08579ql^2}{ql} = 0,58579l \approx 0,586l.$$

Епюру сумарних згинувих моментів $M_{\text{сум}}$ після створення двох пластичних шарнірів здобуто шляхом накладання епюр M_q від рівномірно розподіленого навантаження (рис.6.9, в) і від опорного моменту M_A (рис. 6.9, з).

6.4. Розрахунки нерозрізних балок на тримальну здатність

Розрахунки на тримальну здатність нерозрізних балок мають певні особливості. Втрата тримальної здатності в цілому для всієї балки відбувається під час появи навіть лише одного пластичного шарніра, якщо він створюється над шарнірною опорою перед консоллю (рис. 6.6). Для крайніх прогонів балки, які спираються на шарнірні опори, для втрати тримальної здатності досить появи двох пластичних шарнірів: одного на проміжній опорі і другого – в прогоні. Для всіх інших, внутрішніх прогонів необхідна вже поява трьох пластичних шарнірів, щоби балка в цілому втратила тримальну здатність: двох шарнірів на проміжних опорах і одного на прогоні.

Практично граничний пластичний стан балки визначається тим прогоном, який завантажено найбільшим навантаженням.

Розрахунки нерозрізних балок з тримальної здатності можна поділити на два типи:

1. Перевірочний розрахунок;
2. Проектувальний розрахунок.

6.4.1. Перевірочний розрахунок нерозрізних балок.

Добір граничних навантажень

Для випадку, коли всі перерізи однакові для всієї нерозрізної балки (рис.

6.10, а), розрахунок ведуть у такій послідовності. Кожний прогін балки умовно вважають за просту шарнірно опертую двоопорну балку. Для кожної цієї балки будують, так звану, балочну епюру моментів. Потім для нерозрізної балки проводять дві паралельні лінії по обидві сторони від осі балки на відстані розміру пластичного згинаючого моменту M_{pl} . А далі вписують у ці межі балочні епюри M усіх прогонів і консолей, тобто вирівнюють навантаження простих двоопорних балок до межі цих рівнобіжних ліній (рис. 6.10, б). Це означає, що для кожного прогону і консолі треба побудувати епюру згинаючих моментів від шуканого граничного навантаження для кожного прогону: $F_{1,pl}$, $F_{2,pl}$, $q_{3,pl}$ і т.д.

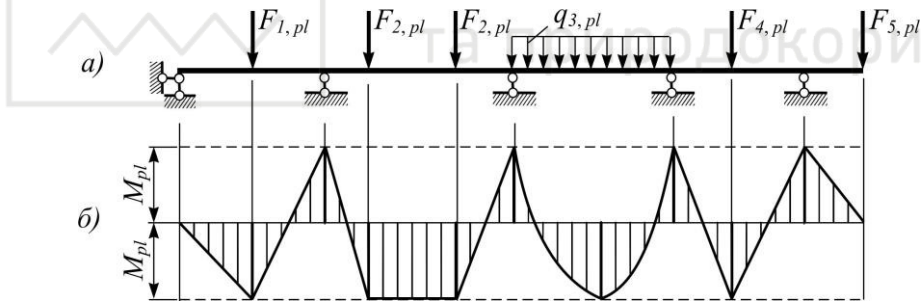


Рис. 6.10. До перевірконого розрахунку з тримальної здатності (б) для балки (а)

Задача визначення граничного пластичного навантаження для нерозрізної балки сталого поперечного перерізу, тобто з заданою тримальною здатністю всіх перерізів, має лише один – єдиний розв’язок.

Приклад 6.5. Визначити граничне (пластичне) навантаження з тримальної здатності для нерозрізної балки (рис. 6.11), виготовленої з прокатного двотавра №20. Границя текучості сталі $\sigma_y = 240\text{МПа}$.

Розв’язок. Визначаємо пластичний момент опору для стилізованого під прямокутний двотавр №20 (рис. 6.12) за формулою (6.4):

$$W_{pl} = 2S_z = 2(10 \cdot 0,84 \cdot 9,58 + 0,52 \cdot 9,16 \cdot 4,58) = 204,6 \text{ см}^3.$$

Підраховуємо пластичний згинаючий момент M_{pl} за формулою (6.3):

$$M_{pl} = \sigma_y W_{pl} = 240 \cdot 10^6 \cdot 204,6 \cdot 10^{-6} = 49104 \text{ Н} \cdot \text{м} \approx 49,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

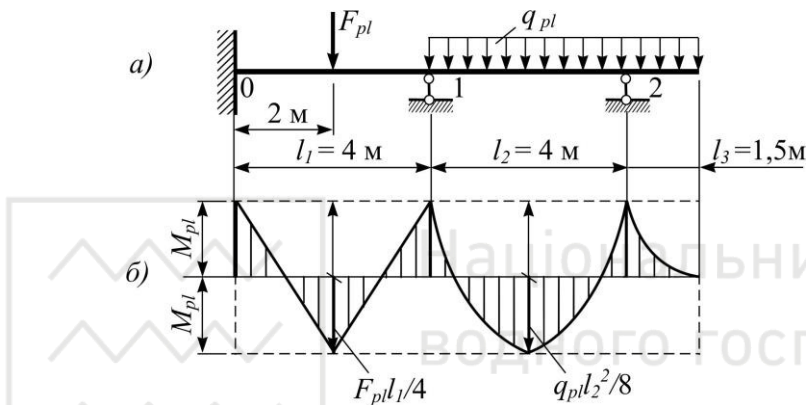


Рис. 6.11. До визначення граничного навантаження з тримальної здатності (б) для балки (а)

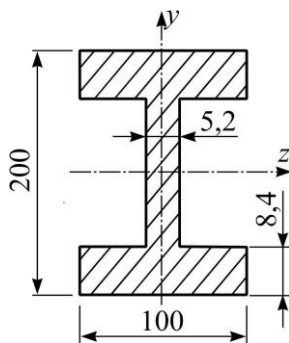


Рис. 6.12. Стилзований під прямокутники прокатний двотавр

Порівнюючи максимальні ординати епюр згинувих моментів з ординатами $2M_{pl}$, маємо граничне (пластичне) навантаження для прогонів і консолі.

а) Для першого прогону l_1 :

$$\frac{F_{pl}l_1}{4} = 2M_{pl}$$

звідки

$$F_{pl} = \frac{8M_{pl}}{l_1} = \frac{8 \cdot 49,1}{4} = 98,2 \text{ кН};$$

б) Для другого прогону l_2 :



національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\frac{q_{pl}'' l_2^2}{8} = 2M_{pl}$$

$$q_{pl}'' = \frac{16M_{pl}}{l_2^2} = \frac{16 \cdot 49,1}{4^2} = 49,1 \text{ кН/м.}$$

в) Для консолі l_3 :

$$\frac{q_{pl}''' l_3^2}{2} = M_{pl}$$

звідки

$$q_{pl}''' = \frac{2M_{pl}}{l_3^2} = \frac{2 \cdot 49,1}{1,5^2} = 43,6 \text{ кН/м.}$$

Якщо навантаження пов'язані спільним параметром, наприклад, $F_{pl} = l_3 q_{pl} = 1,5 q_{pl}$, то граничні (пластичні) навантаження для кожного із прогонів відповідно дорівнюватимуть:

$$F'_{pl} = 98,2 \text{ кН};$$

$$F_{pl}'' = 1,5 \cdot 49,1 = 73,65 \text{ кН};$$

$$F_{pl}''' = 1,5 \cdot 43,6 = 65,4 \text{ кН}.$$

Мінімальне значення граничного (пластичного) навантаження дорівнює $F_{pl} = 65,4 \text{ кН}$.

Це означає, що перший пластичний шарнір може утворитися на опорі 2 від консольного навантаження, на опорах 0 і 1 пластичних шарнірів не може виникнути, тому що нерозрізна балка вже перетворилася в механізм від появи першого пластичного шарніра на опорі 2. У випадку утворення шарніра на опорі 2 в першому прогоні максимальний момент для балочної епюри буде дорівнювати

$$M_0' = \frac{F_{pl} l_1}{4} = \frac{65,4 \cdot 4}{4} = 65,4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

на другому прогоні

$$M_0'' = \frac{q_{pl} l_2^2}{8} = \frac{F_{pl} l_2^2}{l_2 \cdot 8} = \frac{65,4 \cdot 4^2}{4 \cdot 8} = 32,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

6.4.2. Проектувальний розрахунок нерозрізних балок.

Добір перерізів

Найбільш простий варіант із множини можливих є проектувальний розрахунок нерозрізної балки, яка має сталу за довжиною тримальну здатність. Тобто балка має сталий поперечний переріз. У цьому випадку тримальну здатність балки добирають, виходячи з розгляду найбільш навантаженого прогону, для якого й здійснюють відповідні розрахунки. У межах решти прогонів пластичні шарніри для заданого граничного (пластичного) навантаження вже не можуть виникнути.

Розглянемо приклад.

Приклад 6.6. Для нерозрізної балки (рис. 6.13, а) при заданих навантаженнях $F_{pl} = 60 \text{ кН}$ і $q_{pl} = 15 \text{ кН/м}$ визначити осьовий момент опору W_z з розрахунку на тримальну здатність (сталу для всієї довжини балки). Границя текучості матеріалу балки $\sigma_y = 240 \text{ МПа}$, коефіцієнт запасу міцності $n = 1,5$.

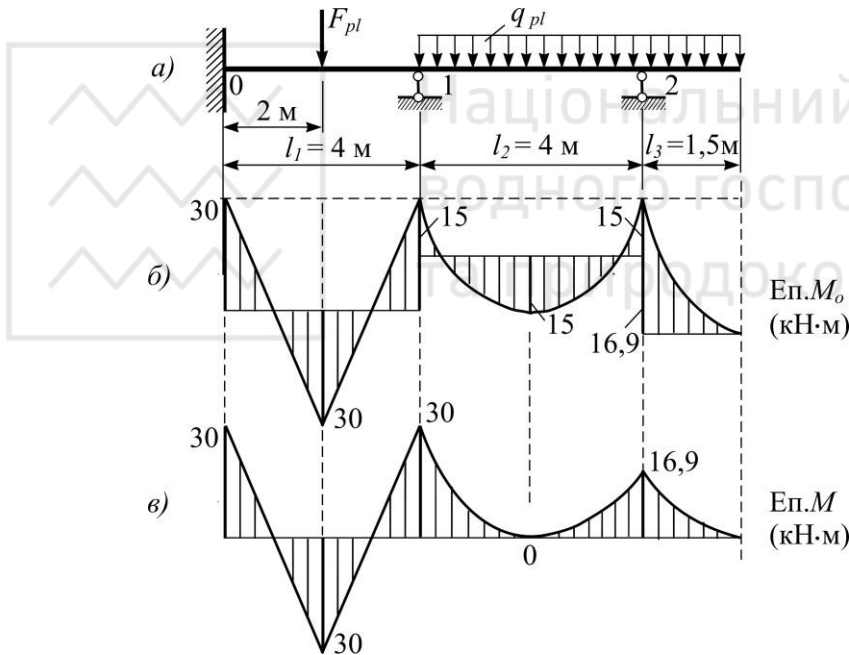


Рис. 6.13. До проектувального розрахунку на тримальну здатність (б, в) для балки (а)

Розв'язок. Найбільші ординати балочних епюр для згинових моментів першого та другого прогонів і консолі відповідно дорівнюють (нерозрізну балку умовно розрізано на опорах):

$$M'_0 = \frac{F_{pl} l_1}{4} = \frac{60 \cdot 4}{4} = 60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M''_0 = \frac{q_{pl} l_2^2}{8} = \frac{15 \cdot 4^2}{8} = 30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_0''' = -\frac{q_{pl}l_3^2}{2} = -\frac{15 \cdot 1,5^2}{2} = -16,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для балочних епюр у кожному прогоні (крім консолі) ординати згинувих моментів M_0 розділяються лініями опорних моментів навпіл (рис. 6.13, б). Для розрахунків беруть найбільш завантажений прогін l_1 і до епюри цього прогону вирівнюють епюри згинувих моментів для другого прогону l_2 і для консолі l_3 , на яких пластичні шарніри не виникають.

Остаточну епюру згинувих моментів із урахуванням тримальної здатності побудовано на рис. 6.13, в.

Таким чином, для добору перерізу розрахунковим згинувим моментом будуть згинуві моменти першого прогону, а саме $M_0 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$, звідки осьовий момент W_z дорівнює:

$$W_z = \frac{M_0 \cdot n}{\sigma_y} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{240 \cdot 10^6} = 187,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Отже,

$$W_z = 187,5 \text{ см}^3.$$

6.5. Розрахунок балок з урахуванням розвитку пластичних деформацій

Поряд зі значними, розглянутими вище безперечними перевагами метод тримальної здатності не позбавлений і деяких недоліків. Найсуттєвіший із них полягає в тому, що цей метод дозволяє судити про напружений стан балки поза границею пружності матеріалу в кінцевому підсумку і тільки для конкретного перерізу. А загальна картина деформування балки залишається нез'ясованою.

У практичних розрахунках залишкові деформації обмежують певним значенням. Так, будівельні норми рекомендують дотримуватися так званого

критерія обмеженої пластичної деформації, який для сталевих балок дорівнює:

$$\varepsilon_r \leq 3 \frac{R_y}{E}, \quad (6.11)$$

де ε_r – відносне залишкове видовження (скорочення); R_y – розрахунковий опір із границі текучості матеріалу; E – модуль пружності сталі.

Критерій обмеженої пластичної деформації ε_r дозволяє розраховувати сталеві балки не лише з умов появи периферійної (крайової) текучості (рис. 6.1, а) або з умов створення пластичного шарніра (рис. 6.1, з), але й в інших, проміжних випадках (рис. 6.1, б, в).

Таким чином, є можливість частково враховувати розвиток пластичних деформацій, коли в небезпечному перерізі співіснують пластичні та пружні зони матеріалу. Для цього напрямку будівельні норми (ДБН В.2.6-163:2010 с.25) рекомендують розрахунок на міцність сталевих розрізних балок суцільного перерізу з границею текучості матеріалу $\sigma_y \leq 440$ МПа виконувати з урахуванням пластичних деформацій. Зокрема для випадку, коли згин відбувається в одній із головних площин при значенні дотичних напружень $\tau \leq 0,9R_s$ за такою формулою (R_s – розрахунковий опір матеріалу для зсуву):

$$\frac{M}{c_1 \beta W_{n,min}} \leq R_y \gamma_c, \quad (6.12)$$

де M – максимальний згинувий момент; $W_{n,min}$ – осьовий момент опору відносно центральної осі перерізу (індекс n означає, що треба брати осьовий момент опору для площі нетто; індекс min – що треба брати мінімальний осьовий момент опору для несиметричного перерізу); γ_c – коефіцієнт умов роботи (дорівнює $0.75 \leq \gamma_c \leq 1.2$, обирають за таблицею 1.1.1 згаданих будівельних норм); c_1 та β – коефіцієнти значення яких приймаються з згаданих будівельних норм.

ДБН В.2.6-163:2010, крім вище розглянутого випадку, дає рекомендації для розрахунків з урахуванням розвитку пластичних деформацій щодо згину в двох

головних площинах, для розрахунків на міцність в опорних перерізах балок тощо.

Перевага нормативної формули (6.12) та інших формул, наведених в ДБН В.2.6-163:2010 [46] для розрахунків балок з урахуванням розвитку пластичних деформацій, полягає в тому, що маємо змогу розраховувати балки в пружно-пластичній стадії роботи матеріалу. При цьому відпадає потреба обчислювати пластичний момент опору W_{pl} . Для розрахунків на міцність у цьому випадку користуються звичайним осьовим моментом опору W_{oc} з поправковим коефіцієнтом c_1 .

Розрахунки на міцність за методом тримальної здатності або з урахуванням розвитку пластичних деформацій дозволяють мати більш економічні балки за рахунок використання захованих резервів міцності, що залишаються невикористаними в розрахунках чисто пружної роботи балок.

6.6. Розвантаження та залишкові напруження

6.6.1. Дослідження напруженого стану

Якщо розвантажити будь-яку завантажену конструкцію, наприклад, ферму, в якій хоча б декілька стержнів зазнали пластичних деформацій, то розвантажена ферма не набере початкових розмірів і форми, оскільки в стержнях, у яких виникли пластичні деформації, зникнуть лише пружні деформації та їх розміри відрізнятимуться від початкових. Намагання одних стержнів ферми повністю відновити свої початкові розміри, а інших – залишити нові розміри за умов, коли ці стержні зв'язані між собою, – спричинить у випадку розвантаження появу в стержнях ферми залишкових напружень.

Дослідимо механізм утворення залишкових напружень на прикладі балки прямокутного перерізу (рис. 6.14), яка зазнає пружних деформацій, доки її максимальні напруження досягнуть границі текучості σ_y :

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_z} < \sigma_y.$$

Збільшуючи згинувий момент до значень $M \geq \sigma_y W_z$, у верхніх і нижніх волокнах балки матимемо пластичні деформації (рис. 6.1, а), які потім у міру збільшення моменту почнуть поширюватися в глиб перерізу (рис. 6.1, б).

Якщо позначити висоту пружного ядра через η (рис. 6.1, б; 6.15, а), то в зонах від $\eta/2$ до $h/2$ і від $(-\eta/2)$ до $(-h/2)$ напруження дорівнюватимуть σ_y . В зоні пружного ядра:

$$\sigma = \sigma_y \frac{2y}{\eta}. \quad (6.13)$$

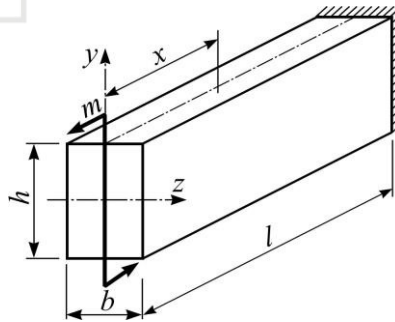


Рис. 6.14. Схема чистого згину

Коли повністю розвантажимо балку, то напруження розвантаження σ_{el} (el – elastic, пружний) змінюватимуться за лінійним законом $\sigma_{el} = \frac{M y}{I_z}$.

Розвантаження – процес адекватний навантаженню прикладеним моментом m , але протилежного за напрямком (рис. 6.14). Додавши одне до одного напруження від завантаження σ і від розвантаження σ_{el} (рис. 6.15, б), матимемо залишкові напруження σ_r :

$$\sigma_r = \sigma - \sigma_{el}. \quad (6.14)$$

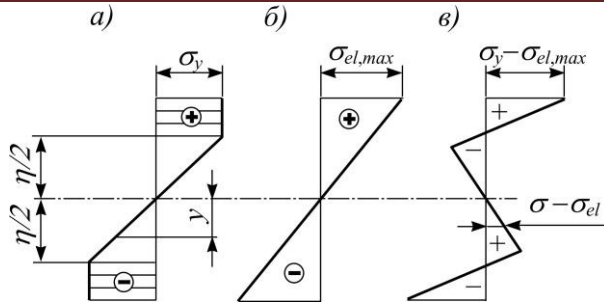


Рис. 6.15. Механізм утворення залишкових напружень (в) від завантаження (а) і розвантаження (б)

Залишкові сили діють у стержні без наявності зовнішніх сил, тому вони мають бути самозрівноваженими (рис. 6.15, в).

Залишкові напруження σ_r в прямокутному перерізі (рис. 6.14) згідно з формулою (6.14) дорівнюватимуть:

а) при $y = \frac{h}{2}$

$$\sigma_r = \sigma_y - \frac{6M}{bh^2},$$

де $M = m$;

б) при $y = \frac{\eta}{2}$

$$\sigma_r = \sigma_y - \frac{6M}{bh^2} \cdot \frac{\eta}{h}.$$

У цілому визначення залишкових напружень є задачею важливою та надзвичайно складною.

6.6.2. Дослідження деформованого стану

Дослідимо деформований стан прямокутної балки (рис. 6.14) після

розвантаження.

Згиновий момент M у перерізі у випадку завантаження дорівнює загальному моменту m щодо чистого згину і дорівнює:

$$M = m = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma b y dy. \quad (6.15)$$

Напруження в пружній зоні:

$$\sigma = \frac{E y}{\rho}, \quad (6.16)$$

де ρ - радіус кривини пружної лінії балки.

Напруження в пластичній зоні: $\sigma = \sigma_y$.

Оскільки закони зміни напружень у пружній та пластичній зонах різні, то інтеграл (6.15) слід розділити на два:

$$M = 2b \int_0^{\eta/2} \sigma y dy + 2b \sigma_y \int_{\eta/2}^{h/2} y dy. \quad (6.17)$$

Враховуючи значення напружень σ згідно з формулою (6.16), вираз (6.17) набуває такого вигляду:

$$M = 2b \frac{E}{\rho} \int_0^{\eta/2} y^2 dy + 2b \sigma_y \int_{\eta/2}^{h/2} y dy. \quad (6.18)$$

Після інтегрування (6.18) дістанемо:

$$M = \left(b \eta^3 \frac{E}{12\rho} \right) + \left[\sigma_y b \frac{(h^2 - \eta^2)}{4} \right]. \quad (6.19)$$

Тут перший доданок відповідає пружній, а другий – пластичній зоні (рис. 6.15, а). Пружні лінійні деформації дорівнюють $\varepsilon_{el} = y/\rho$, а граничне значення пружної деформації - $\varepsilon_{el,lim} = \varepsilon_y = \eta/2\rho$, звідки висота η пружного ядра має такий розмір:

$$\eta = 2\varepsilon_y\rho = 2\sigma_y\rho/E. \quad (6.20)$$

Підставивши розмір η за формулою (6.20) у формулу (6.19), після деяких перетворень матимемо:

$$M = \frac{b\sigma_y h^2}{4} - \frac{b\sigma_y^3 \rho^2}{3E^2}. \quad (6.21)$$

Із виразу (6.21) визначаємо кривину $1/\rho$ пружно-пластично зігнутої балки:

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{b\sigma_y^3}{3E^2 \left[\left(\frac{bh^2\sigma_y}{4} \right) - M \right]}}. \quad (6.22)$$

Таким чином, як це впливає з формул (6.21) і (6.22) згинувий момент M і кривина $1/\rho$ пов'язані нелінійною залежністю на відміну від звичайної формули для чистого пружного згину прямокутної балки, де кривина дорівнює:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} = \frac{12M}{bh^3E}. \quad (6.23)$$

Оскільки розвантаження відбувається за лінійним законом, то формула (6.23) залишається придатною і для розрахунків залишкових деформацій.

Залишкову кривину $1/\rho_r$ підраховуємо як різницю між кривинами, що

набуває балка після завантаження (6.22) та після розвантаження (6.23):

$$\frac{1}{\rho_r} = \sqrt{\frac{b\sigma_y^3}{3E^2 \left[\left(\frac{bh^2\sigma_y}{4} \right) - M \right]}} - \frac{12M}{bh^3E}. \quad (6.24)$$

Як бачимо із формули (6.24), в результаті виникнення залишкових напружень балка після розвантаження повністю не випрямляється, а залишається криволінійною.

Коли відома кривина балки, що працює на чистий згин, то порівняно легко підрахувати прогин $y(x)$, наприклад, консольної балки (рис. 6.14) за формулою

$$y(x) = \frac{(l-x)^2}{2\rho}. \quad (6.25)$$

Стріла прогину в цьому випадку при $x=0$ дорівнюватиме:

$$f = \frac{l^2}{2\rho}. \quad (6.26)$$

Користуючись знайденими в експерименті прогинами $y(x)$ можна для консольної балки прямокутного перерізу за допомогою здобутих формул (6.24–6.26) визначити залишкові напруження, що виникатимуть в її перерізах.

Контрольні запитання

1. Яким чином можна повністю вичерпати тримальну (несну) здатність балки?
2. Що являє собою діаграма Прандтля?
3. Що таке і в яких перерізах утворюється пластичний шарнір під час згинання балки? Чому дорівнює згиновий момент (пластичний згиновий момент M_{pl}) у пластичному шарнірі?

4. Що таке і чому дорівнює пластичний момент опору (W_{pl}) для симетричних і несиметричних перерізів? Де проходить у цих випадках нейтральна вісь перерізу?

5. У чому полягає суть методу тримальної здатності для розрахунку статично невизначних балок?

6. Який порядок розрахунку існує для статично невизначних балок за методом тримальної здатності?

7. На які два типи поділяють розрахунки на тримальну здатність нерозрізних балок, в чому їх суть?

8. Які існують переваги для метода розрахунків балок з урахуванням розвитку пластичних деформацій?

9. Коли утворюються залишкові напруження в стержнях, що зазнали пластичних деформацій?

10. Чому балки, які зазнали пластичних деформацій, після розвантаження не випрямляються повністю до початкового стану та залишаються зігнутими, криволінійними?

РОЗДІЛ VII ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

7.1. Основні співвідношення теорії пружності. Статичні рівняння

7.1.1. Зв'язок теорії пружності з іншими предметами

Теорія пружності – наука, що вивчає напружений та деформований стан (НДС) деформованого твердого тіла під час дії на нього різних фізичних чинників у межах пружності матеріалу. В опорі матеріалів теж вивчають НДС, але окремо взятого стержня (одновимірного тіла). У будівельній механіці розглядають НДС системи стержнів. На відміну від опорів матеріалів і будівельної механіки теорія пружності вивчає переважно НДС дво- та тривимірних тіл (балки-стілки, пластини, оболонки, масиви). Крім того тут аналізують і НДС одновимірних тіл (стержнів, колон тощо), але з точніших математичних позицій.

Теорія пружності поділяється на два основні розділи – на математичну та прикладну. У першому випадку теорія пружності наближається до фізики твердого тіла. У другому – вона тісно переплітається з опором матеріалів і будівельною механікою.

Математична теорія пружності не використовує жодної деформаційної гіпотези і тому її розв'язки задач є або точними, або такими, що дають змогу так чи інакше безмежно збільшувати ступінь наближення до точного результату.

Прикладна теорія пружності користується додатковими гіпотезами деформаційного характеру (гіпотеза прямих нормалей та ін.).

І математична, і прикладна теорія пружності базуються на гіпотезах і принципах щодо моделі деформівного твердого тіла, що відомі з курсу опорів матеріалів. Це гіпотези про ідеальну пружність матеріалу, про його суцільність, однорідність, ізотропію, про малі пружні деформації, про лінійну залежність між напруженнями і деформаціями (закон Гука), про початкову ненапруженість тіла. Застосовуються також принцип суперпозиції про незалежність дії сил і

принцип Сен-Венана про вплив на напружений стан місцевих і самозрівноважених зовнішніх сил.

Між теорією пружності та опором матеріалів і будівельною механікою чіткої межі немає. Багато конструктивних елементів (стержні, пластини, оболонки) розглядаються і там, і там. Взаємне проникнення існує не лише на рівні об'єктів, що вивчаються, але й для деяких методів (енергетичний, чисельний та ін.).

Значення теорії пружності полягає, по-перше, в розробленні точних розв'язків для тих задач, які можна розв'язувати, і вони розв'язуються іншими, наближеними методами в опорі матеріалів і в будівельній механіці. По-друге, у формулюванні та в розв'язуванні дуже важливих для практики задач, які не можна розв'язати іншими методами (наприклад, НДС масивів, концентрація напружень і т. ін.). І по-третє, значення теорії пружності полягає в тому, що вона забезпечує подальший розвиток опору матеріалів і будівельної механіки за рахунок розширення кола питань, що вивчаються в цих предметах, і за рахунок використання нових, досконаліших методів розв'язування інженерних задач.

7.1.2. Позначення сил, напружень і правило знаків для них

Поверхневі сили (інтенсивність навантаження q_v) в теорії пружності позначають за допомогою зовнішньої нормалі ν до поверхні тіла в даній точці A (рис. 7.1). Компоненти поверхневого навантаження по осях координат $Oxuz$ позначають великими літерами X_v, Y_v, Z_v . Об'ємні сили та їх компоненти позначають такими ж літерами, але без індексів: X, Y, Z .

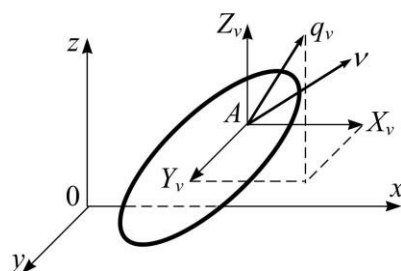


Рис. 7.1. Компоненти поверхневого навантаження q_v

Якщо з тіла, завантаженого деякою системою зовнішніх сил, вирізати елементарний паралелепіпед (рис.7.2), то на його всіх гранях під деяким кутом до них слід зобразити повні напруження. Додатні значення їх компонентів вибірково зображено на рис. 7.2. На кожній грані, таким чином, ми бачимо одне нормальне та два дотичні напруження.

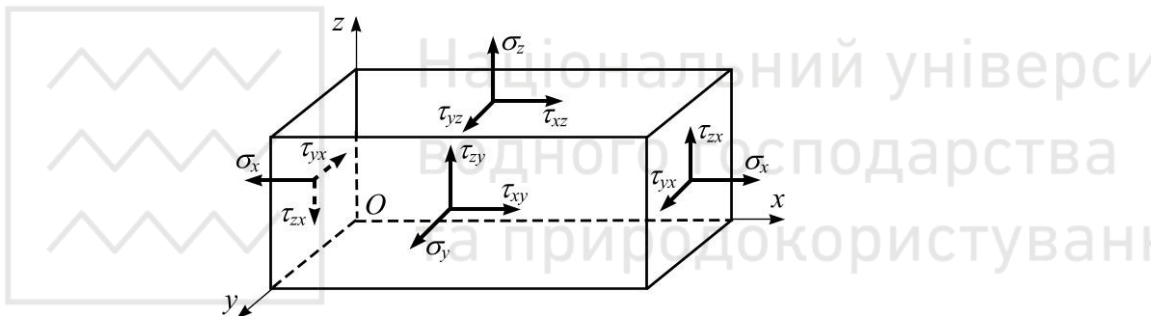


Рис. 7.2. Позначення нормальних (σ) і дотичних (τ) напружень

Нормальні напруження позначаються літерою σ (сигма) з одним індексом, дотичні – літерою τ (тау) з двома індексами. Перший індекс (для нормальних напружень він єдиний) свідчить про паралельність до вказаної осі зображеного вектора напружень. Вектори нормальних напружень σ_x , σ_y , σ_z – паралельні відповідним координатним осям x , y , z (рис. 7.2). Другий індекс (для дотичних напружень) вказує на напрямок зовнішньої нормалі до площинки, де розташована напруга. Наприклад, дотичні напруження τ_{xz} і τ_{yz} знаходяться на площинці з нормаллю, яка паралельна координатній осі Oz , а вектори напружень τ_{xz} і τ_{yz} паралельні відповідно осям x і y .

Для нормальних напружень єдиний їх індекс одночасно вказує на напрямок нормалі до площинки, де знаходяться ці напруження. Приміром, напруження σ_z міститься на площинці з нормаллю, яка паралельна координатній осі Oz .

Про правило знаків для напружень. На видимих гранях паралелепіпед (ці грані на рис. 7.2 окреслені лише суцільними лініями) напрямки векторів додатних напружень збігається з додатним напрямком координатних осей. На невидимих гранях (ці грані на рис. 7.2 частково окреслені пунктирними лініями)

– напрямки векторів додатних напружень протилежні додатним напрямкам координатних осей. Порівняймо, наприклад, напрямки векторів додатних дотичних напружень τ_{yx} на правій (видимий) грані та на лівій (невидимий) грані виділеного паралелепіпеда (рис. 7.2). Вектори від’ємних нормальних і дотичних напружень спрямовані, зрозуміло, протилежно додатним.

7.1.3. Диференціальні рівняння рівноваги

Про напруження й сили, що виникають на гранях виділеного елементарного паралелепіпеда. Якщо навколо точки $M(x, y, z)$, яка розташована всередині тіла, що перебуває у рівновазі під дією заданої системи сил (рис. 7.3), вирізати елементарний паралелепіпед (рис. 7.4), то на кожній його грані матимемо певні напруження.

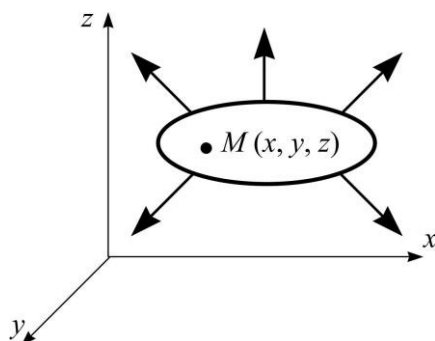


Рис. 7.3. Схема зрівноваженого тіла

На рис. 7.4 зображено лише ті компоненти напружень і об’ємна сила, які паралельні координатній осі x . При цьому вважаємо, що навантажене тіло має неоднорідний напружений стан і що кожне з його напружень є функцією трьох координат. Скажімо, $\sigma_x = \sigma_x(x, y, z)$. Таким чином, від точки $M(x, y, z)$ до будь-якої іншої точки напруження змінюються. Якщо, наприклад, у точці M маємо напруження σ_x , то в іншій точці, яка розташована на відстані dx від точки M , напруження σ_x змінюється і набирає вздовж осі x такого значення:

$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$, де множник $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$ у другому доданку можна трактувати як швидкість змінення напруження σ_x у напрямку x , а множник dx – як елементарний шлях, що треба пройти від заданої точки M до якоїсь іншої.

Визначимо, чому дорівнює сума проєкцій усіх сил, прикладених до елементарного паралелепіпеда (рис. 7.4), на вісь абсцис. Щоб спроектувати всі сили на вісь x , треба напруження на всіх гранях попередньо помножити на площу відповідної грані, а компоненту об'ємної сили X на об'єм $dx dy dz$ елементарного паралелепіпеда.

Після скорочення $dx dy dz$ записаного таким чином рівняння рівноваги ($\sum X = 0$) дістанемо:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0. \quad (7.1)$$

Рівняння (7.1) є диференціальне рівняння рівноваги для сил, паралельних осі x .

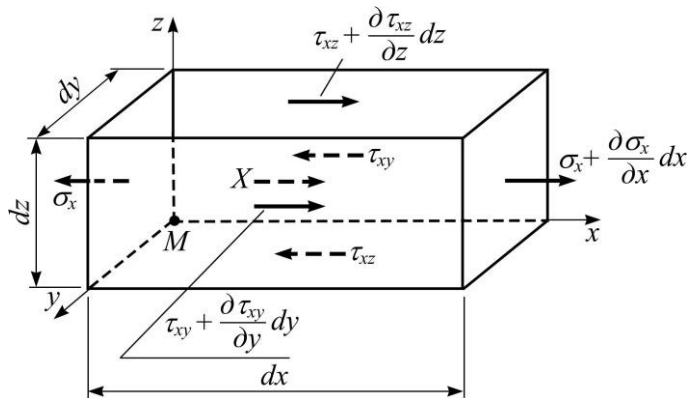


Рис. 7.4. Зображення компонентів напружень і об'ємної сили, паралельних осі x

Визначимо далі, чому дорівнює сума моментів усіх сил, прикладених до елементарного паралелепіпеда, відносно вертикальної (вертикальної) осі C_{z1} , що проходить через його центр ваги C . Розглянемо знову лише ті напруження

(попередньо помноживши їх на площі відповідних граней), які створюють момент відносно осі C_{z1} (рис. 7.5).

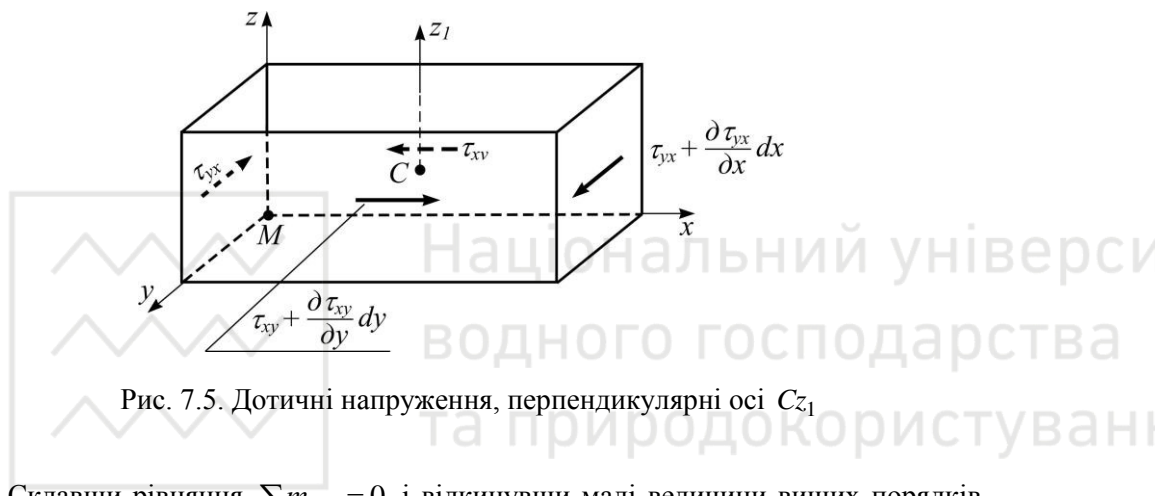


Рис. 7.5. Дотичні напруження, перпендикулярні осі C_{z1}

Склавши рівняння $\sum m_{C_{z1}} = 0$ і відкинувши малі величини вищих порядків малізми, після скорочення на об'єм $dx dy dz$ матимемо:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad (7.2)$$

Рівняння (7.2) – це аналітичний вираз відомого в опорі матеріалів закону парності дотичних напруг.

Запишемо повну систему диференціальних рівнянь рівноваги на підставі співвідношень (7.1–7.2). Враховуючи закон парності дотичних напружень, після відповідного циклічного (колового) переставлення індексів у напруженнях і переставлення символів у складових об'ємної сили згідно з рис. 7.6 дістанемо шість рівнянь рівноваги елементарного паралелепіпеда, які можна записати в такій послідовності:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0;$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (7.3)$$

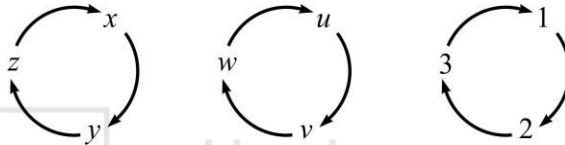


Рис. 7.6. Схеми циклічного (колового) переставлення індексів

Шість рівнянь (7.3), три перші з яких – диференціальні рівняння рівноваги, мають дев'ять компонентів нормальних і дотичних напружень. Таким чином, просторова задача теорії пружності є тричі статично невизначною. Диференціальні рівняння рівноваги вперше записав 1821 року французький учений у галузі математики та механіки, один із основоположників теорії пружності Луї М.А. Нав'є.

7.1.4. Умови на поверхні тіла. Напруження на похилих площинках

Біля поверхні тіла, коли його об'єм розрізають на елементарні паралелепіеди, можуть утворюватися тетраедри, три вершини яких a, b, c лежать на поверхні, а четверта, вершина M , знаходиться усередині тіла (рис. 7.7, а).

На рис.7.7, б тетраедр зображено в збільшеному вигляді. Тут ν – зовнішня нормаль до похилої поверхні abc . X_ν, Y_ν, Z_ν – компоненти інтенсивності поверхневого навантаження q_ν . На рис. 7.7, б зображено лише складова об'ємної сили X і складові напружень, які паралельні координатній осі Ma : $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$.

Розглянемо умови на поверхні тіла. Позначивши площу грані abc через dA ,

для площ відповідних граней матимемо:

пл. $Mab = dA \cos(\nu z)$;

пл. $Mbc = dA \cos(\nu x)$;

пл. $Mac = dA \cos(\nu y)$.

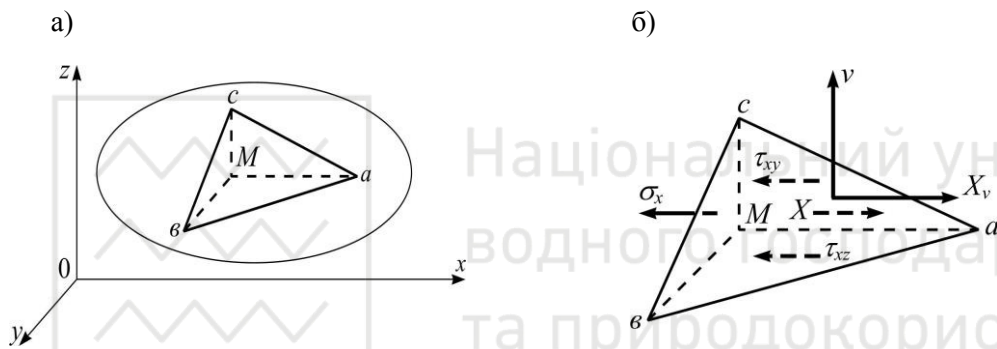


Рис. 7.7. Тетраедр (б), вирізаний з тіла (а), із зображенням векторів сил і напружень, паралельних осі $Ox(Ma)$

Косинуси в цих формулах називаються напрямними і позначають їх ще так:

$$\cos(\nu x) = l;$$

$$\cos(\nu y) = m;$$

$$\cos(\nu z) = n.$$

Об'єм елементарного тетраедра $dV = dx dy dz / 6$.

Спроектувавши всі сили (рис. 7.7, б) на вісь x , дістанемо:

$$X_v dA - \sigma_x dAl - \tau_{xy} dAm - \tau_{xz} dAn + X dV = 0.$$

Нехтуючи величиною вищого порядку мализни ($X dV$), після скорочення на dA та після циклічного переставлення індексів це рівняння дає нам умови на поверхні тіла:

$$X_v = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n;$$

$$Y_v = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n;$$

$$Z_v = \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + \sigma_z n. \quad (7.4)$$

Рівняння (7.4) дуже важливі, оскільки вони пов'язують компоненти напружень із компонентами поверхневого навантаження. У диференціальні рівняння Нав'є (7.3) поверхневі навантаження не входять, але в результаті інтегрування цих рівнянь необхідно знайти такі функції для компонент напружень, які задовольняли б умови на поверхні тіла (7.4). У цьому плані рівняння (7.4) виконують таку саму роль, як і межові умови для розрахунків балок в опорі матеріалів.

Рівняння (7.4) можна використовувати для визначення напружень на похилій площинці, якщо при цьому вважати, що разом із точкою M (рис. 7.7) точки a, b, c теж знаходяться десь усередині тіла. У цьому разі складові повного напруження p_v на похилій площинці дорівнюють у рівняннях (7.4) величинам: $p_{yv} = Y_v$, $p_{xv} = X_v$, $p_{zv} = Z_v$. У такий спосіб складові p_{xv} , p_{yv} і p_{zv} пов'язуються з нормальними і дотичними напруженнями на трьох взаємно перпендикулярних гранях: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$.

7.1.5. Головні напруження. Інваріанти напруженого стану

Розглянемо, чому дорівнюють нормальні та дотичні напруження на похилій грані abc (рис. 7.7). У разі відомих складових повного напруження p_{xv}, p_{yv}, p_{zv} на похилій грані з нормаллю v повне напруження p_v дорівнює:

$$p_v = \sqrt{p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2}.$$

Спроекуємо компоненти напружень p_v на нормаль v . Тоді їх сума дає нормальне напруження на похилій грані:

$$\sigma_v = p_{xv}l + p_{yv}m + p_{zv}n.$$

Враховуючи вирази (7.4) для компонент напружень p_v і закон парності дотичних напружень, дістанемо такий вираз для нормальних напружень σ_v на

похилій грані:

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} lm + \tau_{yz} mn + \tau_{zx} nl).$$

Використовуючи вирази для p_v і σ_v , знайдемо дотичні напруження на похилій грані:

$$\tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2}.$$

Ця формула дає тільки значення дотичного напруження без вказівки напрямку її вектора в площині похилої грані.

Розглянемо далі інваріанти напруженого стану. Інваріант напруженого стану – це функція від напружень, що не змінюється від певних перетворень системи координат. Але спочатку визначимо головні напруження об'ємного напруженого стану.

Проектуючи головні напруження σ на координатні осі, матимемо:

$$\sigma l = p_{xv} \quad \sigma m = p_{yv} \quad \sigma n = p_{zv}.$$

Крім того, з аналітичної геометрії відоме таке співвідношення для напрямних косинусів: $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Таким чином, сукупно маємо чотири рівняння та чотири невідомі: σ, l, m, n .

Для визначення головних напружень σ рівняння для $\sigma l, \sigma m, \sigma n$ на підставі співвідношень (7.4) запишемо в такому вигляді:

$$(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0;$$

$$\tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n = 0;$$

$$\tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0.$$

Ця система рівнянь має нетривіальний (ненульовий) розв'язок за умови, що її визначник дорівнює нулю. Розгортаючи визначник цієї системи рівнянь, дістанемо кубічне рівняння відносно головного напруження σ :

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0.$$

Коефіцієнти цього кубічного рівняння називають першим або лінійним (I_1), другим, або квадратичним (I_2), та третім, або кубічним (I_3), інваріантами напруженого стану. Вони дорівнюють:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = const;$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix} = \\ = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = const;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \\ = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2) = const. \quad (7.5)$$

Розв'язуючи кубічне рівняння, знаходимо три його корені: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Корені кубічного рівняння є головними напруженнями в заданій точці тіла.

Із рівнянь (7.5) випливають такі вирази для інваріантів напруженого стану в головних напругах:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1;$$

$$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3. \quad (7.6)$$

Інваріанти напруженого стану I_1, I_2, I_3 розглядають у теорії пружності як основні характеристики напруженого стану в точці.

7.2. Основні співвідношення теорії пружності. Геометричні та фізичні рівняння

7.2.1. Диференціальні залежності між деформаціями та переміщеннями

Шість рівнянь (7.3), що мають дев'ять невідомих, спричиняють розгляд геометричного аспекту просторової задачі теорії пружності. Щоправда, завдяки закону парності дотичних напруг можна і слід залишити для подальшого розгляду тільки перші три з цих рівнянь. І тоді ці три диференціальні рівняння матимуть лише шість невідомих. Таким чином, задача визначення напружень у просторовому тілі є тричі статично невизначною. Для її розв'язування, як це відомо ще з курсу опору матеріалів, потрібно розглянути спочатку геометричний бік задачі, а потім і фізичний.

Довільна незакріплена точка закріпленого тіла під час його деформування змінює своє початкове місцезнаходження. Якщо тіло закріплено (рис. 7.8, а) і не може пересуватися як жорстке ціле, то переміщення довільної точки M у нове положення M_1 відбувається лише за рахунок деформування тіла. Складові повного переміщення MM_1 по осях координат Ox, Oy, Oz прийнято позначати відповідними символами: u, v, w (рис. 7.8, б).

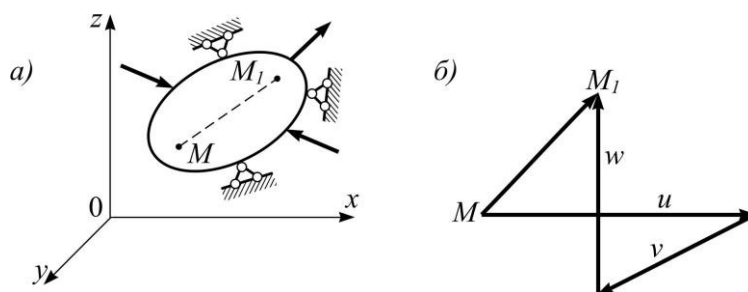


Рис. 7.8. Деформування закріпленого тіла (а) і складові переміщення MM_1 (б)

Внаслідок деформування твердого тіла різні його точки переміщуються по-різному. Як і сама точка $M(x, y, z)$, так і складові повного переміщення є функціями трьох координат: $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$.

Розглядаючи геометричний бік задачі, використовуємо такі гіпотези:

1. Пружні переміщення точок деформованого твердого тіла порівняно з його мінімальним розміром a (рис. 7.9) є малими, тобто $u \ll a$, $v \ll a$, $w \ll a$.

2. Кути повороту елементарного паралелепіпеда, вирізаного навколо точки, що розглядається, і кути зсуву його ребер нехтовно малі порівняно з одиницею. Для виконання цієї вимоги треба дотримуватися того, щоб будь-яка частинна похідна від функцій u, v, w була нехтовно малою величиною порівняно з одиницею:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} \ll 1; \quad \frac{\partial u}{\partial z} \ll 1; \quad \frac{\partial v}{\partial x} \ll 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} \ll 1 \quad \text{та ін.} \quad (7.7)$$

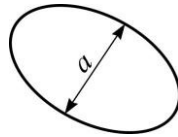


Рис. 7.9. Мінімальний розмір твердого тіла

3. Для навантаженого тіла деформовані грані елементарного паралелепіпеда (рис. 7.10, а) залишаються прямолінійними (рис. 7.10, б), а не криволінійними (рис. 7.10, в), як це є насправді.

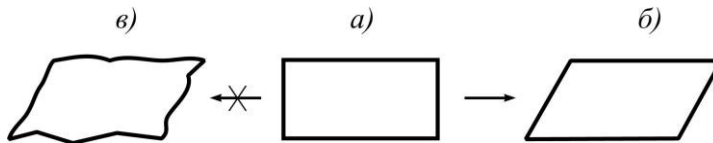


Рис. 7.10. Умовна заміна криволінійних граней (в) деформованого паралелепіпеда (а) прямолінійними гранями (б)

Уточнимо, з яких компонентів складається кінцева деформація елементарного паралелепіпеда (рис. 7.10, б). Деформацію паралелепіпеда можна розділити на такі складові:

а) зміна довжини його ребер унаслідок зміни його об'єму (рис. 7.11, а);

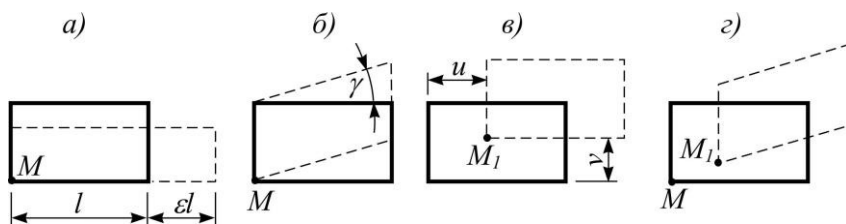


Рис. 7.11. Розділення деформованої грані (д) на складові (а, б, в)

б) зміна спочатку прямих кутів паралелепіпеда внаслідок зміни його форми (рис. 7.11, б);

в) переміщення недеформованого паралелепіпеда (рис. 7.11, в);

г) у результаті здійснення разом усіх трьох компонентів деформування елементарний паралелепіпед (рис. 7.10, а) матиме загальне положення, яке зображено пунктиром на рис. 7.11, д.

З'ясуємо, які диференціальні залежності існують між деформаціями (лінійними та кутовими) і переміщеннями (лінійними). Для цього розглянемо відносні видовження ребер (лінійні деформації) і зміну кутів (кутові деформації) елементарного паралелепіпеда на прикладі його проекції на площину xOy (рис. 7.12).

Відносне видовження ребра MA становить:

$$\varepsilon_x = \frac{M_1 A_1 - MA}{MA} = \frac{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (7.8)$$

лінійна деформація ребра MB дорівнює:

$$\varepsilon_y = \frac{M_1 B_1 - MB}{MB} = \frac{\left(dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (7.9)$$

Підрахуємо тепер γ_{xy} – зміну прямого кута $\angle BMA$ (в радіанах):

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta,$$

де

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 A_2}{M_A A_2} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx};$$

$$\beta \approx \operatorname{tg} \beta = \frac{B_1 B_2}{M_1 B_2} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy}.$$

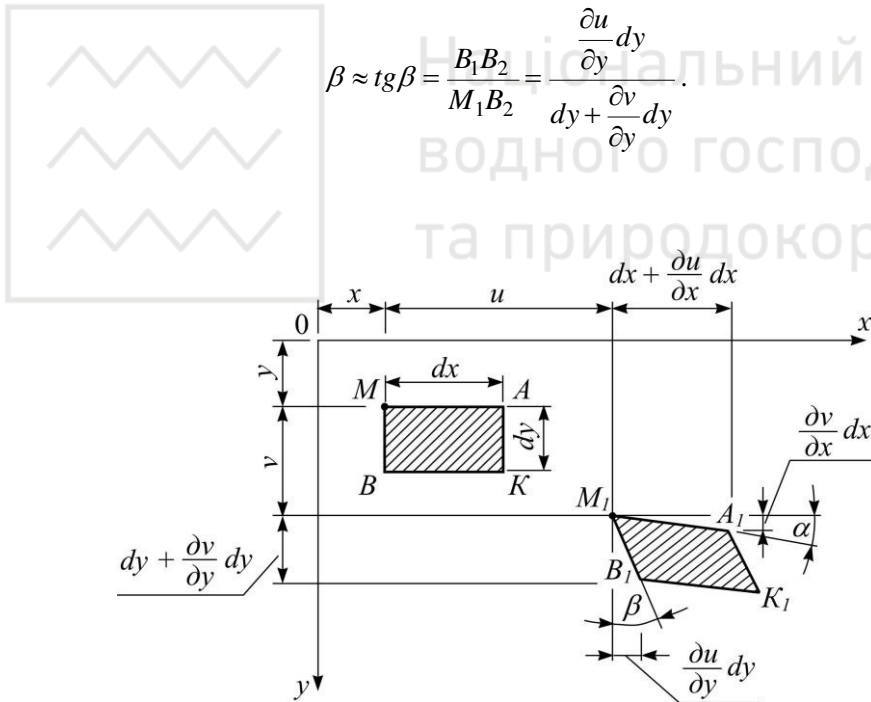


Рис. 7.12. До визначення диференціальних залежностей між деформаціями $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ і переміщеннями (u, v)

І тоді після скорочення на dx і dy у відповідних доданках маємо:

$$\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}}. \quad (7.10)$$

Враховуючи аналітичний вираз відповідної гіпотези (7.7), із залежності (7.10) дістанемо:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (7.11)$$

Використовуючи співвідношення (7.8), (7.9) і (7.11) та виконуючи відповідне циклічне переставлення (рис. 7.6), дістаємо такі диференціальні залежності, що мають назву рівнянь Коші, який їх уперше запропонував 1822 року:

$$\begin{aligned} 1) \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & 2) \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & 3) \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & 4) \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ 5) \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; & 6) \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Проаналізуємо, що дають рівняння Коші (7.12) для розв'язування просторової задачі теорії пружності. Ми бачимо, що до трьох рівнянь Нав'є (7.3) з шістьма невідомими, рівняння Коші додають ще шість рівнянь і дев'ять невідомих: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, u, v, w$.

Таким чином, для просторової задачі наразі маємо 9 рівнянь і 15 невідомих. Для розв'язування задачі не вистачає ще 6 рівнянь, які маємо дістати з розгляду фізичного боку просторової задачі теорії пружності. А втім, можна скоротити кількість невідомих, якщо з рівнянь Коші вилучити невідомі u, v, w певним чином перебудувавши ці рівняння.

7.2.2. Рівняння нерозривності деформацій

Уперше рівняння нерозривності (інакше: сумісності, суцільності) запропонував французький учений Сен-Венан 1864 року. Яку ж роль відіграють ці рівняння в теорії пружності? Вони вилучають із розгляду три величини:

u, v, w і зменшують, таким чином, загальну кількість невідомих в основних рівняннях просторової задачі. Крім того, рівняння Сен-Венана дають математичні зв'язки між лінійними і кутовими деформаціями.

Потребу виявлення аналітичних зв'язків між лінійними і кутовими деформаціями продиктовано вимогою гіпотези про суцільність матеріалу до і після деформування твердого тіла. Уявімо собі, що поставлено таке завдання: розрізати будь-яке деформоване тверде тіло на елементарні паралелепіеди (рис. 7.13, *а*) і деформувати їх за довільними аналітично заданими лінійними і кутовими деформаціями. Оскільки деформації $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ заздалегідь відомі, то можна тепер порахувати зміну лінійних і кутових розмірів і визначити спотворення форми кожного елементарного паралелепіеда, як це зображено на рис. 7.13, *б, в*. Постає питання: чи можна зі деформованих таким чином паралелепіедів знову скласти суцільне тіло, без порожнин і розривів, як це, наприклад, зображено на рис. 7.13, *б*?

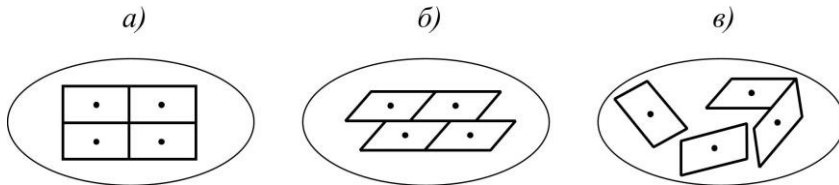


Рис. 7.13. Схема суцільної (*б*) і розривної (*в*) деформації твердого тіла (*а*)

Виявляється, що в загальному випадку цього зробити не можна (рис. 7.13, *в*). Щоб скласти знову суцільне тіло зі деформованих паралелепіедів, треба на функції лінійних і кутових деформацій $\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y, z) \dots \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y, z) \dots$ накласти певне аналітичне обмеження, яке й диктують рівняння нерозривності деформацій.

Щоб дістати рівняння нерозривності деформацій, треба перше рівняння (7.12) двічі продиференціювати за змінною y , а друге – двічі за змінною x , скласти їх і після невеликих перетворень матимемо:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (7.13)$$

Диференціюючи четверте, п'яте й шосте рівняння (7.12) за змінною, яка відсутня в їх виразах, тобто диференціюючи четверте рівняння за змінною z , п'яте – за змінною x , шосте – за змінною y , а далі із суми четвертого й шостого рівнянь віднімаючи п'яте рівняння, дістанемо:

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}.$$

Диференціюючи цей вираз ще раз за dx , знайдемо:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}. \quad (7.14)$$

Зробивши у виразах (7.13) і (7.14) колове переставлення, матимемо рівняння Сен-Венана (рівняння нерозривності деформацій):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \quad (7.15)$$

Фізичний зміст рівнянь Сен-Венана полягає в тому, що із спотворених елементарних паралелепіпедів можна скласти тіло без розривів і порожнин лише тоді, коли функції лінійних і кутових деформацій задовольняють рівняння (7.15). Таким чином, визначається забезпеченість суцільності деформованого тіла. Тому рівняння (7.15) називають також рівняннями суцільності або спільності, сумісності.

Рівняння суцільності мають і математичний зміст. Для відомих значень лінійних і кутових деформацій підраховування лінійних переміщень на підставі рівнянь Коші (7.12) можливе тільки за умов ствердження рівнянь (7.15). Інакше кажучи, ствердження рівнянь (7.15) є необхідною і достатньою умовою існування розв'язку системи рівнянь (7.12).

7.2.3. Лінійно-пружна модель деформованого твердого тіла. Узагальнений закон Гука

Нагадаємо, що узагальнений закон Гука, пряму форму якого розглянуто в курсі опору матеріалів, має такий вигляд:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)];$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad (7.16)$$

де ν – коефіцієнт поперечної деформації (коефіцієнт Пуассона); E – модуль пружності матеріалу; G – модуль зсуву.

Закон Гука відповідає лінійно-пружній моделі ізотропного деформованого твердого тіла і для реального тіла є справедливим до границі пружності матеріалу, тобто до відповідного значення еквівалентного (зведеного) напруження за тією чи іншою теорією міцності щодо плоского або об'ємного напруженого стану.

Пряма форма узагальненого закону Гука у вигляді (7.16) є основною. У деяких задачах теорії пружності доцільно використовувати й обернену форму закону Гука.

Розв'язавши рівняння (7.16) відносно нормальних і дотичних напружень, дістанемо обернену форму закону Гука, яка має такий вигляд:

$$\sigma_x = 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{1 - 2\nu} \right];$$

$$\sigma_y = 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{1 - 2\nu} \right];$$

$$\sigma_z = 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{1 - 2\nu} \right];$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy};$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz};$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \quad (7.17)$$

1859 року французький учений Г. Ламе запропонував позначати сталі величини ізотропного матеріалу таким чином:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (7.18)$$



У цьому разі обернена форма закону Гука набирає вигляду:

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x;$$

$$\sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y;$$

$$\sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z;$$

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy};$$

$$\tau_{yz} = \mu\gamma_{yz};$$

$$\tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \quad (7.19)$$

Тут $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ – об’ємна деформація (перший інваріант деформованого стану).

Доречно зазначити, що саме Г. Ламе 1852 року видав першу книгу з теорії пружності під назвою “Лекції з математичної теорії пружності твердих тіл”.

7.2.4. Постановка основної задачі теорії пружності

Основна задача теорії пружності полягає в тому, щоб розв'язати основні співвідношення теорії пружності, до яких належать:

1. Статичні рівняння – диференціальні рівняння рівноваги (7.3) і умови на поверхні тіла (7.4).

2. Геометричні рівняння – диференціальні залежності між деформаціями і переміщеннями (7.12) і рівняння нерозривності деформацій (7.15).

3. Фізичні рівняння – пряма (7.16) і обернена (7.19) форми узагальненого закону Гука.

Підрахуємо кількість розв'язувальних рівнянь і кількість невідомих. Маємо три рівняння Нав'є (7.3) і шість невідомих; шість рівнянь Коші (7.12) і додатково дев'ять невідомих; шість рівнянь закону Гука і жодної нової невідомої. Отже, разом маємо п'ятнадцять рівнянь і п'ятнадцять невідомих. У цілому просторова задача теорії пружності розв'язується, але з великими математичними труднощами.

Рівняння статичних умов на поверхні тіла (7.4), рівняння Сен-Венана (7.15) і обернена форма закону Гука (7.19) – це все допоміжні рівняння, і вони в цілому не впливають на розв'язування задачі, а лише допомагають, полегшують її розв'язування.

Розв'язування здобутих рівнянь у теорії пружності провадять за допомогою різних методів залежно від того, які величини прийнято за основні невідомі.

Задачу розв'язують у переміщеннях (невідомі u, v, w), у напруженнях (невідомі $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$) і змішаним способом (одна частина невідомих – переміщення, інша - напруження).

Щодо математичного розв'язування задачі існує три методи: прямий метод (безпосереднє інтегрування рівнянь теорії пружності), обернений метод (задаються функціями напружень або функціями переміщень і визначають навантаження, яким ці функції відповідають) і напівобернений метод Сен-Венана (найпоширеніший метод, коли для спрощення інтегрування диференціальних рівнянь роблять деякі обґрунтовані припущення стосовно до

функцій напружень або до функцій переміщень). Кожний із розглянутих методів має свої переваги та вади.

7.3. Плоска задача теорії пружності в декартових координатах

Плоскою задачею теорії пружності називають сукупність досліджень напруженого й деформованого стану пружного середовища (деформованого твердого тіла), коли навантаження, напруження, деформації й переміщення описуються функціями лише двох, одних і тих самих координат: $F = F(x, y)$, $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$, $\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y)$, $u = u(x, y)$ і т.д.

Плоска задача поділяється на два типи: плоску деформацію і плоский напружений стан. Останній, у свою чергу, підрозділяється на власне плоский напружений стан і на узагальнений плоский напружений стан.

7.3.1. Плоска деформація. Основні рівняння

Плоскою деформацією вважають такий напружений і деформований стан у площині xOy призматичного або циліндричного тіла, коли переміщення точок тіла вздовж осі z дорівнюють нулю (рис. 7.14):

$$w = 0. \quad (7.20)$$

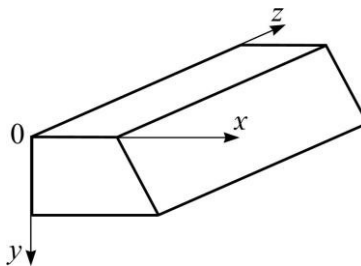


Рис. 7.14. Об'єкт плоскої деформації

Рівність (7.20) виражає собою основну, характерну властивість плоскої деформації.

З цієї основної властивості випливають такі додаткові :

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0. \quad (7.21)$$

А звідси за законом Гука виходить, що

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (7.22)$$

Отже, для плоскої деформації визначальними є властивості (7.20 – 7.22).

Використовуючи рівності (7.20 – 7.22) і основні співвідношення просторової задачі теорії пружності (7.3), (7.4), (7.12), (7.15) і (7.16), дістанемо такі основні рівняння плоскої деформації:

а) диференціальні рівняння рівноваги –

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0; \end{aligned} \quad (7.23)$$

б) умови на поверхні тіла (напруження на похилій грані):

$$\begin{aligned} X_V &= \sigma_x l + \tau_{xy} m; \\ Y_V &= \tau_{xy} l + \sigma_y m; \end{aligned} \quad (7.24)$$

в) диференціальні залежності між деформаціями та переміщеннями:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (7.25)$$

г) рівняння нерозривності деформацій –



$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad (7.26)$$

д) фізичні рівняння (закон Гука) можна записати так:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_y = [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)];$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \quad (7.27)$$

а також

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]}{E},$$

звідки

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (7.28)$$

Підставляючи значення напруження σ_z за формулою (7.28) у вирази (7.27) для ε_x і ε_y , матимемо такі фізичні рівняння для плоскої деформації:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \nu_1 \sigma_y);$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_1}(\sigma_y - \nu_1 \sigma_x);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu_1)}{E_1} \tau_{xy}, \quad (7.29)$$

де



$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2};$$

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (7.30)$$

В умовах плоскої деформації працюють такі реальні об'єкти, в яких поперечні перерізи достатньо віддалені від країв. Це, наприклад, греблі (рис. 7.14), трубопроводи (рис. 7.15, а), каркаси тунелів (рис. 7.15, б), вузькі довгі плити, обіперті довгими сторонами (рис. 7.15, в), тощо.

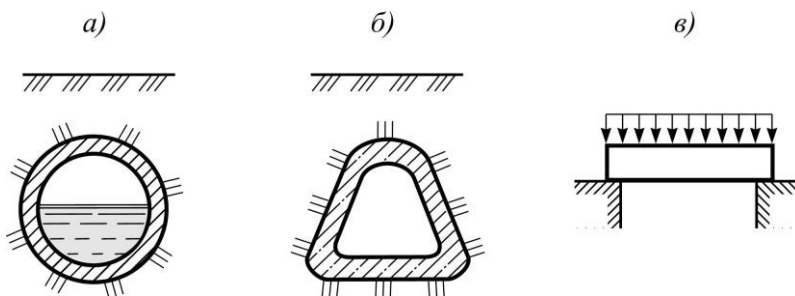


Рис. 7.15. Об'єкти, які працюють в умовах плоскої деформації: труби (а), каркаси (б), вузькі плити (в)

Характерною особливістю роботи таких розрахункових об'єктів є те, що їхні перерізи, плоскі до деформування, залишаються плоскими і не переміщуються вздовж осі z (рис. 7.14) і після деформування.

За довжиною призматичного або циліндричного тіла навантаження має бути сталим. У площині ж перерізу (площина xOy , рис. 7.14) навантаження може бути й довільним. Зовнішні сили мають залежати лише від двох змінних: об'ємні сили – $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$, $Z = 0$; бічні навантаження – $X_v = X_v(x, y)$, $Y_v = Y_v(x, y)$, $Z_v = 0$.

В умовах плоскої деформації працюють, з деяким наближенням, навіть короткі призматичні та циліндричні стержні, якщо навантаження на їхніх торцях розподілене за законом: $X_v = 0$, $Y_v = 0$, $Z_v = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$.

Отже, плоска деформація в загальному випадку визначається вісьмома основними рівняннями (7.23), (7.25) і (7.29), які мають вісім невідомих: σ_x , σ_y , τ_{xy} , u , v , ε_x , ε_y , γ_{xy} . Таким чином, плоска задача теорії пружності формально розв'язується, якщо не говорити про математичні складнощі цього розв'язування.

7.3.2. Плоский напружений стан

У плоскому напруженому стані можуть перебувати дуже тонкі пластини, в яких напруження σ_z на бокових поверхнях (рис. 7.16) і, зрозуміло, по всій товщині дорівнюють нулю:

$$\sigma_z = 0. \quad (7.31)$$

У цьому випадку пластини можуть мати довільний обрис у плані і будь-які рівномірно розподілені по їхній товщині навантаження на контурі. Навантажень на бокових поверхнях пластини не повинно бути. При цьому стійкість початкової форми пластин не розглядається: передбачається, що співвідношення геометричних розмірів пластини і навантаження, які діють на неї, не перевищують критичної межі.

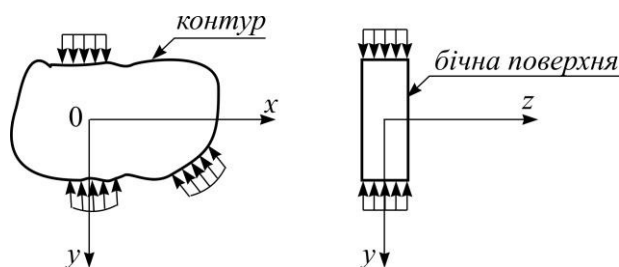


Рис. 7.16. Пластина в умовах плоского напруженого стану

Зі сказаного випливають додаткові особливості плоского напруженого стану: дотичних напружень на бічних поверхнях немає, тобто

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (7.32)$$

Також немає, внаслідок закону Гука, і кутових деформацій:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (7.33)$$

Проте лінійні деформації по осі z не дорівнюють нулю:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (7.34)$$

Звідси виходить, що кутові деформації γ_{xz} і γ_{yz} фактично теж не дорівнюють нулю. Справді, з рівнянь Коші (7.12), наприклад, для γ_{xz} маємо:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Але переміщення $u = u(x, y)$ не залежить від z і тоді перша похідна $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, а переміщення w , що впливає з відповідної залежності Коші (7.12)

$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$, взагалі не дорівнює нулю:

$$w = \int \varepsilon_z dz + f_w(x, y),$$

де $f_w(x, y)$ – довільна функція інтегрування.

Отже, переміщення $w = w(x, y)$ і, значить, кутова деформація $\gamma_{xz} \neq 0$. Аналогічні висновки можна зробити і щодо кутової деформації γ_{yz} .

Проте величина ε_z дуже мала порівняно з іншими лінійними деформаціями (ε_x і ε_y), її в практичних розрахунках не беруть до уваги, і через те, взагалі кажучи, нехтують відмінними від нуля величинами $w, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$.

Враховуючи рівності (7.32–7.33) з висловленими застереженнями, приходимо до висновку. Для плоского напруженого стану справедливі ті ж самі рівняння, що описують і плоску деформацію, крім співвідношень (7.29), які для плоского напруженого стану мають інший вигляд:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y);$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}. \quad (7.35)$$

Залежності (7.35) відрізняються від співвідношень (7.29) плоскої деформації лише трохи меншими значеннями пружних сталих величин E та ν . Завдяки цьому, розробляючи той чи той метод розв'язування плоскої задачі, можна не вказувати конкретно, до якого власне випадку стосується обраний метод – до плоскої деформації чи до плоского напруженого стану. Порядок розв'язування задачі залишається незмінним.

Зазначимо, що плоский напружений стан у тому вигляді, в якому його викладено тут, на практиці реалізується рідко, і через те, заради короткості висловлювання, часто-густо так званий “узагальнений плоский напружений стан” називають просто “плоский напружений стан”.

Якщо мати на увазі певні додаткові припущення, то тоді й насправді формули плоского напруженого стану можна застосовувати і для більш загального та практично дуже важливого випадку напруженого стану – узагальненого плоского напруженого стану. Ці припущення полягають ось у чому.

Зрівноважені навантаження, що прикладені по контуру пластини, припускаються розподіленими за її товщиною симетрично відносно серединної площини і паралельними останній.

Напруження за товщиною пластини вважають усередненими (рис. 7.17). Насправді напруження навіть у разі рівномірного розподілу навантажень за товщиною пластини хоч і незначно, але все ж таки змінюються (симетрично відносно серединної площини).

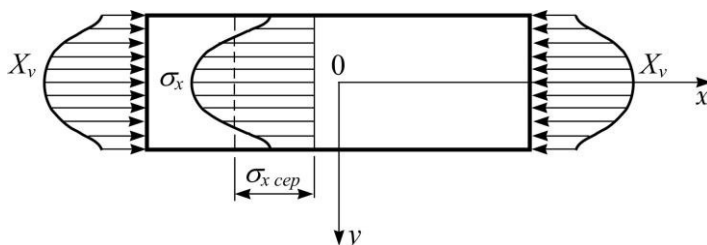


Рис. 7.17. Усереднення напружень за товщиною пластини

Умови (7.20–7.22) справедливі тільки для випадку, коли бокові поверхні пластини не завантажені.

За товщиною пластини напруження σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} та деформації γ_{xz} , γ_{yz} хоч і відмінні від нуля, але через малу товщину пластини вони за розміром незначні і ними на практиці нехтують.

Якщо взяти до уваги щойно наведені припущення, то розглядувану плоску задачу для пластини певної товщини можна назвати узагальненим плоским

напруженим станом, і всі рівняння, що були записані для плоского напруженого стану, будуть придатні для її розв'язування. При цьому треба тільки пам'ятати, що узагальнення плоского напруженого стану на пластини скінченної товщини приводить до усереднення за товщиною пластини величин, що досліджуються: і напружень, і деформацій, і переміщень, і поверхневих сил. Це означає, що всі величини, які входять у рівняння плоского напруженого стану, мають усереднені за товщиною значення, крім, звичайно, пружних сталих E та ν .

Таке усереднення розглянутих величин припустимо лише до певних відносних товщин пластини. Завдяки такому усередненню, яке запровадив ще 1903 року Дж. Файлон, наближено вважають, що завантажена по контуру пластинка знаходиться в умовах плоского напруженого стану. Пластину, яка працює в умовах плоского напруженого стану, називають балкою–стінкою.

Зіставляючи рівняння узагальненого плоского напруженого стану з рівняннями плоскої деформації, слід підкреслити, що за формою вони повністю збігаються між собою і мають лише різницю ось у чому.

Замість звичайних напружень, деформацій, переміщень і поверхневих сил, які входять у формули плоскої деформації, у формули узагальненого плоского напруженого стану входять середні по товщині пластини значення названих величин.

У формулах узагальненого плоского напруженого стану значення пружних констант є трохи меншими, ніж у формулах плоскої деформації. У першому випадку це E та ν , у другому – $E_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)}$ і σ_y .

Розв'язування задач плоскої деформації за відомих вимог щодо межових умов є точним у тому плані, що справджуються всі основні рівняння просторової задачі теорії пружності.

Розв'язування задач узагальненого плоского напруженого стану, в основі розгляду якого лежить, передусім, основне припущення щодо нульових значень величин $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$, приводить у кінцевому результаті до того, що деякі рівняння нерозривності деформацій просторової задачі теорії пружності не задовільняються. Проте точність розв'язування задач узагальненого плоского

напруженого стану, незважаючи на деяку наближеність прийнятих припущень (7.20 – 7.22), виявляється цілком достатньою для практичних потреб.

Задачі теорії пружності можна розв'язувати як у переміщеннях, так і в напруженнях. У нашому курсі розглянемо в подальшому розв'язування плоскої задачі лише в напруженнях.

7.3.3. Розв'язування плоскої задачі в напруженнях

Розв'язування плоскої задачі теорії пружності в напруженнях зводиться до визначення трьох невідомих напружень $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$, $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$ і $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$ із двох рівнянь рівноваги (7.23) та одного рівняння нерозривності деформацій (7.26). Останнє слід виразити через напруження. Для цього треба замінити деформації $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ в рівнянні (7.26) відповідними залежностями згідно із законом Гука (7.35).

Вказану заміну після деяких перетворень наведемо в такому вигляді:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (7.36)$$

З рівняння (7.36) виключимо дотичне напруження τ_{xy} . Для цього використаємо диференціальні рівняння рівноваги (7.23) за умови сталості в них об'ємних сил: $X = const, Y = const$.

Продиференціюємо перше рівняння (7.23) за змінною x , а друге – за змінною y . Склавши здобуті вирази почленно, знайдемо:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}. \quad (7.37)$$

Підставивши рівність (7.37) у співвідношення (7.36), дістанемо рівняння нерозривності деформацій, що включає до себе тільки нормальні напруження σ_x і σ_y :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (7.38)$$

Дістанемо рівняння (3.19) носить ім'я Мориса Леві.

У стислому запису це рівняння має такий вигляд:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (7.39)$$

де ∇^2 (набла два) – диференціальний оператор Лапласа, який для плоскої задачі теорії пружності має таку форму:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (7.40)$$

Рівняння (7.39) називається гармонійним, і функції, які справджують його, також називаються гармонійними. Таким чином, для плоскої задачі сума нормальних напружень $(\sigma_x + \sigma_y)$ є гармонійною функцією.

Нагадаємо, що рівняння (7.38), а значить і (7.39), виведено для узагальненого плоского напруженого стану за умови сталості об'ємних сил. Оскільки в нього не входять пружні константи, то воно справедливе і для плоскої деформації (за умови сталості об'ємних сил).

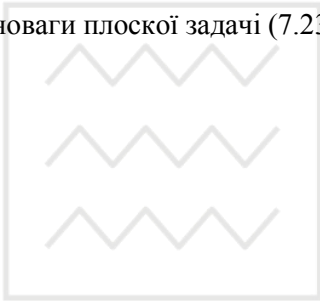
Рівняння рівноваги у формі (7.23) за умови сталості об'ємних сил X і Y , межові умови (7.24) і виведене рівняння М.Леві (7.38) дають разом систему рівнянь з трьома невідомими σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Система названих рівнянь повністю забезпечує дослідження розподілу напружень у плоскій задачі теорії пружності для однозв'язних областей ізотропного тіла. Однозв'язна область – це область без отворів.

7.4. Розв'язування плоскої задачі за допомогою функції напружень

7.4.1. Функція напружень для плоскої задачі

Розв'язування плоскої задачі теорії пружності можна звести до відшукування тільки однієї функції. Для цього розглянемо однорідні ($X = Y = 0$) рівняння рівноваги плоскої задачі (7.23):



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (7.41)$$

7.4.1.1. Загальний розв'язок рівнянь (7.23)

Використовуючи рівняння (7.41), знайдемо загальний розв'язок рівнянь (7.23) у вигляді σ_x^* , σ_y^* і τ_{xy}^* . Для розв'язування поставленої задачі попередньо нагадаємо деякі відомості з математики.

Коли зберігається умова:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad (7.42)$$

змінних p і q , то вираз $pdx + qdy$ є повним диференціалом певної функції $g = g(x, y)$:

$$pdx + qdy = dg. \quad (7.43)$$

З першого рівняння (7.41) випливає

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}. \quad (7.44)$$

Згідно з умовою (7.42) і співвідношенням (7.43) із формули (7.44) маємо:

$$\sigma_x dy - \tau_{xy} dx = df, \quad (7.45)$$

де $f = f(x, y)$ – деяка функція.

Оскільки повний диференціал функції f дорівнює:

$$\frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial x} dx = df,$$

то із співвідношення (7.45) випливає:

$$\sigma_x = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad (7.46)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial f}{\partial x}. \quad (7.47)$$

З другого рівняння (7.41) дістанемо, враховуючи закон парності дотичних напружень ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$):

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}. \quad (7.48)$$

Із сумісного розгляду співвідношень (7.42), (7.43) і (7.48) можемо записати:

$$\sigma_y dx - \tau_{xy} dy = d\psi,$$

де $\psi = \psi(x, y)$ – деяка функція двох змінних.

І тоді маємо:

$$\sigma_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (7.49)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (7.50)$$

Зіставляючи вирази (7.47) і (7.50), складаємо рівність:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

звідки, у свою чергу, помічаємо, що $f dy + \psi dx = d\varphi$, де $\varphi = \varphi(x, y)$ – деяка функція двох змінних.

Досліджуючи повний диференціал функції φ , зауважимо, що

$$f = \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

$$\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (7.51)$$

Підставляємо величини (7.51) відповідно у формули (7.46), (7.49) та у формулу (7.47) або у формулу (7.50) і знаходимо загальний розв'язок рівнянь (7.23) у напруженнях:

$$\sigma_x^* = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2};$$

$$\sigma_y^* = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2};$$

$$\tau_{xy}^* = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (7.52)$$

Таким чином, величини σ_x^* , σ_y^* і τ_{xy}^* виражаються лише через одну функцію $\varphi = \varphi(x, y)$, яка називається функцією напружень або функцією Ері.

Функцію напружень φ вперше запропонував Дж. Ері 1862 року і використовував її для розрахунків прямокутних балок. Функцію φ Ері брав у вигляді алгебричного полінома, коефіцієнти до якого він добирав з межових умов. Однак його розв'язок виявився неточним, оскільки Ері не враховував умови нерозривності деформацій.

7.4.1.2. Частинний розв'язок рівнянь (7.23)

Відшукаємо тепер який-небудь частинний розв'язок системи неоднорідних рівнянь (7.23). Незчисленна кількість частинних розв'язків рівнянь (7.23), як неважко переконатися у цьому прямою підстановкою, визначається ось такими виразами для випадку, коли об'ємні сили X та Y є сталими величинами:

$$\sigma_x^{**} = -k_1 Xx;$$

$$\sigma_y^{**} = -k_2 Yy;$$

$$\tau_{xy}^{**} = -(1-k_1)Xy - (1-k_2)Yx, \quad (7.53)$$

де k_1 і k_2 – коефіцієнти, які можуть змінюватися від нуля до одиниці.

Найпростіший розв'язок виходить, коли $k_1 = k_2 = 0$. У цьому разі частинний розв'язок набирає вигляду:

$$\sigma_x^{**} = 0;$$

$$\sigma_y^{**} = 0;$$

$$\tau_{xy}^{**} = -Xy - Yx. \quad (7.54)$$

Записавши суму загального розв'язку (7.52) і частинного (7.54), дістанемо:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2};$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2};$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx. \quad (7.55)$$

Отриманий результат (7.55) говорить про те, що всі напруження (σ_x , σ_y і τ_{xy}) плоскої задачі можна виразити через одну функцію $\varphi(x, y)$ – функцію напружень, інакше – функцію Ері.

Знайдені за формулами (7.55) напруження повністю задовольняють диференціальним рівнянням рівноваги (7.23) за будь-яких значень функції $\varphi(x, y)$. Однак це ще не означає, що будь-яка функція $\varphi(x, y)$ може стати розв'язком плоскої задачі теорії пружності. Щоб остаточно визначити придатність функції $\varphi(x, y)$ для розв'язування плоскої задачі, потрібно додатково звернутися до розгляду умов нерозривності деформацій.

7.4.2. Бігармонічне рівняння Максвелла

Розглянемо умови суцільності деформацій щодо функції напружень.

Виразимо рівняння нерозривності деформацій (7.38) через функцію напружень $\varphi(x, y)$ за формулами (7.55):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Диференціюючи це співвідношення у вказаному порядку, дістанемо бігармонічне рівняння:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (7.56)$$

Функції, які задовольняють рівняння (7.56), називають бігармонічними. Отже, функція напружень має бути бігармонічною.

Якщо ввести диференціальний оператор Лапласа (7.40), рівняння (7.56) можемо записати в стислій формі:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \text{ або } \nabla^4 \varphi = 0,$$

де ∇^4 (набла чотири) – подвійний оператор Лапласа.

Бігармонічне рівняння запропонував Дж. Максвелл (1864р.) услід за опублікуванням роботи Ері про деформації балок (1863р.).

Таким чином, для розв'язування плоскої задачі функція напружень має задовольняти бігармонічне рівняння (7.56). Крім того повинні виконуватись й умови на поверхні тіла (7.24), які записують через функцію напружень (7.55) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} X_\nu &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Xy + Yx \right) m; \\ Y_\nu &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Xy + Yx \right) l. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Отже, плоска задача теорії пружності зводиться до відшукання тільки однієї функції φ – функції напружень, яка неодмінно має задовольняти бігармонічне рівняння (7.56).

7.4.3. Розв'язання плоскої задачі для прямокутних однозв'язних областей в алгебричних поліномах

Однозв'язна область розрахункового об'єкта – це область без отворів (рис. 7.15 в, 7.16). Области, що мають один отвір (рис. 7.15 а, б), називають двозв'язними і т.д.

Для розв'язування плоскої задачі за допомогою функції напружень дотримуються такого алгоритму. Спочатку відшуковують належну функцію напружень (найважчий і найважливіший крок!), що задовольняє бігармонічне рівняння Максвелла (7.56). Потім за формулами (7.55) знаходять нормальні та дотичні напруження. Далі з'ясовують, яким межовим умовам (7.57) або (7.24) відповідає підібрана функція напружень. І після цього всього можна за відповідними формулами (7.27) і (7.25) визначати лінійні і кутові деформації та лінійні переміщення. Такий порядок розв'язування плоскої задачі відповідає оберненому методу. Цей метод є порівняно простим, але конче трудомістким, якщо функція напружень заздалегідь невідома.

Оскільки бігармонічне рівняння (7.56) має четвертий порядок, то розв'язком плоскої задачі може бути будь-який поліном першої, другої та третьої ступені з найрізноманітнішими їхніми коефіцієнтами:

$$\varphi_1 = a_1x + d_1y; \quad (7.58)$$

$$\varphi_2 = a_2x^2 + b_2xy + d_2y^2; \quad (7.59)$$

$$\varphi_3 = a_3x^3 + b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3, \quad (7.60)$$

де φ_i ($i = 1, 2, 3$) – функція напружень i -того ступеня; a, b, c, d – сталі коефіцієнти, які визначають із умов закріплення розрахункового об'єкта. Індeksi при коефіцієнтах a, b, c, d вказують (тут і далі в аналогічних випадках) на ступінь алгебричного полінома.

Поліном першої ступені (7.58) за формулами (7.55) відповідає нульовим значенням напружень: $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$. Це означає, що поліном першої ступені практичного інтересу не становить, оскільки він описує ненапружений стан тіла.

Поліном другої ступені (7.59) згідно з рівняннями (7.55) дає такі напруження: $\sigma_x = 2d_2$; $\sigma_y = 2a_2$; $\tau_{xy} = -b_2$.

Тут усі напруження – величини сталі. Значить, поліном другої ступені відповідає плоскому напруженому стану, що графічно зображено на рис. 7.18. Поліном третьої ступені в цілому відповідає складному навантаженню тіла.

А зараз на прикладі лише одного члена цього полінома $\varphi_3 = d_3 y^3$ покажемо, що значення напружень, які відповідають цій функції напружень ($\sigma_x = 6d_3 y$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = 0$), залежать від вибору координатних осей, у цьому разі, для балки-стілки.

Якщо осі x і y спрямовані так, як це показано на рис. 7.19, а, то знайдена система напружень відповідає чистому згину. Якщо ж осі обрано так, як це зображено на рис. 7.19, б, то функція $\varphi_3 = d_3 y^3$ описує позакентровий розтяг.

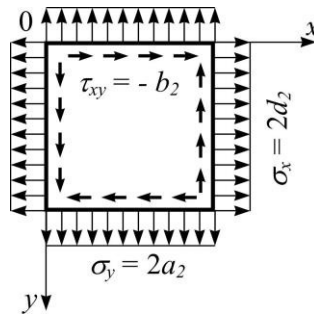


Рис. 7.18. Плоский напружений стан

Для розв'язання плоскої задачі можна застосовувати й поліноми вищого порядку, ніж третій. Але в цьому разі такі поліноми треба перетворити спочатку на бігармонічні функції, які задовольняють бігармонічне рівняння Максвелла.

Наприклад, повний поліном четвертого порядку має такий вигляд:

$$f_4 = a_4x^4 + b_4x^3y + e_4x^2y^2 + c_4xy^3 + d_4y^4. \quad (7.61)$$

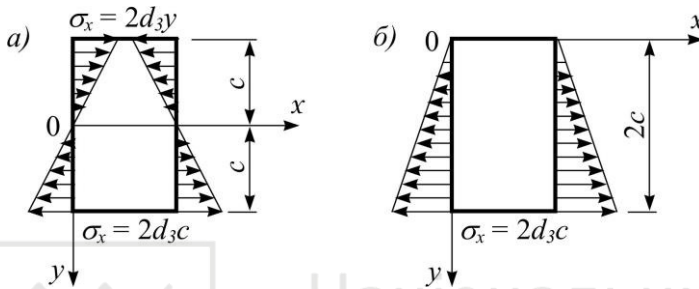


Рис. 7.19. Чистий згин (а) і позацинтрый розтяг (б)

Підставляючи відповідні четверті похідні полінома (7.61) в бігармонічне рівняння (7.56), дістанемо:

$$3a_4 + e_4 + 3d_4 = 0,$$

звідки

$$e_4 = -3(a_4 + d_4). \quad (7.62)$$

Підставляючи значення коефіцієнта e_4 згідно з виразом (7.62) в поліном (7.61), після деяких перетворень матимемо поліномну функцію напруг четвертої ступені:

$$\varphi_4 = a_4(x^4 - 3x^2y^2) + b_4x^3y + c_4xy^3 + d_4(y^4 - 3x^2y^2). \quad (7.63)$$

Таким чином, не всі коефіцієнти повного полінома четвертої ступені (7.61) можуть бути довільними (основними). Незалежними залишаються тільки чотири коефіцієнти, оскільки бігармонічне рівняння (7.56) має четвертий порядок. У цьому разі, для повного полінома четвертої ступені (7.61) основними (незалежними) коефіцієнтами є a_4, b_4, c_4, d_4 , а п'ятий – e_4 – має відповідати співвідношенню (7.62).

Розв'язання прямим методом плоскої задачі теорії пружності для прямокутних однозв'язних областей за допомогою функцій напруг у вигляді алгебричних поліномів різних степенів наведено у монографії [26].

Контрольні запитання

1. Чим принципово відрізняється математична теорія пружності від прикладної?
2. Якими символами і з якими індексами до них позначають сили і напруження? Які існують правила для знаків у напруженнях, додатних і від'ємних?
3. Запишіть диференціальне рівняння рівноваги і рівняння закону парності дотичних напружень.
4. Якими рівняннями описують умови на поверхні тіла і напруження на похилих площинках?
5. Запишіть інваріанти напруженого стану в головних напруженнях.
6. Які диференціальні рівняння пов'язують залежності між деформаціями і переміщеннями?
7. Який фізичний зміст мають рівняння нерозривності деформацій (рівняння Сен-Венана)? А який математичний зміст?
8. Чому дорівнюють константи Ламе в рівняннях оберненої форми закону Гука?
9. Який напружено-деформований стан називають плоскою деформацією, а який плоским напруженим станом? Яким рівнянням теорії пружності вони відповідають?
10. Які рівняння застосовують для розв'язування плоскої задачі в напруженнях?
11. Що таке функція напружень (φ) для плоскої задачі? Яку одиницю вимірювання має функція напружень? Чому дорівнюють нормальні і дотичні напруження через φ ?
12. Яке призначення має бігармонічне рівняння Максвела і який його фізичний зміст?

РОЗДІЛ VIII

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ

8.1. Вступ

Розвиток методу скінченних елементів по суті розпочався з появи електронних обчислювальних машин. Метод пов'язаний, перш за все, з загальним характером розглядуваних конструкцій різного призначення, відносною простотою формування розв'язувальних рівнянь і задовільними чисельними характеристиками матриць.

Метод скінченних елементів початково розвивався на фізичній основі у застосуванні до розв'язку задач будівельної механіки. У подальшому з'ясувалось, що його можна використовувати для розв'язку більш широкого класу інших проблем. Узагальненість методу стала очевидною після представлення його у варіаційній формі.

Як це часто буває з оригінальними дослідженнями, доволі важко точно встановити, як вони були «винайдені», але основи методу розроблені трьома різними групами спеціалістів: математиками, фізиками та інженерами. Важливий внесок мали статті Тернера та інш. [55], Агріроса та Келсі [53]. Вперше термін «скінченний елемент» з'явився у статі Клаффа, присвяченій розв'язку плоскої задачі теорії пружності [54].

У наш час можливості теорії методу значно розширені. Навіть обмежуючись розв'язком задач будівельної механіки, ми можемо використовувати його в різних формах. У цьому розділі основну увагу буде присвячено методу скінченних елементів у формі методу переміщень.

8.2. Напружено–деформований стан і матриця жорсткості скінченного елемента

Метод скінченних елементів у формі методу переміщень для розрахунку конструкцій будівельного призначення передбачає таке: розглядається елемент

скінченних розмірів, що означає перехід від системи з нескінченною кількістю параметрів напружено–деформованого стану до системи з скінченною кількістю параметрів. Основна система розрахункової схеми двовимірної області ω являє собою сукупність скінченного числа елементів скінченних розмірів. Скінченні елементи поєднані у спільних точках – вузлах. Вузол розрахункової схеми може бути спільним для декількох скінченних елементів області ω . Вузлам розрахункової схеми надаються додаткові в'язі, кількість яких визначається особливостями розглядуваної задачі. Наприклад, для плоскої задачі теорії пружності можна обмежитись двома в'язями, що виключають лінійні переміщення у площині. Тому і окремому скінченному елементу області ω слід надати по два в'язі у кожному вузлі.

Вершини вузлів показаного прямокутного скінченного елемента (рис. 8.1) збігаються з вузлами, хоча у загальному випадку кількість вузлів може бути більшою (але обмеженою), що залежить також від необхідної точності розв'язку задачі.

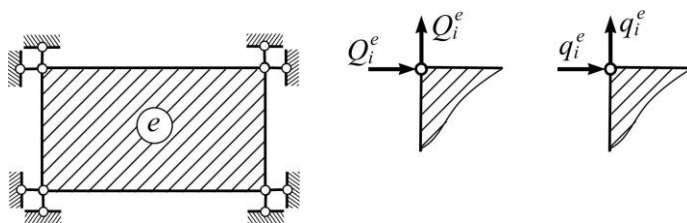


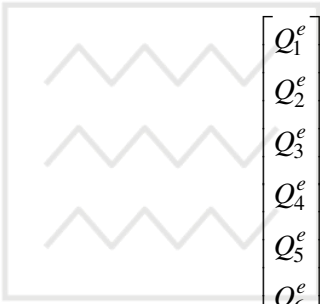
Рис. 8.1. Схема скінченного елемента з вузловими зусиллями і переміщеннями

У кожному з вузлів (для плоскої задачі) можливі лише дві компоненти переміщень q^e , e – номер скінченного елемента. Між реакціями у вузлових зв'язках Q_i^e та вузловими переміщеннями q_i^e в пружній стадії існує така лінійна залежність:

$$Q_1^e = k_{11}^e q_1^e + k_{12}^e q_2^e + k_{13}^e q_3^e + k_{14}^e q_4^e + k_{15}^e q_5^e + k_{16}^e q_6^e + k_{17}^e q_7^e + k_{18}^e q_8^e, \quad (8.1)$$

де k_{ij}^e – коефіцієнти жорсткості скінченного елемента. Фізичний зміст коефіцієнта жорсткості скінченного елемента k_{ij}^e , як видно з виразу (8.1), такий: це зусилля, що виникає у вузлі i від одиничного переміщення за напрямком, що визначений індексом j , якщо всі інші переміщення дорівнюють нулю.

Співвідношення (8.1) можуть бути записані для всіх восьми вузлових сил (рис. 8.1) у матричній формі:



$$\begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ Q_3^e \\ Q_4^e \\ Q_5^e \\ Q_6^e \\ Q_7^e \\ Q_8^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^e & \dots & k_{18}^e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{81}^e & \dots & k_{88}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \\ q_3^e \\ q_4^e \\ q_5^e \\ q_6^e \\ q_7^e \\ q_8^e \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

Або у таких матричних символах:

$$k^e q^e = Q^e. \quad (8.3)$$

Напружений стан двовимірних скінченних елементів задається наближено. Поле переміщень скінченного елемента апроксимується виразом

$$u^e = \sum_{i=1}^8 \varphi_i^e q_i^e, \quad (8.4)$$

де φ_i^e – наперед вибрані апроксимувальні функції. У варіаційних методах їх називають координатними функціями, q_i^e – невідомі вузлові переміщення скінченного елемента за номером e ; у методі скінченних елементів їх називають ступенями вільності:

$$u^e = u^e(x_1, y_1) = \begin{bmatrix} u_{x_1}^e(x_1, y_1) \\ u_{y_1}^e(x_1, y_1) \end{bmatrix};$$

$$\varphi_i^e = \varphi_i^e(x_1, y_1) = \begin{bmatrix} \varphi_{ix_1}^e(x_1, y_1) \\ \varphi_{iy_1}^e(x_1, y_1) \end{bmatrix}. \quad (8.5)$$

В (8.5) система координат Ox_1y_1 є локальною, в якій визначається напружено-деформований стан скінченного елемента і яка може, у загальному випадку, не збігатись з глобальною Oxy для всієї скінченоелементної системи.

Із виразу (8.4) випливає, що

$$u^e = \varphi_i^e, \quad (8.6)$$

якщо всі вузлові переміщення дорівнюють нулю, крім $q_i^e = 1$.

Геометричні співвідношення для плоскої задачі мають вигляд (7.25):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (8.7)$$

Або у матричному вигляді:

$$\varepsilon^e = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x^e}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y^e}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x^e}{\partial y} + \frac{\partial u_y^e}{\partial x} \end{bmatrix} = \beta \cdot u^e. \quad (8.8)$$

Відповідно вектор деформацій скінченного елемента матимемо з (8.8):

$$\varepsilon^e = \beta \cdot u^e = \beta \left(\sum_{i=1}^8 \varphi_i^e q_i^e \right) = \sum_{i=1}^8 (\beta \varphi_i^e) q_i^e = \sum_{i=1}^8 \dot{\varepsilon}_i^e q_i^e, \quad (8.9)$$

де $\dot{\varepsilon}_i^e = \beta \varphi_i^e$.

Тут β – диференціальний оператор, що ставить у відповідність вектор-функції переміщень вектор-функцію деформацій, $\dot{\varepsilon}_i^e$ – вектор-функція деформацій скінченного елемента e в одиничному стані $q_i^e = 1$.

Закон Гука для плоскої задачі має такий матричний вигляд:

$$\sigma^e = D^e \cdot \varepsilon^e, \quad (8.10)$$

де D – матриця, елементами якої є функції констант матеріалу ν та E :

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix};$$

$$\sigma^e = \left[\sigma_x^e \quad \sigma_y^e \quad \tau_{xy}^e \right]^T. \quad (8.11)$$

Напруження, що виникають у скінченному елементі, визначають так:

$$\sigma^e = D^e \cdot \varepsilon^e = D^e \left(\sum_{i=1}^8 \dot{\varepsilon}_i^e q_i^e \right) = \sum_{i=1}^8 (D^e \dot{\varepsilon}_i^e) q_i^e = \sum_{i=1}^8 \dot{\sigma}_i^e q_i^e, \quad (8.12)$$

де $\dot{\sigma}_i^e = D^e \dot{\varepsilon}_i^e$.

Тут $\dot{\sigma}_i^e$ – вектор-функція напруг скінченного елемента e в одиничному стані $q_i^e = 1$.

Коефіцієнти матриці жорсткості скінченного елемента, використовуючи функцію форми, визначають таким чином:

$$k_{ij}^e = \int_{\omega^e} (\dot{\varepsilon}_i^e)^T D^e \dot{\varepsilon}_j^e d\omega. \quad (8.13)$$

8.3. Матриця жорсткості скінченноелементної моделі.

Основне співвідношення

У методі скінченних елементів вихідна конструкція замінюється на дискретно-континуальну систему, що складається з окремих скінченних елементів, з'єднаних у вузлах (рис. 8.2).

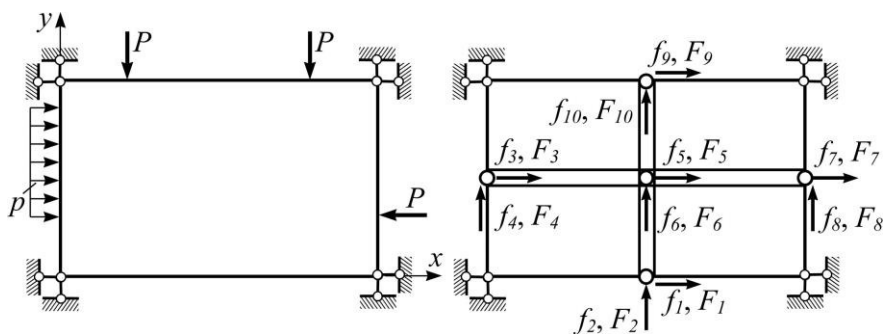


Рис. 8.2. Розрахункова конструкція та її дискретно-континуальна система

Система сумісних лінійних рівнянь відносно вузлових переміщень має такий матричний вигляд:

$$rf = F, \quad (8.14)$$

де $F = [F_1 \dots F_i \dots F_n]^T$ – вектор-стовпець вузлових сил, статично еквівалентний зовнішньому навантаженню, $f = [f_1 \dots f_i \dots f_n]^T$ – вектор-стовпець вузлових переміщень розрахункової схеми, r – матриця коефіцієнтів системи, що за фізичним змістом є матрицею жорсткості всієї скінченоелементної системи



$$r = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

Із матриці коефіцієнтів системи виключаються ті рядки та стовпці, номери яких відповідають вузловим в'язям, що заперечують рух системи ω як твердого тіла. Ця операція аналогічна накладенню в'язей та є завданням межових умов. Якщо система не має необхідних в'язей, то матриця системи лінійних рівнянь буде виродженою.

Залежність (8.14) є основною в методі скінченних елементів і дозволяє при заданих вузлових силах та відомій матриці жорсткості визначати вузлові переміщення та навпаки при відомих вузлових переміщеннях дає змогу визначити наближені характеристики напружено-деформованого стану всіх скінченних елементів.

Довільний елемент r_{ij} матриці жорсткості системи – це зусилля, яке необхідно прикласти за напрямком переміщення f_i при переміщенні $f_j = 1$, якщо всі інші вузлові переміщення дорівнюють нулю.

Виходячи з фізичного змісту r_{ij} можна побачити, що цей коефіцієнт дорівнює сумі відповідних коефіцієнтів матриць жорсткості скінченних елементів, у яких є спільний вузол, одне з переміщень якого f_i . Тобто для визначення елементів матриці зовнішньої жорсткості системи необхідно попередньо визначити матриці жорсткості всіх скінченних елементів.

8.4. Перехід від матриці жорсткості скінченного елемента в локальній системі координат до матриці жорсткості в глобальній системі координат

Матрицю жорсткості довільного скінченного елемента зручно визначати в місцевій (локальній) системі координат. Якщо початок координат сумістити з якою–небудь із вершин елемента, а також вибрати напрямок однієї з координатних осей паралельним або збіжним із напрямком якої–небудь грані розглядуваного елемента, то, визначаючи матрицю жорсткості в місцевій координатній системі, можна досягнути значних переваг. Матриця жорсткості в таких випадках набуває найбільш простого вигляду.

Однак для розрахунку всієї скінченоелементної системи, що апроксимує реальну конструкцію, необхідно вибрати нерухому систему відліку, так звану загальну систему координат або глобальну систему. Тому виникає необхідність знаходити розв'язок задачі, який би задовольняв задану глобальну систему відліку.

Позначимо \bar{Q}^e, \bar{q}^e вузлові зусилля та переміщення скінченного елемента e в глобальній системі координат, тоді його матрицю жорсткості в глобальній системі координат \bar{k}^e визначають із співвідношення:

$$\bar{k}^e \bar{q}^e = \bar{Q}^e, \quad (8.15)$$

при цьому вектор переміщень у локальній системі відліку пов'язаний з вектором переміщень у глобальній системі матричним співвідношенням у вигляді:

$$q^e = c^e \bar{q}^e, \quad (8.16)$$

де c^e – матриця перетворень переміщень, елементами якої є косинуси кутів між осями локальної та глобальної системи координат. Для чотирикутного елемента з двома узагальненими переміщеннями у вузлі можна записати так:

$$q_1 = l_{x\bar{x}}\bar{q}_1 + m_{xy}\bar{q}_2;$$

$$q_2 = l_{y\bar{x}}\bar{q}_1 + m_{yy}\bar{q}_2. \quad (8.17)$$

Аналогічно записують вирази для груп переміщень в інших вузлах елемента, так:



$$c^e = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad (8.18)$$

де підматриці c складено з напрямних косинусів кутів між осями локальної системи і відповідними осями глобальної системи координат

$$c = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{x\bar{x}} & m_{xy} \\ l_{y\bar{x}} & m_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x, \bar{x}) & \cos(x, \bar{y}) \\ \cos(y, \bar{x}) & \cos(y, \bar{y}) \end{bmatrix}. \quad (8.19)$$

У той же час із механічного змісту вузлових зусиль впливає

$$\bar{Q}^e = (c^e)^T Q^e. \quad (8.20)$$

Вираз для визначення залежності між матрицями жорсткості в локальній та глобальній системах координат має вигляд:

$$\bar{k}^e = (c^e)^T k^e c^e. \quad (8.21)$$

Таким чином, знаючи матрицю жорсткості k^e будь якого елемента в локальній системі координат, можна згідно з (8.21) знайти шукане значення матриці жорсткості \bar{k}^e відносно глобальної системи.

8.5. Визначення коефіцієнтів матриці глобальної жорсткості

Переміщення \bar{q} для g необ'єднаних елементів у глобальній системі координат слід пов'язати матричною залежністю з узагальненими переміщеннями вузлів скінченоелементної системи

$$\bar{q} = Hf, \quad (8.22)$$

де H – матриця, що виражає співвідношення між незалежними узагальненими вузловими переміщеннями, які відповідають кінематично допустимим ступеням вільності окремого елемента та є незалежними узагальненими переміщеннями всієї конструкції.

Для того щоб встановити залежність вектора F від вектора Q , необхідно розглянути віртуальну роботу δA зовнішніх сил на можливих переміщеннях вузлів і прирівняти її приросту потенціальної енергії деформації δU_ε конструкції (енергії внутрішніх сил) на відповідних їм віртуальних переміщеннях:

$$\delta A = F^T \delta f; \quad (8.23)$$

$$\delta U_\varepsilon = \sum_{e=1}^g (\bar{Q}^e)^T \cdot \delta \bar{q}^e = \bar{Q}^T \delta \bar{q}. \quad (8.24)$$

Прирівнюючи формули (8.24) і (8.23), після деяких перетворень з урахуванням виразу (8.22) матимемо:

$$F = H^T Q. \quad (8.25)$$

Вираз (8.3) для всієї скінченоелементної системи в глобальній системі координат набуває вигляду:

$$\bar{Q} = K\bar{q}, \quad (8.26)$$

$$\text{де } \bar{K} = \begin{bmatrix} \bar{k}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \bar{k}^e & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{k}^g \end{bmatrix}.$$

Вирази (8.22), (8.25) та (8.26) дають повну систему розв'язувальних рівнянь методу скінченних елементів.

Підставивши (8.26) у (8.25), а здобути залежність у (8.22), знайдемо співвідношення, невідомими якого будуть лише переміщення вузлів системи f :

$$(H^T \bar{K} H) f = F. \quad (8.27)$$

Порівнюючи (8.27) та (8.14), дістанемо такий вираз для матриці жорсткості скінченоелементної системи:

$$r = H^T \bar{K} H, \quad (8.28)$$

де

$$H = \begin{bmatrix} H^1 \\ \cdot \\ H^e \\ \cdot \\ H^g \end{bmatrix}.$$

Виходячи з структури матриці H , матрицю жорсткості скінченоелементної системи (8.28) можна записати так:

$$r = \sum_{e=1}^g (H^e)^T \bar{k}^e H^e, \quad (8.29)$$

де кожен доданок є внеском відповідного скінченного елемента в матрицю r .

Таким є перший підхід до побудови матриці глобальної жорсткості системи.

Другий – полягає у підсумуванні жорсткісних коефіцієнтів елементів, що примикають до відповідних вузлів системи. Цей метод також знайшов широке розповсюдження у вітчизняній та зарубіжній літературі.

Згідно з виразом (8.29) коефіцієнт матриці глобальної жорсткості від одного скінченного елемента визначають так:

$$r^e = (H^e)^T \bar{k}^e H^e. \quad (8.30)$$

Оскільки структура матриць-блоків H^e проста (кожен її рядок та стовпець або нульові, або складені з нулів та однієї одиниці), то довільний елемент матриці r^e визначають так:

$$r_{ij}^e = \bar{k}_{st}^e, \quad \text{якщо} \quad \bar{q}_s^e = f_i \quad \text{та} \quad \bar{q}_t^e = f_j, \quad (8.31)$$

а довільний елемент матриці r :

$$r_{ij} = \sum_{e=1}^g r_{ij}^e. \quad (8.32)$$

Таким чином, знаючи матрицю локальної жорсткості k^e для елемента e , можна дістати матрицю глобальної жорсткості для всієї скінченоелементної системи.

8.6. Трикутниковий скінченний елемент

Для існування функціоналу повної потенціальної енергії апроксимувальні

функції переміщень повинні складати компоненти не менше першого порядку. Лінійний поліном від двох змінних має три компоненти. Це число добре узгоджується з кількістю вершин трикутного скінченного елемента (рис. 8.3).

Прийнявши лінійний закон розподілу переміщень уздовж координатних осей x та y , задамо апроксимувальні функції переміщень у вигляді лінійних поліномів

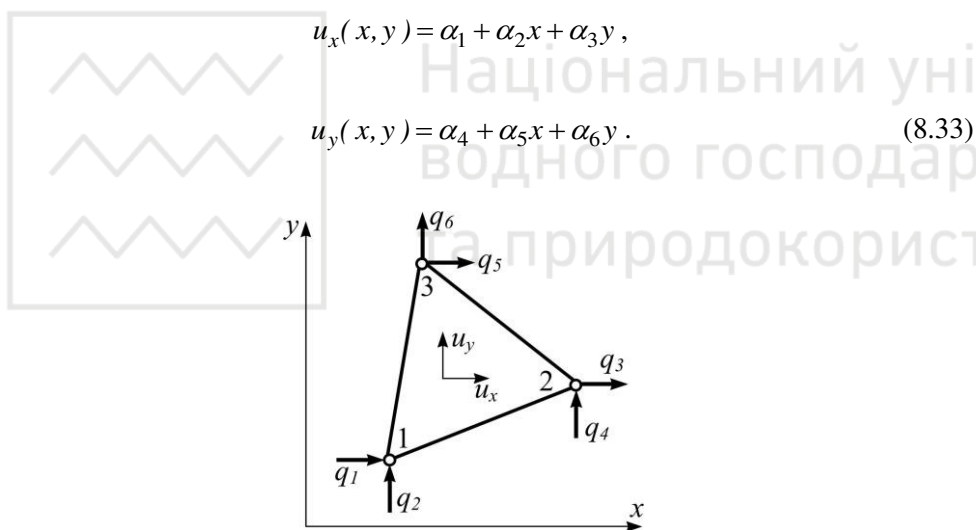


Рис. 8.3. Трикутний скінченний елемент


Апроксимувальні функції створено з шести незалежних коефіцієнтів. У кожному вузлі трикутного скінченного елемента два ступеня вільності, які мають такий фізичний зміст: лінійні переміщення за напрямками осей x та y . Тому вектор вузлових переміщень q слід взяти з шести компонентів, у відповідність яким приводять шість вузлових реакцій Q за напрямками ступенів вільності:

$$q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T,$$

$$Q = [Q_1 \ Q_2 \ Q_3 \ Q_4 \ Q_5 \ Q_6]^T. \quad (8.34)$$

Відповідно для трикутного скінченного елемента матриця жорсткості матиме розмір 6×6 .

Невідомі параметри α_i , $i=1, 2, \dots, 6$ визначимо методом інтерполяції, внаслідок чого представимо закон зміни компонент вектора переміщення $u = [u_x \ u_y]^T$ для вузлових точок трикутного скінченного елемента у вигляді:



$$u_x = \frac{1}{2\Delta} [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_5 \end{bmatrix};$$

$$u_y = \frac{1}{2\Delta} [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3] \begin{bmatrix} q_2 \\ q_4 \\ q_6 \end{bmatrix} \quad (8.35)$$

або так:

$$u = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} \zeta_1 q_1 + \zeta_2 q_3 + \zeta_3 q_5 \\ \zeta_1 q_2 + \zeta_2 q_4 + \zeta_3 q_6 \end{bmatrix}. \quad (8.36)$$

Відповідно до (8.4)

$$\varphi = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \zeta_2 & 0 & \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_1 & 0 & \zeta_2 & 0 & \zeta_3 \end{bmatrix}, \quad (8.37)$$

де $2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ – подвійна площа трикутника.

У виразі (8.37) з урахуванням прийнятих на (рис. 8.3) позначень, величини ζ_i , ($i=1, 2, 3$) визначають рівностями:

$$\zeta_i = a_i + b_i x + c_i y, \quad i = 1, 2, 3,$$

де

$$a_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 y_3 - x_3 y_2;$$

$$b_1 = - \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} = y_2 - y_3;$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} = x_3 - x_2. \quad (8.38)$$

При цьому вирази для коефіцієнтів a, b, c з іншими індексами можна дістати з (8.38) шляхом здійснення колового переставляння індексів 1, 2, 3.

Згідно з виразами (8.8) та (8.6) деформації скінченного елемента в одиничних станах визначають так:

$$\dot{\varepsilon} = [\dot{\varepsilon}_1 \quad \dot{\varepsilon}_2 \quad \dot{\varepsilon}_3 \quad \dot{\varepsilon}_4 \quad \dot{\varepsilon}_5 \quad \dot{\varepsilon}_6] = \beta \varphi = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}. \quad (8.39)$$

Коефіцієнти матриці жорсткості скінченного елемента визначає вираз (8.13):

$$k_{ij} = \int_{\omega^e} (\dot{\varepsilon}_i)^T D \dot{\varepsilon}_j d\omega = h \Delta (\dot{\varepsilon}_i)^T D \dot{\varepsilon}_j. \quad (8.40)$$

Оскільки деформації в межах скінченного елемента є сталими величинами, сталими будуть також і напруження. Їхні значення можуть бути визначені виразом (8.12):

$$\sigma = \dot{\sigma} \cdot q, \quad (8.41)$$

де

$$\dot{\sigma} = D\dot{\varepsilon} = \frac{E}{2\Delta(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_1 & \nu c_1 & b_2 & \nu c_2 & b_3 & \nu c_3 \\ \nu b_1 & c_1 & \nu b_2 & c_2 & \nu b_3 & c_3 \\ \frac{1-\nu}{2}c_1 & \frac{1-\nu}{2}c_1 & \frac{1-\nu}{2}c_1 & \frac{1-\nu}{2}c_1 & \frac{1-\nu}{2}c_1 & \frac{1-\nu}{2}c_1 \end{bmatrix}. \quad (8.42)$$

8.7. Прямокутниковий скінченний елемент

Створення моделі деформованого стану, для прямокутничового скінченного елемента, еквівалентної гіпотези про лінійний розподіл переміщень уздовж координатних осей, використаємо інтерполяційні поліноми Лагранжа першого порядку. Призначимо чотири вузли у вершинах прямокутника (рис. 8.4), а отже, побудуємо апроксимувальні функції як поліноми з чотирьох членів:

$$u_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy;$$

$$u_y(x, y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy. \quad (8.43)$$

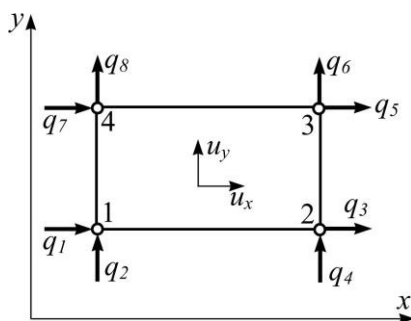


Рис. 8.4. Прямокутниковий скінченний елемент

Число лінійно незалежних коефіцієнтів у два рази більше кількості вузлів

скінченного елемента. Відповідно кожному вузлу необхідно надати два ступені вільності. Ці ступені вільності представимо як переміщення вузлів уздовж координатних осей. Тобто прямокутниковий скінченний елемент має вісім ступенів вільності. Вектор вузлових переміщень q такого елемента візьмемо з восьми вузлових реакцій Q у вузлових зв'язках за напрямками ступенів вільності (рис. 8.4):

$$q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8]^T ;$$

$$Q = [Q_1 \ Q_2 \ Q_3 \ Q_4 \ Q_5 \ Q_6 \ Q_7 \ Q_8]^T . \quad (8.44)$$

Отже, для побудови прямокутникового скінченного елемента розмір матриці жорсткості буде 8×8 .

Закон зміни компонент вектора переміщень $u = [u_x \ u_y]^T$ для вузлових точок прямокутникового скінченного елемента представимо у вигляді:

$$u_x = \frac{1}{ab} [\rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3 \ \rho_4] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_7 \end{bmatrix} ;$$

$$u_y = \frac{1}{ab} [\rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3 \ \rho_4] \begin{bmatrix} q_2 \\ q_4 \\ q_6 \\ q_8 \end{bmatrix} . \quad (8.45)$$

Відповідно до (8.4)

$$\varphi = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & \rho_2 & 0 & \rho_3 & 0 & \rho_4 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & \rho_2 & 0 & \rho_3 & 0 & \rho_4 \end{bmatrix} , \quad (8.46)$$

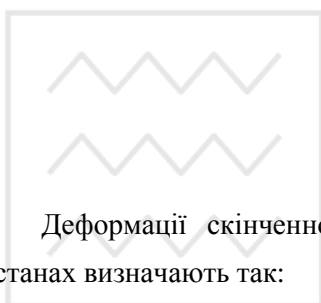
де

$$\rho_1 = (a - x) \cdot (b - y);$$

$$\rho_2 = x \cdot (b - y);$$

$$\rho_3 = (a - x) \cdot y;$$

$$\rho_4 = x \cdot y.$$



Деформації скінченного елемента після диференціювання в одиничних станах визначають так:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 & \dot{\varepsilon}_2 & \dot{\varepsilon}_3 & \dot{\varepsilon}_4 & \dot{\varepsilon}_5 & \dot{\varepsilon}_6 & \dot{\varepsilon}_7 & \dot{\varepsilon}_8 \end{bmatrix} = \beta \varphi = \\ &= \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} y-b & 0 & b-y & 0 & -y & 0 & y & 0 \\ 0 & x-a & 0 & -x & 0 & a-x & 0 & x \\ x-a & y-b & -x & b-y & a-x & -y & x & y \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Коефіцієнти матриці жорсткості скінченного елемента вираховують згідно з виразом (8.13) таким чином:

$$k_{ij} = \int_{\omega^e} (\dot{\varepsilon}_i)^T D \dot{\varepsilon}_j d\omega = h \int_0^a \int_0^b (\dot{\varepsilon}_i)^T D \dot{\varepsilon}_j dy dx. \quad (8.48)$$

Напруження в межах скінченного елемента обчислюють за допомогою виразу (8.12):

$$\sigma = \dot{\sigma} \cdot q,$$

де

$$\dot{\sigma} = D\dot{\varepsilon} = \frac{E}{ab(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} y-b & (x-a)\nu & -(y-b) & \dots \\ (y-b)\nu & -a & -(y-b)\nu & \dots \\ (x-a)\frac{1-\nu}{2} & (y-b)\frac{1-\nu}{2} & -x\frac{1-\nu}{2} & \dots \\ -x\nu & -y & -(x-a)\nu & y & x\nu \\ -x & -y\nu & -(x-a) & y\nu & x \\ -(y-b)\frac{1-\nu}{2} & -(x-a)\frac{1-\nu}{2} & -y\frac{1-\nu}{2} & x\frac{1-\nu}{2} & y\frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (8.49)$$

8.8. Приклад розрахунку балки-стілки

Застосування розглянутих трикутникових та прямокутникових скінченних елементів покажемо на прикладі розрахунку балки-стілки. Послідовність і способи розрахунку складніших двовимірних систем практично не будуть відрізнятися від показаних тут.

Розглянемо балку-стілку під дією декількох зосереджених сил (рис. 8.5). Матеріал конструкції ізотропний: $E = 200$ ГПа, $\nu = \frac{1}{3} \approx 0,33$, товщина $h = 0,006$ м.

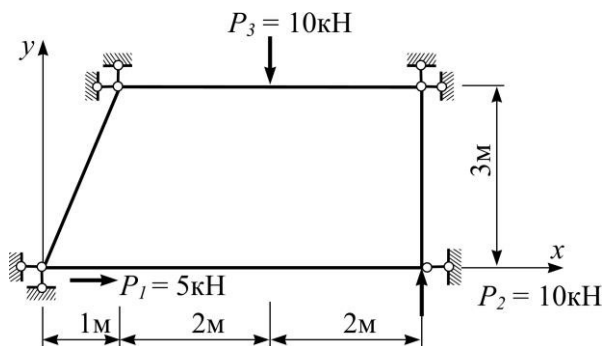


Рис. 8.5. Балка-стілка під дією навантаження

Розіб'ємо балку-стілку на три скінченні елементи: трикутниковий і два

прямокутників (рис. 8.6, 8.7). Для розрахунку прийемо, що осі локальних систем координат скінченних елементів паралельні осям глобальної. Таким чином, матриці жорсткості скінченних елементів будемо одразу визначати в глобальній системі координат.

Розрахунок почнемо з побудови матриці жорсткості трикутного елемента 1.

Координати його вузлів у глобальній системі координат:

$$x_1 = 0; x_2 = 1 \text{ м}; x_3 = 1 \text{ м}; y_1 = 0; y_2 = 0; y_3 = 3 \text{ м}.$$

Згідно з виразом (8.38):

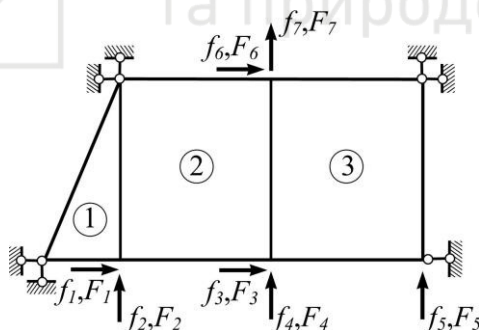


Рис. 8.6. Схема розбиття балки-стілки на скінченні елементи

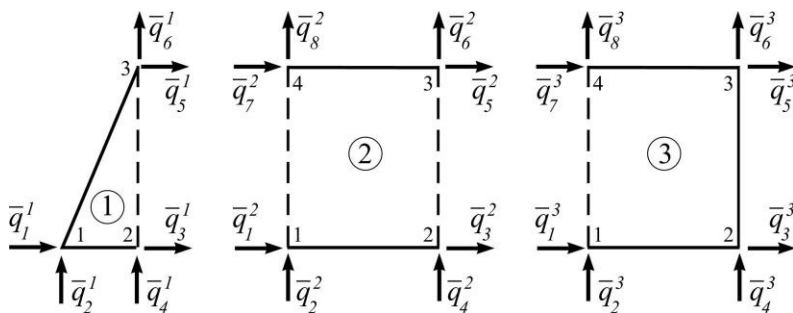


Рис. 8.7. Скінченні елементи балки-стілки з можливими вузловими переміщеннями

$$a_1 = 3 \text{ м}; a_2 = a_3 = 0;$$

$$c_1 = x_3 - x_2 = 1 - 1 = 0;$$

$$b_1 = y_2 - y_3 = 0 - 3 = -3 \text{ м};$$

$$c_2 = x_1 - x_3 = 0 - 1 = -1 \text{ м};$$



$$b_2 = y_3 - y_1 = 3 - 0 = 3 \text{ м};$$

$$c_3 = x_2 - x_1 = 1 - 0 = 1 \text{ м};$$

$$b_3 = y_1 - y_2 = 0 - 0 = 0.$$

Подвоєна площа трикутничого елемента:

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3 \text{ м}^2.$$

Відповідно площа трикутничого елемента $\Delta = 1,5 \text{ м}^2$.

Отже, матриця деформацій трикутничого скінченного елемента в одиничних станах згідно з (8.39) має вигляд:

$$\dot{\varepsilon}^1 = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Згідно з виразом (8.40) визначимо коефіцієнти матриці жорсткості 1-го скінченного елемента в глобальній системі координат. Наприклад:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{11}^1 &= h\Delta(\varepsilon_1^1)^T D\varepsilon_1^1 = h \cdot \Delta \cdot \frac{1}{2\Delta} \cdot [b_1 \ 0 \ c_1] \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2\Delta} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \frac{hE}{4\Delta(1-\nu^2)} \cdot [-3 \ 0 \ 0] \times \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0,33 & 0 \\ 0,33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{0,006 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{4 \cdot 1,5(1-0,33^2)} \cdot 9 = 2025 \cdot 10^6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_{34}^1 &= h\Delta(\varepsilon_3^1)^T D\varepsilon_4^1 = h \cdot \Delta \cdot \frac{1}{2\Delta} \cdot [b_2 \ 0 \ c_2] \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2\Delta} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{hE}{4\Delta(1-\nu^2)} \cdot [3 \ 0 \ -1] \times \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0,33 & 0 \\ 0,33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{0,006 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{4 \cdot 1,5(1-0,33^2)} \cdot (-2) = -450 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо інші компоненти матриці жорсткості трикутного скінченного елемента, яка має вигляд:

$$\bar{k}^1 = \begin{bmatrix} 20,25 & 0 & -20,25 & 2,25 & 0 & -2,25 \\ 0 & 6,75 & 2,25 & -6,75 & -2,25 & 0 \\ -20,25 & 2,25 & 21 & -4,5 & -0,75 & 2,25 \\ 2,25 & -6,75 & -4,5 & 9 & 2,25 & -2,25 \\ 0 & -2,25 & -0,75 & 2,25 & 0,75 & 0 \\ -2,25 & 0 & 2,25 & -2,25 & 0 & 2,25 \end{bmatrix} \cdot 10^8.$$

Матриця деформацій прямокутного скінченного елемента 2 згідно з (8.47) має вигляд:

$$\dot{\varepsilon}^2 = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} y-b & 0 & b-y & 0 & -y & 0 & y & 0 \\ 0 & x-a & 0 & -x & 0 & a-x & 0 & x \\ x-a & y-b & -x & b-y & a-x & -y & x & y \end{bmatrix},$$

де $a = 2$ м та $b = 3$ м – розміри елемента 2 (рис. 8.8).

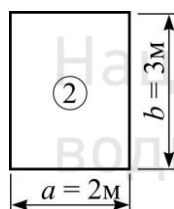


Рис. 8.8. Прямокутниковий скінченний елемент №2 балки-стілки

Компоненти матриці жорсткості прямокутного скінченного елемента визначимо за формулою (8.48). Наприклад:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{11}^2 &= h \int_0^b \int_0^a (\dot{\varepsilon}_1^2)^T D \dot{\varepsilon}_1^2 dx dy = \\ &= h \cdot \int_0^b \int_0^a \frac{1}{ab} \cdot [y-b \quad 0 \quad x-a] \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \times \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \\ &\times \frac{1}{ab} \cdot \begin{bmatrix} y-b \\ 0 \\ x-a \end{bmatrix} dx dy = \frac{hE}{(ab)^2(1-\nu^2)} \int_0^b \int_0^a [y-3 \quad 0 \quad x-2] \times \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0,33 & 0 \\ 0,33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y-3 \\ 0 \\ x-2 \end{bmatrix} dx dy = \frac{0,006 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{(2 \cdot 3)^2(1-0,33^2)} \int_0^b \int_0^a (y^2 - \\ &- 6y + 0,33x^2 - 1,32x + 10,32) dx dy = \frac{0,006 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{(2 \cdot 3)^2(1-0,33^2)} \cdot 20,64 = \\ &= 7,75 \cdot 10^8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{k}_{12}^2 &= h \int_0^b \int_0^a (\dot{\epsilon}_1^2)^T D \dot{\epsilon}_1^2 dx dy = \\
 &= h \cdot \int_0^b \int_0^a \frac{1}{ab} \cdot [y-b \quad 0 \quad x-a] \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \\
 &\times \frac{1}{ab} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x-a \\ y-b \end{bmatrix} dx dy = \frac{hE}{(ab)^2(1-\nu^2)} \int_0^b \int_0^a [y-3 \quad 0 \quad x-2] \times \\
 &\times \begin{bmatrix} 1 & 0,33 & 0 \\ 0,33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x-2 \\ y-3 \end{bmatrix} dx dy = \frac{0,006 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{(2 \cdot 3)^2(1-0,33^2)} \times \\
 &\times \int_0^b \int_0^a (0,66yx - 1,32y - 1,98x + 3,96) dx dy = \\
 &= \frac{0,006 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{(2 \cdot 3)^2(1-0,33^2)} \cdot 5,99 = 5,25 \cdot 10^8.
 \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо інші компоненти матриці жорсткості прямокутного скінченного елемента, яка має вигляд:

$$\bar{k}^2 = \begin{bmatrix} 7,75 & 2,25 & -6,25 & 0 & 2,375 & 0 & -3,875 & -2,25 \\ 2,25 & 5,25 & 0 & -0,75 & 0 & -1,875 & -2,25 & -2,625 \\ -6,25 & 0 & 7,75 & -2,25 & -3,875 & 2,25 & 2,375 & 0 \\ 0 & -0,75 & -2,25 & 5,25 & 2,25 & -2,625 & 0 & -1,875 \\ 2,375 & 0 & -3,875 & 2,25 & 7,75 & -2,25 & -6,25 & 0 \\ 0 & -1,875 & 2,25 & -2,625 & -2,25 & 5,25 & 0 & -0,75 \\ -3,875 & -2,25 & 2,375 & 0 & -6,25 & 0 & 7,75 & 2,25 \\ -2,25 & -2,625 & 0 & -1,875 & 0 & -0,75 & 2,25 & 5,25 \end{bmatrix} \cdot 10^8$$

Оскільки геометричні та фізико-механічні властивості прямокутників скінченних елементів 2 та 3 (рис. 8.8, 8.9) однакові,

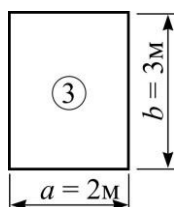
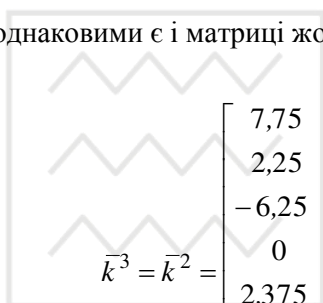


Рис. 8.9. Прямокутниковий скінченний елемент №3 балки-стілки

то однаковими є і матриці жорсткості:



$$\bar{k}^3 = \bar{k}^2 = \begin{bmatrix} 7,75 & 2,25 & -6,25 & 0 & 2,375 & \dots \\ 2,25 & 5,25 & 0 & -0,75 & 0 & \dots \\ -6,25 & 0 & 7,75 & -2,25 & -3,875 & \dots \\ 0 & -0,75 & -2,25 & 5,25 & 2,25 & \dots \\ 2,375 & 0 & -3,875 & 2,25 & 7,75 & \dots \\ 0 & -1,875 & 2,25 & -2,625 & -2,25 & \dots \\ -3,875 & -2,25 & 2,375 & 0 & -6,25 & \dots \\ -2,25 & -2,625 & 0 & -1,875 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & 0 & -3,875 & -2,25 \\ \dots & -1,875 & -2,25 & -2,625 \\ \dots & 2,25 & 2,375 & 0 \\ \dots & -2,625 & 0 & -1,875 \\ \dots & -2,25 & -6,25 & 0 \\ \dots & 5,25 & 0 & -0,75 \\ \dots & 0 & 7,75 & 2,25 \\ \dots & -0,75 & 2,25 & 5,25 \end{bmatrix} \cdot 10^8.$$

Згідно з виразом (8.31) залежність переміщень вузлів скінченоелементної моделі від переміщень вузлів скінченних елементів має вигляд:

$$\begin{aligned} f_1 = \bar{q}_3^1 = \bar{q}_1^2; & \quad f_2 = \bar{q}_4^1 = \bar{q}_2^2; & \quad f_3 = \bar{q}_3^2 = \bar{q}_1^3; & \quad f_4 = \bar{q}_4^2 = \bar{q}_2^3; \\ f_5 = \bar{q}_4^3; & \quad f_6 = \bar{q}_5^2 = \bar{q}_7^3; & \quad f_7 = \bar{q}_6^2 = \bar{q}_8^3. \end{aligned}$$

Коефіцієнти матриці жорсткості скінченоелементної моделі відшукаємо згідно з виразом (8.32). Наприклад:

$$r_{12} = ? . \quad i = 1, j = 2 ;$$

$$i = 1 : f_1 = \bar{q}_3^1 = \bar{q}_1^2 ;$$

$$j = 2 : f_2 = \bar{q}_4^1 = \bar{q}_2^2 .$$

Отже, $r_{12} = \bar{k}_{34}^1 + \bar{k}_{12}^2$.

Аналогічно решта коефіцієнтів:

$$r_{11} = \bar{k}_{33}^1 + \bar{k}_{11}^2 ; \quad r_{12} = \bar{k}_{34}^1 + \bar{k}_{12}^2 ; \quad r_{13} = \bar{k}_{13}^2 ; \quad r_{14} = \bar{k}_{14}^2 ; \quad r_{15} = 0 ; \quad r_{16} = \bar{k}_{15}^2 ;$$

$$r_{17} = \bar{k}_{16}^2 ;$$

$$r_{21} = r_{12} ; \quad r_{22} = \bar{k}_{44}^1 + \bar{k}_{22}^2 ; \quad r_{23} = \bar{k}_{23}^2 ; \quad r_{24} = \bar{k}_{24}^2 ; \quad r_{25} = 0 ; \quad r_{26} = \bar{k}_{25}^2 ; \quad r_{27} = \bar{k}_{26}^2 ;$$

$$r_{31} = \bar{k}_{33}^1 + \bar{k}_{11}^2 ; \quad r_{32} = r_{23} ; \quad r_{33} = \bar{k}_{33}^2 + \bar{k}_{11}^3 ; \quad r_{34} = \bar{k}_{34}^2 + \bar{k}_{11}^3 ; \quad r_{35} = \bar{k}_{14}^3 ;$$

$$r_{36} = \bar{k}_{35}^2 + \bar{k}_{17}^3 ; \quad r_{37} = \bar{k}_{36}^2 + \bar{k}_{18}^3 ;$$

$$r_{41} = r_{14} ; \quad r_{42} = r_{24} ; \quad r_{43} = r_{34} ; \quad r_{44} = \bar{k}_{44}^2 + \bar{k}_{22}^3 ; \quad r_{45} = \bar{k}_{24}^3 ; \quad r_{46} = \bar{k}_{45}^2 + \bar{k}_{27}^3 ;$$

$$r_{47} = \bar{k}_{46}^2 + \bar{k}_{28}^3 ;$$

$$r_{51} = r_{15} ; \quad r_{52} = r_{25} ; \quad r_{53} = r_{35} ; \quad r_{54} = r_{45} ; \quad r_{55} = \bar{k}_{44}^3 ; \quad r_{56} = \bar{k}_{47}^3 ; \quad r_{57} = \bar{k}_{48}^3 ;$$

$$r_{61} = r_{16} ; \quad r_{62} = r_{26} ; \quad r_{63} = r_{36} ; \quad r_{64} = r_{46} ; \quad r_{65} = r_{56} ; \quad r_{66} = \bar{k}_{55}^2 + \bar{k}_{77}^3 ;$$

$$r_{67} = \bar{k}_{56}^2 + \bar{k}_{78}^3 ;$$

$$r_{71} = r_{17} ; \quad r_{72} = r_{27} ; \quad r_{73} = r_{37} ; \quad r_{74} = r_{47} ; \quad r_{75} = r_{57} ; \quad r_{76} = r_{67} ; \quad r_{77} = \bar{k}_{66}^2 + \bar{k}_{88}^3 ;$$

$$r = \begin{bmatrix} 28,75 & -2,25 & -6,25 & 0 & 0 & 2,375 & 0 \\ -2,25 & 14,25 & 0 & -0,75 & 0 & 0 & -1,875 \\ -6,25 & 0 & 15,5 & 0 & 0 & -7,75 & 0 \\ 0 & -0,75 & 0 & 10,5 & -0,75 & 0 & -5,25 \\ 0 & 0 & 0 & -0,75 & 5,25 & 0 & -1,875 \\ 2,375 & 0 & -7,75 & 0 & 0 & 15,5 & 0 \\ 0 & -1,875 & 0 & -5,25 & -1,875 & 0 & 10,5 \end{bmatrix} \cdot 10^8.$$

Вектор вузлових навантажень згідно з рис. 8.5, 8.6 має вигляд:

$$F = [5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0 \ -10]^T \cdot 10^3.$$

Відшукуючи переміщення скінченоелементної системи, використаємо вираз (8.14) у вигляді:

$$f = r^{-1} \cdot F,$$

де матриця r^{-1} – є обернена матриця до r :

$$r^{-1} = \begin{bmatrix} 38,75 & 6,48 & 16,88 & 1,60 & 0,99 & 2,50 & 2,14 \\ 6,48 & 75,45 & 2,82 & 18,64 & 11,54 & 0,42 & 24,85 \\ 16,88 & 2,82 & 93,36 & 0,70 & 0,43 & 44,09 & 0,93 \\ 1,60 & 18,64 & 0,70 & 141,66 & 49,91 & 0,10 & 83,09 \\ 0,99 & 11,54 & 0,43 & 49,91 & 221,39 & 0,06 & 66,56 \\ 2,50 & 0,42 & 44,09 & 0,10 & 0,06 & 86,23 & 0,14 \\ 2,14 & 24,85 & 0,93 & 83,09 & 66,56 & 0,14 & 153,09 \end{bmatrix} \cdot 10^{-11}.$$

Вектор переміщень системи має вигляд:

$$f = \begin{bmatrix} 1,823 \\ -1,007 \\ 0,794 \\ -3,237 \\ 15,532 \\ 0,118 \\ -8,548 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Напруження в скінченних елементах визначають згідно з виразом (8.12):

$$\sigma^e = \begin{bmatrix} \sigma_x^e \\ \sigma_y^e \\ \tau_{xy}^e \end{bmatrix} = \hat{\sigma}^e \cdot \bar{q}^e.$$

Тут q^e – вектор вузлових переміщень скінченного елемента під номером e .

Згідно з залежністю переміщень вузлів скінченоелементної моделі від переміщень вузлів скінченних елементів та вектора переміщень системи f , q^e для першого скінченного елемента визначаємо:

$$\bar{q}_3^1 = f_1 = 1,823 \cdot 10^{-6}; \quad \bar{q}_4^1 = f_2 = -1,007 \cdot 10^{-6}.$$

Для другого:

$$\bar{q}_1^2 = f_1 = 1,823 \cdot 10^{-6}; \quad \bar{q}_2^2 = f_2 = -1,007 \cdot 10^{-6};$$

$$\bar{q}_3^2 = f_3 = 0,794 \cdot 10^{-6}; \quad \bar{q}_4^2 = f_4 = -3,237 \cdot 10^{-6};$$

$$\bar{q}_5^2 = f_6 = 0,118 \cdot 10^{-6}; \quad \bar{q}_6^2 = f_7 = -8,548 \cdot 10^{-6}.$$

Для третього:

$$\bar{q}_1^3 = f_3 = 0,794 \cdot 10^{-6}; \quad \bar{q}_2^3 = f_4 = -3,237 \cdot 10^{-6};$$

$$\bar{q}_4^3 = f_5 = 15,532 \cdot 10^{-6}; \quad \bar{q}_7^3 = f_6 = 0,118 \cdot 10^{-6};$$

$$\bar{q}_8^3 = f_7 = -8,548 \cdot 10^{-6}.$$

Вектори вузлових переміщень скінченних елементів в глобальній системі координат мають вигляд:

$$\bar{q}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,823 \\ -1,007 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\bar{q}^2 = \begin{bmatrix} 1,823 \\ -1,007 \\ 0,794 \\ -3,237 \\ 0,118 \\ -8,548 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ м}; \quad \bar{q}^3 = \begin{bmatrix} 0,794 \\ -3,237 \\ 0 \\ 15,532 \\ 0 \\ 0 \\ 0,118 \\ -8,548 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Для першого скінченного елемента згідно з (8.42) дістанемо:

$$\bar{\sigma}^1 = 75000 \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & -0,33 & 0 & 0,33 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -0,33 & 1 & 0,33 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^6.$$

Згідно з (8.12)

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} \sigma_x^1 \\ \sigma_y^1 \\ \tau_{xy}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,435 \\ 0,212 \\ -0,121 \end{bmatrix} \text{ МПа.}$$

Для другого скінченного елемента згідно з (8.49) щодо положення центру ваги у глобальній системі координат $x = 2$ м, $y = 1,5$ м:

$$\dot{\sigma}^2 = 37500 \cdot \begin{bmatrix} -1,5 & 0 & 1,5 & -0,66 & -1,5 & \dots \\ -0,495 & 0 & 0,495 & -2 & -0,495 & \dots \\ 0 & -0,495 & -0,66 & 0,495 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1,5 & 0,66 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0,495 & 2 & \dots & \dots \\ \dots & -0,495 & 0,66 & 0,495 & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot 10^6,$$

тоді

$$\sigma^2 = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 \\ \sigma_y^2 \\ \tau_{xy}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,156 \\ 2,215 \\ 0,976 \end{bmatrix} \cdot 10^{-1} \text{ МПа.}$$

Для третього скінченного елемента щодо положення центру ваги у глобальній системі координат $x = 4$ м, $y = 1,5$ м:

$$\dot{\sigma}^3 = 37500 \cdot \begin{bmatrix} -1,5 & 0,66 & 1,5 & -1,32 & -1,5 & \dots \\ -0,495 & 2 & 0,495 & -4 & -0,495 & \dots \\ 0,66 & -0,495 & -1,32 & 0,495 & -0,66 & \dots \\ \dots & -0,66 & 1,5 & 1,32 & \dots & \dots \\ \dots & -2 & 0,495 & 4 & \dots & \dots \\ \dots & -0,495 & 1,32 & 0,495 & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot 10^6,$$

тоді

$$\sigma^3 = \begin{bmatrix} \sigma_x^3 \\ \sigma_y^3 \\ \tau_{xy}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,310 \\ -3,867 \\ 0,215 \end{bmatrix} \text{ МПа.}$$

Контрольні запитання

1. У чому полягає суть методу скінченних елементів у формі методу переміщень?
2. Який фізичний зміст мають коефіцієнти жорсткості скінченного елемента?
3. Який зв'язок існує між реакціями вузлових в'язей та вузловими переміщеннями скінченного елемента в пружній стадії роботи?
4. Як пов'язані переміщення скінченного елемента із його вузловими переміщеннями?
5. Що таке дискретно-континуальна система в методі скінченних елементів?
6. Який фізичний зміст має довільний елемент матриці жорсткості скінченоелементної системи?
7. Який зв'язок існує між переміщеннями необ'єднаних елементів у глобальній системі координат з узагальненими переміщеннями вузлів скінченоелементної системи?

РОЗДІЛ ІХ

ТЕХНІЧНА ТЕОРІЯ ЗГИНУ ПРЯМОКУТНИХ ТОНКИХ ЖОРСТКИХ ПЛАСТИН

9.1. Основні поняття та гіпотези

Пластиною називають призматичний або циліндричний геометричний об'єкт, товщина якого порівняно з його іншими габаритними розмірами є незначною.

До основних конструктивних елементів пластини відносимо серединну площину і контур пластини. Серединна площина – площина, що ділить сталу товщину h пластини навпіл. Контур пластини (опорний контур) – це лінія перетину серединної площини з торцевою поверхнею (рис. 9.1, а).

Поверхню, в яку перетворюється серединна площина під дією навантаження в межах пружних деформацій, називаємо пружною поверхнею (рис. 9.1, б).

Залежно від відношення h/a (a – один з лінійних розмірів, наприклад, ширина, рис. 9.1, а, б) пластини поділяємо на такі групи: а) дуже тонкі (мембрани) для яких $h/a < 1/80$; б) тонкі – $1/80 \leq h/a \leq 1/5$; в) середньої товщини – $1/5 \div 1/10 \leq h/a \leq 1/3$; г) товсті (плити) – $h/a > 1/3$.

Залежно від прогинів (рис. 9.1, б) тонкі пластини бувають гнучкими ($w > 0,2 \dots 0,5h$) і жорсткими ($w \leq 0,2 \dots 0,5h$).

У цьому курсі вивчатимемо тонкі жорсткі пластини на основі технічної теорії. Технічна теорія згину пластин – це наближена теорія, що ґрунтується на деяких геометричних і фізичних припущеннях (гіпотезах), а саме на тих, що запропонував у 1882 року Г.Р.Кірхгоф і які носять його ім'я.

Гіпотези Кірхгофа формулюють нині так:

1. Гіпотеза прямих недеформованих нормалей. Відрізок $m-n$ будь-якої нормалі до серединної площини (рис. 9.1, а) під час згинання пластини лишається прямим і нормальним до серединної поверхні, не змінюючи своєї довжини. Математично це можна представити у вигляді таких вимог до лінійного елемента $m-n$:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0, \quad (9.1)$$

$$\varepsilon_z = 0. \quad (9.2)$$

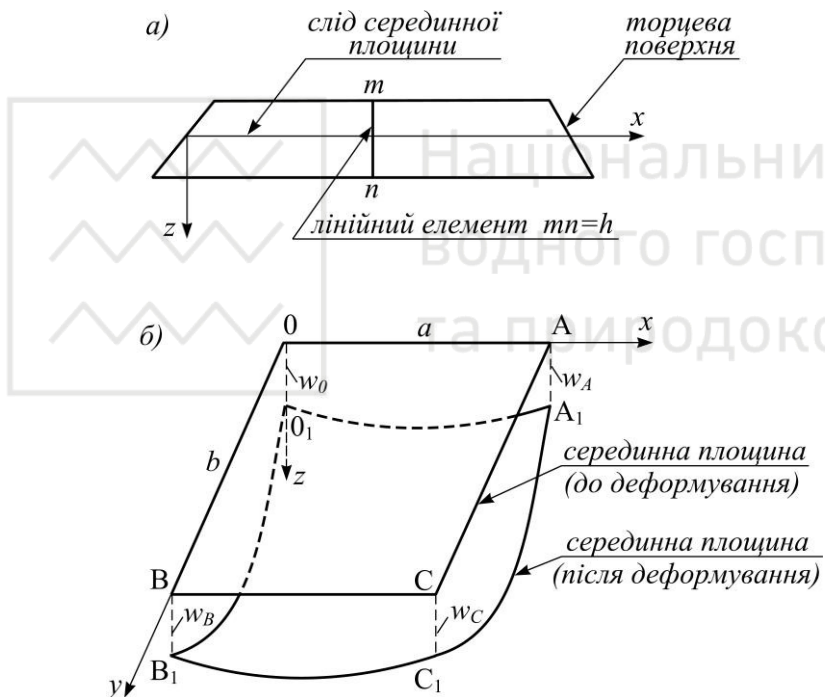


Рис. 9.1. Основні конструктивні елементи пластини: а) в перерізі, б) в плані

2. Гіпотеза про нерозтяжність середньої площини. На серединній поверхні немає лінійних і кутових деформацій, а значить

$$u_0 = v_0 = 0. \quad (9.3)$$

3. Гіпотеза про ненависканість між шарами пластини, тобто вважаємо, що нормальні напруження σ_z відсутні:

$$\sigma_z = 0. \quad (9.4)$$

9.2. Переміщення, деформації та напруження в прямокутній пластині

Виразимо компоненти переміщень u і v , деформацій $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ і напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ і τ_{yz} через згин серединної поверхні пластини, або ж через, так звану, функцію прогину $w = w(x, y)$. При цьому скористаємось гіпотезами Кірхгофа. На рис. 9.2 зображено частину перерізу пластини до (рис. 9.2, а) і після (рис. 9.2, б) деформування. Звідки знаходимо, що кут обертання φ нормалі KL дорівнює: $\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial w}{\partial x}$ і тоді

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (9.5)$$

Аналогічно

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (9.6)$$

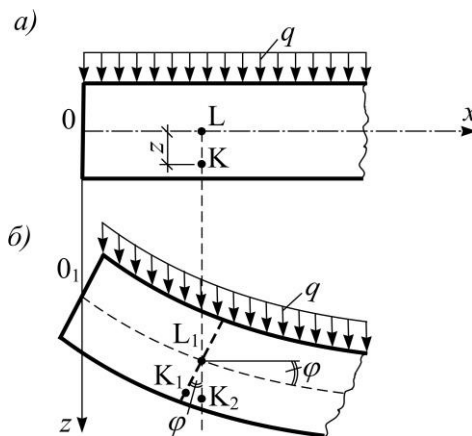


Рис. 9.2. Нормаль KL до (а) і після (б) деформування пластини

На основі залежностей Коші (7.25), підставляючи туди вирази для переміщень u і v , згідно з формулами (9.5–9.6), дістанемо:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (9.7)$$

Таким чином, лінійні та кутові деформації $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ виражено через функцію прогину $w = w(x, y)$.

Для напруженого стану пластини розрізнятимемо основні (розрахункові) $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, і додаткові напруження $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Останні мають лише певний теоретичний сенс (значення).

Визначимо спочатку основні напруження. Оскільки згідно з припущенням (9.4) $\sigma_z = 0$, то з рівнянь (7.16) за законом Гука після деяких перетворень можна записати:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y);$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x);$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}. \quad (9.8)$$

Використовуючи спільно залежності (9.7) і (9.8), знаходимо компоненти напружень через функцію прогину w :

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{Ez(1-\nu)}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (9.9)$$

У формулах (9.9) напруження σ_x , σ_y , τ_{xy} – лінійні функції координати z . Цей результат є наслідком гіпотези про прямі недеформовані нормалі.

Вирази для додаткових дотичних напружень τ_{xy} , τ_{yz} можна визначити з диференціальних рівнянь рівноваги (7.3). Порівняно з основними ці напруження незначні й по суті не впливають на міцність й жорсткість пластини. Нехтуючи об'ємною силою X , із першого рівняння (7.3) знаходимо:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}.$$

Підставляючи в це рівняння вирази для σ_x , τ_{xy} за формулами (9.9) після деякого спрощення дістанемо:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

Інтегруючи цей вираз за змінною z , маємо:

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + f(x, y), \quad (9.10)$$

де довільну функцію інтегрування $f(x, y)$ визначаємо з таких межових (граничних) умов: при $z = \pm h/2$ має бути $\tau_{zx} = 0$ через те, що на верхній і на нижній поверхнях пластини дотичних навантажень немає. Підставляючи названі межові умови у формулу (9.10), маємо:

$$f(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w. \quad (9.11)$$

Замінюючи в рівності (9.10) функцію $f(x, y)$ через її вираз (9.11), остаточно дістанемо:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w. \quad (9.12)$$

Розв'язуючи таким же чином друге рівняння рівноваги (7.3) відносно напруження τ_{yz} при $Y=0$, знайдемо:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (9.13)$$

На рис. 9.3 зображено розподіл основних напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx} = \tau_{xy}$ за лінійним законом з нульовими значеннями в точках серединної поверхні. Додаткові напруження τ_{zy}, τ_{zx} розподіляються за законом параболи з максимальними значеннями в точках, що лежать на серединній поверхні.

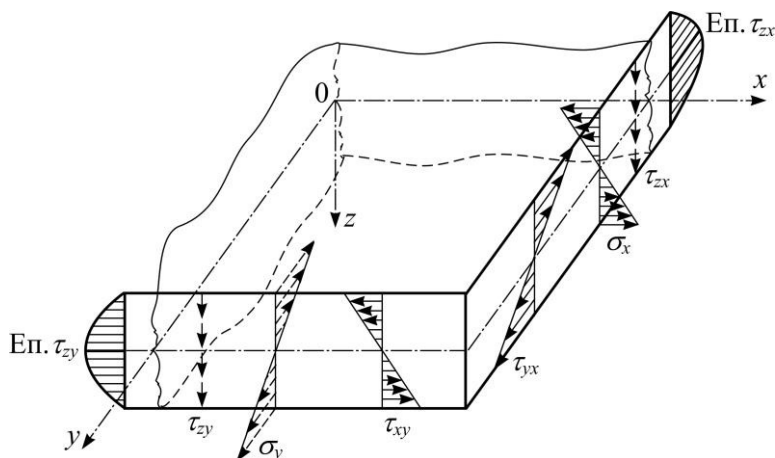


Рис. 9.3. Розподіл основних $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ і додаткових напружень τ_{zy}, τ_{zx} в перерізах пластини

9.3. Диференціальне рівняння пружної поверхні прямокутної пластини

Визначимо нормальні напруження σ_z із третього рівняння рівноваги (7.3) при $Z = 0$, куди одночасно підставимо вирази напружень τ_{zy}, τ_{zx} за формулами (9.12 – 9.13). І тоді після певних спрощень матимемо:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \nabla^4 w. \quad (9.14)$$

Інтегруючи вираз (9.14) за змінною z дістанемо:

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^4 w + \psi(x, y), \quad (9.15)$$

де $\nabla^4 w = \nabla^2 \nabla^2 w$ – бігармонічний оператор від функції прогину $w = w(x, y)$; $\psi = \psi(x, y)$ – довільна функція інтегрування, яку можна визначити з умови навантаження пластини (рис. 9.4):

при $z = -h/2$, $\sigma_z = -q$;

при $z = +h/2$, $\sigma_z = 0$.

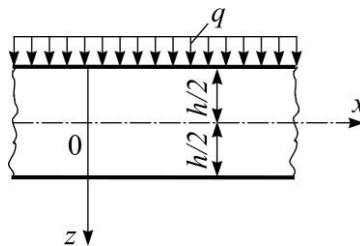


Рис. 9.4. Навантаження пластини

Підставивши ці межові умови в рівняння (9.15), матимемо:

$$-q = -\frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \nabla^4 w + \psi(x, y);$$

$$0 = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \nabla^4 w + \psi(x, y).$$

Додаючи почленно ці співвідношення одне до одного, знайдемо: $-q = 2\psi(x, y)$. Звідки довільна функція інтегрування дорівнює:

$$\psi(x, y) = -\frac{q}{2}.$$

Отже, після цього формула (9.15) набуває такого вигляду:

$$\sigma_z = -\frac{q}{2} + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^4 w. \quad (9.16)$$

Напруження σ_z співрозмірні поперечному навантаженню q і становлять незначну частку від напружень σ_x і σ_y .

Із формули (9.16) можна дістати диференціальне рівняння пружної поверхні прямокутної пластини. Якщо врахувати, що при $z = +\frac{h}{2}$ напруження $\sigma_z = 0$ (рис. 9.4) то рівність (9.16) після деяких перетворень набуває такої форми:

$$D \nabla^4 w = q, \quad (9.17)$$

де D – циліндрична жорсткість пластини, механічна характеристика перерізу на одиничну ширину, дорівнює:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (9.18)$$

Тут E – модуль пружності, ν – коефіцієнт Пуассона для матеріалу пластини, h – висота (товщина) пластини.

Рівняння (9.17) називають диференціальним рівнянням пружної поверхні

пластини або рівнянням Софі Жермен, яка його вперше отримала в 1811 році. Пізніше Ж.Л. Лагранж виправив у ньому, зауважені ним, помилки, і тому рівняння (9.17) часто називають рівнянням Софі Жермен-Лагранжа.

У розгорнутому вигляді рівняння (9.17) записують так:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q(x, y). \quad (9.19)$$

Для розрахунку прямокутних пластин використовують обернений порядок. Спочатку задають функцію прогину, що повинна задовольняти рівняння Софі Жермен (9.19), а потім обчислюють внутрішні силові чинники напруження, деформації та переміщення.

9.4. Зусилля в пластині. Вираження напружень через зусилля

Відповідно до означень напружень, що виникають у поперечних перерізах пластини, маємо такі зусилля в пластині (на рис. 9.5 зображено додатні напрямки зусиль): згинувий момент M_x – відповідає нормальним напруженням σ_x , згинувий момент M_y – напруженням σ_y , крутні моменти $T_{xy} = T_{yx} = T$ – дотичним напруженням $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, повздовжні сили $N_x = N_y = 0$ – нормальним напруженням σ_x і σ_y , поперечні сили Q_x і Q_y – дотичним напруженням τ_{xz} і τ_{yz} . Усі зусилля розраховуємо на одиницю довжини й тому називаємо їх погонними з одиницями вимірювання для моментів – $H \cdot \text{м/м}$, для сил – $H/\text{м}$.

Визначимо, чому дорівнюють зусилля представлені через функцію прогину.

Знайдемо спочатку погонний згинувий момент M_x відносно сліду серединної поверхні (рис. 9.3 і 9.5). Елементарний момент dM_x , виникає на елементарній площинці $dA = 1 \cdot dz = dz$, що має зовнішню нормаль, рівнобіжну до осі x (рис. 9.5): $dM_x = \sigma_x z dz$. Повний момент M_x дорівнює :

$$M_x = \int_A dM = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz. \quad (9.20)$$

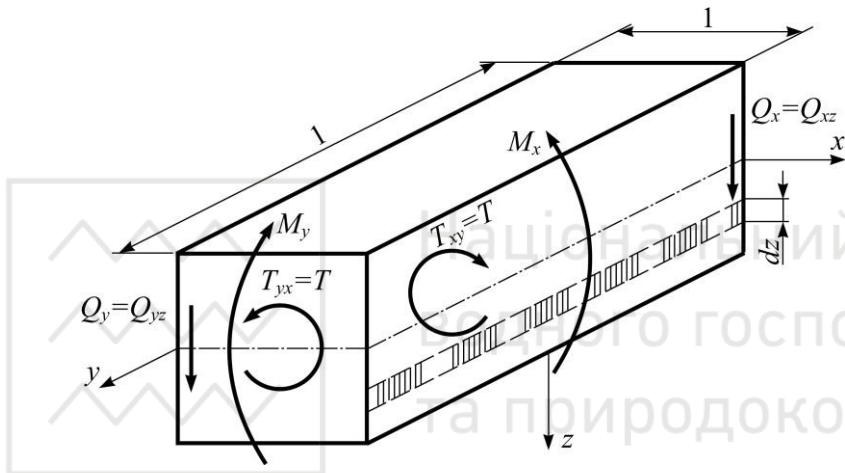


Рис. 9.5. Додатні напрямки погонних зусиль у перерізах прямокутної пластини

Підставивши у вираз (9.20) вирази нормальних напружень σ_x за першою формулою (9.9) і проінтегрувавши його, матимемо після певних перетворень:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (9.21)$$

Аналогічно знаходимо вираз для згинового моменту M_y відносно осі y :

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (9.22)$$

На основі закону про парність дотичних напружень ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$) матимемо однакові крутні моменти $T_{xy} = T_{yx} = T$, що виникають відповідно до дотичних напружень $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ за аналогією зі згиновими моментами:

$$T = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (9.23)$$

Поперечні сили $Q_x = Q_{xz}$ і $Q_y = Q_{yz}$ відповідають дотичним напруженням τ_{xz} і τ_{yz} і дорівнюють:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} dz \quad \text{і} \quad Q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} dz. \quad (9.24)$$

Звідси, підставляючи замість напружень τ_{xz} і τ_{yz} їхні вирази за формулами (9.12) і (9.13), дістанемо, після деяких перетворень, ось такі вирази для поперечних сил Q_x і Q_y :

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad \text{і} \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (9.25)$$

Таким чином, зусилля M_x , M_y , T , Q_x і Q_y виражено через функцію прогину $w = w(x, y)$.

Зазначимо, чому дорівнюють напруження через зусилля. Для цього порівняємо співвідношення (9.9) зі співвідношеннями (9.21 – 9.23). Із цього порівняння випливає, що основні напруження в поперечних перерізах пластини такі:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z \quad \text{і} \quad \tau_{xy} = \frac{Tz}{I}, \quad (9.26)$$

де I – осьовий момент інерції поперечного перерізу пластини на одиницю ширини (механічна характеристика перерізу) дорівнює:

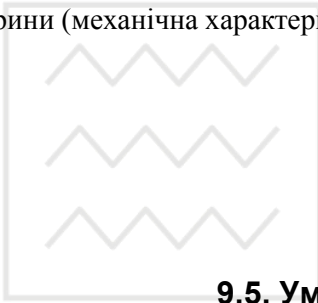
$$I = \frac{h^3}{12}. \quad (9.27)$$

Найбільші напруження виникають на верхній та нижній поверхнях пластини, тобто при $z = \pm \frac{h}{2}$, і становлять:

$$\max \sigma_x = \frac{M_x}{W}, \quad \max \sigma_y = \frac{M_y}{W} \quad \text{і} \quad \max \tau_{xy} = \frac{T}{W}, \quad (9.28)$$

де W – осьовий момент опору поперечного перерізу пластини одиничної ширини (механічна характеристика перерізу) дорівнює:

$$W = \frac{h^3}{6}. \quad (9.29)$$



9.5. Умови на контурі пластини

Умови на контурі пластини поділяються на: геометричні (задаються прогини та кути обертання) і статичні (відомі зовнішні силові чинники: згинальні і крутні моменти та перерізувальні сили) або змішані (одночасно задаються переміщення та силові чинники).

З'ясуємо, скільки треба задати межових (граничних) умов на кожному краю пластини. Диференціальне рівняння пружної поверхні (9.19) вимагає всього чотири межові умови під час інтегрування вздовж кожної з осей Ox та Oy (рис. 9.6). Таким чином, на кожному краю пластини треба мати по дві межові умови: для жорсткого защемлення (сторони OA і OB , на рис. 9.6 їх схематично зображено похилою штриховкою); для шарнірного закріплення (сторону AC , на рис. 9.6 позначено пунктиром) і для вільного краю (сторона BC на рис. 9.6).

Щоб навести математичну інтерпретацію різних межових умов, розглянемо конкретний приклад (рис. 9.6). Жорстке защемлення має геометричні межові умови. Наприклад, для сторони OA межові умови записуємо так:

при $y = 0$ прогин $w = 0$ і кут обертання $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$. (9.30)

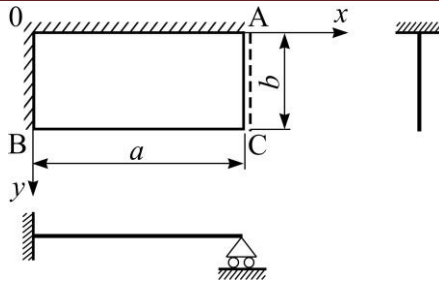


Рис. 9.6. Межові умови прямокутних пластин

Для сторони OB маємо:

$$\text{при } x=0 \text{ прогин } w=0 \text{ і } \frac{\partial w}{\partial x}=0. \quad (9.31)$$

Шарнірне спирання має змішані межові умови. Так, для сторони AC пишемо:

$$\text{при } x=a \text{ прогин } w=0 \text{ і } M_x=0. \quad (9.32)$$

Якщо ж на краю AC був би прикладений розподілений згинальний момент m_x , то тоді відповідна межова умова для краю AC дорівнювала б $M_x = m_x$.

Вільний край пластини (на рис. 9.6 сторона BC) має статичні умови. При цьому замість необхідних двох умов маємо аж три: при $y=b$ моменти $M_y=0$, $T=0$ і перерізувальна сила $Q=0$. Але ці три умови штучно зводять до двох, замінюючи крутний момент T і перерізувальну силу Q однією зведеною силою.

Для сторони пластини з нормаллю, що перпендикулярна до осі y (рис. 9.7), зведену перерізувальну силу $Q_{x,red}$ записують у такій формі:

$$Q_{\bar{o},red} = Q_x + \frac{\partial T}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]. \quad (9.33)$$

Для сторони пластини з нормаллю, що перпендикулярна до осі x , зведену

перерізувальну силу $Q_{y,red}$ подаємо таким чином:

$$Q_{y,red} = Q_y + \frac{\partial T}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]. \quad (9.34)$$

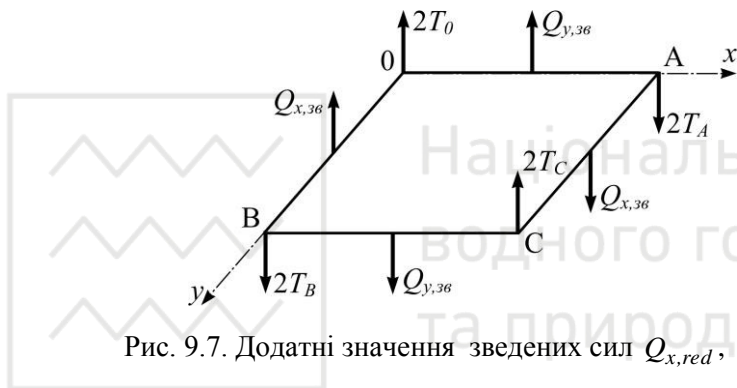


Рис. 9.7. Додатні значення зведених сил $Q_{x,red}$, $Q_{y,red}$

У співвідношеннях (9.33) і (9.34) враховано вирази Q_x і Q_y за формулами (9.25), а T – за формулою (9.23).

Під час зведення крутного моменту T і перерізувальних сил Q_x і Q_y , до одного силового чинника в кутових точках пластини виникають зосереджені сили, що дорівнюють сумі незрівноважених сил за модулем T з двох сторін пластини (рис. 9.7). На рис. 9.7 зображено додатні напрямки зведених сил $Q_{x,red}$, $Q_{y,red}$ і кутових сил $2T$: $2T_0$, $2T_A$, $2T_C$, $2T_B$.

Таким чином, для вільного краю BC (рис. 9.6), коли на ньому немає навантаження, слід записати такі межові умови:

При $y = b$ згинальний момент $M_y = 0$ і зведена перерізувальна сила

$$Q_{y,red} = 0. \quad (9.35)$$

9.6. Потенціальна енергія у випадку згину пластини

Згідно з прийнятими гіпотезами Кірхгофа для прямокутної пластини маємо: $\sigma_z = 0$ і $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$. Тому формула питомої потенціальної енергії в цьому

випадку має такий вигляд:

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}). \quad (9.36)$$

Підставляючи в залежність (9.36) вирази напружень за формулами (9.9) і вирази деформацій за формулами (9.7), дістанемо формулу для питомої потенціальної енергії виражену через функцію прогину $w = w(x, y)$:

$$W = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\}. \quad (9.37)$$

Інтегруючи вираз (9.37) за змінною z , вводячи позначення циліндричної жорсткості D за формулою (9.18), дістанемо таку залежність для повної потенціальної енергії U , що накопичується в пластині в процесі її згинання:

$$U = \frac{D}{2} \iint_{(S)} \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \quad (9.38)$$

де S – площа серединної поверхні пластини.

Для пластин довільного обрису в плані, жорстко защемлених на контурі, та для прямокутних пластин, шарнірно закріплених по всьому контуру, співвідношення (9.38) для потенціальної енергії набуває такої спрощеної форми:

$$U = \frac{D}{2} \iint_{(S)} (\nabla^2 w)^2 dx dy. \quad (9.39)$$

Таким чином, усі основні рівняння технічної теорії згину тонких жорстких пластин визначено. Для розрахунку прямокутних пластин існує кілька практичних методів, що так чи так використовують основні рівняння, наведені в цьому розділі.

9.7. Розрахунок еліптичної пластини оберненим методом

Еліптичну пластину можна розрахувати оберненим методом за формулами, виведеними для прямокутної пластини. Це означає, що, обравши функцію прогину $w = w(x, y)$, визначаємо потім, яким навантаженням і яким умовам закріплення пластини відповідає обрана функція. Розрахунок еліптичної пластини, таким чином, є одночасно й прикладом для аналогічного застосування технічної теорії згину прямокутних пластин.

З'ясуємо, в якій формі слід обрати функцію прогину для еліптичної пластини, що завантажена рівномірно розподіленим навантаженням. Оскільки рівняння контуру еліптичної пластини (рис. 9.8) має вигляд:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0, \quad (9.40)$$

то доцільно обрати функцію прогину в такій формі:

$$w = K \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 \right]^2, \quad (9.41)$$

де K – стала величина, що підлягає окремому знаходженню.

Щоб з'ясувати, чому дорівнює стала величина K , треба підставити функцію прогину (9.41) у рівняння Софі Жермен (9.19):

$$\frac{24K}{a^4} + \frac{16K}{a^2b^2} + \frac{24K}{b^4} = \frac{q}{D}$$

звідки:

$$K = \frac{q}{D \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2b^2} + \frac{24}{b^4} \right)}. \quad (9.42)$$

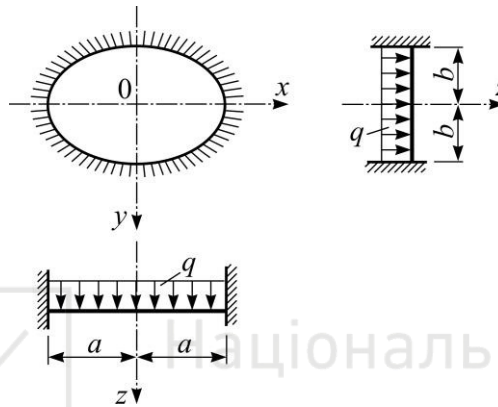


Рис. 9.8. Еліптична пластина з рівномірно розподіленим навантаженням

Тепер треба знайти, яким умовам на контурі відповідає обрана функція прогинів для еліптичної пластини. Як випливає з рівняння (9.41), при $x = a$ і $y = 0$, або $x = 0$ і $y = b$, а також для будь-якої іншої точки на контурі пластини маємо: $w = 0$. Якщо взяти похідні від функції прогинів за абсцисою x і за ординатою y , то дістанемо:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{4Kx}{a^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right);$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{4Ky}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (9.43)$$

Для будь-якої точки на контурі пластини похідні (9.43) також перетворюються в нуль. Це означає, що пластина жорстко защемлена по всьому контуру.

Підставивши вираз для сталої величини K за формулою (9.42) у вираз для прогину (9.41), запишемо функцію прогину серединної поверхні еліптичної пластини, що завантажена рівномірно розподіленим навантаженням по всій поверхні пластини інтенсивністю q (рис. 9.8):

$$w = \frac{q}{D \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2. \quad (9.44)$$

Максимальний прогин виникає в центрі пластини при $x = y = 0$:

$$w_{max} = \frac{q}{D \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)}. \quad (9.45)$$

Порівнюючи формули (9.42) і (9.45), робимо очевидний висновок, що стала величина K дорівнює прогину в центрі пластини.

Розглянемо поодинокий випадок для щойно отриманої формули (9.45) при $a = b = r$, де r – радіус круглої суцільної пластини. І тоді максимальний прогин жорстко защемленої круглої пластини, що завантажена рівномірно розподіленим навантаженням, дорівнюватиме:

$$w_{max} = \frac{qr^2}{64D}. \quad (9.46)$$

Нормальні та дотичні напруження, згиніві й крутні моменти, а також поперечні сили в перерізах еліптичної пластини визначають за відповідними формулами, виведеними для прямокутної пластини, а саме – за формулами: (9.9), (9.21) і (9.23).

Контрольні запитання та задачі.

1. Які гіпотези покладено в основу технічної теорії згину пластин? У розрахунках яких пластин (дуже тонких, тонких, середньої товщини товстих) практично застосовують ці гіпотези?
2. Що таке серединна поверхня і контур пластини?
3. Що називається циліндричною жорсткістю пластини?
4. Згину прямокутної пластини (рис. 9.9) відповідає така функція:

$$w = Kx^2(b^2 - y^2).$$

Установіть, як закріплено пластину по контуру?

5. Для прямокутної пластини (рис. 9.9) задано таку функцію прогинів: $w = Kxy(x-a)(y-b)$. З'ясуйте, чому дорівнює константа K ?

6. Для прямокутної пластини (рис. 9.9) визначте максимальний прогин, якщо відома його функція: $w = K(x-a)^2(y-b)^2$.

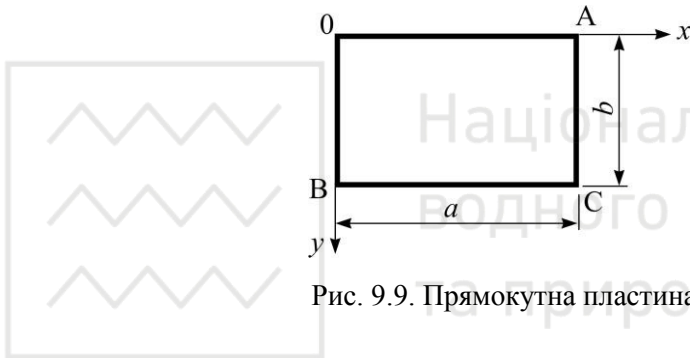


Рис. 9.9. Прямокутна пластина

РОЗДІЛ X ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД РІТЦА-ТИМОШЕНКА

10.1. Основні поняття варіаційного методу

Розглянемо, в чому полягає ідея варіаційного методу щодо розв'язування практичних задач.

Історія фізики, й зокрема механіки, свідчить про численні спроби пояснити все, що відбувається в навколишньому світі, за допомогою невеликої кількості універсальних законів і загальних принципів. Найбільш успішні й плідні спроби пов'язані з ідеєю, що явища, які ми спостерігаємо, мають деякі екстремальні властивості, а шукані загальні принципи виявляють варіаційний характер. Це, власне, означає, що в процесах, що реально відбуваються навколо нас, деякі величини досягають своєї мінімальної або максимальної величини.

Цікаво, хоча б коротко, простежити, як історично розвивалася ідея екстремальності у фізиці та в механіці. Ця ідея виникла давно. Ще Аристотель (384 – 322 рр. до н.е.) зазначав, що природа в усіх своїх проявах іде найлегшим шляхом, з найменшими затратами.

Перше виразне формулювання варіаційного принципу стосовно до фізичної проблеми (заломлення світла) дав 1662 року французький математик П'єр Ферма. У механіці це зробив 1744 року його співвітчизник П'єр Мопертю. Основи сучасного варіаційного числення заклав 1746 року Леонард Ойлер.

З'ясуємо, у чому полягає суть варіаційних методів розв'язування задач теорії пружності.

Варіаційні методи теорії пружності дають змогу звести проблему визначення напружено-деформованого стану до задачі відшукування мінімуму того чи того функціоналу. Саме на цьому принципі ґрунтуються різні методи розрахунку, за допомогою яких удається отримати наближені розв'язки задач, не звертаючись до прямого інтегрування основних диференціальних рівнянь теорії пружності. Зокрема, варіаційні методи зводять задачу розв'язання диференціального рівняння Софі Жермен (9.19) до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь.

Нагадаємо, що таке функціонал і які він має особливості порівняно з функцією.

Функціонал – це така скалярна величина Φ , яка сама залежить від вибору функції $y = f(x)$. У найпростішому випадку функціонал можна представити у вигляді інтеграла:

$$\Phi = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

де a і b визначають інтервал зміни аргументу x .

Порівнюючи функціонал $\Phi[F(x)]$ із функцією $f(x)$ можна зауважити такі особливості:

1. Функціонал $\Phi[F(x)]$ і функція $f(x)$ є величинами змінними. Функціонал Φ залежить від типу функції $F(x)$, а функція $f(x)$ залежить від значень аргументу x . Змінюючи тип функції $F(x)$, тобто варіюючи цю функцію, ми тим самим змінюємо значення функціонала Φ . Змінюючи значення незалежної змінної x , ми впливаємо на значення функції $f(x)$.

2. Відшукуючи екстремум функціонала, потрібно підібрати такий тип функції $F(x)$, коли функціонал Φ набуває максимального чи мінімального значення. Таке розв'язування належить до варіаційного числення, яке в нашому курсі в цілому не розглядаємо.

Відшукуючи екстремум функції, ми знаходимо тим самим таке значення аргументу x , який надає функції $f(x)$ максимум або мінімум. Таке розв'язування задачі належить до диференціального числення, його вивчають у курсах вищої математики.

3. У диференціальному численні диференціал функції df являє собою лінійну частину приросту функції відносно до приросту аргументу Δx .

У варіаційному численні варіація (зміна) функціонала $\delta\Phi$ являє собою лінійну частину функціонала відносно до варіації функції $\delta F(x)$.

4. Якщо функція f в якійсь точці досягає екстремуму, то її диференціал дорівнює там нулю ($df = 0$).

Аналогічно, якщо функціонал Φ досягає екстремуму, то його варіація тоді

дорівнює нулю ($\delta\Phi = 0$).

Треба підкреслити, що дії з варіаціями в статичних задачах подібні до дій із диференціалами.

Розглянемо далі, що таке принцип Ж.Л. Лагранжа і як його застосовують у механіці деформівного твердого тіла.

Принцип Лагранжа, обґрунтований ученим 1788 року, є одним із основних принципів у механіці деформівного твердого тіла. Варіаційне рівняння Лагранжа, включаючи в себе диференціальні рівняння рівноваги та умови на поверхні тіла, базується на принципі можливих (віртуальних) переміщень і має таку математичну форму запису:

$$\delta\Pi(u, v, w) = 0. \quad (10.1)$$

де Π – повна потенціальна енергія пружної системи (так званий повний енергетичний потенціал), яка складається в нашому випадку з двох частин:

$$\Pi = U - W. \quad (10.2)$$

Тут U – потенціальна енергія внутрішніх сил; W – енергія системи зовнішніх сил (об'ємних і поверхневих).

Для написання рівнянь рівноваги часто використовують властивість повної потенціальної енергії пружної системи Π набувати в стані рівноваги екстремальні значення, при цьому згідно з принципом Діріхле стійкому стану відповідає мінімум потенціальної енергії (див. схематичний рис. 10.1, а), нестійкому – максимум (рис. 10.1, б), а байдужому – стале або нульове її значення (рис. 10.1, в).

Із варіаційного рівняння Ж.Л. Лагранжа (10.1) випливає, що енергетичний потенціал має екстремум:

$$\Pi = \Pi_{\text{exs}}. \quad (10.3)$$

Якщо повна потенційна енергія системи виражається через деяку кількість

визначальних параметрів a_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\Pi = \Pi(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (10.4)$$

то згідно з рівністю (10.3) параметри a_i можна визначити з умов:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0. \quad (10.5)$$

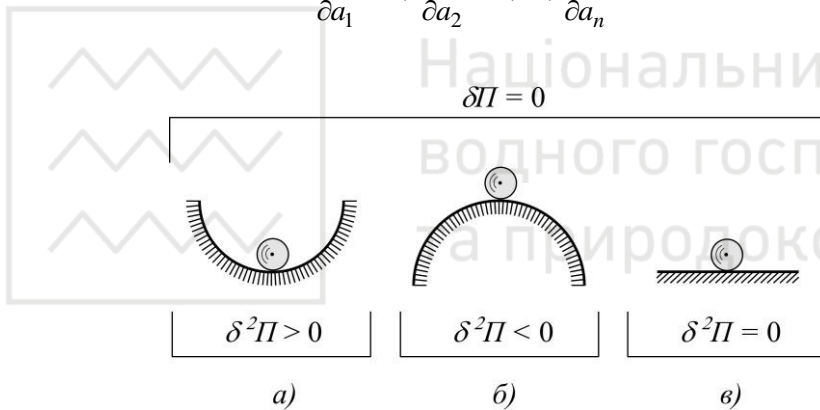


Рис. 10.1. Схема наявного стану потенціальної енергії:
а) стійкий стан; б) нестійкий стан; в) байдужий стан

Знайдені параметри a_1, a_2, \dots, a_n визначатимуть екстремальні значення функціонала Π від n змінних.

Покажемо, яким чином основне диференціальне рівняння прогину пластини (9.19) можна звести до системи лінійних алгебричних рівнянь. Для цього обираємо функцію прогинів у вигляді наближеного аналітичного виразу, що апроксимує шукану функцію деяким подвійним рядом зі скінченною кількістю членів:

$$w(x, y) \approx w_{mn}(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \psi_{kl}(x, y), \quad (10.6)$$

де a_{kl} – сталі параметри, що підлягають визначенню; ψ_{kl} – лінійні незалежні функції, що задовольняють межові умови задачі. Залежно від кількості членів ряду (10.6) розв'язок задачі можна дістати з будь-яким ступенем точності.

Сталі параметри a_{kl} обирають із умов, за яких функція (10.6) якомога точніше відобразатиме шукану функцію w .

Існує кілька методів відшукування сталих параметрів a_{kl} з яких тут буде розглянуто лише один, а саме – метод Рітца–Тимошенка.

10.2. Метод Рітца–Тимошенка

Метод Рітца–Тимошенка базується на принципі Ж.Л. Лагранжа. Цей метод дозволяє замінити задачу про інтегрування диференціального рівняння Софі Жермен (9.19) менш складною задачею про відшукування мінімуму повної потенціальної енергії. Така заміна можлива саме тому, що і диференціальне рівняння прогину пластини (9.19), і варіаційне рівняння Ж.Л. Лагранжа (10.1) є рівняннями рівноваги пружного тіла.

Порядок розв'язування задачі про прогин пластини за методом Рітца–Тимошенка маємо такий:

1. Обираємо наближений вираз функції прогинів $w(x, y)$ у формі подвійного ряду (10.6). При цьому обрані функції ψ_{kl} мають перш за все задовольняти геометричні межові умови. Але задля того, щоб обраний ряд збігався якнайшвидше, бажано задовольняти і статичні межові умови.

2. Обчислюємо наближені значення повної потенціальної енергії за формулою (10.2) де U – потенціальна енергія внутрішніх сил, для загального випадку прогину пластини відповідає формулі (9.38). Для поодиноких випадків, коли пластина довільного обрису в плані жорстко защемлена по контуру, а для прямокутної пластини, крім того, і при шарнірно обіпертому контурі, потенційну енергію U підраховують за формулою (9.39).

У формулі (10.2) робота зовнішніх сил W дорівнює:

$$W = \iint_S q(x, y)w(x, y)dx dy, \quad (10.7)$$

де $q(x, y)$ – інтенсивність зовнішніх сил, що згинають пластину; S – площа

серединної поверхні пластини.

3. Визначаємо сталі параметри a_{kl} , використовуючи залежності (10.5):

$$\frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial a_{kl}} = 0, \quad (10.8)$$

де $k = 1, 2, \dots, m$; $l = 1, 2, \dots, n$.

Визначивши параметри a_{kl} , підставляємо їх у функцію (10.6) і дістаємо, таким чином, наближений розв'язок задачі щодо згину пластини.

10.3. Приклад застосування методу Рітца-Тимошенка в разі згину балок

Для кращого уявлення щодо алгоритму методу Рітца-Тимошенка розглянемо спочатку найпростішу задачу про згин однопрогонової статично визначної балки.

У м о в а з а д а ч і. Розглянути згин шарнірно опертої однопрогонової балки завдовжки l сталої згинової жорсткості EI . Балку завантажено рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності $q = const$ (рис. 10.2).

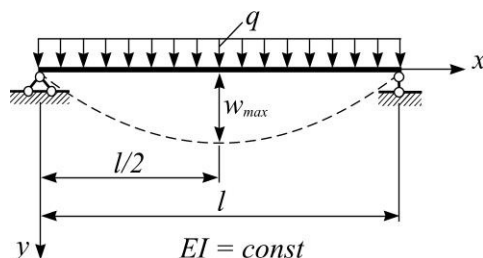


Рис. 10.2. Однопрогонова шарнірно оперта балка з навантаженням $q = const$

Т р е б а в и з н а ч и т и: максимальний прогин балки (стрілу прогину), використовуючи метод Рітца-Тимошенка, і порівняти здобуті результати з

відомим розв'язком опору матеріалів.

Розв'язання задачі.

1. Обираємо функцію прогинів у вигляді синусоїди, що апроксимує (наближає) в даному разі прогин w таким рядом:

$$w \approx w_m = \sum_{k=1}^m a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \quad (a)$$

Неважко пересвідчитися, що обрана функція прогинів задовольняє межові умови балки:

при $x=0$ і при $x=l$ маємо $w=0$ і $\frac{d^2w}{dx^2}=0$. (б)

Для розв'язку задачі візьмемо, як найпростіший варіант, лише один член ряду ($k=1$):

$$w \approx w_1 = a_1 \sin(\pi x / l). \quad (в)$$

2. Визначаємо потенціальну енергію пружної деформації балки U за формулою відомою з опору матеріалів:

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx, \quad (г)$$

де M – згинувий момент, EI – згинова жорсткість перерізу балки.

3. Оскільки з рівняння пружної лінії балки маємо:

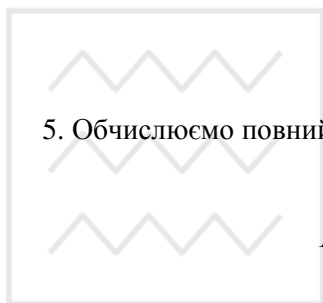
$$M \approx EI \frac{d^2w_1}{dx^2}, \quad (д)$$

то тоді потенційна енергія балки U дорівнює:

$$U \approx \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EI}{2} \frac{l}{2} a_1^2 \frac{\pi^4}{l^4} = \frac{EI a_1^2 \pi^4}{4l^3}. \quad (e)$$

4. Підраховуємо роботу зовнішніх сил W за формулою (10.7):

$$W = \int_0^l q w_1 dx = \frac{2qla_1}{\pi}. \quad (ж)$$



5. Обчислюємо повний енергетичний функціонал Π за формулою (10.2):

$$\Pi = U - W = \frac{EI a_1^2 \pi^4}{4l^3} - \frac{2qla_1}{\pi}. \quad (з)$$

6. Визначаємо сталий параметр a_1 за допомогою залежності (10.8):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = \frac{EI \pi^4 a_1}{2l^3} - \frac{2ql}{\pi} = 0, \quad (к)$$

звідки маємо:

$$a_1 = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} = 0,013073 \frac{ql^4}{EI}. \quad (л)$$

І тоді функція прогинів згідно з виразом (а) дорівнює:

$$w \approx w_1 = \frac{0,013073 ql^4}{EI} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (м)$$

а максимальний прогин, стріла прогину (при $x = l/2$), має такий вигляд:

$$w_{max} = a_1 = 0,013073 \frac{ql^4}{EI}.$$

(н)

Розв'язок опору матеріалів для стріли прогину w_{max}^0 розглянутої балки становить:

$$w_{max}^0 = \frac{5ql^4}{384EI} = 0,013021 \frac{ql^4}{EI}. \quad (н)$$

Зіставляючи наближений розв'язок (н) з розв'язком опору матеріалів (н), бачимо, що різниця становить лише 0,4%, оскільки

$$\Delta w\% = \frac{w_{max} - w_{max}^0}{w_{max}^0} \cdot 100\% = \frac{0,013073 - 0,013021}{0,013021} \cdot 100 = 0,4\%.$$

Таким чином, метод Рітца-Тимошенка дає наближені значення зверху порівняно з існуючим розв'язком опору матеріалів, до того ж із невеликим відхиленням від відомого результату. І це не зважаючи на те, що для функції прогинів v було взято лише один член ряду (а).

10.4. Приклад застосування методу Рітца-Тимошенка в разі згину прямокутної пластини

Умова задачі. Розглянути згин тонкої жорсткої квадратної пластини (рис. 10.3) від рівномірно розподіленого навантаження q . Вважати відомими: товщину пластини h , модуль пружності матеріалу E , коефіцієнт Пуассона ν .

Треба визначити: функцію прогинів $w(x, y)$ і стрілу прогину пластини – $max w$ – за методом Рітца-Тимошенка.

Розв'язання задачі.

1. Обираємо функцію прогинів у вигляді такого подвійного ряду:

$$w \approx w_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2 x^{2(k-1)} y^{2(l-1)}. \quad (a)$$

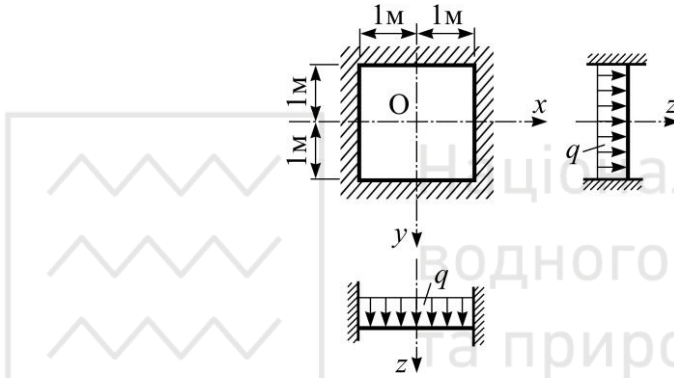


Рис. 10.3. Жорстко защемлена по контуру квадратна пластина з навантаженням $q = const$

Обрана функція прогинів (a) задовольняє кінематичні межові умови пластини:

$$\text{при } x = \pm 1 \quad w_{mn} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial w_{mn}}{\partial x} = 0;$$

$$\text{при } y = \pm 1 \quad w_{mn} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial w_{mn}}{\partial y} = 0. \quad (б)$$

Для розв'язку задачі візьмемо, як найпростіший варіант, лише один член ряду (a) при $m = 1, n = 1$:

$$w \approx w_{11} = a_{11} (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2. \quad (в)$$

2. Визначасмо повний енергетичний потенціал $\Pi = U - W$, де потенціальна енергія внутрішніх сил U згідно з формулою (9.39) дорівнює:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{D}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial^2 w_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{11}}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = \\
 &= \frac{D}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} 16a_{11}^2 \left[(3x^2 - 1)(y^2 - 1)^2 + (x^2 - 1)^2(3y^2 - 1) \right]^2 dx dy. \quad (z)
 \end{aligned}$$

Враховуючи, що парні функції:



$$\int_{-1}^{+1} x^{2n} dx = \int_{-1}^{+1} y^{2n} dy = \frac{2}{2n+1},$$

$$\int_{-1}^{+1} x^{2n-1} dx = \int_{-1}^{+1} y^{2n-1} dy = 0$$

із залежності (z) дістанемо:

$$U = \frac{294912}{11025} D a_{11}^2. \quad (d)$$

Потенціал зовнішніх сил W згідно з формулою (10.7) дорівнює:

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} q a_{11} (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2 dx dy = \\
 &= q a_{11} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^2 dx \int_{-1}^{+1} (y^2 - 1)^2 dy = \frac{256}{225} q a_{11}. \quad (e)
 \end{aligned}$$

Повний енергетичний потенціал Π з урахуванням залежностей (d) і (e) матиме такий вигляд:

$$\Pi = \frac{294912}{11025} D a_{11}^2 - \frac{256}{225} q a_{11}. \quad (ж)$$

3. Підраховуємо сталий параметр a_{11} за допомогою співвідношення (10.8):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{11}} = \frac{2 \cdot 294912}{11025} D a_{11} - \frac{256}{225} q = 0, \quad (u)$$

звідки визначаємо:

$$a_{11} = \frac{0,02127q}{D}. \quad (к)$$

У кінцевому результаті для наших вихідних даних функція прогинів w дорівнює:

$$w \approx w_{11} = 0,02127 \frac{q}{D} (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2. \quad (л)$$

При $x = y = 0$ маємо максимальні значення для прогину – стрілу прогину:

$$\max w_{11} = a_{11} = 0,02127 \frac{q}{D}. \quad (м)$$

При $\nu = 0.3$ знаходимо такі значення стріли прогину:

$$\max w_{11} = 0,2322 \frac{q}{Eh^3}. \quad (н)$$

Точні значення для нашої квадратної пластини (2×2) знаходимо в довідниках як такі:

$$\max w = 0,2208 \frac{q}{Eh^3}. \quad (п)$$

Зпівставляючи розв'язки (н) і (п), приходимо до висновку, що метод Рітца-Тимошенка дає наближення зверху з точністю до 5,16%, і це в тому

випадку, коли було взято лише один член ряду (а).

Контрольні запитання та задачі.

1. Як гадаєте, чому у функціоналі повної енергії $\Pi = U - W$ другий доданок має знак „мінус“?

2. Від яких чинників залежить точність розрахунків за методом Рітца-Тимошенка?

3. Чому дорівнює потенціал повної енергії для консольної балки, яку завантажено рівномірно розподіленим навантаженням з інтенсивністю q (рис. 10.4).

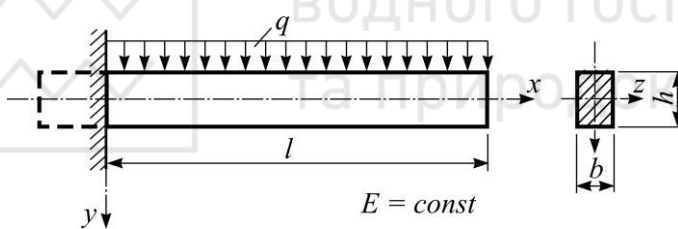


Рис. 10.4. Консольна балка з навантаженням

РОЗДІЛ XI

СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ ПЛАСТИН

11.1. Вступні зауваження

Почнемо з означень. Вони здебільшого подібні до відповідних означень стосовно стійкості стержнів.

Стійкість пластини. Це її здатність протистояти зовнішнім силам (рис. 11.1), що намагаються вивести пластину з початкового стану статичної рівноваги.

Критичне навантаження на пластину. Це щонайменше навантаження при перевищенні якого настає втрата стійкості пластини.

Втрата стійкості пластини. Це неможливість відновлення пластиною вихідної форми статичної рівноваги після зняття з неї критичного навантаження.

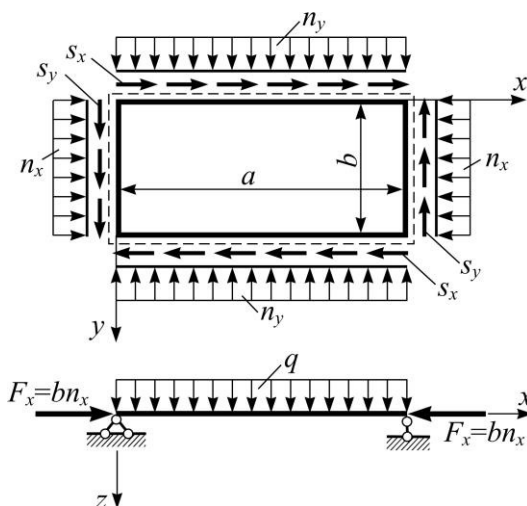


Рис. 11.1. Дія зовнішніх сил на прямокутну пластину: n_x , n_y – нормальних сил, s_x , s_y – зсувних сил

Нормальні сили пластини. Це умовна назва зовнішніх сил, що діють в серединній поверхні пластини. Нормальним (зовнішнім) силам n_x , n_y відповідають (чинять опір) *повздожні (внутрішні) сили* N_x , N_y . Нормальні

сили можуть бути як *стискаючими*, так і *розтягуючими*. Відповідні їм повздовжні сили мають назву *стискаючих* чи *розтягуючих* (сили стиску - розтягу).

При одночасній дії нормальних (n) і перерізувальних (q) сил, стискаючі сили збільшують прогин пластини, розтягуючі – навпаки зменшують його.

Коли на пластину діють лише нормальні (n) і зсувні (s) сили, то вони разом і поодиноці формують у ній плоский напружений стан.

Зсувні (зовнішні) сили s . Це сили що діють вздовж контуру пластини, їм відповідають *внутрішні сили* – зсувні або *дотичні s* (сили зсуву).

Розрізняють *стійку*, *байдужу* і *нестійку* рівновагу. Саме такі перехідні етапи зазнає пластина під час поступового збільшення нормальних стискаючих і зсувних навантажень. Ці стани пластини в зазначеній послідовності можна співвіднести з механічним положенням кульки на різних поверхнях (рис. 10.1, *а, в, б*).

Байдужому стану пластини (рис. 10.1, *в*) відповідає критичне навантаження. В цьому випадку незначне відхилення пластини від початкової форми рівноваги залишається незмінним навіть після усунення причини, що спричинила таке відхилення.

Якщо продовжувати навантажувати пластину далі, то вона переходить в наступну стадію рівноваги – стадію нестійкої рівноваги (рис. 10.1, *б*) та незабаром втрачає стійкість.

Визначення критичного навантаження на пластину здійснюють декількома методами. Найпоширеніші з них – статичний і енергетичний методи.

Статичний метод визначення критичного навантаження, що діє на пластину, полягає в розв'язуванні диференціального рівняння С.Жермен–Лагранжа (9.19) при одночасній дії перерізувальних, зсувних і нормальних сил.

Енергетичний метод ґрунтується на дослідженні стаціонарності (незмінності) робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на пластину. Коли робота зовнішніх сил, котрі діють у серединній площині пластини, набуває приросту ΔW , а потенціальна енергія, яку накопичує пластина в цей час, змінюється на значення ΔU , і при цьому виявляється, що $\Delta W < \Delta U$, то плоска форма рівноваги пластини буде стійкою (рис. 10.1, *а*). При $\Delta W > \Delta U$ початкова

форма рівноваги пластини буде нестійкою (рис. 10.1, б). І тільки при $\Delta W = \Delta U$ пластина досягає байдужої рівноваги (рис. 10.1, в), що відповідає її критичному навантаженню.

Слід підкреслити, що згадані методи визначення критичних навантажень передбачають розгляд лише ідеальних тонких пластин, що не мають жодних початкових відхилень від плоскої форми, жодних викривлень. Крім того припускають, що навантаження зовнішніми силами, поперечними, зсувними та нормальними, здійснюється в межах пружних і малих деформацій.

11.2. Статичний метод визначення критичного навантаження. Диференціальне рівняння згину прямокутної пластини при сумісній дії перерізувальних, зсувних і нормальних сил

Для визначення критичного навантаження статичним методом використовують диференціальне рівняння зігнутої серединної (пружної) поверхні пластини, що перебуває під дією перерізувальних, зсувних і нормальних сил. Це рівняння має такий вигляд

$$D\nabla^4 w = q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (11.1)$$

Тут D – циліндрична жорсткість пластини (9.18);

$\nabla^4 w = \nabla^2 \nabla^2 w$ – бігармонічний оператор (7.40) від функції угинів $w = w(x, y)$;

$q = q(x, y)$ – інтенсивність перерізувального (зовнішнього) розподіленого навантаження;

N_x, N_y – погонні повздовжні (внутрішні) сили відповідно на гранях з нормальними x і y елемента $dxdy$ пластини;

$S_x = S_y, S$ – погонні дотичні (внутрішні) сили, на вказаних вище, гранях елемента $dxdy$ прямокутної пластини.

Доведемо обґрунтування залежності (11.1). Для цього розглянемо дві стадії рівноваги елемента $dxdy$ серединної поверхні пластини в недеформівному та в

деформівному стані.

У недеформівному стані враховуватимемо сумісну дію перерізувальних, зсувних і нормальних сил, яким для елемента $dx dy$ серединної поверхні пластини відповідатимуть внутрішні сили (рис. 11.2) і (рис. 11.3).

а) Дослідження недеформівного стану пластини.

Від дії означених сил елемент $dx dy$ серединної поверхні пластини має бути в рівновазі, й тому можемо записати такі умови: три рівняння проєкцій на осі координат x, y, z і три рівняння моментів відносно цих самих осей. Усі ці шість рівнянь дорівнюють нулеві.

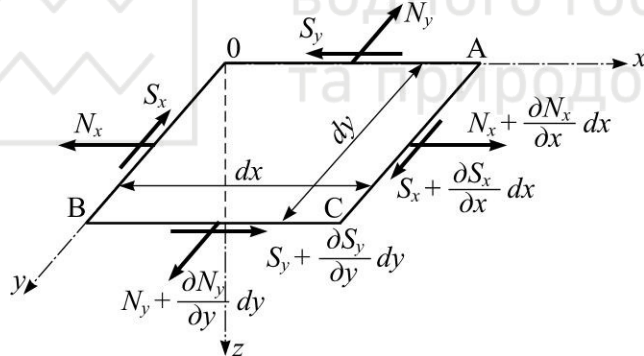


Рис. 11.2. Внутрішні погонні сили в прямокутному елементі пластини:

N_x, N_y – поздовжні, S_x, S_y – дотичні

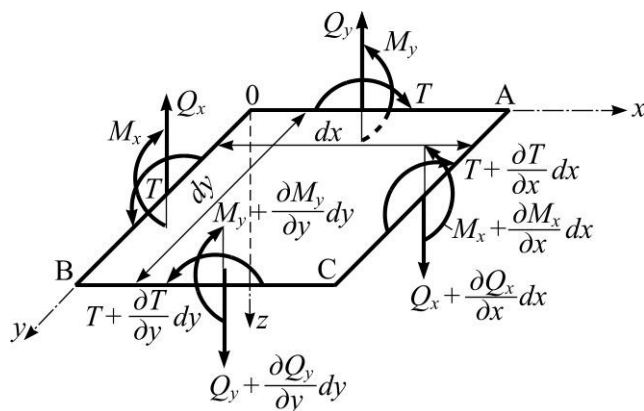


Рис. 11.3. Погонні зусилля в прямокутному елементі пластини: Q_x, Q_y –

поперечні сили, T – крутний момент, M_x, M_y – згиніві моменти

Рівняння проекції на вісь x усіх сил, що виникають в елементі $dxdy$ (рис. 11.2; 11.3):

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy - N_x dy + \left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial y} dy\right) dx - S_y dx = 0.$$

Звідси після деяких спрощень і ділення на $dxdy$ знайдемо:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = 0. \quad (a)$$

Аналогічний вираз матимемо з рівняння проекцій усіх сил на вісь y :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S_x}{\partial x} = 0. \quad (б)$$

Проектуючи сили на вісь z , дістанемо:

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx - Q_y dx + q dxdy = 0.$$

Це рівняння після спрощення і ділення на $dxdy$ набирає такого вигляду:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q, \quad \text{або} \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0. \quad (в)$$

У рівняння (а, б, в) входять такі внутрішні погонні величини:

N_x, N_y – поздовжні сили, що виникають на гранях прямокутного елемента $dxdy$;

S_x, S_y – дотичні сили на гранях указанного елемента (рис.11.2);

Q_x, Q_y – поперечні сили (рис. 11.3).

Запишемо тепер рівняння моментів усіх сил відносно осі z (рис.11.2):

$$\begin{aligned} & \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot \frac{dy}{2} - N_x dy \frac{dy}{2} - \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) dx \cdot \frac{dx}{2} + \\ & + N_y dx \frac{dx}{2} - \left(S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} dx \right) dx dy + \left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial y} dy \right) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Спростуючи цей вираз і нехтуючи величинами третього порядку мализни, запишемо закон парності дотичних зусиль, який випливає з рівняння моментів усіх сил відносно осі z :

$$S_x = S_y = S. \quad (z)$$

Запишемо далі рівняння моментів усіх сил відносно осі y (рис.11.3):

$$\begin{aligned} & \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy dx + Q_y dx \cdot \frac{dx}{2} - \\ & - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \cdot \frac{dx}{2} + \left(T + \frac{\partial T}{\partial y} dy \right) dx - T dx - q dx dy \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned}$$

Спростуючи це рівняння і нехтуючи при цьому величинами третього порядку мализни, матимемо:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = Q_x. \quad (d)$$

Аналогічно дістанемо з рівняння моментів усіх сил відносно осі x (рис.11.3):

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} = Q_y. \quad (e)$$

У формули (д) і (е) входять погонні зусилля: T – крутний момент, M_x, M_y – згиніві моменти (рис. 11.3).

Як впливає із здобутих рівнянь (а–е), три рівняння (а, б, з) встановлюють зв'язок між силами, що виникають у серединній площині пластини. Оскільки рівняння рівноваги (а), (б) і (з) не залежать від трьох інших рівнянь (в), (д) і (е), то цей факт дозволяє розглядати повздовжні (стискаючі та розтягуючі) і дотичні (зсувні) сили, що виникають у серединній площині пластини, окремо від решти сил, а потім для узагальнення додати їхні результати до результатів, здобутих від дії перерізувальних сил.

б) Дослідження деформівного стану пластини.

У деформівному стані розглянемо рівновагу елемента $dx dy$ серединної поверхні після випинання (втрати стійкості) пластини в результаті дії лише тих сил, що виникають в її серединній поверхні (рис. 11.4, а).

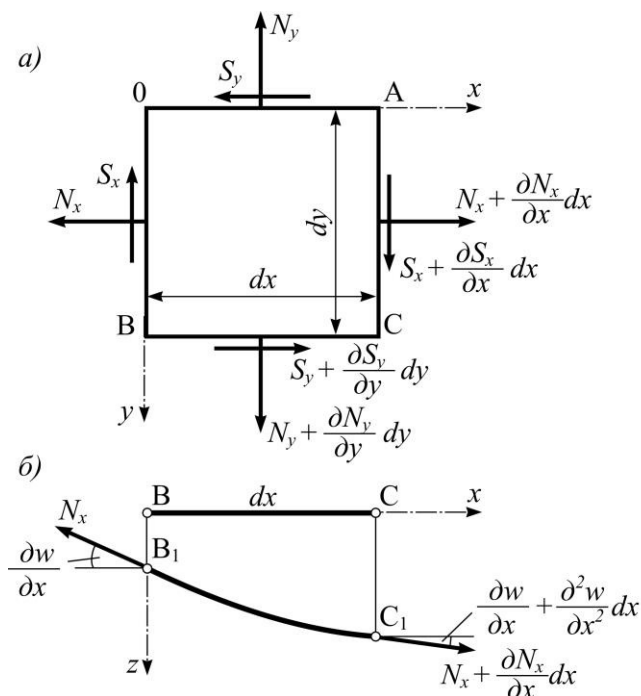


Рис. 11.4. Прямокутний елемент пластини: а) зусилля в серединній поверхні, б) напрямки зусиль у деформівному стані

Рис. 11.4, б ілюструє переріз елемента $dxdy$ площиною, що паралельна координатній площині xOz . У цій площині розташовані дві повздовжні сили:

$$N_x dy \quad \text{і} \quad \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy.$$

Кути нахилу цих сил відносно осі x відповідно дорівнюють:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{і} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right).$$

Зауважимо принагідно, що для малого кута косинус дорівнює одиниці, синус – його аргументу, тобто самому куту:

$$\cos\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \cos\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\right) \approx 1;$$

$$\sin\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \approx \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sin\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\right) \approx \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx.$$

Спроектуємо на вісь z повздовжні (розтягуючі – в даному разі) сили N_x , що розташовані в площині xOz :

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - N_x dy \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Спростуючи цей вираз і одночасно нехтуючи в ньому величини третього порядку мализни, матимемо:

$$\left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy. \quad (\text{ж})$$

Аналогічно знайдемо із запису проекції сили N_y на вісь z такий вираз:

$$\left(N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy. \quad (\text{и})$$

Після деформування пластини (після її випинання) елемент $dx dy$ набирає іншої форми (рис. 11.5). Напрямок дотичних сил S_x і S_y відносно координатних осей теж змінюється, що й відображено на рис. 11.5.

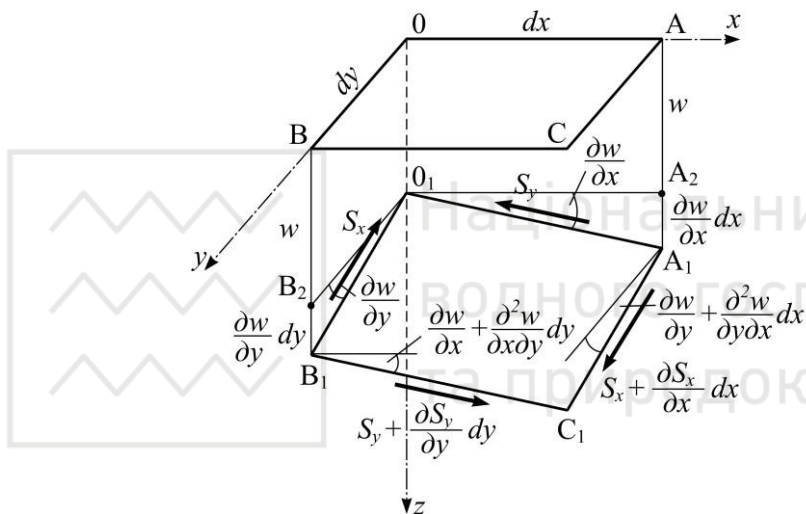


Рис. 11.5. Елемент пластини до і після її деформування

Проектуючи дотичні сили $S_x = S_y = S$ на вісь z , дістанемо:

$$\left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial y} dy \right) dx \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot dy \right) - S_y dx \frac{\partial w}{\partial x} + \left(S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} dx \right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right).$$

Спростуючи цей вираз і нехтуючи в ньому величинами третього порядку мализни, матимемо:

$$\left(2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy. \quad (\kappa)$$

Запишемо тепер суму виразів $(ж)$, (u) і (κ) , як суму проєкцій на вісь z усіх

сил, що виникають в елементі $dxdy$ серединної поверхні пластини. При цьому в здобутому співвідношенні згрупуємо члени так, щоби в ньому відокремити нульові доданки відповідно до формул (а) і (б). У такому разі маємо:

$$\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} dxdy + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial y} dxdy + \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dxdy.$$

Оскільки суми похідних в дужках першого і другого доданка тут згідно з формулами (а) і (б) дорівнюють нулеві, то вираз цей набуває спрощеної форми:

$$\left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dxdy. \quad (л)$$

Розділивши співвідношення (л) на $dxdy$ аналогічно тому, як це було зроблено для здобуття співвідношення (е) і додавши вираз (л) до рівняння (е), тобто підсумувавши проекції поперечних, повздовжніх і дотичних сил, дістанемо:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (м)$$

І нарешті, якщо підставити в рівняння (м) вирази конкретних сил Q_x і Q_y згідно з формулами (9.25), після деяких перетворень здобудемо рівняння (11.1), яке і треба було обґрунтувати.

11.3. Приклад застосування статичного методу визначення критичного навантаження для стиснутої пластини

Розглянемо стійкість прямокутної пластини (рис. 11.6), шарнірно опертої

чотирьома сторонами ($x=0, x=a, y=0, y=b$). Пластина зазнає тільки нормальних рівнорозподілених стискаючих сил $N_x = -n_x$ на коротких сторонах, довгі сторони вільні від навантаження. Перерізувальними силами пластину не завантажено ($q=0$).

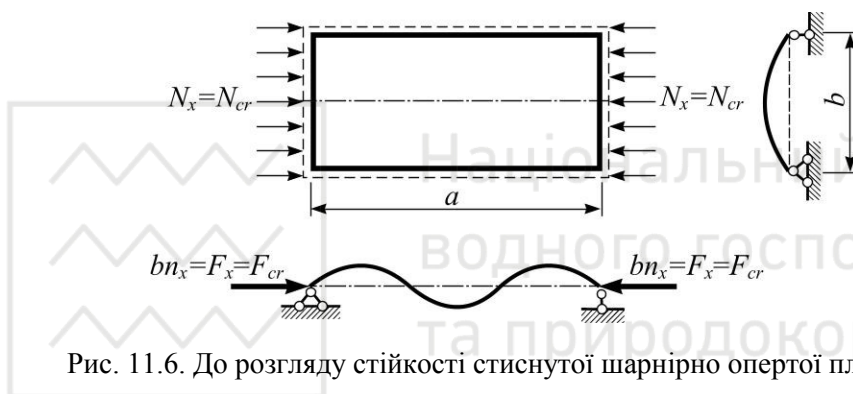


Рис. 11.6. До розгляду стійкості стиснутої шарнірно опертої пластини

Для знаходження критичного навантаження скористаємося рівнянням (11.1). Оскільки на пластину (рис. 11.6) не діють а ні нормальні сили вздовж осі y , а ні зсувні вздовж граней прямокутника, то прийемо для такого випадку: $N_y = 0, S = 0$ (рис. 11.1). І тоді рівняння (11.1) набирає такого вигляду:

$$D\nabla^4 w = -N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (a)$$

Припустимо, що випинання пластини відбувається за формулою, що відповідає такій функції прогинів:

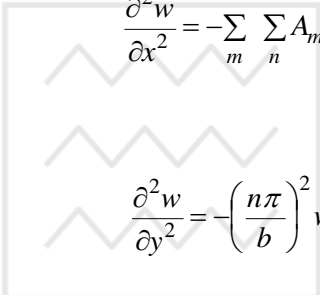
$$w \approx w_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (б)$$

тобто в напрямку осі x в пластині виникає m півхвиль, а в напрямку осі y – n півхвиль, при цьому m і n – цілі числа. Функція прогинів має задовольняти умови:

$$\text{при } x=0 \text{ і } x=a \quad w_{mn} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

$$\text{при } y=0 \text{ і } y=b \quad w_{mn} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Справді:



$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = -\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 w_{mn},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 w_{mn}. \quad (б)$$

Функція прогинів (б) має задовольняти також і вихідне диференціальне рівняння зігнутої поверхні пластини (а), для цього підрахуємо спочатку відповідні похідні від функції прогинів w_{mn} :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 w_{mn};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 w_{mn};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 w_{mn}. \quad (г)$$

Підставимо похідні (в) і (г) в рівняння (а) і прирівняємо його до нуля:

$$w_{mn} \pi^2 \left[D \pi^2 \left(\frac{m^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right) + N_x \left(\frac{m}{a} \right)^2 \right] = 0. \quad (д)$$

Рівняння (д) дорівнюватиме нулеві для будь-яких значень змінних x і y за однієї умови: коли вираз у квадратних дужках матиме нульове значення при від'ємному значенні N_x для стискаючих сил:

$$D\pi^2 \left(\frac{m^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right) - N_x \left(\frac{m}{a} \right)^2 = 0$$



$$\frac{D\pi^2}{a^2} \left(m^4 + 2m^2 n^2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{n^4 a^4}{b^4} \right) - N_x m^2 = 0.$$

$$N_x = \frac{D\pi^2}{a^2} \left(m^2 + 2n^2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{n^4 a^4}{m^2 b^4} \right). \quad (e)$$

Оскільки до пластини прикладено стискаючі сили (рис. 11.6), а рівняння (11.1) побудовано на основі розтягуючих сил, то критичне навантаження N_{cr} дорівнюватиме: $N_{cr} = -N_x$:

$$N_{cr} = N_x = \frac{D\pi^2}{a^2} \left(m^2 + 2n^2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{n^4 a^4}{m^2 b^4} \right) \quad (ж)$$

або в іншому запису, якщо прийняти $\beta = a/b$, матимемо:

$$N_{cr} = \frac{D\pi^2}{a^2} \left(m^2 + 2\beta^2 n^2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{\beta^4 n^4}{m^2} \right). \quad (и)$$

Із рівності (и) випливає, що критичне навантаження N_{cr} залежить від двох змінних: m і n . Для найменшого значення N_{cr} має бути $n=1$, що означає

створення в напрямку осі y лише однієї півхвилі та для цього випадку знаходимо:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m^2 + 2\beta^2 + \frac{\beta^4}{m^2} \right). \quad (\kappa)$$

Для визначення m – кількості півхвиль у напрямку осі x – треба обчислити похідну від N_{cr} за змінною m і прирівняти її до нуля:

$$\frac{dN_{cr}}{dm} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(2m - \frac{2\beta^4}{m^3} \right) = 0$$

звідки $m - \frac{\beta^4}{m^3} = 0$ і тоді значення m дорівнює:

$$m = \beta = \frac{a}{b}. \quad (\lambda)$$

Підставляючи значення m за формулою (λ) у рівняння (κ) , дістанемо критичне значення погонного стискаючого навантаження N_{cr} :

$$N_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{a^2} \beta^2 = \frac{4\pi^2 D}{b^2}. \quad (\mu)$$

Оскільки m – ціле додатне число, то згідно з (λ) критичне навантаження N_{cr} залежить від співвідношення сторін a/b . Відношення a/b визначає кількість півхвиль, що утворюються під час випинання пластини в напрямку осі x .

Наприклад: для квадратної пластини співвідношення $\beta = a/b = 1$, $m = 1$, і тоді в напрямку осі x утворюється лише одна півхвиля синусоїди (рис. 11.7). А вже для $\beta = a/b = 3$ маємо $m = 3$ і в цьому випадку під час випинання пластини утворюється три півхвилі синусоїди (рис. 11.6) і т.д.

Для підрахунку величин критичних навантажень у випадку нецілого числа β формулу (к) слід записати інакше:

$$N_{cr} = \frac{b^2}{b^2} \cdot \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m^2 + 2\beta^2 + \frac{\beta^4}{m^2} \right) = k \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (н)$$

де k – безрозмірний коефіцієнт, який дорівнює:

$$k = \frac{1}{\beta^2} \left(m^2 + 2\beta^2 + \frac{\beta^4}{m^2} \right). \quad (п)$$

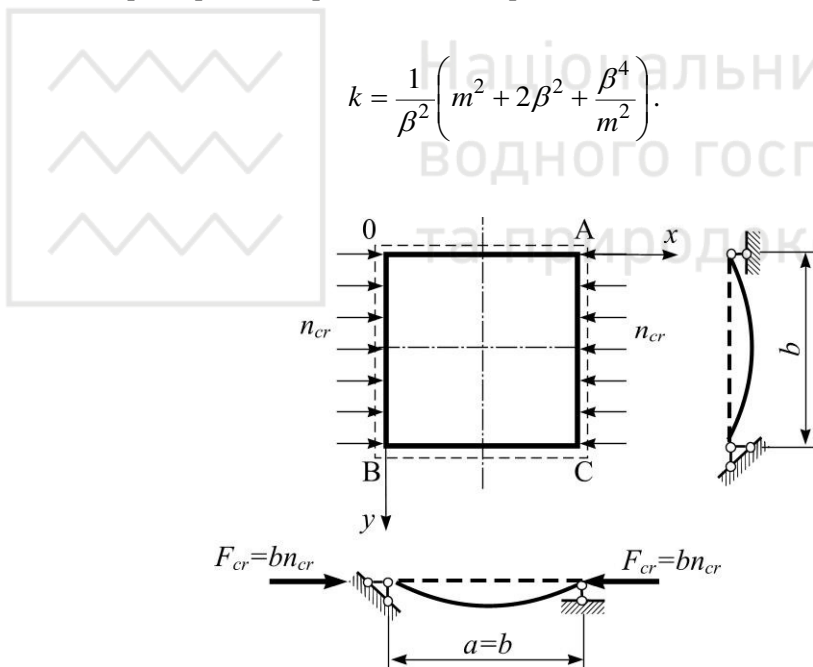


Рис. 11.7. Випинання (втрата стійкості) квадратної шарнірно опертої пластини

Для дослідження як змінюється значення коефіцієнта k залежно від співвідношення сторін пластини β для різних кількостей утворених півхвиль m , будують на підставі рівності (п) відповідні графіки (рис. 11.8, запозичено з роботи [43]).

При практичних розрахунках для пластин з співвідношенням сторін $\beta > 0,7$, у формулі (н) можна взяти, як це впливає з аналізу графіків на рис. 11.8, коефіцієнт $k = 4$ з максимальною похибкою приблизно 13% для $\beta = 0,7$ і $\beta = \sqrt{2}$ [43, с. 192].

Визначимо, як приклад, межу застосування формули (н) для сталевій

пластини із маловуглецевої сталі з найменшими значеннями механічних характеристик: модуль пружності $E = 200 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.24$ і границя пружності $\sigma_{el} = 250 \text{ МПа}$. Прийнято вважати погонну рівнорозподілену стискаючу силу $N_x = N_{cr}$ рівномірно розподіленою за товщиною пластини, і тому для критичних напружень σ_{cr} можна записати таку формулу:

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{h} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \leq \sigma_{el}, \quad (p)$$

де h – товщина пластини.

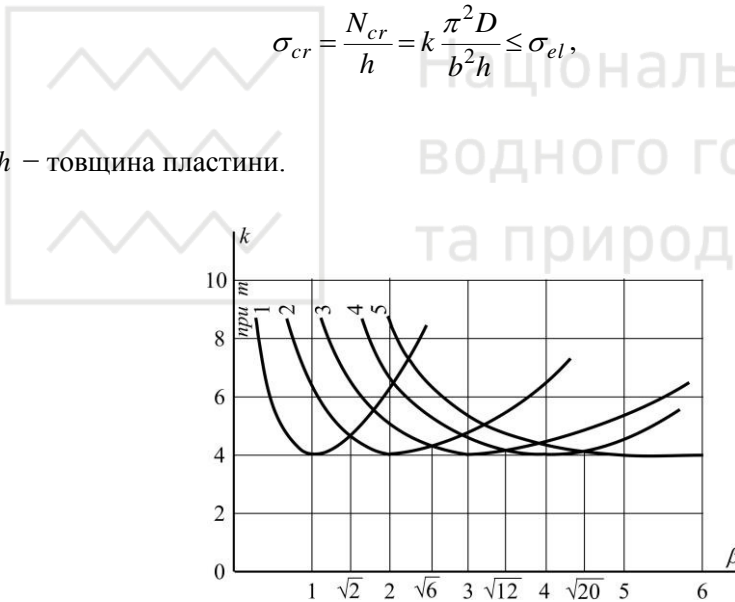


Рис. 11.8. Значення коефіцієнта k залежно від співвідношення β

Підставивши у формулу (p) значення циліндричної жорсткості D за формулою (9.18) і взявши коефіцієнт $k = 4$, після деяких перетворень дістанемо:

$$\sigma_{cr} = 4 \frac{\pi^2 E h^3}{12(1-\nu^2) b^2 h} = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \leq \sigma_{el}.$$

Звідси знаходимо критерій застосування формули (h) для обраного матеріалу:

$$\frac{h}{b} \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3\sigma_{el}}{E} (1-\nu^2)},$$

що для сталевій пластини з вище заданими значеннями механічних характеристик матимемо:

$$\frac{h}{b} \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3 \cdot 250 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^9} (1 - 0,24^2)} = 0,018 \approx 0,02.$$

Отже, для сталевих пластин формулу (н) можна застосувати для товщин $h \leq 0,02b$.

11.4. Енергетичний метод визначення критичних навантажень.

Робота зовнішніх сил щодо випинання (втрати стійкості) пластини

Для визначення критичного навантаження енергетичним методом треба знати, чому дорівнює потенціальна енергія U , яку накопичує пластинка, що деформується, і роботу W зовнішніх сил, прикладених до пластини.

Потенціальну енергію U визначають за формулами (9.38) і (9.39).

Роботу W погонних зовнішніх сил n_x, n_y, s , прикладених до серединної поверхні пластини визначають за формулою (11.2), при цьому $N_x = -n_x$, $N_y = -n_y$, $S = -s$

$$W = -\frac{1}{2} \iint_A \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 2S \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy, \quad (11.2)$$

де A – вся площа поверхні пластини.

Розглянемо обґрунтування рівності (11.2) в три етапи на прикладі відокремленого елемента $dx dy$ (рис. 11.9, а). Спочатку розглянемо роботи повздовжньої сили N_x , потім – сили N_y і в кінці – сили S . Таким чином

підраховуємо за методом суперпозиції роботу всіх повздовжніх і дотичних сил підчас випинання пластини.

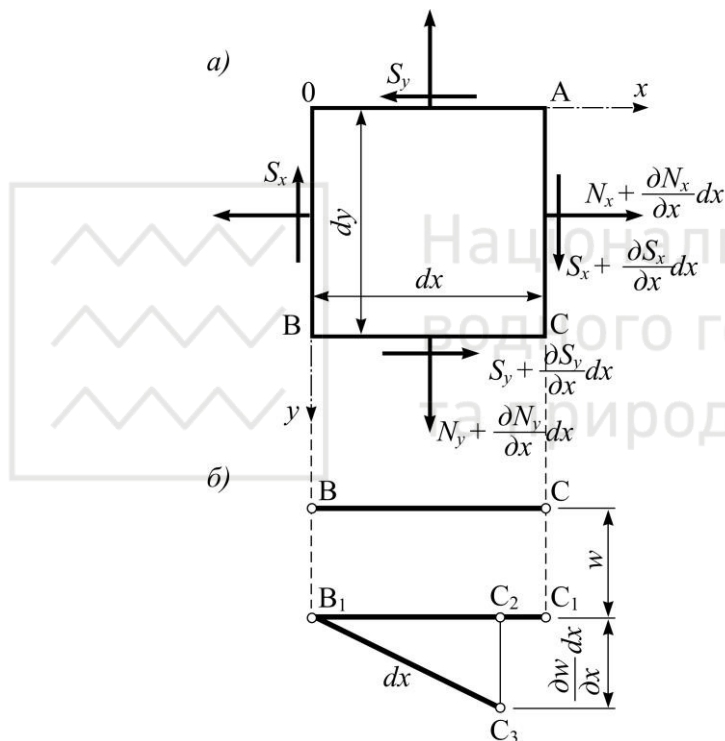


Рис. 11.9. До роботи повздовжніх сил N_x щодо випинання пластини: а) відокремлений елемент $dx dy$, б) зміна проєкцій ребра BC на вісь x

а) Робота погонних повздовжніх сил N_x , що діють у перерізі з нормаллю x на шляху, який дорівнює зміні відстані між точками їхнього прикладання B і C . Цей шлях дорівнює довжині відрізка C_1C_2 , тобто різниці між довжиною відрізка BC (dx) і проєкцією B_1C_2 відрізка B_1C_3 на напрямок осі x . Згідно з рис.11.9, б маємо:

$$B_1C_2 = \sqrt{(B_1C_3)^2 - (C_2C_3)^2}.$$

Підставляючи в цю рівність довжину відрізків $B_1C_3 = dx$ і $C_2C_3 = \frac{\partial w}{\partial x} dx$,

матимемо:

$$B_1C_2 = \sqrt{(dx)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2}$$

або в іншому записі:



$$B_1C_2 = dx \left[1 - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (a)$$

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

а саме, якщо обмежитися двома членами ряду:

$$B_1C_2 = dx \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] \quad (б)$$

Тоді пройдений шлях сили N_x (рис. 11.9, б) дорівнює:

$$C_1C_2 = BC - B_1C_2 = dx - dx \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \quad (в)$$

Якщо знехтувати приростом $\frac{\partial N_x}{\partial x} dx$, то роботу dA_x поздовжньої сили $N_x dy$ на відрізьку C_1C_2 згідно з формулою (в) запишемо у такому вигляді:

$$dA_x = -\frac{1}{2}N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy. \quad (z)$$

Знак мінус у рівності (z) свідчить про різнонапрявленість сили N_x і переміщення $C_1 C_2$.

б) Роботу погонних повздовжніх сил N_y , спрямованих уздовж осі y (рис. 11.9, а) можна підрахувати аналогічно роботі сили N_x (z):

$$dA_y = -\frac{1}{2}N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy. \quad (d)$$

в) Роботу дотичних сил $S dx$, $S dy$ визначаємо на кутових переміщеннях (рис. 11.5 і 11.10). Для цього розглянемо зміну положення взаємно перпендикулярних відрізків OA і OB (рис. 11.5), що лежать у серединній площині. Враховуємо при цьому лише вертикальні переміщення, горизонтальними - названих точок як величинами вищого порядку мализни нехтуємо.

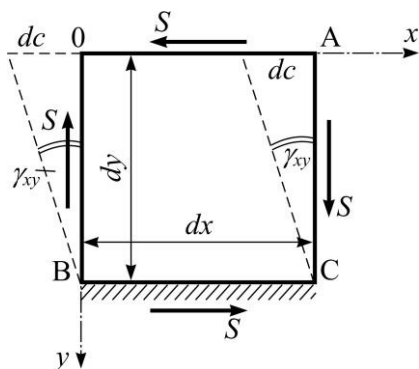


Рис. 11.10. До роботи дотичних сил на кутових переміщеннях

Початковий прямий кут AOB (рис. 11.5) змінюється і стає гострим кутом $A_1 O_1 B_1$ (рис. 11.5). І тоді значення кутової деформації γ_{xy} дорівнює:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \angle A_1 O_1 B_1.$$

Оскільки кут зсуву γ_{xy} має мале значення, то його можна замінити відповідним синусом:

$$\gamma_{xy} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle A_1 O_1 B_1\right) = \cos(\angle A_1 O_1 B_1). \quad (e)$$

Із курсу аналітичної геометрії відомо, що косинус кута між двома прямими лініями можна обчислити за допомогою такої залежності:

$$\cos(\angle A_1 O_1 B_1) = \ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2, \quad (ж)$$

де ℓ_1, m_1, n_1 – напрямні косинуси прямої $O_1 A_1$; а ℓ_2, m_2, n_2 – напрямні косинуси прямої $O_1 B_1$.

Обчислимо напрямні косинуси прямої $O_1 A_1$.

Із (рис. 11.5):

$$\ell_1 = \cos(\angle A_1 O_1 A_2) = \frac{O_1 A_2}{O_1 A_1},$$

де

$$O_1 A_1 = dx,$$

а відрізок

$$O_1 A_2 = dx \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Довжину відрізка $O_1 A_1$ обчислюємо за формулою (б) так, як і довжину відрізка $B_1 C_2$ (рис. 11.9, б).

У цьому випадку напрямний косинус ℓ_1 становить:

$$\ell_1 = \frac{dx \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]}{dx} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (u)$$

Напрячний косинус кута між напрямками прямої O_1A_1 і віссю y дорівнює:

$$m_1 = \cos \frac{\pi}{2} = 0. \quad (к)$$

Напрячний косинус кута між напрямками прямої O_1A_1 і віссю z відповідає такому значенню:

$$n_1 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \angle A_1 O_1 B_2 \right) = \sin(\angle A_1 O_1 B_2) = \frac{A_1 A_2}{O_1 A_1} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (л)$$

Напрячні косинуси прямої O_1B_1 визначаємо аналогічно напрямним косинусам прямої O_1A_1 згідно з формулами (u), (к) і (л):

$$\ell_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad (м)$$

$$m_2 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \angle B_1 O_1 B_2 \right) = \sin(\angle A_1 O_1 B_2) = \frac{O_1 B_2}{O_1 B_1} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (н)$$

$$n_2 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \angle B_1 O_1 B_2 \right) = \sin(\angle B_1 O_1 B_2) = \frac{B_1 B_2}{O_1 B_1} = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (п)$$

Підставляючи у рівність (ж) отримані значення напрямних косинусів для прямих O_1A_1 і O_1B_1 за формулами (u), (к), (л), (м), (н) і (п), запишемо:

$$\cos(\angle A_1 O_1 B_1) = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (р)$$

Підставляємо значення косинуса $\angle A_1O_1B_1$ за формулою (p) у вираз (e) і маємо значення кута зсуву:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (c)$$

Кут зсуву γ_{xy} додатній, а це означає, що в результаті деформування пластини нормальними силами початковий кут $\angle AOB$ на елементі $dxdy$ (рис. 11.10) зменшився.

На рис. 11.10 зображено деформування нескінченно малого елемента $dxdy$ під час випинання пластини. При цьому дотична сила Sdx здійснює роботу на шляху абсолютного зсуву dc :

$$dA_{xy} = Sdxdc, \quad (m)$$

де абсолютний зсув

$$dc = \gamma_{xy}dy. \quad (y)$$

Підставимо у рівність (m) вираз для dc за формулою (y) і вираз γ_{xy} за формулою (c) і тоді матимемо:

$$dA_{xy} = S \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} dxdy. \quad (\phi)$$

Використовуючи принцип суперпозиції, елементарну роботу всіх сил, що діють у серединній поверхні пластини, знайдемо як суму робіт окремих сил за формулами (z), (d), (ϕ):

$$dW = -\frac{1}{2}N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx dy - \frac{1}{2}N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dx dy + S \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} dx dy =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - 2S \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy.$$

Інтегруючи цей вираз за всією площею серединної поверхні A прямокутної пластини, дістанемо рівняння (11.2), що і треба було довести.

11.5. Приклад застосування енергетичного методу визначення критичного навантаження для стиснутої пластини

Визначаємо енергетичним методом критичне навантаження N_{cr} на прикладі, який був розглянутий в п. 11.3. для шарнірно опертої по контуру прямокутної пластини (рис. 11.6). Що була завантажена на коротких сторонах b погонними рівномірно розподіленими стискаючими силами $N_x = N_{cr}$. У цьому випадку в елементі $dx dy$ серединної поверхні пластини виникають тільки повздовжні сили $N_x = -n_x$. Згідно з визначальною умовою енергетичного методу байдужої рівноваги, а значить, і критичного стану пластини досягає, коли приріст робіт зовнішніх і внутрішніх сил відповідає рівності:

$$\Delta W = \Delta U. \quad (a)$$

Для обчислення цих робіт поставимо собі функцію прогинів зігнутої серединної поверхні пластини у вигляді функції [див. формулу (б) у п. 11.3]:

$$w \approx w_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (б)$$

Як уже було досліджено в п. 11.3, функція (б) задовольняє межові умови шарнірно опертої по всьому контуру пластини.

Слід зазначити, що рівняння (11.2) здобуто для розтягуючих зовнішніх сил. Для нашого випадку, коли діють стискаючі сили $N_x = -N_{cr}$ і $N_y = S = 0$ матимемо:

$$\Delta W = -\frac{1}{2} \iint_A \left[-N_{cr} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy = \frac{N_{cr}}{2} \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy. \quad (\text{в})$$

У рівність (в) підставляємо функцію прогинів (б) і записуємо:

$$\Delta W = \frac{A_{mn} N_{cr}}{2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \int_0^a \cos^2 \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dy. \quad (\text{з})$$

Після інтегрування рівності (з) маємо:

$$\Delta W = \frac{A_{mn} N_{cr} \pi^2 b m^2}{8a}. \quad (\text{д})$$

Оскільки пластина, що розглядається, шарнірно оперта по всьому контуру, то приріст потенціальної енергії ΔU слід підраховувати за спрощеною формулою (11.9):

$$\Delta U = \frac{D}{2} \iint_A \left(\nabla^2 w_{mn} \right)^2 dx dy. \quad (\text{е})$$

Оператор Лапласа для функції прогинів дає:

$$\begin{aligned} \nabla^2 w_{mn} &= \frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial y^2} = \\ &= -A_{mn} \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (\text{ж})$$

Підставляючи $\nabla^2 w_{mn}$ за формулою (ж) в рівність (е), після деяких

перетворень матимемо:

$$\Delta U = \frac{A_{mn} D \pi^4}{2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \int_0^a \sin^2 \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dy. \quad (u)$$

Після інтегрування правої частини рівності (u) здобудемо такий приріст потенціальної енергії пластини ΔU , що накопичується в ній:

$$\Delta U = \frac{A_{mn} D \pi^4 ab}{8} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (\kappa)$$

Використовуючи енергетичний критерій стійкості (a) і здобуті вирази ΔU і ΔW за формулами (d) і (κ), знайдемо:

$$\frac{A_{mn} N_{cr} \pi^2 b m^2}{8a} = \frac{A_{mn} D \pi^4 ab}{8} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2.$$

Звідки, після відповідного спрощення, матимемо вирази погонного критичного рівномірно розподіленого навантаження N_{cr} для стиснутої пластини (рис. 11.6):

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (л)$$

Якщо у правій частині рівності (л) піднести до квадрату вираз у дужках і винести за дужки $1/a^4$, а в середину дужок внести $1/m^2$, то тоді матимемо вже відому рівність [див. рівність (ж) в п. 11.3]:

$$N_{cr} = \frac{D \pi^2}{a^2} \left(m^2 + 2n^2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{n^4}{m^2} \frac{a^4}{b^4} \right). \quad (м)$$

Таким чином, здобута енергетичним методом рівність (m) у даному випадку повністю збігається з рівністю (m) п. 11.3, яку здобуто статичним методом.

Подальший аналіз залежності (m) в цілому відповідає проведеному розв'язку аналогічної задачі в п. 11.3.

Контрольні запитання та задачі.

1. Що таке стійкість стиснутої пластини?
2. Що треба розуміти під критичним навантаженням для стиснутої пластини?
3. У чому полягає суть статичного методу визначення критичного навантаження для стиснутої пластини?
4. А в чому суть енергетичного методу визначення критичного навантаження для стиснутої пластини?
5. Чому дорівнює найменше значення критичного навантаження p_{cr} для випадку шарнірно опертої пластини (рис. 11.6), якщо відомо, що її лінійні розміри в плані $a=3\text{м}$, $b=1\text{м}$, а товщина пластини $h=0,15\text{м}$, модуль пружності $E=200\text{ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,3$?

РОЗДІЛ XII

ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ

12.1. Вступ

Коли виникає доцільність переходу від декартових координат до полярних? Під час розв'язування задач теорії пружності можна досягти значних спрощень, якщо вдало обрати відповідну систему координат. Очевидно, завжди доцільно користуватися полярними координатами для циліндричних тіл, для товстостінних труб, для круглих і кільцевих пластин. Взагалі для тіл, що концентрично обмежені поверхнями колового циліндра та площинами, що радіально розходяться від спільної осі (так звані колові паралелепіпеди, див. рис.12.1).

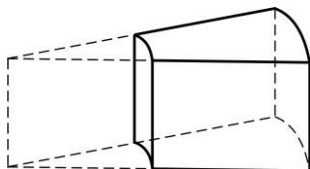


Рис. 12.1. Коловий паралелепіпед

12.2. Основні рівняння плоскої задачі теорії пружності в полярних координатах

Розглянемо, який вигляд мають статичні рівняння плоскої задачі в полярних координатах. З цією метою виріжемо з тіла нескінченно малий коловий паралелепіпед із розмірами: $BC = DA = dr$, $OB = OA = r$, $AB = rd\theta$, $CD = (r + dr)d\theta$ – і прикладемо по його гранях напруження, що виникають там (рис. 12.2): σ_r – радіальні і σ_θ – колові нормальні та $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ – дотичні.

Проектуючи сили, що виникли у коловому паралелепіпеді на його гранях, на напрямок радіуса r і перпендикулярний до нього напрямок s , дістанемо такі

рівняння рівноваги (R і S – складові об'ємної сили):

$$\begin{aligned} \sum F_r = 0: \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0; \\ \sum F_s = 0: \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + S = 0. \end{aligned} \quad (12.1)$$

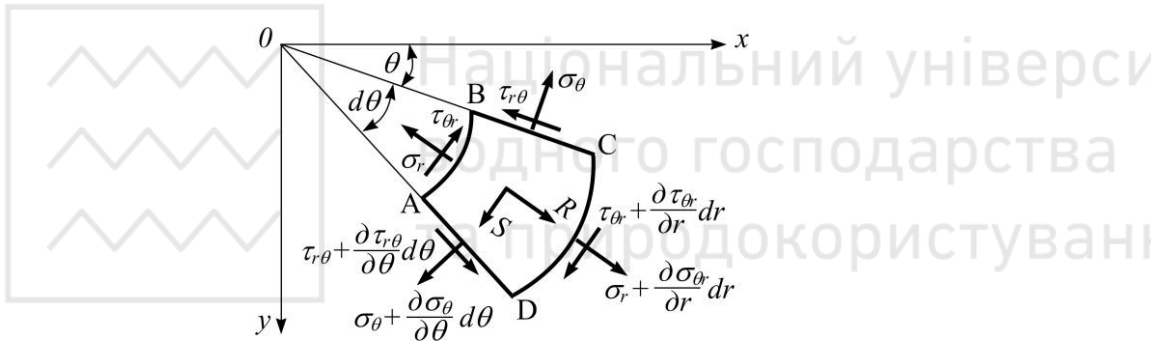


Рис. 12.2. Напруження σ , τ і об'ємні сили R , S в елементі колового паралелепіпеда

Умови на поверхні тіла (R_v і S_v – складові зовнішніх сил) під час розрізання його (рис. 12.3, а) на елементарні колові паралелепіпеди з остачею у вигляді трикутної призми ABC (рис. 12.3, б) набирають у полярних координатах вигляду:

$$\begin{aligned} R_v = \sigma_r \cos(v, r) + \tau_{r\theta} \cos(v, s), \\ S_v = \sigma_\theta \cos(v, s) + \tau_{\theta r} \cos(v, r). \end{aligned} \quad (12.2)$$

Розглянемо далі, який вигляд мають геометричні рівняння в полярних координатах.

Переміщення вздовж радіуса (в напрямку r) і перпендикулярно до нього (в напрямку s) позначають відповідно малими літерами u і v . У цьому разі рівняння Коші (залежності між деформаціями та переміщеннями) записують таким чином:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r};$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{r\partial\theta} + \frac{u}{r};$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (12.3)$$

Тут ε_r – радіальні і ε_θ – колові лінійні деформації, $\gamma_{r\theta}$ – кутові деформації.

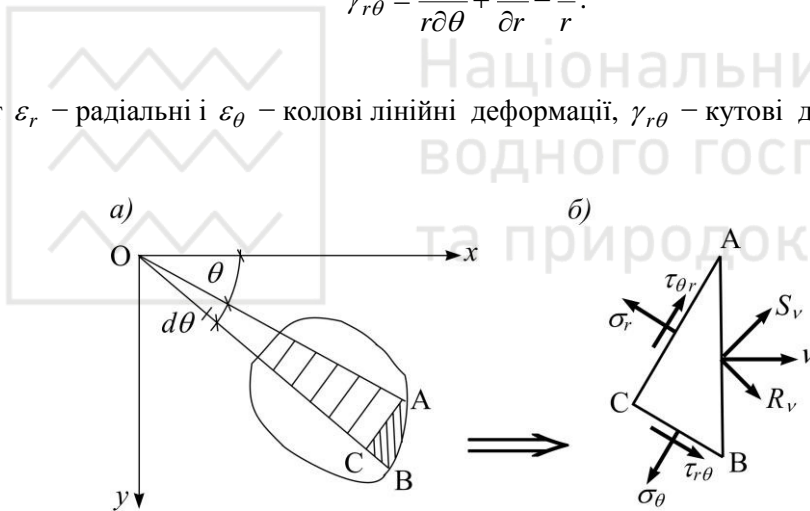


Рис. 12.3. До визначення умов на поверхні циліндричного тіла:
а) загальний вигляд розрізання тіла; б) периферійна трикутна призма ABC

У скороченому запису рівняння нерозривності деформацій в полярних координатах має вигляд

$$\nabla_r^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0, \quad (12.4)$$

оскільки згідно з першим інваріантом напруженого стану:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta. \quad (12.5)$$

Диференціальний оператор ∇_r^2 (лапласіан) у полярних координатах має форму:

$$\nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2}. \quad (12.6)$$

Таким чином, рівняння нерозривності деформацій набирає вигляду:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (12.7)$$

Закон Гука в полярних координатах перетворюється в такі вирази:

а) для плоского напруженого стану –

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta),$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r),$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{r\theta}; \quad (12.8)$$

б) для плоскої деформації –

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_1}(\sigma_r - \nu_1\sigma_\theta),$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_1}(\sigma_\theta - \nu_1\sigma_r),$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu_1)}{E_1}\tau_{r\theta}, \quad (12.9)$$

де константи E_1 і ν_1 відповідають формулам (7.30)

Нормальні й дотичні напруження через введену функцію напружень φ

мають вигляд:

$$\sigma_r = \frac{\partial \varphi}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{r^2 \partial \theta^2},$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2},$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{r \partial \theta} \right). \quad (12.10)$$

Рівняння нерозривності деформацій (бігармонічне рівняння) набуває в цьому разі такої форми:

$$\nabla_r^2 \nabla_r^2 \varphi = 0, \quad (12.11)$$

де гармонічний оператор (лапласіан) ∇_r^2 має вигляд (12.6).

12.3. Вісесиметрична задача

Задачу теорії пружності в полярних координатах вважають вісесиметричною (полярно-симетричною), коли тіло має вісну (полярну) симетрію й одночасно вісну симетрію має його навантаження. У цьому разі напруження, переміщення й деформації є функцією лише одної змінної r (від кута θ названі чинники не залежать).

Вісесиметричний напружений стан визначається лише однією незалежною змінною r , і всі рівняння плоскої задачі в полярних координатах для частинних похідних стають звичайними диференціальними рівняннями. У цьому разі переміщення v , деформація $\gamma_{r\theta}$ і дотичні напруження $\tau_{r\theta}$ дорівнюють нулю:

$$v = 0, \gamma_{r\theta} = 0, \tau_{r\theta} = 0.$$

Усі залежності плоскої задачі в полярних координатах значно спрощуються і набувають вигляду:

а) рівняння рівноваги –

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \quad (12.12)$$

б) формули Коші –



$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du}{dr}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}; \end{aligned} \quad (12.13)$$

в) рівняння нерозривності деформацій –

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{rdr} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad (12.14)$$

це саме рівняння записане через функцію напружень –

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{rdr} \right) \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{rdr} \right) = 0; \quad (12.15)$$

г) зв'язок напружень із функцією φ –

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{d\varphi}{rdr}, \\ \sigma_\theta &= \frac{d^2\varphi}{dr^2}. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Якщо продиференціювати рівняння (12.15), то знайдемо розгорнуту форму рівняння нерозривності деформацій в полярних координатах через функцію напружень φ :

$$\frac{d^4\varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (12.17)$$

Це є рівняння Ейлера, яке має такий розв'язок:

$$\varphi = C_1 r^2 + C_2 \ln r + C_3 r^2 \ln r + C_4, \quad (12.18)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні константи інтегрування.

Підставляючи φ за виразом (12.18) у формули (12.16), дістаємо нормальні радіальні (σ_r) і колові (σ_θ) напруження для плоскої задачі в полярних координатах:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2C_1 + \frac{C_2}{r^2} + C_3(2\ln r + 1), \\ \sigma_\theta &= 2C_1 - \frac{C_2}{r^2} + C_3(2\ln r + 3). \end{aligned} \quad (12.19)$$

12.3.1. Задача Ламе

Як приклад можна навести для розгляду вісесиметричної задачі задачу Ламе (1852 р.) і задачу Х.С.Головина (1881 р.).

Задача Ламе стосується питань напруженого стану в довгому порожнистому циліндрі (у товстостінній трубі), що перебуває під тиском рівномірно розподіленого внутрішнього (q_1) і зовнішнього (q_2) навантажень (рис.12.4).

Довільні сталі величини в рівняннях (12.19) мають бути визначені з межових

умов:

при $r = a$: $\sigma_r(a) = -q_1$;

при $r = b$: $\sigma_r(b) = -q_2$. (12.20)

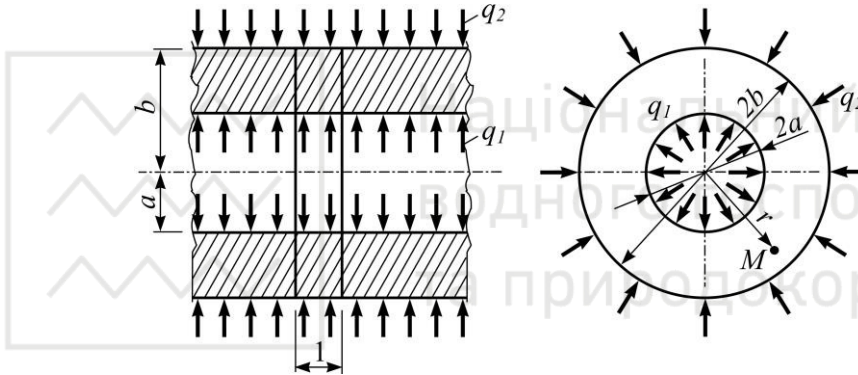


Рис. 12.4. Навантаження товстостінної труби зовні і зсередини

При цьому слід вважати $C_3 = 0$, щоб під час необмеженого зростання радіуса b нормальні напруження $\sigma_r(b)$ не перетворювалася в нескінченність. Із умов (12.20) і рівнянь (12.19) маємо:

$$\begin{aligned} q_1 &= -\left(2C_1 + \frac{C_2}{a^2}\right), \\ q_2 &= -\left(2C_1 + \frac{C_2}{b^2}\right). \end{aligned} \tag{12.21}$$

Визначивши з рівнянь (12.21) довільні константи C_1 і C_2 , за допомогою формул (12.19) знайдемо напруження σ_r і σ_θ :

$$\sigma_{r,\theta} = \frac{q_1 a^2 - q_2 b^2}{b^2 - a^2} \pm \frac{a^2 b^2 (q_2 - q_1)}{r^2 (b^2 - a^2)}, \tag{12.22}$$

де перед другим доданком знак „плюс” відповідає напруженню σ_r , а знак „мінус” – напруженню σ_θ .

12.3.2. Задача Х. С. Головина

Задача Х.С. Головина стосується напруженого стану в кривому стержні прямокутного перерізу одиничної товщини (рис. 12.5). Виходить, що напружений стан кривого стержня не залежить від кута θ , оскільки в усіх радіальних перерізах згинувий момент M однаковий.

Щоб розв'язати цю задачу, треба визначити три довільні константи C_1 , C_2 і C_3 у формулах (12.19). Перші два розв'язувальні рівняння дістанемо, задовольняючи межові умови на криволінійних поверхнях стержня: $\sigma_r(a) = 0$ і $\sigma_r(b) = 0$. Згідно з першою формулою (12.19) знаходимо:

$$2C_1 + \frac{C_2}{a^2} + C_3(2\ln a + 1) = 0,$$

$$2C_1 + \frac{C_2}{b^2} + C_3(2\ln b + 1) = 0. \quad (12.23)$$

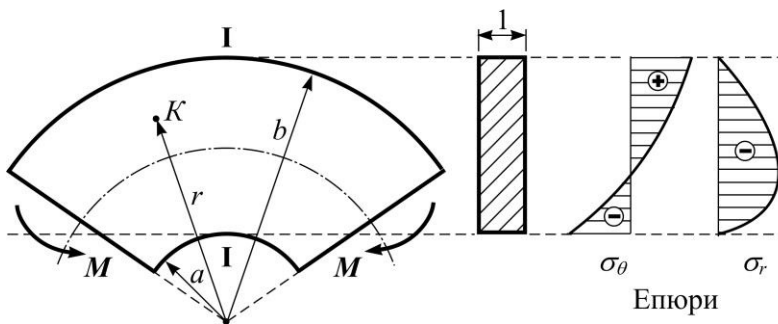


Рис. 12.5. Напружений стан кривого прямокутного стержня

Третє рівняння для визначення довільних констант візьмемо з умов на торці, де коллові напруження σ_θ зводяться до згинувого моменту M :

$$\int_a^b \sigma_{\theta} r dr = \int_a^b \frac{d^2 \varphi}{dr^2} r dr = M. \quad (12.24)$$

Із рівності (12.24) після підстановки туди функції φ за формулою (12.18) дістанемо:

$$(C_1 + C_2)(b^2 - a^2) - C_2 \ln \frac{b}{a} + C_3(b^2 \ln b - a^2 \ln a) = M. \quad (12.25)$$

Із спільного розгляду рівнянь (12.23) і (12.25) маємо:

$$C_1 = \frac{M}{k} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)],$$

$$C_2 = \frac{4M}{k} a^2 b^2 \ln \frac{b}{a},$$

$$C_3 = \frac{2M}{k} (b^2 - a^2), \quad (12.26)$$

де

$$k = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2. \quad (12.27)$$

Підставляючи знайдені константи C_1 , C_2 і C_3 у формули (12.19), остаточно дістаємо:

$$\sigma_r = \frac{4M}{k} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} - a^2 \ln \frac{r}{a} \right),$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{4M}{k} \left(b^2 - a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} - a^2 \ln \frac{r}{a} \right). \quad (12.28)$$

Порівнюючи формули теорії пружності (12.28) з відповідними формулами опору матеріалів, зазначасмо, що в останніх невраховані напруження за товщиною стержня ($\sigma_r = 0$).

Характер епюр для напружень σ_r і σ_{θ} за формулами (12.28) зображено на рис. 12.5.

12.4. Задача Фламана. Зосереджена сила, що прикладена до межі пружної півплощини

Пружна півплощина – це пружне середовище одиничної товщини, що зверху обмежено площиною, а ліворуч, праворуч і знизу простягається необмежено (рис. 12.6, а).

З іншого погляду, пружну півплощину можна уявити як поодинокий випадок нескінченного клина одиничної товщини з кутом розхилу $2\alpha = \pi$ (рис. 12.6, б).

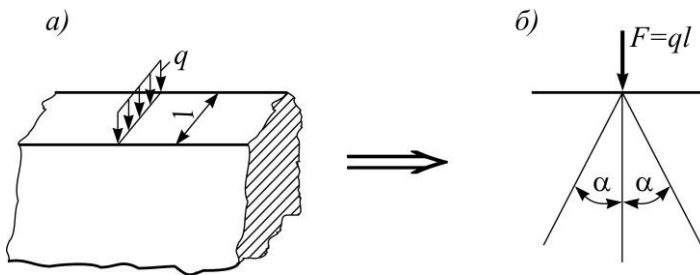


Рис. 12.6. Пружна півплощина (а) і її схема (б)

Задача Фламана полягає в тому, щоб дослідити напружений стан від дії зосередженої сили, прикладеної до межі пружної півплощини (рис. 12.6, б). Цю задачу вперше розв'язав французький вчений А.Е.Фламан в 1892 році.

Задачу Фламана використовують для визначення напружень у ґрунтах і навантажень на підземні споруди: тунелі, підпірні стінки тощо (рис. 12.7).

Її розв'язують за допомогою функції напружень:

$$\varphi = Kr\theta \sin \theta, \quad (12.29)$$

де K – константа, що треба знайти.

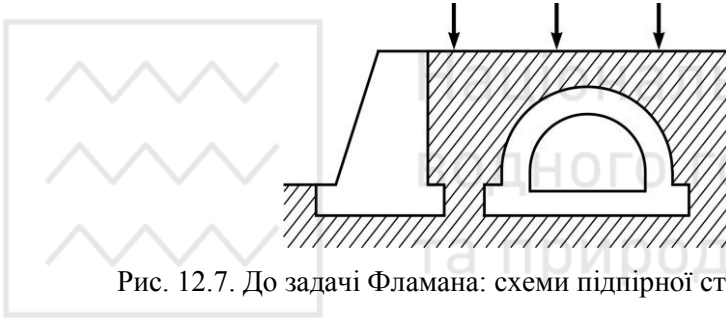


Рис. 12.7. До задачі Фламана: схеми підпірної стінки, тунелю

Функція напружень (12.29) задовольняє рівняння нерозривності деформацій (12.11). Згідно з формулами (12.10) нормальні радіальні (σ_r) і коллові (σ_θ), а також дотичні ($\tau_{r\theta}$) напруження дорівнюватимуть:

$$\sigma_r = \frac{2K \cos \theta}{r},$$

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0. \quad (12.30)$$

Константу K визначаємо з розгляду рівноваги півкола з довільним радіусом r (рис. 12.8). Проектуючи всі сили на вісь x , знаходимо:

$$F + 2 \int_0^{\pi/2} \sigma_r r \cos \theta d\theta = 0$$

звідки

$$K = -2 \frac{F}{\pi}$$

і тоді остаточно маємо для радіального нормального напруження:

$$\sigma_r = -\frac{2F \cos \theta}{\pi r} . \quad (12.31)$$

В інженерній практиці для розрахунків підземних споруд треба знати розподіл напружень у глибині ґрунту по горизонтальному та вертикальному перерізах. Для цього маємо перейти від напружень у полярній системі координат до напружень у декартовій системі координат xOy (рис. 12.8). І тоді для довільної точки матимемо такі нормальні й дотичні напруження:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2F \cos^3 \theta}{\pi r} , \\ \sigma_y &= -\frac{2F \cos \theta \sin^2 \theta}{\pi r} , \\ \tau_{xy} &= -\frac{2F \cos^2 \theta \sin \theta}{\pi r} . \end{aligned} \quad (12.32)$$

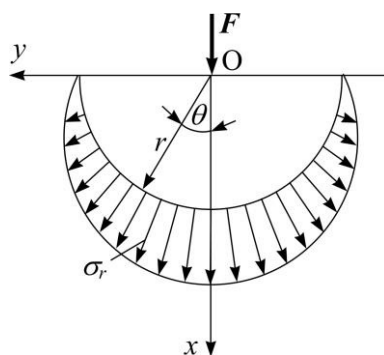


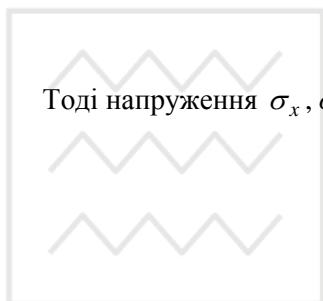
Рис. 12.8. Розподіл радіальних нормальних напружень σ_r по поверхні півкола радіуса r

У формулах (12.32) полярні координати можна замінити декартовими координатами, скориставшись залежностями:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$



Тоді напруження σ_x , σ_y і τ_{xy} у декартових координатах можна записати так:

$$\sigma_x = -\frac{2Fx^3}{\pi(x^2 + y^2)^2},$$

$$\sigma_y = -\frac{2Fxy^3}{\pi(x^2 + y^2)^2},$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2Fx^2y}{\pi(x^2 + y^2)^2}.$$

12.4.1. Кола Буссінеска

Побудуємо на вертикальній осі Ox коло діаметром $OA = d$ (рис. 12.9). Оскільки кут OMA спирається на діаметр OA , то він дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Тоді $r = d \cos \theta$.

Підставляючи вираз для r у формулу (12.31), дістаємо:

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi d}.$$

Таким чином, бачимо, що в усіх точках проведеного кола (так званого кола

Буссінеска) радіальні нормальні напруження σ_r однакові, крім точки O , де σ_r наближається до нескінченності. Таку інтерпретацію радіальних напружень у пружній півплощині, яку завантажено зосередженою силою F , уперше дав французький дослідник Ж.В. Буссінеск в 1885 році.



Рис. 12.9. До визначення радіального нормального напруження σ_r у довільній точці M кола Буссінеска

Кола Буссінеска (рис. 12.10) використовують, зокрема, під час досліджування напружень оптичними методами.

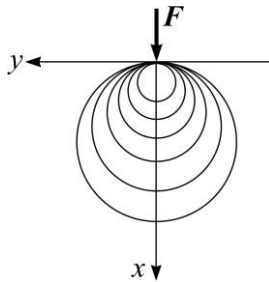


Рис. 12.10. Кола Буссінеска

12.5. Дія розподіленого навантаження, прикладеного до межі пружної півплощини

Розв'язок Фламана для прикладеної до пружної півплощини зосередженої сили можна поширити на випадок прикладеного будь-якого розподіленого

навантаження. Але для цього треба розподілене навантаження $q = q(\theta)$ подати як суму елементарних сил $dF = qdy$ (див. рис. 12.11, а).

Для визначення напружень у довільній точці пружної півплощини від будь-якого розподіленого навантаження слід розглянути елементарний відрізок AB (рис. 12.11, б) і вважати, що на нього діє з огляду його малюнки рівномірно розподілене навантаження q . Тоді маємо:

$$dF = qdy = qrd\theta / \cos\theta, \quad (12.33)$$

тому що $dy = AB = BC / \cos\theta$, а відрізок $BC = rd\theta$.

У цьому випадку, на підставі формули (12.31), враховуючи вираз (12.33), матимемо для елементарного приросту радіального напруження такий вираз:

$$d\sigma_r = -\frac{2dF \cos\theta}{\pi} = \frac{2qd\theta}{\pi}. \quad (12.34)$$

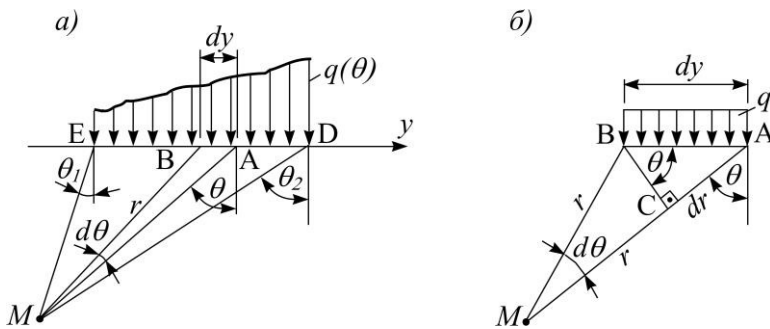


Рис. 12.11. Дія розподіленого навантаження $q(\theta)$ на півплощину (а) і на елементарний відрізок AB (б)

З урахуванням формул (12.32) і залежності (12.34) елементарні прирости нормальних і дотичних напружень дорівнюватимуть:

$$d\sigma_x = -\frac{2q \cos^2 \theta d\theta}{\pi},$$

$$d\sigma_y = -\frac{2q \sin^2 \theta d\theta}{\pi},$$

$$d\tau_{xy} = -\frac{2q \sin \theta \cos \theta d\theta}{\pi} = -\frac{q \sin 2\theta d\theta}{\pi}. \quad (12.35)$$

Навантаження $q = q(\theta)$ розподілене вздовж осі y від точки E до точки D і кут θ змінюється в цих межах від θ_1 до θ_2 (рис. 12.11, *a*). Тоді, підсумовуючи прирости напружень від кожної елементарної сили за формулами (12.35), дістанемо нормальні й дотичні напруження в довільній точці M від заданого розподіленого навантаження:

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \cos^2 \theta d\theta,$$

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \sin^2 \theta d\theta,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \sin 2\theta d\theta. \quad (12.36)$$

Від рівномірно розподіленого навантаження, коли $q = \text{const}$, нормальні й дотичні напруження в довільній точці M можна знайти, проінтегрувавши співвідношення (12.36):

$$\sigma_x = -\frac{q}{2\pi} [2(\theta_2 - \theta_1) + (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)],$$

$$\sigma_y = -\frac{q}{2\pi} [2(\theta_2 - \theta_1) - (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)],$$

$$\tau_{xy} = \frac{q}{2\pi} (\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1). \quad (12.37)$$

Додатне значення кута θ (рис. 12.11) відповідає повороту проти ходу стрілки годинника. У виразах $(\theta_2 - \theta_1)$ перших двох формул (12.37) кути θ беруть у радіанах.

Контрольні запитання та задачі

1. Яку задачу теорії пружності називають вісесиметричною?
2. Чому дорівнює поздовжня сила N у поперечних перерізах кривого стержня під час згинання його зосередженими моментами (рис. 12.5)? Доведіть.
3. Сталевий циліндр, зовнішній діаметр якого $2b=35,2$ см і товщина стінок $b-a=5$ см (рис. 12.4), зазнає внутрішнього тиску $q_1=244$ МПа. Підрахуйте значення найбільших розтягуючих і стискаючих напружень. Вважайте циліндр без ден.
4. Для попередньої задачі 3 визначте еквівалентні напруження за третьою і четвертою теоріями міцності та зіставте результати з границею пружності матеріалу $\sigma_{el}=600$ МПа.
5. Сталевий циліндр без ден (задача 3) зазнає зовнішнього тиску $q_2=200$ МПа. Побудуйте епюри розподілу нормальних напружень σ_r і σ_θ .
6. Сталевий циліндр без ден (задача 3) зазнає ззовні та зсередини однакового тиску $q_1=q_2$. Побудуйте епюри σ_r і σ_θ .

РОЗДІЛ XIII

ЗГИН ТОНКИХ ЖОРСТКИХ КРУГЛИХ І КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН

13.1. Основні рівняння вісесиметричного (полярно-симетричного) згину круглої пластини

Розрахунок круглих і кільцевих пластин доцільно провадити в полярній системі координат.

З'ясуємо, який вигляд набирає рівняння Софі Жермен (9.19) у полярній системі координат. Від рівняння $D\nabla^4 w = q$ (9.17) або $D\nabla^2 \nabla^2 w = q(x, y)$ можна перейти, завдяки формулі (12.6), до запису рівняння Софі Жермен у розгорнутому вигляді:

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = q(r, \theta). \quad (13.1)$$

Диференціальне рівняння пружної поверхні круглої (кільцевої) пластини (13.1) передбачає навантаження пластини $q = q(r, \theta)$, яке одночасно залежить від двох змінних: полярного радіуса r і його кута обертання θ . Проте тут розгляд круглих пластин (суцільних і кільцевих) обмежимо випадком, коли навантаження, що діє на пластину, має вісну (осьову) симетрію. Тобто коли задане навантаження симетричне відносно вертикальної осі пластини і, таким чином, усі її силові й геометричні чинники залежать лише від однієї змінної – від полярного радіуса r . Такий згин круглої пластини називають вісесиметричним (полярно-симетричним).

У цьому разі для вісесиметричного згину вигляд рівняння пружної поверхні круглої пластини має інший характер, ніж вираз (13.1). Якщо навантаження, що діє на пластину, залежить лише від полярного радіуса r : $q = q(r)$, то тоді рівняння (13.1) у частинних похідних стає звичайним диференціальним рівнянням:

$$D\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}\right) = q(r).$$

Звідки, продиференціювавши, знаходимо:

$$D\left(\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr}\right) = q(r). \quad (13.2)$$

Рівняння (13.2), неоднорідне диференціальне рівняння четвертого порядку, має загальний розв'язок

$$w = w_1 + w_2, \quad (13.3)$$

де w_1 – загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{d^4 w_1}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_1}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw_1}{dr} = 0,$$

яке відповідає рівнянню (13.2). У цьому разі загальний розв'язок w_1 дорівнює:

$$w_1 = C_1 r^2 + C_2 \ln r + C_3 r^2 \ln r + C_4, \quad (13.4)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні константи інтегрування.

У рівнянні (13.3) w_2 – поодинокий розв'язок неоднорідного рівняння (13.2).

Щоб дістати загальний вигляд розв'язку w_2 , рівняння (13.2) слід представити таким чином:

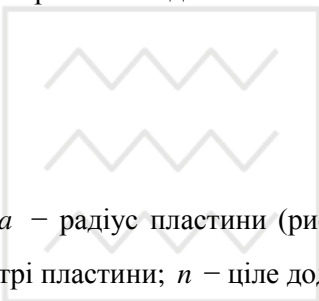
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_2}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D}. \quad (13.5)$$

Послідовно інтегруючи чотири рази рівняння (13.5), дістанемо загальний вигляд поодинокого розв'язку:

$$w_2 = \frac{1}{D} \int_0^r \frac{1}{r} \left\{ \int_0^r r \left[\int_0^r \frac{1}{r} \left(\int_0^r q(r) r dr \right) dr \right] dr \right\} dr. \quad (13.6)$$

Кінцевий результат інтегрування залежності (13.6) запишемо для двох випадків.

Перший випадок:



$$q(r) = q_0 \left(\frac{r}{a} \right)^n,$$

де a – радіус пластини (рис. 13.1 і 13.2); q_0 – інтенсивність навантаження в центрі пластини; n – ціле додатне число. Тоді:

$$w_2 = \frac{q_0 r^{n+4}}{(n+4)^2 (n+2)^2 a^n D}. \quad (13.7)$$

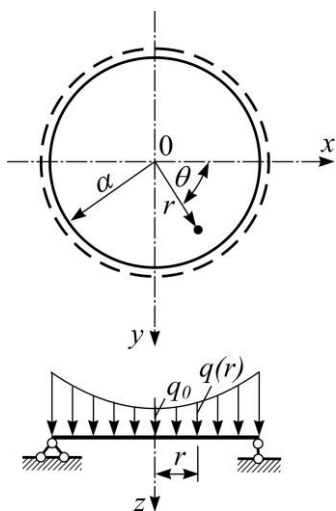


Рис. 13.1. Шарнірно оперта пластинка

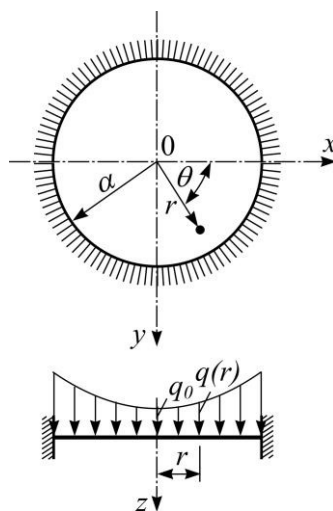


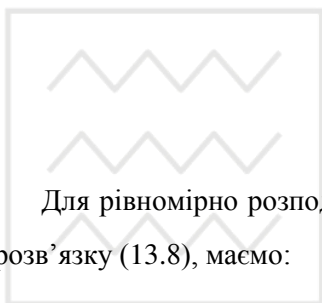
Рис. 13.2. Жорстко защемлена пластинка

Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного диференціального

рівняння пружної лінії для навантаження, що діє на пластину за степеневим законом, має такий вигляд:

$$w = \frac{q_0 r^{n+4}}{(n+4)^2 (n+2)^2 a^n D} + C_1 r^2 + C_2 \ln r + C_3 r^2 \ln r + C_4. \quad (13.8)$$

Другий випадок: $q(r) = q = const$, і тоді



Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$w_2 = \frac{q r^4}{64D}. \quad (13.9)$$

Для рівномірно розподіленого навантаження $q = const$, як окремий випадок розв'язку (13.8), маємо:

$$w = \frac{q r^4}{64D} + C_1 r^2 + C_2 \ln r + C_3 r^2 \ln r + C_4. \quad (13.10)$$

13.2. Зусилля та напруження в перерізах круглих пластин при вісесиметричному навантаженні

Використовуючи формули (9.21–9.23), для радіальних (M_r) і колових (M_θ) згинових моментів та для крутного моменту (T) в полярних координатах матимемо для круглих пластин такі співвідношення:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad (13.11)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right). \quad (13.12)$$

При цьому $T = 0$.

На основі формул (9.25) після необхідних перетворень для радіальної поперечної сили Q_{rz} маємо:

$$Q_{rz} = Q_r = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right). \quad (13.13)$$

При цьому $Q_{\theta z} = Q_{\theta} = 0$.

Підставивши вирази функції прогинів за формулою (13.8) у співвідношення (13.11–13.13), дістанемо в розгорнутому вигляді вирази для зусиль M_r , M_{θ} і Q_r :

$$M_r = -D \left\{ 2(1+\nu)C_1 - \frac{(1-\nu)C_2}{r^2} + [3+\nu+2(1+\nu)\ln r]C_3 \right\} - \frac{(n+3+\nu)q_0 r^{n+2}}{(n+4)(n+2)^2 a^n}, \quad (13.14)$$

$$M_{\theta} = -D \left\{ 2(1+\nu)C_1 + \frac{(1-\nu)C_2}{r^2} + [1+3\nu+2(1+\nu)\ln r]C_3 \right\} - \frac{(1+n\nu+3\nu)q_0 r^{n+2}}{(n+4)(n+2)^2 a^n}, \quad (13.15)$$

$$Q_r = -\frac{4DC_3}{r} - \frac{(n^2+6n+8)q_0 r^{n+1}}{(n+4)(n+2)^2 a^n}. \quad (13.16)$$

Слід зазначити, що рівняння (13.14 – 13.16) при $n \geq 0$ придатні для всіх круглих пластин: і для суцільних, і для кільцевих. На рис.13.3 для елементарного колового паралелепіпеду зображено зусилля, що виникають у круглих пластинах у разі їхнього вісесиметричного згинання.

Сталі інтегрування C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , що входять у загальний розв'язок для прогинів w (13.8) неоднорідного диференціального рівняння пружної поверхні, а також у рівняння (13.14–13.16), визначають із умов на контурі пластини. При цьому для суцільної круглої пластини в рівняннях (13.8) і (13.10) треба

визначити $C_2 = C_3 = 0$, щоб у центрі пластини, при $r=0$, не виникало нескінчених значень для прогинів w і для кутів повороту:

$$\theta = \frac{dw}{dr}$$

для зусиль: M_r , M_θ і Q_r .

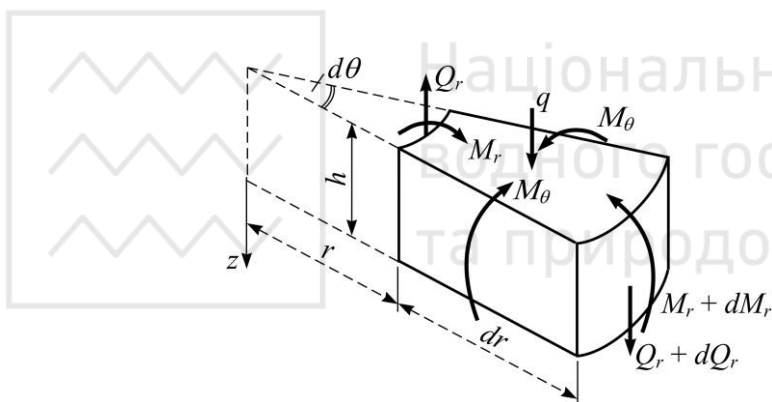


Рис. 13.3. Елементарний коловий паралелепіпед з зусиллями

Решту сталих (C_1 і C_4) визначають із умов закріплення пластини. Так, для жорстко защемленої на контурі суцільної круглої пластини маємо при $r=a$ (рис. 13.2): $w=0$ і $\frac{dw}{dr}=0$. При цьому перша похідна за змінною r від виразу (13.8) має такий вигляд:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{q_0 r^{n+3}}{(n+4)(n+2)^2 a^n D} + 2C_1 r + \frac{C_2}{r} + C_3 r(1+2\ln r). \quad (13.17)$$

Тоді згідно з рівностями (13.8) і (13.17) для довільних сталих величин C_1 і C_4 дістанемо такі вирази (при $C_2 = C_3 = 0$):

$$C_4 = \frac{q_0 a^4}{2(n+4)^2(n+2)D},$$

$$C_1 = -\frac{q_0 a^2}{2(n+4)(n+2)^2 D} = -\frac{(n+4)C_4}{(n+2)a^2}. \quad (13.18)$$

При цьому $C_4 = w_0$, де w_0 – прогин у центрі пластини.

Для шарнірно закріпленої на контурі круглої суцільної пластини (рис. 13.1) умови на контурі, на якому немає моментного навантаження ($m_r = 0$ де m_r – рівномірно розподілене по контуру пластини моментне навантаження), маємо: при $r = a$ прогин $w = 0$ і радіальний згинальний момент $M_r = 0$.

Тоді, використовуючи рівняння (13.8) і (13.14), для сталих інтегрування C_1 і C_4 матимемо:

$$C_4 = \frac{q_0 a^4 (n+5+\nu)}{2(n+4)^2 (n+2)(1+\nu)D},$$

$$C_1 = -\frac{(n+3+\nu)(n+4)C_4}{(n+5+\nu)(n+2)a^2}. \quad (13.19)$$

Тут також прогин у центрі пластини $w_0 = C_4$.

Нормальні напруження в круглій пластині згідно з формулами (9.26) і (9.28) дорівнюють:

радіальні нормальні напруження –

$$\sigma_r = \frac{12M_r z}{h^3}, \quad (13.20)$$

колові нормальні напруження –

$$\sigma_\theta = \frac{12M_\theta z}{h^3}. \quad (13.21)$$

Максимальні напруження дорівнюють:

$$\max \sigma_r = 6 \frac{M_r}{h^2}, \quad (13.22)$$

$$\max \sigma_\theta = 6 \frac{M_\theta}{h^2}. \quad (13.23)$$

Максимальні дотичні напруження порівняно з нормальними є незначними і за модулем дорівнюють:

$$\max \tau_{rz} = \frac{3Q_{rz}}{2h}. \quad (13.24)$$

13.3. Згин кільцевої пластини сталої товщини під дією вісесиметричного навантаження

Перш за все з'ясуємо, як визначають сталі інтегрування для функції прогинів щодо кільцевої пластини. У цьому разі слід розглянути умови закріплення внутрішнього та зовнішнього контурів пластини. Межові умови для кільцевої пластини впливають із схеми її закріплення. Зазначимо основні типи опорних закріплень кільцевої пластини (рис. 13.4):

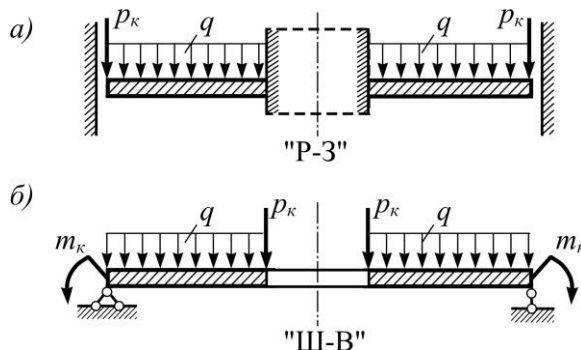


Рис. 13.4. Типи опорних закріплень кільцевої пластини

а) суцільна жорстко-защемлена опора (на рис.13.4, а – це внутрішній край

пластини, який умовно позначено літерою "З");

б) рухомо-защемлена опора (на рис.13.4, *a* – це зовнішній край пластини, який умовно позначено літерою "Р");

в) шарнірно-оперта опора (це зовнішній край пластини на рис.13.4, *б*, який умовно позначено літерою "Ш");

г) вільний від опорних закріплень контур пластини (це внутрішній край пластини на рис. 13.4, *б*, який умовно позначено літерою "В").

У цілому на рис. 13.4 наведено, крім названих вище, такі умовні позначення: q – інтенсивність навантаження, рівномірно розподіленого по всій поверхні кільцевої пластини; p_k – погонне зосереджене навантаження, рівномірно розподілене по зовнішньому або (і) внутрішньому контуру пластини; m_k – погонне моментне навантаження, рівномірно розподілене по зовнішньому або (і) внутрішньому контуру пластини.

При цьому на контурі пластини, внутрішньому і зовнішньому, можуть одночасно діяти як зосереджене навантаження p_k , так і моментне - m_k .

Для визначення сталих інтегрування C_1 , C_2 , C_3 , і C_4 , що входять у функцію прогинів (13.10), потрібно врахувати таку математичну інтерпретацію межових умов.

Для жорсткого защемлення контуру кільцевої пластини ("З") прогин і кут обертання крайових перерізів дорівнюють нулю, тобто $w = 0$, $\frac{dw}{dr} = 0$.

Для рухомо-защемленого опорного закріплення ("Р") маємо: $\frac{dw}{dr} = 0$ і, крім того, коли немає зосередженого контурного навантаження ($p_k = 0$), радіальна поперечна сила також дорівнюватиме нулю: $Q_{rz} = 0$ або заданій величині перерізуювальної сили з урахуванням її знака: $Q_{rz} = \pm p_k$.

Для шарнірної опори ("Ш") прогин пластини дорівнює нулю, тобто $w = 0$. Радіальний згиновий момент дорівнює нулю ($M_r = 0$) лише в тому разі, коли на контурі пластини немає навантаження у вигляді погонного рівномірно розподіленого згинального моменту ($m_k = 0$). Якщо ж зазначене навантаження прикладене, то тоді радіальний момент з урахуванням знака цього навантаження, дорівнює: $M_r = \pm m_k$.

Для вільного краю пластини маємо такі межові умови. За наявності на контурі погонного зосередженого навантаження p_k радіальна поперечна сила дорівнює заданому навантаженню, тобто $Q_{rz} = \pm p_k$. За наявності там моментного згинального навантаження m_k радіальний згинний момент дорівнює: $M_r = \pm m_k$. Якщо ж по контуру "В" не прикладено сил, то тоді межові умови мають такий вигляд: $Q_{rz} = 0, M_r = 0$.

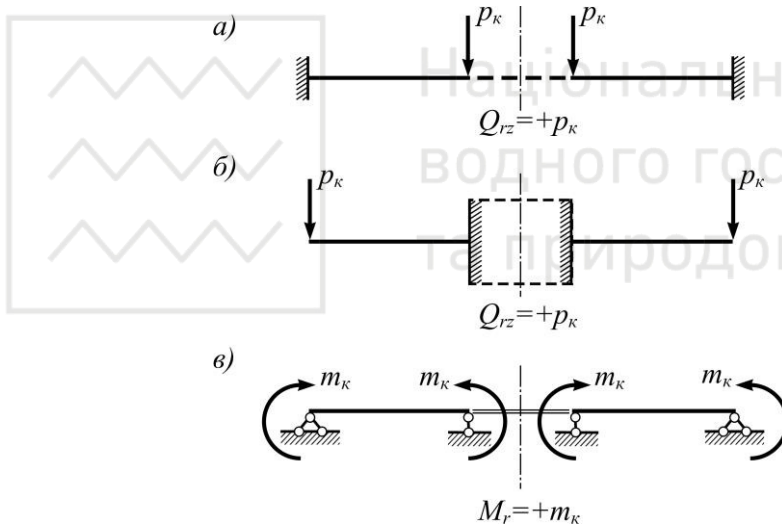


Рис. 13.5. Навантаження p_k (схеми а, б) і m_k (схема в) для додатних значень радіальної сили Q_{rz} і радіального згинного моменту M_r

Додатні значення радіальної сили Q_{rz} і радіального згинного моменту M_r залежно від напрямку прикладених зовнішніх сил p_k і моментів m_k зображено на рис. 13.5. Від'ємні значення внутрішніх силових чинників відповідають, зрозуміло, протилежному на рисунку 13.5 напрямку. На контурі пластини $Q_{rz} = p_k, M_r = m_k$.

13.4. Приклад розрахунку кільцевої пластини сталої товщини на вісесиметричний згин

Вихідні дані для задачі: Кільцева сталева пластинка (рис.13.6) завтовшки

$h = 0,02\text{ м}$ має зовнішній радіус $a = 0,2\text{ м}$, внутрішній $a = 0,1\text{ м}$. На пластину діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивності $q = 400\text{ кПа}$ і погонне навантаження на зовнішньому контурі $m_k = -4\text{ кН} \cdot \text{м/м}$.

Максимальний допустимий прогин дорівнює $w_{adm} = \frac{h}{4} = 0,005\text{ м}$.

Модуль пружності матеріалу пластини $E = 200\text{ ГПа}$; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$; границя пружності $\sigma_{el} = 240\text{ МПа}$.

Треба: 1. Визначити сталі інтегрування для функції прогинів w .

2. Знайти аналітичні вирази для величин: w , M_r , M_θ і Q_{rz} .

3. Побудувати епюри вказаних величин.

4. Визначити максимальні нормальні напруження для σ_r чи σ_θ .

5. Порівняти здобуті значення: а) максимальний прогин w_{max} з допустимим w_{adm} ; б) максимальне нормальне напруження $max\sigma_r$ (чи $max\sigma_\theta$) з границею пружності σ_{el} .

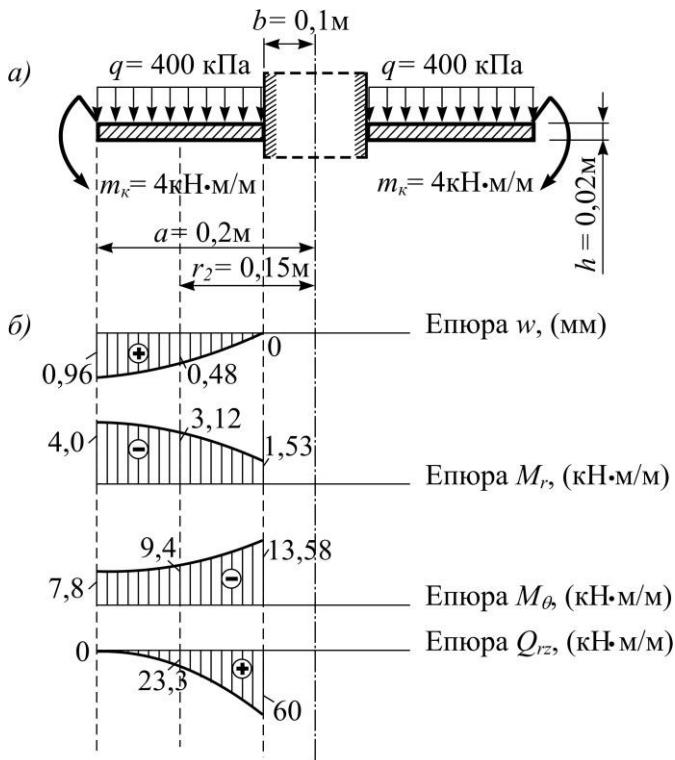


Рис. 13.6. До розрахунку кільцевої пластини: а) навантаження на пластину; б) епюри w і зусиль M_r , M_θ , Q_{rz}

Розв'язання.

1. Визначимо сталі інтегрування для функції прогинів за формулою (13.10):

$$w = C_1 r^2 + C_2 \ln r + C_3 r^2 \ln r + C_4 + \frac{q r^4}{64D}, \quad (a)$$

для чого використаємо такі межові умови (рис. 13.6, а):

при $r = 0,1 \text{ м}$: $w = 0,$ (б)

при $r = 0,1 \text{ м}$: $\frac{dw}{dr} = 0,$ (в)

при $r = 0,2 \text{ м}$: $Q_{rz} = 0,$ (г)

при $r = 0,2 \text{ м}$: $M_r = m_\xi = -4000 \text{ Н} \cdot \text{м/м}.$ (д)

Підрахуємо спочатку значення циліндричної жорсткості за формулою (9.18):

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{200 \cdot 10^9 \cdot 0,02^3}{12(1-0,3^2)} = 146,52 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Підставляючи відповідні значення у вираз (а) згідно з умовою (б), дістанемо після спрощень:

$$w = 0,01C_1 - 2,303C_2 - 0,023C_3 + C_4 + 4,266 \cdot 10^{-6} = 0. \quad (e)$$

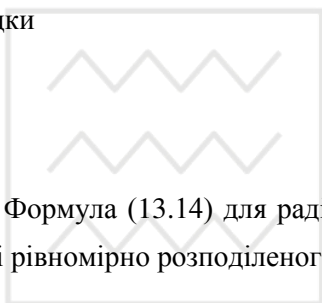
З огляду на умову (в), враховуючи вираз (а), після спрощень маємо:

$$\frac{dw}{dr} = 0,2C_1 + 10C_2 + 0,361C_3 + 171 \cdot 10^{-6} = 0. \quad (ж)$$

Використовуючи умову (є) і формулу (13.13) для Q_{rz} при $n=0$, послідовно запишемо:

$$Q_{rz} = -\frac{4DC_3}{r} - \frac{qr}{2} = \frac{4 \cdot 146,52 \cdot 10^3 C_3}{0,2} - \frac{400 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{2} = 0,$$

звідки



$$C_3 = -13,65 \cdot 10^{-3}. \quad (u)$$

Формула (13.14) для радіального згинового моменту M_r при $n=0$ тобто в разі рівномірно розподіленого навантаження $q(r) = q = const$, має вигляд:

$$M_r = -D \left\{ 2(1+\nu)C_1 - \frac{(1-\nu)C_2}{r^2} + [(3+\nu) + 2(1+\nu)\ln r]C_3 \right\} - \frac{(3+\nu)qr^2}{16}. \quad (\kappa)$$

Підставляючи у формулу (κ) значення $r=0,2\text{ м}$ і $M_r = m_\epsilon = -4000\text{ Н} \cdot \text{м/м}$ згідно з умовою (д), після спрощень дістанемо:

$$-3809 \cdot 10^3 C_1 + 256375 \cdot 10^3 C_2 + 129,59 \cdot 10^3 C_3 = -0,7 \cdot 10^3. \quad (\lambda)$$

Враховуючи значення C_3 за формулою (u), із трьох рівнянь (є), (ж) і (л) з трьома невідомими C_1 , C_2 і C_4 дістанемо:

$$C_1 = 0,3449 \cdot 10^{-3}, \quad (m)$$

$$C_2 = 0,4681 \cdot 10^{-3}, \quad (n)$$

$$C_4 = 0,7559 \cdot 10^{-3}. \quad (o)$$

2. Запишемо аналітичні вирази для w , M_r , M_θ і Q_{rz} .

Вираз для прогину w згідно з формулою (а) і значеннями сталих величин C_1 (м), C_2 (н), C_3 (у) і C_4 (н) набирає такого вигляду:

$$w = \left(0,3449 \cdot r^2 + 0,4681 \ln r - 13,65r^2 \ln r + 0,7559 + 42,6563r^4 \right) \cdot 10^{-3}. \quad (p)$$

Вираз для погонного радіального згинового моменту M_r відповідно до формули (к) є таким:

$$M_r = \frac{48,01}{r^2} + 5199,99 \ln r - 82500r^2 + 646861. \quad (c)$$

Вираз для погонного колового згинового моменту M_θ згідно з (13.15) при $n = 0$ (для $q = const$) має таку форму:

$$M_\theta = -D \left\{ 2(1+\nu)C_1 + \frac{(1-\nu)C_2}{r^2} + [(1+3\nu) + 2(1+\nu)\ln r]C_3 \right\} - \frac{(1+3\nu)qr^2}{16}. \quad (m)$$

У нашому випадку після підстановки сталих величин C_1 , C_2 і C_3 дістаємо:

$$M_\theta = 5199,99 \ln r - \frac{48,01}{r^2} - 47500r^2 + 366862. \quad (y)$$

Вираз для погонної радіальної поперечної сили Q_{rz} на основі формули (13.16) при $n = 0$ (для $q = const$) має вигляд:

$$Q_{rz} = -\frac{4DC_3}{r} - \frac{qr}{2}. \quad (ф)$$

Підставляючи у рівність (ф) значення D , C_3 , і q , дістанемо:

$$Q_{rz} = -\frac{7999999}{r} - 2 \cdot 10^5 r. \quad (x)$$

3. Побудуємо епюри w , M_r , M_θ і Q_{rz} , для чого підрахуємо ці величини (в нашому наближеному випадку) для трьох точок по радіусу пластини (рис. 13.6, а): $r_1 = b = 0,1\text{ м}$; $r_2 = b + (a - b)/2 = 0,15\text{ м}$; $r_3 = a = 0,2\text{ м}$.

Значення прогинів згідно з формулою (e):

$$w_1 = 0; \quad w_2 = 0,4798 \cdot 10^{-3}\text{ м}; \quad w_3 = 0,9633 \cdot 10^{-3}\text{ м} \approx 1\text{ мм}.$$

Значення погонних радіальних згинувих моментів M_r за формулою (c):

$$M_{r,1} = -1529\text{ Н} \cdot \text{м/м}; \quad M_{r,2} = -3119\text{ Н} \cdot \text{м/м}; \quad M_{r,3} = -4000\text{ Н} \cdot \text{м/м}.$$

Значення погонних колових згинувих моментів M_θ за формулою (y):

$$M_{\theta,1} = -13580\text{ Н} \cdot \text{м/м}; \quad M_{\theta,2} = -9399\text{ Н} \cdot \text{м/м}; \quad M_{\theta,3} = -7800\text{ Н} \cdot \text{м/м}.$$

Значення погонних радіальних поперечних сил Q_{rz} відповідно до формули (x):

$$Q_{rz,1} = 60000\text{ Н/м}; \quad Q_{rz,2} = 23330\text{ Н/м}; \quad Q_{rz,3} = 0.$$

Користуючись підрахованими значеннями, будуємо епюри w , M_r , M_θ і Q_{rz} (рис. 13.6, б).

4. Знайдемо максимальні напруження. Оскільки максимальний згинувий момент дорівнює $M_\theta = 13580\text{ Н} \cdot \text{м/м}$, то максимальні нормальні напруження згідно з формулою (13.23) мають таку величину:

$$\max \sigma_\theta = \frac{6M_\theta}{h^2} = \frac{6 \cdot 13580}{0,02^2} = 203,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 203,7 \text{ МПа}.$$

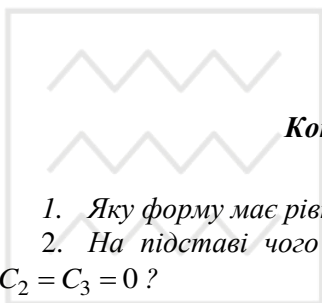
5. Порівняємо здобуті значення для прогинів і напружень із відповідними

допустимими значеннями.

Максимальний розрахунок прогину дорівнює $w_{max} = 1$ мм, а допустимий прогин $w_{adm} = 5$ мм. Отже $w_{max} < w_{adm}$.

Максимальні нормальні напруження $\sigma_{\theta} = 203,7$ МПа, а границя пружності $\sigma_{el} = 240$ МПа. Отже $max \sigma_{\theta} < \sigma_{el}$.

Таким чином, наведений розрахунок не виходить за межі допустимих значень заданих величин w_{adm} і σ_{el} .



Контрольні запитання та задачі

1. Яку форму має рівняння С. Жермен у полярній системі координат?
2. На підставі чого для суцільної круглої пластини сталі інтегрування $C_2 = C_3 = 0$?
3. Проінтегруйте самостійно чотири рази рівняння (13.5) та порівняйте отримані результати з рівнянням (13.6).
4. Чому дорівнює максимальний прогин пластини, що розглянуто в наведеному вище прикладі (рис. 13.6), якщо інтенсивність розподіленого навантаження q збільшити вдвічі? Підрахуйте.

РОЗДІЛ XIV

ГІПОТЕЗИ, ЗАГАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА СПІВВІДНОШЕННЯ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК

14.1. Означення. Гіпотези

В теорії пружності оболонками називають тіла, що обмежені двома криволінійними поверхнями, відстань h між якими мала порівняно з іншими розмірами.

Геометричне місце точок, рівновіддалених від обох поверхонь, що утворюють оболонку, називають серединною поверхнею оболонки.

Задачею теорії оболонок, як розділу теорії пружності, є дослідження їх деформацій та зусиль (напружень) під дією заданого навантаження. При цьому вважаємо матеріал оболонок ізотропним і таким, що підлягає закону Гука, а переміщення їх точок – малими порівняно з товщиною h .

Віднесемо серединну поверхню оболонки до криволінійної ортогональної системи координат α та β . Нехай координатні лінії α та β збігаються з лініями головних кривин серединної поверхні оболонки (рис. 14.1). В такій системі координат поверхня буде характеризуватись головними кривинами $k_1 = k_1(\alpha, \beta)$ і $k_2 = k_2(\alpha, \beta)$ та відповідними радіусами кривини $R_1 = R_1(\alpha, \beta)$ і $R_2 = R_2(\alpha, \beta)$ ліній кривини $\beta = const$ і $\alpha = const$. Між головними кривинами та радіусами кривини існує такий зв'язок:

$$k_1 = \frac{1}{R_1} \quad \text{та} \quad k_2 = \frac{1}{R_2}. \quad (14.1)$$

За допомогою коефіцієнтів першої квадратичної форми $A = A(\alpha, \beta)$ і $B = B(\alpha, \beta)$ можемо виразити квадрат довжини лінійного елемента серединної поверхні

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2. \quad (14.2)$$

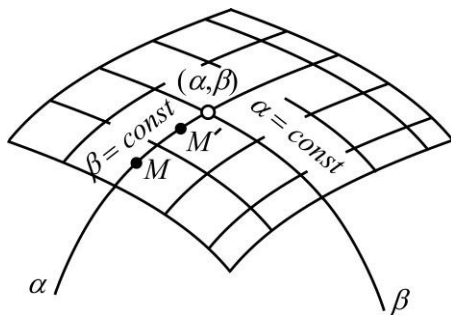


Рис. 14.1. Прив'язка координатної системи до серединної поверхні оболонки

Звідси в окремих випадках, коли змінюється лише одна з криволінійних координат маємо:

$$ds = A d\alpha ;$$

$$ds = B d\beta , \tag{14.3}$$

де ds є приростом дуг координатних ліній α та β , що відповідають приростам криволінійних координат $d\alpha$ та $d\beta$. Величини A та B ще називають параметрами Ламе.

Між головними кривинами та параметрами Ламе виконуються співвідношення Гаусса–Кодацці:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = -k_1 k_2 AB ;$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (A k_1) = k_2 \frac{\partial A}{\partial \beta} ;$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (B k_2) = k_1 \frac{\partial B}{\partial \alpha} . \tag{14.4}$$

Необхідно розрізняти тонкі та товсті оболонки. Тонкими вважатимемо

оболонки для яких виконується залежність:

$$\max(k, h) \leq \frac{1}{20}.$$

Оболонки для яких цей вираз не виконується, називатимемо товстими.

Будемо розглядати оболонки, навантажені зовнішніми силами та моментами.

Зовнішні сили та моменти поділяють на масові, поверхневі та крайові.

Прикладом масових сил служать сила тяжіння та відцентрові сили. До масових моментів, як приклад, належать моменти, що діють на оболонку з феромагнітного матеріалу в магнітному полі. Поверхневими силами розглядаються сили гідростатичного тиску. На торцях оболонок можуть діяти як зовнішні активні сили, так і реакції опор. До оболонок можуть бути прикладені навантаження як розподілені вздовж лінії, так і зосереджені в точці.

Чотирма нормальними перерізами: двома паралельними осі α та двома паралельними осі β виріжемо елемент оболонки (рис. 14.2), на який діють зовнішні об'ємні та поверхневі навантаження, що зрівноважуються внутрішніми силами. Яким відповідають напруження на вертикальних гранях вирізаного елемента з боку частини оболонки, що залишилась.

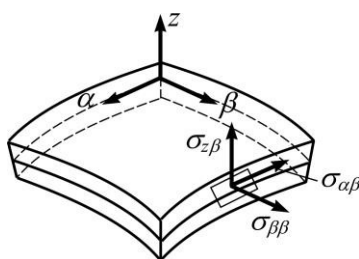


Рис. 14.2. Напруження на гранях елемента оболонки

Під дією зовнішніх навантажень в оболонці виникають переміщення. Переміщення у напрямку нормалі до серединної поверхні називається прогином.

Задачею теорії оболонок є визначення зусиль (напружень) і переміщень.

Розглянемо два шляхи розв'язку цієї задачі.

Перший – метод Коші-Пуассона, який полягає в тому, що оболонку розглядають як тривимірне тіло. Розв’язок полягає у розвиненні всіх переміщень і напружень оболонки в ряди за товщиною.

Другий метод – метод Кірхгофа-Лява, що заснований на гіпотезах аналогічних тим, що використовуються в теорії балок і пластин. Його припущення такі:

1. Прямолінійні волокна оболонки, перпендикулярні до серединної поверхні до деформації, залишаються після деформації прямолінійними та перпендикулярними до зігнутої серединної поверхні, зберігаючи при цьому свою довжину.

2. Нормальні напруження на площинках, паралельних серединній поверхні, вважаються нескінченно малими порівняно з іншими напруженнями та ними нехтують.

Прийняття цих гіпотез приводить задачу деформації оболонки до деформації її серединної поверхні.

Також необхідно зауважити, що теорія, що побудована на основі гіпотез Кірхгофа-Лява, є наближеною. Прийняття вказаних гіпотез вносить похибку порядку $\frac{h}{a}$, де h – товщина оболонки, a – мінімальний лінійний розмір серединної поверхні.

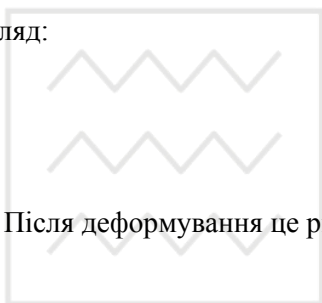
14.2. Зміна переміщень за товщиною оболонки

Пам’ятаймо, що ми віднесли серединну поверхню недеформованої оболонки до координат α та β , які є головними координатами і збігаються з лініями головних кривин серединної поверхні.

Координати α та β є матеріальними. Це значить, точка поверхні, що мала до деформації координати α , β , і після деформації характеризується цими ж координатами. При цьому координатні лінії змінюють своє положення у просторі і на деформованій серединній поверхні не є лініями головних кривин і не ортогональні.

Припускаємо, що переміщення точок оболонки малі порівняно з її товщиною.

Нехай в процесі деформування оболонки точки її серединної поверхні дістають переміщення $\bar{\Delta}(\alpha, \beta)$. Цей вектор буде функцією α, β , тобто функцією точок серединної поверхні. Позначимо проекції вектора $\bar{\Delta}(\alpha, \beta)$ на осі α, β, z або на напрямки відповідні осям e_1, e_2, e_n через u, v, w . Рівняння серединної поверхні в декартовій системі координат до деформування має вигляд:



$$r = r(\alpha, \beta). \quad (14.5)$$

Після деформування це рівняння матиме вигляд:

$$R = r(\alpha, \beta) + \bar{\Delta}(\alpha, \beta) \quad (14.6)$$

або

$$R = r(\alpha, \beta) + ue_1 + ve_2 + we_n. \quad (14.7)$$

У виразах (14.5 – 14.7) r та R – радіуси-вектори точок недеформованої та деформованої серединної поверхні.

Позначимо радіус-вектор точки, розташованої на відстані z від серединної поверхні до деформування через r^z , тоді R^z – радіус-вектор тієї самої точки після деформування оболонки. Переміщення цієї точки позначимо $\bar{\Delta}(z)$.

Видно, що

$$r^z = r + ze_n. \quad (14.8)$$

Відповідно до гіпотез Кірхгофа-Лява

$$R^z = R + ze'_n = r + \bar{\Delta} + ze'_n;$$

$$\bar{\Delta}(z) = R^z - r^z = \bar{\Delta} + z(e'_n - e_n), \quad (14.9)$$

де e'_n – одиничний вектор нормалі до деформованої серединної поверхні

$$e'_n = e'_1 \times e'_2, \quad (14.10)$$

а e'_1 та e'_2 – одиничні вектори, дотичні до координатних ліній α і β на деформованій серединній поверхні.

Відповідно до виразу (14.7) дістанемо

$$e'_1 = \frac{1}{A'} \frac{\partial R}{\partial \alpha} = \frac{1}{A'} \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} + \frac{\partial(ue_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(ve_2)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(we_n)}{\partial \alpha} \right), \quad (14.11)$$

де A' – коефіцієнт Ламе деформованої серединної поверхні

$$A' = \sqrt{\frac{\partial R}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial R}{\partial \alpha}}, \quad (14.12)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = Ae_1 + u \frac{\partial e_1}{\partial \alpha} + v \frac{\partial e_2}{\partial \alpha} + w \frac{\partial e_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \alpha} e_1 + \frac{\partial v}{\partial \alpha} e_2 + \frac{\partial w}{\partial \alpha} e_n. \quad (14.13)$$

Похідні одиничних ортів e_1, e_2, e_n визначають такими виразами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} e_2 - \frac{A}{R_1} e_n, & \frac{\partial e_1}{\partial \beta} &= \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} e_2, \\ \frac{\partial e_2}{\partial \alpha} &= \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} e_1, & \frac{\partial e_2}{\partial \beta} &= -\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} e_1 - \frac{B}{R_2} e_n, \\ \frac{\partial e_n}{\partial \alpha} &= \frac{A}{R_1} e_1, & \frac{\partial e_n}{\partial \beta} &= \frac{B}{R_2} e_2. \end{aligned} \quad (14.14)$$

Залежність (14.13) з урахуванням (14.14) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \alpha} = & A \left(1 + \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1} \right) e_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) e_2 + \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{A}{R_1} u \right) e_n. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Перемножуючи скалярно останній вектор (14.15) самого на себе і нехтуючи добутками переміщень й їх похідними, як малими величинами другого порядку малізми, дістанемо

$$A'^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial \alpha} \right)^2 \approx A^2 \left(1 + \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1} \right)^2. \quad (14.16)$$

Звідси

$$A' \approx A(1 + \varepsilon_1), \quad (14.17)$$

де

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1}, \quad (14.18)$$

і, відповідно,

$$e'_1 \approx e_1 + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) e_2 + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} \right) e_n. \quad (14.19)$$

Останній вираз дістали шляхом ділення (14.15) на (14.17).

Аналогічним чином отримаємо

$$e'_2 = \frac{1}{B'} \frac{\partial R}{\partial \beta} \approx e_2 + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right) e_1 + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} \right) e_n. \quad (14.20)$$

Згідно з виразом (14.10), нехтуючи членами другого порядку мализни, маємо

$$e'_n = e'_1 \times e'_2 = e_n + \mathcal{G}e_1 + \theta e_2, \quad (14.21)$$

де



$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1}, \\ \theta &= -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2}. \end{aligned} \quad (14.22)$$

Геометричний зміст величин \mathcal{G} та θ полягає у тому, що вони є проєкціями e'_n , тобто вектора нормалі до деформованої серединної поверхні на напрямки e_1 та e_2 . В наслідок мализни переміщень ці величини дорівнюють кутам, на які обертається нормаль e'_n навколо осей e_1 та e_2 .

Підставивши вираз (14.22) в рівняння (14.9), знаходимо

$$\bar{\Delta}(z) = \bar{\Delta} + z(\mathcal{G}e_1 + \theta e_2) \quad (14.23)$$

або, проєктуючи цю векторну рівність на напрямки e_1 , e_2 та e_n , матимемо

$$u(z) = u + z\mathcal{G},$$

$$v(z) = v + z\theta,$$

$$w(z) = w. \quad (14.24)$$

14.3. Деформації оболонки та її серединної поверхні

Розглянемо на серединній поверхні оболонки до деформування точку M та близьку до неї точку M' , що лежать на координатній лінії α (рис. 14.1). Довжина елемента координатної лінії MM' до деформування складає

$$ds_1 = Ad\alpha, \quad (14.25)$$

а після деформації

$$ds'_1 = A'd\alpha. \quad (14.26)$$

Відносне видовження елемента MM' визначимо виразом

$$\varepsilon_1 = \frac{ds'_1 - ds_1}{ds_1} \quad (14.27)$$

або, з урахуванням виразів (14.17) та (14.18), дістанемо:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1}. \quad (14.28)$$

Аналогічними чином отримаємо вираз для відшукання відносного видовження у напрямку координатної лінії β :

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2}. \quad (14.29)$$

Ще однією величиною, яка характеризує деформацію серединної поверхні, є зсув. Визначимо його (рис. 14.3) як суму кутів

$$\varepsilon_{12} = \gamma_1 + \gamma_2. \quad (14.30)$$

Оскільки кути γ_1 та γ_2 малі, то величину зсуву визначимо так:

$$\varepsilon_{12} = \sin(e'_1 \cdot e'_2) = e'_1 \cdot e'_2. \quad (14.31)$$

Підставляючи в (14.31) залежності (14.19) та (14.20) та враховуючи перпендикулярність e_1 та e_2 , матимемо



$$\varepsilon_{12} = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right). \quad (14.32)$$

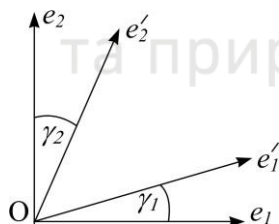


Рис. 14.3. До визначення значень кутової деформації

Щоб отримати співвідношення, що характеризують деформації довільної точки за товщиною оболонки, побудуємо на деякій відстані z від її серединної поверхні ще одну. Цю поверхню назвемо паралельною поверхнею.

Розглянемо нормальний переріз оболонки утворений площиною, що проходить через дотичну до координатної лінії α (рис. 14.4).

Якщо радіус кривини розглядуваного перерізу серединної поверхні R_1 , то відповідний радіус кривини паралельної серединної поверхні дорівнює $\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)$,

а отже

$$R_1^{(z)} = R_1 + z. \quad (14.33)$$

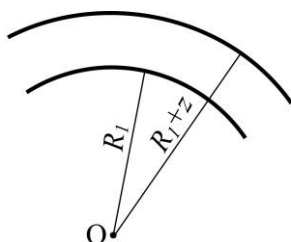


Рис. 14.4. До визначення деформацій точок площини, паралельної серединній

За аналогією дістанемо залежність між довжинами дуг серединної та паралельної поверхонь

$$ds_1^{(z)} = A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) d\alpha. \quad (14.34)$$

Залежність між параметрами Ламе цих двох поверхонь така:

$$A^{(z)} = A \left(1 + \frac{z}{R_1} \right). \quad (14.35)$$

Аналогічно маємо:

$$R_2^{(z)} = R_2 + z, \quad (14.36)$$

$$B^{(z)} = B \left(1 + \frac{z}{R_2} \right).$$

Визначимо деформації паралельної поверхні, підставляючи вирази (14.36), (14.33), (14.35) в рівність (14.28) з урахуванням співвідношень (14.4):

$$\varepsilon_1^{(z)} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u(z)}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v(z) + \frac{w(z)}{R_1} \right). \quad (14.37)$$

Підставивши сюди вирази переміщень $u(z)$, $v(z)$, $w(z)$ згідно з виразом (14.24), матимемо

$$\varepsilon_1^{(z)} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} (\varepsilon_1 + z\chi_1), \quad (14.38)$$

де



$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \theta. \quad (14.39)$$

$$\varepsilon_2^{(z)} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} (\varepsilon_2 + z\chi_2), \quad (14.40)$$

де

$$\chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \vartheta. \quad (14.41)$$

Щоб отримати вираз для визначення зсуву паралельної поверхні, розглянемо формулу (14.32). Замінивши параметри Ламе та переміщень для серединної поверхні на їхні вирази для паралельної поверхні, використавши співвідношення (14.35), (14.36), (14.24) та використавши залежності Гаусса–Кодацці (14.4), знайдемо:

$$\varepsilon_{12}^{(z)} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} (\omega_1 + z\tau_1) + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} (\omega_2 + z\tau_2), \quad (14.42)$$

де

$$\omega_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v;$$

$$\tau_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} g;$$

$$\tau_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial g}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta. \quad (14.43)$$

Залежність (14.42) містить у собі чотири різні функції від α та β .

Приведемо її до вигляду, що має лише дві різні функції криволінійних координат серединної поверхні.

Введемо позначення

$$\omega_1 + \omega_2 = \varepsilon_{12}. \quad (14.44)$$

Зауважимо також існування залежності

$$\tau_1 + \frac{\omega_2}{R_1} = \tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2}. \quad (14.45)$$

Якщо ввести позначення

$$\chi_{12} = \tau_1 + \frac{\omega_2}{R_1} = \tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2}, \quad (14.46)$$

то із виразу (14.42) матимемо

$$\varepsilon_{12}^{(z)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left\{ \left(1 - \frac{z^2}{R_1 R_2}\right) \varepsilon_{12} + \right. \\ \left. + 2 \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \frac{z}{2} + 1 \right] z \chi_{12} \right\}. \quad (14.47)$$

Знайдені формули (14.38), (14.40) та (14.47) визначають видовження та зсув паралельної поверхні, що відстоїть від серединної на відстані z . А отже, визначення деформацій оболонки приводиться до визначення деформацій її серединної поверхні.

Геометричний зміст величин, що входять у вирази (14.38), (14.40) та (14.47) такий: χ_1 та χ_2 характеризують зміну кривини, а χ_{12} – кручення серединної поверхні; вирази ε_1 , ε_2 , ε_{12} – видовження та зсув серединної поверхні. Ці величини визначають згідно з виразами:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2};$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right);$$

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \theta;$$

$$\chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \mathcal{G};$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \mathcal{G} + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) \frac{1}{R_1}. \quad (14.48)$$

При цьому зсув буде додатним, якщо кут між лініями α та β , прямиий спочатку, в результаті деформації зменшується. Параметри χ_1 та χ_2 додатні, якщо від деформації кривина серединної поверхні збільшується. Кручення χ_{12} – додатне, якщо воно викликає додатні зсуви у паралельних поверхнях, що знаходяться стосовно до серединної поверхні з боку від’ємних центрів її кривини.

Шість параметрів, що визначають залежності (14.48) через переміщення серединної поверхні, будемо називати деформаціями серединної поверхні.

14.4 Рівняння нерозривності деформацій серединної поверхні

Згідно з трьома умовами Гаусса–Кодацці між параметрами Ламе та радіусами головних кривин існують три диференціальні залежності. Вказаним залежностям повинна підпорядковуватись і деформована серединна поверхня. Тобто між шістьма чинниками деформації серединної поверхні (14.48) повинні існувати три диференціальні залежності, що виконуються для будь-яких значень переміщень u, v, w . Ці рівняння називаються умовами суцільності (нерозривності) серединної поверхні та мають такий геометричний зміст: вони вказують, що серединна поверхня і після деформації залишається суцільною, а не набором окремих малих елементів з розривами. Рівняння нерозривності деформацій мають вигляд:

$$B \frac{\partial \chi_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\chi_2 - \chi_1) - A \frac{\partial \chi_{12}}{\partial \beta} - 2 \frac{\partial A}{\partial \beta} \chi_{12} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_{12} + \\ + \frac{1}{R_1} \left[A \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_{12} - B \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right] = 0;$$

$$A \frac{\partial \chi_1}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (\chi_1 - \chi_2) - B \frac{\partial \chi_{12}}{\partial \alpha} - 2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \chi_{12} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_{12} + \\ + \frac{1}{R_2} \left[B \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_{12} - A \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right] = 0;$$

$$\begin{aligned} & \frac{\chi_1}{R_2} + \frac{\chi_2}{R_1} + \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \left[B \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \frac{A}{2} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_{12} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \left[A \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{B}{2} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_{12} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (14.49)$$

14.5. Внутрішні сили та моменти

Перейдемо до визначення зусиль, що виникають в оболонці.

Виділимо з оболонки чотирима нормальними до її серединної поверхні перерізами, дотичними до ліній $\alpha, \alpha + \Delta\alpha, \beta, \beta + \Delta\beta$, просторовий елемент (рис. 14.5), висота якого дорівнює товщині оболонки. Замість напружень введемо статично еквівалентні їм сили та згинові моменти. Розглянемо грань елемента, перпендикулярну лінії α (рис. 14.6).

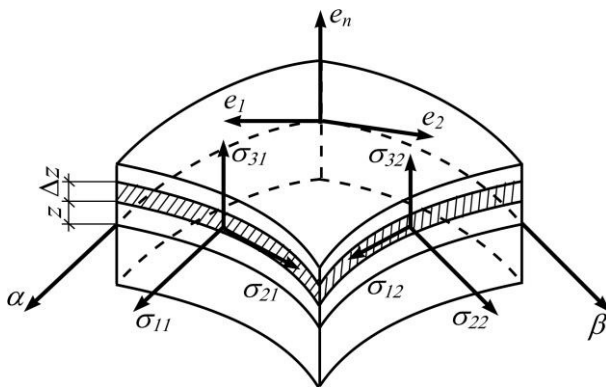


Рис. 14.5. Елемент стінки оболонки

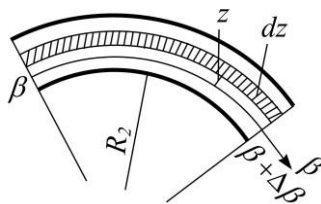


Рис. 14.6. Грань елемента стінки оболонки

Довжина цієї грані настільки мала, що в інтервалі $[\beta, \beta + \Delta\beta]$ напруження стали для сталої величини z , а в силу малізми прогинів припускаємо, що коефіцієнти Ламе та радіуси головних кривин не змінюються.

На заштрихованій площинці цієї грані виникають нормальні напруження σ_{11} та дотичні напруження σ_{21}, σ_{13} . Довжина серединної поверхні дорівнює $ds_2 = B\Delta\beta$, а довжина заштрихованої ділянки згідно з виразом (14.36) –



Площа заштрихованої ділянки (рис. 14.6):

$$ds_2^{(z)} = B \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) \Delta\beta. \quad (14.50)$$

$$B\Delta\beta \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz. \quad (14.51)$$

Тоді компоненти головного вектора системи напружень, що виникають на грані, визначають так:

$$\Delta N_{11} = B\Delta\beta \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz;$$

$$\Delta N_{21} = B\Delta\beta \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz;$$

$$\Delta Q_{13} = B\Delta\beta \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz. \quad (14.52)$$

Компоненти головного моменту відносно осей e_1 та e_2 визначаються таким чином:

$$\Delta M_{21} = B\Delta\beta \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{21} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz;$$

$$\Delta M_{11} = B\Delta\beta \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{11} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz. \quad (14.53)$$

Момент елементарної сили $\sigma_{13} dz$ відносно осі, паралельної e_n в центральній точці дуги $B\Delta\beta$, дорівнює нулю внаслідок паралельності осі e_n і вектора елементарної сили $\sigma_{13} dz$.

Значимо, що σ_{11}, σ_{22} – нормальні напруження, що виникають на площинках, котрі обмежують даний елемент; σ_{21}, σ_{12} – дотичні напруження на тих же площинках, що виникають паралельно серединній поверхні; σ_{13}, σ_{23} – дотичні напруження на тих же площинках, що виникають перпендикулярно до серединної поверхні.

Зазначені компоненти вектора напружень приходяться на елемент дуги лінії серединної поверхні β , який дорівнює $ds_2 = B\Delta\beta$. Відповідно, внутрішні сили, що приходяться на одиницю довжини даної дуги (рис. 14.7) дорівнюють:

$$N_{11} = \frac{\Delta N_{11}}{B\Delta\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz;$$

$$N_{21} = \frac{\Delta N_{12}}{B\Delta\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz;$$

$$Q_{13} = \frac{\Delta Q_{13}}{B\Delta\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz \quad (14.54)$$

та моменти відповідних елементарних сил відносно осей e_2 та e_1

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{11} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz ;$$

$$M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{21} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz . \quad (14.55)$$

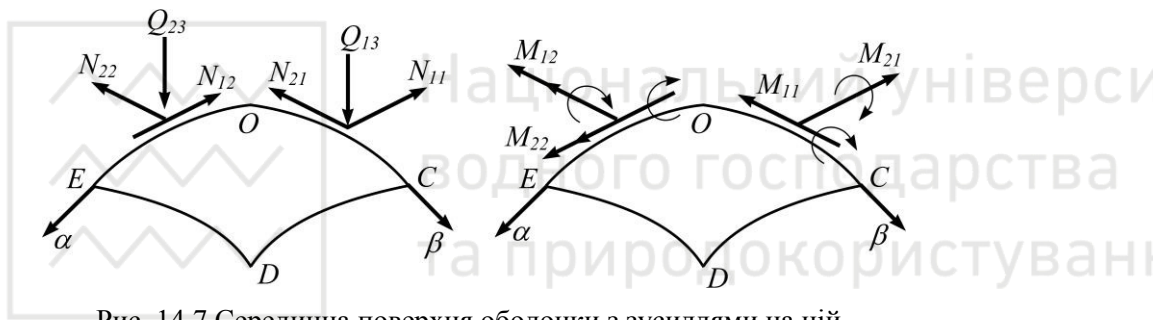


Рис. 14.7 Середина поверхня оболонки з зусиллями на ній

Аналогічним чином визначимо вирази внутрішніх сил на іншій грані вирізаного елемента:

$$N_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz ;$$

$$N_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz ;$$

$$Q_{23} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz \quad (14.56)$$

та моменти відповідних елементарних сил відносно напрямків e_1 та e_2

$$M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{22} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz;$$

$$M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{12} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz. \quad (14.57)$$

Шість сил $N_{11}, N_{22}, N_{12}, N_{21}, Q_{13}, Q_{23}$ та чотири моменти $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$ повністю характеризують напружений стан оболонки.

Замінюючи напруження статично еквівалентними їм силами та моментами, ми зможемо розглядати лише серединну поверхню оболонки до якої зведено просторову конструкцію.

Під час дослідження деформацій оболонки ми знехтували зсувами, що відповідають напруженням σ_{13}, σ_{23} . На що вказувало перше припущення Кірхгофа-Лява про збереження перпендикулярів у процесі деформування. Відповідно необхідно було б знехтувати і силами Q_{13}, Q_{23} . Але ці сили відіграють важливу роль у рівняннях рівноваги.

Тому перше припущення Кірхгофа-Лява залишається в силі лише у випадку визначення деформацій волокон оболонки, паралельних серединній поверхні.

Отже, перше припущення Кірхгофа-Лява сформулюємо таким чином: для визначення деформацій волокон оболонки, паралельних серединній поверхні, можна знехтувати зсувами, відповідними до напружень σ_{13}, σ_{23} , та видовженнями у напрямку, перпендикулярному серединній поверхні.

14.6. Рівновага елемента серединної поверхні

Розглянемо рівновагу малого елемента, виділеного з оболонки та показаного на рис. 14.8.

Припустимо, що на елемент діють зовнішні масові та нормальні поверхневі сили, що прикладені до верхньої та нижньої граней елемента. Замінімо систему зовнішніх сил статично еквівалентним навантаженням, розподіленим на

серединній поверхні. При цьому у зв'язку з мализною товщини оболонки знехтуємо моментами масових сил відносно серединної поверхні.

Тепер замість рівноваги елемента оболонки можемо розглядати рівновагу елемента серединної поверхні, завантаженого внутрішніми силами $N_{11}, N_{22}, N_{12}, N_{21}, Q_{13}, Q_{23}$, внутрішніми моментами $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$ та зовнішньою силою q , що приходить на одиницю площі серединної поверхні. Компоненти сили q за напрямками e_1, e_2, e_n позначимо через q_1, q_2, q_n .

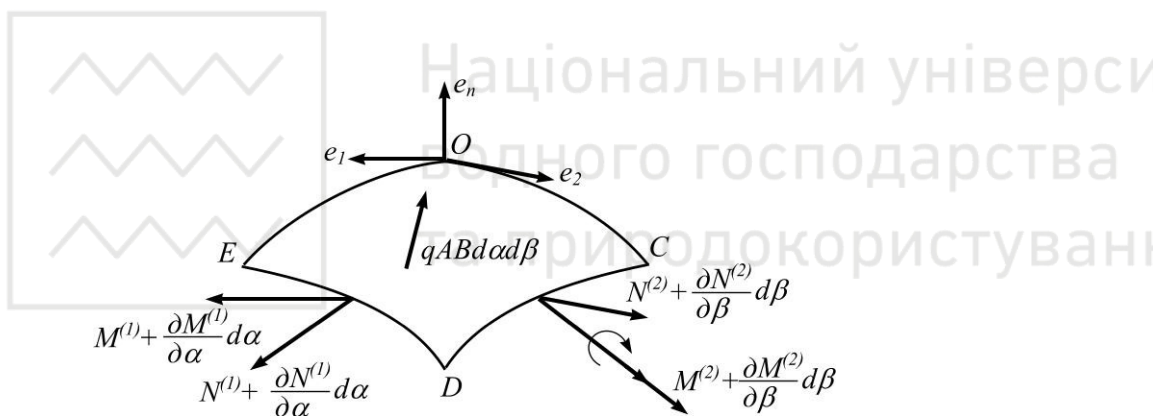


Рис. 14.8 До рівноваги елемента серединної поверхні оболонки

Подальші рівняння статки оболонок будуть побудовані на припущенні, що переміщення оболонки w малі порівняно з її товщиною.

До сторони OC вирізаного елемента прикладемо силу

$$-N^{(1)} = -(N_{11}e_1 + N_{21}e_2 + Q_{13}e_n)Bd\beta \quad (14.58)$$

та момент

$$-M^{(1)} = -(M_{11}e_2 - M_{21}e_1)Bd\beta. \quad (14.59)$$


До сторони ED – силу

$$N^{(1)} + \frac{\partial N^{(1)}}{\partial \alpha}d\alpha \quad (14.60)$$

та момент

$$M^{(1)} + \frac{\partial M^{(1)}}{\partial \alpha} d\alpha . \quad (14.61)$$

До сторони EO – силу



$$-N^{(2)} = -(N_{22}e_2 + N_{12}e_1 + Q_{23}e_n)Ad\alpha \quad (14.62)$$

$$-M^{(2)} = -(M_{12}e_2 - M_{22}e_1)Ad\alpha . \quad (14.63)$$

До сторони DC – силу

$$N^{(2)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial \beta} d\beta \quad (14.64)$$

та момент

$$M^{(2)} + \frac{\partial M^{(2)}}{\partial \beta} d\beta . \quad (14.65)$$

Також до елемента прикладемо силу:

$$qABd\alpha d\beta = (q_1e_1 + q_2e_2 + q_n e_n)ABd\alpha d\beta . \quad (14.66)$$

Знаки перед силами та моментами вибрано відповідно до рис. 14.7 та рис. 14.8. На протилежні сторони елемента прикладемо сили та моменти протилежних знаків.

Для того, щоб вирізаний елемент знаходився у рівновазі, необхідно виконати умову про рівність нулю головного вектора всіх сил, що прикладені до цього

елемента.

Ця умова має такий вигляд:

$$\frac{\partial N^{(1)}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial \beta} d\beta + qAB d\alpha d\beta = 0. \quad (14.67)$$

Підставляючи у вираз (14.67) замість $N^{(1)}$, $N^{(2)}$ та q за формулами (14.58), (14.62) та (14.66) та враховуючи правила диференціювання одиничних векторів e_1, e_2, e_n (14.14), після скорочення на $d\alpha d\beta$ дістанемо:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial(BN_{11})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AN_{12})}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{21} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{22} + \frac{AB}{R_1} Q_{13} + ABq_1 \right] e_1 + \\ & + \left[\frac{\partial(BN_{21})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AN_{22})}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{12} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{11} + \frac{AB}{R_2} Q_{23} + ABq_2 \right] e_2 + \\ & + \left[\frac{\partial(BQ_{13})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AQ_{23})}{\partial \beta} - AB \left(\frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} \right) + ABq_n \right] e_n = 0. \end{aligned} \quad (14.68)$$

Оскільки вектор (14.68) дорівнює нулю, то це означає, що дорівнюють нулю всі його проекції, а отже, всі три вирази в квадратних дужках повинні дорівнювати нулю. Таким чином, маємо три диференціальні рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BN_{11})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AN_{12})}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{21} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{22} \right] + \frac{Q_{13}}{R_1} + q_1 = 0; \\ & \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BN_{21})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AN_{22})}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{12} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{11} \right] + \frac{Q_{23}}{R_2} + q_2 = 0; \\ & \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BQ_{13})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AQ_{23})}{\partial \beta} \right] - \frac{N_{11}}{R_1} - \frac{N_{22}}{R_2} + q_n = 0. \end{aligned} \quad (14.69)$$

Запишемо рівняння рівноваги головного моменту сил відносно точки O (рис. 14.8). При цьому знехтуємо доданками третього порядку мализни. В це

рівняння увійдуть внутрішні моменти $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$ їх похідні та моменти сил $N_{12}, N_{21}, Q_{13}, Q_{23}$:

$$M^{(1)} + \frac{\partial M^{(1)}}{\partial \alpha} d\alpha - M^{(1)} + M^{(2)} + \frac{\partial M^{(2)}}{\partial \beta} d\beta - M^{(2)} + [Q_{23}e_1 - Q_{13}e_2 + (N_{21} - N_{12})e_n] AB d\alpha d\beta = 0 \quad (14.70)$$

або після скорочення

$$\frac{\partial M^{(1)}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial M^{(2)}}{\partial \beta} d\beta + [Q_{23}e_1 - Q_{13}e_2 + (N_{21} - N_{12})e_n] AB d\alpha d\beta = 0. \quad (14.71)$$

Підставивши в рівняння (14.71) вирази моментів (14.59) і (14.63) та враховуючи правила диференціювання одиничних векторів e_1, e_2, e_n (14.14), після скорочення на $d\alpha d\beta$ знайдемо:

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{\partial(BM_{21})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AM_{22})}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{12} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{11} - ABQ_{23} \right] e_1 + \\ & + \left[\frac{\partial(BM_{11})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AM_{12})}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{21} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{22} - ABQ_{13} \right] e_2 + \\ & + \left[\frac{M_{21}}{R_1} - \frac{M_{12}}{R_2} + N_{21} - N_{12} \right] AB e_n = 0. \end{aligned} \quad (14.72)$$

Оскільки вектор (14.72) дорівнює нулю, то це означає, що всі його проекції дорівнюють нулю, а отже, всі три вирази в квадратних дужках повинні дорівнювати нулю. Таким чином, маємо ще три диференціальні рівняння рівноваги:

$$\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BM_{11})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AM_{12})}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{21} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{22} \right] - Q_{13} = 0;$$

$$\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BM_{21})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AM_{22})}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{12} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{11} \right] - Q_{23} = 0;$$

$$N_{21} - N_{12} + \frac{M_{21}}{R_1} - \frac{M_{12}}{R_2} = 0. \quad (14.73)$$

Останнє з трьох рівнянь (14.73) є тотожністю. Якщо у нього підставити вирази сил та моментів згідно з формулами (14.54 – 14.57), побачимо, що

$$N_{21} - N_{12} + \frac{M_{21}}{R_1} - \frac{M_{12}}{R_2} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) (\sigma_{21} - \sigma_{12}) dz \equiv 0. \quad (14.74)$$

Шість рівнянь (14.69) та (14.73) є рівняннями рівноваги малого елемента, виділеного з оболонки. До них входять десять невідомих. Тобто задача є внутрішньо статично невизначеною. Цієї невизначеності можна позбавитись, установивши залежність між деякими невідомими та деформаціями.

14.7. Потенціальна енергія деформації

Ми розглянули деформації оболонки та умови рівноваги виділеного з неї елемента. Тепер у зв'язку із невизначеністю рівнянь (14.69) та (14.73) розглянемо механічні характеристики матеріалу, з якого виготовлені оболонки, та їх зв'язок із напруженнями та деформаціями.

Використаємо для елемента оболонки (рис. 14.5) формулу загальної теорії пружності для потенціальної енергії пружного середовища

$$U = \int_V W dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{11} e_{11} + \sigma_{22} e_{22} + \sigma_{12} e_{12} + \sigma_{13} e_{13} + \sigma_{23} e_{23} + \sigma_{33} e_{33}) dV. \quad (14.75)$$

Тут σ_{ij} – нормальні та дотичні напруження, що діють на взаємно перпендикулярних площинках елемента (рис. 14.5); e_{ij} – нормальні та дотичні

деформації на тих же площинках; dV – об’єм виділеного елемента, W – питома потенціальна енергія пружної деформації, U – потенціальна енергія елемента.

Відповідно до рис. 14.5 об’єм заштрихованого елемента дорівнює

$$dV = AB \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) d\alpha d\beta dz. \quad (14.76)$$

Використовуючи гіпотези Кірхгофа-Лява та (14.76), вираз для потенціальної енергії набуває вигляду:

$$U = \int_V W dV = \frac{1}{2} \iint d\alpha d\beta \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{11} e_{11} + \sigma_{22} e_{22} + \sigma_{12} e_{12}) \times AB \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz. \quad (14.77)$$

Тут подвійний інтеграл береться за площею серединної поверхні оболонки. Запишемо зв’язок між напруженнями та деформаціями згідно з законом Гука у вигляді:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} \left(e_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right);$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1+\nu} \left(e_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right);$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{1+\nu} \left(e_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right);$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} e_{12}. \quad (14.78)$$

Тут E – модуль Юнга (пружності), ν – коефіцієнт Пуассона, $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$.

Знехтуємо у виразах (14.78) напруженнями σ_{33} порівняно з іншими і дістанемо:

$$e_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(e_{11} + e_{22}). \quad (14.79)$$

Підставляючи рівність (14.79) у перші два вирази (14.78), маємо:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(e_{11} + \nu e_{22});$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(e_{22} + \nu e_{11}). \quad (14.80)$$

Введемо у вирази (14.80) позначення деформацій згідно з формулами (14.29 – 14.48).

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1^{(z)} + \nu \varepsilon_2^{(z)});$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2^{(z)} + \nu \varepsilon_1^{(z)});$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12}^{(z)}. \quad (14.81)$$

Після підстановки виразів (14.38, 14.40, 14.42) в рівняння (14.77) та (14.81), а потім (14.81) в (14.77), дістанемо вираз для потенціальної енергії деформації тонких оболонок

$$U = \int W dV = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu) \left(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_{12}^2}{4} \right) \right] \times$$

$$\times AB d\alpha d\beta + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint \left[(\chi_1 + \chi_2)^2 - 2(1-\nu) (\chi_1 \chi_2 - \chi_{12}^2) \right] \times AB d\alpha d\beta. \quad (14.82)$$

Обидва інтеграли виразу (14.82) поширюються на всю середину поверхню. При цьому перший із доданків є потенціальною енергією видовжень і зсувів, а

другий – потенціальною енергією згину та кручення.

14.8. Співвідношення між зусиллями та деформаціями серединної поверхні

Для отримання залежностей між внутрішніми силами та деформаціями запишемо вираз для роботи внутрішніх сил на можливих переміщеннях пружного середовища

$$\delta A = \int (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + \sigma_{13} \delta \varepsilon_{13} + \sigma_{23} \delta \varepsilon_{23} + \sigma_{33} \delta \varepsilon_{33}) dV. \quad (14.83)$$

Тут δ – символ варіації.

З урахуванням гіпотез Кірхгофа-Лява та позначень для деформацій цей вираз набуває вигляду:

$$\delta A = \iint d\alpha d\beta \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{11} \delta \varepsilon_1^{(z)} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_2^{(z)} + \sigma_{12} \delta \varepsilon_{12}^{(z)}) \times AB \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz. \quad (14.84)$$

Тут інтегрування береться за всім об'ємом оболонки.

Використовуючи залежності (14.38, 14.40, 14.42), перепишемо вираз (14.84):

$$\begin{aligned} \delta A = \iint d\alpha d\beta \int_{-h/2}^{h/2} & \left[\sigma_{11} (\delta \varepsilon_1 + z \delta \chi_1) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) + \sigma_{22} (\delta \varepsilon_2 + z \delta \chi_2) \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) + \right. \\ & \left. + \sigma_{12} (\delta \omega_1 + z \delta \tau_1) \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) + \sigma_{12} (\delta \omega_2 + z \delta \tau_2) \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \right] AB dz. \end{aligned} \quad (14.85)$$

З урахуванням позначень (14.54 – 14.57) дістанемо

$$\begin{aligned} \delta A = \iint (N_{11} \delta \varepsilon_1 + N_{22} \delta \varepsilon_2 + N_{21} \delta \omega_1 + N_{12} \delta \omega_2 + M_{11} \delta \chi_1 + \\ + M_{22} \delta \chi_2 + M_{21} \delta \tau_1 + M_{12} \delta \tau_2) AB d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Враховуючи позначення (14.46), запишемо

$$\delta A = \iint (N_{11} \delta \varepsilon_1 + N_{22} \delta \varepsilon_2 + S \delta \varepsilon_{12} + M_{11} \delta \chi_1 + M_{22} \delta \chi_2 + 2H \delta \tau_{12}) A B d\alpha d\beta. \quad (14.86)$$

Тут введено позначення

$$S = N_{12} - \frac{M_{21}}{R_2} = N_{21} - \frac{M_{12}}{R_1}; \quad (14.87)$$

$$H = \frac{M_{12} + M_{21}}{2}. \quad (14.88)$$

Порівнюючи рівняння (14.82) після варіювання та використовуючи вираз (14.86), встановимо зв'язок між величинами внутрішніх сил і деформаціями у вигляді:

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2);$$

$$N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1);$$

$$S = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12};$$

$$M_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_1 + \nu \chi_2);$$

$$M_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_2 + \nu \chi_1);$$

$$H = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \chi_{12}. \quad (14.89)$$

Розв'язуючи останні рівняння відносно компонентів деформацій, знайдемо:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Eh}(N_{11} - \nu N_{22});$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{Eh}(N_{22} - \nu N_{11});$$



$$\varepsilon_{12} = \frac{2(1+\nu)}{Eh}S;$$

$$\chi_1 = \frac{12}{Eh^3}(M_{11} - \nu M_{22});$$

$$\chi_2 = \frac{12}{Eh^3}(M_{22} - \nu M_{11});$$

$$\chi_{12} = \frac{12(1+\nu)}{Eh^3}H. \quad (14.90)$$

Вираз для питомої енергії пружної деформації (14.82), з урахуванням співвідношень (14.90), запишемо так:

$$W = \frac{1}{2Eh} \left[N_{11}^2 - 2\nu N_{11}N_{22} + N_{22}^2 + 2(1+\nu)S^2 \right] + \frac{6}{Eh^3} \left[M_{11}^2 - 2\nu M_{11}M_{22} + M_{22}^2 + 2(1+\nu)H^2 \right]. \quad (14.91)$$

Диференціюючи вираз (14.91) по N_{11} , N_{22} , ..., H та порівнюючи результати з рівностями (14.90), дістанемо

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial W}{\partial N_{11}}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial W}{\partial N_{22}};$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \frac{\partial W}{\partial S}; & \chi_1 &= \frac{\partial W}{\partial M_{11}}; \\ \chi_2 &= \frac{\partial W}{\partial M_{22}}; & \chi_{12} &= \frac{\partial W}{\partial (2H)}. \end{aligned} \quad (14.92)$$

14.9. Рівняння нерозривності деформацій серединної поверхні в зусиллях

Підставивши вирази (14.92) в рівняння нерозривності серединної поверхні (14.49), матимемо:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B(M_{22} - \nu M_{11})}{\partial \alpha} - (1 + \nu) \left(\frac{\partial AH}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} H \right) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} (M_{11} - \nu M_{22}) - \\ & - \frac{h^2}{12R_1} \left[\frac{\partial B(N_{22} - \nu N_{11})}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} (N_{11} - \nu N_{22}) - 2(1 + \nu) \frac{\partial AS}{\partial \beta} - \right. \\ & \left. - 2(1 + \nu) \frac{R_1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta} S \right] = 0; \\ & \frac{\partial A(M_{11} - \nu M_{22})}{\partial \beta} - (1 + \nu) \left(\frac{\partial BH}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} H \right) - \frac{\partial A}{\partial \beta} (M_{22} - \nu M_{11}) - \\ & - \frac{h^2}{12R_2} \left[\frac{\partial A(N_{11} - \nu N_{22})}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} (N_{22} - \nu N_{11}) - 2(1 + \nu) \frac{\partial BS}{\partial \alpha} - \right. \\ & \left. - 2(1 + \nu) \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} S \right] = 0; \\ & \frac{M_{22} - \nu M_{11}}{R_1} + \frac{M_{11} - \nu M_{22}}{R_2} + \frac{h^2}{12} \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \left[\frac{\partial B(N_{22} - \nu N_{11})}{\partial \alpha} - \right. \right. \\ & \left. \left. - (1 + \nu) \left(\frac{\partial AS}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S \right) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} (N_{11} - \nu N_{22}) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{\partial A(N_{11} - \nu N_{22})}{\partial \beta} - (1 + \nu) \left(\frac{\partial BS}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S \right) - \frac{\partial A}{\partial \beta} (N_{22} - \nu N_{11}) \right] \right\} = 0. \quad (14.93) \end{aligned}$$

14.10. Постановка задач загальної теорії оболонок

В теорії оболонок існують шляхи розв'язку задач, наприклад, в переміщеннях і в напруженнях. З рівнянь рівноваги (14.69) виключимо зусилля Q_{13} та Q_{23} шляхом підстановки їх виразів з рівнянь (14.73). Використавши позначення (14.87, 14.88) та співвідношення Гаусса–Кодацці (14.4), рівняння (14.69) запишемо таким чином:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial BN_{11}}{\partial \alpha} + \frac{\partial AS}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{22} + \frac{1}{R_1} \left[\frac{\partial BM_{11}}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{22} + 2 \frac{\partial AH}{\partial \beta} + \right. \\ & \left. + 2 \frac{R_1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta} H \right] = -ABq_1; \\ & \frac{\partial BS}{\partial \alpha} + \frac{\partial AN_{22}}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{11} + \frac{1}{R_2} \left[\frac{\partial AM_{22}}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{11} + 2 \frac{\partial BH}{\partial \alpha} + \right. \\ & \left. + 2 \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} H \right] = -ABq_2; \\ & \frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} - \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \left[\frac{\partial BM_{11}}{\partial \alpha} + \frac{\partial AH}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} H - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{22} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \left[\frac{\partial BH}{\partial \alpha} + \frac{\partial AM_{22}}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} H - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{11} \right] \right\} = q_n. \end{aligned} \quad (14.94)$$

Підставляючи в останній вираз для сил N_{11}, N_{22}, S та моментів M_{11}, M_{22}, H згідно з рівностями (14.89) та виражаючи компоненти деформації через переміщення середньої поверхні u, v, w , дістанемо систему трьох рівнянь відносно трьох невідомих функцій u, v, w . Порядок такої системи буде дорівнювати восьми.

Інший шлях розв'язку розглядуваної задачі полягає у доповненні рівнянь рівноваги елемента оболонки (14.94) співвідношеннями нерозривності (14.93), сформульованими в зусиллях. При цьому для визначення невідомих $N_{11}, N_{22}, S, M_{11}, M_{22}$ і H утворюється система із шести диференціальних

рівнянь восьмого порядку в частинних похідних.

14.11. Крайові умови в задачах розрахунку оболонок

Для того, щоб встановити напружений стан оболонок за допомогою рівнянь (14.93, 14.94), необхідно визначити крайові умови (умови опирання оболонок).

Розглянемо випадок, коли оболонка не має меж, тобто є замкненою. У цьому випадку замість межових умов на оболонку накладаємо умову періодичності за змінними α та β . Припустимо, що $\beta = const$ і, змінюючи неперервно α , будемо періодично повертатись до тої самої точки серединної поверхні. Розв'язками рівнянь (14.93, 14.94) будуть однозначні функції координат α та β , тому розв'язки є періодичними функціями цих координат.

В іншому випадку оболонка, наприклад, має незамкнений контур, межа якого збігається з однією з координатних ліній $\beta = \beta_0$. Замінімо напруження, що діють на контурі, статично еквівалентною системою сил N_{12}, N_{22}, Q_{23} та моментів M_{22}, M_{12} . Звідси видно, що кількість крайових умов, що визначають розв'язок, повинно дорівнювати п'яти.

Однак насправді задача про напружений стан оболонки визначається не п'ятьма, а чотирма крайовими умовами. Крутний момент M_{12} можна на межі оболонки замінити відповідними розподіленими дотичними N_{12} та поперечними силами Q_{23} .

Представимо систему сил на межі оболонки, відповідно до вищесказаного, у вигляді:

$$N_{22}, \quad N_{12} + \frac{M_{12}}{R_1}, \quad Q_{23} + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha}, \quad M_{22}.$$

Для доведення замінімо дугу кривої $\beta = \beta_0$ ламаною лінією $a_1 a_2 a_3$ із сторонами довжиною ds (рис. 14.9). На відрізок ламаної $a_1 a_2$ діють сили $N_{22} ds$, $N_{12} ds$, $Q_{23} ds$ та моменти $M_{22} ds$ та $M_{12} ds$. Пам'ятаємо, що розподілені сили N_{12}, N_{22}, Q_{23} мають одиницю виміру (сила/довжина), а розподілені

моменти M_{22}, M_{12} – одиницю виміру (сила). Замість моменту $M_{12}ds$ прикладемо до кінців відрізка a_1a_2 перпендикулярно до нього дві протилежно напрямлені сили, які дорівнюють M_{12} . Момент $M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial s}ds$, що діє на відрізьку a_2a_3 замінимо двома протилежно напрямленими силами, які за виразами дорівнюють $M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial s}ds$ і прикладені в точках a_2 та a_3 .

Тепер розіб'ємо криву $\beta = \beta_0$ точками b_1, b_2, b_3 таким чином, щоб точка b_i ділила пополам відрізок кривої $a_i a_{i+1}$.

Розглянемо відрізок $b_1 b_2$, довжина якого дорівнює ds . До середини відрізка (точка a_2) прикладемо зосереджені сили $N_{12}ds$, $Q_{23}ds$, M_{12} та $M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial s}ds$. Крім того на відрізок $b_1 b_2$ діють сила $N_{22}ds$ та момент $M_{22}ds$. Вони залишаються без змін і не зображені на рис. 14.9.

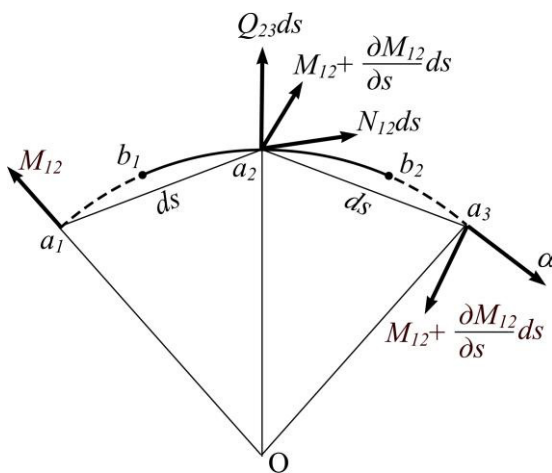


Рис. 14.9. До визначення крайових умов оболонок

Зосереджені сили $Q_{23}ds$, $N_{12}ds$, M_{12} та $M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial s}ds$ замінимо двома силами $\left(N_{12} + \frac{M_{12}}{R_1}\right)ds$ і $\left(Q_{23} + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha}\right)ds$, напрямленими відповідно по дотичній і по нормалі кривої $\beta = \beta_0$.

Замінимо зосереджені сили

$$\left(N_{12} + \frac{M_{12}}{R_1} \right) ds \quad \text{та} \quad \left(Q_{23} + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} \right) ds$$

питомими силами

$$N_{12} + \frac{M_{12}}{R_1} \quad \text{та} \quad Q_{23} + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha}$$

рівномірно розподіленими за довжиною відрізка кривої $b_1 b_2$.

При розв'язку задач теорії оболонок використовують межові (крайові) умови виражені не лише через сили та моменти, але й через переміщення крайових точок

$$u, v, w, \frac{\partial w}{\partial x}$$

або через комбінації тих та інших.

В останньому випадку із кожної двійки величин

$$\left(u, N_{11} \right), \quad \left(v, N_{12} + \frac{M_{12}}{R_1} \right), \quad \left(w, Q_{23} + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} \right), \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}, M_{22} \right)$$

вибирають одну таку, щоб кількість межових умов, що залишатиметься, дорівнювала чотирьом.

Приведемо ряд можливих варіантів межових умов на контурі $\beta = const$:

а) вільний край –

$$N_{11} = 0, \quad N_{12} + \frac{M_{12}}{R_1} = 0, \quad Q_{23} + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} = 0, \quad M_{22} = 0;$$

б) шарнірний, нерухомо опертий край (рис. 14.10) –

$$M_{22} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0;$$

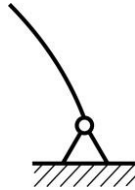


Рис. 14.10. Шарнірно-нерухоме закріплення

в) Шарнірний, вільний у нормальному напрямку край (рис. 14.11) –

$$M_{22} = 0, \quad Q_{23} + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0;$$

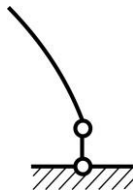


Рис. 14.11. Шарнірно-рухоме закріплення

г) защемлений край (рис. 14.12) –

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \theta = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} = 0.$$

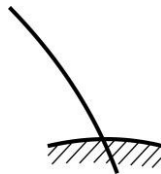


Рис. 14.12. Жорстке закріплення

Якщо контур збігається з кривою $\alpha = \alpha_0$, то для нього задаються величини:

$$N_{11}, \quad N_{21} + \frac{M_{21}}{R_2}, \quad Q_{13} + \frac{1}{B} \frac{\partial M_{21}}{\partial \beta}, \quad M_{11}.$$

Якщо ж оболонка має як вільний край, так і замкнені координатні лінії, то для вільного краю задаються чотири крайові умови, а для замкнених координатних кривих – умови періодичності. Наприклад, для циліндричної кругової оболонки умова періодичності або умова замкненості, повинна враховувати вимогу, що переміщення уздовж твірної не повинні мати приріст внаслідок збільшення координати на $2\pi R$.

14.12. Загальні рівняння для циліндричних оболонок

Прийнявши для циліндричних оболонок, що координата $\alpha = x$ змінюється вздовж твірної циліндра, а $\beta = s$ – уздовж дуги поперечного перерізу, дістанемо (рис. 14.13):

$$A = 1, \quad B = R_2 = R = \text{const}, \quad R_1 = \infty, \quad q_1 = X, \quad q_2 = Y, \quad q_n = Z,$$

$$N_{11} = N_x, \quad N_{22} = N_s, \quad Q_{13} = Q_x, \quad Q_{23} = Q_s, \quad M_{11} = M_x, \quad M_{22} = M_s. \quad (14.95)$$

З урахуванням залежностей (14.95) рівняння рівноваги (14.69, 14.73) наберуть вигляду:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} + X = 0,$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{Q_s}{R} + Y = 0,$$

$$\frac{N_s}{R} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_s}{\partial s} - Z = 0,$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial x} - Q_s = 0,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial s} - Q_x = 0. \quad (14.96)$$

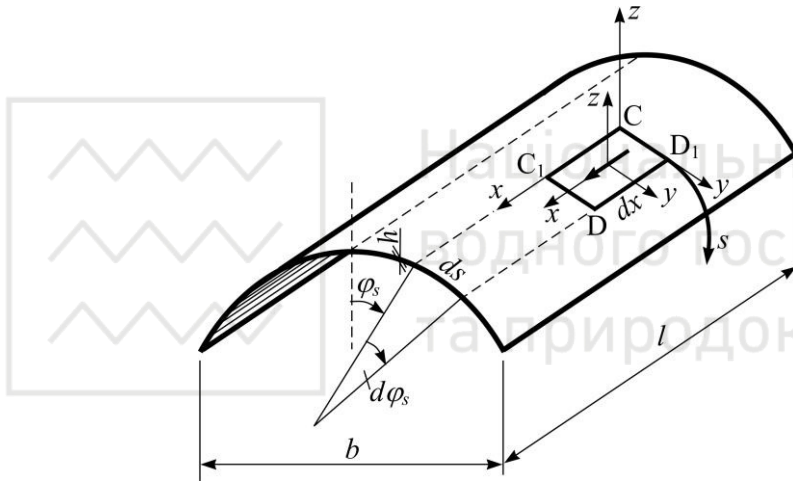


Рис. 14.13. Елемент циліндричної оболонки

З останніх двох рівнянь (14.96) маємо:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial s},$$

$$Q_s = \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (14.97)$$

Підставивши рівності (14.97) в перші три рівняння (14.96), запишемо:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} + X = 0,$$

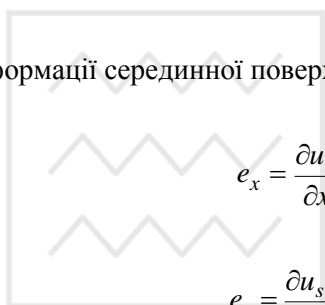
$$\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial M_s}{\partial s} - \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial x} + Y = 0,$$

$$\frac{N_s}{R} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial s} + \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} - Z = 0. \quad (14.98)$$

На основі рівнянь (14.48), та після введення позначень

$$\begin{aligned} u_x = u, \quad u_s = v, \quad u_z = w, \quad e_x = e_1, \quad e_s = e_2, \quad e_{xs} = e_{12}, \\ \chi_x = \chi_1, \quad \chi_s = \chi_2, \quad \chi_{xs} = \chi_{12}, \end{aligned} \quad (14.99)$$

деформації середньої поверхні набувають вигляду:



$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x},$$

$$e_s = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_z}{R},$$

$$e_{xs} = \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial s},$$

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2},$$

$$\chi_s = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u_s}{R} - \frac{\partial u_z}{\partial s} \right),$$

$$\chi_{xs} = \frac{1}{2R} \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial s} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_s}{2R} - \frac{\partial u_z}{\partial s} \right). \quad (14.100)$$

З рівнянь (14.89) дістанемо вирази для відшукування зусиль:

$$N_x = C \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_z}{R} \right) \right],$$

$$N_s = C \left(\frac{\partial u_s}{\partial s} + \nu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{u_z}{R} \right),$$

$$S = \frac{1-\nu}{2} C \left(\frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial s} \right),$$

$$M_x = -D \left[-\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u_s}{R} - \frac{\partial u_z}{\partial s} \right) \right],$$

$$M_s = -D \left[-\nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u_s}{R} - \frac{\partial u_z}{\partial s} \right) \right],$$

$$H = -(1-\nu)D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_s}{2R} - \frac{\partial u_z}{\partial s} \right), \quad (14.101)$$



де введено такі позначення:

$$C = \frac{Eh}{(1-\nu^2)},$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Підставляючи формули (14.101) в рівняння (14.98) та нехтуючи величиною $\frac{h^2}{12R^2}$ порівняно з одиницею, матимемо розрахункові рівняння в переміщеннях:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) u_x + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x \partial s} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{X}{C},$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial s} + \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_s +$$

$$+ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \right) u_z = -\frac{Y}{C},$$

$$\frac{\nu}{R} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \right] \right\} u_s +$$

$$+ \left[\frac{1}{R^2} + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4}{\partial s^4} \right) \right] u_z = \frac{Z}{C}, \quad (14.102)$$

тут $s = R \cdot \varphi$.

Приклад 1.1. Розрахувати за моментною теорією круговий циліндричний резервуар сталі товщини h , защемлений в основі та наповнений рідиною з об'ємною вагою γ (рис. 14.14).

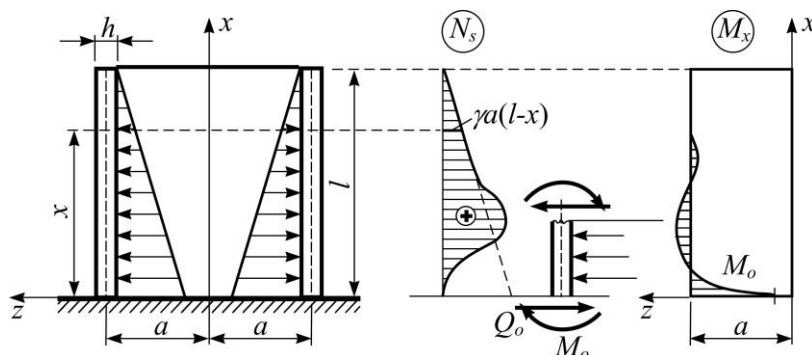


Рис. 14.14. Круговий циліндричний резервуар з епюрами поздовжніх сил і внутрішніх моментів

Розв'язок. Тиск на стінки резервуара $Z = \gamma(l-x)$, $X = Y = 0$. Рівняння (14.102) набувають вигляду:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\nu}{a} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) u_z = \frac{z}{C}. \quad (14.103)$$

Інтегрування першого рівняння (14.103) дає:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\nu}{a} u_z = C_1 \quad (a)$$

або згідно з першою формулою (14.101)

$$\frac{N_x}{C} = C_1.$$

При $x=l$, $N_x=0$, а також $C_1=0$ і тоді

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\nu}{a} u_z.$$

Друге рівняння (14.103) матиме вигляд

$$\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 4\lambda^4 u_z = \frac{\gamma(l-x)}{D}, \quad (б)$$

де

$$\lambda^4 = \frac{3}{(1-\nu^2)(a^2 h^2)}.$$

Розв'язуючи рівняння (б), знайдемо

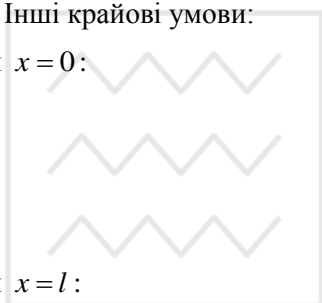
$$u_z = e^{-\lambda x} (C_2 \cos \lambda x + C_3 \sin \lambda x) + e^{\lambda x} (C_4 \cos \lambda x + C_5 \sin \lambda x) + \frac{\gamma a^2 (l-x)}{Eh}.$$

Проінтегруємо рівняння (а) при $C_1 = 0$:

$$u_x = C_6 - \frac{\nu}{a} \int_0^x u_z dx = C_6 + \frac{\nu}{2\lambda a} e^{-\lambda x} [C_2(\cos \lambda x - \sin \lambda x) + C_3(\cos \lambda x + \sin \lambda x)] - \\ - \frac{\nu}{2\lambda a} e^{\lambda x} [C_4(\cos \lambda x + \sin \lambda x) + C_5(-\cos \lambda x + \sin \lambda x)] + \frac{\nu \gamma a (l-x)^2}{2Eh}.$$

Інші крайові умови:

при $x = 0$:



при $x = l$:

$$u_x = u_z = \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0;$$

$$M_x = D \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0, \quad Q_x = D \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3} = 0.$$

З цих п'яти крайових умов визначають усі інші довільні сталі C_i .

Якщо довжина резервуара l значно більша порівняно з a та h , то циліндр можна розглядати як нескінченно довгий. У цьому випадку $C_4 = C_5 = 0$, і крайові умови матимуть вигляд:

при $x = 0$:

$$u_x = u_z = \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0,$$


звідки

$$\frac{\nu}{2\lambda a} (C_2 + C_3) + \frac{\nu \gamma a l}{2Eh} + C_6 = 0,$$

$$C_2 + \frac{\gamma a^2 l}{Eh} = 0,$$

$$\gamma(C_3 - C_2) - \frac{\gamma a^2}{Eh} = 0.$$

Розв'язуючи останні рівняння, дістанемо:



$$C_2 = -\frac{\gamma a^2 l}{Eh},$$

$$C_3 = \frac{\gamma a^2}{Eh} \left(\frac{1}{\lambda} - l \right),$$

$$C_6 = -\frac{\nu}{2\lambda a} (C_2 + C_3) - \frac{\nu \gamma a l^2}{2Eh}.$$

Переміщення та зусилля дорівнюють

$$u_z = \frac{\gamma a^2}{Eh} \left\{ l - x - e^{-\lambda x} \left[l \cos \lambda x + \left(l - \frac{1}{\lambda} \right) \sin \lambda x \right] \right\},$$

$$N_s = C \left(\frac{u_z}{a} + \nu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = C \left(\frac{u_z}{a} + \frac{\nu^2}{a} u_z \right) = \frac{C(1 - \nu^2)}{a} u_z,$$

$$M_x = D \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \frac{\gamma a l h}{2\sqrt{3(1 - \nu^2)}} e^{-\lambda x} \left[\left(1 - \frac{1}{\lambda l} \right) \cos \lambda x - \sin \lambda x \right],$$

$$M_s = \nu D \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2},$$

$$Q_x = D \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3}.$$

Найбільший згинувий момент буде при $x = 0$:

$$M_{x=0} = M_0 = \left(1 - \frac{1}{\lambda l}\right) \frac{\gamma a l h}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}}.$$

Характер епюр M_x та N_s наведено на рис. 14.14.

14.13. Безмоментний напружений стан оболонок

Безмоментний напружений стан оболонок більш просто описує їх роботу, при тому в багатьох випадках дає правильне уявлення про роботу оболонок.

В цій теорії необхідно знехтувати усіма моментами. Це відповідає двом випадкам роботи оболонок. Або якщо жорсткість оболонок на згин мала або коли малі зміни кривини та кручення серединної поверхні. У першому випадку розглядається абсолютно гнучкі оболонки (мембрани). У другому розглядаються оболонки, що мають кінцеве значення жорсткості при згині.

Особливістю роботи абсолютно гнучких оболонок є наявність лише розтягуючих навантажень, будь-яка стискальна сила викличе втрату їхніх форм.

Оболонки з кінцевим значенням жорсткості у випадку згину можуть знаходитись у безмоментному стані доти, доки стискаючі сили в них не перевищать деяких граничних значень.

Рівняння безмоментної теорії дістанемо безпосередньо з рівнянь загальної теорії оболонок.

У зв'язку з припущенням про мализну зміни кривини та кручення серединної поверхні можемо записати:

$$N_{12} = N_{21} = S;$$

$$Q_{13} = Q_{23} = 0. \quad (14.104)$$

Підставивши ці залежності в (14.69), матимемо систему рівнянь безмоментної теорії другого порядку:

$$\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BN_{11})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AS)}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{22} \right] + q_1 = 0;$$

$$\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BS)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AN_{22})}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{11} \right] + q_2 = 0;$$

$$\frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} - q_n = 0. \quad (14.105)$$

Якщо після розв'язку системи (14.105) були знайдені вирази для N_{11} , N_{22} , S , то для визначення переміщень u , v , w оболонки, що знаходиться у безмоментному напруженому стані, записують систему трьох диференціальних рівнянь:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1} = \frac{1}{Eh} (N_{11} - \nu N_{22});$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} (N_{22} - \nu N_{11});$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) = \frac{2(1+\nu)}{Eh} S. \quad (14.106)$$

Система диференціальних рівнянь безмоментної теорії в переміщеннях має четвертий порядок. Для доведення цього факту достатньо розв'язати систему (14.106) відносно сил N_{11} , N_{22} , S та здобуті залежності підставити в (14.105).

Оскільки безмоментна робота оболонок можлива не завжди, то необхідно навести умови, виконуючи які, безмоментна теорія дає задовільні результати:

1. Лінії спотворення серединної поверхні не утворюють дуже густу сітку. До ліній спотворення відносяться лінії зламу серединної поверхні, лінії стрибкуватої зміни жорсткості, краї оболонки, лінії стрибкуватої зміни кривини та стрибкуватої зміни зовнішнього навантаження.

2. Жодна лінія спотворення не повинна торкатися асимптотичної лінії серединної поверхні, тобто лінії, вздовж якої нормальна кривина дорівнює нулю. Наприклад, циліндрична оболонка не повинна мати підсилень уздовж твірної. Зовнішні поверхневі та крайові навантаження, включно із силами реакцій, повинні мати малий показник зміни у будь-якому напрямку.

3. Серединна поверхня оболонки не повинна мати деяких особливостей, а саме: а) циліндрична поверхня не повинна бути достатньо короткою; б) кінчна поверхня не повинна включати вершини і не повинна бути дотичною до площини по замкненій кривій.

4. Крайові умови повинні забезпечувати жорсткість серединної поверхні, тобто унеможливлувати деформації згину та кручення, крім деформацій розтягу та стиску.

Перераховані умови є достатніми, але не необхідними, оскільки можливі напружені стани, що не задовольняють наведеним умовам, але в той же час є безмоментними.

Прикладом цього є одновісний розтяг довгої циліндричної оболонки.

Приклад 1.2 Розглянемо напружений стан сферичної оболонки (рис. 14.15) під дією вісесиметричного розподіленого зовнішнього навантаження інтенсивністю q на одиницю площі горизонтальної проекції оболонки.

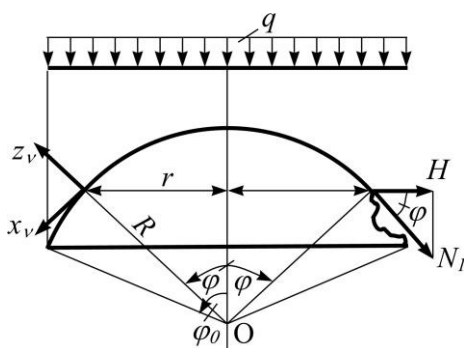


Рис. 14.15. Сферична оболонка під дією вісесиметричного розподіленого зовнішнього навантаження

Розв'язок. У випадку сферичної оболонки головні радіуси кривини

однакові:

$$R_1 = R_2 = R.$$

Замінюючи координати α на φ , а β на θ згідно з рис. 14.16 дістанемо такі значення довжин лінійних елементів:

$$ds_1 = R d\varphi, \quad ds_2 = r d\theta = R \sin \varphi d\theta. \quad (a)$$

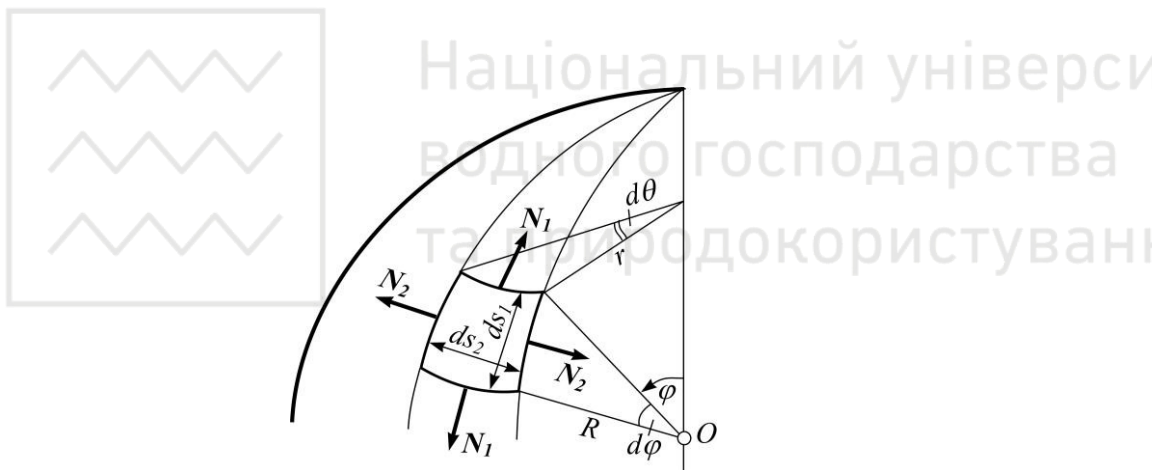


Рис. 14.16. Система координат сферичної оболонки

Порівнюючи співвідношення (a) та (14.3), бачимо, що коефіцієнти першої квадратичної форми набувають вигляду:

$$A = R, \quad B = R \sin \varphi,$$

а рівняння (14.105) перетворюються до вигляду:

$$\frac{\partial(N_{11} \sin \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial \theta} - N_{22} \cos \varphi + q_1 R \sin \varphi = 0;$$

$$\frac{\partial(S \sin \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{22}}{\partial \theta} + S \cos \varphi + q_2 R \sin \varphi = 0;$$

$$N_{11} + N_{22} - q_n R = 0. \quad (б)$$

У випадку вісесиметричного навантаження зусилля не залежать від кута θ і всі похідні по θ дорівнюють нулеві. Крім того сили зсуву $S = 0$. Дійсно в силу симетрії в кожному меридіональному перерізі зліва та справа повинні існувати однакові сили зсуву, напрямлені в один бік. Це суперечить умовам рівноваги і може бути лише при $S = 0$. Тоді система (б) спрощується до вигляду:

$$\frac{\partial(N_{11} \sin \varphi)}{\partial \varphi} - N_{22} \cos \varphi + q_1 R \sin \varphi = 0;$$

$$N_{11} + N_{22} - q_n R = 0. \quad (в)$$

У зв'язку із визначеністю напрямків головних кривин зусилля в сферичній оболонці мають такі назви: N_{11} – меридіональна сила (її напрямком збігається з напрямком меридіанів на сфері), N_{22} – кільцева (колова) сила.

Складові поверхневого навантаження (рис 14.15) запишемо так:

$$q_1 = q \sin \varphi \cos \varphi; \quad q_n = -q \cos^2 \varphi.$$

Підставляючи вирази q_1 і q_n у рівняння (в), дістанемо:

$$\frac{\partial(N_{11} \sin \varphi)}{\partial \varphi} - N_{22} \cos \varphi + qR \sin^2 \varphi \cos \varphi = 0;$$

$$N_{11} + N_{22} - qR \cos^2 \varphi = 0. \quad (з)$$

Розв'язок системи рівнянь (з) дає:

$$N_1 = N_{11} = -\frac{qR}{2}; \quad N_2 = N_{22} = \left(-\frac{qR}{2}\right) \cos 2\varphi.$$

Епюри меридіональних та кільцевих сил за висотою куполу зображено на

рис. 14.17. Стискаюча кільцева сила має максимальне абсолютне значення на вершині купола, при $\varphi = 0$. В міру просування донизу кільцева сила зменшується і при $\varphi = 45^\circ$ дорівнює нулю. Далі ця сила стає розтягуючою і зростає. Меридіональна сила залишається постійно стискаючою.

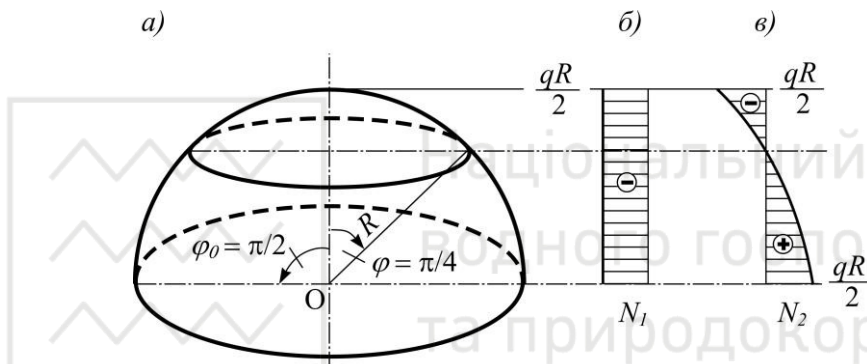


Рис. 14.17. Епюри меридіональних (б) та кільцевих (в) сил у сферичній оболонці (а)

Для визначення горизонтальної складової H меридіональної сили N_1 розглянемо рис. 14.15, звідки

$$H = N_1 \cos \varphi = \left(-\frac{qR}{2} \right) \cos \varphi.$$

На нижньому краю купола, при $\varphi = \varphi_0$, виникає горизонтальна складова реакції

$$H_0 = \left(-\frac{qR}{2} \right) \cos \varphi_0, \quad (\partial)$$

для сприйняття якої купол ставиться на опорне кільце. Реакція викликає в кільці сили розтягу N_K . Значення цих сил визначимо з розгляду рівноваги половини опорного кільця (рис. 14.18). Проектуючи всі сили на вертикальну вісь, дістанемо:

$$-2N_K + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H_0 r_0 d\theta \cos\theta = 0$$

звідки після інтегрування шукана сила дорівнює:

$$N_K = H_0 r_0$$

або, з урахуванням виразів (а) та (д), матимемо:

$$N_K = \left(-\frac{qR^2}{4} \right) \sin 2\varphi_0.$$

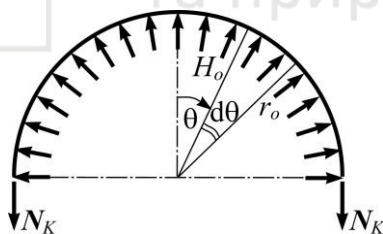
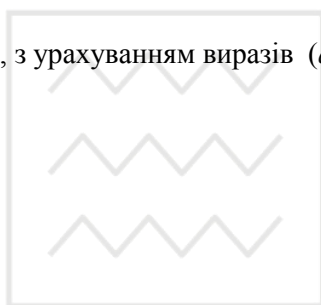


Рис. 14.18. Опорне кільце сферичної оболонки

Найбільшої величини сила розтягу N_K в опорному кільці досягає при куті $\varphi_0 = 45^\circ$. Якщо $\varphi_0 = 90^\circ$, то ця сила дорівнює нулю і необхідність у встановленні опорного кільця відпадає.

Контрольні запитання

1. Які тіла називають оболонками в теорії пружності?
2. Що називають серединною поверхнею оболонки?
3. Якими є шляхи розв'язку задач теорії оболонок?
4. У яких випадках для розрахунків оболоноквих конструкцій можна використовувати безмоментну теорію?

Література

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974, – 446 с.
2. Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології. Підручник. - К.: Каравела, 2012. - 696 с.
3. Баженов В. А., Іванченко Г. М., Шишов О. В., Пискунов С. О. Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування: Навч. посібник. – 3-є вид., випр. і доп. – К. : Каравела, 2010, – 504 с.
4. Безухов Н.И. Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1965. – 320 с.
5. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высш. школа, 1968. – 512 с.
6. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. Учебное пособие для строительных специальностей вузов. – М.: Высшая школа, 1987. – 264 с.
7. Беляев Н.М. Соппротивление материалов. – М.: Госиздат техн.-теорет. литературы, 1956. – 856 с.
8. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М., «Машиностроение», 1977. – 488 с., ил.
9. Бишоп Р. Колебания. – М.: «Наука», 1979. – 160 с.
10. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. – М.: Госиздат лит-ры по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1962. – 476 с.
11. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
12. Грач С.А. Геометрические характеристики плоских сечений. – Фрунзе: «Мектеп», 1976. – 384 с.
13. Дорошук Г.П., Трач В.М. Будівельна механіка. Навчальний посібник. – К.: ІЗМН, 1996. – 520 с.

14. Дорошук Г.П., Трач В.М. Основи будівельної механіки: Підручник. – Рівне: НУВГП, 2003 – 504 с., ил.
15. Дорошук Г.П., Трач В.М. Будівельна механіка з елементами інформаційних технологій: Підручник. – Рівне: НУВГП, 2005. – 566 с.
16. Дорошук Г.П., Трач В.М. Будівельна механіка. Приклади, задачі та комп'ютерні розрахунки. Навч. посібник. – Рівне : НУВГП, 2008.– 472 с.
17. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. М.: Госстройиздат, 1957. – 257 с.
18. Заславский Б.В. Краткий курс сопротивления материалов. – М.: ”Машиностроение”, 1986. – 328 с.
19. Киселев В.А. Расчет пластин. М.: Высш. школа. 1976. – 151 с.
20. Клейн Г.К. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Учеб. пособие для вузов. М., «Высш. школа», 1972. – 320 с., ил.
21. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. – М.: Высш. школа, 1987. – 256 с., ил.
22. Корнілов О. А. Опір матеріалів: Підручник для технічних вишів. – К.: Логос, 2003. – 552 с.
23. Корнілов Г.Л. Теорія пружності в прикладах та задачах. – К.: ХАІ, 1994. – 196 с.
24. Мартиненко А.О. Щодо економічності конструкції зі стиснутими тонкостінними стрижнями відкритого профілю. // Вісник РДТУ: Зб. наукових праць. Вип. 2 (15). – Рівне: НУВГП, 2002. – С. 573-580.
25. Мартиненко А.О. Основи теорії пружності (короткий курс). – Рівне: НУВГП, 2007. – 131 с.
26. Мартиненко А.О. Універсальна функція напруг в алгебричних поліномах. – Рівне: НУВГП, 2007. – 142 с.
27. Мартиненко А.О. Диференційне рівняння закрутових моментів у випадку скutoго кручення тонкостінних стержнів відкритого профілю. // Вісник НУВГП: Зб. наукових праць. Вип. 3 (43). – Рівне: НУВГП, 2008. – С. 162-167.
28. Мартиненко А.О., Подворний А.В. Опір матеріалів (спеціальний курс). Частина I: Навчальний посібник. – Рівне: НУВГП, 2010. – 334 с.

29. Метод конечных элементов: Учебное пособие для вузов. / Под ред. П.М. Варвака. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1981. – 176 с.
30. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості. К.: Вища школа, 2002. – 308 с.
31. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов). – Киев: Будівельник, 1980. – 232 с.
32. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1951, – 344 с.
33. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Издат. Московского университета, 1969. – 695 с., ил.
34. Опір матеріалів з основами теорії пружності і пластичності. Підручник. У 2-х ч., 5-и кн. – Ч. I, кн. 2: Опір бруса. / В.Г.Піскунов, Ю.М.Федоренко, В.Д.Шевченко та ін. / За ред. В.Г.Піскунова. – Київ: Вища школа, 1994. – 335 с.
35. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. Підручник. У 2-х ч., 5-и кн. – Ч. I, кн. 1: Загальні основи курсу. / За ред. В.Г.Піскунова. – Київ: Вища школа, 1994. – 204 с.
36. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. Підручник. У 2-х ч., 5-и кн. – Ч. I, кн. 3: Опір дво- і тривимірних тіл. / В.Г. Піскунов, В.С. Сіпетов, В.Д. Шевченко, Ю.М. Федоренко. / За ред. В.Г. Піскунова. – Київ: Вища школа, 1995. – 271 с.
37. Панарин Н.Я., Тарасенко И.И. Соппротивление материалов. – М.: Госстройиздат, 1962. – 528 с.
38. Писаренко Г.С. та інші. Опір матеріалів. – Київ. Вища школа, 2004. – 655 с.
39. Рекач В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. Учеб. пособие для студентов строительных специальностей вузов. – 2-е изд. испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1984. – 287 с., ил.
40. Ржаницын А.Р. Строительная механика: Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
41. Садэтов. Расчет тонкостенных стержней открытого профиля. – М.: Росвузиздат, – 1963. – 87 с.
42. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности: Учебное пособие для студентов вузов. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. школа, 1982. – 264 с.

43. Самуль В.Н. Основы теории упругости и пластичности. – М.: «Высшая школа», 1970. – 288 с.
44. Строительная механика: Учебник для вузов. / Под ред. А.В.Даркова. – М.: «Высшая школа», 1976. – 600 с.
45. Строительная механика: Учебник для вузов. / Под ред. А.В.Даркова. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 656 с.
46. Державні будівельні норми: Сталеві конструкції. Норми проектування, виготовлення і монтажу: ДБН В.2.6-163:2010. – Київ: Мінрегіонбуд України, 2011. – 202 с.
47. Теребушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
48. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
49. Федосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1963, – 540 с.
50. Шваб'юк В. І. Опір матеріалів: Навч. посібник. – К.: Знання, 2009, – 380 с.
51. Шкільов Л.Т., Станкевич А.М., Пошивач Д.В. Опір матеріалів. К.: ЗАТ „Віпол”, 2011. – 456 с.
52. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний: Учебное пособие для вузов. – М.: «Высшая школа», 1975. – 248 с.
53. Agrygis J.H. and Kelsey S. “Energy Theorems and Structural Analysis”. Aircraft Engineering. Vols. 26 and 27, 1955.
54. Clough R.W. “The Finite Elements in Plane Stress Analysis”. Proceedings 2nd A.S.C.E. Conference on Electronic Computation. Pittsburgh. Pa. Sept. 1960.
55. Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C. and Topp L.J. “Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures”, Journal of Aeronautical Science. Vol. 23, 1956, pp. 805-823.
56. Войналович О., Моргунюк В. Російсько-український словник наукової і технічної мови (термінологія процесових понять). – К.: Вирій, Стакер, 1997. – 256 с.
57. Юкава Х. Лекции по физике. – М.: Энергоиздат, 1981. – 128 с.

Навчальне видання

ВОЛОДИМИР МИРОСЛАВОВИЧ ТРАЧ
АНДРІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ ПОДВОРНИЙ

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ
(спеціальний курс),
ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ ТА
ПЛАСТИЧНОСТІ**

ПІДРУЧНИК

Керівник видавничих проєктів Ю.В. Піча

Здано на складання 24.12.2015 р.
Підписано до друку 07.01.2016 р. Формат 70x100/16. Папір офсетний.
Друк цифровий. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 40,5.
Обл.-вид. арк 41,25.

Видавництво «Каравела»,
просп. М. Рокоссовського, 8а, м. Київ, 04201, Україна.
Тел. (044) 592-39-36, (050) 355-77-75.
E-mail: caravela@ukr.net

WWW.CARAVELA.KIEV.UA

Свідоцтво
про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції:
ДК №2035 від 16.12.2004 р.