О. КОБЕЛЕВА і А. КИСЕЛЕВИЧ

ПОСІБНИК З ТРИГОНОМЕТРІЇ

Ціна 3 крб.

ВИДАВНИЦТВО
„РАДЯНСЬКА ШКОЛА"
1939

О. КОБЕЛЕВА і А. КИСЕЛЕВИЧ

ПОСІБНИК
З ТРИГОНОМЕТРІЇ

Під загальною редакцією
О. М. КОБЕЛЕВОЇ

Допущено НКО УРСР

ВИДАВНИЦТВО
„РАДЯНСЬКА ШКОЛА"
КИЇВ - 1939

Редактор *М. С. Сігалов* Техредактор *С. Р. Політієнко*
Літредактор *В. С. Мазлах* Коректор *Ю. С. Кругліков*

„Радшкола". Рукопис № 20. Уповн. Головліту № 4328. Зам. № 5549. Тираж 5 200. Друк. арк. $14^1/_4$. Папер. арк. $7^1/_8$. Обл.-авт. арк. 17,6. Знаків в 1 папер. арк. 92 000. Формат паперу $60 \times 92^1/_{16}$. Здано у виробництво 20/XI 1938 р. Підписано до друку 4/IX 1939 р.

Ціна книги 2 крб. 65 коп. Оправа 35 коп.

3 поліграф. ф-ка, Полтава.

ПЕРЕДМОВА.

Цей посібник має характер поширеного підручника з деякими методичними зауваженнями для викладачів.

В ньому досить докладно подано розділи про тригонометричні функції гострого кута, обернені тригонометричні функції і тригонометричні рівняння, яким не приділяється належної уваги в інших підручниках і посібниках.

В кожному розділі даються зразки розв'язування прикладів та задач і, де треба, відповідні дослідження їх.

На нашу думку, цю книгу можуть використовувати не тільки викладачі, але й учні, які схочуть поглибити свої знання в галузі тригонометрії.

В цьому посібнику О. М. Кобелева написала вступ і розділи III, IV, VI, X, XI і половину розділу XII, а всі інші розділи написав А. Д. Киселевич під редакцією О. М. Кобелевої.

Автори.

ВСТУП.

§ 1. Предмет тригонометрії.

Тригонометрію розглядають звичайно як окрему дисципліну, але вона так тісно пов'язана з геометрією, що їх не можна повністю відокремити одну від одної.

Слово тригонометрія утворилося з грецьких слів τρίγωνον — трикутник та μετρεῖν — міряти і означає вимірювання трикутників.

Розв'язати (або виміряти) трикутник це значить — за трьома незалежними елементами його визначити всі інші.

Коли трикутник прямокутний, то один з елементів (а саме — прямий кут) уже заданий, а тому для розв'язування такого трикутника досить дати два елементи.

Розв'язувати трикутники можна і в геометрії. Наприклад, дана сторона і два кути. Треба знайти всі інші основні елементи. Третій кут визначають на підставі аналітичної залежності між внутрішніми кутами трикутника, а щоб визначити невідомі сторони, треба застосувати графічний спосіб, тобто побудувати за даними в умові елементами трикутник і потім шляхом вимірювання наближено визначати довжину невідомих сторін.

Ще приклад. Треба розв'язати прямокутний трикутник за двома сторонами або косокутний — за двома сторонами і проекцією однієї з них на другу.

Як це зробити? Третю сторону можна визначити аналітично, тобто шляхом обчислень (на підставі відомих формул), а щоб визначити кути, знову застосовують графічний спосіб. Побудувавши трикутник, треба виміряти принаймні два кути.

З наведених прикладів видно, що метод обчислень в геометрії обмежений, оскільки остання аналітичної залежності між сторонами і кутами (за деякими винятками) взагалі не дає. Доводиться частково застосовувати графічний метод.

Але недосконалість нашого зору, приладів (при вимірюванні та будуванні) тягне за собою багато помилок, границі яких трудно визначити, чому метод суто аналітичний вважають за кращий.

Для цієї мети в тригонометрії вводять особливого роду величини, які мають назву т р и г о н о м е т р и ч н и х ф у н к ц і й. З їх допомогою встановлюють аналітичну залежність між лінійними елементами і кутами у трикутнику.

Ту частину тригонометрії, де вивчають властивості цих функцій і залежності між ними, називають гоніометрією, відрізняючи її від другої частини — власне тригонометрії, тобто розв'язування трикутників.

§ 2. Поняття про функцію.

Величини бувають сталі і змінні. Коли за даних умов величина зберігає весь час одне й те саме числове значення, то її називають сталою, а коли вона набирає різних числових значень, то її називають змінною. Наприклад, у даного круга радіус—величина стала, а хорда—величина змінна. Треба сказати, що поняття про сталу й змінну величини — умовне. Величину, яку можна за даних умов розглядати як сталу, за інших умов треба розглядати як змінну. Радіус даного круга є величина стала, а радіус взагалі є величина змінна. Вага даного тіла в певній точці земної кулі є величина стала, а вага того самого тіла, коли його переносити в різні місця земної поверхні, є величина змінна.

Коли змінна x задовольняє умові $a \leqslant x \leqslant b$, то кажуть, що x змінюється в інтервалі (a, b).

Змінні величини, що (за даних умов) змінюються довільно, незалежно від зміни інших величин, називаються незалежними змінними, а змінні величини, зміна яких залежить від зміни однієї, двох або кількох величин, мають назву залежних змінних, або функцій.

Наприклад, величина площі квадрата залежить від величини його сторони, об'єм кулі — від величини її радіуса, а тому і кажуть, що площа квадрата є функція сторони, а об'єм кулі є функція радіуса.

Змінна величина, від зміни якої залежить зміна функції, має назву аргумента. У наведених прикладах сторона квадрата і так само радіус кулі — аргументи відповідних функцій.

Тут аргументи є незалежні змінні, але це не завжди буває так. Іноді аргумент і сам є функція, тоді мають справу, як кажуть, з функцією від функції. Наприклад, площа квадрата, вписаного в круг, є функція від сторони, а сторона, в свою чергу, є функція від радіуса круга.

Коли y є функція від x, а z є функція від x і y, то це записують так:

$$y = f(x) \text{ або } y = \varphi(x) \text{ або } y = \psi(x) \ . \ . \ .$$
$$z = f(x, y) \text{ або } z = \varphi(x, y) \ . \ . \ .$$

Під знаками f, φ, ψ розуміють сукупність усіх дій або операцій, які виконують над аргументами, щоб утворити функцію.

Функцію можна задати аналітично явно, тобто дати точний вираз функції, показуючи всі дії і операції, які виконують над аргументом, щоб утворити функцію. Наприклад, можна задати функцію y так:

$$y = x^2; \quad y = x^2 + 1 \text{ тощо.}$$

Але можна задати функцію і неявно, тобто написати тільки рівняння, що зв'язує функцію з аргументом, наприклад:

$$2x + y = 10.$$

Тут величини x і y зв'язані функціональною залежністю так, що нема особливих підстав розглядати якусь одну з них як функцію, а другу—як аргумент. Коли ми умовимось y розглядати

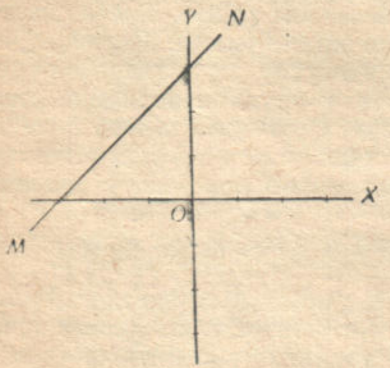

Рис. 1.

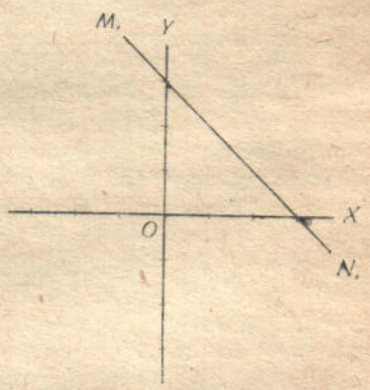

Рис. 2.

як функцію від x, зручно цю залежність написати в явній формі, визначивши y через x, а саме так: $y = 10 - 2x$. Коли ж ми, навпаки, вибираємо x як функцію, тоді пишемо: $x = \frac{10 - y}{2}$.

При функціональній залежності між двома або кількома змінними в деяких випадках доцільний вибір функції спрощує розв'язування задачі.

Якщо разом із збільшенням аргумента збільшується значення функції, то функцію називають **зростаючою**. Наприклад, $y = x + 3$ є функція зростаюча. А якщо разом із збільшенням аргумента зменшується значення функції, то функція має назву **спадної**. Наприклад, $y = 3 - x$ є спадна функція.

Зміну кожної функції можна представити графічно. Щоб побудувати графік функції $y = f(x)$, треба надавати аргументові x ряд довільних окремих значень, досить близьких одне до одного, і визначити відповідні значення функції y.

Визначивши таким способом ряд пар значень для x і y і прийнявши їх за прямокутні координати точок, треба побудувати ці точки. Вони й дадуть наближений обрис графіка у вигляді тієї або іншої лінії.

Можна іноді будувати лінію більш-менш точно неперервним рухом на підставі властивості, яку визначає рівняння, що зв'язує функцію з аргументом.

Коли для x в інтервалі (a, b) функція весь час спадає або весь час зростає, кажуть, що функція в цьому інтервалі змінюється монотонно.

Функції $y=x+3$ і $y=3-x$, як бачимо з графіків (рис. 1 і 2), змінюються монотонно, хоч би який інтервал узяти. А щодо функції $y=\frac{1}{2}x^2$ (рис. 3), то вона змінюється монотонно для аргумента в інтервалах $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$ і т. д. і так само — в інтервалах $(-1, 0)$, $(-2, 0)$, $(-3, 0)$, $(-4, 0)$ і т. д.

Зміна функції буде не монотонною для x в інтервалах $(-1, 1)$, $(-2, 2)$, $(-3, 3)$ і т. д., тому що для від'ємних значень x (це можна побачити і з графіків) функція спадає, а для додатних значень x — зростає.

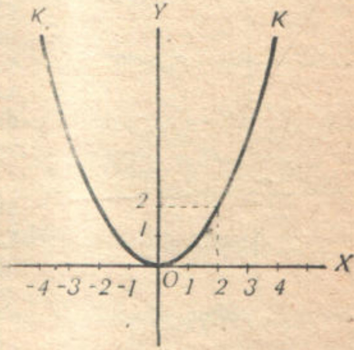

Рис. 3.

Функції можуть бути однозначними і многозначними. Коли одному значенню аргумента відповідає тільки одне значення функції, то функція однозначна.

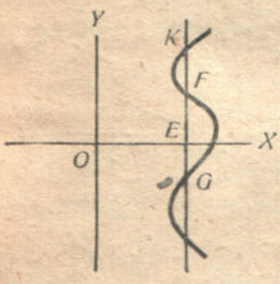

Рис. 4.

А коли одному значенню аргумента відповідає більше ніж одне значення функції, то функцію називають многозначною. Усі раніше розглянуті функції $y=x+3$, $y=3-x$, $y=\frac{1}{2}x^2$ є функції однозначні. Це можна побачити і на графіках. Функція $y=\pm\sqrt{x}$, очевидно, функція многозначна, бо кожному значенню x відповідає два значення y.

Функція, графік якої буде такий, як показано на рис. 4, є функція многозначна, бо одному значенню x [наприклад, $x=a(OE)$] відповідає кілька значень y, а саме: $b_1(EG)$, $b_2(EF)$, $b_3(EK)$...

Серед функцій трапляються такі, що мають назву парних і непарних. Коли від зміни знака аргумента функція не змінює ні своєї абсолютної величини, ні знака, тобто коли $f(-x)=f(x)$, то вона називається парною.

До таких функцій належить, наприклад, функція $y=x^2$.

А якщо від зміни знака аргумента функція, не змінюючи абсолютної величини, змінить свій знак, тобто коли $f(-x)=-f(x)$, то її називають непарною; наприклад, $y=x^3$ є непарна функція.

Переходимо тепер до елементарного з'ясування поняття про неперервність функції. Функція неперервна при значенні аргумента $x=a$, коли нескінченно малому приростові[1] (додатному чи від'ємному) цього значення аргумента x відповідає теж нескінченно малий приріст відповідного значення функції.

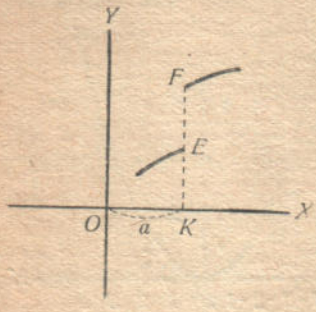

Рис. 5.

А якщо нескінченно малому приростові значення аргумента відповідає скінченний або нескінченно великий приріст відповідного значення функції, то кажуть, що для значення аргумента $x=a$ функція має розрив, або що „функція в точці $x=a$ зазнає розриву неперервності".

Коли функція неперервна для всіх значень аргумента або для значень аргумента в інтервалі (a, b), то кажуть, що „функція неперервна взагалі або в даному інтервалі".

Коли функція неперервна, графік її являє собою суцільну лінію без розриву; наприклад, такий, як зображено на кожному з рис. 1, 2, 3 і 4.

А якщо графік функції буде такий, як показано на рис. 5, то ясно, що функція, відповідна цьому графікові, має розрив неперервності для $x=a$, бо нескінченно малому додатному приростові значення x аргумента відповідатиме скінченний приріст відповідного значення функції y.

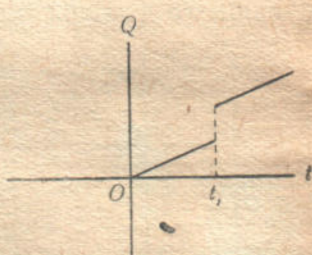

Рис. 6.

Аналогічний графік (рис. 6) дає залежність кількості тепла Q від температури t при нагріванні металу $[Q=f(t)]$.

Спочатку підвищення температури іде разом з нагріванням тіла, поки температура не досягне t_1 (температури топлення). А далі, хоч тепло і витрачатиметься, але температура t_1 залишається деякий час незмінною, поки не розтопиться тіло. Після цього почнеться підвищення температури. Тут графік являє собою розривну криву. При $t=t_1$ функція $Q=f(t)$ має розрив неперервності.

[1] Під словом приріст розуміють зміну як у сторону збільшення, так і в сторону зменшення.

РОЗДІЛ І[1].

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ КУТА ВІД 0 ДО 90°.

§ 3. Визначення тригонометричних функцій гострого кута.

1. Синус і косинус. Візьмімо довільний гострий кут A (рис. 7). Провівши з довільних точок $B, B_1, B_2 \ldots . B_n$ сторони AM перпендикуляри BC, B_1C_1, $B_2C_2 \ldots . B_nC_n$ на сторону AN

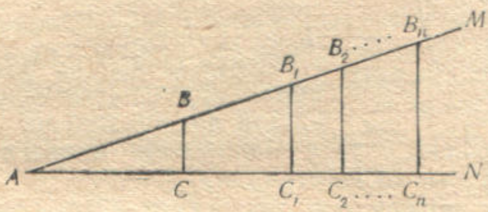

Рис. 7.

одержимо ряд подібних трикутників з спільним гострим кутом A. На підставі подібності цих трикутників маємо:

$$1)\ \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \ldots\ldots = \frac{B_nC_n}{AB_n} = \text{const.}\ ^2;$$

$$2)\ \frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} = \ldots\ldots = \frac{AC_n}{AB_n} = \text{const.}\ ^2.$$

Ми одержали два ряди відповідно рівних між собою відношень, звідки можна зробити такий висновок: для кожного гострого кута, який можна розглядати як кут прямокутного трикутника, відношення катетів

---

[1] Цей розділ безпосередньо приєднується до розділу геометрії про подібність трикутників і є начебто його натуральним продовженням.

Це є місток для полегшення переходу від відомого учням раніше до нових понять про узагальнення кута і його тригонометричних функцій.

[2] Скорочене позначення латинського слова constans або французького constant — сталий.

протилежного і прилеглого (відносно даного кута) до гіпотенузи є величина стала для даного кута.

Коли ж, не змінюючи положення точки A, почати змінювати величину кута A [напр., обертаючи сторону AB навколо точки A (рис. 8) в той чи інший бік], то трикутники $BAC, B'AC', B''AC''$, які ми одержимо, опустивши перпендикуляри BC, $B'C'$, $B''C''$, не можуть бути подібними, тобто жодне з відношень $\frac{B'C'}{AB'}$ і $\frac{B''C''}{AB''}$ не може дорівнювати відношенню $\frac{BC}{AB}$; так само: жодне з відношень $\frac{AC'}{AB'}$ і $\frac{AC''}{AB''}$ не може дорівнювати відношенню $\frac{AC}{AB}$.

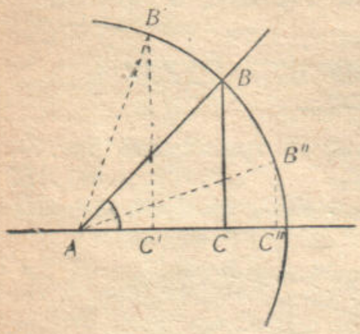

Рис. 8.

Отже, коли кут залишається незмінним, вищезгадані відношення зберігають свою величину, в якому б прямокутному трикутнику не розглядати гострий кут. Якщо змінити кут, ці відношення катетів протилежного і прилеглого до гіпотенузи відповідно змінюються, а тому й кажуть, що ці відношення, які мають назву синуса й косинуса, є функції кута. Дамо їх означення.

Синус (sinus) **кута є відношення протилежного** (відносно даного кута) **катета до гіпотенузи.**

Косинус (cosinus) **кута є відношення прилеглого** (відносно даного кута) **катета до гіпотенузи.**

Скорочено їх позначають так: синус — sin, а косинус — cos.

2. Тангенс і котангенс. Ті самі властивості мають і відношення катетів, а саме:

$$3)\ \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \ldots\ldots = \frac{B_nC_n}{AC_n} = \text{const};$$

$$4)\ \frac{AC}{BC} = \frac{AC_1}{B_1C_1} = \frac{AC_2}{B_2C_2} = \ldots\ldots = \frac{AC_n}{B_nC_n} = \text{const}.$$

Застосовуючи до цих відношень міркування, аналогічні попереднім, приходимо до висновку: відношення катета протилежного до катета прилеглого або, навпаки, відношення катета прилеглого до протилежного є функції кута.

Ці функції мають назву тангенса і котангенса.

Тангенс (tangens) **кута є відношення протилежного** (відносно даного кута) **катета до прилеглого.**

Котангенс (cotangens) **кута є відношення прилеглого** (відносно даного кута) **катета до протилежного.**

Скорочено їх позначають так: тангенс — tg, а котангенс — ctg.

3. **Секанс і косеканс.** Дамо ще означення двох останніх тригонометричних функцій: секанса й косеканса.

Секанс (secans) **кута є відношення гіпотенузи до прилеглого** (відносно даного кута) **катета.**

Косеканс (cosecans) **кута є відношення гіпотенузи до протилежного** (відносно даного кута) **катета.**

Скорочено їх позначають так: секанс — sec, а косеканс — csc.

4. На підставі даних означень тригонометричних функцій у прямокутному $\triangle BAC$ (рис. 9) маємо:

$$\sin A = \frac{a}{c}; \qquad \cos A = \frac{b}{c}.$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}; \qquad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

$$\csc A = \frac{c}{a}; \qquad \sec A = \frac{c}{b}\ ^{1}.$$

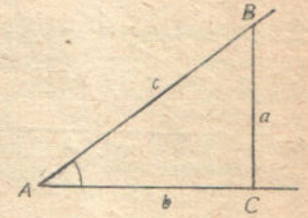

Рис. 9.

З аналітичних виразів для всіх цих функцій кута можна бачити, що величини тангенса і котангенса, косинуса і секанса, синуса і косеканса є взаємно-обернені.

З а у в а ж е н н я. Ніколи не можна: 1) ставити крапку після назви тригонометричної функції, 2) відокремлювати назву тригонометричної функції від кута, тобто не можна писати лише саму назву тригонометричної функції — без кута, від якого вона залежить. Так, треба писати: $\sin \alpha$; $\sin x$; $\cos A$; $\cos y$; $\operatorname{tg} B$; $\operatorname{tg} \alpha$ тощо.

§ 4. Тригонометричні функції доповняльних кутів.

1. Два кути, які в сумі складають 90°, називаються в з а є м н о-д о п о в н я л ь н и м и кутами.

Так, наприклад, кути: 30° і 60°; 45° і 45°; 47°30′ і 42°30′; 15°27′ і 74°33′; $90° - \alpha$ і α і т. д. — взаємно-доповняльні.

2. Дві тригонометричні функції того самого кута, назви яких відрізняються одна від одної тільки слогом *„со“*, називаються в з а є м н о - д о п о в н я л ь н и м и функціями, або кофункціями.

Так, взаємно-доповняльні функції будуть: $\sin x$ і $\cos x$; $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$; $\sec x$ і $\csc x$.

---

[1] Прийнято позначати кути даного трикутника великими буквами, які пишуть при вершинах цих кутів, а протилежні кутам сторони — однойменними маленькими буквами. Крім того, вершину прямого кута позначатимемо великою буквою C, а гострі кути — A і B. Тоді, відповідно, гіпотенуза позначається маленькою буквою c, а катети — буквами a і b.

З трикутника ABC (рис. 10) маємо:

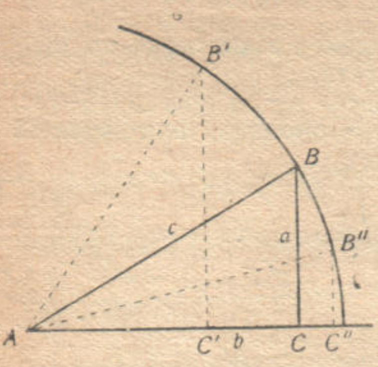

Рис. 10

$$A + B = 90^\circ;$$
$$\frac{a}{c} = \sin A = \cos B;$$
$$\frac{b}{c} = \cos A = \sin B;$$
$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B;$$
$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B;$$
$$\frac{c}{b} = \sec A = \csc B;$$
$$\frac{c}{a} = \csc A = \sec B.$$

Звідси:

$$\sin A = \sin (90^\circ - B) = \cos B;$$
$$\cos A = \cos (90^\circ - B) = \sin B;$$
$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} (90^\circ - B) = \operatorname{ctg} B.$$

Висновок. Тригонометрична функція кута дорівнює відповідній кофункції доповняльного кута.

Наприклад: $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$; $\operatorname{tg} 52^\circ = \operatorname{ctg} 38^\circ$; $\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; $\operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ і т. д.

Запитання. . Якщо $\cos 63^\circ = 0{,}454$, то синус якого кута найлегше визначити і чому цей синус дорівнюватиме?

§ 5. Зміна синуса і косинуса.

Якщо кут A змінюється (рис. 10), то гіпотенуза $AB\,(c)$ залишається без зміни ($AB = AB' = AB'' = \ldots$); навпаки, катети змінюються, при чому при збільшенні кута протилежний катет $BC\,(a)$ збільшується, а прилеглий катет $AC\,(b)$ — зменшується. Якщо зміна кута відбувається в напрямі зменшення, маємо зворотне явище — протилежний катет $BC\,(a)$ зменшується, а прилеглий $AC\,(b)$ — збільшується.

З цього можна зробити висновок, що для кута в інтервалі $(0,\ 90^\circ)$:

1) при збільшенні кута синус збільшується, а при зменшенні кута синус зменшується;

2) при збільшенні кута косинус зменшується, а при зменшенні кута косинус збільшується.

Простежимо, в яких межах змінюються синус і косинус, коли кут A змінюється від 0 до 90°.

Коли кут A, зменшуючись, дорівнюватиме 0°, катет $BC\,(a)$ перетвориться в точку, а катет $AC\,(b)$ дорівнюватиме гіпотенузі, а тому $a = 0$, $b = c$.

Звідси:

$$\sin 0^\circ = \frac{0}{c} = 0;$$
$$\cos 0^\circ = \frac{c}{c} = 1.$$

Якщо ж кут A поступово збільшуватиметься до 90°, то синус зростатиме, і в той самий момент, коли кут A дорівнюватиме 90°, гіпотенуза $BA(c)$ зіллється з катетом $BC(a)$, а катет $AC(b)$ перетвориться в точку, а тому $c=a$, $b=0$.

Звідси:

$$\sin 90^\circ = \frac{c}{c} = 1;$$

$$\cos 90^\circ = \frac{0}{c} = 0.$$

Отже, для кутів у межах від 0 до 90° синус змінюється від 0 до 1, а косинус змінюється від 1 до 0, тобто *синус і косинус завжди менші одиниці* (за винятком граничних значень кута 0 і 90°).

Зауваження. Синус і косинус гострого кута, що не дорівнює нулеві, завжди є відношеннями відповідних катетів до гіпотенузи

$$\frac{\text{катет}}{\text{гіпотенуза}},$$

а тому менші одиниці.

§ 6. Зміни тангенса і котангенса.

Візьмемо прямокутний трикутник BAC (рис. 11).

За означенням тангенса і котангенса

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b};$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}.$$

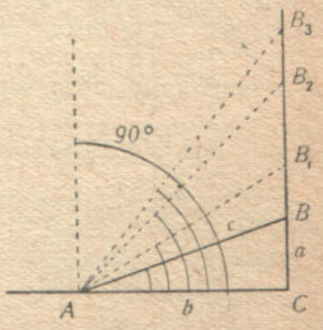

Рис. 11.

Залишаючи катет $AC=b$ незмінним, почнемо збільшувати кут A; тоді гіпотенуза AB займе нові положення AB_1, AB_2, AB_3 . . . , які при збільшенні кута прямуватимуть до положення перпендикуляра, проведеного з вершини кута A до катета AC.

Також змінюється катет $BC(a)$, причому, коли кут збільшується, то й катет $BC(a)$ збільшується, і навпаки — при зменшенні кута зменшується і катет $BC(a)$.

З цього можна зробити висновок, що:

при збільшенні кута тангенс збільшується, при зменшенні кута тангенс зменшується.

Очевидно, коли кут $=0^\circ$, то $a=0$, і

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{b} = 0.$$

У міру того, як кут наближатиметься до 90°, катет $BC(a)$, а значить і $\operatorname{tg} A$, безмежно зростатимуть, і, коли кут A перетвориться в 90°, трикутника не буде, а тому й величину $BC(a)$, а значить і $\frac{a}{b}$, не можна буде визначити жодним числом, яке б велике воно не було. По суті, тангенса кута в 90° не існує, але умовно кажуть, що тангенс цього кута дорівнює нескінченності, і записують це так:

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \infty.$$

Ясно, що коли $\frac{a}{b}$ зростає, то $\frac{b}{a}$ зменшується, звідки робимо висновок, що коли тангенс зростає, то котангенс зменшується.

Оскільки кути 0° і 90° — взаємно-доповняльні, то

$$\operatorname{ctg} 0^\circ = \operatorname{tg} 90^\circ = \infty;$$
$$\operatorname{ctg} 90^\circ = \operatorname{tg} 0^\circ = 0.$$

Отже, коли кут змінюється від 0 до 90°, то тангенс з р о с т а є від 0 до ∞, а котангенс з м е н ш у є т ь с я від ∞ до 0. Тангенс і котангенс для кута в інтервалі (0, 90°) можуть виражатися додатними числами якої завгодно величини.

§ 7. Зміни секанса і косеканса.

Простеживши (рис. 11) за зміною кута A і відповідними змінами гіпотенузи $AB(c)$, робимо висновок:

п р и з б і л ь ш е н н і к у т а с е к а н с з б і л ь ш у є т ь с я,

п р и з м е н ш е н н і к у т а с е к а н с з м е н ш у є т ь с я.

Очевидно, коли кут = 0°, то $c = b$, і

$$\sec 0^\circ = \frac{b}{b} = 1.$$

У міру того, як кут наближатиметься до 90°, гіпотенуза $AB(c)$, а значить і $\sec A$, буде безмежно зростати, і, коли кут A дорівнюватиме 90°, трикутника не буде, а тому і величину $AB(c)$, а значить і $\frac{c}{b}$, тобто $\sec A$, не можна буде визначити жодним числом, яке б велике воно не було.

По суті секанса кута 90° не існує, але умовно кажуть, що секанс такого кута дорівнює нескінченності, і записують це так:

$$\sec 90^\circ = \infty.$$

Отже, при збільшенні кута від 0 до 90° секанс поступово з б і л ь ш у є т ь с я від 1 до ∞.

Оскільки кути 0° і 90° — взаємно-доповняльні, то

$$\csc 0^\circ = \sec 90^\circ = \infty;$$
$$\csc 90^\circ = \sec 0^\circ = 1.$$

Виходить, що, коли кут змінюється від 0 до 90°, косеканс змінюється від ∞ до 1.

Отже, функції $\sec x$ і $\csc x$ для кута в інтервалі (0, 90°) можуть визначатися якими завгодно додатними числами, не меншими одиниці.

§ 8. Значення тригонометричних функцій кутів у 30°, 45° і 60°.

1) Візьмемо прямокутний трикутник ABC з кутом A в 30° (рис. 12). Нехай його катет BC дорівнює c.

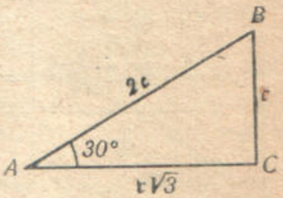

Рис. 12.

На підставі того, що в прямокутному трикутнику катет, протилежний кутові в 30°, дорівнює половині гіпотенузи, гіпотенуза $AB = 2c$.

За теоремою Піфагора другий катет

$$AC = \sqrt{(2c)^2 - c^2} = c\sqrt{3}.$$

Звідси, за означенням тригонометричних функцій гострого кута (§ 3), маємо:

$$\sin 30^\circ = \frac{c}{2c} = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{c}{c\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{c\sqrt{3}}{2c} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{c\sqrt{3}}{c} = \sqrt{3}.$$

2) Через те що кути 60° і 30° взаємно-доповняльні (див. § 4),

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3};$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

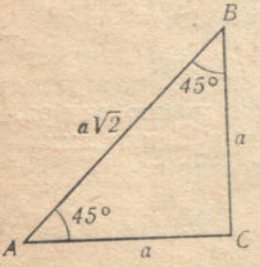

Рис. 13.

Переходимо до кута в 45°. Будуємо рівнобедрений прямокутний трикутник (рис. 13). Очевидно, кожний гострий кут його дорівнює 45°.

Нехай $AC = BC = a$, тоді за теоремою Піфагора гіпотенуза

$$AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Звідси, за означенням тригонометричних функцій гострого кута (§ 3), маємо:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1;$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

Таблиця значень тригонометричних функцій кутів 30°, 45° і 60°.

Назви функцій / Кути	sin	cos	tg	ctg	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=$ $=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}=$ $=\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=$ $=\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}=$ $=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

§ 9. Обчислення графічним методом числових значень тригонометричних функцій для даного кута.

На підставі означень тригонометричних функцій, які були дані в § 3, можна графічним шляхом обчислити наближене значення кожної тригонометричної функції для будьяких гострих кутів.

Приклад. Обчислити:

1) sin 34°, 2) cos 34°, 3) tg 34°.

Р о з в ' я з у в а н н я. За допомогою транспортира будуємо кут в 34° (рис. 14). З будьякої точки B сторони AB проводимо $BC \perp AC$. Тоді даний кут у 34° розглядаємо як кут трикутника ABC, сторони якого можна виміряти однаковими лінійними одиницями.

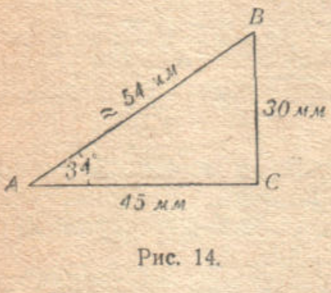

Рис. 14.

Нехай одержали, наприклад, такі значення сторін:
$AB=54$ *мм*, $BC=30$ *мм*, $AC=45$ *мм*.
Тоді:

$$1)\ \sin 34^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{30}{54}\approx 0{,}56;$$

$$2)\ \cos 34^\circ=\frac{AC}{AB}=\frac{45}{54}\approx 0{,}83;$$

$$3)\ \operatorname{tg} 34^\circ=\frac{BC}{AC}=\frac{30}{45}\approx 0{,}67.$$

З а у в а ж е н н я 1. Якщо на стороні AB даного кута взяти іншу точку, наприклад B_1, знову нарисувати трикутник, виміряти його сторони і порівняти одержані результати для відношень $\frac{B_1C_1}{AB_1}$, $\frac{AC_1}{AB_1}$ і $\frac{B_1C_1}{AC_1}$ з попередніми, то вони будуть ті ж самі.

Зауваження 2. Цілком зрозуміло, що аналогічним способом можна одержати числові значення всіх інших тригонометричних функцій.

§ 10. Побудова гострого кута за даними числовими значеннями тригонометричної функції.

Ця задача є обернена до попередньої; справді, знаючи числове значення будьякої тригонометричної функції кута, можна визначити самий кут.

Приклад. Побудувати кути за даними значеннями функцій.

1) Дано: $\sin A = \frac{5}{9}$.

Розв'язування. Будуємо прямий кут (рис. 15).

На одній з його сторін, напр., на стороні CB, відкладаємо 5 масштабних одиниць. З точки B, як з центра, радіусом у 9 од. описуємо дугу до перетину з другою стороною прямого кута в якійсь точці A. Сполучивши точки A і B, одержимо прямокутний трикутник ABC, у якого кут BAC буде шуканим.

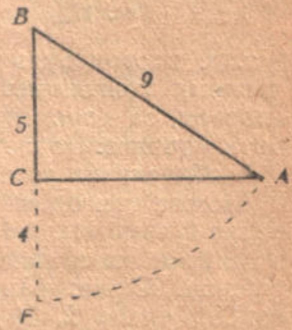

Рис. 15.

Справді: $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{9}$.

Залишається виміряти величину кута A за допомогою транспортира. Для даного прикладу $A = 34°$ (з наближенням до 1°).

2) Дано: $\cos A = \frac{5}{6}$.

Розв'язування. Будуємо прямий кут (рис. 16).

На одній з його сторін, напр., на стороні CA, відкладаємо 5 масштабних одиниць. З точки A, як з центра, радіусом у 6 од. описуємо дугу до перетину з другою стороною даного кута у якійсь точці B. Тоді з прямокутного трикутника ABC маємо:

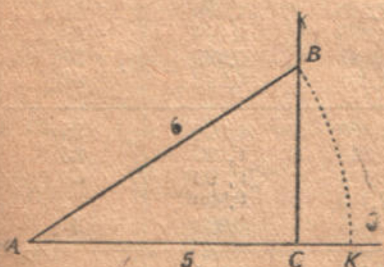

Рис. 16.

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{6}.$$

Залишається виміряти кут A, який для даного прикладу буде шуканим ($A = 34°$).

3) Дано: $\operatorname{tg} A = 0{,}75 = \frac{3}{4}$.

Розв'язування. Будуємо прямий кут (рис. 17). На одній з його сторін відкладаємо відрізок $CB = 3$ од., а на другій стороні — відрізок $CA = 4$ таким самим одиницям.

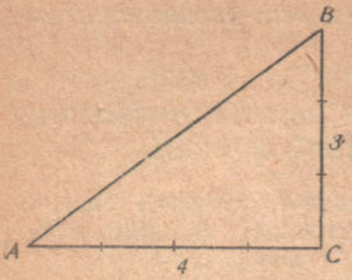

Рис. 17.

Тоді з прямокутного трикутника ABC маємо:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Вимірявши його транспортиром, одержуємо відповідь на запитання: $A = 37°$.

§ 11. Таблиця значень тригонометричних функцій.

В §§ 9 і 10 показано, як можна обчислити синус, косинус, тангенс і т. д. якогонебудь гострого кута, і, навпаки, за даними значеннями тригонометричних функцій — відшукати кут. Існують способи, за допомогою яких відповідні обчислення можна зробити точніше. Подаємо таблицю значень тригонометричних функцій, обчислених з наближенням до 0,001.

Кожне тригонометричне число подане тут під двома назвами: верхній назві відповідають числа градусів з лівого краю таблиці, а нижній назві відповідають числа градусів з правого краю таблиці. Отже, наприклад, число 0,174 є $\sin 10°$ і одночасно $\cos 80°$; число 2,356 є $\operatorname{tg} 67°$ і $\operatorname{ctg} 23°$ і т. д. (Секанса і косеканса в таблиці нема, бо в обчисленнях ними звичайно не користуються, а переходять на косинус і синус).

°	sin	tg	ctg	cos	°
0	0,000	0,000	∞	1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
°	cos	ctg	tg	sin	°

°	sin	tg	ctg	cos	°
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
°	cos	ctg	tg	sin	°

§ 12. Найпростіші формули розв'язування прямокутних трикутників.

З прямокутного трикутника ABC (рис. 18) маємо:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B; \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} B. \tag{2}$$

З рівностей (1) одержуємо:

$$\left.\begin{array}{l} a = c \sin A \\ a = c \cos B \end{array}\right\},$$

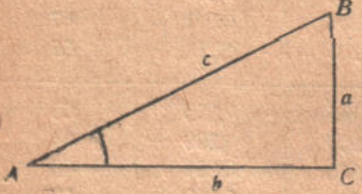

Рис. 18.

тобто **катет дорівнює добуткові гіпотенузи на синус протилежного йому кута або на косинус прилеглого до нього кута.**

З рівностей (2) одержуємо:

$$\left.\begin{array}{l} a = b \operatorname{tg} A \\ a = b \operatorname{ctg} B \end{array}\right\},$$

тобто **катет дорівнює добуткові катета на тангенс протилежного йому кута або на котангенс прилеглого до нього кута.**

З допомогою рівностей (1) одержимо:

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B},$$

тобто **гіпотенуза дорівнює частці від ділення катета на синус протилежного йому кута або на косинус прилеглого до нього кута.**

Базуючись на цих формулах, за даною стороною і кутом в прямокутному трикутнику можна визначити дві інші сторони.

Приклад 1. $C = 17$, $A = 36°20'$.

Розв'язування. $a = c \sin A$; $b = c \cos A$.

Підставляємо числові дані. Маємо: $a = 17 \cdot \sin 36°20' = 17 \cdot 0{,}592$, або $a \approx 10$ (лін. од.); $b = 17 \cdot \cos 36°20' = 17 \cdot 0{,}806$, або $b \approx 13{,}7$ (лін. од.).

Приклад 2. $b = 15$; $A = 32°10'$.

Розв'язування. $a = b \operatorname{tg} A$; $c = \frac{b}{\cos A}$.

Підставляючи числові дані, маємо:

$$a = 15 \cdot \operatorname{tg} 32°10' = 15 \cdot 0{,}629 = 9{,}4 \text{ (лін. од.)};$$

$$c = \frac{15}{\cos 32°10'} = \frac{15}{0{,}846} = 17{,}7 \text{ (лін. од.)}.$$

§ 13. Задачі для самостійної проробки.

Задача 1. З точки *O* (рис. 19) по двох взаємно перпендикулярних напрямах починають одночасно і рівномірно рухатись два тіла. Через 1 хвилину віддаль між ними дорівнює 4 *км*, при чому з пункту, де міститься перше тіло, друге тіло видно під кутом 60°45′ до лінії руху першого.

Визначити скорість руху кожного тіла.

Дано:

$$t = 1'; \ l = 4 \text{ км}; \\ B = 60°45'.$$

Визначити:

$$v_1 \text{ і } v_2.$$

Розв'язування.

З трикутника *AOB*:

$$OB = AB \cos 60°45'; \\ OA = AB \sin 60°45'.$$

$$v_1 = 4 \cdot 0{,}488 = 1{,}752 \text{ км/хв.};$$

$$v_2 = 4 \cdot 0{,}872 = 3{,}488 \text{ км/хв.}$$

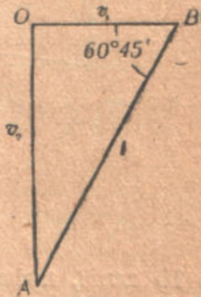

Рис. 19.

Задача 2. Аероплан, який перебуває над пунктом *N* (рис. 20), у той самий час видний з пункту *M* під кутом висоти 78°. Віддаль між *M* і *N* дорівнює 3 *км*.

Визначити висоту, на якій перебуває аероплан.

Відповідь. 14,115 *км*.

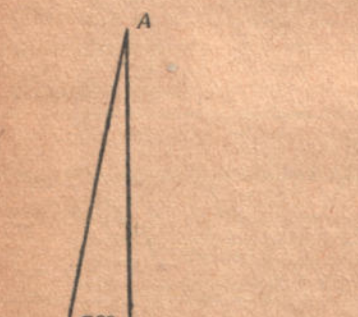

Рис. 20.

Задача 3. Башта, що міститься на скелі, розташована від дозірного пункту на віддалі 3,45 *км* (в горизонтальному напрямі). З дозірного пункту її видно під кутом висоти 2°20′. Визначити висоту скелі *x*, коли відомо, що висота башти дорівнює 20 *м*.

Відповідь. $x \approx 60$ *м*.

Задача 4. Човен рухається в напрямі до маяка з скорістю 0,5 *м/сек*. Визначити, через скільки годин човен досягне маяка, коли відомо, що висота маяка дорівнює 30 *м*, і коли вершину маяка в момент початку руху видно було під кутом висоти 4°25′.

Відповідь. 10 хвил. 50 сек.

Задача 5. Спільна зовнішня дотична AB до двох кіл дорівнює 57 *см*. Визначити віддаль OO_1 (рис. 21) між центрами кіл, коли відомо, що радіус одного кола більший за радіус другого

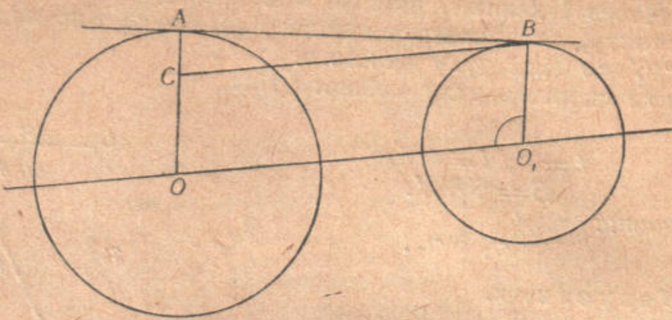

Рис. 21.

на 10 *см*, і, крім того, відомо, що радіус меншого кола, проведений в точку дотику, утворює з лінією центрів кут у 100°.

Вказівки. Нехай $BC \parallel OO_1$. Тоді $\angle AOO_1 = \angle ACB = 80°$. $AC = AO - CO = AO - BO_1 = 10$ *см*.

РОЗДІЛ II.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ ПРО КУТИ І ДУГИ ТА ЇХ ВИМІРЮВАННЯ.

§ 14. Узагальнення поняття про кути і відповідні їм дуги.

Кожний кут можна розглядати як кут центральний, для чого досить з вершини даного кута, як центра, описати коло довільним радіусом (рис. 22).

Для зручності розглядання кутів на рисунках умовились

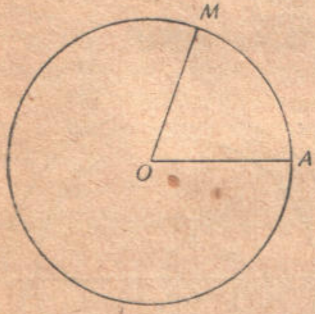

Рис. 22.

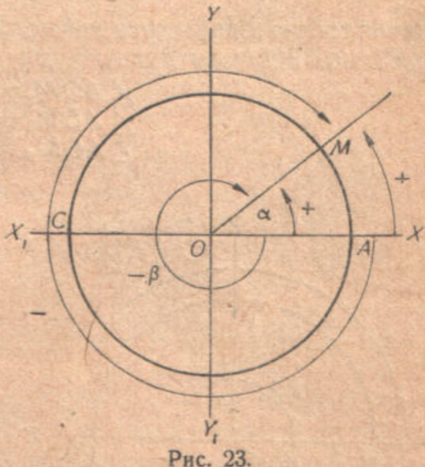

Рис. 23.

одну з сторін кута, напр. сторону OA, рисувати в горизонтальному напрямі.

Цілком зрозуміло, що ця умова абсолютно не порушує загальності виводів, бо завжди, не змінюючи величини кута, обертанням його навколо вершини, як центра, в площині рисунка можна одній з його сторін надати горизонтального напряму. Далі порядок побудови кутів і відповідних їм дуг буде такий: разом з кругом розглядаємо прямокутну систему координат так, щоб її початок зливався з центром круга.

Таким чином, умова щодо положення кута в крузі така (рис. 23): одна з сторін даного кута йтиме в додатному напрямі осі X-ів, при чому точку A називатимемо початком, а точку M кінцем дуг. У процесі зміни дуги AM і відповідного їй кута $AOM = \alpha$, точку M треба розглядати як рухому.

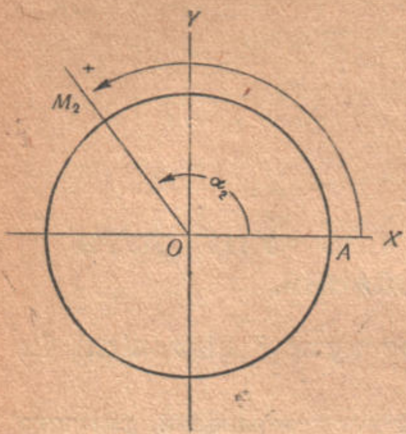

Рис. 24.

Поширюючи правило знаків на кути й дуги за принципом Декарта, вважатимемо їх додатними тоді, коли їх відкладено від точки A в напрямі, протилежному рухові стрілки годинника (на рис. 23 цей напрям позначений стрілкою з знаком $+$); тоді від'ємними кутами і дугами будуть кути і дуги, відкладені в напрямі руху стрілки годинника (на рис. 23 цей напрям позначений стрілкою з знаком —). Так, кут AOM, що дорівнює α°, буде додатним, а кут MOA, що дорівнює β°, буде від'ємним. Аналогічно цьому дуга AM — додатна, дуга ACM — від'ємна.

Припустимо, що точка M, яка позначає собою кінець дуги, займе такі положення, як на рис. 24, 25 і 26.

Відповідно цим дугам кути будуть:

$$\angle AOM_2 = \alpha_2 > 90^\circ;$$
$$\angle AOM_3 = \alpha_3 > 180^\circ;$$
$$\angle AOM_4 = \alpha_4 > 270^\circ.$$

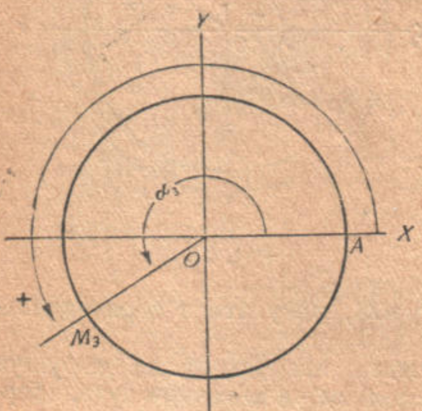

Рис. 25.

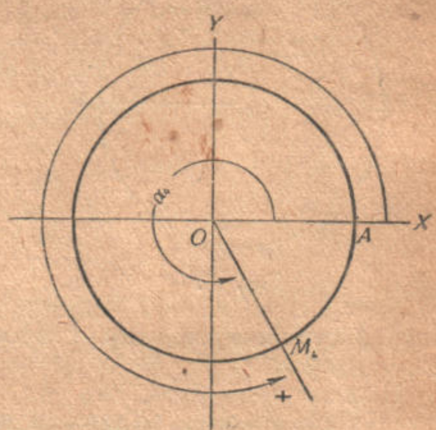

Рис. 26.

Коли точка M, починаючи свій рух від точки A (початку дуг), вирисує траєкторію свого руху і знову зіллється з точкою A, вона опише дугу в 360°. Кажуть, що точка M зробила один оберт. Тоді відповідний центральний кут дорівнюватиме повному кутові (360°).

Якщо точка M рухатиметься і далі, то почнуть утворюватися дуги, більші 360°, а тому й відповідні їм центральні кути будуть більшими, ніж кут у 360°.

Узявши на увагу, що точка M може зробити безліч обертів і в додатному, і у від'ємному напрямах, можна зробити висновок, що величина дуг і кутів змінюється в межах від 0 до $+\infty$ і від 0 до $-\infty$.

З а у в а ж е н н я. Прикладом такого руху можуть бути стрілки годинника, вал машини тощо.

§ 15. Радіанне вимірювання дуг і кутів.

Коли дуги і кути вимірюють градусами, то таке вимірювання називають градусним.

Є ще вимірювання **р а д і а н н е**, з допомогою так званих радіанних одиниць.

У радіанній системі за одиницю вимірювання дуг беруть дугу, довжина якої дорівнює радіусові, а за одиницю вимірювання кутів беруть центральний кут, що відповідає такій дузі.

Ця одиниця називається р а д і а н о м.

Щоб обгрунтувати можливість використання цих одиниць, доведемо таку теорему.

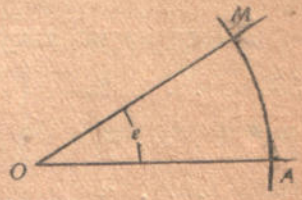

Рис. 27.

Теорема. Центральний кут, що спирається на дугу, яка дорівнює радіусові, є величина стала.

Візьмемо кут AOM (рис. 27). Нехай $OA = OM = R$ і дуга $AM = R$. Позначимо шуканий центральний кут через e, тоді:

$$\frac{e}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi R}, \quad \text{або} \quad \frac{e}{180^\circ} = \frac{1}{\pi},$$

звідки

$$\boxed{e = \frac{180^\circ}{\pi}.}$$

Права частина одержаної формули є величина стала, тому e — теж величина стала і *від радіуса кола не залежить.*

Тому один радіан містить у собі, так само як і відповідна йому дуга, $\frac{180^\circ}{\pi}$, або $180^\circ : 3{,}14159265 = 57^\circ 17' 44{,}8''$ (з точністю до $0{,}05''$), або $\approx 57{,}3^\circ$.

Установимо тепер спосіб вимірювання будьякого кута з допомогою радіана.

Для цього візьмемо довільний центральний кут x, довжина дуги якого дорівнює l, і порівняємо його з кутом e, дуга якого дорівнює R.

Склавши пропорцію:

$$\frac{x}{e}=\frac{l}{R},$$

одержуємо

$$x=e\frac{l}{R}.$$

Через те що e — радіан, прийнятий за одиницю міри, маємо

$$x=\frac{l}{R},$$

тобто *відношення довжини дуги до довжини її радіуса є мірою відповідного центрального кута* (в радіанах).

Через те що дуга, яка відповідає повному кутові (360°), є довжина кола ($C=2\pi R$), то число радіанів у такому куті буде

$$\frac{l}{R}=\frac{2\pi R}{R}=2\pi.$$

Звідси маємо таку таблицю:

360°	2π	90°	$\frac{\pi}{2}$	18°	$\frac{\pi}{10}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	72°	$\frac{2\pi}{5}$	15°	$\frac{\pi}{12}$
180°	π	60°	$\frac{\pi}{3}$	10°	$\frac{\pi}{18}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	45°	$\frac{\pi}{4}$	1°	$\frac{\pi}{180}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	36°	$\frac{\pi}{5}$	і т. д.	
120°	$\frac{2\pi}{3}$	30°	$\frac{\pi}{6}$		

Нехай будьякий кут дорівнює n°, або α радіанів. Тоді з пропорції $\frac{n^\circ}{360}=\frac{\alpha}{2\pi}$ матимемо формули для *переходу від градусного вимірювання до радіанного і навпаки.*

1) Дано n°.
Визначити α.

$$\boxed{\alpha=\frac{\pi}{180^\circ}\cdot n^\circ} \qquad (1)$$

2) Дано α.
Визначити n°.

$$\boxed{n^\circ=\frac{180^\circ}{\pi}\cdot\alpha} \qquad (2)$$

Наведемо приклади застосування цих формул.

Приклад 1. Визначити кут 54° в радіанах.

Дано: $n=54^\circ$.

Визначити α.

За формулою (1) знайдемо:

$\alpha=\frac{54}{180}\cdot\pi=0{,}3\pi=0{,}3\cdot 3{,}141593=0{,}94248$ (з точністю до 0,5 однієї стотисячної).

Відповідь.

$$\alpha = 0{,}3\pi \text{ радіана},$$

або

$$\alpha = 0{,}94248 \text{ радіана}.$$

Приклад 2. Визначити кут $22^\circ 30'$ у радіанах.

Дано: $n = 22{,}5^\circ$.

Визначити α.

$$\alpha = \frac{22{,}5}{180} \cdot \pi = \frac{1}{8}\pi = 3{,}141593 : 8 = 0{,}39270.$$

Відповідь.

$$\alpha = 0{,}39270 \text{ радіана},$$

або

$$\alpha = \frac{\pi}{8} \text{ радіана}.$$

Приклад 3. Кут дорівнює $\frac{2}{5}$ радіана. Визначити його в градусах.

Дано: $\alpha = \frac{2}{5}$.

Визначити n°.

За формулою (2) знайдемо:

$$n = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{2}{5} = \frac{72^\circ}{3{,}141593} = 22^\circ 55' 06'',$$

або

$$n = 57^\circ 17' 45'' \cdot 0{,}4 = 22^\circ 55' 06''.$$

Відповідь. $n = 22^\circ 55' 06''$.

На практиці при обчислюваннях, зв'язаних з переходом від радіанних одиниць до градусів і навпаки, користуються спеціальними для цього таблицями (у таблицях Пржевальського це таблиця XI).

Приклад 1. Визначити кут $7^\circ 15' 42''$ у радіанах.

За таблицями знаходимо послідовно в графах для градусів, мінут і секунд:

7°	0,12217
$15'$	0,00436
$42''$	0,00020
$7^\circ 15' 42''$	0,12673

$\alpha = 0{,}12673$ радіана (з точністю до 0,00001).

Приклад 2. Кут дорівнює 2,5 радіана. Визначити його в градусах.

За таблицями:

2,50000	
2,49582	143°
0,00418	
0,00407	$14'$
0,00011	$22''$

$$n = 143^\circ 14' 22''.$$

§ 16. Зразки застосувань радіанного вимірювання кутів при складанні деяких формул і розв'язуванні задач з геометрії та механіки.

Довжина дуги. Якщо позначити через r радіус кола, через l — довжину дуги, а через α — число радіанних одиниць відповідного центрального кута, то на підставі раніше відомого одержимо:

$$\alpha = \frac{l}{r},$$

звідки:

$$\boxed{l = r\alpha},$$

тобто *довжина дуги дорівнює добуткові її радіуса на кут визначений у радіанах.*

Площа кругового сектора. На підставі того, що площа сектора дорівнює половині добутку дуги на радіус кола, маємо:

$$S = \frac{1}{2} r^2\alpha.$$

Ця формула дуже важлива і має практичне застосування у фізиці й техніці.

Приклад 1. Визначити довжину дуги l, коли відомі:

$$r = 100 \text{ } \textit{см}, \quad \alpha = 1{,}57.$$

Відповідь. $l = r\alpha = 1{,}57 \cdot 100 = 157$ *см*;

$$l = 157 \text{ } \textit{см}.$$

Примітка. При $r = 1$ *м* і $\alpha = 1{,}57$

$$l = 1{,}57 \text{ } \textit{м}.$$

Приклад 2. Визначити площу кругового сектора S, коли відомі:

$$r = 100 \text{ } \textit{см}; \quad \alpha = \frac{\pi}{6} \quad (\pi = 3{,}1416).$$

Розв'язування.

$$S = l\frac{r}{2} = r\alpha\frac{r}{2} = \frac{r^2\alpha}{2} = \frac{r^2\pi}{2 \cdot 6};$$

$$S = 2618 \text{ } \textit{см}^2.$$

Контроль. Одержана площа повинна бути $\frac{1}{12}$ частиною площі круга, а тому:

1) 2618 *см*$^2 \cdot 12 = \pi r^2$;
2) 2618 *см*$^2 \cdot 12 = 31416$ *см*^{2};
3) $\pi r^2 = 3{,}1416 \cdot 10000 = 31416$ *см*^{2};

$$31416 \text{ } \textit{см}^2 = 31416 \text{ } \textit{см}^2.$$

Розв'язати цю задачу, не користуючись формулою $l = r\alpha$.

Приклад 3. Визначити довжину дуги, радіус якої $r = 10$ *дм*, якщо вона відповідає центральному кутові в $45°$; $60°$; $30°$; $135°$.

Приклад 4. Визначити довжину дуги, коли центральний кут дорівнює α радіанів, а радіус кола дорівнює r.

$$\left(\text{Взяти для } \alpha: \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}. \quad r: 1\ \text{дм.}\right)$$

Приклад 5. Визначити площу кругового сектора S, коли $\alpha = 0{,}5226$; $r = 1$ *м*.

Задача 1. Вал парової машини робить $240 \frac{\text{об.}}{\text{хв.}} (n)$.

Визначити кутову (ω) скорість обертання вала в радіанах за 1 секунду.

Розв'язування. Кутова скорість вимірюється відношенням кута обертання (в радіанах) тіла до відповідного часу (в секундах):

$$\omega = \frac{\alpha}{t}.$$

За час одного оберту тіло повернеться на повний кут 2π радіанів.

За 1 хвилину (60 сек.), за умовою, тіло обернеться 240 раз

Маємо:

$$\alpha = 2\pi n \text{ радіанів},$$
$$t = 60 \text{ сек.};$$

кутова скорість

$$\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

Підставляючи значення $\pi = 3{,}14$, $n = 240$, матимемо:

$$\omega = \frac{3{,}14 \cdot 240}{30} = 25{,}12 \frac{\text{рад.}}{\text{сек.}}.$$

Задача 2. Земля робить повний оберт протягом доби. Визначити кутову скорість її обертання в радіанах на сек.

$$T \text{ (період обертання)} = 86400 \text{ сек.},$$
$$2\pi \text{ — кут обертання};$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6{,}28}{86400} \approx 0{,}000073 \left[\frac{1}{\text{сек.}}\right].$$

Задача 3. Тіло обертається з кутовою скорістю $15{,}7 \left[\frac{1}{\text{сек.}}\right]$ (радіанів на сек.). Визначити, скільки обертів зробить тіло протягом 10 хв.

Дано: $\omega = 15{,}7 \left[\frac{1}{\text{сек.}}\right]$; $t = 10$ хв.; $\pi = 3{,}14$.

Розв'язування. Позначивши через n кількість обертів на хвилину, з формули $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ одержимо:

$$n = \frac{30\omega}{\pi},$$
$$x = nt = \frac{30\omega t}{\pi},$$
$$x \approx 1500 \text{ обертів}.$$

РОЗДІЛ III.

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ БУДЬЯКОГО КУТА І ЗАЛЕЖНОСТІ МІЖ НИМИ.

§ 17. Означення тригонометричних функцій.

Нехай дана прямокутна система координат (рис. 28). Навколо початку її (O), як центра, довільним радіусом опишемо коло і на ньому в I координатному куті, або в I чверті круга, візьмемо точку M. Позначивши через α кут AOM, побудуємо координати (x, y) точки M (кінця дуги AM, відповідної кутові α).

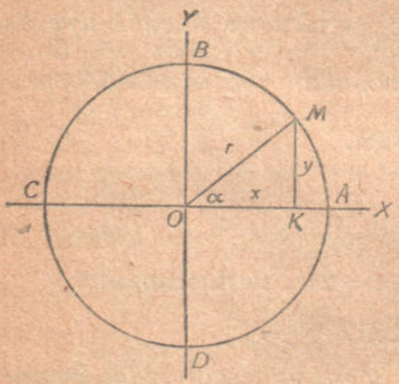

Рис. 28.

З прямокутного трикутника KOM маємо:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r},\ \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

(де r радіус круга).

Це можна читати так:

Синус кута є відношення ординати кінця відповідної дуги до радіуса круга.

Косинус кута є відношення абсциси кінця відповідної дуги до радіуса круга.

Ці означення умовимося застосовувати до яких завгодно кутів у крузі, відповідно розташованих відносно прямокутної координатної системи.

Очевидно, залежно від знака координат кінця дуги матимемо з тим або іншим знаком синус і косинус кута.

З того самого $\triangle\ KOM$ маємо:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{x} = 1 : \frac{x}{r} = \frac{1}{\cos\alpha};$$

$$\csc\alpha = \frac{r}{y} = 1 : \frac{y}{r} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Поширюючи означення тангенса, котангенса, секанса, косеканса теж на будьякі кути в крузі, відповідно розташовані відносно координатної системи, скажемо, що:

Тангенс кута є відношення ординати до абсциси кінця відповідної дуги, або відношення синуса до косинуса.

Котангенс кута є відношення абсциси до ординати кінця відповідної дуги, або відношення косинуса до синуса.

Секанс кута є відношення радіуса круга до абсциси кінця відповідної дуги, або це є функція, величина якої обернена до величини косинуса.

Косеканс кута є відношення радіуса круга до ординати кінця відповідної дуги, або це є функція, величина якої обернена до величини синуса.

§ 18. Тригонометричні функції від'ємного кута.

Збудуємо кут $AOM = \alpha$ (рис. 29) і хорду MM_1, перпендикулярну до осі X-ів. Кут AOM_1, відкладений у напрямі, показаному стрілкою, треба вважати від'ємним і рівним $-\alpha$ (§ 14). Через те що ординати точок M і M_1 рівні абсолютною величиною ($KM = KM_1$), але супротивні щодо знаків, можна написати:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad (1)$$

а через те що абсциса точки M дорівнює абсцисі точки M_1,

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha. \qquad (2)$$

Рис. 29.

Ці формули задовольняються для яких завгодно кутів (не тільки гострих), у чому легко переконатися, розглядаючи кути AON і AON_1 і інші. Далі, на підставі означення інших тригонометричних функцій, даних у попередньому параграфі та у формулах (1) і (2) цього параграфа, пишемо:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\sec(-\alpha) = \frac{1}{\cos(-\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha;$$

$$\csc(-\alpha) = \frac{1}{\sin(-\alpha)} = \frac{1}{-\sin\alpha} = -\csc\alpha.$$

Отже, косинус і секанс від зміни знака кута не змінюються ні абсолютною величиною, ні знаком. Такі функції, як відомо, називаються парними функціями.

Синус, тангенс, котангенс і косеканс від зміни знака кута змінюють свій знак, не змінюючи абсолютної величини. Це так звані непарні функції.

§ 19. Зміна синуса і косинуса та їх періодичність.

Припустимо, що точка M (рис. 30), почавши свій рух від точки A, рухається в напрямі, зворотному рухові годинникової стрілки, тобто в додатному напрямі; від цього і дуга AM, і відповідний кут AOM збільшуються.

Через те що у відношеннях, які визначають синус і косинус кута, другий член є стала величина (радіус), зміна синуса і косинуса характеризуватиметься тільки зміною ординати (для синуса) і абсциси (для косинуса) кінця дуги.

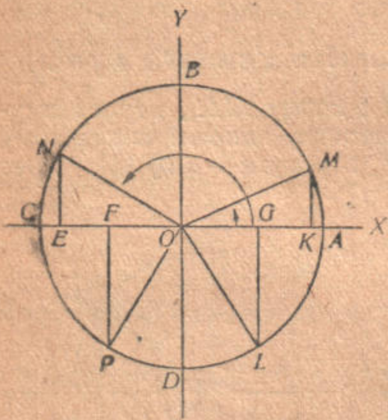

Рис. 30.

Для кута, що дорівнює нулеві, точка M зливається з точкою A, яка має координати $(r, 0)$, а тому

$$\sin 0 = \frac{0}{r} = 0;$$

$$\cos 0 = \frac{r}{r} = 1.$$

Поки кут збільшується від 0 до 90° (від 0 до $\frac{\pi}{2}$ рад. од.) координати кінця дуги залишаються додатними, а тому синус і косинус мають у цьому інтервалі додатні значення. Для кута 90° $\left(\frac{\pi}{2}\text{ рад. один.}\right)$ кінець відповідної дуги є точка B з координатами $(0, r)$; звідки:

$$\sin 90^\circ = \sin\frac{\pi}{2} = \frac{r}{r} = 1;$$

$$\cos 90^\circ = \cos\frac{\pi}{2} = \frac{0}{r} = 0.$$

Коли точка M переходить у другий координатний кут (або в II чверть круга), наприклад займає положення точки N з від'ємною абсцисою (OE) і додатною ординатою (EN), то синус кута AON має додатне, а косинус від'ємне значення. Коли ж точка N зіллється з точкою C, матимемо:

$$\sin 180^\circ = \sin\pi = \frac{0}{r} = 0;$$

$$\cos 180^\circ = \cos\pi = \frac{-r}{r} = -1,$$

бо координати точки C $(-r, 0)$.

Очевидно для кута, що закінчується в III координатному куті (або в III чверті круга), наприклад для кута AOP, координати кінця P дуги AP від'ємні, а тому синус і косинус — теж від'ємні. Далі, через те що координати точки D $(0, -r)$,

$$\sin 270^\circ = \sin \frac{3}{2}\pi = \frac{-r}{r} = -1;$$

$$\cos 270^\circ = \cos \frac{3}{2}\pi = \frac{0}{r} = 0.$$

Для кута AOL, що закінчується в IV координатному куті (або в IV чверті круга) [1], ордината кінця L дуги AL від'ємна, а абсциса додатна. Звідси робимо висновок, що для такого кута синус має від'ємне, а косинус додатне значення. Для кута в 360° (2π рад. од.) буде:

$$\sin 360^\circ = \sin 2\pi = \frac{0}{r} = 0;$$

$$\cos 360^\circ = \cos 2\pi = \frac{r}{r} = 1.$$

Ми простежили зміну синуса і косинуса при повному обході кола точкою M, або при повному оберті відповідного радіуса OM.

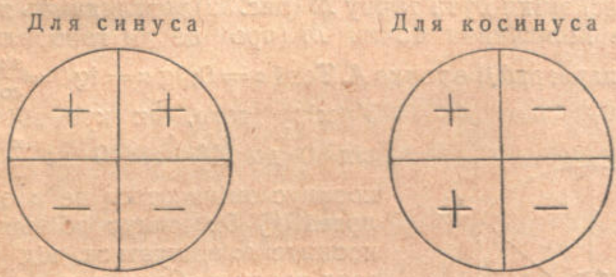

Рис. 31.

Якщо точка M рухатиметься далі в тому ж напрямі, обходячи коло вдруге, втретє і т. д., то синус і косинус послідовно набуватимуть таких самих значень як і при першому обході.

Отже, значення синуса і косинуса не змінюються від додавання до кута, а значить, і від віднімання від кута цілого числа раз по 360°, або по 2π рад. од.

А тому й кажуть, що **синус і косинус є функції періодичні, з періодом** у 360° (2π рад. од.).

Періодичність синуса і косинуса можна виразити такими формулами:

$$\sin\alpha = \sin(360^\circ k + \alpha^\circ), \quad \text{або} \quad \sin\alpha = \sin(2k\pi + \alpha);$$
$$\cos\alpha = \cos(360^\circ k + \alpha^\circ), \quad \text{або} \quad \cos\alpha = \cos(2k\pi + \alpha),$$

де k яке завгодно ціле число (додатне або від'ємне). Щоб легше було запам'ятати, який знак має синус і косинус, коли кут закінчується в тій або іншій чверті круга, подаємо такі діаграми знаків (рис. 31).

---

[1] Далі ми вказуватимемо тільки, в якій чверті круга закінчується кут.

Треба запам'ятати, що синус і косинус змінюються в межах від -1 до $+1$ включно (рис. 31-а):

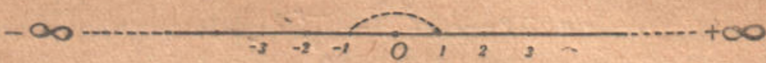

Рис. 31-а.

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1,$$

або абсолютна величина синуса і косинуса змінюється від 0 до 1, тобто:

$$0 \leqslant |\sin\alpha| \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant |\cos\alpha| \leqslant 1.$$

§ 20. Зміна тангенса і котангенса та їх періодичність.

У процесі зміни кута точку M (рис. 32) розглядають як рухому. Початкове положення точки M (про це ми говорили в попередньому параграфі) є точка A. Тоді $\alpha = 0$; $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$.

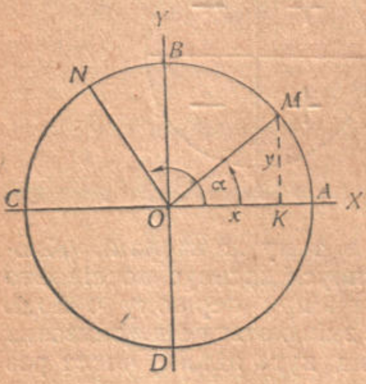

Рис. 32.

У міру того, як кут збільшується від 0 до 90° $\left(\text{від } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$, синус і косинус змінюються не в одному напрямі (§ 5): синус збільшується, а косинус зменшується, від чого тангенс зростає. Спочатку це зростання йде повільно, а чим ближче точка M підходить до точки B, тобто чим ближче величина кута підходить до 90° $\left(\frac{\pi}{2} \text{ рад. од.}\right)$, тим зростання йде швидше (синус прямує до одиниці, а косинус до нуля), і тангенс починає набувати нескінченно великих значень, залишаючись весь час додатним. А коли кут дорівнюватиме 90° $\left(\frac{\pi}{2} \text{ рад. од.}\right)$, то тангенс його $\left(\frac{1}{0}\right)$ не можна буде визначити жодним числом, яке б воно велике не було.

Це умовно записують так (§ 6):

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0} = +\infty.$$

Ми наближали кут до 90° $\left(\frac{\pi}{2} \text{ рад. од.}\right)$, ідучи з сторони I чверті круга, тобто поступово збільшуючи гострий кут. Але можна підходити до кута 90° $\left(\frac{\pi}{2} \text{ рад. од.}\right)$ з сторони II чверті, наприклад поступово зменшуючи тупий кут AON, для якого тангенс від'ємний (синус додатний, а косинус від'ємний). Тоді тангенс, нескінченно зростаючи абсолютною величиною, залишається весь час від'ємним.

А тому умовно можна написати ще й так:

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0} = -\infty.$$

Об'єднавши ці два випадки, пишуть: $\operatorname{tg} 90^\circ = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \pm\infty$. Іноді кажуть, що $\operatorname{tg} 90^\circ$, або $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$, є граничне значення тангенса, коли кут наближається до 90°, або $\frac{\pi}{2}$, як з сторони значень кута менших, так і з сторони значень більших 90° $\left(\text{або } \frac{\pi}{2}\right)$[1].

Це можна виразити так:

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \lim \operatorname{tg}(90^\circ \pm \varepsilon^\circ)_{\varepsilon \to 0} = \pm\infty,$$

або

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \lim \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right)_{\varepsilon \to 0} = \pm\infty.$$

Для кута α, що закінчується в II чверті круга, або, як кажуть, коли α лежить в інтервалі $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$, бо синус і косинус мають різні знаки, а

$$\operatorname{tg} 180^\circ = \operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Коли кут α закінчується в III чверті, тобто лежить в інтервалі $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$, бо синус і косинус від'ємні, а

$$\operatorname{tg} 270^\circ = \operatorname{tg}\frac{3}{2}\pi = \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\cos\frac{3\pi}{2}} = \frac{-1}{0} = \mp\infty.$$

А якщо кут закінчується в IV чверті, або лежить в інтервалі $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$, а

$$\operatorname{tg} 360^\circ = \operatorname{tg} 2\pi = \frac{\sin 2\pi}{\cos 2\pi} = \frac{0}{1} = 0.$$

---

[1] Взагалі в усіх аналогічних випадках, коли при знаходженні значень тригонометричних функцій ми приходимо до виразів $\frac{1}{0}$ і $\frac{-1}{0}$, ми розглядаємо їх як граничні значення тієї або іншої функції, кут якої в процесі змінювання наближається до певного значення як з сторони менших, так і з сторони більших значень кута. Це завжди дає $\frac{1}{0} = \pm\infty$ і $\frac{-1}{0} = \mp\infty$.

Переходимо до котангенса:

$$\operatorname{ctg} 0^\circ = \operatorname{ctg} 0 = \frac{\cos 0}{\sin 0} = \frac{1}{0} = \pm\infty;$$

$$\operatorname{ctg} 90^\circ = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$\operatorname{ctg} 180^\circ = \operatorname{ctg}\pi = \frac{\cos\pi}{\sin\pi} = \frac{-1}{0} = \mp\infty;$$

$$\operatorname{ctg} 270^\circ = \operatorname{ctg}\frac{3}{2}\pi = \frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{\sin\frac{3\pi}{2}} = \frac{0}{-1} = 0;$$

$$\operatorname{ctg} 360^\circ = \operatorname{ctg} 2\pi = \frac{\cos 2\pi}{\sin 2\pi} = \frac{1}{0} = \pm\infty.$$

Для кута в кожному з інтервалів $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ і $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ тангенс і котангенс змінюються монотонно, тобто змінювання їх відбувається весь час або в бік збільшення, або в бік зменшення, при чому, коли тангенс зростає — котангенс спадає, і навпаки. Для кута, що закінчується в I і III чвертях, тангенс і котангенс мають додатні значення, а для кута, що закінчується в II і IV чвертях, тангенс і котангенс від'ємні.

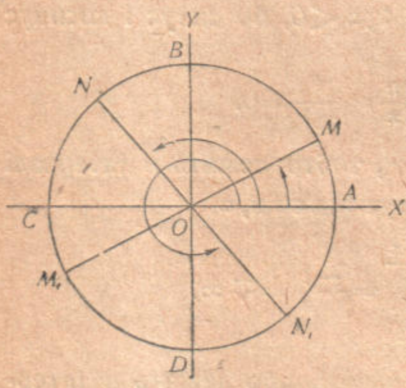

Рис. 33.

Ми стежили за зміною тангенса і котангенса, розглядаючи точку M як рухому. Очевидно, коли точка M рухатиметься далі, значення тангенса і котангенса в такій самій послідовності повторюватимуться, але з цього ще не можна робити висновку, що період для тангенса і котангенса — 360°, або 2π рад. од., бо існує ще менший інтервал, через який значення тангенса і котангенса починають повторятися. Справді, візьмемо кут $AOM = \alpha$ (рис. 33). Побудувавши діаметр MM_1, бачимо, що $\angle AOM_1 = \pi + \alpha$.

Так само, якщо $\angle AON = \alpha$, то, провівши діаметр NN_1, одержимо $\angle AON_1 = \pi + \alpha$. Легко переконатися, що для кутів α і $\pi + \alpha$ як тангенси, так і котангенси рівні.

Отже, значення тангенса і котангенса повторюватимуться через кожні 180°, або π рад. од.

Тому й кажуть, що **період для тангенса і котангенса** є 180°, або π рад. од.

Періодичність тангенса і котангенса виражають такими рівностями:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(m \cdot 180^\circ + \alpha^\circ), \text{ або } \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(m\pi + \alpha);$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(m \cdot 180^\circ + \alpha^\circ), \text{ або } \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(m\pi + \alpha),$$

де m яке завгодно ціле число (додатне або від'ємне). Щоб легше було запам'ятати, які знаки мають тангенс і котангенс, коли кут закінчується в тій або іншій чверті круга, подаємо діаграму знаків (рис. 34).

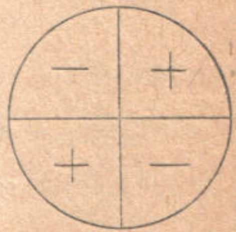

Рис. 34.

Величина тангенса і котангенса змінюється від $-\infty$ до $+\infty$.

Це можна записати так:

$$-\infty \leqslant \operatorname{tg}\alpha \leqslant \infty,$$
$$-\infty \leqslant \operatorname{ctg}\alpha \leqslant \infty,$$

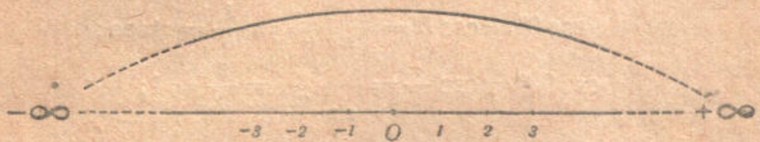

Рис. 34 а.

або, інакше, абсолютна величина тангенса і котангенса змінюється від 0 до ∞, тобто:

$$0 \leqslant |\operatorname{tg}\alpha| \leqslant \infty;$$
$$0 \leqslant |\operatorname{ctg}\alpha| \leqslant \infty.$$

Подаємо таку табличку:

Для кута в інтервалі	$\operatorname{tg}\alpha$ змінюється від . . . . . . до	$\operatorname{ctg}\alpha$ змінюється від . . . . до
$0 \ldots \frac{\pi}{2}$	$0 \ldots +\infty$	$+\infty \ldots 0$
$\frac{\pi}{2} \ldots \pi$	$-\infty \ldots 0$	$0 \ldots -\infty$
$\pi \ldots \frac{3}{2}\pi$	$0 \ldots +\infty$	$+\infty \ldots 0$
$\frac{3}{2}\pi \ldots 2\pi$	$-\infty \ldots 0$	$0 \ldots -\infty$

§ 21. Зміна секанса і косеканса та їх періодичність.

Оскільки $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, а $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, знак секанса такий самий як у косинуса, а знак косеканса такий самий, як у синуса:

$$\sec 0^\circ = \sec 0 = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\sec 90^\circ = \sec\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0} = \pm\infty;$$

$$\sec 180^\circ = \sec\pi = \frac{1}{\cos\pi} = \frac{1}{-1} = -1;$$

$$\sec 270^\circ = \sec\frac{3}{2}\pi = \frac{1}{\cos\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{0} = \pm\infty;$$

$$\sec 360^\circ = \sec 2\pi = \frac{1}{\cos 2\pi} = \frac{1}{1} = 1.$$

Переходимо до косеканса:

$$\csc 0^\circ = \csc 0 = \frac{1}{\sin 0} = \frac{1}{0} = \pm\infty;$$

$$\csc 90^\circ = \csc\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\csc 180^\circ = \csc\pi = \frac{1}{\sin\pi} = \frac{1}{0} = \pm\infty;$$

$$\csc 270^\circ = \csc\frac{3}{2}\pi = \frac{1}{\sin\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{-1} = -1;$$

$$\csc 360^\circ = \csc 2\pi = \frac{1}{\sin 2\pi} = \frac{1}{0} = \pm\infty.$$

Очевидно, **період для секанса і косеканса такий самий, як для косинуса і синуса.**

Треба звернути увагу на те, що секанс і косеканс змінюються від $-\infty$ до -1 і від $+1$ до $+\infty$ включно (34б),

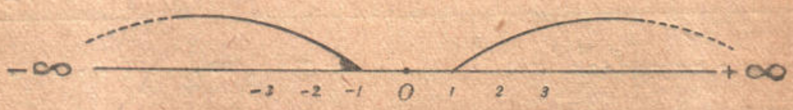

Рис. 34б.

тобто:

$$-\infty \leqslant \sec\alpha \leqslant -1 \quad \text{і} \quad 1 \leqslant \sec\alpha \leqslant \infty;$$

$$-\infty \leqslant \csc\alpha \leqslant -1 \quad \text{і} \quad 1 \leqslant \csc\alpha \leqslant \infty.$$

Абсолютна величина секанса і косеканса не може бути менша 1:

$$1 \leqslant |\sec\alpha| \leqslant \infty;$$

$$1 \leqslant |\csc\alpha| \leqslant \infty.$$

Подаємо таку табличку:

Для кута α в інтервалі	sec змінюється від . . . . . . до	csc змінюється від . . . . до
$0 \dots \frac{\pi}{2}$	$1 \dots +\infty$	$+\infty \dots 1$
$\frac{\pi}{2} \dots \pi$	$-\infty \dots -1$	$1 \dots +\infty$
$\pi \dots \frac{3}{2}\pi$	$-1 \dots -\infty$	$-\infty \dots -1$
$\frac{3}{2}\pi \dots 2\pi$	$+\infty \dots 1$	$-1 \dots -\infty$

§ 22. Геометрична інтерпретація зміни тригонометричних функцій.

Візьмемо кут у I чверті, а саме $\angle AOM = \alpha$ (рис. 35). На підставі даних означень тригонометричних функцій

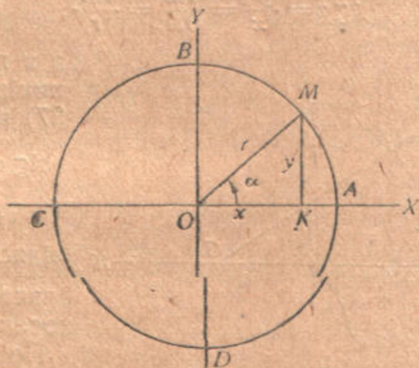

Рис. 35.

$$\sin\alpha = \frac{KM}{r} = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{OK}{r} = \frac{x}{r};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{KM}{OK} = \frac{y}{x}, \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{OK}{KM} = \frac{x}{y};$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{OK} = \frac{r}{x}; \quad \csc\alpha = \frac{r}{KM} = \frac{r}{y}.$$

У кожному з двох перших відношень другий член є стала величина (радіус). Перетворимо інші відношення в такі, щоб другий член кожного з них дорівнював радіусові.

Починаємо з відношень, що визначають тангенс і котангенс. Побудуємо в точках A і B (рис. 36 і 37) дотичні до кола, або (як будемо далі говорити) побудуємо першу й другу дотичні. Продовживши радіус, що відповідає кінцеві дуги (рис. 36), до пере-

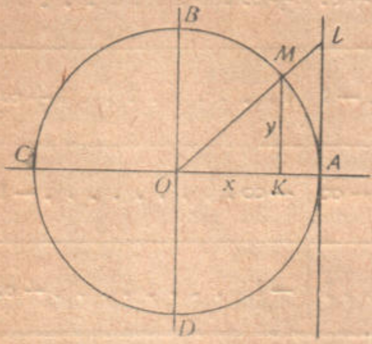

Рис. 36.

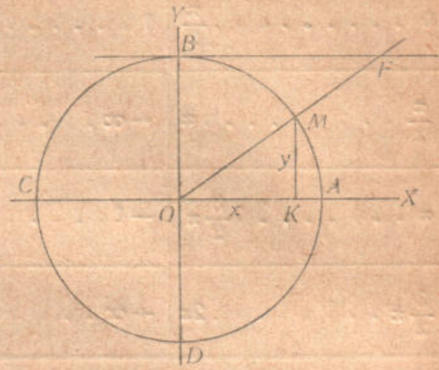

Рис. 37.

тину з першою дотичною в точці L (рис. 36) і з другою дотичною в точці F (рис. 37), з подібності трикутників OMK і OLA (рис. 36) матимемо:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{AL}{OA} = \frac{AL}{r},$$

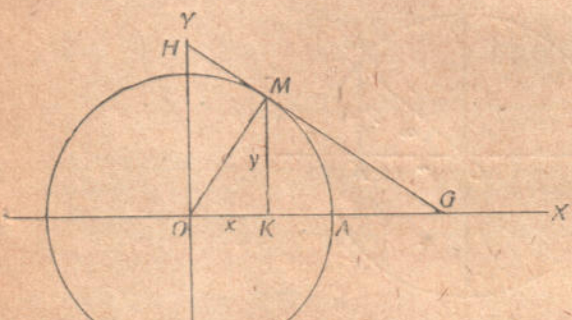

Рис. 38.

а з подібності трикутників OKM і OBF (рис. 37) виходить:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{BF}{OB} = \frac{BF}{r}.$$

Тепер перейдемо до відношень $\frac{r}{x}$ і $\frac{r}{y}$, що визначають секанс і косеканс кута.

Побудуємо дотичну до кола в точці M (кінець дуги AM, рис. 38). Нехай точка G є точка перетину дотичної з віссю X-ів, а H—точка перетину з віссю Y-ів. З подібності трикутників OMK і OMG

$$\sec\alpha = \frac{r}{x} = \frac{OG}{OM} = \frac{OG}{r},$$

а з подібності трикутників OMK і MOH

$$\csc\alpha = \frac{r}{y} = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{r}.$$

Отже, нам удалося всі тригонометричні функції гострого кута (тобто кута, що закінчується в I чверті круга) подати як відношення певних прямолінійних відрізків: 1) $KM(y)$, 2) $OK(x)$, 3) AL, 4) BF, 5) OG і 6) OH до радіуса. Через те що у кожного з шести відношень, які визначають тригонометричні функції кута α, другий член є величина стала (радіус r), зміна їх залежно від зміни кута характеризується виключно зміною цих відрізків. Якщо покласти, що $r = 1$, тоді числові величини цих відрізків дорівнюватимуть числовим величинам синуса, косинуса тангенса, котангенса, секанса і косеканса, але по суті тут є велика різниця.

Ці відрізки, які мають назву *„тригонометричних ліній"*, позначаються іменованими числами, а *значення тригонометричних функцій є числа абстрактні.* Щоб можна було застосувати геометричну інтерпретацію тригонометричних функцій для будь-якого кута (не тільки гострого), треба умовитись надавати цим відрізкам, тобто „тригонометричним лініям", певного напряму і ставити числа додатні або від'ємні, залежно від того, чи збігається їх напрям з додатним або від'ємним напрямом осей координат.

Щодо *ліній синуса і косинуса*, то вони є *координатні відрізки, що позначають ординату і абсцису кінця відповідної дуги.* Ми їх використовували, коли стежили за зміною синуса і косинуса.

Лінія тангенса є відрізок на I дотичній від точки дотику до перетину її з продовженням радіуса, що відповідає кінцеві дуги.

Лінія котангенса є відрізок на II дотичній від точки дотику до перетину її з продовженням радіуса, що відповідає кінцеві дуги.

Лінія секанса є відрізок на осі X-ів від початку координат до перетину осі абсцис з дотичною, проведеною в кінці дуги.

Лінія косеканса є відрізок на осі Y-ів від початку координат до перетину осі ординат з дотичною, проведеною в кінці дуги.

Ми говорили, що цим „тригонометричним лініям", або тригонометричним відрізкам, відповідають додатні числа, коли їх напрям збігається з додатним напрямом осей координат, тобто коли лінії синуса, тангенса і косеканса йдуть вгору від осі X-ів, а лінії косинуса, котангенса і секанса — вправо від осі Y-ів. Тригонометричним лініям протилежного напряму відповідають числа від'ємні. Важливо переконатися, що, використовуючи ці лінії, ми одержуватимемо значення тригонометричних функцій з тими знаками, з якими ми одержували їх на підставі раніше даних означень.

Перевіримо це. Побудуємо (рис. 39) кути AOM, AON, AOP, AOQ, що закінчуються в I, II, III, і IV чвертях круга.

Продовживши радіуси OM, ON, OP і OQ до перетину з дотичною, одержимо такі *лінії тангенса*, що відповідають цим кутам:

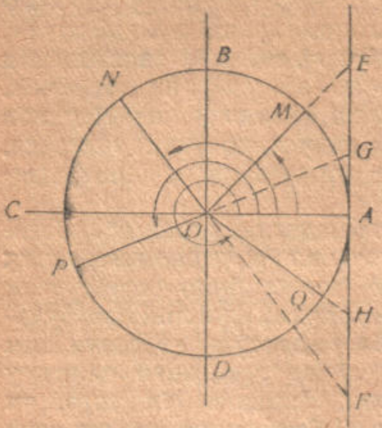

Рис. 39.

Для кута	Лінія тангенса
$\angle AOM$	AE
$\angle AON$	AF
$\angle AOP$	AG
$\angle AOQ$	AH

Виходить, що кутам AOM і AOP, які закінчуються в I і III чвертях і мають додатні тангенси, відповідають тригонометричні лінії AE і AG з додатним напрямом, а кутам AON і AOQ, які закінчуються в II і IV чвертях і мають від'ємні тангенси, відповідають тригонометричні лінії AF і AH з від'ємним напрямом.

Доведемо, що і для котангенса існує така відповідність між напрямом тригонометричних ліній і знаком котангенса (рис. 40).

Для кута	Лінія котангенса
$\angle AOM$	BF
$\angle AON$	BE
$\angle AOP$	BG
$\angle AOQ$	BH

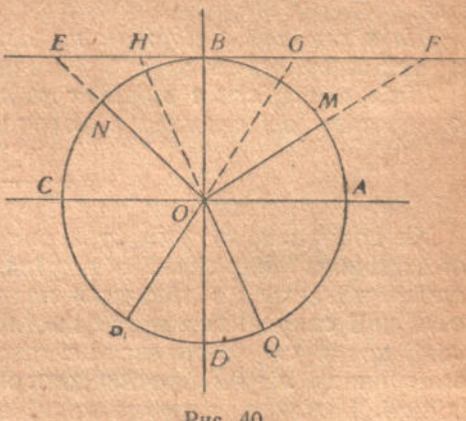

Рис. 40.

Бачимо, що для кутів AOM і AOP з додатними котангенсами— лінії котангенса BF і BG мають додатний напрям, а для кутів AON і AOQ, що мають від'ємні котангенси, лінії котангенса BE і BH ідуть у від'ємному напрямі.

Будуємо тепер лінії секанса і косеканса (рис. 41). Для цього проводимо дотичні до кола в кінцях (M, N, P і Q) дуг, відповідних кутам AOM, AON, AOP, і AOQ.

Для кута	Лінія секанса	Лінія косеканса
$\angle AOM$	OG	OH
$\angle AON$	OE	OF
$\angle AOP$	OL	OJ
$\angle AOQ$	OS	OR

З цієї таблиці бачимо, що для кутів AOM і AOQ, що мають додатні секанси, лінії секанса OG і OS додатного напряму, а для

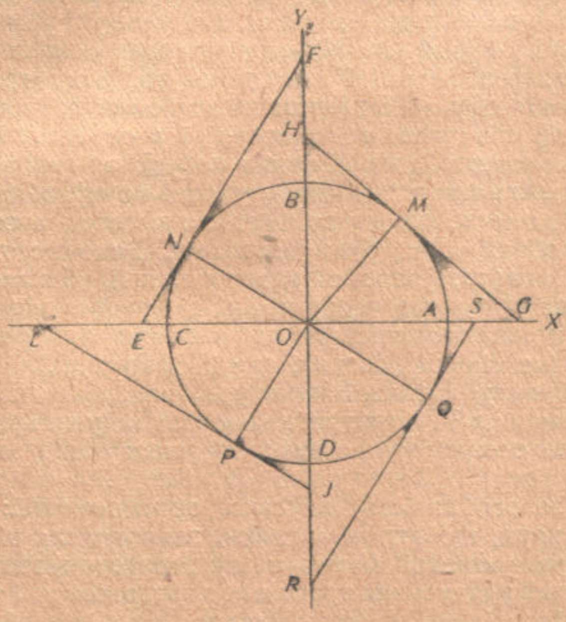

Рис. 41.

кутів AON і AOP з від'ємними секансами—лінії секанса OE і OL теж мають від'ємний напрям.

Так само повну відповідність можна встановити між знаками значень косеканса і напрямом їх тригонометричних ліній; а саме, для кутів AOM і AON з додатними косекансами—лінії косеканса OH і OF мають додатний напрям, а для кутів AOP і AOQ з від'ємними косекансами—лінії косеканса OJ і OR від'ємного напряму.

Пропонуємо учням простежити за зміною тригонометричних функцій (тангенса, котангенса, секанса і косеканса), використовуючи зміну тригонометричних ліній, і порівняти висновки з тими, які ми одержали в попередніх параграфах, базуючись на даних там означеннях тригонометричних функцій.

§ 23. Походження назв тригонометричних функцій і деякі історичні відомості щодо виникнення цих понять.

Найпростіші тригонометричні відношення, які мають тепер назву тригонометричних функцій, за деякими стародавніми пам'ятниками були відомі в Єгипті і Вавілонії ще за 2000 років до нашої ери.

Але тоді, звичайно, не було тригонометрії. Тригонометрія як така зародилася в стародавній Греції, в зв'язку з потребами астрономії. Засновником тригонометрії вважають астронома Гіппарха (II ст. до нашої ери). Він склав таблицю хорд, яка за тих часів мала таке саме значення, що тепер таблиця синусів. За 100 років до нашої ери Менелай відкрив основи так званої сферичної тригонометрії. У дальшому розвитку тригонометрії велику роль відіграв найвидатніший астроном давніх часів Клавдій Птоломей, що жив в Александрії в середині II ст. нашої ери. Його знаменитий твір „Велика побудова" (який араби згодом назвали „Альмагест") містить у собі повну збірку тригонометричних відомостей його попередників, серед них—Гіппарха і Менелая, роботи яких були загублені. Використовуючи таблицю хорд Гіппарха, Птоломей вдосконалив її, обчислив довжину хорд у частинах радіуса через кожні півградуса від 0 до 180° і показав, як можна використати цю таблицю для розв'язування трикутників (не тільки плоских, але й сферичних).

Після занепаду грецької культури, над розвитком тригонометрії, починаючи з VI століття, працювали індуси. Тригонометрія в них досягла особливого розвитку в працях ученого Брамагупти (VII ст.).

Характерна особливість індуської тригонометрії: індуси замість цілих хорд, що вживали греки, запровадили півхорди, які в сучасній тригонометрії мають назву „тригонометричних ліній" синуса. Жодний з індуських трактатів з тригонометрії не зберігся. Про роботу індусів в Європі довідалися з робіт арабських перекладачів.

З арабських учених треба відзначити Аль Баттані (IX ст.) й Абуль Вафа (X ст.), які, так само як і індуси, вживали замість синуса половину хорди.

У зв'язку з деякими практичними задачами вони ввели тангенс і котангенс.

Від арабів дальший розвиток тригонометрії з XII століття переходить в Європу, де математичні роботи арабів перекладають з арабської на латинську мову (наукову мову того часу).

Не перелічуючи всіх учених, що працювали над розвитком тригонометрії в Європі, згадаємо лише кілька найвидатніших імен.

Систематичний курс тригонометрії написав І. Мюллер (XV ст.), відомий під ім'ям Регіомонтана. Він оформив тригонометрію як самостійну дисципліну і провів велику роботу по складанню тригонометричних таблиць, використовуючи вперше десяткову систему.

Йому належить відкриття багатьох формул і систематизація задач на розв'язування трикутників.

Найвидатніший французький алгебрист Вієта (XVI ст.) застосував алгебричну символіку до тригонометрії, надавши формулам їх сучасного алгебричного характеру.

Але Вієта ще не вживав зручних сучасних позначень у тригонометрії. Поєднання тригонометрії з алгеброю сприяло дальшому розвиткові тригонометрії. З інших учених, починаючи з XVI ст., працювали в галузі тригонометрії Непер і Бріг (кінець XVI і початок XVII ст.), Бернуллі і Ф. Майєр (кінець XVII і перша половина XVIII ст.).

Остаточно ж удосконалив тригонометрію і надав їй сучасного характеру геніальний математик Ейлер (XVIII ст.). Він остаточно встановив ту символіку, якою користуються в наші часи.

Ейлеру першому належить запровадження тригонометричного круга при розгляді зміни тригонометричних функцій.

Перейдемо тепер до походження назв тригонометричних функцій.

Походження назви sinus (синус) пояснюють двояко.

У індусів поняття синуса вживається в розумінні половини хорди або половини тятиви лука (ardha giva — ардха дживa). Справді, той відрізок, який ми тепер називаємо лінією синуса, є половина хорди, що, як тятива—лук, стягує відповідну дугу.

Арабські перекладачі помилково слово giva (джива) переробили в giba (джіба), що скорочено писалося так, як і слово gaib (джайб), що означає залив. Це останнє слово в перекладі на латинську мову і дало слово „sinus".

Є ще інше пояснення походження слова sinus. Латинською мовою половина—semi, а хорда—recta inscripta (пряма вписана), що скорочено писалося semi inser, а потім s. ins, що і дало слово sinus. Терміни tangens (дотична) і secans (січна) запроваджені Фінком в XVI ст. Ці назви цілком відповідають геометричній інтерпретації, якої ми надаємо цим функціям. Пізніше, близько 1600 р., Гентер ввів термін cosinus. Це скорочений запис двох слів „Complementi sinus", що означає доповняльний синус, або синус доповняльного кута, або дуги. Справді, косинус, як відомо (§ 4), є синус доповняльного кута (або дуги). Взагалі всі терміни sinus, cosinus, tangens, cotangens, secans і cosecans почали запроваджувати з XVII ст., а пізніше, у XVIII ст., введено було скорочені позначення їх.

§ 24. Побудова кута за даними значеннями тригонометричної функції.

Приклад 1. $\sin x = \frac{2}{3}$.

Розв'язування. Будуємо коло з радіусом в 3 одиниці, приймаючи за центр початок координат (рис. 42). На осі Y-ів беремо точку E з ординатою $+2$ і через цю точку паралельно осі X-ів проводимо пряму, яка перетне коло в двох точках M і M_1. Ці точки і є кінці дуг, відповідних шуканим кутам AOM і AOM_1 в інтервалі $(0, 2\pi)$.

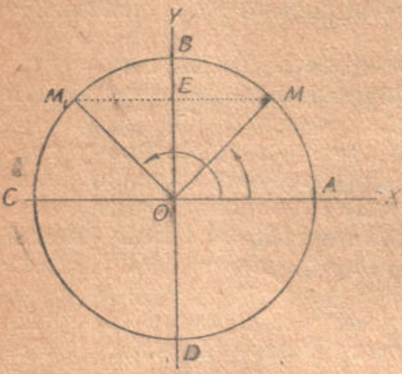

Рис. 42.

Приклад 2. $\cos x = -\frac{3}{4}$.

Розв'язування. Будуємо коло з радіусом у 4 одиниці, приймаючи за центр початок прямокутної системи координат (рис. 43). Візьмемо на осі X-ів точку з абсцисою -3. Через цю точку проводимо хорду MM_1, паралельну осі Y-ів.

Шукані кути в інтервалі $(0, 2\pi)$ є кути AOM і AOM_1.

Приклад 3. $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}$.

Розв'язування. *1-й спосіб.* Будуємо прямокутну систему координат (рис. 44) і точку в II координатному куті (де тангенс від'ємний) з ординатою 2 і з абсцисою -3.

Рис. 43.

Рис. 44.

Далі, приймаючи точку O за центр, радіусом OM опишемо коло. Провівши через точку M діаметр MM_1, одержимо два кути AOM і AOM_1 в інтервалі $(0, 2\pi)$, відповідні умові.

2-й спосіб. Будуємо круг з центром у початку координат і з радіусом у 3 одиниці (рис. 45), а також першу дотичну, на якій відкладаємо відрізок AL у 2 одиниці вниз від осі X-ів (бо тангенс від'ємний)[1]. Через L і O проводимо пряму, яка перетинає коло в двох точках M і M_1. Ці точки є кінці дуг, відповідних шуканим кутам AOM і AOM_1 в інтервалі $(0, 2\pi)$.

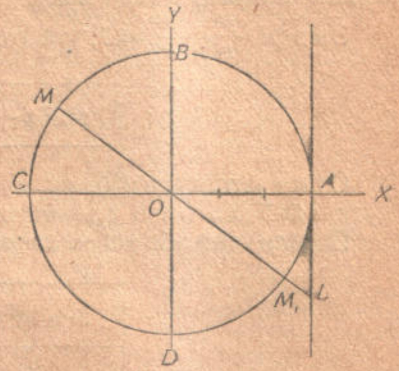

Рис. 45.

Зауваження. Коли доведеться будувати кути за даними значеннями секанса або косеканса, то, базуючись на тому, що величини секанса і косеканса обернені до величин косинуса і синуса, треба обчислити косинус або синус, а далі робити так, як у першому і другому прикладах.

§ 25. Основні формули, що зв'язують тригонометричні функції кута.

З загальних означень тригонометричних функцій випливають такі 4 формули:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad (1) \qquad\qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad (2) \qquad\qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}. \qquad (4)$$

Нехай $\angle AOM = \alpha$, радіус круга дорівнює r, координати точки M (кінця дуги, відповідної куту α) x і y (рис. 46).

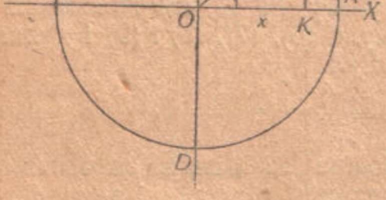

Рис. 46.

Розглядаючи спочатку гострий кут α, тобто кут в I чверті, за теоремою Піфагора з прямокутного трикутника OMK маємо:

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

Так само і для будьякого кута α — відрізки, які означають координати x і y кінця дуги, і радіус, йому відповідний, завжди утворюють прямокутний трикутник, а тому геометричне співвідношення, дане теоремою Піфагора, залишається в силі. Але це стосується тільки абсолютних величин координат і радіуса, а тому $|x|^2 + |y|^2 = r^2$.

[1] Або, інакше кажучи, будуємо точку з координатами $(3, -2)$.

На підставі того, що показники при $|x|$ і $|y|$ парні, можна замість останньої рівності написати $y^2+x^2=r^2$, де x і y можуть бути і додатні і від'ємні.

Звідси $\frac{y^2}{r^2}+\frac{x^2}{r^2}=1$, тобто

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.} \tag{5}$$

Отже формула (5), як і чотири попередні, справедлива для кута якої завгодно величини.

Поділивши обидві частини формули (5) на $\cos^2\alpha$, маємо:

$$\boxed{1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha,} \tag{6}$$

а поділивши на $\sin^2\alpha$, маємо:

$$\boxed{1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha.} \tag{7}$$

З формули (6) виходить, що

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Звідси

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},} \tag{8}$$

а через те що

$$\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha,$$

маємо:

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.} \tag{9}$$

Зауваження. Треба звернути увагу на те, що головними з цих формул є перші п'ять, а формули (6), (7), (8) і (9) і деякі інші є наслідки з перших п'яти формул.

Використовуючи ці формули, можна за даним значенням однієї тригонометричної функції обчислити відповідні значення всіх інших тригонометричних функцій.

Приклад 1. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, при чому $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Розв'язування. З формули (5)

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

На підставі даної нерівності, ураховуючи знак у синуса, робимо висновок, що кут α закінчується в II чверті круга, а тому біля кореня у виразі для косинуса треба написати знак —;

маємо: $$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}},$$

звідки

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{4}{3};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = -\frac{5}{4};$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{5}{3}.$$

Приклад 2. $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, при чому $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язування.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = +\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

З формули (6) $\sec\alpha = \pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Ураховуючи дану нерівність і знак тангенса, робимо висновок, що секанс від'ємний, а тому

$$\sec\alpha = -\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}\right)^2},$$

тобто

$$\sec\alpha = -3.$$

Звідси:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3};$$

$$\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

§ 26. Приклади.

I. Використовуючи періодичність тригонометричної функції, визначити $\sin 3\pi$, $\cos 3\pi$, $\sin\frac{7\pi}{2}$, $\operatorname{tg} 7\pi$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$ і $\cos 450^\circ$.

II. За даним значенням тригонометричної функції визначити значення всіх інших тригонометричних функцій.

1. $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.

2. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $0 < \alpha < \pi$.

3. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$; $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.

4. $\sec\alpha = -2$; $0 < \alpha < \pi$.

5. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

III. Побудувати кути в інтервалі $(0, 360^\circ)$, тобто $(0, 2\pi)$ за даними значеннями тригонометричної функції.

1. $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$;
2. $\cos x = -\frac{1}{3}$;
3. $\cos x = \frac{4}{5}$;
4. $\sec x = 2$.

IV. Використовуючи формули залежності між тригонометричними функціями кута, спростити тригонометричні вирази.

1. $1 - \sin^2\alpha$.
2. $\sin 90^\circ - \cos^2\alpha$.
3. $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$.
4. $\sec^2\alpha - 1$.
5. $\csc^2\alpha + \cos 180^\circ$.
6. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2 23^\circ$.
7. $\sin^2 43^\circ + \cos^2 43^\circ - \cos^2\alpha$.
8. $\sec 20^\circ \cos 20^\circ - \cos^2\beta$.
9. $\frac{1 - \sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$.
10. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha - \cos^2\beta$.
11. $\frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha - \sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$.
12. $(\sec^2\alpha + \cos\pi)\cos^2\alpha + \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\csc^2\alpha}$. *Відповідь.* 1.
13. $\frac{\cos 360^\circ - \sin^2\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha$.
14. $\frac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha}$.
15. $\frac{\cos^2\alpha + \sin\frac{3\pi}{2}}{\cos 0 - \sec^2\alpha} + \sin^2\alpha$.
16. $\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$.

Показати, що це є сума двох тригонометричних функцій кута α.

Вказівка. Треба чисельник і знаменник дробу помножити на $1 + \cos\alpha$.

Відповідь. $\csc\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$.

17. $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$.

Перетворити в суму або різницю двох тригонометричних функцій.

18. $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\left(\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha\right)$.

19. $\left(\frac{2\operatorname{tg}45^\circ-\cos 270^\circ}{\cos 360^\circ-\sin 270^\circ}+\cos\beta\right)\left(1-\cos\beta\right)$.

20. $\left(\frac{\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}-\sec\pi}{\sin\frac{3\pi}{2}+\operatorname{tg}3\pi}+\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)(1+\sec\alpha)$. *Відповідь*. $\operatorname{tg}^2\alpha$.

21. $\left(\frac{\sin^2\alpha+\sin\frac{3\pi}{2}}{\sin 90^\circ-\csc^2\alpha}\cdot\csc^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta\right)\cdot\operatorname{ctg}^2\beta$.

V. Довести тотожності.

1. $\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+1}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$.

Вказівка. Треба чисельник і знаменник дробу поділити на $\cos^2\alpha$.

2. $\frac{1-3\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\cos\alpha}=3\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\right)$.

Вказівка. Треба в чисельникові першого дробу винести 3 за дужки.

РОЗДІЛ IV.

ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ ДО НАЙМЕНШОГО ДОДАТНОГО КУТА.

§ 27. Зведення аргумента тригонометричної функції до однієї з установлених форм.

Тригонометричні функції від'ємного кута (§ 18) можна звести до тригонометричних функцій додатного кута. Коли додатний кут більший 360° (2π рад. од.), то на підставі періодичності функцій, відшукуючи значення синуса, косинуса, секанса і косеканса, що мають період 2π (360°), віднімають від кута ціле число раз по 2π, тобто $2k\pi$, або $k \cdot 360^\circ$.

Завдяки цьому аргумент тригонометричних функцій завжди можна вважати додатним і меншим 2π, або 360°. З метою дальшого зведення тригонометричних функцій до меншого аргумента, кожний кут в інтервалі $(0, 2\pi)$, або $(0^\circ, 360^\circ)$, представляють в одній з таких форм:

$$90^\circ \pm \alpha^\circ, \text{ або } \frac{\pi}{2} \pm \alpha;$$
$$180^\circ \pm \alpha^\circ, \text{ або } \pi \pm \alpha;$$
$$270^\circ \pm \alpha^\circ, \text{ або } \frac{3}{2}\pi \pm \alpha;$$
$$360^\circ - \alpha^\circ, \text{ або } 2\pi - \alpha,$$

де α гострий кут, який можна зробити меншим або рівним 45° $\left(\frac{\pi}{4} \text{ рад. од.}\right)$. Справді:

$$45^\circ = 90^\circ - 45^\circ;$$
$$60^\circ = 90^\circ - 30^\circ;$$
$$\frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \ \frac{3}{4}\pi = \pi - \frac{\pi}{4};$$
$$130^\circ = 90^\circ + 40^\circ;$$
$$210^\circ = 180^\circ + 30^\circ;$$
$$\frac{7}{6}\pi = \pi + \frac{\pi}{6};$$
$$260^\circ = 270^\circ - 10^\circ;$$
$$300^\circ = 270^\circ + 30^\circ;$$
$$340^\circ = 360^\circ - 20^\circ;$$
$$\frac{7}{4}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{4}.$$

Як бачимо, в 1-му, 3-му й останньому прикладах $\alpha = \frac{\pi}{4}$, а в усіх інших $\alpha < \frac{\pi}{4}$.

§ 28. Формули зведення для кута $90^\circ \pm \alpha^\circ$, або $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$.

Щодо доповняльних гострих кутів α° і $90^\circ - \alpha^\circ$, то, не розглядаючи їх у крузі, можна прийняти їх за гострі кути прямокутного трикутника. Справді, коли один з них дорівнює α°, то другий дорівнює $90^\circ - \alpha^\circ$, або, коли один з них дорівнює α рад. од., другий дорівнює $\frac{\pi}{2} - \alpha$, а тому на підставі означення тригонометричних функцій пишемо:

$$\left.\begin{aligned}
\sin(90^\circ - \alpha^\circ) &= \cos\alpha^\circ, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos\alpha \\
\cos(90^\circ - \alpha^\circ) &= \sin\alpha^\circ, & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin\alpha \\
\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha^\circ) &= \operatorname{ctg}\alpha^\circ, \quad \text{або} & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{ctg}\alpha \\
\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha^\circ) &= \operatorname{tg}\alpha^\circ, & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{tg}\alpha \\
\sec(90^\circ - \alpha^\circ) &= \csc\alpha^\circ, & \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \csc\alpha \\
\csc(90^\circ - \alpha^\circ) &= \sec\alpha^\circ, & \csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sec\alpha
\end{aligned}\right\} \quad \mathrm{I}$$

Переходимо до кута $90^\circ + \alpha^\circ$, або $\frac{\pi}{2} + \alpha$.

Нехай $\angle AOM = \alpha$ (рис. 47).

Будуємо кут BON, рівний α.

Тоді $\angle AON = 90^\circ + \alpha^\circ$, або $\frac{\pi}{2} + \alpha$.

Опустивши з точок M і N на вісь X-ів перпендикуляри MK і NG, з рівності трикутників MOK і NOG, ураховуючи знаки координат точок M і N (кінців дуг AM і AN, відповідних кутам α і $\frac{\pi}{2} + \alpha$), приходимо до висновку:

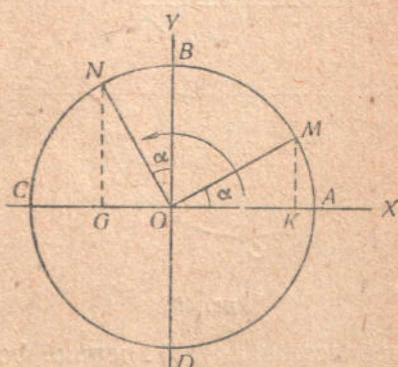

Рис. 47.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha, \tag{1}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha. \tag{2}$$

Поділивши спочатку першу формулу на другу, а потім, навпаки, другу на першу, одержимо:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

А далі, замінивши в формулах (2) і (1) перші й другі частини на обернені числа, матимемо:

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\csc\alpha \quad \text{і} \quad \csc\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sec\alpha.$$

Отже, маємо другу групу формул:

$$\left.\begin{array}{lll}
\sin(90^\circ+\alpha^\circ)=\cos\alpha^\circ, & & \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \\
\cos(90^\circ+\alpha^\circ)=-\sin\alpha^\circ, & & \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha \\
\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha^\circ)=-\operatorname{ctg}\alpha^\circ, & \text{або} & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha \\
\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha^\circ)=-\operatorname{tg}\alpha^\circ, & & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha \\
\sec(90^\circ+\alpha^\circ)=-\csc\alpha^\circ, & & \sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\csc\alpha \\
\csc(90^\circ+\alpha^\circ)=\sec\alpha^\circ, & & \csc\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sec\alpha.
\end{array}\right\} \quad \text{II}$$

§ 29. Формули зведення для кута $180^\circ\pm\alpha^\circ$, або $\pi\pm\alpha$.

Нехай $\angle AOM=\alpha$ (рис. 48). З точки M проводимо хорду MN, паралельну осі X-ів.

На підставі відомих геометричних теорем (про дуги між паралельними хордами і про вимірювання центрального кута) $\angle NOC=\alpha$, а тому $\angle AON=180^\circ-\alpha^\circ$, або $\pi-\alpha$. Опустивши з точок M і N перпендикуляри MK і NG на вісь X-ів, на підставі рівності трикутників MOK і NOG, ураховуючи знаки координат точок M і N, можна зробити висновок, що ординати точок N і M рівні, а абсциси рівні абсолютною величиною, але супротивні щодо знака, тобто $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ (1); $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ (2).

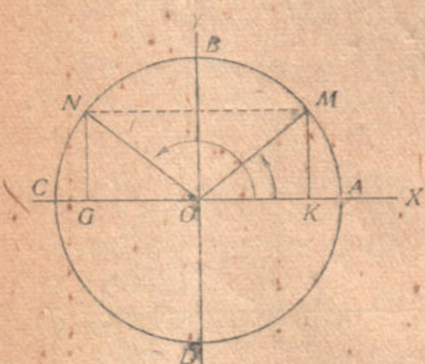

Рис. 48.

Поділивши першу з формул на другу, а потім, навпаки, другу на першу, одержимо: $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$. Замінивши обидві частини другої і першої формули на обернені числа, матимемо:

$$\sec(\pi-\alpha)=-\sec\alpha; \quad \csc(\pi-\alpha)=\csc\alpha.$$

Отже, третю групу формул маємо таку:

$$\left.\begin{array}{lll}
\sin(180^\circ-\alpha^\circ)=\sin\alpha^\circ, & & \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \\
\cos(180^\circ-\alpha^\circ)=-\cos\alpha^\circ, & & \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \\
\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha^\circ)=-\operatorname{tg}\alpha^\circ, & \text{або} & \operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha \\
\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha^\circ)=-\operatorname{ctg}\alpha^\circ, & & \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha \\
\sec(180^\circ-\alpha^\circ)=-\sec\alpha^\circ, & & \sec(\pi-\alpha)=-\sec\alpha \\
\csc(180^\circ-\alpha^\circ)=\csc\alpha^\circ, & & \csc(\pi-\alpha)=\csc\alpha
\end{array}\right\} \quad \text{III}$$

Цю групу формул можна вивести суто аналітично, використовуючи I і II групи формул.

Справді, $180^\circ - \alpha^\circ = 90^\circ + 90^\circ - \alpha^\circ$.

Якщо $0 < \alpha^\circ < 90^\circ$, то $90^\circ - \alpha^\circ < 90^\circ$, тобто $90^\circ - \alpha^\circ$ гострий кут, який ми позначимо через β°.

Отже,

$\sin(180^\circ - \alpha^\circ) = \sin(90^\circ + 90^\circ - \alpha^\circ) = \sin(90^\circ + \beta^\circ) = \cos\beta^\circ = \cos(90^\circ - \alpha^\circ) = \sin\alpha^\circ$,

$\cos(180^\circ - \alpha^\circ) = \cos(90^\circ + 90^\circ - \alpha^\circ) = \cos(90^\circ + \beta^\circ) = -\sin\beta^\circ =$
$- \sin(90^\circ - \alpha^\circ) = -\cos\alpha^\circ$ і т. д.

Перейдемо до виведення четвертої групи формул — для кута $180^\circ + \alpha^\circ$, або $\pi + \alpha$.

Щоб визначити $\sin(\pi + \alpha)$ і $\cos(\pi + \alpha)$, скористуємося періодичністю цих функцій і віднімемо від кута $\pi + \alpha$ кут 2π, тобто період, а далі, на підставі формул для тригонометричних функцій від'ємного кута і формул групи III, одержимо:

$$\sin(\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha - 2\pi) = \sin(-\pi + \alpha) =$$
$$= -\sin(\pi - \alpha) = -\sin\alpha; \qquad (1)$$

$$\cos(\pi + \alpha) = \cos(\pi + \alpha - 2\pi) = \cos(-\pi + \alpha) =$$
$$= \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (2)$$

З цих двох формул для синуса і косинуса, так само як раніш, виведемо решту формул.

Отже, четверта група формул буде така:

$$\left.\begin{array}{lll} \sin(180^\circ + \alpha^\circ) = -\sin\alpha^\circ, & & \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha^\circ) = -\cos\alpha^\circ, & & \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha^\circ) = \operatorname{tg}\alpha^\circ, & \text{або} & \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha^\circ) = \operatorname{ctg}\alpha^\circ, & & \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \\ \sec(180^\circ + \alpha^\circ) = -\sec\alpha^\circ, & & \sec(\pi + \alpha) = -\sec\alpha \\ \csc(180^\circ + \alpha^\circ) = -\csc\alpha^\circ, & & \csc(\pi + \alpha) = -\csc\alpha \end{array}\right\} \text{IV}$$

§ 30. Формули зведення для кутів $270^\circ \pm \alpha^\circ$, або $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$, і $360^\circ - \alpha^\circ$, або $2\pi - \alpha$.

Формули зведення для цих кутів виводяться аналогічно попереднім, а саме: щоб визначити синус і косинус кута $\frac{3}{2}\pi - \alpha$, віднімають від нього період 2π, а далі використовують уже відомі формули:

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha - 2\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$
$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha; \qquad (1)$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha. \qquad (2)$$

На підставі цього легко визначити

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right),\ \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) \text{ і т. д.}$$

Отже, маємо п'яту групу формул:

$$\left.\begin{array}{lll}
\sin(270^\circ-\alpha^\circ)=-\cos\alpha^\circ, & & \sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha \\
\cos(270^\circ-\alpha^\circ)=-\sin\alpha^\circ, & & \cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha \\
\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha^\circ)=\operatorname{ctg}\alpha^\circ, & \text{або} & \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha \\
\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha^\circ)=\operatorname{tg}\alpha^\circ, & & \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha \\
\sec(270^\circ-\alpha^\circ)=-\csc\alpha^\circ, & & \sec\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\csc\alpha \\
\csc(270^\circ-\alpha^\circ)=-\sec\alpha^\circ, & & \csc\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sec\alpha
\end{array}\right\}\ \mathrm{V}$$

Аналогічно виводимо ще дві групи формул:

$$\left.\begin{array}{lll}
\sin(270^\circ+\alpha^\circ)=-\cos\alpha^\circ, & & \sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha \\
\cos(270^\circ+\alpha^\circ)=\sin\alpha^\circ, & & \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha \\
\operatorname{tg}(270^\circ+\alpha^\circ)=-\operatorname{ctg}\alpha^\circ, & \text{або} & \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha \\
\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha^\circ)=-\operatorname{tg}\alpha^\circ, & & \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha \\
\sec(270^\circ+\alpha^\circ)=\csc\alpha^\circ, & & \sec\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\csc\alpha \\
\csc(270^\circ+\alpha^\circ)=-\sec\alpha, & & \csc\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\sec\alpha
\end{array}\right\}\ \mathrm{VI}$$

$$\left.\begin{array}{lll}
\sin(360^\circ-\alpha^\circ)=-\sin\alpha^\circ, & & \sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha \\
\cos(360^\circ-\alpha^\circ)=\cos\alpha^\circ, & & \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha \\
\operatorname{tg}(360^\circ-\alpha^\circ)=-\operatorname{tg}\alpha^\circ, & \text{або} & \operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha \\
\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha^\circ)=-\operatorname{ctg}\alpha^\circ, & & \operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha \\
\sec(360^\circ-\alpha^\circ)=\sec\alpha^\circ, & & \sec(2\pi-\alpha)=\sec\alpha \\
\csc(360^\circ-\alpha^\circ)=-\csc\alpha^\circ, & & \csc(2\pi-\alpha)=-\csc\alpha
\end{array}\right\}\ \mathrm{V}$$

§ 31. Узагальнення формул зведення.

Формули зведення можна узагальнити для якого завгодно кута α. Починаємо з I групи формул. Для того випадку, коли кут α гострий, формули доведено. Розглянемо тепер той випадок, коли кут α закінчується в II чверті круга. Нехай $\angle AOM=\alpha$ (рис. 49).

Доповняльний кут його дорівнює $\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{2}+(-\alpha)$, а тому, щоб побудувати його, треба раніше побудувати відповідну йому дугу.

Відкладаємо дугу AB, рівну $\frac{\pi}{2}$, а далі від точки B у від'ємному напрямі дугу BM_1, рівну дузі AM, тоді утвориться дуга AM_1 від'ємного напряму, початком якої вважаємо точку A.

Отже, додатний кут AOM, що дорівнює α, і від'ємний кут AOM_1, що дорівнює $\frac{\pi}{2} - \alpha$, доповняльні кути.

Якщо порівняти координати M і M_1 кінців відповідних їм дуг, то легко переконатися (маючи на увазі, що $\smile BM = \smile AM_1$), що абсциса кожної з точок M і M_1 дорівнює ординаті другої, тобто:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \quad \text{і} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

Звідси випливає вірність і всіх інших формул з групи I.

Розглянемо випадок, коли кут закінчується в III чверті круга (рис. 50).

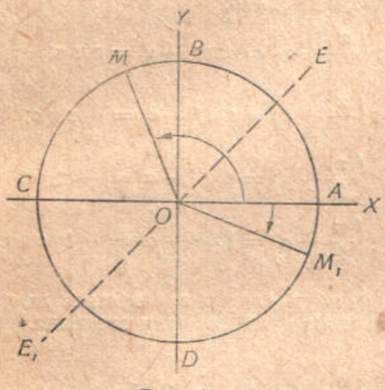

Рис. 49.

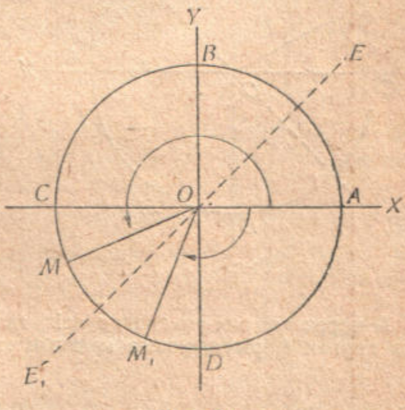

Рис. 50.

Доповняльний кут $\frac{\pi}{2} - \alpha$, тобто $\frac{\pi}{2} + (-\alpha)$, треба, очевидно, будувати аналогічно попередньому випадкові, а саме: попереду треба відкласти дугу AB, рівну $\frac{\pi}{2}$, а далі від точки B у від'ємному напрямі дугу BM_1, що величиною дорівнює дузі AM. Отже, додатний кут AOM і від'ємний кут AOM_1 — доповняльні кути.

На підставі того, що дуги MC і DM_1 рівні, ми зможемо прийти до того ж висновку, що й у попередньому випадку, а саме: абсциса кожної з точок M і M_1 (кінців відповідних дуг) дорівнює ординаті другої.

Отже, і тут

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \text{ і т. д.}$$

Так само можна переконатись у правильності формул I для додатного кута AOM (α) (рис. 51), який закінчується в IV чверті круга, і доповняльного до нього від'ємного кута AOM_1 $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Коли за α приймати додатний кут, то доповняльний до нього $\left(\text{при } \alpha > \frac{\pi}{2}\right)$ завжди буде від'ємний, і навпаки, коли за α прийняти від'ємний кут, то, очевидно, його доповняльний кут $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ буде додатний. Для цих кутів з абсолютною величиною в межах від 0 до 2π формули I, як ми бачимо, справджуються. Треба зазначити, що в усіх розглянутих випадках точки M і M (кінці дуг, відповідних доповняльним кутам) — симетричні відносно спільної бісектриси EE_1 I і III координатних кутів.

Те саме буде, коли абсолютна величина α більша 2π ($|\alpha| > 2\pi$). А тому формули I для кута $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ можна вважати узагальненими для яких завгодно значень кута (додатних або від'ємних). А коли так, то і формули II можна узагальнити, бо

$$\frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} - (-\alpha).$$

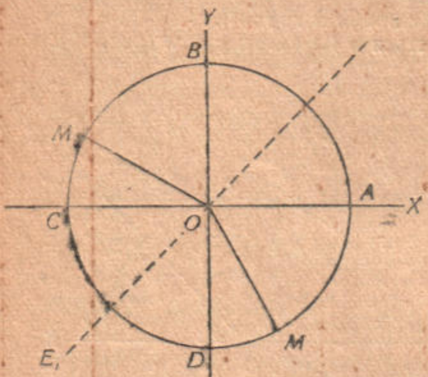

Рис. 51.

Використовуючи узагальнені формули I, одержимо:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \text{ і т. д.}$$

А через те що виведення всіх інших формул зведення базується на цих двох групах формул, можна вважати узагальненими всі формули зведення.

§ 32. Правило для записування будьякої формули зведення.

Запам'ятати всі 7 груп формул досить важко, але, розглянувши їх, можна помітити, що існує правило, яке дає змогу швидко записати будьяку формулу зведення.

Спочатку, припустивши, що α гострий кут (хоч він і не був би гострим), встановлюють, *у якій чверті круга закінчується кут. Це дає можливість поставити той або інший знак у другій частині формули. А далі, коли у вираз для кута входить* 90°, або $\frac{\pi}{2}$, *парне число раз* (тобто входить 180°, 360°, або π, 2π), *то найменування функції в другій частині пишуть те саме, що й у першій частині. А коли у вираз для кута входить* 90°, *або* $\frac{\pi}{2}$, *непарне число раз* (тобто входить 90°, 270°, або $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$), *то назва функції замінюється назвою кофункції.*

Приклад 1. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$.

Коли б кут α був гострим, то кут $\frac{3}{2}\pi+\alpha$ закінчився б у IV чверті, де синус має від'ємне значення, а тому в другій частині пишемо знак —.

У виразі для кута $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ кут $\frac{\pi}{2}$ узято 3 рази (непарне число раз), а тому синус замінюється косинусом.

Отже, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$.

Приклад 2. $\cos(\pi-\alpha)$.

Коли б кут α був гострим, то кут $\pi-\alpha$ закінчувався б у II чверті, де косинус від'ємний, а тому в другій частині формули пишемо мінус. Тут, у виразі для даного кута, кут $\frac{\pi}{2}$ повторено 2 рази, тобто парне число раз, тому пишемо в другій частині те саме найменування функції.

§ 33. Приклади.

Спростити, застосувавши формули зведення, і, де можна, обчислити.

1. $\sin 123^\circ$.

Розв'язування. $\sin 123^\circ=\sin(90^\circ+33^\circ)=\cos 33^\circ$.

2. $\cos\frac{5\pi}{6}$.

Розв'язування. $\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\sin(-643^\circ)$.

Розв'язування.

1-й спосіб: $\sin(-643^\circ)=-\sin 643^\circ=-\sin(643^\circ-360^\circ)=$
$=-\sin 283^\circ=-\sin(270^\circ+13^\circ)=-(-\cos 13^\circ)=\cos 13^\circ$.

2-й спосіб: $\sin(-643^\circ)=\sin(-643^\circ+720^\circ)=\sin 77^\circ=\cos 13^\circ$.

Очевидно, другий спосіб має перевагу перед першим.

4. $\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$.

Розв'язування. $\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{4}+3\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$.

5. $\operatorname{tg} 135^\circ$.
6. $\operatorname{tg} 225^\circ$.
7. $\cos 120^\circ$.
8. $\sin(-840^\circ)$.
9. $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$.
10. $\operatorname{tg}(-510^\circ)$.
11. $\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right)$.
12. $\operatorname{tg}\left(-\frac{23\pi}{4}\right)$.
13. $\cos 1270^\circ$.
14. $\operatorname{ctg}\frac{17\pi}{3}$.

Спростити вирази:

15. $$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\alpha-\pi)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\pi+\alpha)}\cdot\operatorname{ctg}\alpha.$$

16. $\cos(270^\circ-\alpha^\circ)\sin(180^\circ+\alpha^\circ)+\cos(180^\circ-\alpha^\circ)\sin(270^\circ+\alpha^\circ)+$
$+\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha^\circ)\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha^\circ).$

Довести тотожності:

17. $1-\sin(45^\circ-\alpha^\circ)\cos(45^\circ+\alpha^\circ)=\cos^2(45^\circ-\alpha^\circ).$

Вказівка. Тут кути $45^\circ-\alpha^\circ$ і $45^\circ+\alpha^\circ$ доповняльні, а тому:

$$\cos(45^\circ+\alpha^\circ)=\sin(45^\circ-\alpha^\circ).$$

18. $[1-\sin(30^\circ-\alpha^\circ)]\,[1+\cos(60^\circ+\alpha^\circ)]=\cos^2(30^\circ-\alpha^\circ).$

19. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)=1.$

20. $\frac{\sin^2(360^\circ-\alpha^\circ)}{1+\cos(\alpha^\circ-720^\circ)}=1-\cos\alpha.$

21. ***Задача.*** Довести, що площа S кожного трикутника дорівнює половині добутку двох сторін на синус кута між ними, тобто що

$$S=\frac{bc\sin A}{2}.$$

Вказівка.

1) В $\triangle ABC$ треба провести висоту BD, яка лежатиме всередині трикутника, коли кути A і C гострі (рис. 52), і поза трикутником (рис. 53), коли один з цих двох кутів, наприклад A, тупий.

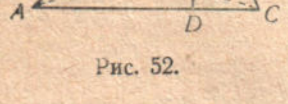

Рис. 52.

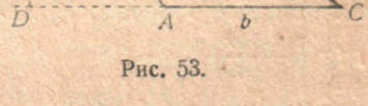

Рис. 53.

2) У звичайну формулу для площі $S=\frac{1}{2}bh$ треба підставити замість h його вираз з $\triangle ABD$ (розглянути обидва трикутники).

Запитання. Де тут застосовують одну з формул зведення?

РОЗДІЛ V.

ГРАФІКИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ І ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ.

§ 34. Синусоідальна функція.

Дана функція $y = \sin x$.

Щоб побудувати її графік у прямокутній системі координат (рис. 54), відкладаємо на осі X-ів значення незалежної змінної x, а на осі Y-ів — відповідні значення $y = \sin x$.

Для зручності побудови графіка беремо круг з центром у початку координат. Нехай радіус його дорівнює 1. Тоді, відклавши на осі X-ів від початку координат у додатному напрямі π діаметрів (з тим або іншим наближенням), одержимо один повний оберт кола, що відповідає 2π радіанам. Абсциса крайньої точки буде 2π.

Поділивши відрізок осі X-ів від 0 до 2π на 4 рівних між собою частини і позначивши абсциси відповідних точок поділу через $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, маємо:

відрізок	$0 - \frac{\pi}{2}$	що відповідає	I	квадранту
„	$\frac{\pi}{2} - \pi$	„	II	„
„	$\pi - \frac{3\pi}{2}$	„	III	„
„	$\frac{3\pi}{2} - 2\pi$	„	IV	„

Складаємо функціональну таблицю (див. таблиці натуральних значень тригонометричних функцій):

при $x = 0$	$y = \sin 0 = 0;$	при $x = 0$	$y = 0;$
$x = \frac{\pi}{6}$	$y = \sin \frac{\pi}{6} = 0{,}5;$	$x = -\frac{\pi}{6}$	$y = -\sin \frac{\pi}{6} = -0{,}5;$
$x = \frac{\pi}{4}$	$y = \sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7;$	$x = -\frac{\pi}{4}$	$y = -0{,}7;$
$x = \frac{\pi}{3}$	$y = \sin \frac{\pi}{3} = 0{,}87;$	$x = -\frac{\pi}{3}$	$y = -0{,}87;$
$x = \frac{\pi}{2}$	$y = \sin \frac{\pi}{2} = 1;$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$y = -1;$
$x = \pi$	$y = \sin \pi = 0;$	$x = -\pi$	$y = 0;$
$x = \frac{3\pi}{2}$	$y = \sin \frac{3\pi}{2} = -1;$	$x = -\frac{3\pi}{2}$	$y = 1;$
$x = 2\pi$	$y = \sin 2\pi = 0.$	$x = -2\pi$	$y = 0.$

Побудувавши у відповідних точках осі X-ів відповідні ординати і сполучивши кінці цих ординат плавною кривою лінією, одержимо графічну інтерпретацію функції $y = \sin x$. На підставі періодичності функції $y = \sin x$ маємо, що одержана нами крива лінія в інтервалі від 2π до 4π і т. д. є та сама крива, що й в інтервалі від 0 до 2π.

Неперервна крива, яка визначає собою закон зміни функції $y = \sin x$, називається с и н у с о ї д о ю. Вона безмежна і складається з рівних додатних і від'ємних дуг, які чергуються між собою і розташовані по обидві сторони осі абсцис і початку координат.

Графік функції $y = \sin x$

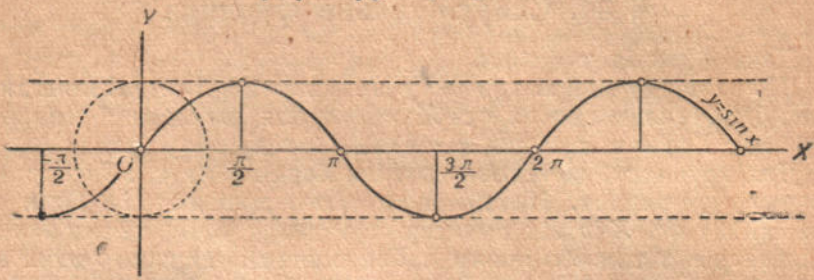

Рис. 54.

В л а с т и в о с т і.

1. Функція $y = \sin x$ — неперервна.
2. „ — періодична (з періодом 2π).
3. „ — монотонна для аргумента в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
4. „ — однозначна (кожному значенню аргумента відповідає тільки одне значення функції).
5. „ — непарна $[\sin(-x) = -\sin x]$.
6. „ — змінюється в межах від -1 до $+1$, тобто $-1 \leqslant \sin x \leqslant +1$.

§ 35. Косинусоідальна функція $y = \cos x$.

Застосувавши метод § 34, одержимо графік косинусоіди (рис. 55).

Функціональна таблиця

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x$	1	0,85	0,7	0,5	0	-1	0	1
x	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π
$y = \cos x$	1	0,85	0,7	0,5	0	-1	0	1

Графік функції $y = \cos x$

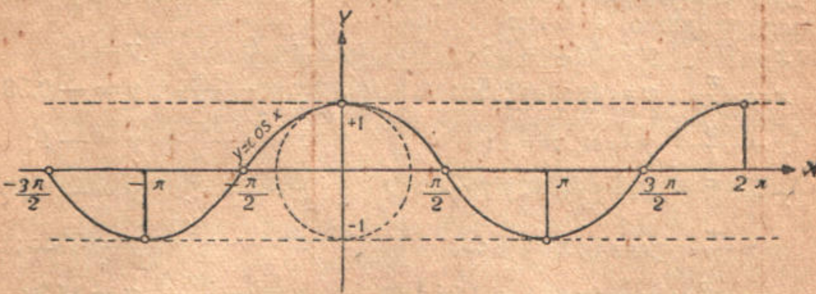

Рис. 55.

Властивості.

1. Функція $y = \cos x$ — неперервна.
2. „ — періодична (з періодом 2π).
3. „ — монотонна для аргумента в інтервалі $(0, \pi)$.
4. „ — однозначна
5. „ — парна $[\cos(-x) = \cos x]$.
6. „ — змінюється в межах від -1 до $+1$, тобто $-1 \leqslant \cos x \leqslant +1$.

Щоб з синусоіди одержати косинусоіду, досить першу посунути ліворуч по осі X-ів на аргумент $\frac{\pi}{2}$, і навпаки (рис. 56).

Графіки функцій $y = \sin x$ *і* $y = \cos x$.

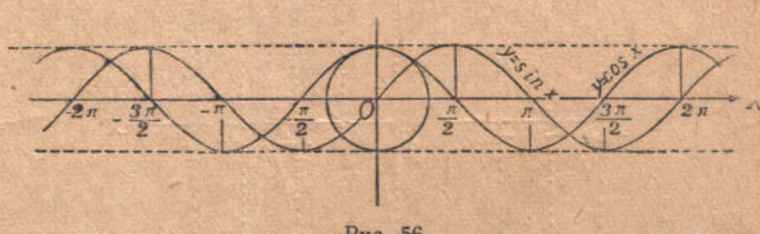

Рис. 56.

Вправа. Визначити спільні властивості цих функцій.

§ 36. Функція $y = \operatorname{tg} x$.

Для побудови графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ складемо функціональну таблицю, а саме:

при $x=0$	$y=\operatorname{tg} x=0$;	при $x=0$	$y=0$;
$x=\frac{\pi}{6}$	$y=\operatorname{tg} x=0{,}58$;	$x=-\frac{\pi}{6}$	$y=-0{,}58$;
$x=\frac{\pi}{4}$	$y=\operatorname{tg} x=1$;	$x=-\frac{\pi}{4}$	$y=-1$;
$x=\frac{\pi}{3}$	$y=\operatorname{tg} x=1{,}73$;	$x=-\frac{\pi}{3}$	$y=-1{,}73$;
$x=\frac{\pi}{2}$	$y=\operatorname{tg} x=\pm\infty$;	$x=-\frac{\pi}{2}$	$y=\mp\infty$;
$x=\frac{2\pi}{3}$	$y=\operatorname{tg} x=-1{,}73$;	$x=-\frac{2\pi}{3}$	$y=1{,}73$;
$x=\frac{3\pi}{4}$	$y=\operatorname{tg} x=-1$;	$x=-\frac{3\pi}{4}$	$y=1$;
$x=\frac{5\pi}{6}$	$y=\operatorname{tg} x=-0{,}58$;	$x=-\frac{5\pi}{6}$	$y=0{,}58$;
$x=\pi$	$y=\operatorname{tg} x=0$;	$x=-\pi$	$y=0$;
$x=\frac{7\pi}{6}$	$y=\operatorname{tg} x=0{,}58$;	$x=-\frac{7\pi}{6}$	$y=-0{,}58$;
$x=\frac{5\pi}{4}$	$y=\operatorname{tg} x=1$;	$x=-\frac{5\pi}{4}$	$y=-1$;
$x=\frac{4\pi}{3}$	$y=\operatorname{tg} x=1{,}73$;	$x=-\frac{4\pi}{3}$	$y=-1{,}73$;
$x=\frac{3\pi}{2}$	$y=\operatorname{tg} x=\pm\infty$;	$x=-\frac{3\pi}{2}$	$y=\mp\infty$;
$x=\frac{5\pi}{3}$	$y=\operatorname{tg} x-1{,}73$;	$x=-\frac{5\pi}{3}$	$y=1{,}73$;
$x=\frac{7\pi}{4}$	$y=\operatorname{tg} x=-1$;	$x=-\frac{7\pi}{4}$	$y=1$;
$x=\frac{11\pi}{6}$	$y=\operatorname{tg} x=-0{,}58$;	$x=-\frac{11\pi}{6}$	$y=0{,}58$;
$x=2\pi$	$y=\operatorname{tg} x=0$.	$x=-2\pi$	$y=0$.

Якщо перенести цю функціональну таблицю на графік, то одержимо повну картину зміни функції $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 57).

Графік функції $y = \operatorname{tg} x$.

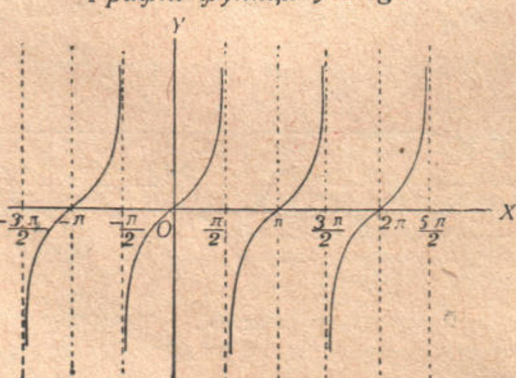

Рис. 57.

Властивості.

1. Функція $y=\operatorname{tg} x$ „зазнає" розриву неперервності, коли аргумент набуває значень, рівних непарній кількості прямих кутів.
2. „ — періодична (з періодом π).
3. „ — монотонна для аргумента в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
4. „ — однозначна.
5. „ — непарна $[\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x]$.
6. „ — змінюється в межах від $-\infty$ до $+\infty$, тобто $-\infty \leqslant \operatorname{tg} x \leqslant \infty$.

§ 37. Функція $y=\operatorname{ctg} x$.

Застосувавши методи § 34 і § 36, одержимо графік (рис. 58).

Функціональна таблиця

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$
$y=\operatorname{ctg} x$	$\pm\infty$	1,73	1	0,58	0	$-0{,}58$	-1

x	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$
$y=\operatorname{ctg} x$	$\mp\infty$	$-1{,}73$	-1	$-0{,}58$	0	0,58

Графік функції $y=\operatorname{ctg} x$.

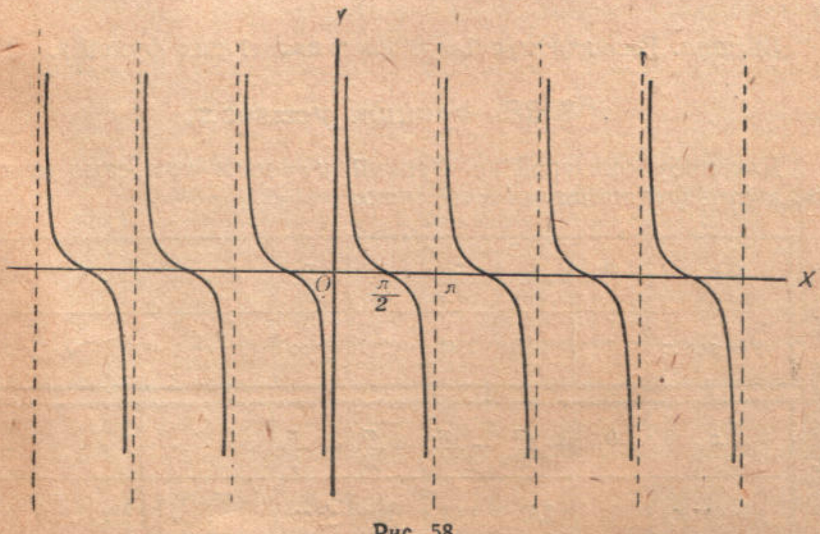

Рис. 58.

Властивості.

1. Функція $y = \operatorname{ctg} x$ „зазнає" розриву неперервності, коли аргумент набуває значень, рівних непарній кількості прямих кутів.
2. „ — періодична (з періодом π).
3. „ — монотонна для аргумента в інтервалі $(0, \pi)$.
4. „ — однозначна.
5. „ — непарна $[\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x]$.
6. „ — змінюється в межах від $-\infty$ до $+\infty$, тобто $-\infty \leqslant \operatorname{ctg} \leqslant x + \infty$.

Графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ *і* $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 59).

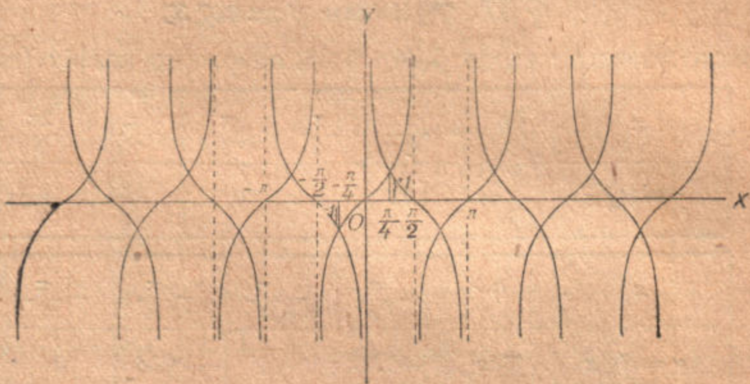

Рис. 59.

Вправа. Визначити спільні властивості цих функцій.

§ 38. Функція $y = \sec x$.

Для побудови графіка функції $y = \sec x$ так само (рис. 60) складемо функціональну таблицю.

Функціональна таблиця

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	. . . .
$y = \sec x$	1	1,15	1,41	2	$\pm\infty$	. . . .

x	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	. . . .
$y = \sec x$	1	1,15	1,41	2	$\pm\infty$	. . . .

Графік функції $y = \sec x$

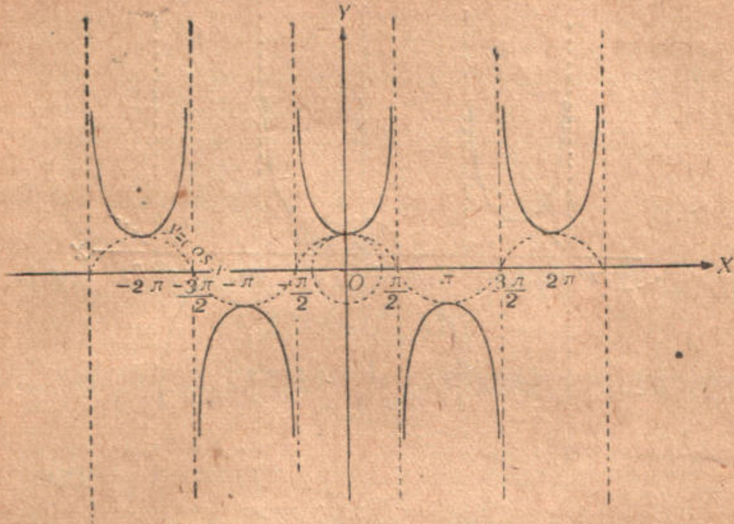

Рис. 60.

Властивості.

1. Функція $y = \sec x$ „зазнає“ розриву неперервності, коли аргумент набуває значень, рівних непарній кількості $\frac{\pi}{2}$.
2. „ — періодична (з періодом 2π).
3. „ — однозначна.
4. „ — парна $[\sec(-x) = \sec x]$.
5. „ — змінюється в межах від $-\infty$ до -1 і від $+1$ до ∞, тобто: $-\infty \leqslant \sec x \leqslant -1$; $+1 \leqslant \sec x \leqslant +\infty$.

§ 39. Функція $y = \csc x$.

Аналогічно одержимо графік цієї функції (рис. 61).

Функціональна таблиця

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \csc x$	$\pm\infty$	2	1,41	1,18	1

x	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
$y = \csc x$	$\pm\infty$	-2	$-1,41$	$-1,18$	-1

Графік функції $y = \csc x$.

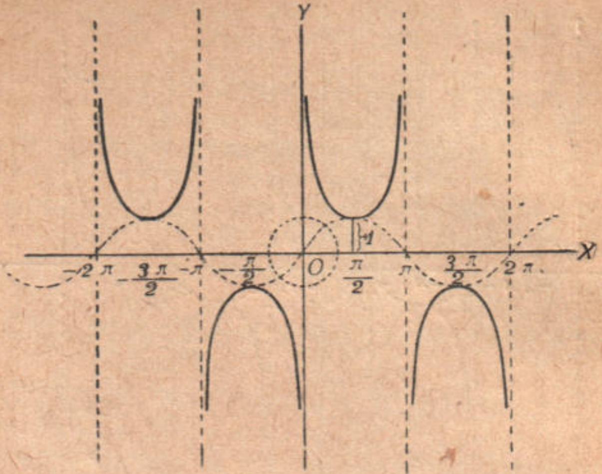

Рис. 61.

В**ласт**ивості.

1. Функція $y = \csc x$ „зазнає“ розриву неперервності, коли аргумент набуває значень, рівних парній кількості $\frac{\pi}{2}$.
2. „ — періодична (з періодом 2π).
3. „ — однозначна.
4. „ — непарна $[\csc(-x) = -\csc x]$.
5. „ границі зміни визначаються нерівностями:

$$-\infty \leqslant \csc x \leqslant -1;$$
$$+1 \leqslant \csc x \leqslant +\infty.$$

РОЗДІЛ VI.

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС СУМИ І РІЗНИЦІ ДВОХ КУТІВ.

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ПОДВІЙНИХ І ПОЛОВИННИХ КУТІВ.

§ 40. Синус і косинус суми двох гострих кутів, сума яких менша 90°.

З точки O (рис. 62) проведено три прямолінійні промені OA, OB і OC так, що кут AOC між крайніми з них менший 90°.

Нехай $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$, тоді $\angle AOC = \alpha + \beta$.

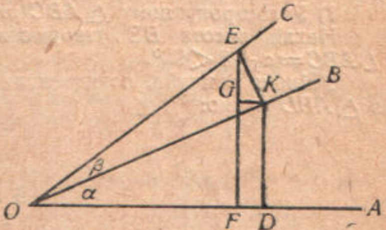

Рис. 62.

На OC візьмемо довільну точку E, з якої опустимо перпендикуляри EK на OB і EF на OA, а з точки K перпендикуляри KD на OA і KG на EF. З $\triangle OEF$ $\sin(\alpha + \beta) = \frac{EF}{OE}$, але з рисунка бачимо, що $EF = EG + GF = EG + KD$, а тому $\sin(\alpha + \beta) = \frac{EG + KD}{OE}$.

З $\triangle OKD$ і $\triangle KEG$ маємо: $KD = OK \cdot \sin\alpha$, $EG = EK \cdot \cos\alpha$.

Підставимо ці вирази для KD і EG у вираз для $\sin(\alpha + \beta)$:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{OK \cdot \sin\alpha + EK \cdot \cos\alpha}{OE},$$

або

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \frac{OK}{OE} + \frac{EK}{OE} \cdot \cos\alpha;$$

через те що

$$\frac{OK}{OE} = \cos\beta \quad \text{і} \quad \frac{EK}{OE} = \sin\beta,$$

остаточно маємо:

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.} \qquad (1)$$

Перейдемо до виведення формули для косинуса суми.

З тр-ка OEF
$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OF}{OE},$$
але з рисунка бачимо, що
$$OF=OD-FD=OD-GK,$$
а тому
$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OD-GK}{OE}.$$

З тр-ків OKD і GEK маємо: $OD=OK\cdot\cos\alpha$, $GK=EK\cdot\sin\alpha$.

Підставимо ці вирази OD і GK у вираз для $\cos(\alpha+\beta)$, тоді матимемо:
$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OK\cdot\cos\alpha-EK\sin\alpha}{OE},$$
або
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\frac{OK}{OE}-\sin\alpha\cdot\frac{OK}{OE},$$
що остаточно дає:
$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.} \qquad (2)$$

§ 41. Інші способи виведення формул (1) і (2).

1) У гострокутному $\triangle ABC$ проводимо висоти BE і AD (рис. 63).

Нехай висота BE утворює з сторонами AB і BC кути α і β. Очевидно, $\angle ABC=\alpha+\beta<90^\circ$.

Увівши звичайні позначення ($AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, $AD=h_a$, $BE=h_b$), з $\triangle ABD$ маємо:
$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{h_a}{c}.$$

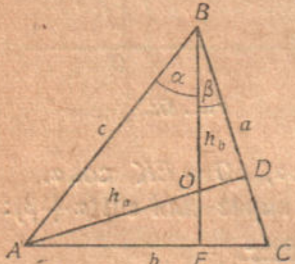

Рис. 63.

З подібності трикутників ADC і BEC
$$\frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a},$$
звідки
$$h_a=\frac{bh_b}{a}.$$

Підставимо значення h_a у вираз для $\sin(\alpha+\beta)$, тоді дістанемо:
$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{b\cdot h_b}{a\cdot c}.$$

А з рисунка
$$b=AC=AE+EC,$$
тому
$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{(AE+EC)h_b}{a\cdot c}=\frac{AE}{c}\cdot\frac{h_b}{a}+\frac{EC}{a}\cdot\frac{h_b}{c},$$
що дає:
$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha.} \qquad (1)$$

Перейдемо до виведення формули для $\cos(\alpha+\beta)$.

З $\triangle ABD$ $\cos(\alpha+\beta)=\frac{BD}{c}$, а з подібності трикутників BEC і BOD

$$\frac{BD}{h_b}=\frac{BO}{a},$$

звідки

$$BD=\frac{BO\cdot h_b}{a}.$$

Підставивши значення BD у вираз для $\cos(\alpha+\beta)$, одержимо

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{BO\cdot h_b}{a\cdot c},$$

але з рисунка $BO=h_b-OE$, тому

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{(h_b-OE)h_b}{a\cdot c}=\frac{h_b}{c}\cdot\frac{h_b}{a}-\frac{h_b}{a}\cdot\frac{OE}{c}.$$

Через те що

$$\frac{h_b}{c}=\cos\alpha,\quad \frac{h_b}{a}=\cos\beta,\quad \text{а}\quad OE=AE\operatorname{tg}\beta,$$

маємо

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\cos\beta\,\frac{AE}{c}\operatorname{tg}\beta,$$

але

$$\frac{AE}{c}=\sin\alpha,\quad \text{а}\quad \cos\beta\operatorname{tg}\beta=\sin\beta.$$

Виходить:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.} \qquad (2)$$

2) Подамо ще один спосіб виведення формул (1) і (2), який базується на тригонометричній формулі для площі трикутника, а саме: *площа трикутника дорівнює половині добутку двох сторін на синус кута між ними* (див. зад. 21, § 33).

У тр-ку ABC, де B більший кут, проведемо висоту BD (рис. 64). Нехай ця висота утворює з сторонами AB і BC кути α і β.

Площа $\triangle ABC$ = пл. $\triangle ABD$ + пл. $\triangle DBC$. На підставі тригонометричної формули для площі трикутника останню рівність переписуємо так:

$$\frac{1}{2}ac\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}ch\sin\alpha+\frac{1}{2}ah\sin\beta.$$

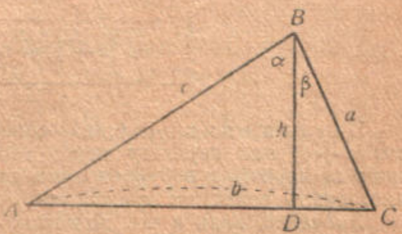

Рис. 64.

Множимо на 2 і ділимо на ac, тоді

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\frac{h}{a}+\sin\beta\,\frac{h}{c}.$$

Через те що

$$\frac{h}{a}=\cos\beta,\quad \text{а}\quad \frac{h}{c}=\cos\alpha,$$

маємо остаточно:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha.} \qquad (1)$$

Перейдемо до виведення формули (2).

Дано $BD \perp AC$ (рис. 65) і $\alpha + \beta < 90^\circ$.

Будуємо прямий кут EBC, де точка E лежить на продовженні сторони AC тр-ка ABC. Нехай $EB = k$.

З рисунка бачимо, що площа $\triangle EBA =$ пл.$\triangle EBC -$ пл. $\triangle ABC$.

На підставі формули для площі трикутника останню рівність переписуємо так:

$$\frac{k \cdot c \sin[90^\circ - (\alpha + \beta)]}{2} = \frac{k \cdot a}{2} \sin 90^\circ - \frac{a \cdot c \sin(\alpha + \beta)}{2}.$$

Помножаємо на 2 і ділимо на kc, а потім, зробивши деякі спрощення, маємо:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{a}{c} - \frac{a}{k} \sin \alpha \quad + \;).$$

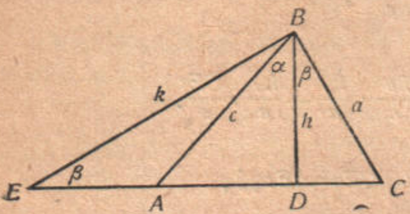

Рис. 65.

У $\triangle EBC \angle E = \beta$, бо це — кути з взаємно перпендикулярними сторонами.

$\frac{a}{k} = \operatorname{tg} \beta$, а, крім того, з трикутників ABD і DBC

$$\frac{a}{c} = \frac{\frac{h}{\cos\beta}}{\frac{h}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta},$$

а тому

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} - \operatorname{tg}\beta \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}(\sin\alpha \cos\beta +$$

$$+ \sin\beta\cos\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} - \sin\alpha\sin\beta - \frac{\sin^2\beta \cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha - \sin^2\beta \cos\alpha}{\cos\beta} - \sin\alpha\sin\beta =$$

$$= \frac{\cos\alpha\,(1 - \sin^2\beta)}{\cos\beta} - \sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos\alpha \cos^2\beta}{\cos\beta} - \sin\alpha \sin\beta.$$

Звідси остаточно маємо:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.} \qquad (2)$$

Зауваження. Перший спосіб доведення формул для $\sin(\alpha + \beta)$ і $\cos(\alpha + \beta)$ має перевагу перед двома іншими, бо він більш натуральний. Тут зразу починають з побудови суми двох даних кутів, а далі безпосередньо використовують означення тригонометричних функцій кута.

Звичайно, коли є час, то цікаво більш сильних учнів ознайомити і з іншими доведеннями.

§ 42. Узагальнення формул (1) і (2).

Ці формули (1) і (2) доведено для гострих кутів, сума яких менша $90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$. Їх можна поширити на які завгодно кути.

1) Спочатку переконаємось у тому, що формули (1) і (2) справджуються для гострих кутів, сума яких дорівнює $90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Ясно, що в цьому випадку $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Підставимо замість β у формули (1) і (2) $\frac{\pi}{2} - \alpha$, тоді одержимо:

$$\sin\frac{\pi}{2} = \sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\alpha;$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

а це дає такі тотожності:

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha;$$

$$0 = \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha,$$

що підтверджує правильність формул (1) і (2) для цього випадку.

2) Припустимо тепер, що α і β гострі кути, сума яких більша $\frac{\pi}{2}$. Нехай кути α_1 і β_1 доповняльні до кутів α і β. Якщо так, то $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$, а $\beta = \frac{\pi}{2} - \beta_1$, звідки

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \beta_1\right) = \sin[\pi - (\alpha_1 + \beta_1)] = \sin(\alpha_1 + \beta_1).$$

Отже, виходить, що

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha_1 + \beta_1). \qquad \text{(A)}$$

Тут $\alpha_1 + \beta_1 < \frac{\pi}{2}$, а тому, застосовуючи виведену раніше формулу для $\sin(\alpha_1 + \beta_1)$, рівність (А) можемо переписати так:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha_1\cos\beta_1 + \sin\beta_1\cos\alpha_1,$$

або

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Використовуючи формули зведення, маємо:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha,$$

або

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

Отже, формулу (1) доведено для випадку, коли $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$.

Перейдемо до виведення формули (2).

Пишемо:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \beta_1\right) =$$
$$= \cos[\pi - (\alpha_1 + \beta_1)] = -\cos(\alpha_1 + \beta_1).$$

Виходить, що

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos(\alpha_1 + \beta_1). \qquad \text{(B)}$$

Оскільки $\alpha_1 + \beta_1 < \frac{\pi}{2}$, застосовуємо до $\cos(\alpha_1 + \beta_1)$ доведену раніше формулу (2). Тоді замість рівності (В) одержимо:

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \sin\alpha_1\sin\beta_1,$$

або

$$\cos(\alpha+\beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right),$$

тобто

$$\cos(\alpha+\beta) = -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta,$$

а це можна переписати так:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Формула (2) для цього випадку справджується. Отже, для гострих кутів α і β, сума яких більша 90° $\left(\frac{\pi}{2}\text{ рад. од.}\right)$, формули (1) і (2) правильні.

3) Щоб можна було узагальнити формули (1) і (2) на які завгодно кути, попереду доведемо таку теорему:

Коли формули (1) і (2), що визначають синус і косинус суми двох кутів, правильні для якихнебудь кутів α і β, то вони правильні й тоді, коли до одного з кутів додати або від одного з кутів відняти $\frac{\pi}{2}$.

Нехай формули (1) і (2) справджуються для кутів α і β, тобто

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Виведемо формули для $\sin(\alpha_1+\beta)$ і $\cos(\alpha_1+\beta)$, де

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}+\alpha. \qquad \text{(C)}$$

На підставі рівності (C)

$$\sin(\alpha_1+\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta\right) \quad \text{і} \quad \cos(\alpha_1+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta\right).$$

Використавши формули зведення, одержимо:

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha_1+\beta) &= \cos(\alpha+\beta);\\ \cos(\alpha_1+\beta) &= -\sin(\alpha+\beta).\end{aligned}\right\} \qquad \text{(D)}$$

Через те що за умовою для кутів α і β правильні формули (1) і (2), першу з рівностей (D) переписуємо так:

$$\sin(\alpha_1+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

але з рівності (C)

$$\alpha = \alpha_1-\frac{\pi}{2}.$$

Замінивши в другій частині кут α через $\alpha_1-\frac{\pi}{2}$, маємо:

$$\sin(\alpha_1+\beta) = \cos\left(\alpha_1-\frac{\pi}{2}\right)\cos\beta-\sin\left(\alpha_1-\frac{\pi}{2}\right)\sin\beta,$$

або

$$\sin(\alpha_1+\beta) = \sin\alpha_1\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha_1.$$

Отже, формула (1) справджується для кутів α_1 і β.

Так само за умовою переписуємо другу рівність (D)

$$\cos(\alpha_1+\beta) = -\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha,$$

або

$$\cos(\alpha_1+\beta) = -\sin\left(\alpha_1-\frac{\pi}{2}\right)\cos\beta - \sin\beta\cos\left(\alpha_1-\frac{\pi}{2}\right),$$

що дає після перетворень

$$\cos(\alpha_1+\beta) = \cos\alpha_1\cos\beta - \sin\alpha_1\sin\beta,$$

а це й є формула (2) для кутів α_1 і β

Легко виявити, що формули (1) і (2) так само правильні й тоді, коли від одного з кутів відняти $\frac{\pi}{2}$.

Пропонуємо учням довести це самим.

На підставі цієї теореми приходимо до висновку, що правильність формул (1) і (2), доведених для гострих кутів α і β, не порушиться, коли послідовно додавати то до одного, то до другого кута або віднімати то від одного, то від другого кута по $\frac{\pi}{2}$.

За допомогою таких операцій можна утворити додатні і від'ємні кути якої завгодно величини. А якщо так, то формули (1) і (2) можна вважати поширеними на додатні і від'ємні кути. будьякої величини.

§ 43. Синус і косинус різниці двох кутів.

Різницю двох кутів α і β можна розглядати, як суму $\alpha+(-\beta)$. Застосовуючи узагальнені формули (1) і (2) до яких завгодно кутів (і додатних і від'ємних), одержимо:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin[\alpha+(-\beta)] =$$
$$= \sin\alpha\cos(-\beta) + \sin(-\beta)\cos\alpha =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha.$$

Отже, маємо формулу

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha.} \qquad (3)$$

Аналогічно:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos[\alpha+(-\beta)] =$$
$$= \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Отже:

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.} \qquad (4)$$

§ 44. Тангенс суми і різниці двох кутів.

За означенням тангенса

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)},$$

або

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Щоб вивести $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$, поділимо чисельник і знаменник дробу на $\cos\alpha\cos\beta$, а тоді:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}.$$

Після спрощень матимемо:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.} \qquad (5)$$

Замінивши в цій формулі β на $-\beta$, напишемо:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.} \qquad (6)$$

§ 45. Синус, косинус і тангенс подвійного кута.

Якщо у формулах (1), (2) і (5) замість β підставити α, то з формули (1) одержимо:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha,$$

тобто

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.} \qquad (7)$$

З формули (2)

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha,$$

або

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Якщо в останній формулі замість $\sin^2\alpha$ підставити $1-\cos^2\alpha$ або замість $\cos^2\alpha$ підставити $1-\sin^2\alpha$, то матимемо:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1;$$

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha.$$

Отже,

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;\\&\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;\\&\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.\end{aligned}} \qquad (8)$$

З формули (5)

$$\operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha},$$

або

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.} \qquad (9)$$

Зауваження. Іноді буває потреба синус, косинус і тангенс кута визначити через синус і косинус його половини; тоді кут розглядають як подвійну половину кута, наприклад:

$$\sin\alpha = \sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1;$$

$$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Аналогічно:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{4}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{4}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{4} - \sin^2\frac{\alpha}{4};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{4}\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{4} - 1;$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{4}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{4};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{4}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}}$$

і т. д.

§ 46. Синус і косинус кута 3α.

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \sin\alpha \cos 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + $$
$$+ \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha,$$

що після спрощень дає:

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.} \qquad (10)$$

Далі:

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha =$$
$$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha =$$
$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha,$$

що після спрощень дає:

$$\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.} \qquad (11)$$

Пропонуємо учням самим вивести формули для $\sin 4\alpha$ і $\cos 4\alpha$.

§ 47. Синус, косинус і тангенс половинного кута.

Визначаємо $\cos\alpha$ через $\sin\frac{\alpha}{2}$ (див. зауваження § 45).

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$
$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha,$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2},$$

звідки

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.} \qquad (12)$$

Виражаємо тепер $\cos\alpha$ через $\cos\frac{\alpha}{2}$.

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1,$$
$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha,$$

звідки

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2},$$

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} \qquad (13)$$

Поділивши формулу (12) на (13), одержимо:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.} \tag{14}$$

Зауваження. Перед коренем у формулах (12), (13) і (14) треба писати обидва знаки тільки тоді, коли нема обмежень для кута α. А якщо за даною умовою можна виявити, в якій чверті закінчується кут $\frac{\alpha}{2}$, треба корені брати з відповідними знаками.

Можна $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ виразити раціонально через $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$.

За означенням тангенса

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Помноживши чисельник і знаменник спочатку на $2\cos\frac{\alpha}{2}$, а потім на $2\sin\frac{\alpha}{2}$, одержимо:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

і

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Отже:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.}\,[1] \tag{15}$$

Зручність цієї формули, порівнюючи з формулою (14), полягає в тому, що $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ визначається раціонально через $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$

§ 48. Визначення $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

---

[1] Можна дати таке мнемонічне правило для написання формули (15) замість формули (14). Треба відкинути знак кореня, а далі або чисельник замінити через $\sin\alpha$, залишивши знаменник без зміни, або, навпаки, знаменник замінити через $\sin\alpha$, залишивши чисельник той самий.

Першу й другу рівності перепишемо так:

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Поділивши чисельник і знаменник кожного дробу на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, матимемо:

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},} \qquad (16)$$

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.} \qquad (17)$$

Іноді буває зручно при перетвореннях застосовувати ці формули тому, що $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ визначаються раціонально через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

§ 49. Приклади і задачі.

1. Обчислити $\sin(\alpha+\beta)$ і $\sin(\alpha-\beta)$, коли α і β гострі кути і, крім того, дано, що $\sin\alpha=\frac{24}{25}$, $\sin\beta=\frac{4}{5}$.

2. Розв'язати попередню задачу, припускаючи, що $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, а $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

3. Обчислити $\cos(\alpha+\beta)$ і $\cos(\alpha-\beta)$ за такими даними:

$$\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi;\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2};\quad \cos\alpha=\frac{1}{3};\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. Обчислити $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ і $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$,

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{і} \quad \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right),$$

коли

$$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi \quad \text{і} \quad \sin\alpha=\frac{1}{3}.$$

5. Визначити, чому дорівнюють $\sin 75^\circ$ і $\cos 75^\circ$, розглядаючи 75° як суму $45^\circ + 30^\circ$.

6. Обчислити $\operatorname{tg}(\alpha^\circ + 45^\circ)$ і $\operatorname{tg}(\alpha^\circ - 45^\circ)$, коли

$$\operatorname{tg}\alpha^\circ = 2.$$

7. Дано 3 рівних квадрати: $ABCD$ і $DCFE$ і $EFKL$, розміщені так, як показано на рисунку 66.

Проведемо діагоналі:
BD квадрата $ABCD$,
BE прямокутника $ABFE$ і
BL прямокутника $ABKL$.

Нехай $\angle ADB = \alpha$, $\angle AEB = \beta$ і $\angle ALB = \gamma$.

Довести, що

$$\alpha = \beta + \gamma.$$

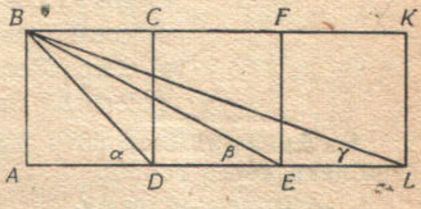

Рис. 66.

Вказівка. З трикутників ABD, ABE і ABL визначаємо $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ і $\operatorname{tg}\gamma$, потім використовуємо формулу для $\operatorname{tg}(\beta + \gamma)$.

8. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

Обчислити $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$, коли $0 < \alpha < 90^\circ$.

9. $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$.

Обчислити $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$, коли

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

10. Обчислити $\operatorname{tg} 2\alpha$, коли $|\operatorname{tg}\alpha| = \frac{1}{2}$ і $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

11. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$.

Обчислити $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ і $\operatorname{ctg} 2\alpha$, коли $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

12. Обчислити $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$ і $\operatorname{tg} 15^\circ$, розглядаючи

$$15^\circ \text{ як } \frac{30^\circ}{2}.$$

13. Обчислити $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$, маючи на увазі, що $\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2}$.

14. $\cos\alpha = 0{,}28$.

Визначити $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, коли $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Вказівка. Ураховуючи знаки косинуса кута α і дану нерівність, робимо висновок, що

$$270^\circ < \alpha < 360^\circ,$$

звідки

$$135^\circ < \frac{\alpha}{2} < 180^\circ.$$

Відповідно цим межам для $\frac{\alpha}{2}$ беремо знаки біля кореня в формулах для $\sin\frac{\alpha}{2}$ і $\cos\frac{\alpha}{2}$.

15. Спростити, а потім, де можна, обчислити:

a) $\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \sin 40^\circ \cos 20^\circ$;

b) $\cos 32^\circ \cos 13^\circ - \sin 32^\circ \sin 13^\circ$;

c) $\cos 95^\circ \cos 40^\circ + \sin 95^\circ \sin 40^\circ$;

d) $\cos 85^\circ \cos 40^\circ - \sin 85^\circ \sin 40^\circ$;

e) $2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ$;

f) $2 \sin 55^\circ \sin 35^\circ$.

Вказівка. Кути 55° і 35° доповняльні, тому $\sin 55^\circ$ можна замінити через $\cos 35^\circ$.

g) $1 - 2\sin^2 12^\circ 30'$; h) $2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$;

i) $2 \cos 50^\circ \sin 40^\circ - 1$.

16. Спростити, а де можна, і обчислити:

a) $\sqrt{\frac{1-\cos 16^\circ}{2}}$; b) $\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}}$;

c) $\frac{\sin 28^\circ}{1+\cos 28^\circ}$; d) $\frac{\sin 23^\circ}{1+\sin 67^\circ}$;

e) $\frac{2\cos^2 23^\circ - 1}{\sin 46^\circ}$; f) $\frac{1-2\sin^2 18^\circ}{\cos 54^\circ}$;

g) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; h) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{3}{4}\pi}{2\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi}$.

17. Обчислити:

a) $\frac{\operatorname{tg} 125^\circ - \operatorname{tg} 5^\circ}{1+\operatorname{tg} 125^\circ \operatorname{tg} 5^\circ}$; b) $\frac{\operatorname{tg} 95^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ}{1-\operatorname{tg} 95^\circ \operatorname{tg} 25^\circ}$;

c) $\frac{1+\operatorname{tg} 63^\circ \operatorname{tg} 18^\circ}{\operatorname{tg} 63^\circ - \operatorname{tg} 18^\circ}$; d) $\frac{1-\operatorname{tg} 130^\circ \operatorname{tg} 20^\circ}{\operatorname{ctg} 50^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}$.

Вказівка. В останньому прикладі треба виразити $\operatorname{ctg} 50^\circ$ через $\operatorname{tg} 130^\circ$.

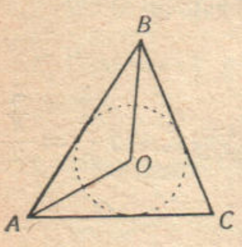

Рис. 67.

18. У трикутнику ABC (рис. 67)

$$\sin C = \frac{3}{5}.$$

Визначити синус кута AOB, під яким видно з центра вписаного круга сторону AB ($\sin AOB = x$).

19. Спростити вирази:

a) $2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$; b) $2\sin\frac{\alpha}{6}\cos\frac{\alpha}{6}$; $= \sin\frac{\alpha}{3}$

c) $2\cos^2\frac{\alpha}{4} - 1$; d) $2\cos^2\frac{\alpha}{6} - 1$;

e) $1-2\sin^2\frac{\alpha}{8}$; f) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}}$.

20. $\dfrac{\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$.

21. $\dfrac{\sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Розв'язування.

$$\frac{\sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

22. $\dfrac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

23. $\dfrac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1$.

24. $\dfrac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{4}}{2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}$.

25. $\dfrac{\sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1$.

26. $\dfrac{2\cos^2\frac{x}{8}-1}{2\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}}$.

27. $2\sin(60^\circ-x^\circ)\cos(30^\circ+x^\circ)+2\cos^2(60^\circ-x^\circ)$.

Вказівка. Тут кути $30^\circ+x^\circ$ і $60^\circ-x^\circ$ доповняльні, бо сума їх дорівнює 90°, а тому $\cos(30^\circ+x^\circ)$ можна замінити $\sin(60^\circ+x^\circ)$ або навпаки.

28. $2\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha^\circ}{2}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha^\circ}{2}\right)$.

Розв'язування. Кути $45^\circ-\frac{\alpha^\circ}{2}$ і $45^\circ+\frac{\alpha^\circ}{2}$ доповняльні, а тому:

$$\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha^\circ}{2}\right)=\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha^\circ}{2}\right);$$

$$2\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha^\circ}{2}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha^\circ}{2}\right)=2\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha^\circ}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha^\circ}{2}\right)=$$

$$=\sin2\left(45^\circ-\frac{\alpha^\circ}{2}\right)=\sin(90^\circ-\alpha^\circ)=\cos\alpha^\circ.$$

29. $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-1$.

Вказівка. Використати другу формулу (8) § 45.

30. $\dfrac{1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}+\sec^2\alpha.$

Вказівка. Використати раніш третю формулу (8) § 45 для перетворення виразу

$$1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

31. $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\pi\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)}{\sin\alpha}.$

32. $\dfrac{\cos\alpha\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)}.$

33. $\dfrac{\cos 2\alpha\sqrt{\sec^2 2\alpha-1}}{4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}.$

34. $\sin\left(\frac{\alpha^0}{2}-270^\circ\right)\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha^0}{2}\right)+$

$+\sin\left(180^\circ-\frac{\alpha^0}{2}\right)\cos\left(270^\circ+\frac{\alpha^0}{2}\right)-2\left[2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha^0}{2}\right)-1\right]\sin\alpha^0.$

35. $\dfrac{\sin\frac{\alpha^0}{2}\sqrt{\csc^2\frac{\alpha^0}{2}-1}}{2\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha^0}{4}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha^0}{4}\right)}.$

36. $\dfrac{1+\sin\alpha^0-2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha^0}{2}\right)}{4\cos\frac{\alpha^0}{2}}.$

Вказівка. Треба раніше на підставі третьої формули (8) § 45 перетворити вираз $1-2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha^0}{2}\right)$.

37. $\left(\dfrac{\cos 3x}{\sin x}+\dfrac{\sin 3x}{\cos x}\right)\operatorname{tg}2x+\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+2\sin^2\dfrac{x}{2}.$

38. $\left(\dfrac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}+1\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\pi\right).$

Довести тотожність.

39. $\dfrac{2\sin x+\sin 2x}{2\sin x-\sin 2x}=\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}.$

40. $\sqrt{1+\sin 4x}=\sin 2x+\cos 2x.$

РОЗДІЛ VII.

ЗВЕДЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ ДО ВИГЛЯДУ, ЗРУЧНОГО ДЛЯ ЛОГАРИФМУВАННЯ.

§ 50. Тригонометричний многочлен і мета розкладу його на множники.

Тригонометричним називається такий многочлен, в якому хоч один член містить у собі тригонометричну функцію.

Для того щоб можна було логарифмувати тригонометричний вираз, в ньому не повинно бути ні сум, ні різниць, крім таких, які легко знайти безпосередньо.

Отже, для цієї мети намагаються тригонометричний многочлен представити у вигляді добутку окремих співмножників — наскільки це можливо й зручно.

Треба зазначити, що перетворення многочлена в добуток використовують іноді для визначення границь таких тригонометричних виразів, що мають невизначену форму при розв'язуванні багатьох тригонометричних рівнянь.

Розглянемо два головних методи:

a) метод звичайних перетворень, що базується на відомих тригонометричних формулах, з допомогою яких перетворюють досить прості вирази (§§ 51—53).

b) метод введення допоміжного кута — штучний прийом і застосовується для більш складних випадків, коли звичайні перетворення не дають змоги звести тригонометричний вираз до вигляду, зручного для логарифмування.

А. МЕТОД ЗВИЧАЙНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ.

§ 51. Перетворення суми і різниці двох синусів або косинусів.

Перетворимо $\sin x + \sin y$.

Візьмемо формули:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Склавши і віднявши ці рівності почленно, одержимо:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta, \tag{а}$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta. \tag{б}$$

Припустимо, що

$$\alpha+\beta=x, \quad \alpha-\beta=y;$$

тоді, розв'язавши цю систему відносно α і β, матимемо:

$$\alpha=\frac{x+y}{2}; \quad \beta=\frac{x-y}{2}.$$

Отже:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin x+\sin y&=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\ \sin x-\sin y&=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.\end{aligned}} \tag{1}$$

Ці формули читаються так:

Сума синусів двох кутів дорівнює подвійному добуткові синуса півсуми цих кутів на косинус їх піврізниці.

Різниця синусів двох кутів дорівнює подвійному добуткові синуса піврізниці цих кутів на косинус півсуми їх.

Наприклад:

$$\sin 35^\circ+\sin 49^\circ=2\sin\frac{35^\circ+49^\circ}{2}\cos\frac{35^\circ-49^\circ}{2}=2\sin 42^\circ\cos 7^\circ;$$

$$\sin 63^\circ-\sin 19^\circ=2\sin\frac{63^\circ-19^\circ}{2}\cos\frac{63^\circ+19^\circ}{2}=2\sin 22^\circ\cos 41^\circ.$$

Так само з формул:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

маємо:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta, \tag{в}$$

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta. \tag{г}$$

Шляхом тих самих перетворень одержимо:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos x+\cos y&=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\ \cos x-\cos y&=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=\\ &=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2},\end{aligned}} \tag{2}$$

тобто:

Сума косинусів двох кутів дорівнює подвійному добуткові косинуса півсуми цих кутів на косинус піврізниці їх.

Різниця косинусів двох кутів дорівнює подвійному добуткові синуса півсуми цих кутів на синус оберненої піврізниці їх.

Наприклад:

$$\cos 63^\circ + \cos 25^\circ = 2\cos\frac{63^\circ + 25^\circ}{2}\cos\frac{63^\circ - 25^\circ}{2} = 2\cos 44^\circ \cos 19^\circ;$$

$$\cos 27^\circ - \cos 51^\circ = 2\sin\frac{27^\circ + 51^\circ}{2}\sin\frac{51^\circ - 27^\circ}{2} = 2\sin 39^\circ \sin 12^\circ.$$

Обернену операцію, тобто перетворення кожного з добутків $\sin\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\sin\alpha\sin\beta$ в суму або різницю, легко одержати з наведених рівностей. Справді, з рівності (а) маємо:

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2},} \qquad (3)$$

тобто *добуток синуса одного кута на косинус другого кута дорівнює півсумі синуса їх суми і синуса їх різниці.*

Зауваження. Під час складання згаданої в цій формулі різниці слід пам'ятати, що від кута під знаком функції синуса треба відняти кут під знаком функції косинуса.

Наприклад:

$$\sin 5x\cos 7x = \frac{\sin 12x + \sin(-2x)}{2} = \frac{\sin 12x - \sin 2x}{2}.$$

Аналогічно, з рівностей (в) і (г) матимемо:

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2},} \qquad (4)$$

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2},}\text{[1]} \qquad (5)$$

тобто:

Добуток косинусів двох кутів дорівнює півсумі косинуса їх різниці і косинуса їх суми.

Добуток синусів двох кутів дорівнює піврізниці косинуса їх різниці і косинуса їх суми.

Наприклад:

$$\cos 10^\circ \cos 25^\circ = \frac{\cos 15^\circ + \cos 35^\circ}{2};$$

$$\sin 75^\circ \sin 25^\circ = \frac{\cos 50^\circ - \cos 100^\circ}{2} = \frac{\cos 50^\circ + \cos 80^\circ}{2}.$$

§ 52. Зведення до логарифмічного вигляду виразів

$$1 \mp \cos\alpha; \quad 1 \mp \sin\alpha; \quad 1 \mp \operatorname{tg}\alpha; \quad 1 \mp \operatorname{ctg}\alpha.$$

Розкласти на множники двочлен:

а) $1 - \cos\alpha$.

---

[1] Слід пам'ятати, що при складанні цієї формули треба від косинуса різниці віднімати косинус суми.

З формули $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ § 45 маємо:

$$\boxed{1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.} \tag{6}$$

b) $1 + \cos\alpha$.

З формули

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \text{ маємо:}$$

$$\boxed{1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.} \tag{7}$$

c) $1 - \sin\alpha$.

Відомо, що

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha),$$

тому

$$1 - \sin\alpha = 1 - \cos(90^\circ - \alpha);$$

звідси:

$$1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right).$$

d) $1 + \sin\alpha$.

Маємо:

$$1 + \sin\alpha = 1 + \cos(90^\circ - \alpha) = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin^2\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Наприклад:

$$1 + \cos 72^\circ = 2\cos^2 36^\circ;$$

$$1 - \cos 50^\circ = 2\sin^2 25^\circ;$$

$$1 + \sin 40^\circ = 2\sin^2 65^\circ = 2\cos^2 25^\circ;$$

$$1 - \sin 38^\circ = 2\sin^2 26^\circ.$$

e) $1 - \operatorname{tg}\alpha$.

Маємо:

$$1 - \operatorname{tg}\alpha = 1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha) - \sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2\cos 45^\circ \sin(45^\circ - \alpha)}{\cos\alpha} = \frac{2\cos 45^\circ \sin(45^\circ - \alpha)}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 45^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 45^\circ \cos 45^\circ \sin(45^\circ - \alpha)}{\sin 45^\circ \cos\alpha} = \boxed{\frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\sin 45^\circ \cos\alpha}} = \boxed{\frac{\cos(45^\circ + \alpha)}{\cos 45^\circ \cos\alpha}.}$$

По аналогії одержуємо:

f) $1 + \operatorname{tg}\alpha$

$$1 + \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos 45^\circ \cos\alpha} = \boxed{\frac{\cos(45^\circ - \alpha)}{\cos 45^\circ \cos\alpha};}$$

g) $1 - \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin(\alpha - 45^\circ)}{\sin 45^\circ \sin\alpha};$

h) $1+\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\sin(45+\alpha)}{\sin 45^\circ\sin\alpha}$.

Наприклад:

$$1+\operatorname{tg}20^\circ=\frac{\cos 25^\circ}{\cos 45^\circ\cos 20^\circ};$$

$$1+\operatorname{ctg}14^\circ=\frac{\sin 59^\circ}{\sin 45^\circ\sin 14^\circ};$$

$$1-\operatorname{tg}70^\circ=\frac{\sin(45^\circ-70^\circ)}{\sin 45^\circ\cos 70^\circ}=-\frac{\sin 25^\circ}{\sin 45^\circ\sin 20^\circ};$$

$$1-\operatorname{ctg}48^\circ=\frac{\sin 3^\circ}{\sin 45^\circ\sin 48^\circ}.$$

§ 53. Перетворення суми і різниці тангенсів і котангенсів.

а) $\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y=\dfrac{\sin x}{\cos x}\pm\dfrac{\sin y}{\cos y}=\dfrac{\sin x\cos y\pm\cos x\sin y}{\cos x\cos y}=\dfrac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$;

звідси:

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y},$$

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}.$$

Наприклад:

$$\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}37^\circ=\frac{\sin(40^\circ+37^\circ)}{\cos 40^\circ\cos 37^\circ}=\frac{\sin 77^\circ}{\cos 40^\circ\cos 37^\circ}=\frac{\cos 13^\circ}{\cos 40^\circ\cos 37^\circ}.$$

$$\operatorname{tg}40^\circ-\operatorname{tg}37^\circ=\frac{\sin 3^\circ}{\cos 40\cos 37^\circ}.$$

б) $\operatorname{ctg}x\pm\operatorname{ctg}y=\dfrac{\cos x}{\sin x}\pm\dfrac{\cos y}{\sin y}=\dfrac{\sin y\cos x\pm\cos y\sin x}{\sin x\sin y}=\dfrac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y}$;

звідси:

$$\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y},$$

$$\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y=-\frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y}=\frac{\sin(y-x)}{\sin x\sin y}.$$

Зауваження. Функція $\sin x$ — непарна, тому

$$-\sin(x-y)=\sin(y-x).$$

Наприклад:

$$\operatorname{ctg}18^\circ-\operatorname{ctg}53^\circ=\frac{\sin(53^\circ-18^\circ)}{\sin 53^\circ\sin 18^\circ}=\frac{\sin 35^\circ}{\sin 53^\circ\sin 18^\circ}$$

$$\operatorname{ctg}39^\circ+\operatorname{ctg}11^\circ=\frac{\sin 50^\circ}{\sin 39^\circ\sin 11^\circ}.$$

В. МЕТОД ВВЕДЕННЯ ДОПОМІЖНОГО КУТА.

§ 54. Тригонометричні вирази, з якими ми зустрічалися раніше, можна іноді, користуючись допоміжним кутом, простіш і швидше привести до логарифмічного вигляду.

Наприклад, у виразі $1+\operatorname{tg}\alpha$ можна 1 розглядати як $\operatorname{tg}45^\circ$. Тоді:

$$1+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha}.$$

Переходимо до загальної теорії цього методу.

Дана алгебрична сума $A+B$, де A і B будьякі складні вирази. Представивши цю суму у вигляді

$$A\left(1+\frac{B}{A}\right),$$

можна припустити що $\frac{B}{A}=\operatorname{tg}\varphi$. За цією умовою завжди знайдеться (з допомогою таблиць) такий кут φ, тангенс якого дорівнюватиме $\frac{B}{A}$. Кут φ і є допоміжний.

Після введення φ, дана сума приводиться до вигляду:

$$A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right)=A\,(1+\operatorname{tg}\varphi)=\frac{A\sin(45^\circ+\varphi)}{\cos 45^\circ\cos\varphi}.$$

Таким чином, маємо дві логарифмічні формули:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{B}{A}$$

і

$$A+B=\frac{A\sin(45^\circ+\varphi)}{\cos 45^\circ\cos\varphi},$$

які дають можливість обчислити дану суму $A+B$ з допомогою логарифмів.

З допомогою такого перетворення завжди можна привести до логарифмічного вигляду будьякий двочлен, а застосувавши цей спосіб кілька разів, і який завгодно многочлен.

Приклад. $1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$.

Розв'язування.

$$1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{tg}\alpha\right)=\sqrt{3}\,(\operatorname{tg}30^\circ+\operatorname{tg}\alpha)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin(30^\circ+\alpha)}{\cos 30^\circ\cos\alpha}.$$

У згаданому загальному методі іноді бувають можливі деякі спрощення, а саме:

1. Коли A і B обидва додатні або обидва від'ємні, тоді:

$$A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right)=A\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=A\sec^2\varphi=\frac{A}{\cos^2\varphi}.$$

2. Якщо $|B|<|A|$, тоді маємо:

$$A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right)=A\,(1+\cos\varphi)=2A\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

3. Так само:

$$A-B=A\left(1-\frac{B}{A}\right)=A\,(1-\cos\varphi)=2A\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

4. Коли відомо, що $A-B>0$, $A>0$, $B>0$, тоді:

$$A-B=A\left(1-\frac{B}{A}\right)=A\,(1-\sin^2\varphi)=A\cos^2\varphi.$$

5. Коли відомо, що $A-B<0$, $A>0$, $B>0$, тоді:

$$A-B=-B\left(1-\frac{A}{B}\right)=-B(1-\sin^2\varphi)=-B\cos^2\varphi.$$

6. Зведення до логарифмічного вигляду за допомогою допоміжного кута виразу:

$$a\sin mx\pm b\cos mx.$$

Розв'язування.

$$a\sin mx\pm b\cos mx=a\left(\sin mx\pm\frac{b}{a}\cos mx\right)=$$

$$=a(\sin mx\pm\operatorname{tg}\varphi\cos mx)=a\,\frac{\sin mx\cos\varphi\pm\sin\varphi\cos mx}{\cos\varphi}=$$

$$=\frac{a}{\cos\varphi}\sin(mx\pm\varphi),$$

де

$$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi; \tag{1}$$

звідси:

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

А тому можна ще написати і так:

$$a\sin mx\pm b\cos mx=\sqrt{a^2+b^2}\sin(mx\pm\varphi),$$

де φ визначають з рівності (1).

§ 55. Приклади.

I. Звести до вигляду, зручного для логарифмування, такі тригонометричні вирази:

1. $\sin 5x-\sin 11x$.
2. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.
3. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$.
4. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.
5. $\cos^2\frac{7\alpha}{2}-\sin^2\frac{3\alpha}{2}$.
6. $1-\cos\frac{x}{2}$.
7. $1+\cos 4x$.
8. $1-\sin 40^\circ$.
9. $1-\sin 3x$.
10. $1+\sin 20^\circ$.
11. $1+\sin\frac{x}{3}$.
12. $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha$.

Вказівка. Сполучити 1-й і 3-й члени.

13. $1+\sin\alpha-\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha$.

Вказівка. Сполучити 1-й і 3-й, 2-й і 4-й члени.

14. $\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha$.

Вказівка. Сполучити 1-й і 3-й члени.

$$15.\ \sin^2 5\alpha - \sin^2 2\alpha.$$

II. Перетворити добутки в суми або різниці.

16. $\sin 20^\circ \cos 17^\circ$. 17. $\cos 10^\circ \cos 25^\circ$.

18. $\sin 52^\circ 30' \sin 7^\circ 30'$. 19. $\sin 52^\circ 30' \cos 7^\circ 30'$.

$$20.\ \sin(30^\circ + \alpha)\sin(30^\circ - \alpha).$$

III. Довести тотожності.

21. $\sin 75^\circ \sin 15^\circ = 0{,}25$

22. $\sin\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

23. $\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + \sin 5\alpha = 4\sin 3\alpha\cos^2\alpha$.

Вказівка. Сполучити 1-й і 3-й члени.

24. $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0$.

Вказівка. 1) сполучити перші два члени;

2) $\cos 140^\circ = \cos(180^\circ - 40^\circ)$ і т. д.

25. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 0{,}125$.

Розв'язування.

За формулою для добутку косинусів двох кутів маємо:

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{2}\left(\cos 20^\circ + \cos 60^\circ\right)\cos 80^\circ =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 20^\circ \cos 80^\circ + \frac{1}{4}\cos 80^\circ = \frac{1}{4}\left(\cos 60^\circ + \cos 100^\circ\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\cos 60^\circ = \frac{1}{4}\left(\cos 60^\circ - \cos 30^\circ\right) + \frac{1}{4}\cos 80^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 60^\circ - \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{4}\cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$$

26. $8\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \sqrt{3}$.

27. $4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos 3\alpha$.

28. $4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \sin 3\alpha$.

29. $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}$.

30. $(\sin x - \sin y)^2 + (\cos y - \cos x)^2 = 4\sin^2\frac{x-y}{2}$.

Вказівка. Ліва частина $= 2[1 - \cos(x - y)]$.

31. $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1}=2\cos\alpha.$

32. $1+\sin\alpha+\cos\alpha=4\sin 45^\circ\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$

33. $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$

34. $1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$

35. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=4\sin 2\alpha\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$

36. $\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$

Вказівка. $\sin(\alpha+\beta)$ розкласти за формулою для синуса подвійного кута.

37. $\sin\alpha-\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$

38. $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}=2\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}.$

Вказівка. Винести $\operatorname{tg}\alpha$ за дужки під знаком кореня.

39. $\sin\alpha+\sin(\alpha-120^\circ)+\sin(\alpha-240^\circ)=0.$

Вказівка. $\sin(\alpha-240^\circ)=\sin(\alpha-240^\circ+360^\circ)=\sin(\alpha+120^\circ).$

IV. Довести тотожності при умові, що α, β і γ є кути трикутника.

40. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$

Розв'язування.

$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma=$

$2\sin\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right]=$

$2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]=2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]=$

$4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\beta\quad\alpha+\beta}{4}=4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$

41. $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$

42. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$

Розв'язування.

$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}=\frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}=$

$=\frac{\sin\gamma(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\sin\gamma[\cos((180^\circ-(\alpha+\beta))+\cos\alpha\cos\beta]}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=$

$=\frac{\sin\gamma[-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$

43. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma$.

44. $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} - 1 =$

$$= 4\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{\beta}{4}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{\gamma}{4}\right).$$

45. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma - 1 = -4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

V. Довести тотожності за умовою, що $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$.

46. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$.

Розв'язування.

Через те що $\sin\delta = \sin[360^\circ - (\alpha+\beta+\gamma)] = -\sin(\alpha+\beta+\gamma)$, пишемо:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) =$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \times$$
$$\times\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{2\alpha+2\gamma}{4}\sin\frac{2\beta+2\gamma}{4} =$$
$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

47. $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma - \sin\delta = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$.

48. $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos\delta = 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$.

VI. Звести до логарифмічного вигляду за допомогою допоміжного кута φ такі вирази:

49. $1 \mp \cos x$; $(1 = \cos 0^\circ)$. 50. $1 \mp \sin x$; $(1 = \sin 90^\circ)$.

51. $1 \pm \operatorname{tg} x$; $(1 = \operatorname{tg} 45^\circ)$. 52. $1 + 2\cos x$.

Розв'язування. $1 + 2\cos x = 2\left(\frac{1}{2} + \cos x\right) =$

$$= 2(\cos 60^\circ + \cos x) = 4\cos\left(30^\circ + \frac{x}{2}\right) = \cos\left(30^\circ - \frac{x}{2}\right).$$

53. $1 \pm 2\sin x$. 54. $\sqrt{3} - 2\cos x$. 55. $1 - 4\sin^2 x$.

Вказівка. Винести 4 за дужки, тоді $\frac{1}{4}$ в дужках розглядати як $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, або як $\sin^2 30^\circ$, і т. д.

56. $1 - 3\operatorname{tg}^2 x$. 57. $3 - \operatorname{tg}^2 x$. 58. $1 - 3\operatorname{ctg}^2 x$.

59. $\sin 20^\circ - \sqrt{3}\cos 20^\circ$.

Вказівка. $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$.

60. $5\sin 48^\circ + 7\cos 48^\circ$.

Вказівка. Винести 5 за дужки і припустити, що $\operatorname{tg}\varphi = \frac{7}{5}$.

РОЗДІЛ VIII.

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТАБЛИЦІ.

§ 56. Основні положення про складання таблиць.

Як було пояснено (§ 9), графічним способом можна обчислити наближене значення кожної тригонометричної функції для гострого кута.

Покажемо, як можна аналітично знайти наближені значення тригонометричних функцій будьякого кута.

Тригонометричні функції всякого кута, як нам відомо, можна звести до функцій додатного кута, не більшого 45° (§§ 27—32). Усі тригонометричні функції можна обчислити за даною однією з них, наприклад за синусом.

Тому досить показати спосіб, за допомогою якого можна було б обчислити синус кожного кута x, в інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Рис. 68.

Один з способів грунтується на тому, що *при дуже малому куті можна без великої похибки синус кута замінити радіанним виразом цієї дуги і виміряти цю похибку.*

З'ясуємо, чому це так, і як визначити цю похибку.

Для цього доведемо ряд теорем.

Теорема 1. *Границя частки від ділення синуса кута на радіанний вираз цього кута дорівнює 1, при умові, що кут прямує до 0.*

Візьмемо круг радіуса R з центром у початку координат (рис. 68) і побудуємо в ньому додатний гострий кут α. Проводимо перпендикуляр MK до осі X-ів і першу дотичну, яка перетне продовження радіуса OM у точці L.

Провівши хорду MA, бачимо, що площа
$\triangle\ OAM <$ площі сектора $AOM <$ площі $\triangle\ OAL$, або

$$\frac{OA \cdot MK}{2} < \frac{\smile AM \cdot OA}{2} < \frac{OA \cdot AL}{2},$$

тобто

$$\frac{R \cdot MK}{2} < \frac{\smile AM \cdot R}{2} < \frac{R \cdot AL}{2}.$$

Помноживши на 2 і поділивши на R^2, одержимо:

$$\frac{MK}{R} < \frac{\smile AM}{R} < \frac{AL}{R},$$

що дає

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha. \qquad \text{(a)}$$

Маючи на увазі, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, а значить $\sin\alpha > 0$, і поділивши всі частини нерівності (a) на $\sin\alpha$, одержимо:

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Звідси:

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha.$$

У міру зменшування кута α $\cos\alpha$ прямує до 1, так що перша і третя частини необмежено наближаються одна до одної; значить, тим паче $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ необмежено наближається до 1.

А коли так, то

$$\boxed{\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.} \qquad \text{(1)}$$

Теорема доведена для випадку $\alpha > 0$

Поширимо її на той випадок, коли $\alpha < 0$.

Коли $\alpha = -\alpha_1$, то $\alpha_1 > 0$, і

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha_1 \to 0} \frac{\sin(-\alpha_1)}{-\alpha_1} = \lim_{\alpha_1 \to 0} \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1}.$$

На підставі доведеної теореми для першого випадку, маємо:

$$\lim_{\alpha_1 \to 0} \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1} = 1,$$

а тому і

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

Теорема 2. *Границя частки від ділення тангенса кута на радіанний вираз цього кута дорівнює 1, при умові, що кут прямує до 0.*

Треба довести, що

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Доведення.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Теорема 3. *Якщо кут не перевищує $\frac{\pi}{2}$, то різниця між радіанним виразом кута і його синусом менша від чверті куба радіанного виразу кута.*

Нехай x визначає кут у радіанах і відомо, що $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

На підставі теореми 1 маємо:

$$\frac{x}{2} < \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Помноживши обидві частини цієї нерівності на $2\cos^2 \frac{x}{2}$ $\left(\cos \frac{x}{2} \neq 0\right)$, одержимо:

$$x \cos^2 \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

або:

$$x\left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right) < \sin x.$$

Звідси:

$$x - \sin x < x \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Замінивши $\sin \frac{x}{2}$ більшою величиною $\frac{x}{2}$, остаточно одержимо:

$$x - \sin x < \frac{x^3}{4}.$$

Границі похибки від припущення рівності $\sin x = x$ визначаємо з доведених теорем, а саме: сполучаючи нерівності $\sin x < x$ (теорема 1) і $x - \sin x < \frac{x^3}{4}$, або $x - \frac{x^3}{4} < \sin x$ (теорема 3), матимемо:

$$\boxed{x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x.} \qquad (1)$$

З одержаної подвійної нерівності бачимо, що чим менший кут x, тобто чим меншим правильним дробом він визначається, тим менша різниця між x і $x - \frac{x^3}{4}$. Ось чому, визначаючи синус і заміняючи його самим кутом, ми робимо тим меншу похибку, чим менший кут, від якого шукаємо синус.

Для обчислення похибки (ступеня наближення) користуємось нерівністю $x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x$. Визначивши синус малого кута, можна обчислити за допомогою відомих формул косинус, тангенс... того ж кута. А далі на підставі формул для тригонометричних величин суми кутів і подвійних кутів можна продовжити цю таблицю, обчислюючи значення тригонометричних функцій і для більших кутів.

Останні нерівності дають можливість судити про ступінь точності при обчисленні значення синуса кута.

Приклад. За скільки десяткових знаків можна поручитись, припустивши, що sin 1° дорівнює радіанному вимірові кута в 1°?

Розв'язування.

1) Радіанний вимір $1° = \frac{\pi}{180} = 0{,}017453\ldots$

2) На підставі нерівностей (1) маємо:

$$0{,}017453 - 0{,}000001 < \sin 1° < 0{,}017453 .$$

Отже, робимо висновок, що $\sin 1° = 0{,}01745$ з точністю до $\frac{1}{2}$ п'ятого десяткового знака (у всякому разі).

Застосовуючи спосіб, показаний вище (з деякими спрощеннями), можна скласти так звані таблиці натуральних тригонометричних величин. Узявши логарифми знайдених чисел, матимемо ті логарифмічні таблиці, якими користуються в тригонометричних обчисленнях.

Побудова п'ятизначних таблиць логарифмів Пржевальського і способи користування ними докладно пояснені на початку таблиць. З їх допомогою визначаються логарифми тригонометричних функцій даного кута або, навпаки, за даним логарифмом тригонометричної функції визначається кут.

Нижче наведені приклади користування таблицями і розміщення дій при логарифмічних обчисленнях.

§ 57. Обчислення з допомогою таблиць.

а) Визначення логарифма тригонометричної функції даного кута.

Приклад 1.

Дано: кут $34° 16' 43''$.

Визначити: $\lg \sin 34° 16' 43''$.

Розв'язування.

1) З таблиць безпосередньо знаходимо:

$$\lg \sin 34° 17' = \bar{1}{,}75073;$$
$$\lg \sin 34° 16' = \bar{1}{,}75054.$$

2) Таблична різниця між цими логарифмами:

$$d = 0{,}00019.$$

3) Різниця між кутами:

$$34° 17' - 34° 16' = 1' = 60''.$$

4) Поклавши в основу принцип: для кутів, що відрізняються не більш як на 1', різниці між логарифмами однойменних тригонометричних величин кутів наближено пропорціональні різницям між відповідними кутами, матимемо пропорцію:

$$x : d = 43'' : 60'',$$

звідки:

$$x=\frac{d\cdot 43}{60}=\frac{19\cdot 43}{60}\approx 14 \text{ (стотисячних).}$$

5) Величину поправки на секунди ($x=0{,}00014$) треба додати до $\lg\sin 34^\circ 16'$.

6) Отже,

$$\lg\sin 34^\circ 16' 43''=\bar{1}{,}75054+0{,}00014=\bar{1}{,}75068.$$

Так само визначаємо логарифм тангенса будьякого кута.

Для визначення логарифма косинуса або логарифма котангенса будьякого кута треба абсолютну величину поправки на секунди x відповідно відняти від логарифма косинуса і логарифма котангенса. Так, наприклад, для визначення $\lg\cos 31^\circ 52' 38''$ абсолютну величину поправки $x=|5|$ треба відняти від $\lg\cos 31^\circ 52'$, а для визначення $\lg\operatorname{ctg} 63^\circ 0' 48''$ абсолютну величину поправки $x=|26|$ треба відняти від $\lg\operatorname{ctg} 63^\circ 0'$.

Приклад 2.

Дано: кут $31^\circ 52' 38''$.

Визначити: $\lg\cos 31^\circ 52' 38''$.

Розв'язування.

1) $\lg\cos 31^\circ 52'=\bar{1}{,}92905$;

2) $d=-8$;

3) $x=\frac{-8\cdot 38}{60}\approx -5$.

Відповідь.

$\lg\cos 31^\circ 52' 38''=\bar{1}{,}92905-0{,}00005=\bar{1}{,}92900$.

Зауваження. У таблицях Пржевальського величина поправки на секунди обчислена і надрукована в графах під заголовком P. P. (partes proportionales — пропорціональні частини). Тому при логарифмічних обчисленнях слід користуватися таблицями пропорціональних частин.

Приклади (на розміщення дій при логарифмічних обчисленнях за допомогою таблиць P. P.).

1) *Визначити* $\lg\sin 19^\circ 28' 45''$

	$19^\circ 28'$	$\bar{1}{,}52278$
	$40''$	24
$d=36$;	$5''$	3
	$\lg\sin 19^\circ 28' 45''$	$=\bar{1}{,}52305$

2) *Визначити* $\lg \operatorname{tg} 57^\circ 31' 40''$

	$57^\circ 31'$	$0{,}19609$
$d=28$;	$40''$	19
	$\lg \operatorname{tg} 57^\circ 31' 40''$	$=0{,}19628$

3) *Визначити* $\lg \cos 58^\circ 37' 29''$

	$58^\circ 37'$	$\overline{1}{,}71664$
	$20''$	-7
$d=-21$;	$9''$	-3
	$\lg \cos 58^\circ 37' 29''$	$=\overline{1}{,}71654$

4) *Визначити* $\lg \operatorname{ctg} 63^\circ 0' 48''$

	$63^\circ 0'$	$\overline{1}{,}70717$
	$40''$	$-21{,}3$
$d=-32$;	$8''$	$-\ 4{,}3$
	$\lg \operatorname{ctg} 63^\circ 0' 48''$	$\overline{1}{,}70691$

б) Визначення кута за даним логарифмом його тригонометричної функції.

Приклад 1.

Дано: $\lg \sin x = \overline{1}{,}41029$.
Визначити x.

Розв'язування.

1) З таблиць безпосередньо знаходимо два послідовних логарифми синусів $\overline{1}{,}41016$ і $\overline{1}{,}41063$, між якими міститься дане значення $\overline{1}{,}41029$, тобто:

$$\overline{1}{,}41016 < \overline{1}{,}41029 < \overline{1}{,}41063 .$$

2) Значенню $\overline{1}{,}41016$ відповідає кут $14^\circ 54'$;
„ $\overline{1}{,}41063$ „ „ $14^\circ 55'$.
Тоді шуканий кут x міститься між цими кутами, а саме:

$$14^\circ 54' < x < 14^\circ 55'.$$

3) Позначивши різницю між даним логарифмом і найближчим меншим з таблиць через Δ, табличну різницю двох суміжних логарифмів через d і поклавши в основу принцип § 57 (п. 4), одержимо пропорцію:

$$y : 60 = \Delta : d,$$

звідки:

$$y = \left(\frac{\Delta \cdot 60}{d}\right)''.$$

4) Величину поправки на секунди $y = \left(\frac{\Delta \cdot 60}{d}\right)''$ завжди треба додавати до кута x, якщо цей кут було визначено за даним логарифмом його синуса або тангенса, і, навпаки, величину поправки на секунди $y = \left(\frac{\Delta \cdot 60}{d}\right)''$ віднімати від кута x, якщо цей кут було визначено за даним логарифмом його косинуса або котангенса.

Приклади (на розміщення дій при визначенні кута за даним логарифмом його тригонометричної функції).

1. *Визначити* x, якщо $\lg \sin x = \bar{1},41029$.

$$\begin{array}{l}
\bar{1},41029 \text{ ——— } x \\
\phantom{\bar{1},41}016 \text{ ——— } 14^\circ 54' \\
\hline
\left.\begin{array}{r}\Delta = 13 \\ d = 47\end{array}\right\} \quad y = \frac{13 \cdot 60}{47} \approx 17'' \\
\hline
\end{array}$$

$$x = 14^\circ 54' 17''.$$

2. *Визначити* x, якщо $\lg \operatorname{tg} x = \bar{1},76623$.

$$\begin{array}{l}
\bar{1},76623 \text{ ——— } x \\
\phantom{\bar{1},76}609 \text{ ——— } 30^\circ 16' \\
\hline
\left.\begin{array}{r}\Delta = 14 \\ d = 30\end{array}\right\} \quad y = \frac{14 \cdot 60}{30} = 28'' \\
\hline
\end{array}$$

$$x = 30^\circ 16' 28''.$$

3. *Визначити* x, якщо $\lg \cos x = \bar{1}, 62393$.

$$\begin{array}{l}
\bar{1}, 62393 \text{ ——— } x \\
\phantom{\bar{1}, 62}377 \text{ ——— } 65^\circ 08' \\
\hline
\left.\begin{array}{r}\Delta = 16 \\ d = 28\end{array}\right\} \quad y = \frac{16 \cdot 60}{28} = 34'' \\
\hline
\end{array}$$

$$x = 65^\circ 07' 26''.$$

4. *Визначити* x, якщо $\lg \operatorname{ctg} x = 0,12450$.

$$\begin{array}{l}
0,12450 \text{ ——— } x \\
446 \text{ ——— } 36^\circ 54' \\
\hline
\left.\begin{array}{r}\Delta = 4 \\ d = 27\end{array}\right\} \quad y = \frac{4 \cdot 60}{27} \approx 9'' \\
\hline
\end{array}$$

$$x = 36^\circ 53' 51''.$$

Примітка. Принцип, покладений в основу інтерполяції при визначенні логарифмів тригонометричних величин кута, такий: різниця між логарифмами для кутів, які відрізняються один від одного не більше як на $1'$, пропорціональні різниці між кутами.

Коли б кожній певній зміні кута, хоч би на $1'$, відповідала одна і та ж зміна логарифма тригонометричної величини, тобто коли б таблична різниця була сталою, цю пропорціональність можна було б вважати точною. Але насправді це не так.

Таблична різниця змінюється.

Все ж є можливість для більшості кутів використовувати вищезгадану пропорціональність як наближену, бо таблична різниця для них змінюється незначно і близька (в деяких межах) до сталої.

Переглядаючи таблицю, можна побачити, що для кутів досить малих (від 0° до 3°) і кутів, близьких до 90° (від 87° до 90°), таблична різниця швидко і значно змінюється.

Для таких кутів звичайний метод обчислень незручний. Для більшої точності результатів треба застосувати таблиці Деламбра див. табл. Пржевальського).

Цей спосіб базується ось на чому.

Приймають, що синуси і тангенси малих кутів пропорціональні самим кутам.

Хай треба визначити логарифм синуса або тангенса кута $\alpha + h$, де α найближчий до нього кут у таблицях.

Позначивши число секунд у цих кутах через $C_{\alpha+h}$ і C_α, пишемо:

$$\frac{\sin(\alpha+h)}{C_{\alpha+h}} = \frac{\sin\alpha}{C_\alpha}; \quad \frac{\operatorname{tg}(\alpha+h)}{C_{\alpha+h}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{C_\alpha},$$

звідки

$$\lg\sin(\alpha+h) - \lg C_{\alpha+h} = \lg\sin\alpha - \lg C_\alpha;$$

$$\lg\operatorname{tg}(\alpha+h) - \lg C_{\alpha+h} = \lg\operatorname{tg}\alpha - \lg C_\alpha,$$

або

$$\lg\sin(\alpha+h) = \lg C_{\alpha+h} + (\lg\sin\alpha - \lg C_\alpha);$$

$$\lg\operatorname{tg}(\alpha+h) = \lg C_{\alpha+h} + (\lg\operatorname{tg}\alpha - \lg C_\alpha).$$

Позначивши вирази в дужках через S і T, матимемо:

$$\lg\sin(\alpha+h) = \lg C_{\alpha+h} + S; \quad (1)$$

$$\lg\operatorname{tg}(\alpha+h) = \lg C_{\alpha+h} + T. \quad (2)$$

Отже, *щоб визначити логарифм синуса або тангенса кута, треба до логарифма від числа секунд у цьому куті додати відповідні значення* S або T (залежно від того, що визначають: логарифм синуса чи логарифм тангенса).

З формули (1) і (2) маємо

$$\lg C_{\alpha+h} = \lg \sin(\alpha + h) - S; \qquad (3)$$

$$\lg C_{\alpha+h} = \lg \operatorname{tg}(\alpha + h) - T. \qquad (4)$$

Ці формули (3) і (4) дають можливість розв'язувати обернене питання.

Припустимо, що нам відомо, чому дорівнює $\lg \sin(\alpha + h)$ або $\lg \operatorname{tg}(\alpha + h)$, а треба визначити кут $\alpha + h$.

З формул (3) і (4) виходить:

щоб визначити логарифм числа секунд у невідомому куті, треба від логарифма його синуса відняти відповідне значення S або від логарифма його тангенса відняти відповідне значення для T.

А далі за логарифмом числа секунд у кута можна визначити і самий кут.

Про техніку обчислень див. табл. Пржевальського. Користуючись ними, треба пам'ятати, що в таблицях кожне з чисел S і T збільшене на 10, а тому, коли у таблицях $S = 4{,}68557$, треба вважати, що $S = \bar{6}{,}68557$.

РОЗДІЛ IX.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ.

§ 58. Загальні зауваження.

Основна задача тригонометрії, як про це було сказано у вступі, є розв'язування трикутників аналітичним способом, тобто визначення всіх невідомих елементів трикутника за відповідними формулами.

Обчислюючи елементи трикутника, завжди можна визначити його елементи з потрібною точністю і проконтролювати одержані результати.

Умовимось сторони і кути в кожному трикутнику вважати його основними елементами.

Крім того додержуватимемо таких умовних позначень:

висоти, проведені на сторони a, b, c, позначають відповідно — h_a, h_b, h_c;

медіани — m_a, m_b, m_c;

бісектриси кутів A, B, C — β , β_B, β_C;

радіус кола, описаного навколо трикутника, — R;

радіус кола, вписаного в трикутник, — r;

периметр трикутника — $2p$;

площу трикутника — S;

прямий кут — C, тоді гіпотенуза буде — c (якщо це прямокутний трикутник).

Розв'язати трикутник, значить обчислити його основні елементи — сторони a, b, c та кути A, B, C.

Рис. 69.

А. ПРЯМОКУТНІ ТРИКУТНИКИ І РІВНОБЕДРЕНІ ТРИКУТНИКИ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО ПРЯМОКУТНИХ.

§ 59. Залежність між сторонами і кутами прямокутного трикутника.

Для розв'язування прямокутного трикутника (рис. 69) маємо шість формул, а саме:

$A + B = 90^\circ$ . . . (1)

$a = c \sin A$ . . . (2)

$b = c \cos A$ . . . (3)

$a = b \operatorname{tg} A$ . . . (4)

$b = a \operatorname{ctg} A$ . . . (5)

$c^2 = a^2 + b^2$ . . . (6)

З геометрії відомо, що для визначення трикутника необхідно і досить знати три його незалежних елементи.

За *основні* (*незалежні*) співвідношення можна прийняти будьякі три з цих шести формул, тоді ті три, що залишаться, будуть їх наслідками.

Умовимось за *основні* (*незалежні*) співвідношення вважати три перших.

§ 60. Основні випадки розв'язування прямокутних трикутників.

За основні вважаємо такі чотири випадки розв'язування прямокутних трикутників:

1. Дано гіпотенузу c і гострий кут A.
2. „ катет a і гострий кут A.
3. „ катет b і гіпотенузу c.
4. „ два катети a і b.

Зауваження 1. Розв'язування трикутників (як і розв'язування всяких математичних задач) провадять спочатку, по змозі, до кінця в загальному вигляді, потім роблять обчислення.

Зауваження 2. Відомо, що обчислення, які провадяться за допомогою таблиць (натуральних значень тригонометричних функцій або логарифмічних), дають неточні результати, тому завжди, коли це можливо, слід намагатися визначати шукані елементи безпосередньо з даних задачі, а не з результатів обчислення.

Розглянемо основні випадки розв'язування прямокутних трикутників.

1-й випадок. *Дано гіпотенузу і гострий кут.*

Дано: c, A.

Визначити: B, a, b.

Розв'язування (в загальному вигляді).

1) $B = 90° - A$;

2) $a = c \sin A$;

3) $b = c \cos A$.

Контроль.

4) $\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}$.

Числовий приклад. Дано: $c = 627$ *см*; $A = 23° 30'$.

Розв'язування (за таблицями натуральних значень тригонометричних функцій).

1) $B = 90° - 23° 30' = 66° 30'$;

2) $a = 627 \sin 23° 30' = 250$ *см*;

3) $b = 627 \cos 23° 30' = 575$ *см*.

Контроль.

4) $\operatorname{tg} B = \frac{575}{250} = 2{,}3$;

$$\underline{B = 66° 30'.}$$

Допоміжні обчислення:

1) $\sin 23°30' = 0{,}399$;

2) $\cos 23°30' = 0{,}917$;

3) $0{,}399 \cdot 627 = 249{,}985 \approx 250$;

4) $0{,}917 \cdot 627 = 575{,}022 \approx 575$;

5) $\frac{575}{250} = 0{,}575 \cdot 4 = 2{,}300$;

6) $2{,}300$ —— $\operatorname{tg} B$

$\underline{2{,}246 \text{ —— } \operatorname{tg} 66°}$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta = 54 \\ d = 110\end{array}\right\} y = \frac{60' \cdot 54}{110} \approx 30'$$

$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} 66°30'$.

Числовий приклад. Дано: $c = 298$ *дм*; $A = 37°25'$.

Розв'язування (за допомогою логарифмічних п'ятизначних таблиць).

1) $B = 90° - A = 90° - 37°25' = 52°35'$;

2) $a = c \sin A$; $\lg a = \lg c + \lg \sin A =$
$= \lg 298 + \lg \sin 37°25' = 2{,}25784$;

$\underline{a = 181{,}07 \text{ дм.}}$

3) $b = c \cos A$; $\lg b = \lg c + \lg \cos A = \lg 298 +$
$+ \lg \cos 37°25' = 2{,}37417$;

$\underline{b = 236{,}68 \text{ дм.}}$

Контроль.

4) $\lg \operatorname{tg} A = \lg a - \lg b = \bar{1}{,}88367$;

$\underline{A = 37°25'.}$

Допоміжні обчислення:

1) $+\begin{array}{l}\lg 298 = 2{,}47422 \\ \lg \sin 37°25' = \bar{1}{,}78362\end{array}$

$\lg a = 2{,}25784$.

2) 25784 —— x

68 —— 1810

$$\left.\begin{array}{l}\Delta = 16 \\ d = 24\end{array}\right\} y = 0{,}7$$

$a = 181{,}07$.

3) $\lg 298 = 2{,}47422$

$\lg \cos 37°25' = \bar{1}{,}89995$

$\lg b = 2{,}37417$.

4) 37417 —— x

401 —— 2366

$$\left.\begin{array}{l}\Delta = 16 \\ d = 19\end{array}\right\} y = 0{,}8$$

$b = 236{,}68$.

5) $\bar{1}{,}88367 = \lg \operatorname{tg} 37°25'$.

2-й випадок. *Дано катет і гострий кут.*

Дано: a, A.

Визначити: B, b, c.

Розв'язування (в загальному вигляді).

1) $B = 90^\circ - A$;

2) $b = a \operatorname{ctg} A = a \operatorname{tg} B$;

3) $c = \frac{a}{\sin A}$.

Контроль.

4) $\sin A = \frac{a}{c}$.

Числовий приклад. Дано: $a = 57$; $A = 26^\circ 40^\circ 40''$.

Розв'язування (за допомогою п'ятизначних таблиць логарифмів).

1) $B = 90^\circ - A = 90^\circ - 26^\circ 40' 40'' = 63^\circ 19' 20''$;

2) $b = a \operatorname{tg} B$; $\lg b = \lg a + \lg \operatorname{tg} B =$
$= \lg 57 + \lg \operatorname{tg} 63^\circ 19' 20'' = 2{,}05477$;

$\underline{b = 113,\ 44.}$

3) $c = \frac{a}{\sin A} = \frac{57}{\sin 26^\circ 40' 40''}$;

$\lg c = \lg 57 - \lg \sin 26^\circ 40' 40'' = 2{,}10365$;

$\underline{c = 126,\ 96.}$

Контроль.

4) $\sin B = \frac{b}{c} = \frac{113{,}44}{126{,}96}$;

$\lg \sin B = \bar{1}{,}95112$

$\lg \sin 63^\circ 19'$ —— 10

$$\left.\begin{array}{l}\Delta = 2\\ d = 6\end{array}\right\} y = \frac{60''}{3} = 20'';$$

$\underline{B = 63^\circ 19' 20''.}$

Допоміжні обчислення:

1) $\lg \operatorname{tg} 63^\circ 19' 20''$;

$63^\circ 19'$ —— $0{,}29879$

$d = 32$; $20''$ —— 11

$\lg \operatorname{tg} 63^\circ 19' 20'' = 0{,}29890.$

2) $\lg 57 = 1{,}75587$

$\lg \operatorname{tg} 63^\circ 19' 20'' = 0{,}29890$

$\lg b = 2{,}05477.$

3) $\lg \sin 26^\circ 40' 40''$;

$26^\circ 40'$ —— $\bar{1}{,}65205$

$d = 25$; $40''$ —— 17

$\lg \sin 26^\circ 40' 40'' = \bar{1}{,}65222.$

4) $\lg 57 = 1{,}75587$

$\lg \sin 26^\circ 40' 40'' = \bar{1}{,}65222$

$\lg c = 2{,}10365.$

3-й випадок. *Дано катет і гіпотенузу.*
Дано: b, c.
Визначити: B, A, a.
Розв'язування (в загальному вигляді).

1) $\sin B = \frac{b}{c}$;

2) $A = 90° - B$;

3) $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b)(c-b)}$.

Контроль.

4) $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$.

Числовий приклад. Дано: $b = 394{,}1$; $c = 975{,}6$.

1) $\lg \sin B = \lg 394{,}1 - \lg 975{,}6 = 2{,}59561 - 2{,}98927 = \overline{1}{,}60634$;
$$\underline{B = 23° 49' 34''.}$$

2) $A = 90° - 23° 49' 34'' \underline{= 66° 10' 26''.}$

3) $\lg a = \frac{\lg (c+b) + \lg (c-b)}{2} = \frac{1}{2} (\lg 1369{,}7 + \lg 581{,}5) =$
$$= \frac{1}{2} (3{,}13662 + 2{,}76455) = 2{,}95059;$$
$$\underline{a = 892{,}46.}$$

Контроль.
4) $\lg \operatorname{tg} A = \lg a - \lg b = 2{,}95059 - 2{,}59561 = 0{,}35498$;
$$\underline{c = 66° 10' 26''.}$$

4-й випадок. *Дано два катети.*
Дано: a, b.
Визначити: A, B, c.
Розв'язування (в загальному вигляді).

1) $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$;

2) $B = 90° - A$;

3) $c = \frac{b}{\sin B}$.

Контроль.

4) $\sin A = \frac{a}{c}$.

Числовий приклад. Дано: $a = 0{,}92$; $b = 0{,}849$.
1) $\lg \operatorname{tg} A = \lg 0{,}92 - \lg 0{,}849 = \overline{1}{,}96379 - \overline{1}{,}92891 = 0{,}03488$;
$$\underline{A = 47° 17' 55''.}$$

2) $B = 90° - 47°17'55'' = \underline{42°42'05''}$.

3) $\lg c = \lg 0{,}849 - \lg \sin 42°42'05'' = \bar{1},92891 - \bar{1},83134 = 0{,}09575$;

$$\underline{c = 1.2519}.$$

Контроль.

4) $\lg \sin A = 1{,}96379 - 0{,}09757 = \bar{1},86622$;

$$\underline{A = 47°17'55''}.$$

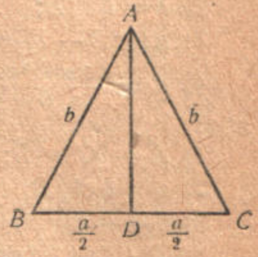

Рис. 70.

§ 61. Розв'язування рівнобедрених трикутників.

(Основні випадки.)

Розв'язування рівнобедрених трикутників зводиться до розв'язування прямокутних трикутників.

Дано: $\triangle BAC$ (рис. 70); $AB = AC$. Провівши висоту AD, одержимо два рівних прямокутних трикутники ADB і ADC.

Випадки при розв'язуванні рівнобедрених трикутників	Розв'язування прямокутних трикутників за такими даними
1-й випадок. Дано: b, A	гіпотенуза $= b$; $\angle \frac{A}{2}$ (§ 60, вип. 1)
2-й " " a, B	катет $= \frac{a}{2}$; $\angle B$ (§ 60, вип. 2)
3-й " " a, b	катет $= \frac{a}{2}$; гіпотенуза $AB = b$ (§ 60, вип. 3)
4-й " " a, h_a	катет $= \frac{a}{2}$; другий катет $AD = h_a$ (§ 60, вип. 4)

§ 62. Випадки розв'язування прямокутних і рівнобедрених трикутників, коли до складу даних входять будьякі лінійні комбінації сторін.

Наведемо кілька прикладів (рис. 71).

Приклад 1. Дано: $c - b = d$; B.

Визначити: A, a, b, c.

Розв'язування.

1) $A = 90° - B$;

2) $b = c \cos A$;

3) $c(1 - \cos A) = d$; $c = \dfrac{d}{2\sin^2 \frac{A}{2}}$,

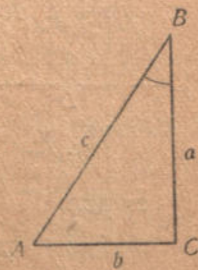

Рис. 71.

і задача зводиться до 1-го основного випадку (§ 60).

Приклад 2. Дано: $b-a=d$; B.

Визначити: A, a, b, c.

Розв'язування.

1) $A=90^\circ-B$;

2) $b=a\operatorname{tg}B$;

3) $a(\operatorname{tg}B-1)=d$;

4) $a=\dfrac{d\cos 45^\circ\cos B}{\sin(B-45^\circ)}$,

або:

1) $A=90^\circ-B$;

2) $a=b\operatorname{ctg}B$;

3) $b(1-\operatorname{ctg}B)=d$;

4) $b=\dfrac{d\sin 45^\circ\sin B}{\sin(B-45^\circ)}$.

Задача зводиться до 2-го основного випадку (§ 60).

Приклад 3. Дано: b; $2p$.

Визначити: A, B, a, c.

Розв'язування.

1) $a=b\operatorname{ctg}B$;

2) $c=\dfrac{b}{\sin B}$;

3) $b\operatorname{ctg}B+b+\dfrac{b}{\sin B}=2p$;

4) $\dfrac{b\cos B+b}{\sin B}+b=b\left(\dfrac{1+\cos B}{\sin B}+1\right)=2p$;

5) $\dfrac{2\cos^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}=\dfrac{2p-b}{b}$; $\underline{\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}=\dfrac{2p-b}{b}}$.

Задача зводиться до 2-го основного випадку (§ 72).

Приклад 4. Дано: $a+h_a=m$; B; $B=C$ (рис. 72).

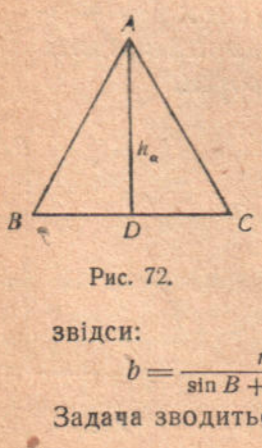

Рис. 72.

Визначити: A, b, h_a.

Розв'язування. Нехай $AB=AC=b$, тоді:

1) $h_a=b\sin B$;

2) $\dfrac{a}{2}=b\cos B$; $a=2b\cos B$;

3) $b\sin B+2b\cos B=m$,

або

$$b(\sin B+2\cos B)=m;$$

звідси:

$$b=\frac{m}{\sin B+2\cos B}=\frac{m\cos\varphi}{\sin(B+\varphi)},\text{ де } 2=\operatorname{tg}\varphi.$$

Задача зводиться до розв'язування прямокутного трикутника.

Приклад 5. Дано: $a + h_b = m$; $b + h_a = n$; $B = C$ (рис. 73).

Визначити: A, B, a, b, h_a.

Умовні позначення:

$$BC = a;\quad AD = h_a;\quad BE = h_b;\quad AB = AC = b.$$

Розв'язування.

1) $h_b = a \sin C = a \sin B$;

2) $h_a = b \sin C = b \sin B$;

3) $a + h_b = a + a \sin C = a(1 + \sin C) = m$;

4) $b + h_a = b + b \sin C = b(1 + \sin C) = n$.

5) Поділивши почленно 3) на 4), матимемо: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

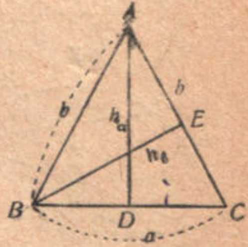

Рис. 73.

6) З трикутника ADC маємо: $\frac{a}{2} = b \cos C$, або

$$a = 2b \cos C.$$

Підставивши в 5) замість a його значення, одержуємо:

$$\frac{2b \cos C}{b} = \frac{m}{n};$$

звідси:

$$\cos C = \frac{m}{2n}.$$

Знаючи кут C, з 4) визначаємо сторону b, і задача зводиться до основного випадку.

Приклади для самостійної роботи:

1)	для прямокутн. тр-ів	Дано: $b + c = m$; B	*Визначити*:	A, a, b, c
2)		„ $a + b = m$; B	„	A, a, b, c
3)		„ $b - a = d$; c	„	A, B, a, b
4)	для рівнобед. тр-ів	„ $2p$; B (кут при головній вершині)	„	A, a, b
5)		„ $2p$; A (кут при основі)	„	B, a, b
6)		„ $h_a + h_b = m$; A (кут при головній вершині)	„	B, a, b, h_a

В. КОСОКУТНІ ТРИКУТНИКИ.

§ 63. Розв'язування косокутних трикутників (так само як і прямокутних) базується на ряді теорем і формул, що дають залежність між елементами трикутника.

Щодо залежності між кутами трикутника, то вона нам відома з геометрії і виражається так:

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Переходимо до виводу інших теорем і формул:

Лема. *У всякому трикутнику відношення сторони до діаметра описаного кола дорівнює синусові протилежного цій стороні кута.*

Доведення. Візьмемо коло з центром у початку координат (рис. 74). Провівши з точки M (кінця дуги) перпендикуляр MK на вісь X-ів і продовживши його до перетину з колом у точці N, сполучимо точки M і N з центром кола. З одержаного бачимо, що:

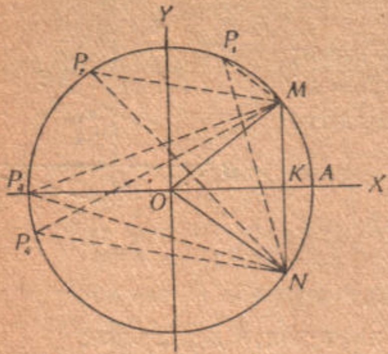

Рис. 74.

$$MK = \frac{MN}{2};$$

$$\angle AOM = \frac{1}{2} \angle NOM = \angle P_1 = \\ = \angle P_2 = \angle P_3 = \ldots \angle P_n.$$

Нехай $\angle AOM = \alpha$; тоді $\sin \alpha = \\ = \frac{MK}{OM}$,

або

$$\sin \alpha = \frac{\frac{MN}{2}}{R} = \frac{MN}{2R}.$$

Але

$$\alpha = P_1 = P_2 = \ldots P_n,$$

тому:

$$\sin \alpha = \sin P_1 = \sin P_2 = \ldots \sin P_n.$$

Отже,

$$\frac{MN}{2R} = \sin P,$$

де P є один з вписаних кутів, що спирається на хорду MN. Формулу $\frac{MN}{2R} = \\ = \sin P$ можна застосувати до будьякої хорди, оскільки хорда MN була нами взята довільно.

Разом з тим у нас утворилася безліч усякого виду вписаних трикутників MP_1N, MP_2N, MP_3N і т. д., серед яких є і гострокутні, і прямокутні, і тупокутні трикутники.

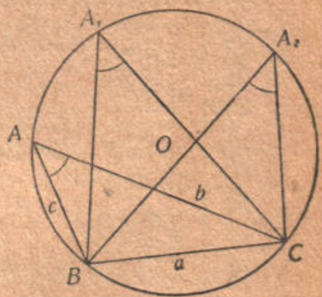

Рис. 75.

Розглядаючи сторони кожного з цих вписаних трикутників як хорди (рис. 75), на підставі останньої одержаної нами залежності знаходимо:

$$\frac{a}{2R} = \sin A; \quad \frac{b}{2R} = \sin B; \quad \frac{c}{2R} = \sin C,$$

де a, b і c є сторони будьякого трикутника, вписаного в коло радіуса R.

Теорема синусів. *У всякому трикутнику частка від ділення сторони трикутника на синус протилежного їй кута є величина стала, що дорівнює діаметрові описаного кола.*

Доведення. За лемою для всякого трикутника маємо:

$$\frac{a}{2R}=\sin A;\ \frac{b}{2R}=\sin B;\ \frac{c}{2R}=\sin C.$$

Звідси

$$\frac{a}{\sin A}=2R;\quad \frac{b}{\sin B}=2R;\quad \frac{c}{\sin C}=2R.$$

Отже,

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.} \qquad (1)$$

Зауваження. Це можна записати ще так:

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C,$$

тобто: *у кожному трикутнику сторони пропорціональні синусам протилежних кутів.*

Теорема тангенсів. *У всякому трикутнику сума двох сторін трикутника так відноситься до їх різниці, як тангенс півсуми протилежних їм кутів до тангенса піврізниці їх.*

За теоремою синусів

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}\ \text{(див. зауваження)},$$

звідси

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B},$$

або на підставі формули (1) § 51 матимемо:

$$\boxed{\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.} \qquad (2)$$

Очевидно,

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}},$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}.$$

Теорема косинусів. *У всякому трикутнику квадрат будь-якої сторони дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвійного добутку цих сторін на косинус кута між ними.*

Для доведення цієї теореми візьмемо відому нам залежність

$$A+B+C=180^{\circ},$$

звідси
$$A = 180^\circ - (B + C),$$
тому
$$\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B.$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на $\sin A$ ($A \neq 0$, як кут трикутника), одержуємо:
$$1 = \frac{\sin B}{\sin A} \cos C + \frac{\sin C}{\sin A} \cos B,$$
або на підставі формули синусів:
$$1 = \frac{b}{a} \cos C + \frac{c}{a} \cos B,$$
звідки:
$$a = b \cos C + c \cos B. \qquad \text{(а)}$$

Аналогічним до цього шляхом знайдемо:
$$b = a \cos C + c \cos A; \qquad \text{(б)}$$
$$c = a \cos B + b \cos A. \qquad \text{(в)}$$

Помноживши рівності (а), (б) і (в) відповідно на $(-a)$, $(-b)$ і c та склавши почленно ці добутки, одержимо:
$$-a^2 - b^2 + c^2 = -ab \cos C - ab \cos C + ac \cos B - ac \cos B -$$
$$- bc \cos A + bc \cos A = -2\,ab \cos C.$$
Остаточно:
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C.} \qquad (3)$$
Очевидно:
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B;$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.$$

Зауваження. Залежно від того, який кут (тупий, гострий чи прямий) лежатиме проти сторони, що ми визначаємо, останній член буде додатний, від'ємний або нуль. Це цілком відповідає відомим геометричним теоремам.

§ 64. Формули синуса, косинуса і тангенса половини кута трикутника залежно від його сторін.

Доведені співвідношення теореми косинусів будуть особливо цінними, коли привести їх до логарифмічного виду.

1. Формула синуса половини кута.

Підставимо в формулу $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$ замість $\cos A$ його значення $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$ з (3), одержимо:
$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = \frac{2\,bc - b^2 - c^2 + a^2}{2\,bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2\,bc} =$$
$$= \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2\,bc},$$

або (оскільки $a+b+c=2p$):

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(p-b)\,2(p-c)}{2bc},$$

звідки:

$$\boxed{\sin\frac{A}{2}=+\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.} \qquad (4)$$

Очевидно:

$$\sin\frac{B}{2}=+\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}};$$

$$\sin\frac{C}{2}=+\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

З а у в а ж е н н я. 1) Перед коренем ставимо тільки знак $+$ тому, що кожний з кутів $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ є гострий кут.

2) Підрадикальна величина повинна бути >0.

Справді: $\begin{cases} b<a+c;\ \ 2b<a+c+b;\ \ 2b<2p;\ \ \underline{b<p.} \\ c<a+b;\ \ 2c<a+b+c;\ \ 2c<2p;\ \ \underline{c<p.} \end{cases}$

3) Підрадикальна величина має бути <1.

Справді: $\begin{cases} a-c<b;\ a-c+b<2b;\ 2(p-c)<2b;\ \text{тобто:} \\ \qquad\qquad \underline{p-c<b.} \\ a-b<c;\ a-b+c<2c;\ 2(p-b)<2c;\ \text{тобто:} \\ \qquad\qquad \underline{p-b<c.} \end{cases}$

2. Формули косинуса половини кута.

Шляхом аналогічних перетворень у формулі

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A$$

одержуємо:

$$\boxed{\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}}.} \qquad (5)$$

Очевидно:

$$\cos\frac{B}{2}=+\sqrt{\frac{p\,(p-b)}{ac}};$$

$$\cos\frac{C}{2}=+\sqrt{\frac{p\,(p-c)}{ab}}.$$

Зауваження. 1) перед коренем треба ставити тільки знак $+$, тому що косинус гострого кута $\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}\right)$ додатний;

2) $p-a>0$;

3) $\frac{p(p-a)}{bc}<1$.

Справді:

$$(b-c)<a;\ (b-c)^2<a^2;\ b^2+c^2-2bc<a^2;$$
$$b^2+c^2+2bc-a^2<4bc;\ (b+c)^2-a^2<4bc;$$
$$(b+c+a)(b+c-a)<4bc;\ \text{тобто}: \underline{p(p-a)<bc}.$$

3. Формула тангенса половини кута.

Поділивши формулу (4) на формулу (5), одержуємо:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{A}{2}=+\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\,.} \tag{6}$$

Очевидно:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=+\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\,;$$
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=+\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\,.$$

На підставі попередніх зауважень цього параграфа значення тангенса половини кута трикутника завжди будуть додатні і дійсні.

§ 65. Формула Мольвейде.

Візьмемо:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\,.$$

На підставі властивості ряду рівних відношень пишемо:

$$\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{a}{\sin A}\,;$$

але

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\,,$$

тому

$$\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{c}{\sin C}\,,$$

або

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}\,,$$

що після належних перетворень дає:

$$\boxed{\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\,,} \tag{7}$$

тобто: *сума двох сторін трикутника так відноситься до третьої сторони, як косинус піврізниці протилежних їм кутів до синуса половини третього кута.*

Аналогічно:

$$\frac{a-b}{\sin A - \sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

або

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin C},$$

звідки

$$\boxed{\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},} \qquad (8)$$

тобто: *різниця двох сторін трикутника так відноситься до третьої сторони, як синус піврізниці протилежних їм кутів до косинуса половини третього кута.*

З викладених залежностей між сторонами і кутами трикутника які завгодно три з них можна вважати за основні, а всі інші є наслідками. Умовимось за *основні (незалежні)* співвідношення вважати такі три:

$$A + B + C = 180^\circ;$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}; \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

§ 66. Формули для висот трикутника.

Маємо (рис. 76, 77):

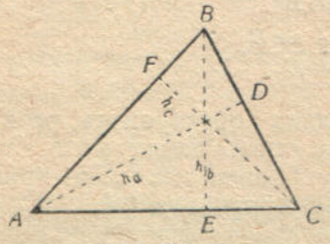

Рис. 76.

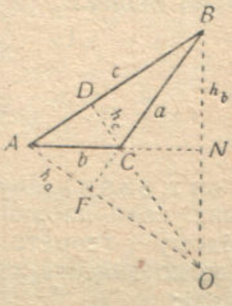

Рис. 77.

$$\begin{aligned} h_a &= b \sin C = c \sin B, \\ h_b &= c \sin A = a \sin C, \\ h_c &= a \sin B = b \sin A, \end{aligned} \qquad (9)$$

тобто: *у всякому трикутнику висота дорівнює добутку бічної сторони на синус кута між нею і основою.*

§ 67. Формула для площі трикутника.

1) З геометрії відомо що:

$$\boxed{S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}.} \tag{10}$$

2) Підставивши в ці формули замість h_a, h_b і h_c їх вирази через сторону і синус відповідного кута, одержимо:

$$\boxed{S=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{ac\sin B}{2}=\frac{bc\sin A}{2},} \tag{11}$$

тобто: ***площа трикутника дорівнює півдобуткові двох сторін на синус кута між ними.***

3) З формули (1) (теорема синусів) маємо:

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A};$$

підставивши цей вираз у $S=\frac{ab\sin C}{2}$, одержимо:

$$\boxed{S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}.} \tag{12}$$

Аналогічно цьому:

$$S=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B};$$

$$S=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}.$$

Зауваження. Цими формулами користуємось, розв'язуючи трикутник, коли площа входить в число даних його елементів.

4) Відому з геометрії формулу Герона для площі трикутника можна легко вивести з допомогою тригонометрії.

Справді:

$$S=\frac{bc\sin A}{2}=\frac{bc}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

Замінивши $\sin\frac{A}{2}$ і $\cos\frac{A}{2}$ на їх значення з (4) і (5), матимемо:

$$S=\frac{bc}{2}2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)(p-a)p}{b^2c^2}}.$$

Отже,

$$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.} \tag{13}$$

5) Легко одержати ще таку надзвичайно корисну формулу для площі трикутника, а саме:

$$\frac{S}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}}=p(p-a),$$

звідки

$$\boxed{S=p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.} \tag{14}$$

Аналогічно цьому:

$$S=p(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2};$$

$$S=p(p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

6) Візьмемо довільний трикутник ABC (рис. 78). Нехай точка O буде центром вписаного кола, тоді

$$S=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}=r\frac{a+b+c}{2},$$

або

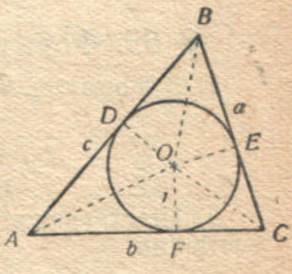

Рис. 78.

$$\boxed{S=rp.} \tag{15}$$

7. Перемноживши відповідні частини формул $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ і $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ (§ 64), після деякого спрощення під коренем, одержимо:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}=$$

$$=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^4}}=\frac{S}{p^2}.$$

Звідси:

$$\boxed{S=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.} \tag{16}$$

§ 68. Формули для R (радіус описаного кола).

1) З виразу $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ знаходимо:

$$\boxed{R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}.} \tag{17}$$

2) Візьмемо формулу

$$R=\frac{a}{2\sin A}.$$

Визначивши $\sin A$ з рівності

$$S=\frac{bc\sin A}{2},$$

матимемо:

$$\sin A=\frac{2S}{bc},$$

а після підставляння:

$$\boxed{R=\frac{abc}{4S}.} \qquad (18$$

§ 69. Формули для r (радіус вписаного кола).

1) З формули $S=rp$ знаходимо:

$$\boxed{r=\frac{S}{p}.} \tag{19}$$

2) Підставивши замість S його значення з формули (14), матимемо:

$$r=\frac{p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{p}=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}. \tag{20}$$

3) З трикутників AFO і CFO (рис. 78) маємо:

$$AF=r\operatorname{ctg}\frac{A}{2};$$

$$CF=r\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

Склавши почленно ці рівності, одержимо:

$$AF+CF=r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right),$$

або

$$b=r\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}=r\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}};$$

звідси:

$$\boxed{r=\frac{b\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}.} \tag{21}$$

§ 70. Формула для бісектриси кута трикутника.

Дано:

$AD = h_a$ і кути B і C (рис. 79).

Визначити: бісектрису AE.

Розв'язування.

Позначивши $AE = \beta_A$, кут EAD через x, матимемо:

$$\beta_A = \frac{h_a}{\cos x}.$$

$$x = 90^\circ - \angle AED = 90^\circ - \left(B + \frac{A}{2}\right) = 90^\circ - B - \frac{180^\circ - (B + C)}{2} = \frac{C - B}{2}.$$

Отже,

$$\beta_A = \frac{h_a}{\cos \frac{B - C}{2}}. \qquad (22)$$

Аналогічно:

$$\beta_B = \frac{h_b}{\cos \frac{A - C}{2}};$$

$$\beta_C = \frac{h_c}{\cos \frac{A - B}{2}}.$$

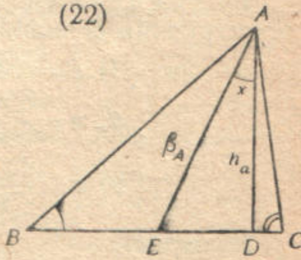

Рис. 79.

§ 71. Основні випадки розв'язування косокутних трикутників.

За основні вважаємо такі чотири випадки розв'язування косокутних трикутників:

1. Дано: сторона (b) і два кути A і C.
2. „ дві сторони a і c і кут між ними (B).
3. „ три сторони a, b, і c.
4. „ дві сторони (a і b) і кут (A), протилежний одній з них.

Перший випадок розв'язується з допомогою теореми синусів; другий — з допомогою теореми тангенсів; третій — з допомогою формули синуса, косинуса і тангенса половини кута трикутника; четвертий — так званий сумнівний — з допомогою формули синусів.

Розглянемо основні випадки розв'язування косокутних трикутників.

1-й випадок. *Дано сторону і два кути* (рис. 80).
Дано: b, A, C.
Визначити: B, a, c.
Розв'язування. (в загальному вигляді).

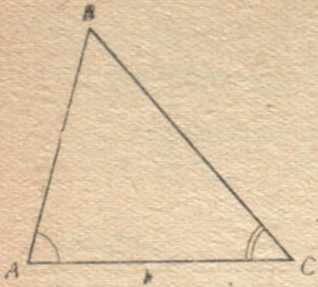
Рис. 80.

1) $B = 180° - (A + C)$;

2) $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$;

3) $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$.

Контроль.

4) $\sin A = \frac{a \sin C}{c}$.

Числовий приклад.
Дано: $b = 37$; $A = 86° 03'$; $C = 50° 56'$.

Розв'язування. (за таблицями натуральних значень тригонометричних функцій).

1) $B = 180° - (86° 03' + 50° 56') = 43° 01'$;

2) $a = \frac{37 \sin 86° 03'}{\sin 43° 01'} = 54{,}1$;

3) $c = \frac{37 \sin 50° 56'}{\sin 43° 01'} = 42{,}1$.

Контроль.

4) $\sin A = \frac{54{,}1 \cdot 0{,}776}{42{,}1} = 0{,}998$; $A \approx 86°$.

Допоміжні обчислення:

1) $\sin 86° 03' = 0{,}998$.
2) $\sin 43° 01' = 0{,}682$.
3) $\sin 50° 56' = 0{,}776$.
4) $\frac{37 \cdot 0{,}988}{0{,}682} = 54{,}1$.
5) $\frac{37 \cdot 0{,}776}{0{,}682} = 42{,}1$.

Зауваження.
Кут A близький до 90°; відомо, що синуси таких кутів визначаються досить неточно.
Числовий приклад. Дано: $b = 16343{,}9$; $A = 29° 54' 31''$; $C = 39° 20' 34''$.

Розв'язування (за допомогою п'ятизначних таблиць логарифмів).

1) $B = 180° - (A + C) = 110° 44' 55''$.

2) $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{16343{,}9 \sin 29° 54' 31''}{\sin 110° 44' 55''} = \frac{16343{,}9 \sin 29° 54' 31''}{\cos 20° 44' 55''}$;

$\lg a = 3{,}94025$;

$a = 8714{,}6$.

3) $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{16343{,}9 \sin 39^\circ 20' 34''}{\cos 20^\circ 44' 55''}$;

$$\lg c = 4{,}04455;$$
$$\underline{c = 11080.}$$

Контроль.

4) $\sin A = \frac{a \sin C}{c}$;

$$\underline{A = 29^\circ 54' 31''.}$$

Допоміжні обчислення:

$$1)\quad \begin{array}{r} 29^\circ 54' 31'' \\ +\ 39^\circ 20' 34'' \\ \hline 69^\circ 15' 05'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 179^\circ 59' 60'' \\ -\ 69^\circ 15' 05'' \\ \hline 110^\circ 44' 55''. \end{array}$$

$$2)\quad \begin{array}{ll} \lg b & = 4{,}21336 \\ +\lg \sin A & = \overline{1}{,}69776 \\ -\lg \cos 20^\circ 44' 55'' & = 0{,}02913 \\ \hline & \ 3{,}94025. \end{array}$$

$$3)\quad \begin{array}{ll} \lg b & = 4{,}21336 \\ +\lg \sin C & = \overline{1}{,}80206 \\ -\lg \cos 20^\circ 44' 55'' & = 0{,}02913 \\ \hline & \ 4{,}04455. \end{array}$$

$$4)\quad \begin{array}{ll} \lg a & = 3{,}94025 \\ +\lg \sin C & = \overline{1}{,}80206 \\ -\lg C & = \overline{5}{,}95545 \\ \hline \lg \sin A & = \overline{1}{,}69776. \end{array}$$

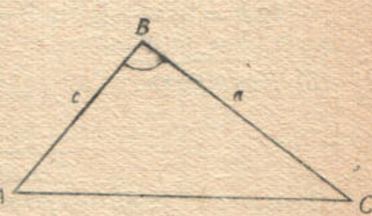

Рис. 81.

2-й випадок. *Дано дві сторони і кут між ними* (рис. 81).

Дано: a, c, B.

Визначити: A, C, b.

Розв'язування (у загальному вигляді).

1) За теоремою тангенсів:

$$\operatorname{tg} \frac{A - C}{2} = \frac{a - c}{a + c} \operatorname{tg} \frac{A + C}{2} = \frac{a - c}{a + c} \operatorname{ctg} \frac{B}{2}.$$

Звідси визначаємо $\frac{A - C}{2}$.

Нехай $\frac{A - C}{2} = m$.

2) $A + C = 180^\circ - B$; $\quad \frac{A + C}{2} = 90^\circ - \frac{B}{2}$.

Нехай $\frac{A + C}{2} = n$.

3) Розв'язавши систему: $\left.\begin{aligned} \frac{A-C}{2} &= m \\ \frac{A+C}{2} &= n \end{aligned}\right|,$

визначимо кути A і C.

4) За теоремою синусів маємо:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

5) *Контроль*. $$\sin A = \frac{a \sin B}{b}.$$

Числовий приклад. Дано: $a = 12,85$; $c = 7,97$; $B = 92°04'58''$.

Розв'язування (за допомогою п'ятизначних таблиць логарифмів).

1) $\operatorname{tg} \frac{A-C}{2} = \frac{(a-c)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{a+c} = \frac{4,88 \operatorname{ctg} 46°02'29''}{20,82}$;

$\lg \operatorname{tg} \frac{A-C}{2} = \bar{1},35421$; $\frac{A-C}{2} = 12°44'16''$.

2) $\frac{A+C}{2} = 90° - \frac{B}{2} = 43°57'31''$.

3) Розв'язуємо систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A-C}{2} &= 12°44'16'' \\ \frac{A+C}{2} &= 43°57'31'' \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\underline{A = 56°41'47''} \\ &\underline{C = 31°13'15''}. \end{aligned}$$

4) $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$; $(\sin 92°04'58'' = \cos 2°04'58'')$;

$\lg b = \lg a + \lg \sin B - \lg \sin A$;

$\underline{b = 15,37}$.

5) *Контроль*. $\sin A = \frac{a \sin C}{c}$;

$\underline{A = 56°41'14''}$.

Допоміжні обчислення:

1) $a - c = 12,85 - 7,97 = 4,88$.

2) $a + c = 12,85 + 7,97 = 20,82$.

3) $\frac{B}{2} = 92°04'58'' : 2 = 46°02'29''$.

4)
$$\begin{array}{lr} \lg 4,88 & = 0,68847 \\ +\lg \operatorname{ctg} 46°02'29'' & = \bar{1},98421 \\ -\lg 20,82 & = \bar{2},68153 \\ \hline & \bar{1},35421. \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{lcl} \bar{1},35421 & \text{———} & x \\ 405 & \text{———} & 12°44' \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= 16 \\ d &= 59 \end{aligned}\right\} y = \frac{60''\cdot 16}{59} \approx 16''$$

$x = 12°44'16''$.

6)
$$\begin{array}{lr} \lg a & 1,10890 \\ \lg \sin B \cdot & \bar{1},99971 \\ -\lg \sin A & 0,07791 \\ \hline & 1,18652. \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{lr} \lg a & = 1,10890 \\ +\lg \sin C & = \bar{1},71460 \\ -\lg c & = \bar{1},09854 \\ \hline \lg \sin A & = \bar{1},92204. \end{array}$$

З а у в а ж е н н я. Різниця в обчисленні в 33″ пояснюється неточністю результатів, які ми одержуємо під час логарифмування синусів кутів, близьких до 90°.

3-й випадок. *Дано три сторони* (рис. 82).

Дано: a, b, c.

Визначити: A, B, C.

Р о з в ' я з у в а н н я (в загальному вигляді).

1) За формулою (§ 64) маємо:

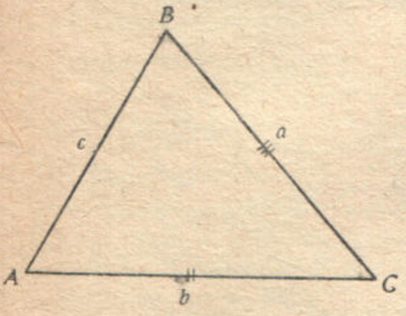

Рис. 82.

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Звідси визначаємо кути:

A, B і C.

2) *Контроль*.

$$A+B+C=180°.$$

З а г а л ь н і з а у в а ж е н н я. Для визначення кутів A, B і C даного трикутника можна робити обчислення за синусом у випадку невеликого кута A (або B, або C) і за косинусом — коли кут A (або B, або C) великий. Взагалі ж треба пам'ятати, що обчислення за тангенсами дає точніші результати.

Ч и с л о в и й п р и к л а д. Дано: $a=42$; $b=38$; $c=26$.

Р о з в ' я з у в а н н я (за допомогою п'ятизначних таблиць логарифмів).

1) $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$;

$$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\Big[\lg(p-b)+\lg(p-c)+(-\lg p)+ \\ +(-\lg(p-a))\Big];$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\bar{1},92089;\quad \frac{A}{2}=39°48'37'';$$

$$\underline{A=79°37'14''.}$$

2) $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$;

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\Big[\lg(p-a)+\lg(p-c)+(-\lg p)+ \\ +(-\lg(p-b))\Big];$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\bar{1},78619;\quad \frac{B}{2}=31°26'02'';$$

$$\underline{B=62°52'04''.}$$

3) $\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$;

$$\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\Big[\lg(p-a)+\lg(p-b)+(-\lg p)+$$
$$+(-\lg(p-c))\Big];$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\bar{1},53092;\quad \frac{C}{2}=18^\circ 45' 20''$$
$$\underline{C=37^\circ 30' 40''}.$$

4) *Контроль.*

$$\begin{array}{r} 79^\circ 37' 14'' \\ +\ 62^\circ 52' 04'' \\ 37^\circ 30' 40'' \\ \hline 179^\circ 59' 58''. \end{array}$$

Величина похибки дорівнює 2″.

Допоміжні обчислення:

Позначення	Числа	Логарифми
p	53	1,72428
$p-a$	11	1,04139
$p-b$	15	1,17609
$p-c$	27	1,43136

1)
$$\begin{array}{lr} \lg(p-b) & =1,17609 \\ \lg(p-c) & =1,43136 \\ +\ -\lg p & =\bar{2},27572 \\ -\lg(p-a) & =\bar{2},95861 \\ \hline & \bar{1},84178; \end{array}$$
$$\bar{1},84178:2=\bar{1},92089.$$

2)
$$\begin{array}{lr} \lg(p-a) & =1,04139 \\ \lg(p-c) & =1,43136 \\ +\ -\lg p & =\bar{2},27572 \\ -\lg(p-b) & =\bar{2},82391 \\ \hline & \bar{1},57238; \end{array}$$
$$\bar{1},57238:2=\bar{1},78619.$$

3)
$$\begin{array}{lr} \lg(p-a) & =1,04139 \\ \lg(p-b) & =1,17609 \\ +\ -\lg p & =\bar{2},27572 \\ -\lg(p-c) & =\bar{2},56864 \\ \hline & \bar{1},06184; \end{array}$$
$$\bar{1},06184:2=\bar{1},53092.$$

4-й випадок. *Дано дві сторони і кут, протилежний одній з них* (рис. 83 і 84).

Дано: a, b, A.

Визначити: B, C, c.

Розв'язування (у загальному вигляді).
З формули:

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}$$

маємо:

1) $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$.

Звідси визначаємо кут B.
Далі матимемо:

2) $C = 180^\circ - (A + B)$;

3) $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.

Контроль.

4) $\sin A = \frac{a \sin C}{c}$.

Рис. 83.

Ми обчислювали кут B за його синусом. Відомо, що тому самому додатному значенню синуса відповідають два кути в межах від 0° до 180°: гострий, який знаходимо з таблиць, і тупий, що доповнює його до 180°. Тому виникає сумнів, чи будуть для даного трикутника придатні обидва кути (рис. 84) чи тільки якийсь один з них (рис. 83), а тоді — який саме?

Отже, в цьому випадку при визначенні кута трикутника за його синусом необхідно спочатку дослідити задачу щодо порівняльної величини даних сторін.

Дослідження.

1-й випадок. $a > b$, тобто даний кут A лежить проти *більшої* з даних сторін.

На підставі цих даних кут A може бути і гострим і тупим. Щодо кута B, то він, очевидно, може бути тільки гострим.

За теоремою синусів маємо:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

Якщо $a > b$, то й, тим паче, $a > b \sin A$, а тому $\frac{b \sin A}{a} < 1$.

А коли так, то задача завжди можлива незалежно від величини кута A, а через те що кут B може бути тільки гострим, ми маємо для даного випадку *тільки один розв'язок.*

2-й випадок. $a = b$, тобто маємо рівнобедрений трикутник і, очевидно, тільки один.

3-й випадок. $a < b$, тобто даний кут A лежить проти меншої з двох даних сторін. Якщо $a < b$, то $b \sin A$ може бути: або > 1 . . . . (a), або $= 1$ . . . . (b), або < 1 . . . . (c).

Розглянемо кожне припущення окремо.

a) $b \sin A > 1$, тоді $\sin B > 1$, що неможливо, тому і задача буде неможлива.

b) $b \sin A = 1$, тоді $\sin B = 1$, звідси $B = 90^\circ$, тобто виявляється трикутник прямокутний (один).

c) $b \sin A < 1$, тоді $\sin B < 1$, і задача завжди можлива, причому кут B, який лежить проти більшої сторони ($b > a$), може бути і гострим ($\angle ABC$) і тупим ($\llcorner AB'C$). Обидва кути задовольнятимуть нашу задачу (рис. 84). Задача має два розв'язки.

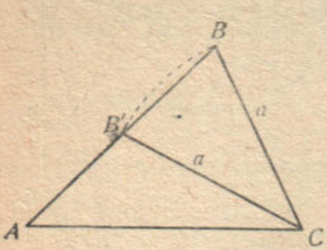

Рис. 84.

Треба зауважити, що сторона c не може впливати на вибір кута B, бо вона сама визначається залежно від цього кута.

Відповідно до двох значень кута B одержимо також по два значення для C і c.

Результати попереднього дослідження цілком збігаються з тим, що дає побудова трикутника за тими самими даними. Справді, для побудови трикутника за даними двома його сторонами і кутом, протилежним одній з них, треба: 1) на довільній прямій AN (рис. 84а), на якій має лежати сторона AB, при точці A, як одній з вершин трикутника, побудувати $\angle A$, рівний даному; 2) на другій стороні цього кута відкласти відрізок AC, рівний b; 3) з точки C другої вершини трикутника, як з центра, радіусом, рівним a, описати дугу; точка перетину її з прямою AN визначить третю вершину B трикутника.

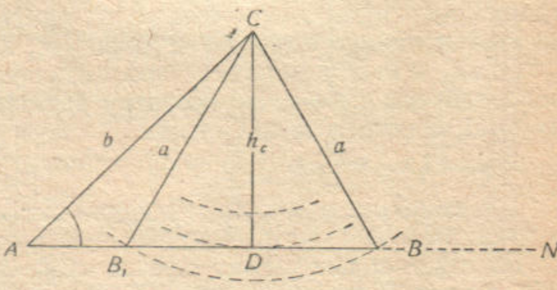

Рис. 81а.

Позначимо довжину перпендикуляра CD, проведеного з вершини C трикутника на пряму AN, через h_c. З трикутника ADC маємо:

$$h_c = b \sin A.$$

З рисунка безпосередньо видно, що:

1) коли $h_c > a$ (тобто $b \sin A > a$, або $\frac{b \sin A}{a} > 1$; $\sin B > 1$) — трикутник неможливий;

2) коли $h_c = a$ ($b \sin A = a$; $\sin B = 1$) — маємо прямокутний трикутник ADC;

3) коли $h_c < a$ ($b \sin A < a$; $\sin B < 1$) — маємо два трикутники, що задовольняють умову задачі: $\triangle ABC$ — гострокутний і $\triangle AB_1C$ — тупокутний.

Отже, на підставі цього дослідження робимо висновок, що ми маємо один розв'язок для косокутного трикутника тоді, коли даний кут лежить проти більшої з двох даних сторін.

Результати повного дослідження дає нам така таблиця:

I	$a > b$	$b \sin A < a$	1 розв.; $B < 90^\circ$
II	$a = b$	$b \sin A < a$	1 розв.; $B = A$
III	$a < b$	$b \sin A > a$	0 розв'язків
		$b \sin A = a$	1 розв.; $B < 90^\circ$
		$b \sin A < a$	2 розв.; $\begin{cases} B < 90^\circ \\ B_1 > 90^\circ \end{cases}$

Приклади (на яких можна простежити всі випадки під час розв'язування трикутника за даними двома його сторонами і за кутом, протилежним одній з них).

Дано:

№ 1 $A = 97^\circ$, $a = 72$, $b = 132$

Розв'язування.

№ 1. Трикутник не існує: кут A, який лежить проти меншої сторони, $> 90^\circ$, тобто тупий, що неможливо.

№ 2 $A = 37^\circ$, $a = 54$, $b = 36$

№ 2. Маємо 1-й випадок. Справді:

$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$, але: $\frac{b}{a} < 1$ (за умовою), $\sin A < 1$; тому,

тим більш, $\frac{b \sin A}{a} < 1$.

Трикутник буде тільки один: $\triangle ABC$ (рис. 85).

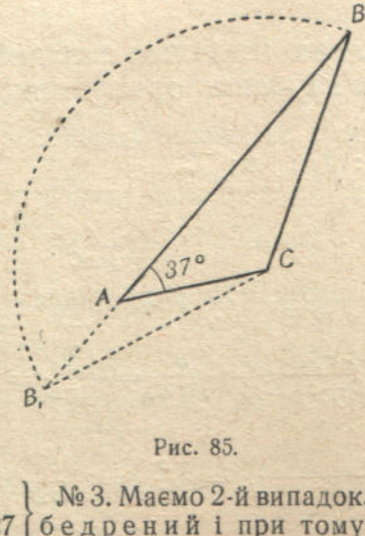

Рис. 85.

№ 3. $A = 70^\circ$, $a = b = 27$

№ 3. Маємо 2-й випадок. Трикутник рівнобедрений і при тому тільки один.

№ 4. $A = 48^\circ 30'$, $a = 48$, $b = 56$

№ 4. Маємо 3-й випадок (a), при чому

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{56 \sin 48^\circ 30'}{48} \approx \frac{7}{8} < 1.$$

Трикутників буде два:

$\triangle ABC$ — гострокутний і $\triangle AB_1C$ — тупокутний (рис. 86).

№ 5. $A = 30^\circ$, $a = 27$, $b = 54$

5. Маємо 3-й випадок (b), при чому

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{54}{27 \cdot 2} = 1.$$

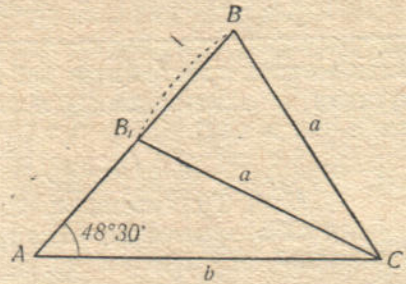

Рис. 86.

Звідси: $B = 90^\circ$.

Трикутник прямокутний і при тому тільки один.

№ 6. $A = 44^\circ 30'$, $a = 30$, $b = 75$

№ 6. Маємо III-й випадок (c), при чому:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{75 \cdot 7}{30 \cdot 10} = \frac{7}{4} > 1.$$

Трикутника не існує.

§ 72. Приклади на більш складні випадки розв'язування трикутників.

Розв'язати трикутник за такими даними:

Приклад 1. Дано: $2p$; B; C.

Розв'язування. За теоремою синусів маємо:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Використовуючи властивість ряду рівних відношень, одержуємо:

$$\frac{a + b + c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

або (§ 55):

$$\frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

звідки:

$$a=\frac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}};\quad b=\frac{p\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}};\quad c=\frac{p\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

Приклад 2. Дано: A; S; h_a.
Розв'язування.

$$S=\frac{h_a^2\sin A}{2\sin B\sin C},$$

звідки:

$$2\sin B\sin C=\frac{h_a^2\sin A}{S}.$$

Розклавши добуток синусів двох різних кутів (§ 51), матимемо:

$$\cos(B-C)-\cos(B+C)=\frac{h_a^2}{S}\sin A,$$

звідки:

$$\cos(B-C)=\frac{h_a^2}{S}\sin A-\cos A;\quad [\cos(B+C)=-\cos A],$$

або:

$$\cos(B-C)=\frac{\sin(A-\varphi)}{\sin\varphi},\text{ де }\frac{h_a^2}{S}=\operatorname{ctg}\varphi.$$

Звідси можемо визначити $B-C$.
Нехай $B-C=n^\circ$.
Тоді окремо кожний кут знаходимо з системи:

$$\left.\begin{aligned} B-C&=n^\circ\\ B+C&=180^\circ-A\end{aligned}\right\}\text{ і т. д.}$$

Приклад 3. Дано: $2p$; h_a; R.
Розв'язування.

1) $bc=2Rh_a$,
2) $a=2R\sin A$,
3) $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$,

або:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-2R\sin A)}{2Rh_a}}.$$

Піднісши до квадрата обидві частини останньої рівності, одержимо:

4) $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p^2}{2Rh_a}-\frac{p\sin A}{h_a}$,

або:

$$\frac{1+\cos A}{2}=\frac{p^2}{2Rh_a}-\frac{p}{h_a}\sin A.$$

Отже, залишається розв'язати рівняння:

$$\frac{2p}{h_a}\sin A+\cos A+1-\frac{p^2}{Rh_a}=0.$$

Ми одержали тригонометричне рівняння. Про розв'язування такого рівняння див. розд. XI.

З цього рівняння визначаємо кут A, що дасть нам змогу визначити a.

Далі застосовуємо формулу Мольвейде:

$$\frac{2p-a}{a}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Звідси визначаємо кути B і C, і задача зводиться до прикладу 1 § 72.

Приклад 4. Дано: a; A; $\frac{b+c}{h_a}=m$.

Розв'язування.

1) $h_a=b\sin C=c\sin B,$

2) $\frac{b+c}{h_a}=\frac{b}{h_a}+\frac{c}{h_a}=m,$

або:

3) $\frac{1}{\sin C}+\frac{1}{\sin B}=m,$

звідки:

4) $\sin B+\sin C=m\sin B\sin C,$

або:

5) $2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\frac{m[\cos(B-C)-\cos(B+C)]}{2},$

або:

6) $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}=m[\cos(B-C)-\cos(B+C)].$

На підставі формули для косинуса подвійного кута маємо:

$$\cos(B-C)=2\cos^2\frac{B-C}{2}-1.$$

Підставивши це значення для $\cos(B-C)$ в останнє рівняння, після деяких перетворень приходимо до такого рівняння:

$$m\cos^2\frac{B-C}{2}-2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}-m\sin^2\frac{A}{2}=0.$$

Визначивши з цього квадратного $\left(\text{відносно }\cos\frac{B-C}{2}\right)$ рівняння різницю кутів B і C і знаючи їх суму $B+C=180^\circ-A$, знаходимо кути B і C.

А далі задача зводиться до прикладу 1 § 72.

Приклад 5. Дано: A; h_a; B.

Приклад 6. Дано: $\frac{a}{b}=m$; $h_a+h_b=n$; S.

Вказівка. $\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}$; далі, використовуючи умови задачі, пишемо похідну пропорцію, з якої визначимо h_a-h_b і т. д.

§ 73. Застосування методу розв'язування трикутників до деяких окремих випадків розв'язування чотирикутників і многокутників.

Кожний многокутник за допомогою діагоналей можна розбити на трикутники, а тому і задачі на розв'язування многокутників зводяться до розв'язування трикутників, тобто до визначення їх елементів, що являються й елементами многокутника, за допомогою всіх формул, які ми маємо в нашому розпорядженні. Усе це, цілком зрозуміло, стосується і до чотирикутників.

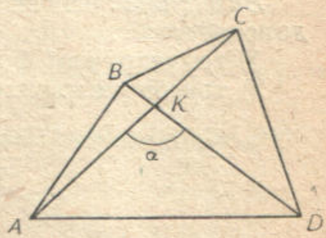

Рис. 87.

Доведемо теорему, на підставі якої площа чотирикутника визначається значно простіше, ніж при поступовому застосуванні формул для площ трикутників, на які завжди можна розбити даний чотирикутник.

***Теорема.** Площа всякого чотирикутника дорівнює півдобуткові його діагоналей на синус кута між ними.*

Дано: діагоналі чотирикутника $ABCD$ (рис. 87), $AC=d_1$, $BD=d_2$ і кут між ними $\angle AKD=\alpha$.

Довести: Площа чотирикутника $S=\frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$.

Позначення: 1) K — точка перетину діагоналей AC і BD; 2) S — площа чотирикутника.

Доведення.

$$S=S_{AKD}+S_{AKB}+S_{BKC}+S_{CKD}=\frac{1}{2}AK\cdot DK\sin\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}AK\cdot KB\sin(180^\circ-\alpha)+\frac{1}{2}KB\cdot KC\sin\alpha+\frac{1}{2}KC\cdot DK\sin(180^\circ-\alpha)=$$

$$=[AK(DK+KB)+KC(KB+DK)]\frac{\sin\alpha}{2}=(AK+KC)(DK+KB)\frac{\sin\alpha}{2},$$

або:

$$\boxed{S=\frac{d_1 d_2\sin\alpha}{2}.} \qquad (23)$$

Задача 1. Дано: Діагональ паралелограма d і два прилеглих до неї кути β і γ (рис. 88).

Визначити: сторони і площу.

Задача 2. Дано: діагональ рівнобедреної трапеції $AC = d$ і два кути α і β, що утворюються цією діагоналлю з основою і бічною стороною (рис. 89).

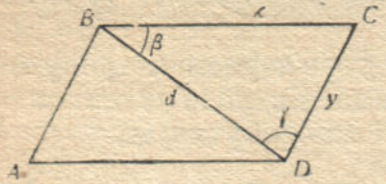

Рис. 88.

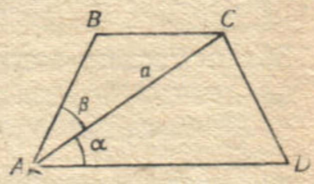

Рис. 89.

Визначити: основи і бічні сторони, а також площу трапеції за допомогою:

1) геометричної формули і
2) тригонометричної формули.

Задача 3. Дано: дві сторони паралелограма a і b і кут φ між діагоналями.

Визначити: площу паралелограма.

Вказівка. Використати теорему косинусів.

Задача 4. Дано: діагональ паралелограма $AC = d$ і кути α і β, що утворюються другою діагоналлю BD (рис. 90).

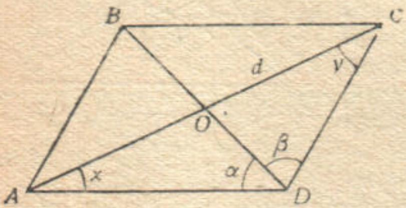

Рис. 90.

Визначити: сторони паралелограма.

Розв'язування.

1) З $\triangle ACD$:

$$x + y = 180^\circ - (\alpha + \beta); \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{\sin y}{\sin x}. \qquad \text{(b)}$$

2) З $\triangle AOD$:

$$\frac{AD}{AO} = \frac{\sin AOD}{\sin \alpha}.$$

3) З $\triangle DOC$:

$$\frac{DC}{OC} = \frac{\sin DOC}{\sin \beta}.$$

Позначення:

$\angle DAC = x$
$\angle ACD = y.$

Нам відомо: $AO = OC$; $\sin AOD = \sin DOC$. Тому, поділивши 2) на 3) матимемо:

4) $$\frac{AD}{DC} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \qquad (c)$$

Порівнюючи (b) і (c), знаходимо:

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Отже, матимемо систему:

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \; x + y = 180^\circ - (\alpha + \beta),$$

з якої визначимо кути x і y, і задача зведеться до розв'язування трикутника (§ 72, 1-й приклад).

Задача 5. Дано: у паралелограмі $ABCD$ менша діагональ $BD = d$ утворює кут α з меншою стороною, а кут між більшою діагоналлю AC і більшою стороною дорівнює β.

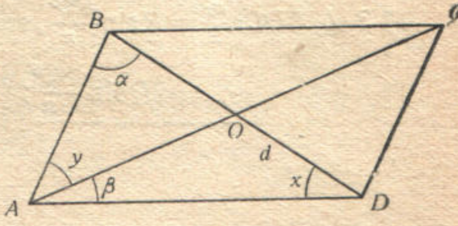

Рис. 91.

Визначити: сторони, більшу діагональ AC і площу S (рис. 91).

Розв'язування.

1) З $\triangle AOB$:

$$\frac{AO}{BO} = \frac{\sin\alpha}{\sin y}.$$

2) З $\triangle AOD$:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{\sin x}{\sin\beta}.$$

З цих двох рівностей маємо ($BO = OD$):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin y} = \frac{\sin x}{\sin\beta},$$

звідки:

$$\sin x \sin y = \sin\alpha \sin\beta.$$

Визначимо суму кутів x і y:

$\angle AOD = 180^\circ - (x + \beta)$ є зовнішнім кутом $\triangle AOB$, тому: $180^\circ - (x + \beta) = \alpha + y$, звідки:

$$x + y = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

Позначення:

$\angle ADB = x$;

$\angle BAC = y$;

O — точка перетину діагоналей AC і BD.

Отже, розв'язавши систему:

$$\left.\begin{array}{l} \sin x \sin y = \sin\alpha \sin\beta \\ x + y = 180^\circ - (\alpha + \beta) \end{array}\right\},$$

визначимо кути x і y. Задача зводиться до прикладу 1 § 72.

Задача 6. Визначити сторону a_n, периметр $2p$ і площу S правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса R (рис. 92).

$$AB = a_n.$$

Дано: $OA = OB = R$; n.

Визначати: a_n; $2p$; S.

Розв'язування.

Нехай $OD \perp AB$, тоді $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$, а $\angle AOD = \frac{180^\circ}{n}$.

1) З $\triangle ADO$: $\frac{a_n}{2} = R \sin \frac{180^\circ}{n}$, звідки:

$$\underline{a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}}; \qquad \underline{2p = 2R \cdot n \sin \frac{180^\circ}{n}}.$$

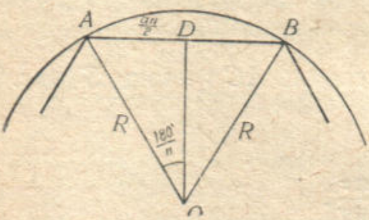

Рис. 92.

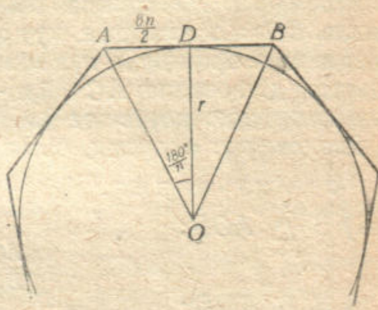

Рис. 93.

2) З $\triangle ADO$: $OD = R \cos \frac{180^\circ}{n}$.

3) $S = 2p \frac{OD}{2}$, або: $\underline{S = \frac{1}{2} R^2 n \sin \frac{360^\circ}{2}}$.

Задача 7. Визначати сторону b_n, периметр $2p$ і площу S правильного n-кутника, описаного навколо круга радіуса r (рис. 93).

Умовні позначення: $AB = b_n$; коли точка D є точкою дотику сторони AB до кола, то $OD = r$.

Дано: r і n.

Визначити: b_n, $2p$, S.

Пропонуємо учням переконатись у тому, що

$$S = r^2 n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Задача 8. Визначити сторону і площу правильного n-кутника, коли менша діагональ його дорівнює d.

Задача 9. У коло вписано два правильних многокутники з числом сторін n і $2n$. Довести, що $\frac{S_n}{S_{2n}} = \cos\frac{180^\circ}{n}$, де S_n означає площу першого, а S_{2n} — площу другого многокутника.

Задача 10. Радіус кола, описаного навколо правильного n-кутника, більший від його сторони на m одиниць. Визначити площу цього n-кутника.

Задача 11. Площа правильного n-кутника дорівнює S кв. одиницям. Визначити радіус описаного кола і площу правильного n-кутника, описаного навколо цього кола.

§ 74. Зразки практичних застосувань розв'язування прямокутних і косокутних трикутників.

Задача 1. Кут зниження горизонту згори дорівнює α. Радіус земної кулі дорівнює r.

Визначити далекість горизонту l и висоту горизонту h (AB) (рис. 94).

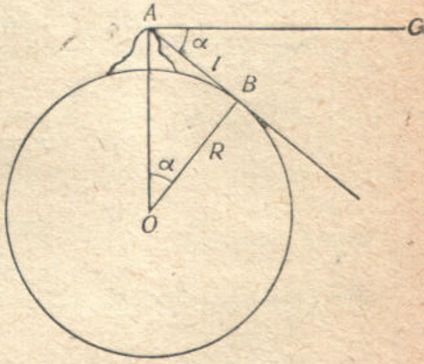

Рис. 94.

Задача 2. З якоїсь точки A (рис. 95) пожежну башту видно під кутом зору α, а основу башти під кутом зниження β. Визначити висоту башти, коли відомо, що точка A знаходиться на віддалі m від поверхні землі (місце рівне).

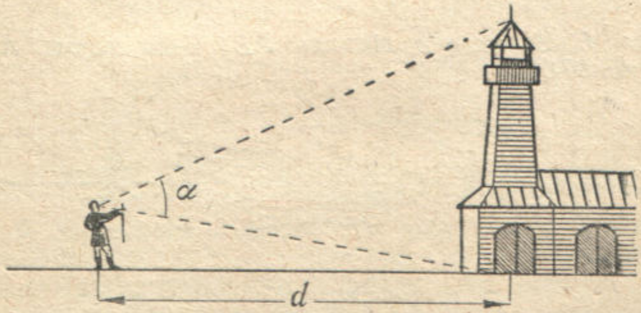

Рис. 95.

Відповідь. $\frac{m \sin\alpha}{\sin\beta\cos(\alpha-\beta)}$.

Задача 3. Визначити радіус земної кулі, коли відомо, що кут i зниження горизонту на висоті $h = 2$ *м* дорівнює $2'44''$.

Дано: $h = 2\,м = \frac{1}{500}\,км$; $i = 2'44''$.

Позначення (рис. 96):

$$AD = h;$$

$$OD = OC = x;$$

$$\angle CAN = \angle AOC = i.$$

Розв'язування (в загальному вигляді). З $\triangle\ ACO$ маємо:

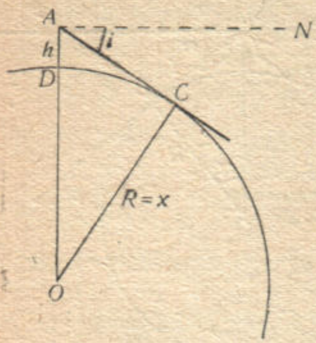

Рис. 96.

$$x = (x + h)\cos i,$$

або

$$x(1 - \cos i) = h \cos i.$$

Звідси:

$$x = \frac{h\cos i}{1 - \cos i} = \frac{h \cos i}{2\sin^2\frac{i}{2}} = \frac{h\cos i}{2\sin\frac{i}{2}\sin\frac{i}{2}};$$ помноживши чисельник і знаменник на $\cos\frac{i}{2}$ $(\cos\frac{i}{2} \neq 0)$, одержимо:

$$x = \frac{h\cos i\cos\frac{i}{2}}{\sin i\sin\frac{i}{2}} = \frac{h}{\operatorname{tg} i\operatorname{tg}\frac{i}{2}}.$$

Відповідь.

$$x = \frac{h^*}{\operatorname{tg} i\ \operatorname{tg}\frac{i}{2}}.$$

Задача 4. Визначити віддаль AB, коли точки A і B приступні (рис. 97).

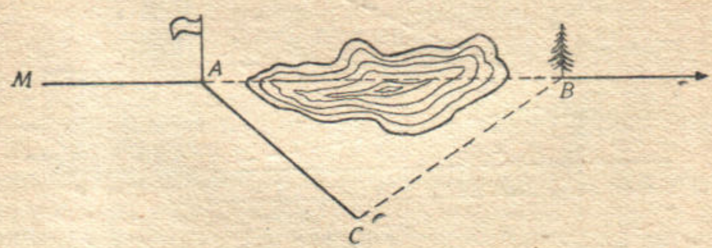

Рис. 97.

Розв'язування. Якщо точок A і B одну з одної не видно, то вибирають таку точку C, з якої було б видно ці дві точки, і вимірюють лінії AC, CB і кут ACB.

* У зв'язку з малим значенням кутів обчислення треба робити, застосовуючи таблиці Деламбра.

Нехай $AC = l_1; CB = l_2$ і $\angle ACB = \alpha$. Тоді AB визначиться як сторона $\triangle\ ACB$.

Задача 5. Визначити віддаль AB, коли точка A приступна, а точка B неприступна (рис. 98).

Рис. 98.

Р о з в' я з у в а н н я. Взявши точку C так, щоб з неї видно було A і B, вимірюють базу AC і кут A і C.

Нехай $AC = l$; $\angle A = \alpha$ і $\angle C = \beta$. Тоді шукана віддаль AB визначиться з $\triangle\ ABC$.

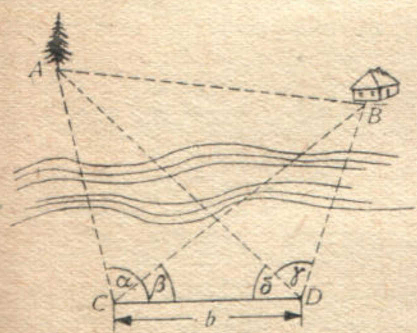

Рис. 99.

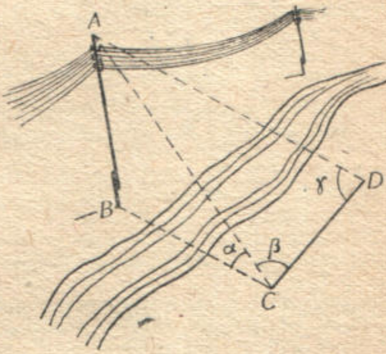

Рис. 100.

Задача 6. Визначити віддаль AB, коли точки A і B неприступні (рис. 99).

Р о в' я з у в а н н я. Вибравши у приступній місцевості точки C і D так, щоб з них видно було A і B, вимірюють базу CD і кути α, β, γ, δ. Нехай $CD = b$. Маємо: $\angle ACB = \alpha - \beta$; з $\triangle\ ACD$ знаходимо: $AC = \frac{b \sin \delta}{\sin(\alpha + \delta)}$. З $\triangle\ ACB$ знаходимо: $BC = \frac{b \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$. AB визначиться з $\triangle\ ACB$.

З а у в а ж е н н я. Слід ще зробити аналогічні обчислення, починаючи з визначення ліній BD і AD і кута ADB, що буде замість контролю для розв'язування задачі.

Задача 7. Визначити висоту AB, коли основа B неприступна (рис. 100).

Розв'язування. Вибравши у приступній місцевості точки C і D так, щоб з них видно було A і B, вимірюють базу CD і кути α, β, γ. Нехай $CD = b$. З $\triangle ACD$ знаходимо:

$$AC = \frac{b \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

З прямокутного $\triangle ABC$ ($\angle ABC = 90^\circ$) визначаємо AB:

$$AB = AC \sin \alpha,$$

або

$$AB = \frac{b \sin \gamma \sin \alpha}{\sin(\beta + \gamma)}.$$