РОЗДІЛ X.

ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ.

§ 75. Поняття про обернені функції взагалі.

Нехай дана функція $y = x^2$. Розв'яжемо це рівняння відносно x, тобто x розглядатимемо як функцію, а y — як аргумент; тоді одержимо так звану обернену функцію $x = \pm\sqrt{y}$. В останній функції над аргументом виконується дія (добування квадратного кореня), обернена до дії (піднесення до квадрата), яка виконується над аргументом x в основній функції $y = x^2$.

Рис. 101.

Коли взяти функцію $y = x^2 + 1$, то оберненою буде функція

$$x = \pm\sqrt{y - 1},$$

а для показникової функції $y = a^x$ обернена функція $x = \lg_a y$.

Взагалі, коли y — яка завгодно функція від x, тобто $y = f(x)$, то функція $x = \varphi(y)$, яку ми одержимо, розв'язавши дане рівняння відносно x (або переставивши аргумент на місце функції і, навпаки, функцію на місце аргумента), є функція, обернена до даної функції $f(x)$. Зовсім не має значення, як позначити аргумент оберненої функції (через x чи через y). Уся справа в формі самої функції. А тому за функцію, обернену до x^2, можна вважати $\pm\sqrt{x}$, а за функцію, обернену до $x^2 + 1$, функцію $\pm\sqrt{x - 1}$.

Коли зобразити графічно зміну даної функції, то на цьому графіку можна простежити і за зміною оберненої функції.

Нехай маємо функцію $y = x^2$ і обернену до неї $\pm\sqrt{y}$. Будуємо графік першої з них (рис. 101).

З рисунка бачимо, як змінюється y залежно від зміни x.

Тут ми маємо справу з однозначною функцією, бо кожному значенню x відповідає одне значення функції, в чому легко переконатися, ставлячи до осі X-ів у точках з різними абсцисами перпендикуляри, кожний з яких перетинає криву в одній точці.

Ордината цієї точки, як відомо, і є значення функції, відповідне даному значенню абсциси, тобто x.

Навпаки, надаючи ординаті y довільних значень, тобто розглядаючи y як аргумент функції x, ми можемо скласти уявлення, як змінюється функція $x = \pm\sqrt{y}$ залежно від зміни y. Для цього через точки на осі Y-ів з різними ординатами проводимо прямі, перпендикулярні до осі Y-ів (тобто паралельні до осі абсцис), кожна з яких перетне криву в двох точках. Абсциси цих точок і є значення x, відповідні даному значенню y. Через те що кожному значенню аргумента y відповідає більш ніж одне значення функції, ця функція має назву многозначної.

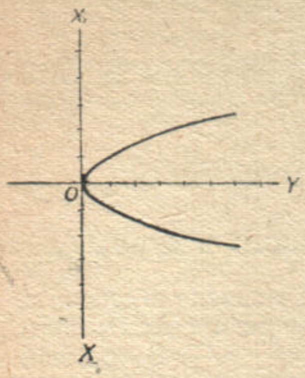

Рис. 102.

Коли б треба було побудувати графік оберненої функції, назвавши аргумент через x так само, як і в основній функції, тобто побудувати окремий графік функції $\pm\sqrt{x}$, тоді слід було б зробити так.

Усю систему координат разом з графіком функції $y = x^2$ повернути на кут 90° у напрямі руху годинникової стрілки навколо початку координат (рис. 102) і потім одержану нову систему разом з графіком повернути на кут 180° навколо горизонтальної осі.

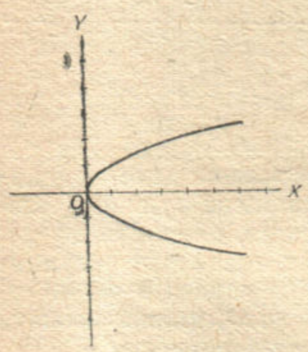

Рис. 103.

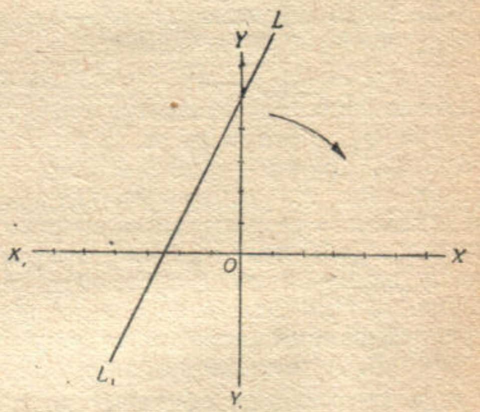

Рис. 104.

У даному окремому випадку від повороту на 180° положення кривої не зміниться (бо ця крива симетрична відносно цієї осі координат), а зміниться тільки положення OX і OX_1.

Змінивши назву осей, одержимо остаточно такий графік функції (рис. 103).

Візьмемо, наприклад, ще функцію $y = 2x + 5$. Графік її (рис. 104) є пряма LL_1.

Щоб утворити графік оберненої функції $y=\frac{x-5}{2}$, або $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$, робимо спочатку поворот навколо точки O в напрямі, показаному стрілкою, на кут у 90°, тоді LL_1 прийме положення таке, як на рис. 105.

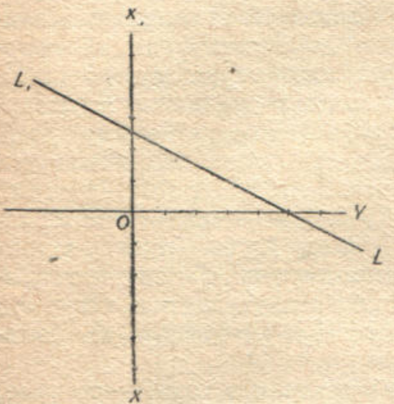

Рис. 105.

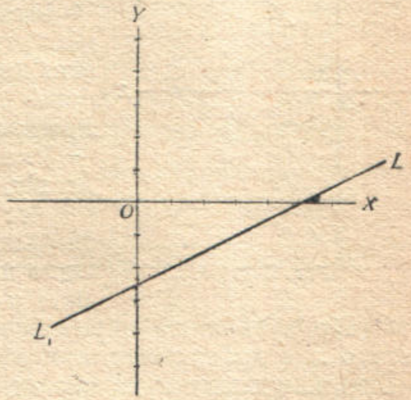

Рис. 106.

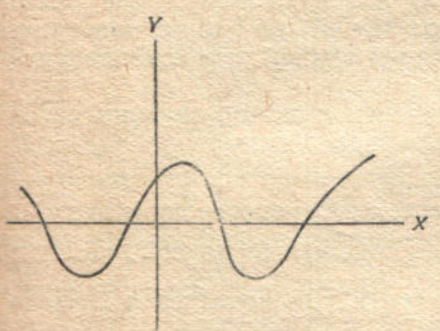

Рис. 107.

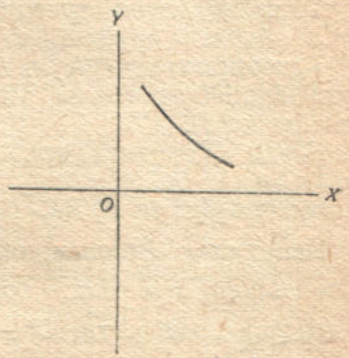

Рис. 108.

А далі обертаємо систему разом з графіком функції навколо горизонтальної осі на кут 180°—і, змінивши назву осей, остаточно одержуємо графік оберненої функції (рис. 106).

Тут як дана функція, так і обернена є функції однозначні.

Коли б графік прямої функції був такий, як на рис. 107, то, очевидно, дана функція була б однозначна, а обернена до неї — многозначна.

Треба відзначити, що коли при розгляді оберненої функції обмежитися таким інтервалом, де *пряма функція монотонна* (тобто разом з збільшенням аргумента або ввесь час зростає, або ввесь час спадає), то *обернена функція — обов'язково однозначна.* Це легко побачити з рисунків (108 і 109).

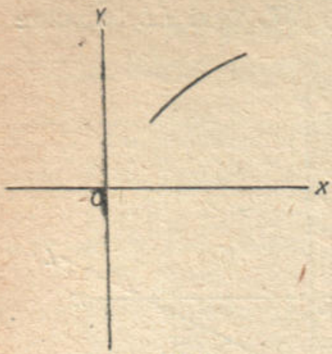

Рис. 109.

§ 76. Поняття про обернені тригонометричні функції.

Відносно операцій знаходження значень тригонометричних функцій, *оберненими операціями будуть знаходження кутів за даними значеннями тригонометричних функцій.*

Умовимось ці операції позначати Arc sin, Arc cos, Arc tg, Arc ctg, і т. д., де Arc означає скорочений запис латинського слова Arcus (дуга), відповідна шуканому кутові. Отже, коли рівність $y = \sin x$ показує, що y є синус від кута (або дуги) x, то рівність $x = \operatorname{Arc\,sin} y$ (Арксинус y) показує, що x є дуга, синус якої дорівнює y.

Оскільки синус кута (як ми його будували в крузі) — те саме, що й синус відповідної дуги, то під $\operatorname{Arc\,sin} y$ розумітимемо кут, синус якого дорівнює y.

Аналогічно, $\operatorname{Arc\,cos} y$ є кут, косинус якого дорівнює y, і т. д.

Отже, відносно тригонометричних функцій $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ обернені функції є $\operatorname{Arc\,sin} x$, $\operatorname{Arc\,cos} x$, $\operatorname{Arc\,tg} x$, $\operatorname{Arc\,ctg} x$...

Тригонометричні функції однозначні (бо одному значенню кута відповідає тільки одне значення кожної з тригонометричних функцій).

Щодо обернених тригонометричних функцій, то вони многозначні, бо кожному значенню тригонометричної функції відповідає безліч кутів.

Наприклад. $\operatorname{Arc\,sin} \frac{1}{2}$ означає кут, синус якого дорівнює $\frac{1}{2}$. Для синуса в межах першого періоду (від 0° до 360°, або від 0 до 2π) є два кути $30° \left(\frac{\pi}{6}\right)$ і $150° \left(\frac{5}{6}\pi\right)$, які мають синус, рівний $\frac{1}{2}$, а, маючи на увазі періодичність синуса, можна одержати безліч кутів з синусом, рівним $\frac{1}{2}$, додаючи до згаданих вище двох кутів або віднімаючи від них ціле число разів по 360°, або по 2π рад. од.

Аналогічно, $\operatorname{Arc\,tg} 1$ є кут, тангенс якого дорівнює 1. У межах першого періоду для тангенса (а саме від 0° до 180°, або від 0 до π) є один кут $45° \left(\frac{\pi}{4}\right)$, який має тангенс, рівний 1, але, враховуючи періодичність тангенса, можна так само одержати безліч кутів з тангенсом, рівним 1, додаючи до кута $45° \left(\frac{\pi}{4}\right)$

або віднімаючи від нього ціле число разів по 180°, або по π радіанних одиниць.

Цю многозначність обернених тригонометричних функцій можна бачити з графіків синуса, косинуса, тангенса і котангенса або з спеціально побудованих графіків обернених функцій.

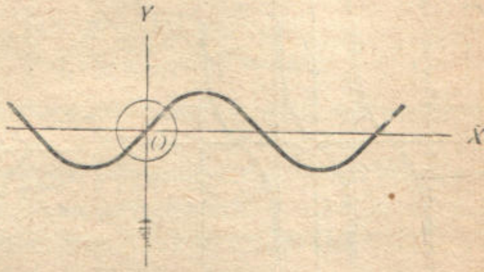

Рис. 110.

Справді, побудувавши графіки функцій $y = \sin x$ (рис. 110) і $y = \cos x$ (рис. 111), ми помічаємо, що прямі, перпендикулярні до осі Y-ів і проведені через точки на осі Y-ів з різними ординатами в інтервалі $(-1, 1)$, зустрінуть криву в безлічі точок, тобто кожному значенню y (синуса або косинуса) відповідатиме безліч значень для x, тобто безліч кутів.

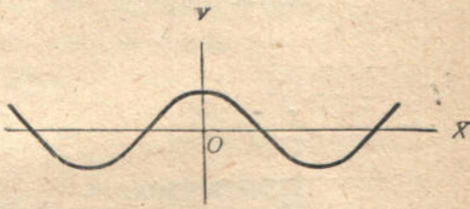

Рис. 111.

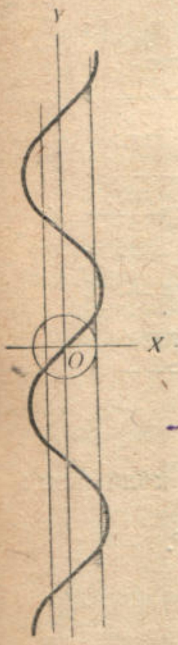

Рис. 112.

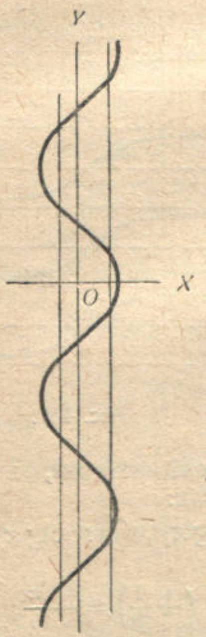

Рис. 113.

Те саме можна виявити і з спеціально побудованих графіків (рис. 112—113).

У цьому ж можна переконатися і щодо обернених тригонометричних функцій $\mathrm{Arc\,tg}\,x$ і $\mathrm{Arc\,ctg}\,x$, розглядаючи спочатку графіки функцій $\mathrm{tg}\,x$ і $\mathrm{ctg}\,x$ (рис. 114 і 115), а потім — графіки $\mathrm{Arc\,tg}\,x$ і $\mathrm{Arc\,ctg}\,x$ (рис. 116 і 117).

Для кожної з обернених тригонометричних функцій існує безліч інтервалів, де ці функції неперервні і однозначні. Напр. для $\mathrm{Arc\,sin}\,x$ за такі інтервали можна взяти інтервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ і т. д., а для $\mathrm{Arc\,cos}\,x$ — інтервали $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ і т. д. (Це можна побачити з графіків.) Умовимося називати головним з таких інтервалів для $\mathrm{Arc\,sin}\,x$ і $\mathrm{Arc\,tg}\,x$ інтервал $\left(-\frac{\text{н}}{2}, \frac{\text{н}}{2}\right)$ а для $\mathrm{Arc\,cos}\,x$ і $\mathrm{Arc\,ctg}\,x$ — інтервал $(0, \pi)$.

Умовимось також обернені тригонометричні функції в цих інтервалах позначати arc sin x, arc cos x, arc tg x, arc ctg x (запи-

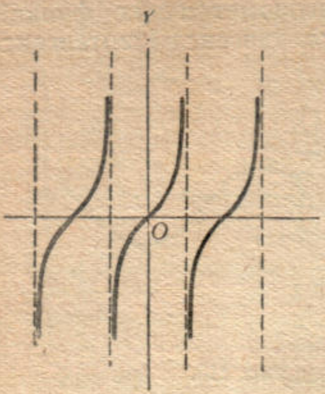

Рис. 114.

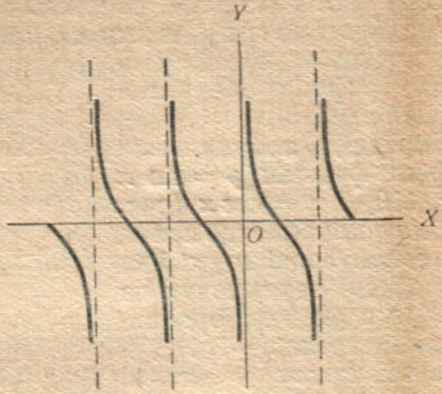

Рис. 115.

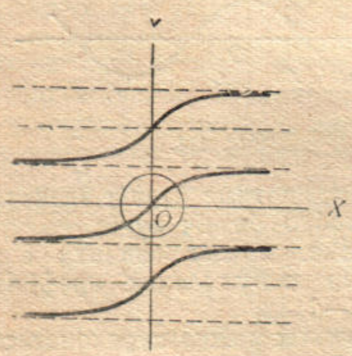

Рис. 116.

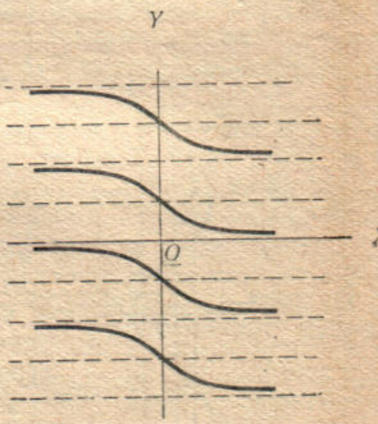

Рис. 117.

сувати назву їх, починаючи з малої літери), а коли вони визначені в градусах—позначити їх так:

$$(\operatorname{arc\,sin} x)^\circ,\ (\operatorname{arc\,cos} x)^\circ,\ (\operatorname{arc\,tg} x)^\circ,\ (\operatorname{arc\,ctg} x)^\circ.$$

Наведемо приклади.

$$\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6};\quad \operatorname{arc\,sin}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6};$$

$$\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4};\quad \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\pi}{4};$$

$$\operatorname{arc\,tg} 1=\frac{\pi}{4};\quad \operatorname{arc\,tg}(-1)=-\frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6};\quad \operatorname{arc\,ctg}(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6}.$$

$$\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)^{\circ}=30^{\circ};\quad \left[\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{\circ}=-30^{\circ};$$

$$\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\circ}=45^{\circ};\quad \left[\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^{\circ}=135^{\circ};$$

$$(\operatorname{arc\,tg} 1)^{\circ}=45^{\circ};\quad [\operatorname{arc\,tg}(-1)]^{\circ}=-45^{\circ};$$

$$(\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3})^{\circ}=30^{\circ};\quad [\operatorname{arc\,ctg}(-\sqrt{3})]^{\circ}=150^{\circ}.$$

Треба, щоб учні ясно зрозуміли різницю між оберненими функціями взагалі (взятими без жодних обмежень), а саме: $\operatorname{Arc\,sin} x$, $\operatorname{Arc\,cos} x$, $\operatorname{Arc\,tg} x$, $\operatorname{Arc\,ctg} x$, і функціями $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$, взятими в певних інтервалах.

Треба також ясно зрозуміти зміст таких операцій.

$$\sin(\arcsin a)=a;\quad \cos(\arccos a)=a;$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} a)=a;\quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} a)=a.$$
$$\sin(\operatorname{Arc\,sin} a)=a;\quad \cos(\operatorname{Arc\,cos} a)=a;$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arc\,tg} a)=a;\quad \operatorname{ctg}(\operatorname{Arc\,ctg} a)=a.$$

Можна показати, що рівності

$$\left.\begin{array}{r}\arcsin(\sin\alpha)=\alpha\\ \arccos(\cos\alpha)=\alpha\\ \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\alpha)=\alpha\\ \operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg}\alpha)=\alpha\end{array}\right\}\text{ не завжди вірні,}$$

бо $\arcsin$, $\arccos$, $\operatorname{arc\,tg}$, $\operatorname{arc\,ctg}$ містяться в певних інтервалах, а α може лежати поза межами цих інтервалів.

Наведемо приклад.

Покажемо, що рівність

$$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5}{6}\pi$$

несправедлива.

Справді: $$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

а тому $$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

Отже,

$$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)\text{ дорівнює }\frac{\pi}{6}\text{, а не }\frac{5}{6}\pi.$$

А якщо написати замість $\arcsin\left(\sin\frac{5}{6}\pi\right)$ $\operatorname{Arc\,sin}\left(\sin\frac{5}{6}\pi\right)$, тоді одержимо многозначну відповідь.

На підставі того, що буде доведено в наступному параграфі,

$$\operatorname{Arc\,sin}\left(\sin\frac{5}{6}\pi\right)=\pi m+(-1)^{m}\frac{5}{6}\pi.$$

§ 77. Загальні формули для всіх кутів, відповідних даним значенням тригонометричних функцій.

Кожному значенню тригонометричної функції відповідає, як відомо, безліч кутів.

Виведемо загальні формули для всіх кутів, відповідних даним значенням тригонометричних функцій.

1. Почнемо з синуса.

Припустимо, що $\sin x = l$, де $-1 \leqslant l \leqslant 1$. Визначити x — те саме, що визначити $\operatorname{Arc}\sin l$. Нехай знайдено для x одне значення, наприклад x_0 в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тобто $x_0 = \arcsin l$. У межах від 0 до 2π є ще кут $\pi - x_0$, який має той самий синус. Через те що синус є функція періодична — з періодом 2π, то, додавши до кутів x_0 і $\pi - x_0$ кут $2\pi k$, де k — яке завгодно ціле (додатне або від'ємне) число або нуль, ми одержимо дві формули для кутів, які відповідають умові, а саме:

$$x = x_0 + 2\pi k \quad \text{і} \quad x = \pi - x_0 + 2\pi k.$$

Другий вираз можна переписати так:

$$\pi(2k+1) - x_0.$$

Отже, маємо дві формули:

$$x = 2\pi k + x_0 \quad \text{і} \quad x = \pi(2k+1) - x_0.$$

Виходить, що коли у π коефіцієнт $2k$ (парне число), то перед x_0 стоїть знак $+$ (плюс), а коли у π коефіцієнт $2k+1$ (непарне число), то перед x_0 стоїть знак $-$ (мінус).

Урахувавши це, дві формули можна об'єднати в одну, а саме:

$$\boxed{x = \pi m + (-1)^m x_0,} \tag{1}$$

або

$$x = 180° m + (-1)^m x_0°.$$

(Справді, коли m — парне число $2k$, то $(-1)^{2k} = +1$, і ми маємо першу з двох формул. А коли m — непарне число $2k+1$, то $(-1)^{2k+1} = -1$, і ми одержимо другу формулу.)

Очевидно, з рівняння $\sin x = 0$, $x = \pi m$, або $x = 180° m$.

З а у в а ж е н н я. Якщо за x_0 в формулі (1) взяти не $\arcsin l$, а який завгодно кут, для якого синус дорівнює l, то на підставі аналогічних міркувань можна переконатися, що формула (1) залишиться в силі.

Приклад. $\operatorname{Sin} x = \frac{1}{2}$. *Визначити x.*

Р о з в'я з у в а н н я. Знаходимо один кут, який відповідає умові, а саме $\frac{\pi}{6}$. Тоді загальна формула для всіх кутів буде така:

$$x = \pi m + (-1)^m \frac{\pi}{6},$$

або

$$x = 180° m + (-1)^m 30°.$$

2. Переходимо до косинуса.

Нехай $\cos x = l$, де $-1 \leqslant l \leqslant 1$. Визначити x—те саме, що визначити $\operatorname{Arc}\cos l$. Знаходимо в інтервалі $(0, \pi)$ кут x_0 з косинусом, рівним l. В інтервалі $(0, 2\pi)$ є ще кут $2\pi - x_0$, що має той самий косинус.

Через те що косинус — функція періодична, з періодом 2π (360°), то, додавши до кутів x_0 і $2\pi - x_0$ кут $2m\pi$, де m — яке завгодно ціле число (додатне чи від'ємне) або нуль, ми одержимо формули для всіх кутів, що мають косинус, рівний l.

Напишемо ці формули:

$$2m\pi + x_0 \quad \text{і} \quad 2m\pi + 2\pi - x_0.$$

Другий вираз перепишемо так:

$$(2m + 2)\pi - x_0.$$

Отже, і в першому і в другому виразі коефіцієнт при π парне число.

Позначивши його через $2k$, ми матимемо замість двох формул — одну:

$$\boxed{x = 2k\pi \pm x_0}\,[1], \qquad (2)$$

або в градусах

$$x = 360^\circ k \pm x_0^\circ,$$

де k — яке завгодно ціле число або нуль.

В окремому випадку, коли $l = 0$, $\cos x = 0$, косинусові, рівному нулеві, як відомо, відповідають кути $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$ і т. д., тобто непарне число разів по $\frac{\pi}{2}$, або по 90°. В цьому випадку $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, або $x = (2k + 1)\,90^\circ$.

Приклад. $\operatorname{Cos} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Визначити x, тобто $\operatorname{Arc}\cos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Розв'язування.

В інтервалі $(0, \pi)$ є кут з таким косинусом, а саме $\frac{3}{4}\pi$ (135°), а тому $x = 2k\pi \pm \frac{3}{4}\pi$, або в градусах: $x = k\,360^\circ \pm 135^\circ$.

Підставляючи замість k числа 0, 1, 2, 3..., а також —1, —2, —3..., можна одержати безліч кутів.

Коли б x за умовою підлягав обмеженню, наприклад був би кутом трикутника, то ми мали б для нього тільки одне значення, а саме: $x = \frac{3}{4}\pi$, або $x = 135^\circ$.

---

[1] Щоб не повторюватись, умовимося надалі в усіх загальних формулах під буквами m і k розуміти числа цілі або нуль і вважати формули вірними і тоді, коли x_0 — який завгодно кут, відповідний умові.

3. Дано $\operatorname{tg} x = l$, де $-\infty \leqslant l \leqslant \infty$. Нехай x_0 — значення для x в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. На підставі того, що період для тангенса дорівнює π радіанних одиниць, або 180°, маємо таку загальну формулу для x:

$$\boxed{x = m\pi + x_0,} \tag{3}$$

або

$$x = m\,180^\circ + x_0^\circ.$$

В окремому випадку, коли $l = 0$, з умови $\operatorname{tg} x = 0$, маємо:

$$x = m\pi, \quad \text{або} \quad x = m\,180^\circ.$$

Приклад. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Визначити x.

Відповідь. $x = m\pi - \frac{\pi}{3}$, або $x = m\,180^\circ - 60^\circ$.

4. З рівняння $\operatorname{ctg} x = l$, де $-\infty \leqslant l \leqslant \infty$, на підставі аналогічних міркувань (як і для тангенса) маємо:

$$\boxed{x = m\pi + x_0,} \tag{4}$$

або

$$x = m180^\circ + x_0^\circ.$$

А якщо $\operatorname{ctg} x = 0$, то $x = m\pi$, або $x = m180^\circ$.

Приклад. $\operatorname{Ctg} x = 2$.

Визначити x.

Відповідь. $x = m\,180^\circ + 26^\circ\,30'$, де $26^\circ\,30' = \operatorname{arc\,ctg} 2$.

§ 78. Обернені тригонометричні функції від аргумента $(-x)$.

Розглянемо функції $\arcsin(-x)$, $\arccos(-x)$, $\operatorname{arc\,tg}(-x)$, $\operatorname{arc\,ctg}(-x)$...

Перша і третя функції, а саме, $\arcsin(-x)$ і $\operatorname{arc\,tg}(-x)$ є кути в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тобто ці кути можуть бути і додатні і від'ємні.

А нам відомо (§ 18), що від зміни знака синуса або тангенса знак у кута змінюється на обернений.

А тому, коли $\arcsin(-x) = \alpha$, то $\arcsin x = -\alpha$.

Звідси: $\alpha = -\arcsin x$,

або

$$\boxed{\arcsin(-x) = -\arcsin x.} \tag{1}$$

Аналогічно:

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x.} \qquad (2)$$

Щодо $\arccos(-x)$ і $\operatorname{arc\,ctg}(-x)$, то це кути в інтервалі $(0, \pi)$, тобто додатні кути, що закінчуються в I або II чверті.

На підставі відомих формул зведення, а саме:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x$$

ми робимо висновок, що для кутів в інтервалі $(0, \pi)$, коли у косинуса або у котангенса кута α змінити знак на супротивний, то кут α заміниться кутом $\pi - \alpha$.

Маючи це на увазі і припустивши, що $\arccos(-x) = \alpha$, пишемо: $\arccos x = \pi - \alpha$.

Звідси: $\alpha = \pi - \arccos x$,

або

$$\boxed{\arccos(-x) = \pi - \arccos x.} \qquad (3)$$

Аналогічно:

$$\boxed{\operatorname{arc\,ctg}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,ctg} x.} \qquad (4)$$

§ 79. Співвідношення між оберненими тригонометричними функціями.

Обернені тригонометричні функції $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ і $\operatorname{arc\,ctg} x$ є кути, обмежені, як відомо, певними інтервалами, а саме:

$\arcsin x$ і $\operatorname{arc\,tg} x$ інтервалом $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

а

$\arccos x$ і $\operatorname{arc\,ctg} x$ — інтервалом $(0, \pi)$.

I. Розглянемо той випадок, коли $x > 0$.

Нехай $\arcsin x = \alpha$.

Звідси: $\sin \alpha = x$, а $\cos \alpha = \sqrt{1 - x^2}$.

Отже,

$$\alpha = \arccos \sqrt{1 - x^2}.$$

Далі:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x};$$

$$\alpha = \operatorname{arc\,ctg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

В к а з і в к а. Ураховуючи межі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ для кута α або для $\arcsin x$, можна зробити висновок, що при $x>0$ кути закінчуються в I чверті, і всі значення тригонометричних функцій додатні; тому у виразі для $\cos\alpha$ ми не ставимо подвійного знака, а обмежуємось тільки арифметичним значенням кореня.

Прирівнявши всі значення для α, маємо:

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}. \qquad [I_1]$$

Аналогічно можна вивести:

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad [I_2]$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \qquad [I_3]$$

$$\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \qquad [I_4]$$

(I).

II. Випадок $x<0$

У цьому випадку в доведених формулах треба зробити деякі зміни.

1. Нехай $\arcsin x = \alpha$, де $x<0$.

Припустивши, що $x=-y$, пишемо:

$$\alpha = \arcsin x = \arcsin(-y) = -\arcsin y.$$

Оскільки $y>0$, застосовуючи першу формулу з групи (I), тобто (I_1), пишемо:

$$\arcsin x = -\arccos\sqrt{1-y^2} = -\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = -\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Замінимо y на $-x$, тоді:

$$\arcsin x = -\arccos\sqrt{1-x^2} = -\operatorname{arctg}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{-x}.$$

Використовуючи формули попереднього параграфу, одержимо:

$$\arcsin x = -\arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\left(\pi - \operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right),$$

або остаточно:

$$\boxed{\begin{aligned}\arcsin x &= -\arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi.\end{aligned}} \qquad (\mathrm{II}_1)$$

2. Перейдемо до $\arccos x$.

$$\arccos x = \arccos(-y) = \pi - \arccos y.$$

Через те що $y > 0$, застосовуємо другу формулу з групи (I), тобто формулу (I_2), тоді матимемо:

$$\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1-y^2} = \pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} =$$

$$= \pi - \operatorname{arc\,ctg}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

або, замінивши y на $-x$, маємо:

$$\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2} = \pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{-x} =$$

$$= \pi - \operatorname{arc\,ctg}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2} = \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} =$$

$$= \pi - \left(\pi - \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

що остаточно дає:

$$\boxed{\begin{aligned}\arccos x &= \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2} = \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \\ &= \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}} \qquad (\mathrm{II}_2)$$

3. $\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg}(-y) = -\operatorname{arc\,tg} y.$

На підставі формули (I_3) групи (I) для $\operatorname{arc\,tg} y\ (y > 0)$ одержимо:

$$\operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{y} = -\arcsin\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Підставляємо $-x$ замість y, тоді:

$$\operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{-x} = -\arcsin\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} = -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

або, використовуючи формули попереднього параграфу, маємо:

$$\operatorname{arc\,tg} x = -\left(\pi - \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}\right) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

або остаточно:

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x} - \pi = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.} \qquad (\mathrm{II}_3)$$

4. $\operatorname{arc\,ctg} x = \operatorname{arc\,ctg}(-y) = \pi - \operatorname{arc\,ctg} y$.

Застосовуємо формули (I_4) групи (I) для $\operatorname{arc\,ctg} y$; тоді:

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y} = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \pi - \arccos\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Заміняємо y на $-x$:

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \pi - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{-x}\right) = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \pi - \arccos\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Звідси на підставі формули попереднього параграфу одержимо:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{arc\,ctg} x &= \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} =\\ &= \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}} \qquad (\mathrm{II}_4)$$

Отже, маємо таку групу формул для випадку $x<0$:

$$\boxed{\begin{aligned}
\arcsin x &= -\arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =\\
&= \operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi;\\
\arccos x &= \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2} = \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} =\\
&= \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};\\
\operatorname{arc\,tg} x &= \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x} - \pi = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =\\
&= -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};\\
\operatorname{arc\,ctg} x &= \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} =\\
&= \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}} \qquad (\mathrm{II})$$

Щоб перейти від формул групи (I) для $x>0$ до формул групи (II) для $x<0$, треба залишити без змін:

у формулі для arc sin x — вираз для arc tg . . . . .
у формулі для arc tg x — вираз для arc sin . . . . .
у формулі для arc cos x — вираз для arc ctg . . . . .
у формулі для arc ctg x — вираз для arc cos . . . . .

Щодо інших обернених функцій, то в кожному ряді рівних обернених функцій треба:

$$\text{замість}\ \left|\begin{array}{l}\operatorname{arc\,cos} \\ \operatorname{arc\,sin} \\ \operatorname{arc\,tg} \\ \operatorname{arc\,ctg}\end{array}\right. \qquad \text{написати}\ \left|\begin{array}{l}-\operatorname{arc\,cos} \\ \pi-\operatorname{arc\,sin} \\ \pi+\operatorname{arc\,tg} \\ \operatorname{arc\,ctg} x-\pi\end{array}\right.$$

З а у в а ж е н н я. Можна для скорочення часу перехід від формул I до формул II зробити й інакше. Припустимо, що перед очима учнів на дошці написано формули I.

Легко пояснити учням несправедливість цих формул для випадку $x<0$.

Починаємо з першого рядка.

При $x<0$

$$\sqrt{1-x^2}>0, \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}<0 \ \text{ і } \ \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}<0.$$

На підставі умови щодо інтервалів для обернених тригонометричних функцій (§ 76) робимо висновок, що при $x<0$

$\operatorname{arc\,sin} x$ міститься в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$,

$\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2}$ „ в інтервалі $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$,

$\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ „ в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$,

$\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ „ в інтервалі $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

Щоб встановити відповідність між інтервалами для кутів і зробити тим самим формули справедливими, треба: 1) перед $\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2}$ поставити знак —, маючи на увазі, що косинус не змінюється від зміни знака у кута; 2) замість

$$\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

написати

$$\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\pi,$$

ураховуючи те, що котангенс, як функція періодична (з періодом π), не змінюється, коли від кута відняти π радіанних одиниць.

На підставі аналогічних міркувань учні зможуть виправити і всі інші формули в 2-му, 3-му і 4-му рядках і, значить, від формули I перейти до формули II.

§ 80. Сума арксинусів.

I. Нехай дано: $\arcsin x + \arcsin y$.

Припустивши, що $\arcsin x = u$, $\arcsin y = v$, матимемо:

$$\sin u = x; \ \sin v = y.$$

Через те що $\arcsin x$ і $\arcsin y$ (тобто кути u і v) обмежені інтервалами $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, косинуси їх додатні, а тому

$$\cos u = +\sqrt{1-x^2}, \ \cos v = +\sqrt{1-y^2}.$$

На підставі відомої формули

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$$

пишемо:

$$\sin(u+v) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}. \qquad \text{(K)}$$

Якщо $(u+v) \leqslant \frac{\pi}{2}$, тобто $u+v$ міститься в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, можна з останньої рівності одержати:

$$u+v = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \text{ тобто}$$

$$\boxed{\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).} \qquad (\mathrm{III}_1)$$

Формула (III_1), як ми бачимо, вірна тільки при умові $[u+v] \leqslant \frac{\pi}{2}$ (A)

Подивимось, при яких значеннях аргументів x і y ця умова виконується.

1) Нехай x і y різних знаків, тобто $x>0$ і $y<0$, або, навпаки, $x<0$, а $y>0$.

Тоді один з кутів ($\arcsin x$ або $\arcsin y$) додатний і міститься в інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, а другий — від'ємний і міститься в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Очевидно, для такого випадку завжди справедлива умова (A), а коли так, то треба застосувати формулу (III_1).

2) Припустимо, що x і y однакових знаків:

$$\text{a) } x>0 \ \text{ і } \ y>0$$

або

$$\text{b) } x<0 \ \text{ і } \ y<0.$$

У цих випадках можна застосувати формулу (III_1) тільки тоді, коли виконана умова (A).

a) Подивимось, як можна переписати умову (A) для випадку

$$x>0 \quad \text{і} \quad y>0.$$

У цьому випадку, очевидно, $u>0$ і $v>0$, а тому умову (A) можна переписати так:

$$0\leqslant u+v\leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Звідси:

$$u\leqslant \frac{\pi}{2}-v,$$

а тому

$$\sin u\leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2}-v\right),$$

або

$$\sin u\leqslant \cos v;$$

але

$$\sin u\leqslant \sqrt{1-\sin^2 v},$$

тоді

$$x\leqslant \sqrt{1-y^2}.$$

Оскільки перша й друга частини цієї нерівності — числа додатні, пишемо:

$$x^2\leqslant 1-y^2,$$

або

$$\boxed{x^2+y^2\leqslant 1.} \qquad (A_1)$$

Отже, умова (A) перетворилась в умову (A_1).

b) Подивимось, як перепишеться умова (A) для випадку

$$x<0 \quad \text{і} \quad y<0.$$

Кути u і v тоді, очевидно, від'ємні, з яких кожний лежить в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$, а тому для цього випадку замість нерівності $(u+v)\leqslant\frac{\pi}{2}$ можна написати:

$$u+v\geqslant -\frac{\pi}{2},$$

звідки:

$$-u-v\leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$-u\leqslant \frac{\pi}{2}+v,$$

$$\sin(-u)\leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2}+v\right),$$

$$-\sin u\leqslant \cos v,$$

або

$$-x\leqslant \sqrt{1-y^2}.$$

Обидві частини одержаної нерівності додатні, а тому, піднісши їх до квадрата, матимемо:

$$x^2 \leqslant 1 - y^2,$$

або

$$x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Отже, в обох випадках умова (А) замінена умовою (А$_1$).

Таким чином, використати формулу (III$_1$) для суми арксинусів можна у таких випадках:

1) завжди, коли x і y різних знаків;

2) коли x і y однакових знаків і тільки при наявності умови $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

II. Припустимо тепер, що x і y однакових знаків, але умову (А) не виконано, а замінено такою:

$$|u + v| > \frac{\pi}{2}. \tag{B}$$

Тут можна розглядати такі випадки:

1) $x > 0$ і $y > 0$;

2) $x < 0$ і $y < 0$.

В обох цих випадках, очевидно, замість нерівності (В) можна взяти

$$|u| + |v| > \frac{\pi}{2},$$

звідки

$$|u| > \frac{\pi}{2} - |v|;$$

а тому

$$\sin|u| > \sin\left(\frac{\pi}{2} - |v|\right),$$

тобто

$$\sin|u| > \cos v,$$

$$|x| > \sqrt{1 - y^2},$$

або

$$x^2 > 1 - y^2.$$

Звідси:

$$\boxed{x^2 + y^2 > 1.} \tag{B$_1$}$$

Бачимо, що нерівність (В) перетворилась у нерівність (В$_1$).

1. Покажемо, якою формулою треба користуватися для суми арксинусів при наявності умови $x^2 + y^2 > 1$ (В$_1$).

Коли $x > 0$ і $y > 0$, то $u + v > 0$ і, крім того, за умовою (В)

$$u + v > \frac{\pi}{2}$$

Через те що $u+v>\frac{\pi}{2}$, то від формули (К), тобто від формули

$$\sin(u+v)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2},$$

не можна зразу перейти до арксинуса.

Використовуючи формулу зведення, напишемо формулу (К) так:

$$\sin[\pi-(u+v)]=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

Тут

$$0<\pi-(u+v)\leqslant\frac{\pi}{2},$$

а тому

$$\pi-(u+v)=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}).$$

Звідси

$$u+v=\pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}),$$

тобто

$$\boxed{\arcsin x+\arcsin y=\pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}).}\qquad (III_2)$$

Ось якою формулою треба користуватись у цьому випадку замість формули (III_1).

2. Виводимо тепер формулу для суми арксинусів у випадку $x<0$ і $y<0$.

При наявності умови (В) або (B_1) тут $n+v<0$ і $u+v<-\frac{\pi}{2}$. На підставі того, що

$$\sin(u+v)=-\sin[\pi+(u+v)],$$

формулу (К) перепишемо так:

$$-\sin[\pi+(u+v)]=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2},$$

або

$$\sin[\pi+(u+v)]=-x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}.$$

Через те що

$$u+v<0 \text{ і } |u+v|>\frac{\pi}{2},\quad [\pi+(u+v)]\leqslant\frac{\pi}{2};$$

а тому

$$\pi+(u+v)=\arcsin(-x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}),$$

або

$$\pi+(u+v)=-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}),$$

звідки

$$u+v=-\pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}),$$

або остаточно:

$$\boxed{\arcsin x+\arcsin y=-\pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.}\qquad (III_3)$$

Отже: 1) коли $x>0$ і $y>0$, то при наявності умови $x^2+y^2>1$ треба застосовувати для суми арксинусів формулу (III_2), а 2) коли $x<0$ і $y<0$, то при наявності умови $x^2+y^2>1$ треба застосовувати для суми арксинусів формулу (III_3).

§ 81. Сума арккосинусів.

Перейдемо до виведення формули для суми арккосинусів:

$$\arccos x+\arccos y.$$

Нехай

$$\arccos x=u, \text{ а } \arccos y=v.$$

Через те що $\arccos x$ і $\arccos y$ (тобто u і v) є кути, які містяться в інтервалі $(0,\pi)$ (§ 76), синуси їх додатні, а тому:

$$\sin u=+\sqrt{1-x^2}; \quad \sin v=+\sqrt{1-y^2}.$$

На підставі відомої формули (§ 40)

$$\cos(u+v)=\cos u\cos v-\sin u\sin v$$

пишемо:

$$\cos(u+v)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}. \tag{L}$$

Якщо $0\leqslant u+v\leqslant\pi$ (тобто $u+v$ не виходить за межі інтервалу для арккосинуса), з формули (L) одержимо:

$$u+v=\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}),$$

або

$$\boxed{\arccos x+\arccos y=\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}).} \tag{IV_1}$$

Отже, ця формула застосовується тільки при наявності умови

$$0\leqslant u+v\leqslant\pi \tag{C}$$

Перетворимо цю нерівність в іншу.

З нерівності (C)

$$u\leqslant\pi-v$$

[де u і $\pi-v$ додатні кути в інтервалі $(0, \pi)$], звідки

$$\cos u\geqslant\cos(\pi-v),$$

$$\cos u\geqslant-\cos v,$$

$$x\geqslant-y,$$

або

$$\boxed{x+y\geqslant0.} \tag{C_1}$$

1) Коли $x>0$ і $y>0$, кожний з кутів u і v не перевищує $\frac{\pi}{2}$, а тому $0\leqslant u+v\leqslant\pi$, тобто нерівність (C) або (C_1) виконана.

У цьому випадку для суми арккосинусів з а в ж д и застосовують формулу (IV_1).

2) Якщо $x<0$ і $y<0$, то кожний з кутів u і v більший $\frac{\pi}{2}$.

Тут умова (C) або (C_1) не виконується, і застосовувати формулу (IV_1) не можна.

3) Розглянемо тепер той випадок, коли x і y різних знаків, тобто коли $x>0$ а $y<0$ або, навпаки, $x<0$, а $y>0$. Тоді один з кутів u і v менший , а другий більший $\frac{\pi}{2}$.

Тут може бути:

$$0 \leqslant u+v \leqslant \pi \tag{C}$$

і

$$u+v>\pi. \tag{D}$$

При наявності першої нерівності (C) або (C_1) можна, очевидно, застосовувати формулу (IV_1).

Отже, формулою (IV_1) користуються:

1) завжди при додатних x і y;

2) коли x і y різних знаків — тільки при наявності умови $x+y \geqslant 0$ (C_1).

Припустимо тепер, що умову (C) не виконано, а замінено іншою: $u+v>\pi$ (D), яку легко перетворити в таку: $x+y<0$ (D_1).

Це може бути: 1) коли x і y різних знаків, 2) коли $x<0$ і $y<0$.

Виведемо формулу для суми арккосинусів у цих випадках.

Через те що тут $u+v>\pi$, від формули (L) безпосередньо не можна перейти до арккосинуса, бо $u+v$ не лежить в інтервалі $(0, \pi)$.

Використовуючи формулу зведення, з формули (L) маємо:

$$-\cos(u+v-\pi)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2},$$

або

$$\cos(u+v-\pi)=-xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}.$$

Через те що $0<u+v-\pi<\pi$, маємо:

$$u+v-\pi=\arccos\left(-xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right),$$

що на підставі відомих формул (§ 78) цього розділу дає:

$$u+v-\pi=\pi-\arccos\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right).$$

Звідси:

$$u+v=2\pi-\arccos\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right),$$

або остаточно:

$$\boxed{\arccos x+\arccos y=2\pi-\arccos\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right).} \tag{IV_2}$$

Отже, при наявності умови $x+y<0$ для суми арккосинусів завжди використовують формулу (IV_2).

§ 82. Сума арктангенсів.

Виведемо формулу для суми арктангенсів $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y$. Нехай

$$\operatorname{arc\,tg} x = u, \quad \text{а} \quad \operatorname{arc\,tg} y = v.$$

Звідси

$$\operatorname{tg} u = x, \quad \operatorname{tg} v = y.$$

На підставі відомої формули (§ 44)

$$\operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v},$$

або

$$\operatorname{tg}(u+v) = \frac{x+y}{1-xy}. \tag{M}$$

Тільки коли

$$|u+v| \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{E}$$

тобто коли кут $u+v$ міститься в інтервалі

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

з формули (M) можна одержати

$$u+v = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy},$$

або

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}.} \tag{V_1}$$

Подивимось, при яких значеннях для x і y нерівність (E) задовольняється.

1) Нехай x і y різних знаків, тобто $x>0$, а $y<0$ або, навпаки, $x<0$, а $y>0$.

Тоді один з кутів (u і v) додатний і міститься в інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, а другий — від'ємний і міститься в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Очевидно, для такого випадку завжди задовольняється нерівність

$$|u+v| < \frac{\pi}{2}. \tag{E}$$

А тому в цьому випадку для суми арктангенсів слід застосовувати завжди формулу (V_1).

2) Припустимо тепер, що x і y однакових знаків:

$$\text{a)}\ x>0 \quad \text{і} \quad y>0$$

або

$$\text{b)}\ x<0 \quad \text{і} \quad y<0.$$

У цих випадках, звичайно, може бути

$$\left| u+v \right| \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{E}$$

і може бути

$$\left| u+v \right| > \frac{\pi}{2}. \tag{F}$$

При наявності умови (E) застосовують формулу (V_1). Подивимось, як можна перетворити цю нерівність.

а) Коли $x>0$ і $y>0$, нерівність $(u+v)\leqslant\frac{\pi}{2}$ можна замінити такою: $u+v\leqslant\frac{\pi}{2}$, або $u\leqslant\frac{\pi}{2}-v$, звідки:

$$\operatorname{tg} u \leqslant \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-v\right),$$

$$\operatorname{tg} u \leqslant \operatorname{ctg} v,$$

або

$$x \leqslant \frac{1}{y}.$$

Через те що $y>0$, з останньої нерівності виходить:

$$\boxed{xy \leqslant 1.} \tag{E_1}$$

b) Коли $x<0$ і $y<0$, кожний з кутів u і v лежить в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ і $u+v<0$, а тому нерівність (E) можна переписати так:

$$u+v \geqslant -\frac{\pi}{2},$$

звідки

$$u \geqslant -\frac{\pi}{2} - v;$$

а тому

$$\operatorname{tg} u \geqslant -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+v\right),$$

або

$$\operatorname{tg} u \geqslant \operatorname{ctg} v,$$

звідки

$$x \geqslant \frac{1}{y}.$$

Через те що $y<0$,

$$xy \leqslant 1 \; (E_1).$$

Отже, коли x і y однакових знаків, для суми арктангенсів треба застосовувати формулу (V_1) тільки тоді, коли $xy \leqslant 1$.

II. Припустимо, що x і y однакових знаків, тобто

$$\text{a) } x>0 \quad \text{і} \quad y>0,$$

$$\text{b) } x<0 \quad \text{і} \quad y<0,$$

і замість нерівності (E) задовольняється нерівність $(u+v)>\frac{\pi}{2}$ (F), яку легко перетворити в таку нерівність:

$$\boxed{xy>1.} \tag{F_1}$$

1) Покажемо, якими формулами треба користуватися, коли $x>0$ і $y>0$ при наявності умови (F) або (F_1). Через те що $u>0$ і $v>0$,

$$u+v>\frac{\pi}{2},$$

а тому з формули (M) ми не зможемо перейти до арктангенса.

Робимо перетворення в першій частині цієї формули, на підставі відомої формули зведення:

$$-\operatorname{tg}[\pi-(u+v)]=\frac{x+y}{1-xy},$$

$$\operatorname{tg}[\pi-(u+v)]=\frac{-x-y}{1-xy}.$$

Через те що $u+v>\frac{\pi}{2}$ і $u+v<\pi$, кут $\pi-(u+v)$ лежить в інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, а тому

$$\pi-(u+v)=\operatorname{arc\,tg}\frac{-x-y}{1-xy},$$

тобто

$$\pi-(u+v)=-\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy},$$

звідки

$$u+v=\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy},$$

або

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y=\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}.} \tag{V_2}$$

2) Перейдемо до випадку $x<0$ і $y<0$ при наявності умови (F) або (F_1). Нерівність (F) можна переписати так: $u+v<-\frac{\pi}{2}$.

Тоді на підставі формули зведення рівність (M) переписується так:

$$\operatorname{tg}[\pi+(u+v)]=\frac{x+y}{1-xy}. \tag{M_1}$$

Тут $u+v<0$ і, крім того,

$$|u+v|>\frac{\pi}{2},$$

звідки

$$|\pi+(u+v)|<\frac{\pi}{2},$$

а тому

$$\pi+(u+v)=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Звідси

$$u+v=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}-\pi,$$

або остаточно:

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}-\pi.} \qquad (V_3)$$

Отже, при наявності умови $xy>1$ застосовують формулу (V_2), коли $x>0$ і $y>0$, і формулу (V_3), коли $x<0$ і $y<0$.

§ 83. Сума арккотангенсів.

Можна довести, що для суми арккотангенсів є дві формули. Першу з них:

$$\boxed{\operatorname{arc\,ctg}x+\operatorname{arc\,ctg}y=\operatorname{arc\,ctg}\frac{xy-1}{x+y}} \qquad (VI_1)$$

треба застосовувати, коли

$$0\leqslant\operatorname{arc\,ctg}x+\operatorname{arc\,ctg}y\leqslant\pi$$

або коли

$$x+y\geqslant 0.$$

А другою формулою:

$$\boxed{\operatorname{arc\,ctg}x+\operatorname{arc\,ctg}y=\pi+\operatorname{arc\,ctg}\frac{xy-1}{x+y}} \qquad (VI_2)$$

користуються, коли

$$\operatorname{arc\,ctg}x+\operatorname{arc\,ctg}y>\pi$$

або коли

$$x+y<0.$$

Можна було б не виводити зовсім формул для суми арккотангенсів, а, використовуючи формули (I_4) і (II_4) § 79, звести суму арккотангенсів до суми арктангенсів.

§ 84. Загальні висновки про суми двох однойменних обернених тригонометричних функцій.

I. *Для суми арксинусів* застосовують три формули:

1) $$\boxed{\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right):}$$

a) коли x і y різних знаків,

b) коли при наявності нерівності $x^2+y^2 \leqslant 1$ x і y однакових знаків;

2) $$\boxed{\arcsin x + \arcsin y = \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right),}$$

коли

$$x>0,\ y>0 \quad \text{і} \quad x^2+y^2>1;$$

3) $$\boxed{\arcsin x + \arcsin y = -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right),}$$

коли

$$x<0,\ y<0 \quad \text{і} \quad x^2+y^2>1.$$

II. *Для суми арккосинусів* є дві формули:

1) $$\boxed{\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right).}$$

Її застосовують, коли

$$x+y \geqslant 0$$

2) $$\boxed{\arccos x + \arccos y = 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right),}$$

коли

$$x+y<0.$$

III. *Для суми арктангенсів* є три формули:

1) $$\boxed{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy},}$$

коли

$$xy \leqslant 1;$$

2) $$\boxed{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \pi,}$$

коли

$$x>0,\ y>0 \quad \text{і} \quad xy>1;$$

3) $$\boxed{\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}-\pi,}$$

коли

$$x<0,\quad y<0\quad \text{і}\quad xy>1.$$

IV. *Для суми арккотангенсів* вживають дві формули:

1) $$\boxed{\operatorname{arc\,ctg} x+\operatorname{arc\,ctg} y=\operatorname{arc\,ctg}\frac{xy-1}{x+y},}$$

коли

$$x+y\geqslant 0;$$

2) $$\boxed{\operatorname{arc\,ctg} x+\operatorname{arc\,ctg} y=\operatorname{arc\,ctg}\frac{xy-1}{x+y}+\pi,}$$

коли

$$x+y<0.$$

Зауваження. Можна і не застосовувати цих формул для суми арккотангенсів, а за формулами § 79 перейти від арккотангенсів до арктангенсів.

§ 85. Різниця однойменних обернених тригонометричних функцій.

Спеціальних формул різниці обернених тригонометричних функцій можна не виводити, а треба перетворити раніш різницю в суму обернених тригонометричних функцій на підставі формули § 78.

Наприклад:

1) $\arcsin x-\arcsin y=\arcsin x+\arcsin(-y);$

2) $\arccos x-\arccos y=\arccos x\left[\pi-\arccos(-y)\right]=$

$$=\arccos x+\arccos(-y)-\pi;$$

3) $\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{arc\,tg} y=\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}(-y);$

4) $\operatorname{arc\,ctg} x-\operatorname{arc\,ctg} y=\operatorname{arc\,ctg} x-\left[\pi-\operatorname{arc\,ctg}(-y)\right]=$

$$=\operatorname{arc\,ctg} x+\operatorname{arc\,ctg}(-y)-\pi\ldots$$

А далі слід застосовувати формули, виведені в § 83.

§ 86. Формули подвоєння обернених тригонометричних функцій.

У формули § 84 підставимо x замість y, тоді одержимо:

I. 1) $2 \arcsin x = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$, коли

$$x^2 \leqslant \frac{1}{2} \text{ (бо коли } x^2+x^2 \leqslant 1, \text{ то } 2x^2 \leqslant 1);$$

2) $2 \arcsin x = \pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$, коли

$$x^2 > \frac{1}{2} \text{ і } x > 0;$$

3) $2 \arcsin x = -\pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$, коли

$$x^2 > \frac{1}{2} \quad \text{і} \quad x < 0.$$

II. 1) $2 \arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$, коли

$$x > 0 \text{ (бо коли } x + x > 0, \text{ то } 2x > 0 \text{ і } x > 0);$$

2) $2 \arccos x = 2\pi - \arccos(2x^2 - 1)$, коли

$$x < 0.$$

III. 1) $2 \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1-x^2}$, коли

$$x^2 \leqslant 1;$$

2) $2 \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1-x^2} + \pi$, коли

$$x > 0 \quad \text{і} \quad x^2 > 1;$$

3) $2 \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1-x^2} - \pi$, коли

$$x^2 > 1 \quad \text{і} \quad x < 0.$$

§ 87. Зразки прикладів.

1. $\arcsin \frac{8}{17} + \arcsin \frac{15}{17}$.

Розв'язування.

$$x = \frac{8}{17} > 0; \quad y = \frac{15}{17} > 0; \quad x^2 + y^2 < 1;$$

застосовуємо першу формулу для суми арксинусів:

$$\arcsin \frac{8}{17} + \arcsin \frac{15}{17} = \arcsin\left[\frac{8}{17}\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} + \frac{15}{17}\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}\right],$$

або

$$\arcsin \frac{8}{17} + \arcsin \frac{15}{17} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

2. $\arcsin \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язування.

$$x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}>0; \quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}>0; \quad x^2+y^2=\frac{16+4\sqrt{3}}{16}>1.$$

Застосовуємо другу формулу:

$$\arcsin \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\arcsin\left[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2}\right]=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi.$$

3. $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)-\arcsin \frac{\sqrt{15}+2}{6}$.

Розв'язування.

$$\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)-\arcsin \frac{\sqrt{15}+2}{6}=\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)+$$

$$+\arcsin\frac{-\sqrt{15}-2}{6}.$$

Тут

$$x=-\frac{2}{3}<0; \quad y=\frac{-\sqrt{15}-2}{6}<0; \quad x^2+y^2>1.$$

Застосовуємо третю формулу:

$$\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)-\arcsin \frac{\sqrt{15}+2}{6}=\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)+$$

$$+\arcsin\frac{-\sqrt{15}-2}{6}=-\pi-\arcsin\left[-\frac{2}{3}\sqrt{1-\left(\frac{-\sqrt{15}-2}{6}\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{-\sqrt{15}-2}{6}\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}\right]=-\pi-\arcsin\frac{-\sqrt{3}}{2}=$$

$$=-\pi+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=-\pi+\frac{\pi}{3}=-\frac{2}{3}\pi.$$

4. $\arccos\frac{1}{4}+\arccos\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Розв'язування.

$$x=\frac{1}{4}>0; \quad y=\frac{\sqrt{15}}{4}>0; \quad x+y>0.$$

Застосовуємо першу формулу для суми арккосинусів:

$$\arccos\frac{1}{4}+\arccos\frac{\sqrt{15}}{4}=\arccos\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}\right)=\arccos\left(\frac{\sqrt{15}}{16}-\frac{\sqrt{15}}{16}\right)=$$

$$=\arccos 0=\frac{\pi}{2}.$$

5. $\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{-\sqrt{2}-4}{6}$.

Розв'язування.

$$x+y=\frac{1}{3}+\frac{-\sqrt{2}-4}{6}<0.$$

Застосовуємо другу формулу (§ 84).

$$\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{-\sqrt{2}-4}{6}=2\pi-\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=2\pi-\frac{3}{4}\pi=\frac{5}{4}\pi.$$

6. $\operatorname{arctg} 3-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Розв'язування.

$$\operatorname{arctg} 3-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\operatorname{arctg} 3+\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Тут

$$xy=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1<1.$$

Застосовуємо першу формулу для суми арктангенсів:

$$\operatorname{arctg} 3-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\operatorname{arctg}\frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}.$$

7. $\operatorname{arcctg}(-3)+\operatorname{arcctg}\frac{-5\sqrt{3}-6}{13}$.

Розв'язування.

$$\operatorname{arcctg}(-3)+\operatorname{arcctg}\left(\frac{-5\sqrt{3}-6}{13}\right)=\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{-3}+$$

$$+\pi+\operatorname{arctg}\frac{13}{-5\sqrt{3}-6}=2\pi-\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{13}{5\sqrt{3}+6}\right)=$$

$$=2\pi-\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{3}+\frac{13}{5\sqrt{3}+6}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{5\sqrt{3}+6}}=2\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi.$$

§ 88. Приклади.

Знайти, чому дорівнюють вирази:

1. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.
2. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
4. $\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})$.
5. $\operatorname{arc\,ctg}(-1)$.
6. $\arccos 0$.
7. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$.
8. $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)$.
9. $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 0{,}3)$.
10. $\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}\right)$.
11. $\cos(\arccos 0{,}6)$.
12. $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)$.
13. $\operatorname{tg}(\arcsin 0{,}6)$.

В к а з і в к а. Нехай $\arcsin 0{,}6=\alpha$; тоді $\sin\alpha=0{,}6$. А далі на підставі цих даних визначаємо $\operatorname{tg}\alpha$.

14. $\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$.
15. $\sin\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{20}{21}\right)$.
16. $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)+\arcsin\frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}$. *Відповідь*: $\frac{\pi}{6}$.
17. $\arcsin\frac{2}{3}+\arcsin\frac{\sqrt{15}+2}{6}$. *Відповідь*: $\frac{2}{3}\pi$.
18. $\arccos\frac{9}{\sqrt{82}}-\arccos\frac{4}{\sqrt{41}}$.

В к а з і в к а. Треба перетворити різницю в суму

Відповідь: $\frac{3}{4}\pi$.

19. $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+\arccos\frac{-\sqrt{15}-2}{6}$. *Відповідь*: $\frac{5}{3}\pi$.
20. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$. *Відповідь*: $\frac{\pi}{4}$;
21. $\operatorname{arc\,tg}\frac{-5}{3\sqrt{3}}+\operatorname{arc\,ctg}(-2\sqrt{3})$. *Відповідь*: $\frac{2}{3}\pi$.
22. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,ctg} 7+\operatorname{arc\,ctg} 8$.
23. $2\arcsin\frac{a}{a+1}$, де a ціле число, більше 1.
24. $2\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.

25. $2 \operatorname{arc\,tg} \frac{a+1}{a}$; $0 < a < 1$.

26. $4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$.

Вказівка. Раніше визначити $2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5}$, а потім подвоїти.

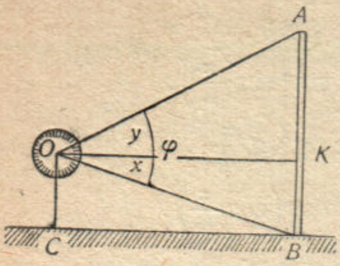

Рис. 118.

27. Довести тотожності:

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arc\,tg} a + \operatorname{arc\,ctg} a = \frac{\pi}{2}.$$

28. Під яким кутом зору з центра лімба кутомірного прилада видно телеграфний стовп (від основи до вершини)? Відомо, що висота стовпа дорівнює h, висота кутомірного прилада b, віддаль прилада від стовпа дорівнює d (рис. 118).

Вказівка. Шуканий кут φ слід розглядати як суму арктангенсів. Треба дати залежність між b, h і d, при якій використовують першу і другу формули для суми арктангенсів.

РОЗДІЛ XI.

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ.

§ 89. Поняття про тригонометричне рівняння.

Тригонометричним рівнянням звичайно називається таке рівняння, де невідоме входить під знаком тригонометричної функції.

Наприклад, рівняння $\sin x = \frac{2}{3}$, $15 \cos x = 7 \cos \frac{x}{2}$, $a \sin x + b \cos x = c$ і т. ін. можна назвати тригонометричними, а рівняння $x \cos \alpha = \sin \beta$, $ax + b = \operatorname{tg} \alpha$, хоч і містять в собі тригонометричні функції, не належать до тригонометричних, коли за невідоме взяти x, бо невідоме x не під знаком тригонометричних функцій.

Коренями тригонометричного рівняння (так само, як і алгебричного) називають такі значення для невідомого x, які задовольняють дане рівняння.

Розв'язати тригонометричне рівняння — значить знайти його корені.

Від тригонометричних рівнянь треба відрізняти тригонометричні тотожності. Це є такі рівності, що містять в собі тригонометричні функції кута і задовольняються при яких завгодно значеннях цього кута.

Наприклад: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ є тотожності.

Загальні формули для розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь виведено в попередньому розділі (§ 77), а тому в наступному параграфі цього розділу про ці рівняння доведеться тільки нагадати, не виводячи самих формул.

§ 90. Основні тригонометричні рівняння.

I. 1) $\sin x = 0$.

Розв'язування.

$$x = m\pi, \text{ або } x = m\,180^\circ.$$

2) $\cos x = 0$.

Розв'язування.

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ або } x = (2k+1)\,90^\circ.$$

3) $\operatorname{tg} x = 0$.

Розв'язування.

$$x = m\pi, \quad \text{або} \quad x = m\,180^\circ.$$

4) $\operatorname{ctg} x = 0$.

Розв'язування.

$$x = m\pi \quad \text{або} \quad x = m\,180^\circ.$$

Ці рівняння є окремим випадком такої групи рівнянь.

II. 1) $\sin x = l$, де $-1 \leqslant l \leqslant 1$.

Розв'язування.

$$x = m\pi + (-1)^m x_0,$$

або

$$x = m\,180^\circ + (-1)\ \ x_0^\circ.$$

2) $\cos x = l$, де $-1 \leqslant l \leqslant 1$.

Розв'язування.

$$x = 2k\pi \pm x_0,$$

або

$$x = k\,360^\circ \pm x_0^\circ.$$

3) $\operatorname{tg} x = l$, де $-\infty \leqslant l \leqslant \infty$.

Розв'язування.

$$x = m\pi + x_0,$$

або

$$x = m\,180^\circ + x_0^\circ.$$

4) $\operatorname{ctg} x = l$, де $-\infty \leqslant l \leqslant \infty$.

Розв'язування.

$$x = m\pi + x_0,$$

або

$$x = m\,180^\circ + x_0^\circ$$

У всіх цих формулах k і m — які завгодно цілі числа (додатні або від'ємні) або 0.

Під x_0 розуміють один з кутів, що задовольняє дане рівняння. Звичайно для цього беруть кут, який міститься в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ для синуса і тангенса і в інтервалі $(0, \pi)$ — для косинуса і котангенса.

Слід підкреслити учням, що необов'язково завжди додержуватися для x_0 певного інтервалу. Нехай треба розв'язати рівняння $\operatorname{ctg} x = -1$.

Якщо взяти інтервал $(0, \pi)$, або $(0, 180^\circ)$, то $x_0 = 135^\circ$, або $\frac{3}{4}\pi$ — і загальна формула буде така:

$$x = 180^\circ m + 135^\circ.$$

А коли під x_0 розуміти кут в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, або $(-90^\circ, 90^\circ)$ то $x_0 = -45^\circ$, і загальна формула буде:

$$x = m\,180^\circ - 45^\circ.$$

Легко перевірити, що ці формули рівнозначні.

Справді, першу з них, на підставі того, що $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$, можна переписати так:

$$x = m\,180^\circ + 180^\circ - 45^\circ,$$

або

$$x = (m+1)\,180^\circ - 45^\circ.$$

Позначаючи $m+1$ через m_1, одержимо $x = m_1\,180^\circ - 45^\circ$, тобто таку саму формулу, як і в другому випадкові.

§ 91. Тригонометричні рівняння виду:

$\sin ax = l$, $\cos ax = l$, де $-1 \leqslant l \leqslant 1$;

$\operatorname{tg} ax = l$, $\operatorname{ctg} ax = l$, де $-\infty \leqslant l \leqslant \infty$.

Розглянемо ці рівняння:

1. $\sin ax = l$, де $-1 \leqslant l \leqslant 1$.

Розв'язування. Позначивши ax через φ, маємо тригонометричне рівняння попередньої групи (§ 90):

$$\sin \varphi = l.$$

Звідси:

$\varphi = m\pi + (-1)^m \varphi_0$, де φ_0 — значення для φ в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тобто $\arcsin l$.

Значить,

$$ax = m\pi + (-1)^m \varphi_0,$$

а в градусах

$$ax = m\,180^\circ + (-1)\ \varphi_0^\circ.$$

Звідси:

$$x = m\frac{\pi}{a} + (-1)^m \frac{\varphi_0}{a},$$

або

$$x = m\frac{180^\circ}{a} + (-1)^m \frac{\varphi_0^\circ}{a}.$$

Приклад: $\sin 3x = \frac{1}{2}$.

Розв'язування.

$$3x = m\,180^\circ + (-1)^m 30^\circ,$$

звідки:

$$x = m\,60^\circ + (-1)^m 10^\circ, \text{ або } x = m\frac{\pi}{3} + (-1)^m \frac{\pi}{18}.$$

Підставляючи замість m числа 0, 1, 2, 3, 4...
−1, −2, −3, −4..., можемо одержати безліч кутів
10°, 50°, 130°, 170°... −10°, −70 −110°... −190°...

Коли б за умовою x підлягав обмеженню, наприклад, коли б був кут трикутника, то ми взяли б тільки такі корені:

$$10^\circ, 50^\circ, 130^\circ \text{ і } 170^\circ.$$

2. $\cos ax = l$, де $-1 \leqslant l \leqslant 1$.

Розв'язування. Позначаємо ax через φ, тоді маємо рівняння:

$$\cos\varphi = l,$$

звідки $\varphi = 2k\pi + \varphi_0$, де φ_0 — значення φ або ax в інтервалі $(0, \pi)$, тобто $\arccos l$.

Значить,

$$ax = 2k\pi + \varphi_0,$$

або

$$ax = k \cdot 360^\circ + \varphi_0^\circ.$$

Звідки:

$$x = 2k\frac{\pi}{a} + \frac{\varphi_0}{a}.$$

$$x = k\,\frac{360^\circ}{a} + \frac{\varphi_0^\circ}{a}.$$

Приклад.

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Розв'язування.

$$2x = k \cdot 360^\circ \pm 45^\circ, \text{ або } 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

Звідси:

$$x = k\,180^\circ \pm 22^\circ 30',$$

або

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{8}.$$

3. $\operatorname{tg} ax = l$, де $-\infty \leqslant l \leqslant \infty$.

Розв'язування. Нехай $ax = \varphi$, тоді

$$\operatorname{tg}\varphi = l,$$

звідки

$$\varphi = m\pi + \varphi_0,$$

де φ_0 — значення φ в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тобто $\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} l$.

Значить,

$$ax = m\pi + \varphi_0,$$

або

$$ax = m\,180^\circ + \varphi_0^\circ.$$

Звідси:

$$x = m\frac{\pi}{a} + \frac{\varphi_0}{a};$$

або

$$x = m\frac{180^\circ}{a} + \frac{\varphi_0^\circ}{a}.$$

Приклад.

$$\operatorname{tg} 4x = \sqrt{3}.$$

Розв'язування.

$$4x = m\pi + \frac{\pi}{3},$$

або

$$4x = m\,180^\circ + 60^\circ.$$

Звідси:

$$x = m\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12},$$

або

$$x = m\,45^\circ + 15^\circ.$$

4. $\operatorname{ctg} ax = l$, де $-\infty \leqslant l \leqslant \infty$.

Розв'язування. Коли $ax = \varphi$, то, так само як і для попереднього рівняння, маємо:

$$x = m\frac{\pi}{a} + \frac{\varphi_0}{a},$$

або

$$x = m\frac{180^\circ}{a} + \frac{\varphi_0^\circ}{a},$$

де φ_0 — значення для φ в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ або в інтервалі $(0, \pi)$. В останньому випадку φ_0 є $\operatorname{arc\,ctg} l$.

Приклад. Визначити кути x трикутника, коли

$$\operatorname{ctg} 3x = -\sqrt{3}.$$

Розв'язування.

$$3x = m\,180^\circ - 30^\circ,$$

звідки

$$x = m\,60^\circ - 10^\circ.$$

Надаючи m значення 1, 2, 3..., матимемо:

$$50^\circ,\ 110^\circ \text{ і } 170^\circ.$$

§ 92. Тригонометричні рівняння виду:

$$\left.\begin{aligned}\sin(ax+b) &= l,\\ \cos(ax+b) &= l,\end{aligned}\right\} \text{ де } -1 \leqslant l \leqslant 1;$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}(ax+b) &= l,\\ \operatorname{ctg}(ax+b) &= l,\end{aligned}\right\} \text{ де } -\infty \leqslant l \leqslant \infty.$$

Розглянемо ці рівняння:

1. $\sin(ax+b) = l$, де $-1 \leqslant l \leqslant 1$.

Розв'язування. Позначимо $ax+b$ через φ, тоді:

$$\sin\varphi = l,$$

$$\varphi = m\pi + (-1)^m \varphi_0,$$

де $\varphi_0 = \arcsin l$, тобто кут в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Значить, $ax + b = m\pi + (-1)^m \varphi_0$ (тут ми припускаємо, що b визначене в радіанних одиницях).

А коли b дано в градусах, то $ax+b^{\circ}=m\,180^{\circ}+(-1)^{m}\varphi_0{}^{\circ}$.
Звідси:

$$ax=m\pi+(-1)^{m}\varphi_0-b,$$

або

$$ax=m\,180^{\circ}+(-1)^{m}\varphi_0{}^{\circ}-b^{\circ};$$

а далі:

$$x=m\frac{\pi}{a}+(-1)^{m}\frac{\varphi_0}{a}-\frac{b}{a},$$

або в градусах

$$x=m\frac{180^{\circ}}{a}+(-1)^{m}\frac{\varphi_0{}^{\circ}}{a}-\frac{b^{\circ}}{a}.$$

Приклад. Визначити кути трикутника, що задовольняють рівняння

$$\sin(5x+20^{\circ})=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Розв'язування.

$$5x+20^{\circ}=m\,180^{\circ}+(-1)^{m}\,60^{\circ};$$

$$5x=m\,180^{\circ}+(-1)^{m}\,60^{\circ}-20^{\circ};$$

$$x=m\,36^{\circ}+(-1)^{m}\,12^{\circ}-4^{\circ}.$$

Надаємо m значення 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Матимемо: 8°, 20°, 80°, 92°, 152°, 164°.

2. $\cos(ax+b)=l$, де $-1\leqslant l\leqslant 1$.

Коли $\varphi_0=\arccos l$,
то

$$ax+b=2k\pi\pm\varphi_0,$$

або

$$ax+b=k\,360^{\circ}\pm\varphi^{\circ}{}_0,$$

коли b і φ_0 визначені в градусах.

Звідси:

$$x=2k\frac{\pi}{a}\pm\frac{\varphi_0}{a}-\frac{b}{a},$$

або

$$x=k\frac{360^{\circ}}{a}\pm\frac{\varphi^{\circ}{}_0}{a}-\frac{b^{\circ}}{a}.$$

Приклад. $\cos(2x-25^{\circ})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Розв'язати рівняння за умовою: $0<x<360^{\circ}$.
Розв'язування. $x=k\cdot 180^{\circ}\pm 67^{\circ}\,30'+12^{\circ}\,30'$.
Кути, що відповідають умові, такі: 80°, 125°, 260° і 305°.

3. $\operatorname{tg}(ax+b)=l$, де $-\infty\leqslant l\leqslant\infty$.

Розв'язування. Нехай

$$\varphi_0=\operatorname{arc\,tg} l,$$

тоді:

$$ax+b=m\pi+\varphi_0,$$
$$ax=m\pi+\varphi_0-b,$$
$$x=m\frac{\pi}{a}+\frac{\varphi_0-b}{a}.$$

Якщо b і φ_0 визначають число градусів, то

$$x=m\cdot\frac{180^\circ}{a}+\frac{\varphi_0^\circ-b^\circ}{a}.$$

Приклад. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+54^\circ\right)=1.$

Знайти значення для x в інтервалі $(0, 360^\circ)$.

Розв'язування. З формули $x=m360^\circ-18^\circ$ маємо для x одне значення: 342°.

4. $\operatorname{ctg}(ax+b)=l$, де $-\infty\leqslant l\leqslant\infty$.

Розв'язування цього рівняння аналогічне розв'язуванню попереднього, а тому:

$$x=m\frac{\pi}{a}+\frac{\varphi_0-b}{a}.$$

а коли b і φ_0 дано в градусах, то

$$x=m\frac{180^\circ}{a}+\frac{\varphi_0^\circ-b^\circ}{a}.$$

§ 93. Рівняння, що визначають рівність двох одноіменних тригонометричних функцій.

1. Коли синуси кутів рівні, то сума їх дорівнює непарному числу разів по π, а різниця їх дорівнює парному числу разів по π або нулеві.

Справді, в формулі $m\pi+(-1)^m x_0$ для всіх кутів, що мають той самий синус, що й кут x_0, дамо числу m ряд значень: $2k$, $2k_1$, $2k+1$, $2k_1+1$, тоді одержимо:

$$2k\pi+x_0,\ 2k_1\pi+x_0,\ (2k+1)\pi-x_0 \text{ і } (2k_1-1)\pi-x_0.$$

Ясно, що різниця двох перших, а також і двох останніх кутів дорівнює парному числу разів по π, а сума першого й третього, як і сума другого і четвертого, дорівнює непарному числу разів по π.

2. Коли косинуси кутів рівні, то як сума, так і різниця кутів дорівнює парному числу разів по π або нулеві.

У цьому легко переконатися з формули $2k\pi\pm x_0$ для всіх кутів, що мають той самий косинус як і кут x_0.

3. Коли тангенси або котангенси рівні, то різниця кутів дорівнює цілому числу разів по π або нулеві.

Це виходить з формули $m\pi+x_0$ для всіх кутів, що мають той самий тангенс як і кут x_0.

На всіх цих твердженнях і базується розв'язування рівнянь, що визначають рівність двох однойменних обернених тригонометричних функцій.

Приклад 1. $\sin 5x = \sin x$.

Розв'язування.

$$5x + x = (2k+1)\pi,$$

$$5x - x = 2k\pi,$$

або

$$6x = (2k+1)\pi,$$

$$4x = 2k\pi,$$

звідки маємо дві формули для коренів рівняння:

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{6} \quad \text{і} \quad x = k \cdot \frac{\pi}{2}\text{, або в градусах}$$

$$x = (2k+1)\,30^\circ \quad \text{і} \quad x = k \cdot 90^\circ.$$

Приклад 2. $\cos 10x = \cos 6x$.

Розв'язування.

$$10x + 6x = 2k\pi,$$

$$10x - 6x = 2k\pi,$$

звідки маємо: $x = k \cdot \frac{\pi}{8}$ і $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, або в градусах

$$x = k \cdot 22^\circ 30' \text{ і } x = k \cdot 90^\circ.$$

Приклад 3. Визначити кут x трикутника з рівняння:

$$\operatorname{tg}(3x - 60^\circ) = \operatorname{tg}(x + 20^\circ).$$

Розв'язування.

$$(3x - 60^\circ) - (x + 20^\circ) = m \cdot 180^\circ,$$

$$2x - 80^\circ = m \cdot 180^\circ,$$

звідки $x = m \cdot 90^\circ + 40^\circ$.

Коли числу m надати значення 0 і 1, одержимо кути, які відповідно умові дорівнюють 40° і 130°.

§ 94. Деякі зауваження щодо розв'язування тригонометричних рівнянь.

Ми розглянули найпростіші, або основні, тригонометричні рівняння.

При розв'язуванні більш складних тригонометричних рівнянь намагаються кожне з них звести до одного з основних.

Треба тільки, по можливості, уникати таких перетворень, що сприяють одержанню рівняння, не еквівалентного даному.

Від множення і ділення на цілий тригонометричний вираз, від піднесення двох частин у степінь або добування з них кореня можуть з'явитися так звані **сторонні корені** або зникнути деякі корені даного рівняння.

А дослідження коренів (справжні вони чи сторонні, чи зникли якінебудь з них) значно складніше, ніж при розв'язуванні алгебричних рівнянь , бо тут невідоме входить під знаком тригонометричної функції.

Ось чому не слід вводити в тригонометричні рівняння ірраціональні вирази, які тягнуть за собою піднесення до степеня обох частин рівняння. Так само, коли в тригонометричне рівняння входять дроби, знаменники яких містять тригонометричні функції від невідомих кутів, звільнення рівняння від дробів можливе тільки в деяких випадках, як виняток, коли напевне відомо, що найменше кратне від знаменників усіх дробів даного рівняння (на яке доведеться множити обидві частини рівняння) не може бути ні нулем, ні нескінченністю.

Здебільшого при розв'язуванні таких рівнянь намагаються, перенісши всі члени, як цілі, так і дробові, в ліву частину, звести рівняння до виду $\frac{A}{B}=0$, де A і B — цілі тригонометричні вирази.

Про розв'язування таких рівнянь мова йтиме далі.

Часто, розв'язуючи тригонометричне рівняння, яке не містить у собі дробів (так само як і алгебричне), перетворюють праву частину в нуль, а ліву розкладають на множники і, щоб відшукати корені, кожний співмножник прирівнюють нулеві.

Через те що цілий алгебричний вираз ні при якому скінченному значенні для невідомого не може перетворитись у нескінченність, то при розв'язуванні таким способом алгебричних рівнянь ми певні в тому, що всі корені справжні (бо, коли нуль помножимо на 0 або на скінченне число, завжди одержимо нуль).

А через те що в тригонометрії ми маємо справу з такими функціями, як тангенс, котангенс, секанс і косеканс, які при скінченному значенні для кута можуть набувати нескінченно великих значень (наприклад $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\pm\infty$), то прирівнявши якийнебудь співмножник нулеві і відшукавши корені його, треба подивитись на кожний з інших співмножників. Якщо жодний з них при цих значеннях невідомого не перетворюється в нескінченність, то маємо справу з справжніми коренями рівняння. Коли ж при одержаних значеннях невідомого один з співмножників дорівнює нулеві, а хоч один з інших набуває нескінченно великого значення, то корені доведеться дослідити, бо $0\cdot\infty$ не завжди (як ми далі побачимо) дорівнює нулеві.

Спочатку ми зупинимось на тригонометричних рівняннях, які досить легко зводяться до еквівалентних їм рівнянь і не потребують особливих досліджень.

§ 95. Тригонометричні рівняння (без дробів) типу алгебричних рівнянь відносно однієї тригонометричної функції.

Таке рівняння розв'язують відносно тригонометричної функції як звичайне алгебричне, а потім використовують виведені в одному з параграфів 90, 91 і 92 загальні формули для всіх кутів, які відповідають певному значенню тригонометричної функції.

Приклад 1. $4\sin^2 x = 8\sin x - 3$.

Розв'язування.

Це — квадратне рівняння відносно $\sin x$:

$$4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0.$$

Розв'язуючи його, одержимо:

$$(\sin x)_1 = \frac{3}{2} > 1 \text{ (не підходить)};$$

$$(\sin x)_2 = \frac{1}{2}.$$

Звідси: $x = m\pi + (-1)^m \frac{\pi}{6}$,

або

$$x = m\,180^\circ + (-1)^m 30^\circ.$$

Корені рівняння $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$ . . . . . і т. д.,

або

$$30^\circ,\ 150^\circ\ \ldots\ldots \text{ і т. д.}$$

Приклад 2. $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 3 = 0$.

Розв'язування. Розклавши на множники ліву частину рівняння, матимемо:

$$(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0,$$

звідки

$$(\operatorname{tg} x)_1 = 1,$$

$$(\operatorname{tg} x)_2 = \sqrt{3},$$

$$(\operatorname{tg} x)_3 = -\sqrt{3}.$$

Звідси одержуємо такі три формули для коренів:

$$x = m \cdot 180^\circ + 45^\circ,$$

$$x = m \cdot 180^\circ + 60^\circ,$$

$$x = m \cdot 180^\circ - 60^\circ.$$

При тих значеннях для x, при яких кожний співмножник обертається в нуль, кожний з інших — скінченне число, а тому всі ці формули дають справжні корені.

§ 96. Тригонометричні рівняння типу алгебричних відносно різних тригонометричних функцій від одного аргумента (які зручно привести до еквівалентних їм рівнянь з однією тригонометричною функцією).

Приклад. $3\cos x = 2\sin^2 x$.

Щоб розв'язати це рівняння, треба $\sin^2 x$ замінити через $1-\cos^2 x$, тоді матимемо квадратне рівняння відносно $\cos x$:

$$3\cos x = 2(1-\cos^2 x),$$

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0,$$

звідки: $(\cos x)_1 = \frac{1}{2}$,

$(\cos x)_2 = -2$ (не підходить, бо завжди $|\cos x| \leq 1$),

а тому: $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, або $x = k \cdot 360^\circ \pm 60^\circ$.

До таких рівнянь належать так звані *однорідні рівняння відносно синуса і косинуса*, тобто такі рівняння, де всі члени мають один степінь відносно синуса і косинуса. Коли рівняння n-го степеня, то, поділивши обидві частини його або на $\cos^n x$, або на $\sin^n x$ (а саме — на те, що не дорівнює нулеві), ми рівняння зведемо до одного рівняння n-го степеня відносно тангенса або котангенса.

Приклад. $5\sin^2 x - 2\cos^2 x = 3\sin x\cos x$.

Це — однорідне рівняння 2-го степеня.

Розв'язування.

Спершу досліджуємо, чи не буде $\cos x = 0$; якщо $\cos x = 0$, то обов'язково $\sin x = \pm 1$. Підставимо ці значення в дане рівняння.

Маємо $5 - 0 = 0$, що неможливо. Значить, $\cos x \neq 0$, а тому ми маємо право поділити обидві частини на $\cos^2 x$.

Поділивши, одержимо:

$$5\,\mathrm{tg}^2 x - 2 = 3\,\mathrm{tg}\, x,$$

або

$$5\,\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x - 2 = 0.$$

Це рівняння, очевидно, еквівалентне даному.

Розв'язавши його, одержимо:

$$(\mathrm{tg}\, x)_1 = 1$$
$$(\mathrm{tg}\, x)_2 = -0{,}4.$$

Звідки маємо дві формули для коренів:

$$x = m \cdot 180^\circ + 45^\circ;$$
$$x = m \cdot 180^\circ - 21^\circ 43' 5''.$$

§ 97. Тригонометричні рівняння типу алгебричних відносно тригонометричних функцій від різних аргументів (тригонометричні рівняння, які не потребують особливих досліджень).

1. Іноді буває зручно таке рівняння звести до рівняння, еквівалентного даному, з однією тригонометричною функцією від одного аргумента, і потім розв'язати відповідне рівняння відносно цієї функції.

Приклад. $20\cos x = 7\sin\frac{x}{2}$.

Розв'язування.

$$20\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)=7\sin\frac{x}{2},$$

$$40\sin^2\frac{x}{2}+7\sin\frac{x}{2}-20=0,$$

звідки: $\left(\sin\frac{x}{2}\right)_1=\frac{5}{8}=0{,}625,$

$\left(\sin\frac{x}{2}\right)_2=-0{,}8.$

Через те що $(\arcsin 0{,}625)^\circ = 38^\circ 40'51''$, а

$$[\arcsin(-0{,}8)]^\circ = -57^\circ 7'48'',$$

$$\frac{x}{2}=m\,180^\circ+(-1)^m\,38^\circ 40'51''$$

і

$$\frac{x}{2}=m\,180^\circ+(-1)^{m+1}\,57^\circ 7'48''.$$

Звідки $x=m\,360^\circ+(-1)^m\,77^\circ 21'42''$,

і

$$x=m\,360^\circ+(-1)^{m+1}\,114^\circ 15'36''.$$

2. При розв'язуванні рівнянь цієї групи іноді вдається за допомогою деяких перетворень звести рівняння до рівності однойменних тригонометричних функцій, тобто до рівнянь, про які була мова в § 93.

Приклад. $\sin 9x\cdot\cos 7x-\sin 7x\cdot\cos 5x=0$.

Розв'язування.
$\sin 9x\cdot\cos 7x=\sin 7x\cdot\cos 5x$, або $\sin 16x+\sin 2x=\sin 12x+\sin 2x$; $\sin 16x=\sin 12x$.
Маємо рівняння, що визначає рівність синусів (див. § 93).

А тому:

$$16x-12x=2k\pi$$

і

$$16x+12x=(2k+1)\pi,$$

тобто: $$4x = 2k\pi,$$

$$28x = (2k+1)\pi.$$

Звідки маємо дві формули для відшукання коренів даного рівняння:

$$x = k\frac{\pi}{2} \quad \text{і} \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{28}, \text{ або в градусах}$$

$$x = k \cdot 90^\circ \quad \text{і} \quad x = (2k+1)\, 6\frac{3}{7}^\circ.$$

3. У рівняннях цієї групи часто, після перенесення всіх членів у ліву частину і використання відповідних формул гоніометрії, удається представити цю частину в формі добутку, не зводячи тригонометричних функцій до одного аргумента.

Треба тільки, щоб у кожний співмножник входили тригонометричні функції одного кута, та й це іноді необов'язково, якщо один з співмножників можна представити як різницю двох однойменних тригонометричних функцій.

Приклад 1. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

Р о з в'я з у в а н н я.

$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (1 + \cos 2x) + \cos x;$

$2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 2\cos^2 x + \cos x;$

$\sin 2x(2\cos x + 1) = \cos x(2\cos x + 1)$, або

$2\sin x\cos x(2\cos x + 1) - \cos x(2\cos x + 1) = 0;$

$\cos x(2\sin x - 1)(2\cos x + 1) = 0.$

Прирівнявши кожний співмножник нулеві, маємо такі найпростіші рівняння: $\cos x = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$ і $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Звідси:

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2};\ x = m\pi + (-1)^m\frac{\pi}{6} \quad \text{і} \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

або в градусах:

$$x = (2k+1)\,90^\circ;\quad x = m\,180^\circ + (-1)^m\, 30^\circ \quad \text{і} \quad x = k \cdot 360^\circ \pm 60^\circ.$$

Приклад 2.

$$6\sin x\cos 3x - 2\cos 3x - 3\sin 3x + 3\sin x + 2\cos 2x = 0.$$

Р о з в'я з у в а н н я.

Відповідно групуємо члени:

$2\cos 3x(3\sin x - 1) - 3(\sin 3x - \sin x) + 2\cos 2x = 0;$

$2\cos 3x(3\sin x - 1) - 6\sin x\cos 2x + 2\cos 2x = 0;$

$2\cos 3x(3\sin x - 1) - 2\cos 2x(3\sin x - 1) = 0;$

$2(3\sin x - 1)(\cos 3x - \cos 2x) = 0;$

звідки маємо два рівняння:

$$\sin x = \frac{1}{3} \quad \text{і} \quad \cos 3x = \cos 2x.$$

З першого рівняння $x = m \cdot 180^\circ + (-1)^m \left(\arcsin \frac{1}{3}\right)^\circ$, а з другого рівняння $x = k \cdot 360^\circ$ і $x = k \cdot 72^\circ$.

§ 98. Рівняння виду: $a \sin x + b \cos x = c$.

Це тригонометричне рівняння доводиться виділити з групи рівнянь § 96, бо воно потребує інших способів розв'язування Зупинимось на одному способі.

Спосіб введення допоміжного кута.

Рівняння $a \sin x + b \cos x = c$ перепишемо так:

$$a\left(\sin x + \frac{b}{a} \cos x\right) = c.$$

Нехай $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, тоді рівняння перетвориться в таке:

$$\frac{a \sin (x + \varphi)}{\cos \varphi} = c, \text{ де } \cos \varphi \neq 0,$$

звідки $\sin (x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi$.

Якщо $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, то $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, а тому дане рівняння набуває вигляду:

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Звідси $x = m\pi + (-1)^m \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$,

або в градусах:

$$x = m\,180^\circ + (-1)^m \left(\arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^\circ - \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)^\circ.$$

Приклад. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$.

Розв'язування.

Поділивши рівняння на $\sqrt{3}$, матимемо:

$$\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x = 1,$$

$$\sin x + \operatorname{tg} 30^\circ \cos x = 1,$$

або

$$\frac{\sin (x + 30^\circ)}{\cos 30^\circ} = 1,$$

$$\sin (x + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

звідки

$$x = m\,180^\circ + (-1)\ \ 60^\circ - 30^\circ.$$

Зауваження. Можна було б рівняння $a\sin x+b\cos x=c$ розв'язувати так: $\sin x$ і $\cos x$ виразити через $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ (див. § 48), але тоді одержимо рівняння з дробовими членами.

Про ці рівняння мова йтиме далі.

§ 99. Деякі неозначені вирази, що можуть зустрітися при дослідженні коренів тригонометричних рівнянь.

1. *Перший вид неозначеності*: $\frac{0}{0}$.

Вираз $\frac{0}{0}$ може дорівнювати якому завгодно числу. Справді рівності $\frac{0}{0}=2$; $\frac{0}{0}=3$; $\frac{0}{0}=\sqrt{3}$, $\frac{0}{0}=\frac{1}{2}$ і т. д. правильні, в чому легко переконатися, користуючись залежністю між діленим, дільником і часткою, а саме: $0=0\cdot 2$; $0=0\cdot 3$; $0=0\cdot\sqrt{3}$ і т. д. Іноді до цього виразу $\frac{0}{0}$ можна прийти, шукаючи границю частки двох функцій. Нехай треба визначити

$$\lim\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x\to a}.$$

Припустимо, що границі чисельника і знаменника — нулі; тоді, безпосередньо використовуючи теорему про границю частки (а саме: границя частки дорівнює частці границь діленого і дільника), приходимо до виразу $\frac{0}{0}$.

Це можна записати так:

$$\lim\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x\to a}=\frac{0}{0}.$$

Коли не знати виду функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$, тобто коли не знати, який є закон зміни чисельника і знаменника, тоді не можна вираз $\frac{0}{0}$ прирівняти до певного числа.

А в тих випадках, коли ми знаємо вид функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$, можна, як кажуть, *розкрити цю неозначеність* $\frac{0}{0}$, або знайти граничне значення цього дробу.

Часто це вдається зробити шляхом скорочення дробу, усуваючи з чисельника і знаменника той множник, який перетворює їх у нулі при $x=a$.

Пояснимо це на конкретних прикладах.

Приклад 1.

$$\lim\left[\frac{x^2-2x}{4x-8}\right]_{x\to 2}=\frac{2^2-2\cdot 2}{4\cdot 2-8}=\frac{0}{0}.$$

Якщо, перш ніж переходити до границі, скоротити дріб, а потім перейти до границі, то одержимо:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{4x - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)}{4(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x}{4} = \frac{1}{2}.$$

Неозначеність розкрита.

Приклад 2.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}.$$

Якщо, перш ніж переходити до границі, скоротити дріб, то матимемо:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{1 - \sin x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [1 + \sin x] = 2.$$

2. *Другий вид неозначеності*: $\frac{\infty}{\infty}$.

Коли якась функція $f(x)$ у міру того, як x наближається до певного числа, нескінченно зростає, то вона, по суті, не має границі, але умовно кажуть, що ця границя дорівнює нескінченності, і записують це так:

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x)] = \infty.$$

Наприклад,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [1 + \operatorname{tg} x] = \infty \quad \text{і} \quad \lim_{x \to 0} \frac{3}{1 - \cos x} = \infty.$$

Нехай дано:

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to 0}} \left(\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta}\right),$$

і це, очевидно, дорівнює $\frac{\infty}{\infty}$.

Перетворимо вираз у дужках так:

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to 0}} \left(\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta}\right) = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to 0}} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{0}{0}.$$

Через те що вираз $\frac{\infty}{\infty}$ перетворився в $\frac{0}{0}$, то $\frac{\infty}{\infty}$ теж є неозначений вираз, як і $\frac{0}{0}$. Коли до цієї неозначеності ми приходимо, шукаючи границю частки значень двох функцій від x, тобто

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

то і цю неозначеність можна розкрити.

Покажемо, як це іноді легко зробити.

Приклад 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{x^2+2}.$$

Якщо зразу перейти до границі, застосовуючи відомі теореми, то матимемо $\frac{\infty}{\infty}$. Поділивши чисельник і знаменник на степінь, вищий від x, тобто на x^2, перейдемо до границі — і одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\frac{2}{1}=2.$$

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}$.

Розкриваємо неозначеність:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Приклад 3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-1}{x^2+2}=\frac{\infty}{\infty}.$$

Розкриваємо неозначеність:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}=\frac{3}{0}=\infty.$$

Отже, коли чисельник і знаменник є многочлени однакових степенів відносно невідомого, що нескінченно зростає, то, розкривши неозначеність, ми маємо скінченне число.

Коли степінь чисельника менший від степеня знаменника, то, розкривши неозначеність, матимемо як границю цього дробу нуль.

Якщо степінь чисельника більший за степінь знаменника, то дріб нескінченно зростає, або, як умовно кажуть, границя цього дробу дорівнює нескінченності (∞).

На підставі всього сказаного легко зрозуміти, що:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\,\mathrm{tg}^2x+5}{\mathrm{tg}^2x+4}=\lim_{\mathrm{tg}\,x\to\infty}\frac{3\,\mathrm{tg}^2x+5}{\mathrm{tg}^2x+4}=3;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{5\,\mathrm{tg}^2x+4\,\mathrm{tg}\,x-3}{2\,\mathrm{tg}^3x+4}=0;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}^3x+1}{\mathrm{tg}\,x+2}=\lim_{\mathrm{tg}\,x\to\infty}\frac{\mathrm{tg}^3x+1}{\mathrm{tg}\,x+2}=\infty.$$

3. *Третій вид неозначеності*: $0 \cdot \infty$.

Справді,

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to 0}} \left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right) = 0 \cdot \infty,$$

а з другого боку:

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to 0}} \left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right) = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to 0}} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{0}{0}.$$

Через те що $\frac{0}{0}$ є вираз неозначений, то $0 \cdot \infty$ являє собою неозначеність, яку так само можна іноді розкрити, звівши її до неозначеності $\frac{0}{0}$.

Приклад.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[(1 - \sin x) \frac{2}{\cos^2 x}\right] = 0 \cdot \infty.$$

Розкриття неозначеності:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[(1 - \sin x) \frac{2}{\cos^2 x}\right] = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2(1 - \sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2}{1 + \sin x} = \frac{2}{1 + 1} = 1.$$

4. До неозначених виразів належать також вирази:

$$\infty - \infty, \quad 1^{\infty} \text{ і } 0^0,$$

але на цьому ми не зупинятимемось.

§ 100. Рівняння виду алгебричних відносно тригонометричних функцій, що потребують дослідження коренів.

1. Коли після перенесення всіх членів у ліву частину рівняння, ліва частина перетвориться в добуток цілих тригонометричних виразів, то, як відомо, щоб знайти корені рівняння, необхідно кожний співмножник, куди входить невідоме, прирівняти нулеві.

Слід зауважити, що, прирівнявши нулеві один з співмножників, ми можемо добуток інших співмножників перетворити в нескінченність (∞), а вираз $0 \cdot \infty$ є неозначеність і може не дорівнювати нулеві. Тому корені, які ми одержали, прирівнявши один з співмножників нулеві, треба дослідити.

Якщо після розкриття неозначеності одержимо 0, то ми маємо справу з дійсними коренями даного рівняння, а якщо неозначеність $0 \cdot \infty$ дає не 0, тоді корені будуть сторонні. Їх слід відкинути.

Приклад. $\operatorname{ctg} x(\sec 2x - 1) = 0$.

Розв'язування. Це рівняння розпадається на два:

$$\operatorname{ctg} x = 0 \text{ і } \sec 2x = 1.$$

Перше з них дає

$$x = (2k+1)\,90^\circ, \tag{1}$$

а друге

$$2x = k \cdot 360^\circ, \text{ звідки } x = k \cdot 180^\circ. \tag{2}$$

Шляхом підставляння переконуємось, що всі значення для x з формули (1) перетворюють другий співмножник у скінченне число, а тому ми тут маємо справу з справжніми коренями.

Переходимо до формули (2). Усі значення для x, які дає ця формула, перетворюють перший співмножник у ∞, а другий — звичайно в нуль.

Доведеться розкрити неозначеність.

$$\lim_{x \to k\pi}\left[\operatorname{ctg} x(\sec 2x - 1)\right] = \infty \cdot 0;$$

$$\lim_{x \to k\pi} \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{\sin x \cos 2x} = \lim_{x \to k\pi} \frac{\cos x \cdot 2\sin^2 x}{\sin x \cos 2x} =$$

$$= \lim_{x \to k\pi} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \lim_{x \to k\pi} \operatorname{tg} 2x = 0.$$

Ми одержали 0, а тому значення для x, які дає формула (2), є так само корені даного рівняння.

Отже, остаточно маємо дві формули для коренів даного рівняння:

$$x = (2k+1)\,90^\circ, \text{ або } x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \tag{1}$$

і

$$x = k \cdot 180^\circ, \text{ або } x = k\pi. \tag{2}$$

2. Коли в тригонометричне рівняння входять дроби, знаменники яких містять у собі тригонометричні функції від невідомих кутів, то здебільшого, перенісши всі члени в ліву частину, зводять рівняння до виду

$$\frac{A}{B} = 0.$$

Корені цього рівняння треба шукати серед коренів рівняння

$$A = 0; \tag{1}$$

$$B = \infty. \tag{2}$$

Коли при $A=0$, $B\neq 0$, тоді маємо справжні корені даного рівняння. У тому випадку, коли корені рівняння $A=0$ перетворюють B в 0, треба розкрити неозначеність $\frac{0}{0}$.

Якщо результат розкриття неозначеності буде 0 (нуль), тоді корені справжні, а коли одержимо число, нерівне нулеві, корені рівняння $A=0$ треба відкинути як сторонні.

Аналогічно, коли корені рівняння $B=\infty$ не перетворюють чисельник у ∞ (нескінченність), ми маємо справжні корені даного рівняння, а якщо корені рівняння $B=\infty$ перетворюють у ∞ (нескінченність) також і чисельник A, то корені треба дослідити, розкривши неозначеність $\frac{\infty}{\infty}$.

Коли результат розкриття неозначеності є 0 (нуль), ми робимо висновок, що корені рівняння $B=\infty$ є справжні корені даного рівняння, а коли, розкривши неозначеність, одержимо число, нерівне нулеві, корені відкидають як сторонні.

Приклад. $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x-1}-\frac{1}{\operatorname{tg} x+1}=2$.

Розв'язування.

$$\frac{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x+1)-(\operatorname{tg} x-1)-2(\operatorname{tg}^2 x-1)}{\operatorname{tg}^2 x-1}=0,$$

або

$$\frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x-1}=0.$$

Рівняння розпадається на два рівняння:

$$3-\operatorname{tg}^2 x=0 \tag{1}$$

і

$$\operatorname{tg}^2 x-1=\infty. \tag{2}$$

Усі значення для x з формули (1) перетворюють чисельник у нуль, а знаменник — у скінченне число, а тому ця формула дає справжні корені даного рівняння, а корені рівняння (2) перетворюють не тільки чисельник, але й знаменник у ∞. Доведеться неозначеність $\frac{\infty}{\infty}$ розкрити.

На підставі сказаного в § 99

$$\lim_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}}\frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x-1}=-1 \text{ (не нуль).}$$

Значить, корені з формули (2) треба відкинути як сторонні для даного рівняння. Отже, маємо остаточно одну формулу для коренів: $x=k\,180^\circ\pm 60^\circ$, або $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$. Цю формулу можна записати так:

$$x=(3k\pm 1)\,60^\circ, \text{ або } x=(3k\pm 1)\frac{\pi}{3}.$$

§ 101. Ірраціональні тригонометричні рівняння.

Ірраціональні тригонометричні рівняння — це такі рівняння, в яких тригонометричні функції від невідомих кутів стоять під знаком кореня.

Ми розглядатимемо тільки такі ірраціональні тригонометричні рівняння, до яких входять квадратні корені.

Після деяких перетворень (аналогічних тим, які ми робили при розв'язуванні алгебричних ірраціональних рівнянь), піднесемо до квадрата обидві частини рівняння. Ми неминуче зведемо тригонометричне рівняння до одного з рівнянь, раніше розглянутих.

Оскільки піднесення до квадрата може сприяти утворенню рівняння, нееквівалентного даному, необхідно корені перевірити, підставивши їх у дане рівняння. Так само роблять, розв'язуючи звичайні алгебричні рівняння, але тут, при розв'язуванні тригонометричних рівнянь, перевірку робити значно складніше.

Приклад. $2\cos\frac{\varphi}{2}=(1+\sqrt{3})\sqrt{\sin\varphi}$.

Розв'язування. Підносимо до квадрата обидві частини рівняння.

$$4\cos^2\frac{\varphi}{2}=\sin\varphi(1+2\sqrt{3}+3),$$

або

$$4\cos^2\frac{\varphi}{2}=4\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}(2+\sqrt{3}).$$

Через те що $\sin\frac{\varphi}{2}\neq 0$, ділимо на $4\sin^2\frac{\varphi}{2}$, матимемо:

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}(2+\sqrt{3})=0,$$

або

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\left[\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}-(2+\sqrt{3})\right]=0.$$

Це рівняння розпадається на два:

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=0 \quad \text{і} \quad \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=2+\sqrt{3}.$$

З першого $\frac{\varphi}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, а з другого $\frac{\varphi}{2}=m\pi+\frac{\pi}{12}$. Звідси маємо такі дві формули для коренів:

$$\varphi=(2k+1)\pi, \text{ або } \varphi=(2k+1)\,180^\circ. \tag{1}$$

і

$$\varphi=2m\pi+\frac{\pi}{6}, \text{ або } \varphi=m\,360^\circ+30^\circ. \tag{2}$$

Перевіримо ці корені. Виявляється, що значення для φ з формули (1) задовольняють дане рівняння, а тому ці корені справжні. Підставимо тепер значення для φ з формули (2) в дане рівняння, маємо:

$$2\cos(m\,180^\circ+15^\circ)=(1+\sqrt{3})\sqrt{\sin(m\,360^\circ+30^\circ)}.$$

Якщо m парне число, то ми одержимо тотожність:

$$2\,\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}=(1+\sqrt{3})\frac{\sqrt{2}}{2},$$

а коли m непарне число, то ми матимемо неможливу рівність:

$$\frac{-\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}=\frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, значення для φ з формули (2), які відповідають непарним значенням m, треба відкинути.

Остаточно маємо формули:

$$\varphi=(2k+1)\pi, \text{ або } \varphi=(2k+1)\,180^\circ; \qquad (1)$$

$$\varphi=4k\pi+\frac{\pi}{6}, \text{ або } \varphi=720^\circ k+30^\circ. \qquad (2)$$

§ 102. Показникові тригонометричні рівняння.

Розв'язування показникових тригонометричних рівнянь не являє собою нічого особливого порівнюючи з розв'язуванням показникових рівнянь в алгебрі.

Розв'язуючи показникові рівняння, по можливості, намагаються звести їх до рівності степенів з однаковими основами, а далі, прирівнявши показники степенів, зводять рівняння до раніш розглянутих тригонометричних рівнянь.

У тому випадку, коли такої рівності степенів утворити не можна, треба, як і в алгебрі, застосовувати логарифмування.

Приклад. $32^{(\sin x-\cos x)}=2.$

Розв'язування:

$$2^{5(\sin x-\cos x)}=2,$$

звідки:

$$5(\sin x-\cos x)=1,$$

або

$$\sin x-\cos x=0{,}2.$$

Вводячи допоміжний кут, переписуємо рівняння так:

$$\sin(x-45^\circ)=0{,}2\,\cos 45^\circ;$$

$$x-45^\circ=m\,180^\circ+(-1)^m\,8^\circ\,7'\,48'';$$

$$x=m\,180^\circ+(-1)^m\,8^\circ\,7'\,48''+45^\circ.$$

§ 103. Тригонометричні рівняння, що містять у собі обернені тригонометричні функції.

Ці рівняння бувають двох видів.

1) Деякі з них можна звести до суто тригонометричних, тобто до таких, в які невідоме входить під знаком тригонометричних функцій.

2) Деякі з них можна звести до звичайних алгебричних рівнянь, використовуючи формули гоніометрії.

Коли в рівняння, яке треба розв'язати, входить тільки одн обернена тригонометрична функція, то, залишивши її в які завгодно частині рівняння і згрупувавши інші члени в другі частині, виконуємо над обома частинами операцію обернену. Напр., коли в рівняння входить arc sin, то від обох частин знаходять синус.

Коли ж у рівнянні є не одна, а кілька обернених тригонометричних функцій, то здебільшого зручно буває звести їх, по можливості, до однойменних (у деяких випадках — згрупувавши їх в одній частині), а далі від обох частин рівняння взяти тригонометричну функцію, обернену тій, що входить у рівняння.

Приклад 1. $\arccos\frac{x}{2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$.

Розв'язування. Через те що за означенням арккосинуса

$$\arccos\frac{x}{2}\geqslant 0,$$

то і

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\geqslant 0.$$

звідки $x\geqslant 0$.

А на підставі того, що абсолютна величина косинуса не може бути більшою 1, $x\leqslant 2$.

Шляхом підставляння переконуємося, що 0 і 2 не є корені даного рівняння, а тому $0<x<2$.

Маючи на увазі цю нерівність, робимо відповідні перетворення:

$$\arccos\frac{x}{2}=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}},$$

або

$$\arccos\frac{x}{2}=\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Звідси:

$$\frac{x}{2}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Через те що

$$x\neq 0,$$

це рівняння можна скоротити на x, одержимо:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Підносимо до квадрата:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$4=1+x^2.$$

З двох значень кореня вибираємо тільки одне — додатне (за умовою), а тому:

$$x=\sqrt{3}.$$

Приклад 2. $\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{x}+1\right)-\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{x}-1\right)=\frac{\pi}{4}$;

Розв'язування. Перетворюємо в суму:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{x}+1\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(1-\sqrt{x}\right)=\frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x}+1+1-\sqrt{x}}{1-(1-x)}=\frac{\pi}{4}.$$

Звідси:

$$\frac{2}{x}=1;$$

$$x=2.$$

Приклад 3. $x=\arcsin(\cos x)$.

Розв'язування. Знаходимо від двох частин синус:

$$\sin x=\cos x.$$

Через те що

$$\cos x\neq 0,$$

це рівняння перетворюємо в таке:

$$\operatorname{tg} x=1.$$

Звідси:

$$x=m\pi+\frac{\pi}{4}.$$

Ураховуючи те, що x є арксинус в певному інтервалі, беремо для x тільки одне значення:

$$x=\frac{\pi}{4}.$$

Приклад 4. $\arccos 2x+\arcsin\sqrt{1-x^2}=\frac{4}{3}\pi$

Розв'язування.

Через те що

$$\sqrt{1-x^2}>0,$$

то

$$\arcsin\sqrt{1-x^2}$$

міститься в інтервалі $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Щоб рівняння визначили можливу рівність при дійсних значеннях для x, треба, щоб кут $\arccos 2x$ був більший $\frac{\pi}{2}$, а коли так, то $x<0$.

На підставі однієї з формул § 79

$$\arcsin\sqrt{1-x^2}=\arccos\sqrt{1-(1-x^2)}=\arccos\sqrt{x^2}.$$

Ураховуючи те, що $x<0$ і взявши арифметичне значення $\sqrt{x^2}$, одержимо:

$$\arcsin\sqrt{1-x^2}=\arccos(-x).$$

Рівняння набирає такого вигляду:

$$\arccos 2x+\arccos(-x)=\frac{4}{3}\pi.$$

На підставі того, що

$$\arccos 2x+\arccos(-x)>\pi,$$

або, інакше, на підставі того, що

$$2x+(-x)<0,$$

застосовуємо другу формулу для суми арккосинусів:

$$2\pi-\arccos\left[2x\cdot(-x)-\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}\right]=\frac{4}{3}\pi,$$

або

$$\arccos\left[-2x^2-\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}\right]=\frac{2}{3}\pi,$$

звідки

$$2x^2+\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}.$$

Розв'язавши ці рівняння, матимемо:

$$x=\pm\frac{1}{2}.$$

Беремо один корінь $-\frac{1}{2}$, згідний з умовою.

Перевірка:

$$\arccos\left(2-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}\pi,$$

$$\arccos(-1)+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\pi,$$

тобто

$$\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi \text{ (тотожність).}$$

В и с н о в о к. $-\frac{1}{2}$ є корінь рівняння.

Цікаво розв'язати з учнями ще такий приклад[1]:

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}+\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{2}{3}\pi.$$

---

[1] Із збірника Рибкіна (з деякою поправкою умови).

Виключаючи випадки $x^2=1$ і $x=0$ (бо при цих значеннях для x рівняння не задовольняється), треба зупинитись на розгляді таких випадків:

I-й $x^2<1$ і $x<0$; корень $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

II-й $x^2>1$ і $x>0$; корень $\sqrt{3}+2$.

III-й $x^2>1$ і $x<0$; коренів нема.

IV-й $x^2<1$ і $x<0$; „ „

Детально провести дослідження.

§ 104. Найпростіші системи двох тригонометричних рівнянь з двома невідомими.

Ми розглянемо системи двох видів.

1) Тригонометричні функції двох невідомих кутів входять в одне рівняння, а друге рівняння визначає суму або різницю кутів.

2) Обидва рівняння містять у собі тригонометричні функції кутів (але не кути).

I. Розв'язуючи систему рівнянь першого типу, намагаються, знаючи суму, визначити різницю або, навпаки, знаючи різницю, визначити суму кутів.

Найпростіші системи цього типу такі:

I група

1) $x \pm y=\alpha$, $\sin x \pm \sin y=l$;

2) $x \pm y=\alpha$, $\sin x \mp \sin y=l$;

3) $x \pm y=\alpha$, $\cos x \pm \cos y=l$;

4) $x \pm y=\alpha$, $\cos x \mp \cos y=l$, де $|l| \leqslant 2$;

II група

1) $x \pm y=\alpha$, $\sin x \sin y=l$;

2) $x \pm y=\alpha$, $\cos x \cos y=l$;

3) $x \pm y=\alpha$, $\sin x \cos y=l$;

III група

1) $x \pm y=\alpha$, $\frac{\sin x}{\sin y}=l$;

2) $x \pm y=\alpha$, $\frac{\cos x}{\cos y}=l$;

3) $x \pm y=\alpha$, $\frac{\sin x}{\cos y}=l$;

IV група

1) $x \pm y = \alpha,$
$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = l;$

2) $x \pm y = \alpha,$
$\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = l;$

3) $x \pm y = \alpha,$
$\operatorname{tg} x \mp \operatorname{tg} y = l;$

4) $x \pm y = \alpha,$
$\operatorname{ctg} x \mp \operatorname{ctg} y = l;$

V група

1) $x \pm y = \alpha,$
$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = l;$

2) $x \pm y = \alpha,$
$\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = l,$

3) $x \pm y = \alpha,$
$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} y = l,$

або рівносильні їм системи:

$x \pm y = \alpha,$
$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = l;$

$x \pm y = \alpha;$
$\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} y} = l,$

$x \pm y = \alpha,$
$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} y} = l$

і т. д.

1) Зупинимось спочатку на I групі.

Розглянемо, наприклад, таку систему з цієї групи:

$$x + y = \alpha;$$
$$\sin x + \sin y = l.$$

Замість 2-го рівняння маємо:

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = l,$$

або

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{x-y}{2} = l.$$

Звідси:

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{l}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Розв'язати це рівняння можна тільки в тому випадку, коли

$$\left| \frac{l}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right| \leqslant 1.$$

Тоді

$$\frac{x-y}{2} = 2k\pi \pm \arccos \left(\frac{l}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right).$$

Звідси:

$$x - y = 4k\pi \pm 2 \arccos \left(\frac{l}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right).$$

Приєднавши сюди рівняння $x+y=\alpha$, одержимо алгебричну систему відносно x і y.

Розв'язавши її, матимемо:

$$x=\arccos\left(\frac{l}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)+\frac{\alpha}{2};$$

$$y=\frac{\alpha}{2}-\arccos\left(\frac{l}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Аналогічно розв'язують і інші системи цієї групи.

Приклад. Розв'язати систему:

$$x+y=60^\circ,$$

$$\sin x+\sin y=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

де x і y — кути трикутника.

Розв'язування.

Замість 2-го рівняння напишемо:

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

або

$$2\sin 30^\circ\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

або

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\left(\arccos\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^\circ=15^\circ;$$

а тому

$$\frac{x-y}{2}=k\ 360^\circ\pm 15^\circ,$$

$$x-y=k\ 720^\circ\pm 30^\circ.$$

Приєднавши до цього дане рівняння $x+y=60^\circ$, одержимо з системи двох алгебричних рівнянь:

$$x=k\cdot 360^\circ+30^\circ\pm 15^\circ.$$

Оскільки x є кут трикутника, матимемо: $x_1=45^\circ$; $x_2=15^\circ$.

Звідси $y_1=15^\circ$; $y_2=45^\circ$.

По суті ми маємо тут один розв'язок: один з кутів 45°, а другий 15°.

2) Щодо систем II групи, то для розв'язування кожної з них треба спочатку ліву частину другого рівняння представити як суму або різницю синусів, косинусів, а потім зробити відповідні спрощення в цьому рівнянні, використовуючи перше рівняння.

Наприклад, візьмемо систему:

$$x+y=\alpha;$$
$$2\sin x\cos y=l.$$

Друге рівняння перетворюємо в таке:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=l,$$

або

$$\sin\alpha+\sin(x-y)=l,$$

звідки

$$\sin(x-y)=l-\sin\alpha.$$

Визначаємо $x-y$, а далі за сумою $x+y$ і різницею $x-y$ можна відшукати, чому дорівнюють x і y.

3) Для розв'язування систем III групи треба, представивши в кожній з них друге рівняння як пропорцію (а саме так:

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{l}{1};\quad \frac{\cos x}{\cos y}=\frac{l}{1};\quad \frac{\sin x}{\cos y}=\frac{l}{1}\Big),$$

замінити його похідною пропорцією, однією з таких:

$$\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{l+1}{l-1};\quad \frac{\cos x+\cos y}{\cos x-\cos y}=\frac{l+1}{l-1}\ \text{і т. д.}$$

Щоб уявити собі зручність таких перетворень, розглянемо таку систему:

$$x+y=\alpha;$$
$$\frac{\sin x}{\sin y}=l.$$

Друге рівняння перепишемо так:

$$\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{l+1}{l-1},$$

або

$$\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}=\frac{l+1}{l-1},$$

що після скорочення і використання 1-го рівняння дає:

$$\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}=\frac{l+1}{l-1}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Звідси:

$$\frac{x-y}{2}=m\pi+\operatorname{arc\,ctg}\left[\frac{l+1}{l-1}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right];$$

$$x-y=2m\pi+2\operatorname{arc\,ctg}\left[\frac{l+1}{l-1}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right].$$

Приєднавши до останнього рівняння перше рівняння цієї системи, а саме: $x+y=\alpha$, одержимо з нової системи:

$$x=m\pi+\frac{\alpha}{2}+\text{arc ctg}\left[\frac{l+1}{l-1}\,\text{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\right];$$

$$y=\frac{\alpha}{2}-m\pi-\text{arc ctg}\left[\frac{l+1}{l-1}\,\text{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\right].$$

Аналогічно розв'язують і інші системи цієї групи.

4. Перейдемо до IV групи.

Розв'язування систем 1-ої і 2-ої цієї групи відрізняється від розв'язування систем 3-ої і 4-ої.

Візьмемо першу систему в такому вигляді:

$$x+y=\alpha;$$
$$\text{tg}\,x+\text{tg}\,y=l.$$

Друге рівняння перетвориться в таке:

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=l, \text{ або } \frac{\sin\alpha}{\cos x\cos y}=l, \text{ або } \cos x\cos y=\frac{\sin\alpha}{l}.$$

Отже, розв'язування цієї системи звелося до однієї з систем II групи:

$$x+y=\alpha;$$
$$\cos x\cos y=\frac{\sin\alpha}{l}.$$

Аналогічно розв'язують і 2-у систему.

Щоб показати, чим відрізняється спосіб розв'язування 3-ої і 4-ої систем, візьмемо 3-ю систему в такому вигляді:

$$x+y=\alpha;$$
$$\text{tg}\,x-\text{tg}\,y=l.$$

Друге рівняння перетворюємо в таке:

$$\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}=l.$$

Звідси:

$$\sin(x-y)=l\cos x\cos y,$$

а

$$2\sin(x-y)=l[\cos(x+y)+\cos(x-y)],$$

або

$$2\sin(x-y)-l\cos(x-y)=l\cos\alpha.$$

З такого рівняння типу $a\sin\varphi+b\cos\varphi=c$ ми визначаємо $x-y$, а далі, використавши перше рівняння $x+y=\alpha$, визначимо x і y.

Аналогічно розв'язують 4-у систему.

Ми обмежилися розглядом тільки систем чотирьох груп. У класі з учнями навряд чи доведеться розглянути більше систем.

II. Для систем тригонометричних рівнянь другого типу, тобто таких, в які входять тільки тригонометричні функції кутів (а не кути), не можна дати загального методу розв'язування, бо види рівнянь, що входять до складу цих систем, дуже різноманітні.

Ось найпростіші системи такого типу:

I група 1) $\sin x \cos y = l$; $\cos x \sin y = l_1$. 2) $\sin x \sin y = l$; $\cos x \cos y = l_1$.

II група 1) $\sin x \pm \sin y = l$; $\cos x \pm \cos y = l_1$. 2) $\sin x \pm \sin y = l$; $\cos x \mp \cos y = l_1$.

III група 1) $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = l$; $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = l_1$. 2) $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = l$; $\operatorname{ctg} x \mp \operatorname{ctg} y = l_1$.

1. Покажемо, як розв'язати одну з систем I групи:

$$\sin x \cos y = l;$$
$$\cos x \sin y = l_1.$$

До двох частин першого рівняння додамо відповідні частини другого, а потім від двох частин першого віднімемо відповідні частини другого.

Одержимо:

$$\sin(x+y) = l + l_1;$$
$$\sin(x-y) = l - l_1.$$

Звідси:

$$x + y = m\pi + (-1)^m \arcsin(l + l_1);$$
$$x - y = m_1\pi + (-1)^{m_1} \arcsin(l - l_1).$$

З цієї алгебричної системи можна визначити x і y. Аналогічно, замість системи

$$\sin x \sin y = l;$$
$$\cos x \cos y = l_1$$

маємо:

$$x + y = 2k\pi \pm \arccos(l_1 - l);$$
$$x - y = 2k_1\pi \pm \arccos(l + l_1).$$

Звідси визначаємо x і y.

2. Перейдемо до II групи. Візьмемо одну систему цієї групи, наприклад, таку:

$$\sin x + \sin y = l;$$
$$\cos x + \cos y = l_1.$$

Перепишемо її так:

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = l;$$

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = l_1.$$

Звідси:

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{l}{l_1}, \text{ а } \frac{x+y}{2}=m\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{l}{l_1};$$

$$x+y=2m\pi+2\operatorname{arc\,tg}\frac{l}{l_1}.$$

Підставивши це значення для $x+y$ у перше рівняння, одержимо після деяких перетворень:

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{(-1)^m\sqrt{l^2+l_1^2}}{2}.$$

Звідси визначаємо $\frac{x-y}{2}$, а потім $x-y$.

Знаючи суму $x+y$ і різницю $x-y$, можна визначити x і y.

Приклад.

$$\sin x+\sin y=\frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$\cos x+\cos y=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Розв'язати цю систему, коли x і y — гострі кути.

Розв'язування.

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Звідси:

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=1;$$

$$\frac{x+y}{2}=m\,180^\circ+45^\circ;$$

$$x+y=m\,360^\circ+90^\circ.$$

За умовою

$$m=0 \text{ і } x+y=90^\circ.$$

Підставивши це значення для $x+y$ в перше рівняння даної системи, одержимо:

$$2\sin 45^\circ\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

звідки

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Через те що x і y гострі кути, з останнього рівняння маємо:

$$\frac{x-y}{2}=\pm 30^\circ;$$

$$x-y=\pm 60^\circ.$$

Коли $x > y$, то

$$x + y = 90^\circ;$$
$$x - y = 60^\circ.$$

Звідси:

$$x = 75^\circ, \text{ а } y = 15^\circ.$$

Ми обмежилися розглядом тільки систем рівнянь двох груп, які мають більше практичне застосування.

§ 105. Приклади і задачі.

Розв'язати рівняння.

1. $\sin x = \frac{1}{2}$.
2. $\cos x = 0$.
3. $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. $\operatorname{tg} 3x = -1$.
5. $\cos(2x + 10^\circ) = -\frac{1}{2}$.
6. $\sin(5x - 20^\circ) = -1$.
7. $\sin 5x = \sin(3x + 40^\circ)$,
   коли $0 < x < 360^\circ$.
8. $\cos(2x + 15^\circ) = \cos(x - 10^\circ)$.
9. $\operatorname{tg}(5x - 50^\circ) = \operatorname{tg}(2x + 30^\circ)$,
   коли x є кут трикутника.
10. $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} x$.
11. $5\sin^2 x + 3\cos^2 x = 7\sin x$.
12. $2\cos^2 x + \sin^2 x = 3\sin x \cos x$.
13. $\sin x \cos^3 x + \cos^2 x \sin^2 x - 3\cos x \sin^3 x - 3\sin^4 x = 0$.
14. $1 + \cos x = 3\sin\frac{x}{2}$.
15. $1 - \cos x = \frac{3}{2}\sin x \sin\frac{x}{2}$.
16. $1 + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(45^\circ + \frac{x}{2}\right)$.
17. $1 - \sin x = \sqrt{3}\sin\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)$.
18. $20\cos x = 7\sin\frac{x}{2}$.
19. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.
20. $7\sin x + \cos x = 5$.

21. $2\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 2$.

22. $\sin(x + 15^\circ)\sin(x - 40^\circ) = \sin(50^\circ - x)\cos(75^\circ - x)$.

23. $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\operatorname{tg} x = 0$.

24. $\frac{3 - 4\sin^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0$.

25. $\frac{2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1} = 0$.

26. $\frac{2}{4\operatorname{tg} x - 3} + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 2} = \frac{7 - 2\operatorname{tg} x}{4\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x - 6}$.

27. $2\sin\frac{\varphi}{2} = \left(\sqrt{3} + 1\right)\sqrt{\sin\varphi}$.

28. $3\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{6\cos\varphi}$.

29. $5^{2 + \operatorname{tg} x} = 625$.

30. $4 \cdot 2^{1 - \cos x} - 3 \cdot 2^{\sin^2\frac{x}{2}} = 10$.

31. $x = \arccos(x)$.

32. $\arcsin x - \arcsin\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3}$.

33. $\operatorname{arc\,tg} x - \arcsin\frac{2 - x}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

34. Розв'язати систему:

$$x - y = 60^\circ;$$
$$\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

35. Розв'язати систему:

$$x + y = 135^\circ;$$
$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2.$$

36. Розв'язати систему:

$$\sin x + \sin y = 1{,}4;$$
$$\cos x + \cos y = -0{,}2, \text{ коли } 0 < x < 180^\circ.$$

37. Сторони AB і AC $\triangle ABC$ дорівнюють 10 і 12. Визначити кут A між ними, якщо площа трикутника дорівнює 30 кв. од. (до § 90).

38. У $\triangle ABC$ відношення двох сторін $\frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$; $\angle A = 30^\circ$. Визначити кути B і C (до § 90).

39. Кожна з непаралельних сторін трапеції дорівнює меншій основі. Відношення основ дорівнює 1 : 2. Визначити кути трапеції.

40. Розв'язати попередню задачу, припустивши, що відношення основ $2:5$ (до § 90).

41. У $\triangle ABC$ сторона $AB = c = 6$; $AC = b = 12$. Визначити кут A, якщо площа $\triangle ABC$ більша на 4 кв. од. площі квадрата з стороною, рівною проекції сторони AB на пряму AC (до § 96 і § 90.)

42. У $\triangle ABC$ кут B в 3 рази більший від кута A; $AB:BC$, або $c:a = 2:1$. Визначити кути B і C трикутника (до § 97 і § 91).

43. У прямокутному трикутнику відношення суми катетів до гіпотенузи дорівнює $5:4$. Визначити гострі кути (до § 96 або § 98 і потім § 92).

44. Визначити кут при головній вершині B рівнобедреного трикутника, коли відомо, що перпендикуляр, опущений з вер-

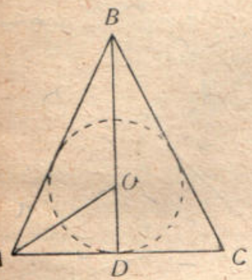

Рис. 119.

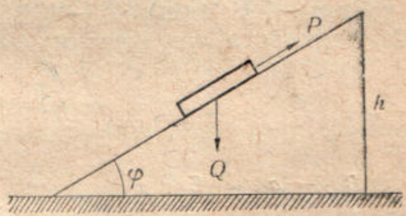

Рис. 120.

шини A (кута при основі) на одну з рівних сторін ділить її у відношенні $5:6$ (рахуючи від вершини B) (до § 97 і § 91).

45. У рівнобедреному трикутнику відношення однієї з рівних сторін до віддалі вершини при основі від центра вписаного кола дорівнює $15:7$. Визначити кути трикутника (рис. 119).

Вказівка. Нехай BD висота, а точка O центр вписаного кола. Припустивши, що $AB = 15m$, $AO = 7m$, $\angle A = x$, треба написати вираз для AD спочатку з $\triangle ABD$, а потім з $\triangle AOD$ і прирівняти ці вирази (до § 97).

46. Коли важка пластинка рухається по похилій площі з кутом підняття φ, то силу тяжіння P, паралельну похилості, можна визначити формулою:

$$P = Q(\sin\varphi + f\cos\varphi),$$

де Q — вага пластинки, а f — коефіцієнт тертя.

Визначити кут φ нахилу (рис. 120), коли сила тяжіння $(P) = 9$ *кг*, вага $(Q) = 10$ *кг*, а коефіцієнт тертя $f = \frac{1}{2}$ (до § 98).

47. У рівнобедреній трапеції кожна з бічних сторін дорівнює меншій основі.

Визначити кути трапеції, коли відношення більшої основи до висоти дорівнює 2 (до § 98, а потім § 92).

48. Площа рівнобедреної трапеції $ABCD$ (де $BC \parallel AD$ і

$AB = BC = CD$) (рис. 121) більша в $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ раза площі квадрата з стороною, рівною AB (до § 100 і § 90).

Вказівка. Розв'язування задачі зводиться до рівняння:

$$4 \sin \varphi + 4 \sin \varphi \cos \varphi = 3\sqrt{3}.$$

а це рівняння можна перетворити в ірраціональне, підставляючи замість $\cos \varphi$ вираз $\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$.

Після деяких перетворень приходимо до рівняння:

$$16 \sin^4 \varphi - 24\sqrt{3} \sin \varphi + 27 = 0.$$

Вказівка. Середній член $-24\sqrt{3} \sin \varphi$ потрібно розбити на два члени: $-6\sqrt{3} \sin \varphi$ і $-18\sqrt{3} \sin \varphi$ і, шляхом групування членів, розкласти ліву частину на множники.

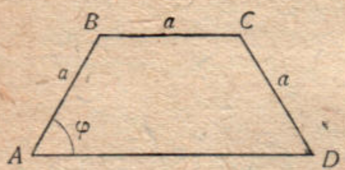

Рис. 121.

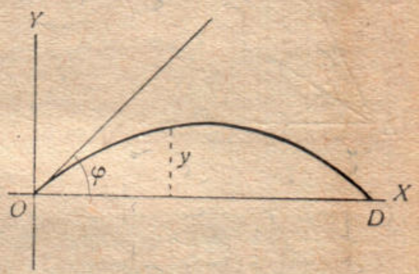

Рис. 122.

49. Коли не зважати на опір повітря, рівняння траєкторії польоту снаряда буде таке:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0 \cos^2 \varphi},$$

де y — висота польоту, x — переміщення в горизонтальному напрямі, φ — кут кидання, v_0 — початкова скорість, g — прискорення сили тяжіння.

Визначити кут φ, коли дано (рис. 122) далекість польоту $OD = a$ і початкову скорість v_0 (до § 96 і § 91).

Вказівка. Для точки D висота польоту $y = 0$, і тоді рівняння набуває вигляду:

$$a \operatorname{tg} \varphi - \frac{g a^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} = 0.$$

50. У правильної чотирикутної піраміди відношення висоти до сторони основи дорівнює $1 : \sqrt{6}$. Через діагональ основи проведена площина так, що площа цього перерізу дорівнює площі

діагонального перерізу (рис. 123). Визначити кут x між площиною перерізу і площиною основи (до § 92).

Вказівка.

$$\angle EOC = x; \ \angle KOE = 90^\circ - x.$$

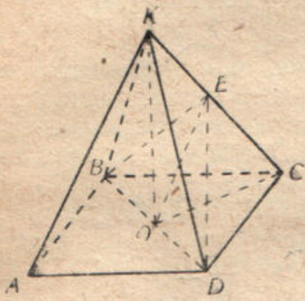

Рис. 123.

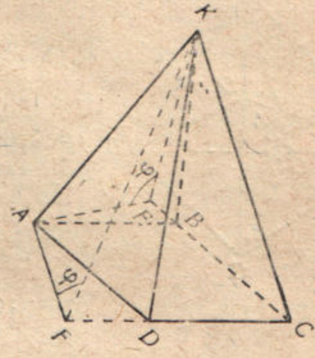

Рис. 124.

На підставі того, що площа $\triangle BKD =$ площі $\triangle BED$, $KO = OE$. З рівнобедреного $\triangle KOE$:

$$\angle KOE = \frac{1}{2}[180^\circ - (90^\circ - x)] = 45^\circ + \frac{x}{2}.$$

З $\triangle KOC$ пишемо вираз для $\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{x}{2}\right)$.

Визначаючи OC і OK через сторону основи a, використовуємо дане відношення.

51. Основа піраміди (рис. 124) ромб. Площини двох бічних граней, що утворюють гострий кут, перпендикулярні до площини основи, а площини двох інших бічних граней нахилені під одним кутом φ до основи. Визначити цей кут φ, коли відомо, що відношення бічної поверхні піраміди до площі основи дорівнює $\sqrt{3}$.

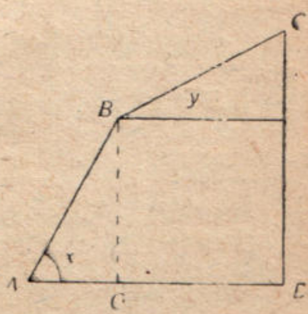

Рис. 125.

Вказівка. Опускаємо перпендикуляр AE на пряму BC і перпендикуляр AF на DC; тоді $\angle AEK = \angle AFK = \varphi$.

Увівши позначення a для сторони основи і α для кута ромба, знаходимо вирази для бічної поверхні $S_б = a^2 \sin\alpha \left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{\cos\varphi}\right)$ і для площі основи $P = a^2 \sin\alpha$.

52. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 125) $AB = BC = a$; $AD = b$; $CD = c$; $CD \perp AD$. Визначити кути нахилу сторін AB і BC до

сторони AD і зробити дослідження. Обчислити, припустивши, що

$$a=8; \quad b=9; \quad c=12.$$

Вказівка. Задача зводиться до розв'язування системи:

$$\left.\begin{aligned} \sin x+\sin y=\frac{c}{a}; \\ \cos x+\cos y=\frac{b}{a}. \end{aligned}\right\}$$

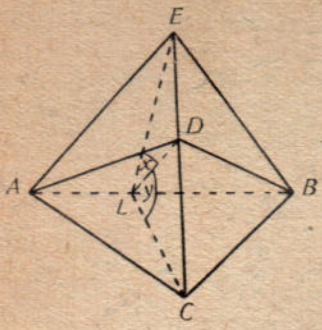

Рис. 126.

53. Площина, що проходить через ребро правильного тетраедра (рис. 126), ділить об'єм піраміди у відношенні 3 : 5. На які частини вона ділить двогранний кут?

Вказівка. Відомо, що двогранний кут правильного тетраедра дорівнює $70°31'43''$. Коли $EL \perp AB$ і $CL \perp AB$, то $\angle ELC=70°31'43''$.

Задача зводиться до розв'язування системи:

$$\left.\begin{aligned} x+y=70°31'43''; \\ \frac{\sin x}{\sin y}=\frac{5}{3}. \end{aligned}\right\}$$

РОЗДІЛ XII.

ЗРАЗКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ТРИГОНОМЕТРІЇ.

Задача № 1. Периметр бічної грані правильної трикутної піраміди дорівнює $2p$, кут між бічним ребром і стороною основи дорівнює α.

Піраміда перерізана площиною, що ділить висоту піраміди пополам і паралельна до площини основи. Визначити бічну поверхню зрізаної піраміди, коли дано: $p = 37$ *см*; $\alpha = 39°34'50''$ (рис. 127).

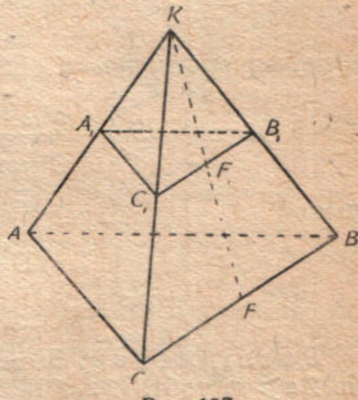

Рис. 127

Розв'язування.

Нехай у перерізі маємо $\triangle A_1B_1C_1$; сторона основи піраміди $CB = x$; бічне ребро $KB = KC = y$; KF — апофема піраміди.

За умовою:

$$2y + x = 2p. \qquad (1)$$

З прямокутного $\triangle CKF$ маємо:

$$\frac{x}{2} = y\cos\alpha, \text{ а } x = 2y\cos\alpha. \qquad (2)$$

Підставимо це значення x у рівняння (1), тоді одержимо:

$$2y + 2y\cos\alpha = 2p,$$

або

$$y(1 + \cos\alpha) = p,$$

звідки

$$y = \frac{p}{1+\cos\alpha} = \frac{p}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad (3)$$

а

$$x = \frac{2p\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{p\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (4)$$

Спробуємо бічну поверхню S зрізаної піраміди виразити через x.

З прямокутного $\triangle CKF$ апофема повної піраміди $KF = \frac{x}{2} \operatorname{tg} \alpha$, а за умовою і на підставі теореми про переріз піраміди площиною, паралельною площині основи:

$$C_1B_1 = \frac{x}{2}, \; FF_1 = \frac{x}{4} \operatorname{tg} \alpha.$$

Тоді для бічної поверхні S зрізаної піраміди маємо такий вираз:

$$S = \frac{3x + 3\frac{x}{2}}{2} \cdot \frac{x}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

або

$$S = \frac{9x^2 \operatorname{tg} \alpha}{16},$$

а це, використовуючи рівність (4), можна переписати так:

$$S = \frac{9p^2 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{16 \cos^4 \frac{\alpha}{2}} = \frac{9p^2 \sin \alpha \cos \alpha}{16 \cos^4 \frac{\alpha}{2}},$$

тобто

$$S = \frac{9p^2 \sin 2\alpha}{32 \cos^4 \frac{\alpha}{2}}.$$

Дослідження. За цією формулою задача можлива, коли $\sin 2\alpha > 0$, тобто $2\alpha < 180°$, або $\alpha < 90°$.

Це можна перевірити і геометрично. Справді, в рівнобедреному трикутнику кут при основі завжди гострий, а тому $\alpha < 90°$ а, крім того, на підставі теореми „сума двох плоских кутів тригранного кута більша від третього“, маємо:

$$2\alpha > 60°, \text{ а } \alpha > 30°.$$

Значить, задача можлива при наявності такої нерівності:

$$\boxed{30° < \alpha < 90°.}$$

Числові дані задачі цілком відповідають цій умові. Справді:

$$30° < 39°34'50'' < 90°.$$

Обчислення:

$$\lg S = \lg 9 + 2\lg p + \lg \sin 2\alpha - \lg 32 - 4\lg\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\begin{aligned}
&\lg 9 &&= 0{,}95424\\
&2\lg p &&= 3{,}13640\\
&\lg\sin 2\alpha &&= \overline{1}{,}99218\\
&-\lg 32 &&= \overline{2}{,}49485\\
&-4\lg\cos\frac{\alpha}{2} &&= 0{,}10576
\end{aligned}$$

$\lg S = 2{,}68343;$

$S = 482{,}42 \approx \underline{482{,}4}.$

Допоміжні обчислення:

$\alpha = 39^\circ 34' 50'';$

$2\alpha = 79^\circ 9' 40'';$

$\frac{\alpha}{2} = 19^\circ 47' 25''.$

1) $\underline{\lg\sin 79^\circ 9' 40''}$ $d = 2;$

$\lg\sin 79^\circ 9' = \overline{1}{,}99217$

$40'' \qquad 1{,}3$

$\lg\sin 79^\circ 9' 40'' = \underline{\overline{1}{,}99218}.$

2) $\underline{\lg\cos 19^\circ 47' 25''}$ $d = 5;$

$\lg\cos 19^\circ 47' = \overline{1}{,}97358$

$20'' \qquad -1{,}7$

$5'' \qquad -0{,}42$

$\lg\cos 19^\circ 47' 25'' = \underline{\overline{1}{,}97356}.$

3) $4\lg\cos\frac{\alpha}{2} = 4 \cdot \overline{1}{,}97356 = \overline{1}{,}89424;$

$-4\lg\cos\frac{\alpha}{2} = \underline{0{,}10576}.$

4) $\lg 32 = 1{,}50515;$

$-\lg 32 = \underline{\overline{2}{,}49485}.$

5) $2{,}68343 \qquad d = 9;$

$68341 \text{ ——— } 4824$

$2 \text{ ——— } 0{,}2$

$4824{,}2.$

$S = 482{,}42 \approx \underline{482{,}4}.$

Задача № 2. Основою піраміди є трапеція, в якій кожна з бічних сторін і менша з паралельних має довжину a, а гострі кути дорівнюють α; бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут φ. Визначити об'єм цієї піраміди.

Дано (рис. 128):

$$AD = DC = CB = a;$$

$$\angle BAD = \angle ABC = \alpha;$$

$$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \varphi;$$

$$SO \perp OC.$$

Визначити V.

Позначення:

Об'єм піраміди $SABCD = V$.

Площа основи $ABCD = S$.

Висота SO піраміди $= H$.

Нехай K буде точка перетину діагоналей AC і BD.

Розв'язування. З рисунка видно, що проекція вершини S даної піраміди на площину основи є точка O (центр кола, описаного навколо рівнобедреної трапеції $ABCD$).

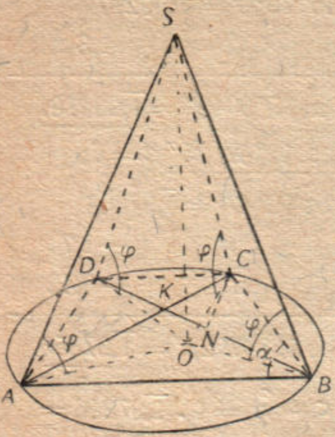

Рис. 128.

Справді, за умовою всі ребра піраміди нахилені під тим самим кутом до площини основи, а тому прямокутні трикутники SOA, SOB, SOC і SOD будуть рівні між собою за катетом SO і гострим кутом φ. Отже, OA, OB, OC і OD рівні як радіуси описаного кола; $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO = \varphi$ — як кути між похилими (ребрами даної піраміди) і їх проекціями, які дорівнюють одна одній.

За формулою для об'єму піраміди маємо:

$$V = \frac{1}{3} SH. \tag{1}$$

Визначимо S площу основи рівнобедреної піраміди.

За формулою для площі всякого чотирикутника маємо:

$$S = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC \sin AKB,$$

або

$$S = \frac{1}{2} BD^2 \cdot \sin AKB. \tag{2}$$

Провівши перпендикуляр CN з вершини C на діагональ BD, з рівнобедреного трикутника BCD одержуємо:

$$BD = 2\,DN; \quad \angle NCD = \frac{1}{2} \angle BCD.$$

За властивістю протилежних кутів вписаного чотирикутника маємо:

$$\angle BCD = 180^\circ - \alpha,$$

а тому

$$\angle NCD = \frac{1}{2} \angle BCD = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

З прямокутного трикутника CND знаходимо:

$$DN = DC \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = a \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Отже,

$$BD = 2\,DN = 2\,a \cos\frac{\alpha}{2}\,. \tag{3}$$

Далі, на підставі умови задачі ($AD = DC = CB = a$) маємо:

$$\angle CAD = \angle ACD,$$

а

$$\angle BAC = \angle ACD,$$

звідки

$$\angle BAC = \angle CAD = \frac{\alpha}{2}\,;$$

а тому

$$\angle AKB = 180^\circ - 2\cdot\frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha$$

і

$$\sin AKB = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha. \tag{4}$$

Підставивши значення BD і $\sin AKB$ з (3) і (4) в (2), одержимо:

$$S = 2\,a^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} \sin\alpha. \tag{5}$$

Визначимо H висоту даної піраміди.
З прямокутного $\triangle\ SOC$ знаходимо:

$$H = SO = OC \operatorname{tg}\varphi. \tag{6}$$

Визначаємо OC як радіус круга, описаного навколо трикутника, за формулою:

$$OC = \frac{BD}{2\sin\alpha}$$

або, підставивши з (3) значення BD, маємо:

$$OC = \frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}. \tag{7}$$

Отже,

$$H = OC \operatorname{tg}\varphi = \frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} \operatorname{tg}\varphi\,. \tag{8}$$

Підставивши значення S з (5) і H з (8) в (1), одержуємо:

$$V = \frac{2}{3}\,a^3 \cos^3\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\varphi\,.$$

Задача № 3. Радіус кулі, описаної навколо правильної трикутної призми, дорівнює R і, будучи проведеним в одну з вершин призми, становить кут α з площиною бічної грані, що містить цю вершину. Визначити ребра призми.

Розв'язування.

Призма AC_1 вписана в кулю, тому всі її вершини знаходяться на поверхні кулі. Продовживши площини основ даної призми, одержимо в перерізі з кулею рівні круги, площини яких будуть паралельні між собою, а трикутники ABC й $A_1B_1C_1$, які є основами даної призми, будуть вписаними в ці круги. (рис. 129).

Вісь призми, очевидно, зіллеться з діаметром описаної кулі, центр якої (точка O) лежатиме на середині осі призми. Отже, відрізок прямої OE буде перпендикулярний до площини основи ABC даної призми, а точка E — основа цього перпендикуляра — буде центром кола, описаного навколо трикутника.

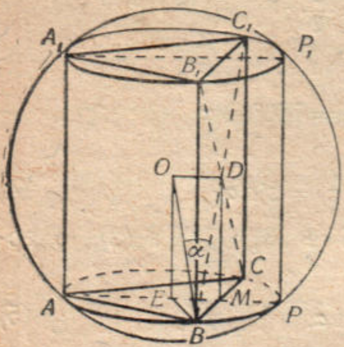

Рис. 129.

Аналогічно цьому і точка D — проекція центра описаної кулі на бічну грань BCC_1B_1 — буде центром кола, описаного навколо прямокутника BCC_1B_1, тобто лежатиме на перетині його діагоналей.

Сполучивши центр (O) кулі з вершиною B призми, безпосередньо одержуємо даний в умові задачі кут OBD, рівний α, між радіусом кулі R і площиною бічної грані BCC_1B_1 (BD є проекція OB на площину BCC_1B_1).

Сполучивши точку D з точкою M, маємо:

$$DM \perp BC \perp AM.$$

З $\triangle\ BCC_1$ маємо:

$$CC_1 = \sqrt{BC_1^2 - BC^2}. \tag{1}$$

З $\triangle\ ODB$ пишемо:

$$BD = OB \cos \alpha,$$

або:

$$BD = R \cos \alpha;$$

тоді

$$BC_1 = 2\,BD = 2\,R \cos \alpha,$$

а

$$BC_1^2 = 4\,R^2 \cos^2 \alpha. \tag{2}$$

Сполучивши точку B з точкою E відрізком прямої лінії, з прямокутного $\triangle\ BME$ маємо:

$$BM = EM \operatorname{ctg} 30^\circ \left(\angle MBE = \frac{1}{2} \angle ABM = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ \right).$$

Тоді

$$BC = 2\,BM = 2\,EM \operatorname{ctg} 30^\circ;$$

$$EM = OD,$$

а з $\triangle\ BDO$

$$OD = OB \sin\alpha,$$

або

$$EM = R\sin\alpha;$$

отже,

$$BC = 2\,R \sin\alpha \operatorname{ctg} 30^\circ,$$

а

$$BC^2 = 4\,R^2 \sin^2\alpha \operatorname{ctg}^2 30^\circ,$$

або

$$BC^2 = 4\,R^2 \sin^2\alpha \cdot 3. \qquad (3)$$

Підставивши в (1) значення BC_1^2 з (2) і BC^2 з (3), одержуємо:

$$x = \sqrt{4\,R^2\cos^2\alpha - 4\cdot 3\,R^2\sin^2\alpha} = \sqrt{4\,R^2(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha)} =$$

$$= 2\,R\sqrt{1 - \sin^2\alpha - 3\sin^2\alpha} = 2\,R\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha} =$$

$$= 4\,R\sqrt{\frac{1}{4} - \sin^2\alpha} = 4\,R\sqrt{\sin^2 30^\circ - \sin^2\alpha} =$$

$$= 4\,R\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 60^\circ - 1 + \cos 2\alpha)} =$$

$$= 4\,R\sqrt{\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 60^\circ)} =$$

$$= 4\,R\sqrt{\sin(30^\circ + \alpha)\sin(30^\circ - \alpha)}.$$

Відповідь. Ребро призми

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = 4\,R\sqrt{\sin(30^\circ + \alpha)\sin(30^\circ - \alpha)}.$$

Дослідження.

Ребра призми повинні визначатися числами дійсними і додатними, а для цього, на підставі одержаної формули, необхідно, щоб

$$\sin(30^\circ - \alpha) \geq 0,$$

звідки

$$\alpha < 30^\circ.$$

Це цілком відповідає геометричним міркуванням. Справді, сполучивши точку O з точкою A, з прямокутного $\triangle\ AEO$ маємо:

$$AE < AO,$$

але

$$ME = \frac{1}{2} AE,$$

тому

$$ME < \frac{1}{2} AO.$$

Крім того:

$$ME = OD \quad \text{і} \quad OA = OB,$$

а тому з прямокутного $\triangle ODB$ маємо:

$$OD \text{ (катет)} < \frac{1}{2} OB \text{ (гипотенузи)},$$

тобто $\angle OBD$, як протилежний катетові OD, менший 30°.

Отже,

$$\alpha < 30^\circ.$$

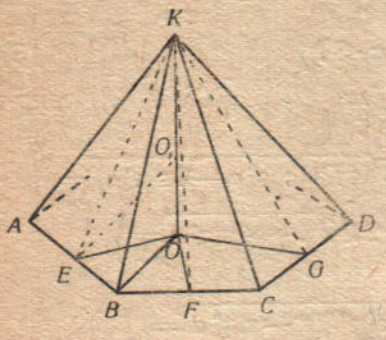

Рис. 130.

Задача № 4. Визначити радіус кулі, вписаної в правильну n-кутну піраміду, коли апофема піраміди дорівнює b, а плоский кут при вершині її дорівнює α.

Провести обчислення за такими даними:

$b = 28{,}9$, $\alpha = 22^\circ 18' 40''$, а $n = 9$.

Розв'язування.

Нехай $\triangle$ KAB, KBC, $KCD\ldots$ і т. д. є бічні грані правильної n-кутної піраміди (рис. 130).

Проведемо апофеми KE, KF, $KG\ldots$ піраміди, тоді OE, OF, $OG\ldots$ є апофеми основи (теорема про 3 перпендикуляри).

Через те що $AB \perp EK$ і $AB \perp EO$, $AB \perp$ площі KEO, а значить, площина $\triangle ABK \perp$ площині $\triangle KEO$.

З перпендикулярності площин випливає, що перпендикуляри, опущені з довільної точки висоти на площини бічних граней, містяться в площинах $\triangle\triangle$ KEO, KOF, $KOG\ldots$, тобто вони є перпендикулярами до відповідних апофем піраміди.

Легко довести, що всі ці перпендикуляри рівні (це базується на рівності відповідних трикутників).

Звідси випливає, що центр вписаного кола лежить на висоті піраміди. А через те що центр сферичної поверхні лежить на такій же віддалі від площини основи, як і від площини бічних граней, він є точкою O перетину висоти піраміди і бісектриси кута KEO (який є лінійним кутом двогранного кута при основі піраміди).

Нехай

$$OO_1 = r; \quad \angle KEO = \varphi,$$

$$AB = BC = CD = \ldots = a,$$

а, крім того, за умовою

$$KE = KF = KG = \ldots = b.$$

З $\triangle\ EO_1O$

$$r = EO \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

а з $\triangle\ EOB$

$$EO = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Значить,

$$r = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

але a нам невідоме.

З $\triangle\ AKE$:

$$\frac{a}{2} = b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Тоді

$$r = b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Визначимо $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. За відомою формулою

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}.$$

З рисунка бачимо:

$$\cos\varphi = \frac{EO}{EK},$$

або:

$$\cos\varphi = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} : b = \frac{b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}}{b} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Підставляємо значення $\cos\varphi$ у формулу для $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, тоді

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}}} = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}};$$

а тому

$$r = b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

Дослідження.

Радіус кулі має визначатись числом r дійсним і додатним. Щоб одержати значення для r, треба, щоб задовольнялася така нерівність:

$$\sin\cdot\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right) > 0.$$

Звідси:

$$\frac{180^\circ}{n} > \frac{\alpha}{2}, \text{ або } \alpha < \frac{360^\circ}{n}.$$

Це цілком відповідає геометричним міркуванням. Справді, сума плоских кутів кожного многогранного кута, а значить, і кута при вершині K — менша $360°$, тобто $n\alpha < 360°$, а $\alpha < \frac{360°}{n}$. Коли ця умова буде виконана, то ми маємо дійсне значення для r.

Через те що α є кут $\triangle$ і $n > 2$,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0 \text{ і } \operatorname{ctg}\frac{180°}{n} > 0,$$

а тому при наявності умови

$$\left(\alpha < \frac{360°}{n}\right),$$

узявши арифметичне значення кореня, ми одержимо дійсні й додатні значення для r.

Числові дані задачі цілком відповідають цій умові, бо

$$22° 18' 40'' < \frac{360°}{9}.$$

СПИСОК ФОРМУЛ.

І. Таблиця формул зведення.

Функції / Кути	sin	cos	tg	ctg	sec	csc
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\csc\alpha$	$\sec\alpha$
$\alpha-\frac{\pi}{2}$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\csc\alpha$	$-\sec\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\csc\alpha$	$\sec\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\sec\alpha$	$\csc\alpha$
$\alpha-\pi$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\csc\alpha$	$-\sec\alpha$
$\alpha-\frac{3\pi}{2}$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\csc\alpha$	$\sec\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\csc\alpha$	$-\sec\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$\alpha-2\pi$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$

Таблиця виразів кожної тригонометричної функції через всі інші.

$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\frac{1}{\csc\alpha}$
$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\pm\frac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha}$
$\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$
$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}$
$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\sec\alpha$	$\pm\frac{\csc\alpha}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$
$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$	$\pm\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\csc\alpha$

II. Формули, які зв'язують тригонометричні функції того самого кута.

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \\[2ex]
(2) & \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \\[2ex]
(3) & \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}. \\[2ex]
(4) & \csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}. \\[2ex]
(5) & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.
\end{array}\right\}\ \text{Основні формули.}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
(6) & 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha. \\[1ex]
(7) & 1 + \operatorname{ctg}\alpha = \csc^2\alpha. \\[1ex]
(8) & \cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}. \\[2ex]
(9) & \sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}. \\[2ex]
(10) & \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1.
\end{array}\right\}\ \text{Наслідки.}$$

III. Формули для алгебричної суми кутів.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta.$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta.$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta.$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta.$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}.$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}.$$

IV. Формули для подвійних і потрійних кутів.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$ $\qquad$ $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$

$\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$ $\qquad$ $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$ $\qquad$ $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}.$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;$ $\qquad$ $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$ $\qquad$ $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1.$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

V. Формули половинних кутів.

$$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha; \qquad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha; \qquad 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

VI. Формули для перетворення добутків тригонометричних функцій двох різних кутів.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

VII. Формули алгебричного додавання тригонометричних функцій.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.\quad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

VIII. Формули для розв'язування прямокутних трикутників.

$$\left.\begin{aligned}A+B&=90^\circ.\\ a&=c\sin A.\\ b&=c\cos A.\end{aligned}\right\}\text{Основні формули.}\qquad \left.\begin{aligned}a&=b\operatorname{tg}A.\\ b&=a\operatorname{ctg}A.\\ a^2+b^2&=c^2.\end{aligned}\right\}\text{Наслідки.}$$

IX. Формули для розв'язування косокутних трикутників.

$$\left.\begin{aligned}&A+B+C=180^\circ.\\ &a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C.\\ &\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.\end{aligned}\right\}\text{Основні формули.}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}};\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

$$h_a=b\sin C=c\sin B;\quad h_c=a\sin B=b\sin A.$$

$$S=\frac{ah_a}{2};\quad S=\frac{ab\sin C}{2};\quad S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}.$$

$$S=p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2};\quad S=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};\quad S=\frac{h_a{}^2\sin A}{2\sin B\sin C}.$$

$$R=\frac{a}{2\sin A};\quad R=\frac{ab}{2h_c};\quad R=\frac{abc}{4S}.$$

$$r=\frac{S}{p};\ r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

ЗМІСТ.

Розділ IV. **Формули зведення до найменшого додатного кута.**

Розділ V. **Графіки тригонометричних функцій і їх дослідження.**

Розділ VI. **Синус, косинус, тангенс суми і різниці двох кутів. Синус, косинус, тангенс подвійних і половинних кутів.**

Розділ VII. **Зведення тригонометричних виразів до вигляду, зручного для логарифмування.**

А. Метод звичайних перетворень.

В. Метод введення допоміжного кута.

Розділ VIII. **Тригонометричні таблиці.**

Розділ IX. **Розв'язування трикутників.**

А. Прямокутні трикутники і рівнобедрені трикутники, які зводяться до прямокутних.

В. Косокутні трикутники.

Розділ X. **Обернені тригонометричні функції.**

Розділ XI. **Тригонометричні рівняння.**

ПОМІЧЕНІ ПОМИЛКИ:

Стор.	Рядок	Надруковано	Треба
35	10 і 13 знизу	α	a
145	1 знизу	$\left(-\frac{н}{2}, \frac{н}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$