АКАДЕМІЯ НАУК УРСР
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ACADÉMIE DES SCIENCES DE LA RSS D'UKRAINE
INSTITUT MATHÉMATIQUE

ЗБІРНИК ПРАЦЬ
ІНСТИТУТУ МАТЕМАТИКИ
№ 4

RECUEIL DES TRAVAUX
DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
№ 4

ВИДАВНИЦТВО АКАДЕМІЇ НАУК УРСР
КИЇВ—1940—KIEV

АКАДЕМІЯ НАУК УРСР
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ACADÉMIE DES SCIENCES DE LA RSS D'UKRAINE
INSTITUT MATHÉMATIQUE

ЗБІРНИК ПРАЦЬ ІНСТИТУТУ МАТЕМАТИКИ

№ 4

RECUEIL DES TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE

№ 4

ВИДАВНИЦТВО АКАДЕМІЇ НАУК УРСР
КИЇВ 1940

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літопису українського друку", „Картковому репертуарі" та інших покажчиках Української книжкової палати.

Друкарня-літографія Академії Наук УРСР. Київ

Д. Граве — D. Grawe

(1863 — 1939)

Д. О. ГРАВЕ

(Некролог)

19 грудня 1939 р. помер організатор і перший директор Інституту Математики АН УРСР та перший редактор цього журналу—дійсний член АН УРСР, почесний член АН СРСР, заслужений діяч науки, орденоносець Дмитро Олександрович Граве.

Народився Д. О. Граве у 1863 році в м. Кирилові Новгородської губернії. Рано втративши батька, він з студентської лави був змушений власною працею утримувати себе і свою сім'ю.

Перший період наукової діяльності Д. О. пройшов у Петербурзі. Вступивши 1881 року в Петербурзький університет, він зразу потрапив до знаменитої математичної школи Чебишова. Вся дальша наукова діяльність Д. О., для якого так характерна конкретність і цілеспрямованість проблематики, була натхнена великими принципами чебишовської школи: „Треба займатися не тим, що інтересно чи цікаво, а тим, що важливо й необхідно“, „Найплодотворніші задачі ставить перед математикою практика“, „Математика займається різновидностями однієї загальної задачі людської діяльності—використати засоби, що є під руками, для досягнення найбільшої користі“. Найбільший безпосередній вплив на перші роботи Д. О. Граве мали, крім самого П. Л. Чебишова, представники старшого покоління чебишовської школи А. А. Марков і особливо А. Н. Коркін, найближчий учитель Д. О., вчений з колосальною ерудицією й оригінальна людина, із вологодських селян.

Магістерська дисертація Д. О. „Об интегрировании частных диференциальных уравнений первого порядка“ була ним написана в 1889 році. Вона вже виявила в молодому авторі велику силу алгоритмічної техніки і багатство ідей.

В 1896 році вийшла з друку його блискуча докторська дисертація „Об основных задачах математической теории построения географических карт“, яка дала автору світове ім'я. Там розв'язуються з вичерпною закінченістю, з доведенням до робочих алгоритмів, дві фундаментальні проблеми картографії, що мають велику практичну та теоретичну важливість, початок яких зв'язаний з іменами Лагранжа і Чебишова.

Другий період наукової та науково-педагогічної діяльності Д. О. Граве починається з 1900-х років, коли він, після кількох років роботи в Харківському університеті (одночасно із Ляпуновим та Стекловим) переїжджає до Києва. Тут виявляється блискучий науково-організаторський талант Д. О., особливо починаючи з 1908—1910 р.р., коли йому пощастило створити одну з найвидатніших математичних шкіл в Союзі. О. Ю. Шмідт, М. Г. Чеботарьов, Б. М. Делоне та ряд інших видатних вчених, що мають вже численних власних учнів, вийшли з цієї школи. Після Жовтневої революції Д. О. Граве виявився одним з тих, не дуже численних в той час, крупних вчених, які зразу, не вагаючись, стали на сторону радянської влади і активно, з ентузіазмом допомогали робітничому класу і комуністичній партії в справі перебудови вищої школи. Незабаром після організації АН УРСР Д. О. Граве був обраний на першу з відкритих в Академії математичних кафедр. В 1929 році його обирають почесним членом АН СРСР. В цей період своєї діяльності Д. О. Граве, продовжуючи свої крупні роботи в галузі алгебри та аналізу, є в той самий час активним організатором та пропагандистом науково-дослідної роботи в актуальних галузях прикладної математики. Д. О. Граве належить понад 125 друкованих праць. Крім оригінальних праць, його перу належить багато навчальних курсів та монографій, які користувались завжди великим успіхом завдяки властивій їм свіжості та чіткості наукової думки. На них в тій чи іншій мірі виховались найширші маси сучасних математиків—наукових робітників та педагогів Союзу.

Характерною особливістю Дмитра Олександровича було також виключно чуле та тепле ставлення його до всіх молодих вчених, що мали справу з ним. В 1935 році уряд СРСР відзначив видатні наукові та науково-педагогічні заслуги Д. О. Граве, нагородивши його орденом Трудового Червоного Прапора. З майже юнацьким ентузіазмом Д. О. взявся за нову велику роботу — складання багатотомного „Трактату з алгебричного аналізу“ (у широкому розумінні цього слова). Тут він задумав дати для широких кіл радянської математичної громадськості простий та ясний виклад найтрудніших питань цього великого обсягу математики. Смерть застала Д. О. за цією роботою напередодні закінчення третього тому. З Д. О. Граве зійшов у могилу один з найвидатніших представників класичної математики, чиє життя та наукова діяльність залишили видатний слід у розвитку радянської науки на Україні та далеко за її межами.

Д. А. ГРАВЕ

(Некролог)

19 декабря скончался организатор и первый директор Института Математики АН УССР и первый редактор этого журнала—действительный член АН УССР, почетный член АН СССР, заслуженный деятель науки, орденоносец Димитрий Александрович Граве.

Родился Д. А. Граве в 1863 году в г. Кириллове Новгородской губ. Рано лишившись отца, он со студенческой скамьи должен был собственным трудом содержать себя и свою семью.

Первый период научной деятельности Д. А. прошел в Петербурге. Поступивши в 1881 году в Петербургский университет, он сразу очутился в знаменитой математической школе Чебышева. Вся дальнейшая научная деятельность Д. А., для которой так характерна конкретность и целеустремленность проблематики, была воодушевлена великими принципами чебышевской школы: „Надо заниматься не тем, что интересно или любопытно, а тем, что важно и необходимо". „Самые плодотворные задачи ставит перед математикой практика", „Математика занимается разновидностями одной общей задачи человеческой деятельности: распорядиться имеющимися под руками средствами для достижения наибольшей пользы". Наибольшее непосредственное влияние на первые работы Д. А. Граве имели, кроме самого П. Л. Чебышева, представители старшего поколения чебышевской школы А. А. Марков и в особенности А. Н. Коркин, ближайший учитель Д. А., ученый с колоссальной эрудицией и оригинальный человек, из вологодских крестьян.

Магистерская диссертация Д. А. „Об интегрировании частных диференциальных уравнений 1-го порядка" была им написана в 1889 году. Уже эта работа обнаружила в молодом авторе большую силу алгоритмической техники и богатство идей.

В 1896 году вышла его блестящая докторская диссертация „Об основных задачах математической теории построения географических карт", которая дала автору мировую известность. В ней решаются с исчерпывающей законченностью, с доведением до рабочих алгоритмов, имеющие большую практическую и теоретическую важность две фундаментальные проблемы картографии, ведущие начало от Лагранжа и Чебышева.

Второй период научной и научно-педагогической деятельности Д. А. Граве начинается с 1900-х годов, когда он, после нескольких лет работы в Харьковском университете (в одно время с Ляпуновым и Стекловым), переезжает в Киев. Здесь проявляется в полном блеске научно-организаторский талант Д. А., в особенности начиная с 1908—1910 г.г., когда ему удалось создать одну из самых мощных математических школ в Союзе. О. Ю. Шмидт, Н. Г. Чеботарев, Б. Н. Делоне и целый ряд других виднейших ученых, имеющих уже многочисленных своих учеников, вышли из этой школы. После Октябрьской революции Д. А. Граве оказался одним из тех, не очень многочисленных в то время, крупных ученых, которые сразу безоговорочно стали на сторону советской власти и активно, с энтузиазмом помогали рабочему классу и коммунистической партии в деле перестройки высшей школы. Вскоре после организации Украинской Академии Наук Д. А. Граве избирается на первую из открытых в Академии математических кафедр. В 1929 году его избирают почетным членом Всесоюзной Академии Наук. В этот период своей деятельности Д. А. Граве, продолжая свои крупные работы в области алгебры и анализа, является в то же время деятельным организатором и пропагандистом научно-исследовательской работы в актуальных областях прикладной математики. Перу Д. А. принадлежит свыше 125 печатных работ. Кроме оригинальных работ, он является автором многочисленных учебных курсов и монографий, пользовавшихся всегда большим успехом, благодаря присущей им свежести и четкости научной мысли. На них в той или иной мере воспитались широчайшие массы современных математиков—научных работников и педагогов Союза.

Характерной особенностью Димитрия Александровича было также исключительно чуткое и теплое отношение его ко всем молодым ученым, приходившим с ним в соприкосновение. В 1935 году правительство СССР отметило выдающиеся научные и научно-педагогические заслуги Д. А. Граве, наградивши его орденом Трудового Красного Знамени. С почти юношеским энтузиазмом Д. А. взялся за новую большую работу — составление многотомного „Трактата по алгебраическому анализу“ (в широком смысле этого слова). Здесь он задумал дать для широких кругов советской математической общественности простое и ясное изложение труднейших вопросов этой большой области математики. Смерть застала Д. А. за этой работой, накануне окончания третьего тома. С Д. А. Граве сошел в могилу один из крупнейших представителей классической математики, чья жизнь и научная деятельность оставили значительный след в развитии советской науки на Украине и далеко за ее пределами.

№ 4 ЗБІРНИК ПРАЦЬ ІНСТИТУТУ МАТЕМАТИКИ 1940
АКАДЕМІЇ НАУК УРСР

RECUEIL DES TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE LA RSS D'UKRAINE

Про загальний співудар в задачі трьох тіл, які взаємно притягаються обернено-пропорціонально довільному степеню віддалення

Ю. Д. Соколов

§ 1. Вступ

Дослідження траєкторій з загальним співударом в задачі трьох (а почасти і n) тіл, які взаємно притягаються за законом Ньютона, провадилося, за останні тридцять років, в кількох мемуарах K. Sundman-a [1], H. Block-a [2] та J. Chazy [3—5].

Проте, ще в 1889 році Weierstrass висловив теорему [1]), що дає просту обов'язкову умову загального співудару трьох матеріальних точок, які взаємно притягаються за законом Ньютона. Такою обов'язковою умовою є рівність нулю всіх сталих інтегралів площ в русі системи відносно центра інерції [2]). Треба відмітити, що, ще раніше Weierstrass-a, в статті Ф. Слудського „К задаче о многих телах" (1878 р.) [6] висловлена ця умова для співудару n точок.

Проте, доведення Ф. Слудського є цілком недостатнє, через те, що автор неявно припускає, що при наближенні часу до моменту співудару, відношення взаємних віддалень точок залишаються обмеженими.

Weierstrass не подав доведення цієї теореми і вперше її довів K. Sundman в своєму вищецитованому мемуарі. Sundman-ові міркування досить складні і забирають щось із 8 сторінок in quarto; пізніше він подав друге, непряме доведення цієї теореми [7].

Досліджуючи, в тому ж мемуарі, випадок загального співудару трьох точок, Sundman дістав важливий висновок, що, при наближенні часу до моменту загального співудару (t_1), відношення взаємних віддалень точок наближаються до певних скінченних границь; точніше, що, при $t \to t_1$, конфігурація, утворена точками, наближається до однієї з двох конфігурацій, які характеризують відомі лагранжові випадки [3]).

---

[1]) В листуванні з Mittag-Leffler-ом.

[2]) У своєму листі до Mittag-Leffler-a від 2/II 1889 року Weierstrass пише:

„Für $n = 3$ lässt sich ferner leicht zeigen, dass alle drei Punkte nur in dem Falle zusammentreffen können, wenn drei bei den Flächensätzen vorkommenden Integrationsconstanten verschwinden (див. Acta Mathematica, t. 35, S. 58).

[3]) Тобто три точки прагнуть впорядкуватися або у вершинах рівностороннього трикутника, або — по одній прямій з певним відношенням взаємних віддалень, що залежить від відношень мас.

Користуючися цим наслідком, H. Block утворив рівняння у варіаціях, відповідні лагранжовим розв'язкам із загальним співударом, і встановив форму розкладів координат біля моменту удару.

Проте, наслідки Block-а були позбавлені достатнього обгрунтування і не мали загального характеру, бо він не дав належного аналізу поводження шуканих функцій при $t \to t_1$, не дослідив окремих випадків співвідношення мас [1]), для яких його метод був недостатнім, і навіть висловив з їх приводу неправильні мікрування.

Загальна постановка задачі для випадку $n > 3$ матеріальних точок належить J. Chazy, який, у вищецитованих мемуарах, дослідив траєкторії із загальним співударом n тіл [2]) і дістав для цього випадку наслідки, аналогічні Sundaman-овим та Block-овим для $n = 3$ *).

J. Chazy довів обов'язковість умови Weierstrass-а для загального співудару n матеріальних точок, які взаємодіють за Ньютоновим законом, а також визначив граничні конфігурації („figures-limites") для $n = 4$ **) та узагальнив випадки Лагранжа на задачу n тіл [3]). Нарешті в моїй дисертації [22] було подано повний аналіз поводження величин, які характеризують рух, біля моменту співудару, побудовано розклади їх біля цього моменту [4]) та вперше встановлено всі умови загального співудару. Крім того, було доведено такі дві теореми, що узагальнюють відповідні теореми Слудьского — Weierstrass-а і Dziobek-а [23]:

a) Коли існує такий скінченний момент t_1, що квадратичний момент біля центра інерції n вільних матеріальних точок, які рухаються в m-мірному евклідовому просторі, наближається до нуля, при $t \to t_1$, і $\lim\limits_{t \to t_1} U = +\infty$, де U — силова функція, однорідна — 1-го порядку відносно взаємних віддалень точок, то, в русі системи відносно центра інерції, всі сталі „інтегралів площ" дорівнюють нулю.

b) При умовах попередньої теореми (та $m \geqslant n$) всі точки рухаються в одній нерухомій площині $(n-1)$-го виміру.

Отже, обставини загального співудару трьох матеріальних точок, які взаємно притягаються за законом Ньютона, були вивчені досить докладно, і цілком природно виникло важливе, з погляду аналітичної теорії диференціальних рівнянь, питання про поширення одержаних наслідків і методів досліду на більш загальні динамічні задачі, окремим випадком яких є рух під впливом притягання за Ньютоновим законом.

---

[1]) Так само, як і J. Chazy.

[2]) Таксамо і так звані „параболічні" траєкторії, на яких n точок необмежено віддаляються одна від одної і які узагальнюють параболічні траєкторії задачі 2 тіл.

*) Проте, всі міркування грунтуються на певному алгебричному постулаті, який доведено для $n = 3$, 4.

**) Для випадку, коли віддалення між точками не змінюються, ці фігури розглядали також, ще раніше, H. Andoyer [8] та W. Longley [9].

[3]) Проте, узагальненню випадків Лагранжа ще раніше присвятили багато праць різні автори: Laplace [10], Veltmann [11], Слудский [6], Hoppe [12], Lehmann — Filhés [13], Dziobek [14], Pizzetti [15], Lovett [16], Воронец [17], Banachiewicz [18], Brehm [19], Moulton [20], А. Билимович [22] та інші.

[4]) Для загального і всіх окремих випадків співвідношення мас.

Провадячи досліди в цьому напрямі, я встановив, що висновок теореми (a) залишається справедливим і для того випадку, коли U, замість того, щоб бути однорідною функцією —1-го порядку, є просто функція взаємних віддалень r_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$), що задовольняє умови:

$$\lim_{t \to t_1} U = +\infty, \ \lim_{t \to t} U_1 = \lim_{t \to t} \left(2U + \sum_{ij} r_{ij} \frac{\partial U}{\partial r_{ij}}\right) = +\infty,$$

$$U_1 - AU \geqslant 0 \text{ (в околі } t = t_1) ,$$

де A — додатна стала [25].

Ці умови задовольняються, наприклад, для випадку взаємодії за законом

$$g^2 m_i m_j f(r_{ij}) \text{ *)}, \tag{0}$$

де g^2 — стала, m_i, m_j — маси точок, а $f(r)$ є функція аналітична біля кожного додатного значення аргументу, яка при $r = 0$ стає додатною нескінченністю певного порядку $2\alpha + 1$, і $0 < \alpha < 1$.

Теорема (b) також залишається справедливою для цього випадку.

Нарешті, при розгляді поводження величин при необмеженому зростанні часу, була доведена така теорема [26]:

В задачі трьох тіл, які взаємодіють за законом (0), при умовах

$$\lim_{r \to +0} r^{2\alpha+1} f(r) = A > 0, \ r^{\beta} |f(r)| \leqslant B$$

в інтервалі $(a, +\infty)$, де $\alpha > 0$, $a > 0$, $B > 0$ **), неможливо, щоб, при необмеженому зростанні часу, minimum взаємних віддалень трьох точок прямував до нуля.

Продовжуючи досліди в цьому напрямі, я маю на оці в цій роботі, узагальнюючи міркування Sundman-а та моєї дисертації, дослідити траекторії із загальним співударом в задачі трьох тіл, які взаємно притягаються пропорціонально масам і обернено пропорціонально довільному степеню віддалення, тобто з силою, рівною

$$g^2 \frac{m_i m_j}{r_{ij}^{2\alpha+1}} (\alpha > 0) \text{ ***)}, \tag{1}$$

покладаючи в дальшому, для спрощення, $g^2 = 2\alpha$. Тим часом обставини співудару при $\alpha < 1$ подібні тим, що мають місце для Ньютонового закону

---

*) Притягання, якщо $f(r) > 0$, і відштовхування, якщо $f(r) < 0$

**) Для випадку $\alpha = 1$ повинна задовольнитися ще одна додаткова умова.

***) Цей закон розглядався в різних питаннях у вищецитованих роботах Laplace-a, Andoyer, Воронця, Banachiewicz-a, Білімовича, а також — Jacobi [27] Marcolongo [28], J. Chazy [29] і, нарешті, M. Kiveliovitch-a [30]. Але міркування останнього, що стосуються регуляризації диференціальних рівнянь руху біля моменту подвійного співудару, — неправильні, як це показано в моїй статті [31]. Повний дослід обставин подвійного співудару для випадків „problème restreint" і загального, при законі взаємодії (0), а також — загального співудару для випадків прямолінійного і симетричного руху, при законі (1), подано в кількох моїх мемуарах, надрукованих Бельгійською Академією Наук і АН УРСР [32—38].

$\left(\alpha=\frac{1}{2}\right)$, при $\alpha=1$ наступає критичний випадок, а при $\alpha>1$ поводження величин значно змінюється. Наприклад, рівність нулю всіх сталих інтегралів площ при $\alpha>1$ перестає бути обов'язковою умовою загального співудару, і в цьому випадку існують просторові траєкторії, що приводять до загального співудару. Хоч випадок просторового руху досліджуватиметься в окремих мемуарах, але вже в цій роботі буде подано відносно нього ряд зауважень та висновків.

§ 2. Диференціальні рівняння відносного руху у формі Jacobi та їх класичні інтеграли

Позначмо через x, y, z, координати точки P_1 відносно прямокутних осей нерухомого напряму, які мають початок в точці P_0, через ξ, η, ζ — координати точки P_2 відносно осей, паралельних до попередніх, з початком в центрі інерції перших двох матеріальних точок P_0 і P_1 і через $r_0, r_1, r_2=r$ — відповідно віддалення $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_0}$, $\overline{P_0P_1}$.

Впровадьмо ще позначення:

$$\left.\begin{aligned} & M=m_0+m_1+m_2 \\ & \mu_0=\frac{m_0}{m_0+m_1}; \quad \mu_1=\frac{m_1}{m_0+m_1} \\ & \mu_2=\frac{m_0 m_1}{m_0+m_1}; \quad \mu_3=\frac{m_2(m_0+m_1)}{M} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Тоді, при законі притягання (1), матимемо такі диференціальні рівняння відносного руху точок P_1 і P_2:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}=x', \ \frac{\mu_2}{2\alpha}\frac{dx'}{dt} &= -m_0m_1\frac{x}{r^{2\alpha+2}}+m_2\mu_2\frac{\xi-\mu_0 x}{r_0^{2\alpha+2}}-m_2\mu_2\frac{\xi+\mu_1 x}{r_1^{2\alpha+2}}=\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{dy}{dt}=y', \ \frac{\mu_2}{2\alpha}\frac{dy'}{dt} &= -m_0m_1\frac{y}{r^{2\alpha+2}}+m_2\mu_2\frac{\eta-\mu_0 y}{r_0^{2\alpha+2}}-m_2\mu_2\frac{\eta+\mu_1 y}{r_1^{2\alpha+2}}=\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{dz}{dt}=z', \ \frac{\mu_2}{2\alpha}\frac{dz'}{dt} &= -m_0m_1\frac{z}{r^{2\alpha+2}}+m_2\mu_2\frac{\zeta-\mu_0 z}{r_0^{2\alpha+2}}-m_2\mu_2\frac{\zeta+\mu_1 z}{r_1^{2\alpha+2}}=\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt}=\xi', \ \frac{\mu_3}{2\alpha}\frac{d\xi'}{dt} &= -m_1m_2\frac{\xi-\mu_0 x}{r_0^{2\alpha+2}}-m_2m_0\frac{\xi+\mu_1 x}{r_1^{2\alpha+2}}=\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \frac{d\eta}{dt}=\eta', \ \frac{\mu_3}{2\alpha}\frac{d\eta'}{dt} &= -m_1m_2\frac{\eta-\mu_0 y}{r_0^{2\alpha+2}}-m_2m_0\frac{\eta+\mu_1 y}{r_1^{2\alpha+2}}=\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \frac{d\zeta}{dt}=\zeta', \ \frac{\mu_3}{2\alpha}\frac{d\zeta'}{dt} &= -m_1m_2\frac{\zeta-\mu_0 z}{r_0^{2\alpha+2}}-m_2m_0\frac{\zeta+\mu_1 z}{r_1^{2\alpha+2}}=\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial U}{\partial \zeta} \end{aligned}\right\}, \tag{3'}$$

де

$$U=\frac{m_0m_1}{r^{2\alpha}}+\frac{m_1m_2}{r_0^{2\alpha}}+\frac{m_2m_0}{r_1^{2\alpha}} \tag{4}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,\; r_0^2 = (\xi - \mu_0 x)^2 + (\eta - \mu_0 y)^2 + (\zeta - \mu_0 z)^2,$$
$$r_1^2 = (\xi + \mu_1 x)^2 + (\eta + \mu_1 y)^2 + (\zeta + \mu_1 z)^2$$

Рівняння (3) та (3′) мають інтеграл живих сил:

$$\mu_2 (x'^2 + y'^2 + z'^2) + \mu_3 (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = 2U + 2h \tag{5}$$

та інтеграли площ:

$$\left.\begin{aligned} \mu_2 (xy' - yx') + \mu_3 (\xi\eta' - \eta\xi') &= c_0 \\ \mu_2 (yz' - zy') + \mu_3 (\eta\zeta' - \zeta\eta') &= c_1 \\ \mu_2 (zx' - xz') + \mu_3 (\zeta\xi' - \xi\zeta') &= c_2 \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

де h, c_0, c_1, c_2 — сталі інтегрування.

Диференціюючи двічі по t вираз для квадратичного моменту системи матеріальних точок біля їх спільного центра інерції

$$I^2 = \frac{m_0 m_1 r^2 + m_1 m_2 r_0^2 + m_2 m_0 r_1^2}{M} = \mu_2 r^2 + \mu_3 \rho^2, \tag{7}$$

де

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \xi^2,$$

дістанемо, взявши на увагу рівняння (3) та (3′):

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I^2}{dt^2} = x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} + \mu_2 (x'^2 + y'^2 + z'^2) + \mu_3 (\xi'^2 + \eta'^2 + \xi'^2)$$

Звідси, на основі однорідності функції U та інтеграла живих сил (5):

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I^2}{dt^2} = 2(1 - \alpha) U + 2h \tag{8}$$

Це є відоме рівняння Jacobi [39].

§ 3. Регулярний рух

Якщо у початковий момент $t = 0$ координати й компоненти швидкостей трьох матеріальних точок мають дійсні і скінченні значення, при чому жодне з взаємних віддалень r, r_0, r_1 не дорівнює нулю, то існує, за відомою теоремою Cauchy, єдиний, голоморфний всередині певного кола $|t| < T$, розв'язок системи (3)—(3′), що відповідає даним початковим умовам. Маючи, таким чином, при $t = 0$ регулярний рух, будемо змінювати t вздовж дійсної осі, починаючи від $t = 0$, та встановлювати аналітичне продовження одержаного розв'язку вздовж цього шляху.

При цьому, очевидно, можемо зустрінутися з двома випадками: або рух буде регулярний для всіх значень часу від $-\infty$ до $+\infty$, або він перестане бути таким при певному значенні $t = t_1$.

В першому випадку може бути, що:

1) minimum взаємних віддалень точок має відмінну від нуля нижню границю; тоді координати точок є голоморфні функції в полосі площини комплексного змінного t:

$$-l < R\left(\frac{t}{i}\right) < +l$$

і розкладаються в цілі ряди за степенями змінної $w = \dfrac{e^{\frac{\pi t}{2l}} - 1}{e^{\frac{\pi t}{2l}} + 1}$, що представляють рух для всіх значень t;

2) minimum взаємних віддалень має нуль нижньою границею (не досягаючи її ні при якому t); тоді шукані функції розкладаються, як відомо, в ряди поліномів, що рівномірно збігаються вздовж будьякого відрізка дійсної осі часу.

§ 4. Теорема Painlevé та її висновки

Перейдімо до випадку, коли рух перестає бути регулярним у певний скінченний момент.

Для розглядуваного тут закону притягання (1), буде справедливою теорема, яку довів Painlevé для Ньютонового закону $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$ [24]:

Якщо рух n матеріальних точок, які взаємно притягаються за законом (1), відбувається регулярно в інтервалі $0 \leqslant t < t_1$, але в момент t_1 перестає бути таким, то minimum взаємних віддалень (r_m) прямує до нуля:

$$\lim_{t \to t_1} r_m = 0$$

З цієї теореми випливає, що

$$\lim_{t \to t_1} U = +\infty,$$

а тому, починаючи з певного моменту, $\frac{d^2 I^2}{dt^2}$, на основі рівняння (8), зберігає свій знак: додатний — при $\alpha < 1$ і від'ємний — при $\alpha > 1$; отже, починаючи з цього моменту, $\frac{dI^2}{dt}$ змінюється монотонно і в певному інтервалі $t_0 \leqslant t < t_1$ також зберігає свій знак і в нуль не обертається. З зазначеного випливає, що I^2 в останньому інтервалі також змінюється монотонно і прямує до певної границі $I_1^2 \geqslant 0$ *).

---

*) Коли б I^2 необмежено зростало при $t \to t_1$, то, починаючи з певного моменту, те саме віддалення, наприклад r, прямувало б до нуля. В противному разі існувало б як завгодно близьке до t_1 значення t^*, до і після якого r_m представлялося б двома різними віддаленнями; при $t = t^*$ вони були б рівні між собою й обидва $< \varepsilon$, де ε — як завгодно мале додатне число. Третє віддалення, що не перевищує їх суми, було б $< 2\varepsilon$, і тоді в момент t^*

$$I^2 < \frac{4\varepsilon^2}{M} \Sigma m_i m_j,$$

що суперечить умові $\lim I^2 = +\infty$.

Нехай, наприклад, $r \to 0$; тоді

$$\rho \to +\infty, \ r_0, r_1 \to +\infty$$

З (3)—(3') тоді послідовно впевнимося, що $\left|\frac{d\xi'}{dt}\right|$, $\left|\frac{d\eta'}{dt}\right|$, $\left|\frac{d\zeta'}{dt}\right|$, $|\xi'|$, $|\eta'|$, $|\zeta'|$ отже і ξ, η, ζ, ρ — обмежені в інтервалі (t_0, t_1), що суперечить припущенню $\lim\limits_{t \to t_1} I^2 = +\infty$.

Якщо $\alpha = 1$, то з (8) маємо:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I^2}{dt^2} = 2h,$$

звідки

$$I^2 = 2ht^2 + 2At + B, \tag{9}$$

де A і B — сталі інтегрування.

Випадок $I_1^2 > 0$ було досліджено для загального закону взаємодії (0) в моїх попередніх мемуарах [33—35].

Отже, в дальшому розглядатимемо випадок

$$\lim_{t \to t_1} I^2 = 0;$$

тоді r_0, r_1, r і ρ — всі прямують до нуля, і t_1 є момент загального співудару всіх трьох точок. В цьому випадку, на основі вищезазначеного, в певному інтервалі (t_0, t_1) $\frac{dI^2}{dt}$ — постійно від'ємна.

§ 5. Перетворення рівнянь руху

Поклавши в (3)—(3′)

$$\begin{aligned} x &= r \sin\varphi \cos\vartheta, & \xi &= \rho \sin\psi \cos\omega, \\ y &= r \sin\varphi \sin\vartheta, & \eta &= \rho \sin\psi \sin\omega, \\ z &= r \cos\varphi, & \zeta &= \rho \cos\psi, \end{aligned}$$

дістанемо диференціальні рівняння відносного руху в сферичних координатах:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr}{dt} = r', \quad \frac{dr'}{dt} - r\sin^2\varphi\vartheta'^2 - r\varphi'^2 = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial U}{\partial r} \\ &\frac{d\vartheta}{dt} = \vartheta', \quad \frac{d}{dt}(r^2\sin^2\varphi\vartheta') = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}, \\ &\frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \quad \frac{d}{dt}(r^2\varphi') - r^2\sin\varphi\cos\varphi\vartheta'^2 = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial U}{\partial \varphi} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt} = \rho', \quad \frac{d\rho'}{dt} - \rho\sin^2\psi\omega'^2 - \rho\psi'^2 = \frac{1}{\mu_3}\frac{\partial U}{\partial \rho} \\ &\frac{d\omega}{dt} = \omega', \quad \frac{d}{dt}(\rho^2\sin^2\psi\omega') = \frac{1}{\mu_3}\frac{\partial U}{\partial \omega} \\ &\frac{d\psi}{dt} = \psi', \quad \frac{d}{dt}(\rho^2\psi') - \rho^2\sin\psi\cos\psi\omega'^2 = \frac{1}{\mu_3}\frac{\partial U}{\partial \psi} \end{aligned}\right\}, \tag{10′}$$

де

$$\left.\begin{aligned} &r_0^2 = \rho^2 + \mu_0^2 r^2 - 2\mu_0\rho r\cos\tau, \qquad r_1^2 = \rho^2 + \mu_1^2 r^2 + 2\mu_1\rho r\cos\tau, \\ &\cos\tau = \sin\varphi\sin\psi\cos(\vartheta - \omega) + \cos\varphi\cos\psi \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Інтеграл живих сил матиме вигляд:

$$\mu_2(r'^2 + r^2\varphi'^2 + r^2\sin^2\varphi\vartheta'^2) + \mu_3(\rho'^2 + \rho^2\psi'^2 + \rho^2\sin^2\psi\omega'^2) = 2U + 2h, \tag{12}$$

і інтеграли площ запишуться так:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_2 r^2\sin^2\varphi\vartheta' + \mu_3\rho^2\sin^2\psi\omega' = c_0 \\ &\mu_2 r^2(\varphi'\sin\vartheta + \vartheta'\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi) + \mu_3\rho^2(\psi'\sin\omega + \omega'\cos\omega\sin\psi\cos\psi) = -c_1 \\ &\mu_2 r^2(\varphi'\cos\vartheta - \vartheta'\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi) + \mu_3\rho^2(\psi'\cos\omega - \omega'\sin\omega\sin\psi\cos\psi) = c_2 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Впровадьмо тепер, замість r, ρ, r', ρ', ϑ', φ', ω', ψ', нові функції I, R, χ, X, Θ, Φ, Ω, Ψ, за формулами:

$$\sqrt{\mu_2}\, r = I\cos\chi, \quad \sqrt{\mu_3}\,\rho = I\sin\chi\ ^{1)}$$

$$\left.\begin{aligned} &(\mu_2 rr' + \mu_3\rho\rho')I^{\alpha-1} = I^\alpha\frac{dI}{dt} = R, \qquad \sqrt{\mu_2\mu_3}\,(r\rho' - \rho r')I^{\alpha-1} = I^{\alpha+1}\frac{d\chi}{dt} = \mathrm{X} \\ &\mu_2 r^2\sin^2\varphi\vartheta' I^{\alpha-1} = \Theta, \qquad \mu_2 r^2\varphi' I^{\alpha-1} = \Phi \\ &\mu_3\rho^2\sin^2\psi\omega' I^{\alpha-1} = \Omega, \qquad \mu_3\rho^2\psi' I^{\alpha-1} = \Psi \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Диференціюючи вираз R по t і, помноживши потім обидві частини одержаної рівності на $I^{\alpha+1}$, дістанемо:

$$I^{\alpha+1}\frac{dR}{dt} = I^{2\alpha}\left(\mu_2 r\frac{dr'}{dt} + \mu_3\frac{d\rho'}{dt} + \mu_2 r'^2 + \mu_3\rho'^2\right) +$$

$$+ (\alpha - 1)(\mu_2 rr' + \mu_3\rho\rho')I^{2\alpha-1}\frac{dI}{dt}$$

Звідси, маючи на увазі, що на основі (10)—(10′), (14) та однорідності функції U

$$\left(\mu_2 r\frac{dr'}{dt} + \mu_3\rho\frac{d\rho'}{dt}\right)I^{2\alpha} = \frac{\Theta^2\csc^2\varphi + \Phi^2}{\csc^2\chi} + \frac{\Omega^2\csc^2\psi + \Psi^2}{\sin^2\chi} - 2\alpha I^{2\alpha}U$$

та скориставшись рівністю:

$$I^{2\alpha}(\mu_2 r'^2 + \mu_3\rho'^2)I^{2\alpha-2}(\mu_2 rr' + \mu_3\rho\rho')^2 + I^{2\alpha-2}\mu_2\mu_3(r\rho' - \rho r')^2 = R^2 + \mathrm{X}^2,$$

матимемо:

$$I^{\alpha+1}\frac{dR}{dt} = \alpha R^2 + \mathrm{X}^2 + \frac{\Theta^2\csc^2\varphi + \Phi^2}{\cos^2\chi} + \frac{\Omega^2\csc^2\psi + \Psi^2}{\sin^2\chi} - 2\alpha I^{2\alpha}U$$

Диференціюючи вираз X по t і, помноживши результат на $I^{\alpha+1}$, одержимо:

$$I^{\alpha+1}\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \sqrt{\mu_2\mu_3}\left(r\frac{d\rho'}{dt} - \rho\frac{dr'}{dt}\right)I^{2\alpha} + (\alpha - 1)\sqrt{\mu_2\mu_3}\,(r\rho' - \rho r')I^{2\alpha-1}\frac{dI}{dt} =$$

$$= \sqrt{\mu_2\mu_3}\, r\rho\,(\sin^2\psi\omega'^2 + \psi'^2 - \sin^2\varphi\vartheta'^2 - \varphi'^2)I^{2\alpha} +$$

---

[1]) Отже, в інтервалі регулярного руху, $0 \leqslant \chi < \frac{\pi}{2}$.

$$+\left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_3}}\, r\frac{\partial U}{\partial \rho}-\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\, \rho\frac{\partial U}{\partial r}\right) I^{2\alpha}+(\alpha-1)RX=$$

$$=\frac{\sin^2 2\chi}{2}\left(\frac{\Omega^2\csc^2\psi+\Psi^2}{\sin^4\chi}-\frac{\Theta^2\csc^2\varphi+\Phi^2}{\cos^4\chi}\right)+$$

$$+I^{2\alpha}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \chi}+\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \chi}\right)+(\alpha-1)RX$$

Далі

$$I^{\alpha+1}\frac{d\Theta}{dt}=\mu_2 I^{2\alpha}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\varphi\vartheta')+\mu_2 r^2\sin^2\varphi\vartheta'(\alpha-1)I^{2\alpha-1}\frac{dI}{dt} \text{ і т. д.}$$

Отже, впровадивши позначення

$$F=I^{2\alpha}U, \tag{15}$$

при чому F буде функцією аргументів χ, τ або — χ, φ, ψ, $\vartheta-\omega$, замінимо рівняння (10)—(10′) такою системою:

$$\left.\begin{aligned}
& I^{\alpha}\frac{dI}{dt}=R, && I^{\alpha+1}\frac{dR}{dt}=\alpha R^2+P^2-2\alpha F\\
& I^{\alpha+1}\frac{d\chi}{dt}=X, && I^{\alpha+1}\frac{dX}{dt}=(\alpha-1)RX+F_\chi+\\
& && +\frac{\sin 2\chi}{2}\left(\frac{\Omega^2\csc^2\psi+\Psi^2}{\sin^4\chi}-\frac{\Theta^2\csc^2\varphi+\Phi^2}{\cos^4\chi}\right)\\
& I^{\alpha+1}\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\Theta}{\cos^2\chi\sin^2\varphi}, && I^{\alpha+1}\frac{d\Theta}{dt}=(\alpha-1)R\Theta+F_\vartheta\\
& I^{\alpha+1}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\Phi}{\cos^2\chi}, && I^{\alpha+1}\frac{d\Phi}{dt}=(\alpha-1)R\Phi+F_\varphi+\frac{\Theta^2\cos\varphi}{\cos^2\chi\sin^3\varphi}\\
& I^{\alpha+1}\frac{d\omega}{dt}=\frac{\Omega}{\sin^2\chi\sin^2\psi}, && I^{\alpha+1}\frac{d\Omega}{dt}=(\alpha-1)R\Omega+F_\omega\\
& I^{\alpha+1}\frac{d\psi}{dt}=\frac{\Psi}{\sin^2\chi}, && I^{\alpha+1}\frac{d\Psi}{dt}=(\alpha-1)R\Psi+F_\psi+\frac{\Omega^2\cos\psi}{\sin^2\chi\sin^3\psi}
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

де

$$P^2=X^2+\frac{\Theta^2\csc^2\varphi+\Phi^2}{\cos^2\chi}+\frac{\Omega^2\csc^2\psi+\Psi^2}{\sin^2\chi} \tag{17}$$

$$F=\mu_2^\alpha\mu_3^\alpha\left[\frac{m_0m_1}{\mu_3^\alpha\cos^{2\alpha}\chi}+\frac{m_1m_2}{(\mu_2\sin^2\chi+\mu_0^2\mu_3\cos^2\chi-\mu_0\sqrt{\mu_2\mu_3}\sin 2\chi\cos\tau)^\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{m_0m_2}{(\mu_2\sin^2\chi+\mu_1^2\mu_3\cos^2\chi+\mu_1\sqrt{\mu_2\mu_3}\sin 2\chi\cos\tau)^\alpha}\right] \tag{18}$$

$$F_\chi=\frac{\partial F}{\partial\chi}=\alpha\mu_2^\alpha\mu_3^\alpha\left[\frac{2m_0m_1\sin\chi}{\mu_3^\alpha\cos^{2\alpha+1}\chi}-\right.$$

$$- m_1 m_2 \frac{(\mu_2 - \mu_0^2 \mu_3) \sin 2\chi - 2\mu_0 \sqrt{\mu_2 \mu_3} \cos 2\chi \cos \tau}{(\mu_2 \sin^2 \chi + \mu_0^2 \mu_3 \cos^2 \chi - \mu_0 \sqrt{\mu_2 \mu_3} \sin 2\chi \cos \tau)^{\alpha+1}} -$$

$$\left. - m_2 m_0 \frac{(\mu_2 - \mu_1^2 \mu_3) \sin 2\chi + 2\mu_1 \sqrt{\mu_2 \mu_3} \cos 2\chi \cos \tau}{(\mu_2 \sin^2 \chi + \mu_1^2 \mu_3 \cos^2 \chi + \mu_1 \sqrt{\mu_2 \mu_3} \sin 2\chi \cos \tau)^{\alpha+1}} \right] \tag{18'}$$

$$F_\tau = \frac{\partial F}{\partial \tau} = \alpha\, m_2\, \mu_2^{\alpha + \frac{3}{2}} \mu_3^{\alpha + \frac{1}{2}} \sin 2\chi \sin \tau \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(\mu_2 \sin^2 \chi + \mu_1^2 \mu_3 \cos^2 \chi + \mu_1 \sqrt{\mu_2 \mu_3} \sin 2\chi \cos \tau)^{\alpha+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(\mu_2 \sin^2 \chi + \mu_0^2 \mu_3 \cos^2 \chi - \mu_0 \sqrt{\mu_2 \mu_3} \sin 2\chi \cos \tau)^{\alpha+1}} \right] \tag{18''}$$

$$\cos \tau = \sin \varphi \sin \psi \cos (\vartheta - \omega) + \cos \varphi \cos \psi \tag{19}$$

$$F_\vartheta = F_\tau \,.\, \tau_\vartheta, \quad F_\omega = - F_\vartheta, \quad F_\varphi = F_\tau \,.\, \tau_\varphi, \quad F_\psi = F_\tau \,.\, \tau_\psi \tag{19'}$$

Інтеграли (12) і (13) набувають вигляду:

$$R^2 + P^2 = 2F + 2h \,.\, I^{2\alpha} \tag{20}$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta + \Omega &= c_0 I^{\alpha-1} \\ \Phi \sin \vartheta + \Theta \operatorname{ctg} \varphi \cos \vartheta + \Psi \sin \omega + \Omega \operatorname{ctg} \psi \cos \omega &= - c_1 I^{\alpha-1} \\ \Phi \cos \vartheta - \Theta \operatorname{ctg} \varphi \sin \vartheta + \Psi \cos \omega - \Omega \operatorname{ctg} \psi \sin \omega &= c_2 I^{\alpha-1} \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

§ 6. Поводження функції R при $t \to t_1$

Виключивши функцію F з другого рівняння (16) та інтеграла живих сил (20), дістанемо:

$$I^{\alpha+1} \frac{dR}{dt} - 2\alpha\, h\, I^{2\alpha} = (1 - \alpha) P^2 \tag{22}$$

Через те, що, згідно з висновком § 4, в певному інтервалі (t_0, t_1) I^2 зменшується монотонно, то в цьому інтервалі можна прийняти за незалежну зміну

$$K = I^{2\alpha} \quad \left(\frac{dK}{dt} = 2\alpha\, I^{\alpha-1} R \right) \tag{23}$$

Рівняння (22), після запровадження нового аргумента, матиме вигляд:

$$2\alpha\, KR \frac{dR}{dK} - 2\alpha\, hK = (1 - \alpha) P^2,$$

або

$$\frac{d\,(R^2 - 2h\,K)}{dK} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{P^2}{K} \tag{22'}$$

В наслідок того, що $\frac{P^2}{K} \geqslant 0$ і K меншає в інтервалі (t_0, t_1), то:

1) при $\alpha < 1$ $\dfrac{d(R^2 - 2hK)}{dK} \geqslant 0$; функція $R^2 - 2hK$ не зростає в інтервалі (t_0, t_1) та залишається більшою $-2hK$ і, отже, прямує, як і R^2, до певної скінченної границі $R_1^2 \geqslant 0$, якщо $t \to t_1$;

2) при $\alpha = 1$ $\dfrac{d(R^2 - 2hK)}{dK} = 0$; $R^2 - 2hK = \text{const} = A^2 - 2hB$ *); і загальний співудар можливий лише при $A^2 - 2hB \geqslant 0$;

3) при $\alpha > 1$ $\dfrac{d(R^2 - 2hK)}{dK} \leqslant 0$; функція $R^2 - 2hK$ не меншає в інтервалі (t_0, t_1) і прямує до певної границі $R_1^2 \geqslant 0$ або необмежено зростає.

Покажемо, що останнє припущення — неможливе. Справді, тоді за (20) $F \to +\infty$ при $t \to t_1$ і, за (4), (7), (15), $\dfrac{r_м}{r_m}$ **) $\to +\infty$. Легко бачити, що в цьому випадку, починаючи з певного моменту, r_m представляється тим самим віддаленням, нехай r; тоді:

$$\lim \frac{r_0}{r} = \lim \frac{r_1}{r} = \lim \frac{\rho}{r} = +\infty \tag{24}$$

$$\lim \frac{r_1}{r_0} = \lim \frac{\rho}{r_0} = \lim \frac{\rho}{r_1} = 1 \tag{24'}$$

Диференціюючи двічі по t вираз для r^2, матимемо:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2r^2}{dt^2} = r\frac{dr'}{dt} + r'^2 = x\frac{dx'}{dt} + y\frac{dy'}{dt} + z\frac{dz'}{dt} + r'^2 + \frac{s^2}{r^{2\alpha}},$$

де

$$s^2 = r^{2(\alpha-1)}[(xy' - yx')^2 + (yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2],$$

звідки, на основі рівнянь (3):

$$r\frac{dr'}{dt} = -\frac{2\alpha(m_0 + m_1)}{r^{2\alpha}} + 2\alpha m_2(x\xi + y\eta + z\zeta)\left(\frac{1}{r_0^{2\alpha+2}} - \frac{1}{r_1^{2\alpha+2}}\right) -$$

$$-2\alpha m_2 r^2\left(\frac{\mu_0}{r_0^{2\alpha+2}} + \frac{\mu_1}{r_1^{2\alpha+2}}\right) + \frac{s^2}{r^{2\alpha}}$$

Зважаючи на (24), (24′), останнє рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{-2\alpha(m_0 + m_1) + s^2 + \varepsilon}{r^{2\alpha+1}}, \tag{25}$$

де через ε у всьому дальшому позначатимемо величину, яка прямує до нуля разом з $r\,(t_1 - t)$.

---

*) З формули (9) $K = I^2 = 2ht^2 + 2At + B$, $\dfrac{dI^2}{dt} = 4ht + 2A$, $R^2 - 2hK = \left[\dfrac{1}{2}\dfrac{dI^2}{dt}\right]^2 -$
$- 2hK = (2ht + A)^2 - 2h(2ht^2 + 2At + B) = A^2 - 2hB$

**) $r_м$ — maximum взаємних віддалень в момент t.

Але, з інтеграла живих сил (5)

$$\mu_2\left(r'^2+\frac{s^2}{r^{2\alpha}}\right)+\mu_3 v_2^2=2U+2h,$$

на основі (24)—(24'), маємо:

$$s^2=2(m_0+m_1)-r^{2\alpha}r'^2-\frac{\mu_3}{\mu_2}r^{2\alpha}v_2^2+\varepsilon;$$

отже, за (25):

$$\frac{dr'}{dt}=\frac{-2(\alpha-1)(m_0+m_1)-\frac{\mu_3}{\mu_2}r^{2\alpha}v_2^2-r^{2\alpha}r'^2+\varepsilon}{r^{2\alpha+1}} \tag{26}$$

З (26), як і в § 4, легко знайдемо, що в певному інтервалі, біля $t=t_1$, r' постійно від'ємна і r меншає монотонно.

Розглядаючи далі похідну:

$$\frac{d(r^{2\alpha}r'^2)}{dr}=2\alpha\frac{r^{2\alpha}r'^2}{r}+2r^{2\alpha}\frac{dr'}{dt}, \tag{27}$$

яка, на основі (26), набуває вигляду:

$$\frac{d(r^{2\alpha}r'^2)}{dr}=-2\,\frac{2(\alpha-1)(m_0+m_1)+\frac{\mu_3}{\mu_2}r^{2\alpha}v_2^2-(\alpha-1)r^{2\alpha}r'^2-\varepsilon}{r},$$

помічаємо, що $r^{2\alpha}r'^2$ не може ні прямувати до нуля (бо тоді права частина, починаючи з певного моменту, була б від'ємною, і $r^{2\alpha}r'^2$ зростало б), ні осцилювати, маючи нуль нижньою границею [бо в моменти досягнення extremum-у: $(\alpha-1)r^{2\alpha}r'^2=2(\alpha-1)(m_0+m_1)+\frac{\mu_3}{\mu_2}r^{2\alpha}v_2^2-\varepsilon$]. Отже, $r^{2\alpha}r'^2$ має відмінну від нуля нижню границю в околі $t=t_1$.

Нарешті, шосте з рівнянь (16), зважаючи на те, що за (24)—(24') $\cos\chi\to 0$ і за (18_1) $F_\vartheta\to 0$, можна записати у вигляді:

$$\frac{d(\Theta I^{1-\alpha})}{dt}=\frac{\varepsilon}{I^{2\alpha}},$$

або

$$d(\Theta I^{1-\alpha})=\frac{\varepsilon}{I^{2\alpha}r'}dr=\frac{\varepsilon}{r^{\alpha}}dr,$$

звідки, через інтегрування:

$$\Theta I^{1-\alpha}-\overline{\Theta}\,\overline{I}^{1-\alpha}=\int_{\overline{r}}^{r}\frac{\varepsilon}{r^{\alpha}}dr\,{}^{*});$$

звідси

$$\Theta I^{1-\alpha}r^{\alpha-1}=\mu_2 r^{\alpha-1}(xy'-yx')\to 0 \text{ і } s^2\to 0 \text{ при } t\to t_1$$

---

*) Тут $\overline{\Theta}$, $\overline{I}$ позначають значення Θ, I при $r=\overline{r}$, а це останнє береться з інтервалу монотонного меншання r.

Тоді рівняння (25) матиме вигляд:

$$\frac{dr'}{dt}=\frac{-2\alpha(m_0+m_1)+\varepsilon}{r^{2\alpha+1}},$$

і з (27) дістанемо:

$$\frac{d(r^{2\alpha}r'^2)}{dr}-2\alpha\frac{r^{2\alpha}r'^2}{r}=2\alpha\frac{-2(m_0+m_1)+\varepsilon}{r}$$

Звідси:

$$r^{2\alpha}r'^2=2(m_0+m_1)+\left(\frac{r}{\bar r}\right)^{2\alpha}[\bar r^{2\alpha}\bar r'^2-2(m_0+m_1)]+$$

$$+2\alpha r^{2\alpha}\int_{\bar r}^{r}\frac{\varepsilon\,dr}{r^{2\alpha+1}}\quad(\bar r>r>0)$$

$$\text{і}\ \lim_{t\to t_1}r^{2\alpha}r'^2=2(m_0+m_1),\qquad \lim_{t\to t_1}r^{2\alpha}\rho'^2=0;$$

тоді $\lim\limits_{t\to t_1}\frac{\rho'}{r'}=0$, що суперечить (24). Отже, і при $\alpha>1$ функції $R^2-2hI^{2\alpha}$ і R^2 прямують, при $t\to t_1$, до скінченної границі $R_1^2\geqslant 0$. На основі цього, з рівняння (22′) випливає, що (нри $\alpha\neq 1$) нижня границя функції P^2 в околі $I=0$ дорівнює нулю; зважаючи на (17), цей самий висновок матимемо і для функцій X^2, Θ^2, $\Theta^2\operatorname{ctg}^2\varphi$, Φ^2, Ω^2, $\Omega^2\operatorname{ctg}^2\psi$ і Ψ^2.

Легко впевнитися, що $R_1^2>0$. Справді, коли б $R_1^2=0$, то з (20) дістали б:

$$P^2=2F+\varepsilon,$$

де ε прямує до нуля разом з t_1-t. Але, на основі (7):

$$\frac{K}{r^{2\alpha}}>\left(\frac{m_0m_1}{M}\right)^{\alpha},\ \frac{K}{r_0^{2\alpha}}>\left(\frac{m_1m_2}{M}\right)^{\alpha},\ \frac{K}{r_1^{2\alpha}}>\left(\frac{m_2m_0}{M}\right)^{\alpha}$$

і за (4):

$$2F=2KU>\frac{2}{M^{\alpha}}\sum(m_i\ m_j)^{\alpha+1}$$

Тоді нижня границя P^2 була б відмінна від нуля, що суперечить попередньому висновку. На основі того, що нижня границя P^2 в околі $I=0$ дорівнює нулю, з (21), при $\alpha<1$ випливає, що

$$c_0=c_1=c_2=0,$$

тобто — всі сталі інтегралів площ, в русі системи відносно центра інерції, дорівнюють нулю.

Це є окремий випадок загальної теореми, наведеної в § 1. Отже, при $\alpha<1$, для можливості загального співудару, рух трьох точок мусить відбуватись в одній площині.

§ 7. Поводження функцій F, X, Θ, Φ, Ω і Ψ

Узагальнюючи в дальшому міркування Sundman-а, застосовані ним до випадку притягання за Ньютоновим законом $\left(\alpha=\frac{1}{2}\right)$ [1], доведімо неможливість (при $\alpha\neq 1$) припущення, що P^2 осцилює поміж нулем і якоюсь верхньою границею. Коли припустити останнє, то тоді існує така додатна стала a, що неперервна функція $2F-R_1^2=P^2\pm\varepsilon$*) ($\varepsilon\to+0$ при $I\to+0$) переходить необмежену кількість разів від a до $2a$ (і навпаки) при зменшенні I від $\bar{I}<I_0$ до нуля, яке б мале не було $\bar{I}$. Нехай тоді

$$2F'=R_1^2+a, \qquad 2F''=R_1^2+2a,$$

де F' і F'' — значення F при $I=I'<\bar{I}$ та при $I=I''<I'$. В інтервалі $I'>I>I''$

$$R_1^2+a<2F<R_1^2+2a \tag{28}$$

і

$$U''>U>U'\text{**)}$$

Додавши друге з рівнянь (16) і (20), дістанемо рівняння:

$$I^{\alpha+1}\frac{dR}{dt}+(1-\alpha)R^2-2hI^{2\alpha}=2(1-\alpha)F,$$

яке, після множення на $2I^{1-2\alpha}$, за першим з (16) перетвориться в

$$\frac{d}{dI}\left[I^{2(1-\alpha)}R^2-2hI^2\right]=2F\frac{dI^{2(1-\alpha)}}{dI},$$

або

$$d[L(R^2-2hK)]=2FdL,$$

де, для спрощення запису, покладено: $I^{2(1-\alpha)}=L$.

Звідси, через інтегрування дістанемо:

$$L'(R'^2-2hK')-L''(R''^2-2hK'')=2\int_{L''}^{L'}F\,dL;$$

але, за (22')

$$R'^2-2hK'=R_1^2+\frac{1-\alpha}{\alpha}\int_0^{K'}\frac{P^2}{K}dK, \quad R''^2-2hK''=R_1^2+\frac{1-\alpha}{\alpha}\int_0^{K''}\frac{P^2}{K}dK,$$

а тому попередня рівність набуде вигляду:

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(L'\int_0^{K'}\frac{P^2}{K}dK-L'\int_0^{K''}\frac{P^2}{K}dK\right)=2\int_{L''}^{L'}F\,dL-R_1^2(L'-L'')=\int_{L''}^{L'}(2F-R_1^2)\,dL$$

---

*) $+$ при $\alpha<1$ і $-$ при $\alpha>1$.

**) В цьому і наступному §§ штрихами позначатимемо значення функцій при $I=I'$ та $I=I''$.

Звідси, за (28):

$$\int_0^{K'} \frac{P^2}{K} dK > \frac{\alpha}{(1-\alpha) L'} \int_{L''}^{L'} (2F - R_1^2)\, dL > \frac{a\alpha}{1-\alpha} \frac{L' - L''}{L'} \tag{29}$$

Але ця нерівність, при досить малому K' приведе до суперечності. Доведімо це. З формули (4)

$$\left| \frac{dU}{dt} \right| \leqslant 2\alpha m_0 m_1 m_2 \sum_{i=0}^{i=2} \frac{1}{m_i r_i^{2\alpha+1}} \left| \frac{dr_i}{dt} \right|,$$

звідки, на основі нерівностей

$$\left| \frac{dr_i}{dt} \right| \leqslant \sqrt{\frac{M m_i (2U + 2h)}{m_0 m_1 m_2}}, \quad \frac{1}{r_i^{2\alpha}} < \frac{m_i}{m_0 m_1 m_2} U,$$

дістанемо:

$$\left| \frac{dU}{dt} \right| < C U^{1+\frac{1}{2\alpha}} \sqrt{2U + 2h},$$

де

$$C = \frac{2\alpha M^{\frac{1}{2}}}{(m_0 m_1 m_2)^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}}} \sum_{i=0}^{i=2} m_i^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}}$$

Далі:

$$\left| \frac{dL}{dt} \right| = 2|1-\alpha| I^{1-2\alpha} \left| \frac{dI}{dt} \right| = 2|1-\alpha| I^{1-3\alpha} |R| =$$

$$= 2|1-\alpha| I^{1-3\alpha} \sqrt{R_1^2 + 2hK \pm \varepsilon}\,^{*)} > 2|1-\alpha| I^{1-3\alpha} \sqrt{R_1^2 + 2hK - \bar{\varepsilon}},$$

де можна покласти $\bar{\varepsilon} = 0$ при $\alpha < 1$, а при $\alpha > 1$ $\bar{\varepsilon}$ — прийняти, напр., рівним значенню ε при $I = \bar{I}$ (або I_0) **).

Таким чином:

$$\left| \frac{dU}{dL} \right| = \frac{\left| \frac{dU}{dt} \right|}{\left| \frac{dL}{dt} \right|} < \frac{C}{2|1-\alpha|} \frac{F^{1+\frac{1}{2\alpha}}}{I^2} \sqrt{\frac{2F + 2hK}{R_1^2 + 2hK - \bar{\varepsilon}}},$$

і в інтервалі $I' > I > I''$:

$$\left| \frac{dU}{dL} \right| < C_1 \frac{F''^{1+\frac{1}{2\alpha}}}{I''^2}, \tag{30}$$

де

$$C_1 = \frac{C}{2|1-\alpha|} \sqrt{1 + \frac{2a + \bar{\varepsilon}}{R_1^2 - 2|h|K - \bar{\varepsilon}}}\,^{***)}$$

---

*) І тоді, при $\alpha > 1$, ця нерівність матиме місце при $I < \bar{I}$ $(t > \bar{t})$.

**) C_1 має, очевидно, скінченне значення при досить малому $\bar{I}$; $\bar{K} = \bar{I}^{2\alpha}$

***) $\varepsilon \to +0$ (монотонно) при $I \to +0$; отже $+$ при $\alpha < 1$, і $-$ при $\alpha > 1$.

На основі (30) матимемо:

$$U'' - U' < C_1 \, | L' - L'' | \, . \frac{F''^{1+\frac{1}{2\alpha}}}{I''^2},$$

звідки, беручи до уваги, що:

$$U'' = \frac{R_1^2 + 2a}{2K''}, \quad U' = \frac{R_1^2 + a}{2K'} < \frac{R_1^2 + a}{2K''}, \quad U'' - U' > \frac{a}{2K''},$$

дістанемо:

$$| L' - L'' | > \frac{a}{2\, C_1 F''^{1+\frac{1}{2\alpha}}} L''$$

Звідси, поклавши:

$$C_2 = \frac{2^{\frac{1}{2\alpha}} a}{C_1 \, (R_1^2 + 2a)^{1+\frac{1}{2\alpha}}},$$

знайдемо:

$$| L' - L'' | > C_2 L'' \quad \text{і} \quad \frac{| L' - L'' |}{L'} > \overline{C},$$

де

$$\overline{C} = C_2 \text{ при } \alpha > 1 \text{ і } \overline{C} = \frac{C_2}{1 + C_2} \text{ при } \alpha < 1$$

Нарешті, повертаючись до (29), на основі одержаного результату, матимемо:

$$\int_0^{K'} \frac{P^2}{K} dK > \frac{a\,\alpha}{| 1 - \alpha |} \overline{C}$$

Але, через те, що α, a, C_2 — додатні сталі, що не залежать від K', а інтеграл в лівій частині прямує до нуля при $K' \to +0$, то ця нерівність неможлива.

Отже, при $I \to +0$:

$$\lim P^2 = \lim \mathrm{X} = \lim \Theta = \lim \Theta \operatorname{ctg} \varphi = \lim \Phi = \lim \Omega = \lim \Omega \operatorname{ctg} \psi = \lim \Psi = 0 \quad (31)$$

і

$$\lim 2F = \lim R^2 = R_1^2 > 0 \qquad (32)$$

§ 8. Граничні конфігурації

Звертаючись тепер до розгляду плоского руху, доведімо, що, при наближенні часу до моменту загального співудару, три матеріальні точки прагнуть впорядкуватися у вершинах рівностороннього трикутника, або по одній прямій, з певними відношеннями взаємних віддалень, що залежать від відношень мас [1]).

---

[1]) Як це було доведено Sundman-ом [1]) для випадку притягання за Ньютоновим законом $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$.

Позначаючи в дальшому через ε всяку функцію, що прямує до нуля, разом з I, розгляньмо рух при зміні I від $I' < I < I_0$ до $I'' = \frac{I'}{b}$, де b є певна стала, більша за одиницю.

З першого і третього рівнянь (16), на основі (31) та (32), маємо:

$$\frac{d\chi}{dI} = \frac{\varepsilon}{I}$$

Звідси, через інтегрування в межах від I' до I $(I' \geqslant I \geqslant I'')$, дістанемо:

$$\chi - \chi' = \int_{I'}^{I} \varepsilon \frac{dI}{I} = \varepsilon' \int_{I'}^{I} \frac{dI}{I} = \varepsilon' \ln \frac{I}{I'},$$

де ε' прямує до нуля разом з I'.

Цей наслідок, зважаючи на те, що в даних межах $\left|\ln \frac{I}{I'}\right| \leqslant \ln b$, можна записати так:

$$\chi = \chi' + \varepsilon',$$

звідки

$$\cos \chi = \cos (\chi' + \varepsilon')$$

Отже, запровадивши позначення:

$$k = \frac{r}{I} \tag{33}$$

та зважаючи на (14), в інтервалі (I', I'') матимемо:

$$k = k' + \varepsilon' \tag{34}$$

Змінюючи ролі точок P_0, P_1, P_2, так само дістанемо:

$$k_i = k'_i + \varepsilon' \quad (I' \geqslant I \geqslant I''), \tag{34'}$$

де

$$k_i = \frac{r_i}{I} \quad (i = 0,\ 1) \tag{33'}$$

Розгляньмо тепер шосте з рівнянь (16), яке, на основі (18_1), (19), (19′) та (33′), у випадку плоского руху $\left(\varphi = \psi = \frac{\pi}{2}\right)$, можна записати у вигляді:

$$I^{2\alpha} \frac{d(\Theta I^{1-\alpha})}{dt} = \alpha m_2 \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_3}} \sin 2\chi \sin(\omega - \vartheta) \left(\frac{1}{k_0^{2\alpha+2}} - \frac{1}{k_1^{2\alpha+2}}\right)$$

Звідси, позначивши відношення площі трикутника $P_0\ P_1\ P_2$ до I^2 через p, так що

$$p = \frac{r\rho\,|\sin(\omega - \vartheta)|}{2I^2} = \frac{\sin 2\chi \,.\, |\sin(\omega - \vartheta)|}{4\sqrt{\mu_2 \mu_3}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(k + k_0 + k_1)(k + k_0 + k_1)(k - k_0 + k_1)(-k + k_0 + k_1)}, \tag{35}$$

матимемо:

$$I^{2\alpha}\frac{d(\Theta I^{1-\alpha})}{dt}=\pm 4\alpha m_2\mu_2 p\left(\frac{1}{k_0^{2\alpha+2}}-\frac{1}{k_1^{2\alpha+2}}\right)$$

Прийнявши за аргумент I, дістанемо звідси, на основі першого рівняння (16):

$$\frac{d(\Theta I^{1-\alpha})}{dI}=\pm\frac{4\alpha m_2\mu_2 p}{I^\alpha R}\left(\frac{1}{k_0^{2\alpha+2}}-\frac{1}{k_1^{2\alpha+2}}\right)$$

Зважаючи на те, що, за (34), (34′) та (35)

$$p=p'+\varepsilon',$$

останнє рівняння можемо записати у вигляді:

$$\frac{d(\Theta I^{1-\alpha})}{dI}=\pm\left[\frac{4\alpha m_2\mu_2 p'}{R_1}\left(\frac{1}{k'^{2\alpha+2}}-\frac{1}{k'^{2\alpha+2}}\right)+\varepsilon'\right]\frac{1}{I^\alpha},$$

звідки, через інтегрування в межах від I'' до I':

$$\Theta' I'^{1-\alpha}-\Theta'' I''^{1-\alpha}=\pm\left[\beta p'\left(\frac{1}{k_0'^{2\alpha+2}}-\frac{1}{k_1'^{2\alpha+2}}\right)+\varepsilon'\right](I'^{1-\alpha}-I''^{1-\alpha})$$

$$\left(\beta=\frac{4\alpha m_2\mu_2}{(1-\alpha)R_1}\right)$$

В наслідок того, що $I''^{1-\alpha}=\frac{I'^{1-\alpha}}{b^{1-\alpha}}$ і за висновком (31)

$$\Theta'=\varepsilon',\ I''^{1-\alpha}\Theta''=I''^{1-\alpha}\varepsilon''=I'^{1-\alpha}\varepsilon',$$

то:

$$I'^{1-\alpha}\varepsilon'=\pm\left[\beta p'\left(\frac{1}{k_0'^{2\alpha+2}}-\frac{1}{k_1'^{2\alpha+2}}\right)+\varepsilon'\right]\left(1-\frac{1}{b^{1-\alpha}}\right)I'^{1-\alpha},$$

або

$$p'\left(\frac{1}{k_0'^{2\alpha+2}}-\frac{1}{k_1'^{2\alpha+2}}\right)=\varepsilon' \quad .$$

Через те, що ця рівність має місце для всякого значення $I'<I_0$, то, відкинувши штрихи, матимемо:

$$p\left(\frac{1}{k_0^{2\alpha+2}}-\frac{1}{k_1^{2\alpha+2}}\right)=\varepsilon \tag{36}$$

Але, за (32):

$$2F=2KU=2\left(\frac{m_0 m_1}{k^{2\alpha}}+\frac{m_1 m_2}{k_0^{2\alpha}}+\frac{m_2 m_0}{k_1^{2\alpha}}\right)=R_1^2+\varepsilon,$$

отже, $k_i^{2\alpha}>\dfrac{2m_0 m_1 m_2}{m_i(R_1^2+\varepsilon)}$ і, крім того: $k_i^2<\dfrac{M m_i}{m_0 m_1 m_2}$ *)

*) Тобто k_i (отже і відношення взаємних віддалень) змінюються в скінченних і відмінних від нуля межах.

Через це з (36) дістанемо:

$$p(k_1 - k_0) = \varepsilon \tag{37}$$

і, цілком подібно:

$$p(k - k_1) = \varepsilon \tag{37'}$$

Звідси:

$$p(k + k_0 + k_1) = 3pk + \varepsilon, \quad p(k + k_0 - k_1) = pk + \varepsilon,$$

$$p(k - k_0 + k_1) = pk + \varepsilon, \quad p(-k + k_0 + k_1) = pk + \varepsilon$$

Перемноживши ці рівності, дістанемо:

$$16p^6 = 3p^4k^4 + \varepsilon,$$

звідки

$$p = \varepsilon, \quad \text{або} \quad p = \frac{\sqrt{3}}{4}k^2 + \varepsilon$$

Але, при досить малому $\overline{I}$, різниця цих значень не обертається в нуль; отже, через неперервність зміни p, ця величина при $I < \overline{I}$ буде постійно рівна одному з цих двох значень, так що потрібно окремо розглянути ці два випадки.

a) Випадок $p = \frac{\sqrt{3}}{4}k^2 + \varepsilon$. В цьому випадку, за (37) і (37′),

$$k_0 = k + \varepsilon, \quad k_1 = k + \varepsilon;$$

тоді

$$\frac{k_1}{k} = \frac{r_1}{r} = 1 + \varepsilon \quad \text{і} \quad \frac{k_0}{k} = \frac{r_0}{r} = 1 + \varepsilon \tag{38}$$

і, при $t \to t$, відношення взаємних віддалень прямують до одиниці.

b) Випадок $p = \varepsilon$. Позначивши кути між напрямами P_2P_0 і P_0P_1, P_0P_1 і P_1P_2, P_2P_0 і P_1P_2 відповідно через φ_0, φ_1, φ_2, матимемо:

$$2p = kk_1|\sin\varphi_0| = k_0k|\sin\varphi_1| = k_1k_0|\sin\varphi_2| = \varepsilon,$$

звідки

$$\sin\varphi_i = \varepsilon \qquad (i = 0, 1, 2)$$

і

$$\varphi_i = \varepsilon \qquad \text{або} \qquad \varphi_i = \pi + \varepsilon$$

Отже, зважаючи на неперервність зміни кутів φ_i, три точки, в міру зближення, прагнуть впорядкуватися по одній прямій [1]) в певному порядку. Позначивши через P_1 ту точку, яка прямує до положення, проміжного між двома іншими, матимемо:

$$\varphi_0 = \pi + \varepsilon, \quad \varphi_1 = \varepsilon, \quad \varphi_2 = \pi + \varepsilon \tag{39}$$

З трикутника $P_0P_1P_2$, крім того, маємо:

$$r_1 = r_0\cos(\pi - \varphi_2) + r\cos(\pi - \varphi_0),$$

---

[1]) Випадок $p = \varepsilon$ при $\alpha > 1$ взагалі можливий лише при прямолінійному русі трьох точок (пор. § 11).

звідки

$$k_1 = k_0 + k + \varepsilon \tag{40}$$

Розгляньмо тепер друге з рівнянь (10), яке при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, на основі (14), а за (4) та (11)

$$\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{m_0 m_1}{r^{2\alpha+1}} - \frac{\mu_0 m_1 m_2}{r_0^{2\alpha+1}}\frac{\mu_0 r - \rho\cos\tau}{r_0} + \frac{\mu_1 m_2 m_0}{r_1^{2\alpha+1}}\frac{\mu_1 r + \rho\cos\tau}{r_1},$$

матиме форму:

$$\frac{1}{2\alpha}\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{m_0 + m_1}{r^{2\alpha+1}} + \frac{m_2}{r_0^{2\alpha+1}}\cos\varphi_1 + \frac{m_2}{r_1^{2\alpha+1}}\cos\varphi_0 + \frac{\Theta^2}{2\alpha\mu_2^2 r^3 I^{2(\alpha-1)}}$$

Останнє рівняння, зважаючи на (33), (33'), (34), (34'), (31) та (39), можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = 2\alpha\frac{\sigma' + \varepsilon'}{I^{2\alpha+1}},$$

де

$$\sigma' = = -\frac{m_0 + m_1}{k'^{2\alpha+1}} + \frac{m_2}{k_0'^{2\alpha+1}} - \frac{m_2}{k_1'^{2\alpha+1}},$$

або, запровадивши аргумент I за допомогою першого з рівнянь (16):

$$\frac{d\left(\frac{dr}{dt}\right)}{dI} = 2\alpha\frac{\sigma' + \varepsilon'}{I^{\alpha+1}R_1}$$

Звідси, через інтегрування в межах від I'' до I', дістанемо:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)' - \left(\frac{dr}{dt}\right)'' = -2\frac{\sigma' + \varepsilon'}{R_1}\left(\frac{1}{I'^{\alpha}} - \frac{1}{I''^{\alpha}}\right) = -2\frac{\sigma' + \varepsilon'}{R_1}\frac{1 - b^{\alpha}}{I'^{\alpha}} \tag{41}$$

Через те, що за (14), (31), (32) та (33)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{rR - \sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\rho X}{I^{\alpha+1}} = \frac{kR_1 + \varepsilon}{I^{\alpha}},$$

то

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)' = \frac{k'R_1 + \varepsilon'}{I'^{\alpha}}, \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)'' = \frac{k''R_1 + \varepsilon''}{I''^{\alpha}} = \frac{k'R_1 + \varepsilon'}{I'^{\alpha}}b^{\alpha}$$

і, підставивши це в (41), знайдемо:

$$k'R_1^2 = 2\sigma' + \varepsilon'$$

Зважаючи на те, що ця рівність мусить бути справедливою для всякого $I'(<I)$, то, відкинувши штрихи, матимемо:

$$kR_1^2 = -2\sigma + \varepsilon, \tag{42}$$

де

$$\sigma = -\frac{m_0 + m_1}{k^{2\alpha+1}} + \frac{m_2}{k_0^{2\alpha+1}} - \frac{m_2}{k^{2\alpha+1}} \tag{43}$$

Цілком аналогічно знайдемо:

$$k_0 R_1^2 = -2\sigma_0 + \varepsilon, \tag{42'}$$

де

$$\sigma_0 = -\frac{m_1 + m_2}{k_0^{2\alpha-1}} - \frac{m_0}{k_1^{2\alpha+1}} + \frac{m_0}{k^{2\alpha+1}} \tag{43'}$$

З (42) та (42′) маємо:

$$g = \frac{k_0}{k} = \frac{-2\sigma_0 + \varepsilon}{-2\sigma + \varepsilon} \tag{44}$$

Підставивши сюди вирази σ та σ_0 з (43), (43′) та взявши до уваги (40), після зведення одержимо:

$$m_0\left[1 + g - \frac{1}{(1+g)^{2\alpha+1}}\right] + m_1\left(g - \frac{1}{g^{2\alpha+1}}\right) - m_2\left[\frac{1+g}{g^{2\alpha+1}} - \frac{g}{(1+g)^{2\alpha+1}}\right] + \varepsilon = 0,$$

або

$$m_0 g^{2\alpha+1}\left[(1+g)^{2\alpha+2} - 1\right] + m_1 (1+g)^{2\alpha+1}(g^{2\alpha+2} - 1) -$$
$$- m_2\left[(1+g)^{2\alpha+2} - g^{2\alpha+2}\right] + \varepsilon = 0$$

Це рівняння, при досить малому ε, має лише один додатний корінь $g = q + \varepsilon$, де q є єдиний[1]) додатний корінь рівняння:

---

[1]) Поклавши $q = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_3}} \operatorname{tg} \chi_1 - \mu_0$, дістанемо звідси рівняння, еквівалентне з $(F_\chi)_{\chi=\chi_1} = 0$ і при зміні q від 0 до $+\infty$, χ_1 змінюється від $\operatorname{arc\,tg} \mu_0 \sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}$ до $\frac{\pi}{2}$. Зважаючи на те, що при цих крайніх значеннях χ (і $\tau = 0$) $F\chi$ обертається відповідно в $\pm\infty$, тим часом як $(F\chi\chi)_{\tau=0}$ — постійно додатна в цьому інтервалі, то рівняння $(F\chi)_{\tau=0} = 0$ має в ньому лише один корінь. Але єдність додатного кореня рівняння (45) можна встановити і безпосередньо (при цілому значенні 2α ліва частина рівняння (45) має лише одну зміну знаку). Справді, позначивши ліву частину рівняння (45) через $f(q)$, маємо: $f(0) = -m_1 - m_2 < 0$, $f(+\infty) = +\infty$ але, якщо $f(q) \geqslant 0$, то (при $q > 0$):

$$q^{2\alpha+1}(1+q)^{2\alpha+\alpha}\left[m_0(1+q) + m_1 q\right] - m_1(1+q)^{2\alpha+1} - m_2\left[(1+q)^{2\alpha+2} - q^{2\alpha+2}\right] \geqslant m_0 q^{2\alpha+1} > 0,$$

або

$$q^{2\alpha+1}(1+q)^{2\alpha+1}\left(m_0 + m_1\frac{q}{1+q}\right) - m_1(1+q)^{2\alpha} - m_2\left[(1+q)^{2\alpha+1} - q^{2\alpha+1}\frac{q}{1+q}\right] > 0,$$

тоді й поготів

$$q^{2\alpha-1}(1+q)^{2\alpha+1}(m_0 + m_1) - \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2} m_1 (1+q)^{2\alpha} - m_2\left[(1+q)^{2\alpha+1} - q^{2\alpha+1}\right] > 0$$

Звідси, похідна

$$\frac{1}{2\alpha+2}\frac{df}{dq} = q^{2\alpha+1}(1+q)^{2\alpha+1}(m_0 + m_1) - \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2} m_1 (1+q)^{2\alpha} -$$
$$- m_2\left[(1+q)^{2\alpha+1} - q^{2\alpha+1}\right] + \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2} m_1 q^{2\alpha}\left[(1+q)^{2\alpha+2} - 1\right] + \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2} m_1 q^{2\alpha+2}(1+q) > 0$$

Легко знайти, що, коли $m_0 < m_2$ (що завжди можна прийняти), то корінь рівняння (45) лежить в інтервалі $\left[1, \left(\frac{m_2}{m_0}\right)^{\frac{1}{2\alpha+1}}\right]$; крім того, $f(m_0, m_1, m_2, q) = -q^{4\alpha+3} f\left(m_2, m_1, m_0, \frac{1}{q}\right)$.

$$m_0 q^{2\alpha+1}[(1+q)^{2\alpha+2}-1]+m_1(1+q)^{2\alpha+1}(q^{2\alpha+2}-1)-m_2[(1+q)^{2\alpha+2}-$$
$$-q^{2\alpha+2}]=0\,^{*)} \tag{45}$$

З (7), (33), (33′), (40) та (44), дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} k &= +\sqrt{\frac{M}{m_0(m_1+m_2)+2m_0m_2q+m_2(m_0+m_1)q^2}}+\varepsilon \\ k_0 &= kq+\varepsilon \\ k_1 &= (1+q)k+\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Отже, і в даному випадку відношення $\frac{r_1}{r_0}$, $\frac{r}{r_0}$ прямують при наближенні I до нуля, до певних скінченних границь, які залежать лише від відношення мас m_0, m_1, m_2.

§ 9. Рівняння плоского руху

При дослідженні загального співудару трьох точок в скінченний момент t_1, у випадку $\alpha<1$, потрібно, на основі висновків § 6, обмежитися розглядом лише плоского руху і до того ж такого, що головний момент кількостей руху відносно центра інерції системи дорівнює нулю. Навпаки, при $\alpha>1$, існують і просторові траєкторії з загальним співударом. Маючи на оці дослідити ці траєкторії в окремому мемуарі [1]), в цій роботі розглянемо плоскі траєкторії і для випадку $\alpha>1$.

Поклавши в системі (16)—(16′) та її інтегралах (20), (21):

$$\varphi=\psi=\frac{\pi}{2},\ \Phi=\Psi=0 \quad (z=z'=\zeta=\zeta'=0),$$

дістанемо рівняння плоского руху:

$$\left.\begin{aligned} &I^\alpha\frac{dI}{dt}=R,\quad I^{\alpha+1}\frac{dR}{dt}=\alpha R^2+\mathrm{X}^2+\frac{\Theta^2}{\cos^2\chi}+\frac{\Omega^2}{\sin^2\chi}-2\alpha F \\ &I^{\alpha+1}\frac{d\chi}{dt}=\mathrm{X},\quad I^{\alpha+1}\frac{d\mathrm{X}}{dt}=(\alpha-1)R\mathrm{X}+F\chi+\frac{\sin 2\chi}{2}\left(\frac{\Omega^2}{\sin^4\chi}-\frac{\Theta^2}{\cos^4\chi}\right) \\ &I^{\alpha+1}\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\Theta}{\cos^2\chi},\quad I^{\alpha+1}\frac{d\Theta}{dt}=(\alpha-1)R\Theta+F\vartheta \\ &I^{\alpha+1}\frac{d\omega}{dt}=\frac{\Omega}{\sin^2\chi},\quad I^{\alpha+1}\frac{d\Omega}{dt}=(\alpha-1)R\Omega+F\omega \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$$R^2+\mathrm{X}^2+\frac{\Theta^2}{\sin^2\chi}+\frac{\Omega_2}{\sin^2\chi}=2F+2hI^{2\alpha} \tag{48}$$

$$\Theta+\Omega=c_0I^{\alpha-1}, \tag{49}$$

---

*) При цілих значеннях 2α це рівняння вперше зустрічається у Laplace-а (10), який, проте, залишив його без дослідження. При $\alpha=\frac{1}{2}$ (Ньютонів закон), звідси, як окремий випадок, дістанемо відоме рівняння 5-го степеня Ейлера:

$$(m_0+m_1)q^5+(3m_0+2m_1)q^4+(3m_0+m_1)q^3-(m_1+3m_2)q^2-(2m_1+3m_2)q-(m_1+m_2)=0$$

[1]) Деякі зауваження і висновки, що стосуються просторових траєкторій, подано в § 12.

при чому у виразах (18), (18'), (18_1) для F, F_χ, F_τ треба покласти $\cos\tau = \cos(\vartheta - \omega)$; для випадку $\alpha < 1$, крім того, потрібно, щоби було $c_0 = 0$, отже $\Omega = -\Theta$.

Якщо в інтервалі $(0, t_1)$ немає співударів, а при $t = t_1$ наступає загальний співудар всіх точок, то, зважаючи на те, що, за § 8, χ прямує, при $t \to t_1$, до певної границі $\chi_1 \left(0 < \chi_1 < \frac{\pi}{2}\right)$, в певному інтервалі біля t_1, I, R, X, χ, ϑ, Θ, ω, Ω є голоморфні функції t; крім того, за § 4, $\frac{dI}{dt}$ в певному інтервалі $t_0 \leqslant t < t_1$ постійно від'ємна.

Отже, в меншому з двох зазначених інтервалів можемо розглядати R, X, . . ., Ω як голоморфні функції від I; систему, яка їх визначає, одержимо через виключення dt з рівнянь (47).

Помітивши, що в праві частини рівнянь (47) ϑ і ω входять тільки в комбінації $\vartheta - \omega$, замістимо, кінець кінцем, ці рівняння системою чотирьох рівнянь першого порядку:

$$\left.\begin{aligned}
I\frac{d\chi}{dI} &= \frac{\mathrm{X}}{R}\\
I\frac{d\mathrm{X}}{dI} &= (\alpha - 1)\,\mathrm{X} + \frac{F_\chi}{R} + \frac{\sin 2\chi}{2R}\left[\frac{(u_3 - \Theta)^2}{\sin^4\chi} - \frac{\Theta^2}{\cos^4\chi}\right]\\
I\frac{d\tau}{dI} &= \frac{1}{R}\left(\frac{\Theta}{\cos^2\chi} - \frac{u_3 - \Theta}{\sin^2\chi}\right)\\
I\frac{d\Theta}{dI} &= (\alpha - 1)\,\Theta + \frac{F_\tau}{R}
\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

рівняннями:

$$\left.\begin{aligned}
R &= \pm\sqrt{2F + 2hK - \mathrm{X}^2 - \frac{\Theta^2}{\cos^2\chi} - \frac{(u_3 - \Theta)^2}{\sin^2\chi}}\;{}^{*)}\\
\Omega &= u_3 - \Theta \qquad\qquad (K = I^{2\alpha},\ u_3 = c_0 I^{\alpha - 1})\\
\omega &= \vartheta - \tau
\end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

та двома рівняннями:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\vartheta}{dI} &= \frac{\Theta}{IR\cos^2\chi}\\
\frac{dt}{dI} &= \frac{I^\alpha}{R}
\end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

з яких, після інтегрування системи (A), ϑ і t визначаються за допомогою квадратур.

Розшукуючи розв'язки системи рівнянь (A), відповідні траекторіям загального співудару трьох точок, потрібно окремо розглянути випадки двох граничних конфігурацій § 8.

---

*) Знак мінус відповідає майбутньому співудару, знак плюс — минулому.

§ 10. Перша гранична конфігурація — рівносторонній трикутник

В цьому випадку, згідно з (38), (14), (7), траєкторіям загального співудару відповідатимуть такі розв'язки системи (А), що при $I \to +0$:

$$\lim \chi = \chi_1 = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}(1-\mu_0\mu_1)} = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{m_2(m_0^2+m_0m_1+m_1^2)}{Mm_0m_1}}\ ^{*)},$$

$$\left(0 < \chi < \frac{\pi}{2}\right) \tag{50}$$

$$\lim \mathrm{X} = \lim \Theta = 0 \tag{51}$$

$$\lim \cos\tau = \cos\tau_1 = \frac{\mu_0-\mu_1}{2\sqrt{1-\mu_0\mu_1}} = \frac{m_0-m_1}{2\sqrt{m_0^2+m_0m_1+m_1^2}}\ ^{**)},$$

$$(0 < \tau_1 < \pi)\ ^{***)} \tag{52}$$

$$\lim \sin\tau = \sin\tau_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-\mu_0\mu_1}} = \frac{\sqrt{3}(m_0+m_1)}{2\sqrt{m_0^2+m_0m_1+m_1^2}} \tag{52'}$$

$$\lim 2F = R_1^2 = \frac{2}{M^\alpha}(m_0m_1+m_1m_2+m_2m_0)^{\alpha+1} = \frac{2\mu^{2(\alpha+1)}}{M^\alpha} \tag{53}$$

і, нарешті

$$\lim F_\chi = \lim F_\tau = 0 \tag{54}$$

Праві частини рівнянь (А) є голоморфні функції аргументів

$$K,\ u_3,\ \chi,\ \tau,\ \mathrm{X},\ \Theta$$

біля

$$K=0,\ u_3=0\ ^{****)},\ \chi=\chi_1,\ \tau=\tau_1,\ \mathrm{X}=0,\ \Theta=0$$

і обертаються в нулі при цих значеннях. Отже, шукані розв'язки системи (А) представлятимуться біля $I=0$, як відомо, розкладами, впорядкованими за

---

*) З (7) маємо:

$$\frac{\rho^2}{r^2} = \mu_1\frac{r_0^2}{r^2} + \mu_0\frac{r_1^2}{r^2} - \mu_0\mu_1,$$

звідки, на основі (38), маючи на увазі, що $\mu_0+\mu_1=1$, дістанемо:

$$\lim\frac{r}{\rho} = \sqrt{1-\mu_0\mu_1}$$

**) Тому що з (11)

$$\cos\tau = \frac{r_1^2-\rho^2-\mu_1^2r^2}{2\mu_1 r\rho} = \frac{\frac{r_1^2}{r^2}-\frac{\rho^2}{r^2}-\mu_1^2}{2\mu_1\frac{\rho}{r}},$$

то

$$\lim_{I\to+0}\cos\tau = \frac{(1-\mu_0\mu_1)-\mu_1^2}{2\mu_1\sqrt{1-\mu_0\mu_1}}\ \frac{\mu_0-\mu_1}{2\sqrt{1-\mu_0\mu_1}}$$

***) Цього завжди можна досягнути відповідно добираючи напрями координатних осей.

****) При $\alpha < 1$:

$$c_0 = 0$$

отже, і u_3 дорівнює нулю. При $\alpha = 1$:

$$u_3 = \mathrm{const} = c_0$$

цілими степенями $I^{2a}, c_0 I^{\alpha-1}$ (при $\alpha > 1$) та $a_i I^{\lambda i}$, що збігаються при досить малих значеннях I, при чому a_i є довільна стала і λ_i—будьякий додатний корінь рівняння:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \chi}\right)_1 - \lambda & \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X}\right)_1 & \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau}\right)_1 & \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \Theta}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \chi}\right)_1 & \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial X}\right)_1 - \lambda & \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau}\right)_1 & \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \Theta}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \chi}\right)_1 & \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial X}\right)_1 & \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \tau}\right)_1 - \lambda & \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \Theta}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial \chi}\right)_1 & \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial X}\right)_1 & \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial \tau}\right) & \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial \Theta}\right)_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (55)$$

де через Φ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ позначено праві частини рівнянь (A) і знаком $(\ )_1$— наслідок підставлення 0, 0, χ_1, 0, τ_1, 0 замість K, u_3, χ, X, τ, Θ.

Із рівнянь (A), на основі (B) та (50) — (54), дістанемо:

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \chi}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X}\right)_1 = \frac{1}{R_1}, \quad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \Theta}\right)_1 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \chi}\right)_1 = \frac{(F_{\chi\chi})_1}{R_1} = \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \chi^2}\right)_1}{R_1}, \quad \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial X}\right) = \alpha - 1, \quad \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau}\right)_1 = \frac{(F_{\chi\tau})_1}{R_1}, \quad \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \Theta}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \chi}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial X}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \tau}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \Theta}\right) = \frac{4}{R_1 \sin^2 2\chi_1},$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial \chi}\right)_1 = \frac{(F_{\chi\tau})_1}{R_1}, \quad \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial X}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial \tau}\right)_1 = \frac{(F_{\tau\tau})_1}{R_1}, \quad \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial \Theta}\right) = \alpha - 1$$

Підставляючи це в рівняння (55), матимемо:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ \frac{(F_{\chi\chi})_1}{R_1} & \alpha - 1 - \lambda & \frac{(F_{\chi\tau})_1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{4}{R_1 \sin^2 2\chi_1} \\ \frac{(F_{\chi\tau})_1}{R_1} & 0 & \frac{(F_{\tau\tau})_1}{R_1} & \alpha - 1 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha - 1 - \lambda & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \beta_4 \\ \beta_2 & 0 & \beta_3 & \alpha - 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (55')$$

де

$$\beta_1 = \frac{(F_{\chi\chi})_1}{R_1^2}, \quad \beta_2 = \frac{(F_{\chi\tau})_1}{R_1^2}, \quad \beta_3 = \frac{(F_{\tau\tau})_1}{R_1^2}, \quad \beta_4 = \frac{4}{\sin^2 2\chi_1} \quad (56)$$

Розкладаючи (55'), дістанемо:

$$[\lambda(\lambda+1-\alpha)-\beta_1][\lambda(\lambda+1-\alpha)-\beta_3\beta_4]-\beta_2^2\beta_4=0,$$

або

$$\lambda^4+2(1-\alpha)\lambda^3-[\beta_1+\beta_3\beta_4-(1-\alpha)^2]\lambda^2-$$
$$-(1-\alpha)(\beta_1+\beta_3\beta_4)\lambda+\beta_4)(\beta_1\beta_3-\beta_2^2)=0$$

На основі формул (18'), (18'), (52), (53) та (2) знайдемо:

$$\left.\begin{aligned}
\beta_1&=\frac{\alpha(\alpha+1)}{2M(m_0^2+m_0m_1+m_1^2)}\times\\
&\times[4(m_0^3+m_1^3)+5m_0m_1(m_0+m_1)+m_2(m_1-m_0)^2]\\
\beta_2&=\frac{\alpha(\alpha+1)(m_1-m_0)}{2(m_0+m_1)}\sqrt{\frac{3m_0m_1m_2}{M(m_0^2+m_0m_1+m_1^2)}}\\
\beta_3&=\frac{3\alpha(\alpha+1)m_0m_1m_2}{2(m_0+m_1)(m_0m_1+m_1m_2+m_2m_0)}\\
\beta_4&=\frac{(m_0+m_1)^2(m_0m_1+m_1m_2+m_2m_0)^2}{Mm_0m_1m_3(m_0^2+m_0m_1+m_1^2)}
\end{aligned}\right\}, \quad (57)$$

звідки:

$$\beta_1+\beta_3\beta_4=2\alpha(\alpha+1),\quad \beta_4(\beta_1\beta_3-\beta_2^2)=3\alpha^2(\alpha+1)^2\frac{\mu^2}{M^2}$$

Отже:

$$\Delta(\lambda)=\lambda^4+2(1-\alpha)\lambda^3-(\alpha^2+4\alpha-1)\lambda^2-2\alpha(1-\alpha^2)\lambda+$$
$$+3\alpha^2(1+\alpha)^2\frac{\mu^2}{M^2}=0,$$

або

$$\Delta(\lambda)=\left[\lambda^2+(1-\alpha)\lambda-\alpha(1+\alpha)\left(1-\sqrt{1-3\frac{\mu^2}{M^2}}\right)\right]\cdot$$
$$\cdot\left[\lambda^2+(1-\alpha)\lambda-\alpha(1+\alpha)\left(1+\sqrt{1-3\frac{\mu^2}{M^2}}\right)\right]=0 \qquad (58)$$

Через те, що $3\frac{\mu^2}{M^2}\leqslant 1$ *), то тричлени в квадратних дужках завжди мають дійсні корені різних знаків. Позначивши додатні корені через λ_1 (для першого тричлена) і через λ_2 (для другого), так що

$$\lambda_{1,2}=\frac{\alpha-1+\sqrt{(\alpha-1)^2+4\alpha(\alpha+1)\left(1\pm\sqrt{1-3\frac{\mu^2}{M^2}}\right)}}{2}, \qquad (59)$$

*) Знак рівності можливий тільки при $m_0=m_1=m_2$; тоді:

$$\lambda_1=\lambda_2=\frac{\alpha-1+\sqrt{(\alpha+1)^2+4\alpha^2}}{2}$$

помічаємо, що:

$$0<\lambda_1\leqslant\frac{\sqrt{(\alpha+1)^2+4\alpha^2}+\alpha-1}{2}\leqslant\lambda_2<2\alpha \tag{60}$$

і, при $\alpha>1$:

$$\lambda_1>\alpha-1>0$$

Отже, шукані розв'язки системи (A), представлятимуться розкладами вигляду:

$$\left.\begin{aligned}\chi&=\chi_1+\sum_{ijkl}\chi_{ijkl}\,u^i u_1^j u_2^k u_3^l\\ \tau&=\tau_1+\sum_{ijkl}\tau_{ijkl}\,u^i u_1^j u_2^k u_3^l\\ X&=\sum_{ijkl}X_{jkl}\,u^i u_1^j u_2^k u_3^l\\ \Theta&=\sum_{ijkl}\Theta_{ijkl}\,u^i u_1^j u_2^k u_3^l\end{aligned}\right\}, \tag{61}$$

де:

$$u=\frac{2h}{R_1^2}I^{2\alpha},\;\; u_1=a_1 I^{\lambda_1},\;\; u_2=a_2 I^{\lambda_2},\;\; u_3=c_0 I^{\alpha-1},\text{ отже, при } \alpha<1\;\; u_3=0),\tag{62}$$

$$i,\ j,\ k,\ l \text{ — цілі додатні числа або нулі } (i+j+k+l>0)$$

і

$$\chi_{ijkl},\ \tau_{ijkl},\ X_{ijkl},\ \Theta_{ijkl}$$

сталі коефіціенти, при чому

$$\chi_{i000}=\tau_{i000}=X_{i000}=\Theta_{i000}=0$$

Зважаючи на нерівності (60), винятки можливі лише при:

$$\lambda_1=n(\alpha-1)\ (n\geqslant 2);\ \lambda_2=n_1\lambda_1+n_2(\alpha-1)\ (n_1+n_2\geqslant 2),\text{ якщо } \alpha>1$$

і при

$$\lambda_2=n\lambda_1\quad (n\geqslant 2),\quad \text{якщо}\quad \alpha<1$$

Деякі зміни відбуваються також у випадку:

$$\lambda_1=\lambda_2\,(m_0=m_1=m_2)\ ^{*)}$$

Якщо

$$m_0=m_1=m\left(\tau_1=\frac{\pi}{2}\right),$$

то не важко впевнитися, що при $u_3=0$, розклади для $\tau-\tau_1$ і Θ мають множник u_2 (коли $m<m_2$) або u_1 (коли $m>m_2$); отже, поклавши a_2 (або a_1) рівним нулю, дістанемо:

$$\tau=\tau_1=\frac{\pi}{2},\;\; \Theta=0\;(\Omega=0)$$

*) Всі виняткові випадки, які трактуються аналогічно § 7 моєї дисертації [22], буде розглянуто в окремій статті.

В даному випадку матимемо рух з віссю симетрії, що проходить через центр інерції мас m_0 і m_1, перпендикулярно до $P_0 P_1$; три точки завжди лежать у вершинах рівнобедреного трикутника, і рух точки P_2 відносно центра інерції точок P_0 та P_1 і P_1 відносно P_0 буде прямолінійний.

Виключивши u_1, u_2, u_3 з (61) та другого з рівнянь (B), дістанемо два інваріантні співвідношення, що (при даному h) характеризують, при $\alpha > 1$, розв'язки із загальним співударом біля $I = 0$ (умови співудару) *). При $\alpha < 1$ дістанемо дві умови через виключення u_1, u_2 з (61) (при $u_3 = 0$), до яких ще приєднується умова $c_0 = (\Omega + \Theta) I^{1-\alpha} = 0$*); для випадку руху з віссю симетрії залишається тільки одна умова (друга задовольняється тотожно).

Зважаючи на (B) та (61), з (C) дістанемо для ϑ і t розклади вигляду:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_1 + \sum_{ijkl} \vartheta_{ijkl} u^i u_1^j u_2^k u_3^l \\ t &= t_1 + I^{\alpha+1} \sum_{ijkl} t_{ijkl} u^i u_1^j u_2^k u_3^l \end{aligned}\right\} \tag{61'}$$

Розклади (61), (61') залежать від 6 довільних параметрів (при $\alpha < 1$ — від п'яти) h, a_1, a_2, ϑ_1, t_1 і c_0, тим часом як у загальному випадку плоского руху їх буде вісім **).

При $\alpha = 1$:

$$I^2 = 2ht^2 + 2At + B \text{ (ф-ла 9)},$$

$$u_3 = c_0,\ \ R^2 = 2hI^2 + C^{***}),\ \ X^2 = 2F - \frac{\Theta^2}{\cos^2\chi} - \frac{(c_0 - \Theta)^2}{\sin^2\chi} - c\ \ (c = A^2 - 2hB)$$

В цьому випадку існують такі траєкторії загального співудару, що, при $t \to t_1$, відношення взаємних віддалень трьох точок не прямують всі до певних границь [37, 38]. Але існують також і такі розв'язки системи (A), відповідні загальному співудару, що (при $c > 0$) при $t \to t_1$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim \chi = \chi_1, \quad \lim \tau = \tau_1 \ \left(0 < \chi_1 < \frac{\pi}{2},\ \ 0 \leqslant \tau_1 < \pi\right) \\ &\lim X = 0, \quad \lim \Theta = c_0 \cos^2\chi_1,\ \ F_\chi \to 0,\ \ F_\tau \to 0, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

що дає граничні конфігурації такі ж, як і при $\alpha \neq 1$.

У випадку першої граничної конфігурації — рівностороннього трикутника:

$$2F_1 = R_1^2 + c_0^2 = \frac{2\mu^4}{\mu};\quad R_1^2 = c = \frac{2\mu^4}{M}(1 - c'^2),$$

де

$$c' = \frac{c_0 \sqrt{\mu}}{\mu^2 \sqrt{2}} \left(0 \leqslant c_0^2 < \frac{2\mu^4}{M};\ \ 0 \leqslant c'^2 < 1\right)$$

*) До цього ще приєднуються дві умови плоского руху.

**) До яких ще приєднуються 4 сталі інтегралів руху центра інерції.

***) Пор. § 6.

Характеристичне рівняння буде:

$$\lambda^4 - 4\lambda^2 + 4\nu^2 = 0,$$

де

$$\nu^2 = \frac{3\mu^2}{M^2(1-c'^2)^2} \geqslant \frac{3\mu^2}{\mu^2}\cdot$$

Якщо

$$0 \leqslant c_0^2 < \frac{2\mu^4}{M}\left(1 - \frac{\mu\sqrt{3}}{M}\right),$$

то

$$0 \leqslant c'^2 < 1 - \frac{\mu\sqrt{3}}{M}$$

$$\frac{3\mu^2}{M^2} \leqslant \nu^2 < 1$$

і останнє рівняння має два дійсних додатних корені:

$$\lambda_{1,2} = +\sqrt{2(1 \mp \sqrt{1-\nu^2})} \quad (0 < \lambda_1 < \sqrt{2} < \lambda_2 < 2),$$

що стають рівними $(\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{2})$ при

$$c_0^2 = \frac{2\mu^4}{M}\left(1 - \frac{\mu\sqrt{3}}{M}\right), \quad \nu^2 = 1$$

Якщо

$$\frac{2\mu^4}{M}\left(1 - \frac{\mu\sqrt{3}}{M}\right) < c_0^2 < \frac{2\mu^4}{M},$$

то

$$1 - \frac{\mu\sqrt{3}}{M} < c'^2 < 1$$

$$1 < \nu^2 < +\infty,$$

і ми матимемо два комплексних корені з додатною дійсною частиною:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\nu+1} \pm i\sqrt{\nu-1}$$

У випадку дійсних коренів χ, X, τ і Θ взагалі [1]) розкладаються біля $I=0$ за степенями

$$u = \frac{2h}{R_1^2} I^2; \quad u_1 = a_1 I_1^{\lambda_1}, \quad u_2 = a_2 I^{\lambda_2}.$$

Тоді, за першим рівнянням (C), для ϑ матимемо розклади вигляду:

$$\vartheta = a_3 - \frac{c_0}{\sqrt{c}} \ln I + \sum_{ijk} \vartheta_{ijk}\, u^i u_1^j u_2^k$$

---

[1]) Виняткові випадки — при $\lambda_2 = n\lambda_1$.

(a_3 — довільна стала) і, при $I \to +0$, $|\mathfrak{Э}|$ необмежено зростає, як $-\ln I$. У випадку комплексних коренів, в розклади, замість u_1, u_2, увійдуть вирази:

$$a_1 I^{\sqrt{\nu+1}} \cos\left[\sqrt{\nu-1}\ln I\right] \quad \text{і} \quad a_2 I^{\sqrt{\nu+1}} \sin\left[\sqrt{\nu-1}\ln I\right]$$

Отже, тим часом як при $\alpha \neq 1$ корені характеристичного рівняння залежать лише від відношень мас, у випадку $\alpha = 1$ вони залежать також і від c_0.

§ 11. Друга гранична конфігурація (прямолінійна)

На основі формул (7), (11), (14), (31) та (46) в цьому випадку траєкторіям із загальним співударом відповідають такі розв'язки системи (A), що при $I \to +0$:

$$\lim \chi = \chi_1 = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}(\mu_0 + q) \quad \left(0 < \chi_1 < \frac{\pi}{2}\right) \tag{63}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim X = \lim \Theta = 0 \\ &\lim \cos\tau = \cos\tau_1 = 1, \quad \tau_1 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

$$\lim 2F = R_1^2 = 2\left[m_0 m_1 + \frac{m_1 m_2}{q^{2\alpha}} + \frac{m_2 m_0}{(1+q)^{2\alpha}}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{m_0(m_1+m_2) + 2m_0 m_2 q + m_2(m_0+m_1)q^2}{M}\right]^\alpha \tag{65}$$

$$\lim F_\chi = \lim F_\tau = 0,$$

де q є єдиний додатний корень рівняння (45).

З (18'), (18_1) та (64) дістанемо:

$$(F_{\chi\chi})_1 = 2\alpha F_1 + 2\alpha(2\alpha+1)\mu_2^\alpha \mu_3^\alpha \left[\frac{m_0 m_1 \sin^2\chi_1}{\mu_3^\alpha \cos^{2\alpha+2}\chi_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{m_1 m_2(\sqrt{\mu_2}\cos\chi_1 + \mu_0\sqrt{\mu_3}\sin\chi_1)^2}{(\sqrt{\mu_2}\sin\chi_1 - \mu_0\sqrt{\mu_3}\cos\chi_1)^{2\alpha+2}} + \frac{m_2 m_0(\sqrt{\mu_2}\cos\chi_1 - \mu_1\sqrt{\mu_3}\sin\chi_1)^2}{(\sqrt{\mu_2}\sin\chi_1 + \mu_1\sqrt{\mu_3}\cos\chi_1)^{2\alpha+2}}\right],$$

$$(F_{\chi\tau})_1 = 0$$

$$(F_{\tau\tau})_1 = \alpha\, m_2 \mu_2^{\alpha+\frac{3}{2}} \mu_3^{\alpha+\frac{1}{2}} \sin 2\chi_1 \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(\sqrt{\mu_2}\sin\chi_1 + \mu_1\sqrt{\mu_3}\cos\chi_1)^{2\alpha+2}} - \frac{1}{(\sqrt{\mu_1}\sin\chi_1 - \mu_0\sqrt{\mu_3}\cos\chi_1)^{2\alpha+2}}\right]$$

Отже, за (63) та (65):

$$
\left.\begin{aligned}
&\beta_1 = \alpha + \alpha(2\alpha+1)\times \\
&\times \frac{\dfrac{m_0(m_1+m_2+m_2q)^2}{q^{2\alpha+2}} + \dfrac{m_1(m_0-m_2q)^2}{(1+q)^{2\alpha+2}} + m_2[(m_0+m_1)q+m_0]^2}{M\left[m_0m_1 + \dfrac{m_1m_2}{q^{2\alpha}} + \dfrac{m_2m_0}{(1+q)^{2\alpha}}\right]} > 0 \\
&\beta_2 = 0 \\
&\beta_3 = -\frac{\alpha m_2\mu_2(\mu_0+q)\left[\dfrac{1}{q^{2\alpha+2}} - \dfrac{1}{(1+q)^{2\alpha+2}}\right]}{m_0m_1 + \dfrac{m_1m_2}{q^{2\alpha}} + \dfrac{m_2m_0}{(1+q)^{2\alpha}}} < 0 \\
&\beta_4 = \frac{[m_0(m_1+m_2)+2m_0m_2q+m_2(m_0+m_1)q^2]^2}{M\mu_2m_2[(m_0+m_1)q+m_0](\mu_0+q)} \\
&\beta_3\beta_4 = -\alpha\frac{[m_0(m_1+m_2)+2m_0m_2q+m_2(m_0+m_1)q^2]^2\left[\dfrac{1}{q^{2\alpha+2}} - \dfrac{1}{(1+q)^{2\alpha+2}}\right]}{M[(m_0+m_1)q+m_0]\left[m_0m_1+\dfrac{m_1m_2}{q^{2\alpha}}+\dfrac{m_2m_0}{(1+q)^{2\alpha}}\right]}
\end{aligned}\right\} \quad (66)
$$

Характеристичне рівняння (55′) розпадається в цьому випадку на 2 рівняння:

$$\lambda^2 - (\alpha-1)\lambda - \beta_1 = 0 \quad (67)$$

і

$$\lambda^2 - (\alpha-1)\lambda - \beta_3\beta_4 = 0, \quad (67')$$

з яких перше, при довільному співвідношенні мас та при всякому α, має два дійсні корені різних знаків, так що додатний корінь:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha - 1 + \sqrt{(\alpha-1)^2 + 4\beta_1}}{2} \quad (168)$$

За допомогою рівняння (45), після досить довгих, але цілком елементарних обчислень, знайдемо, що множник при $\alpha(2\alpha+1)$ у виразі (66) для β_1 — більше за одиницю; тоді:

$$\beta_1 > 2\alpha(\alpha+1) \quad \text{і} \quad \lambda_1 > 2\alpha$$

Рівняння (67′) при $\alpha < 1$ має обидва корені від'ємні або комплексні спряжені з від'ємною дійсною частиною $-\frac{1-\alpha}{2}$. Отже, коефіцієнти розкладів функцій τ і Θ за степенями u, u_1 всі дорівнюють нулю, і

$$\tau \equiv 0, \ \Theta \equiv 0 \quad (\Theta I^{1-\alpha} = \Omega I^{1-\alpha} = 0)$$

і можна покласти:

$$\vartheta = \omega = 0,$$

тобто рух буде прямолінійний.

В цьому випадку:

$$x = r, \ \xi = \rho \ (y = \eta = y' = \eta' = 0),$$

і задача зводиться до інтегрування системи двох рівнянь першого порядку:

$$I\frac{d\chi}{dI}=\frac{X}{R}\qquad I\frac{dX}{dI}=-(1-\alpha)X+\frac{F_\chi}{R}$$

де

$$R=\pm\sqrt{2F+2hI^{2\alpha}-X^2}$$

$$F=\mu_2^\alpha\mu_3^\alpha\left[\frac{m_0\,m_1}{\mu_3^\alpha\cos^{2\alpha}\chi}+\frac{m_1\,m_2}{(\sqrt{\mu_2}\sin\chi-\mu_0\sqrt{\mu_3}\cos\chi)^{2\alpha}}+\right.$$

$$\left.+\frac{m_2\,m_0}{(\sqrt{\mu_2}\sin\chi+\mu_1\sqrt{\mu_3}\cos\chi)^{2\alpha}}\right]$$

$$F_\chi=2\alpha\,\mu_2^\alpha\mu_3^\alpha\left[\frac{m_0\,m_1\sin\chi}{\mu_3^\alpha\cos^{2\alpha+1}\chi}-m_1\,m_2\frac{\sqrt{\mu_2}\cos\chi+\mu_0\sqrt{\mu_3}\sin\chi}{(\sqrt{\mu_2}\sin\chi-\mu_0\sqrt{\mu_3}\cos\chi)^{2\alpha+1}}-\right.$$

$$\left.-m_2\,m_0\frac{\sqrt{\mu_2}\cos\chi-\mu_1\sqrt{\mu_3}\sin\chi}{(\sqrt{\mu_2}\sin\chi+\mu_1\sqrt{\mu_3}\cos\chi)^{2\alpha+1}}\right],$$

після чого t визначається за допомогою квадратури з

$$\frac{dt}{dI}=\frac{I^\alpha}{R}$$

При $\alpha>1$ корені рівняння (67′) λ_2, $\bar{\lambda}_2$ — обидва додатні або — комплексні спряжені з додатною дійсною частиною $\frac{\alpha-1}{2}$. В першому випадку:

$$0<\bar{\lambda}_2\leqslant\frac{\alpha-1}{2}\leqslant\lambda_2<\alpha-1<2\alpha<\lambda_1, \tag{69}$$

і розклади шуканих функцій біля $I=0$ мають вигляд:

$$\chi=\chi_1+\sum_{ijk\bar{k}l}\chi_{ijk\bar{k}l}\,u^i u_1^j u_2^k \bar{u}_2^{\bar{k}} u_3^l,\ldots t=t_1+I^{\alpha+1}\sum_{ijk\bar{k}l}t^{ijk\bar{k}l}u^i u_1^j u_2^k \bar{u}_2^{\bar{k}} u_3^l\,^{*)}, \tag{70}$$

де

$$u=\frac{2h}{R_1^2}I^{2\alpha},\; u_1=a_1 I^{\lambda_1},\; u_2=a_2 I^{\lambda_2},\; \bar{u}_2=\bar{a}_2 I^{\bar{\lambda}_2},\; u_3=c_0 I^{\alpha-1},$$

a_1, a_2, $\bar{a}_2$ — довільні сталі, i, j, k, $\bar{k}$, l — цілі додатні або нулі $(i+j+k+\bar{k}+l>0)$ і $\chi_{ij\bar{k}kl},\ldots t_{ij\bar{k}kl}$ — коефіцієнти розкладів $(\chi_{i000}=\ldots=t_{i000}=0)$.

Якщо $\alpha<1$, то в розклади (70) для χ, X, t входитимуть лише степені u та u_1.

---

*) Або зважаючи на те, що $\lambda_2+\bar{\lambda}_2=\alpha-1$, розклади можна впорядкувати просто за степенями $I^{2\alpha}$, I^{λ_1}, I^{λ_2}, $I^{\bar{\lambda}_2}$.

У випадку комплексних коренів ($\alpha > 1$):

$$\lambda_2,\ \bar{\lambda}_2 = \frac{\alpha-1}{2} \pm i\delta$$

в розклади (70) замість u_2, $\bar{u}_2$ увійдуть вирази:

$$a_2 I^{\frac{\alpha-1}{2}} \cos(\delta \ln I), \quad \bar{a}_2 I^{\frac{\alpha-1}{2}} \sin(\delta \ln I)$$

Зважаючи на нерівності (69), зміни в характері розкладів можливі лише:

1) при $\lambda_2 = n\bar{\lambda}_2$ *), $\lambda_1 = n_1 2\alpha + n_2\lambda_2 + n_3\bar{\lambda}_2$ $(n_1 + n_2 + n_3 \geqslant 2)$ $(\alpha > 1)$,

якщо λ_2 і $\bar{\lambda}_2$ — дійсні, та при $\lambda_1 = n_1 2\alpha + n_2(\alpha - 1)$, якщо λ_2, $\bar{\lambda}_2$ — комплексні.

2) при $\alpha < 1$, $\lambda_1 = 2n\alpha$.

Не важко впевнитися, що, навіть у цьому окремому випадку, в розклади $\ln I$ не входитиме і шукані розв'язки будуть голоморфними функціями від $k = I^{2\alpha}$ біля $K = 0$.

Розклади (70) залежать від 7 довільних параметрів h, a_1, a_2, $\bar{a}_2$, ϑ_1, t_1 і c_0 (при $\alpha < 1$ розклади для χ, X і t залежать від трьох параметрів h, a_1 і t_1) **). Виключивши u_1, u_2, $\bar{u}_2$, u_3 з розкладів для $\chi - \chi_1$, τ, Θ, x та другого з рівнянь (B), дістанемо інваріантне співвідношення, що (при даному h) характеризує, біля $I = 0$, розв'язки із загальним співударом. При $\alpha < 1$ дістанемо умову співудару [1] через виключення u_1 з розкладів для $\chi - \chi_1$ і X.

При $\alpha = 1$, для випадку прямолінійної граничної конфігурації маємо умови (63), (64), але тепер:

$$\lim \Theta = c_0 \cos^2 \chi_1, \quad 2F_1 = R_1^2 + c_0^2,$$

і вираз для $2F_1$ дістанемо з правої частини (65), поклавши там $\alpha = 1$.

Отже:

$$R_1^2 = c = 2\left[m_0 m_1 + \frac{m_1 m_2}{q^2} + \frac{m_2 m_0}{(1+q)^2}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{m_0(m_1 + m_2) + 2m_0 m_1 q + m_2(m_0 + m_1)q^2}{M}\right](1 - c'^2),$$

де

$$c' = \frac{c_0 \cos \chi_1}{\sqrt{2\mu_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_0 m_1 + \frac{m_1 m_2}{q^2} + \frac{m_2 m_0}{(1+q)^2}}} \quad (0 \leqslant c_0^2 < 2F_1;\ 0 \leqslant c'^2 < 1)$$

---

*) Окремі зауваження потрібні також у випадку $\lambda_2 = \bar{\lambda}_2$.

**) До яких ще приєднується параметр орієнтації прямої, вздовж якої відбувається рух точок.

[1]) До якої ще приєднуються три умови прямолінійності руху.

Характеристичне рівняння буде:

$$\lambda^4 - 4\frac{\nu' - c'^2}{1 - c'^2}\lambda^2 - 4\frac{(\nu' - 1)(3\nu' - 1)}{(1 - c'^2)^2} = 0$$

і має два чисто уявні корені, дійсний від'ємний і дійсний додатний:

$$\lambda_1 = +\sqrt{\frac{2}{1 - c'^2}}\sqrt{\nu' - c'^2 + \sqrt{(\nu' - c')^2 + (\nu' - 1)(3\nu' - 1)}} \text{ *)},$$

де

$$\nu' = \frac{\beta_1 + 2}{6} > 1$$

і вираз для β_1 найдемо з (66), поклавши там $\alpha = 1$.

Шукані функції χ, X, τ, Θ і t представлятимуться, біля $I = 0$, розкладами, впорядкованими за цілими степенями:

$$u = \frac{2h}{R_1^2} I^2 \text{ і } u_1 = a_1 I^{\lambda_1}$$

Для ϑ матимемо розклади:

$$\vartheta = a_3 - \frac{c_0}{\sqrt{c}} \ln I + \sum_{ij} \vartheta_{ij} u^i u_1^j$$

Зміна в характері розкладів можлива лише при

$$\lambda_1 = 2n \quad (n \geqslant 1)$$

§ 12. Просторовий рух

Нарешті, зробимо кілька зауважень, що стосуються просторового руху.

Згідно з висновком § 6, траєкторії загального співудару в просторовому русі можливі лише при $\alpha \geqslant 1$. Вибравши I за аргумент, замістимо рівняння (16) § 5 системою десяти рівнянь першого порядку:

$$\left.\begin{aligned}
&I\frac{d\chi}{dI} = \frac{X}{R}, \quad I\frac{dX}{dI} = (\alpha - 1)X + \frac{F_\chi}{R} + \\
&\quad + \frac{\sin 2\chi}{2R}\left[\frac{\Omega^2 \csc^2\psi + \Psi^2}{\sin^4\chi} - \frac{\Theta^2\csc^2\varphi + \Phi^2}{\cos^4\chi}\right] \\
&I\frac{d\vartheta}{dI} = \frac{\Theta}{R\cos^2\chi\sin^2\varphi}, \quad I\frac{d\Theta}{dI} = (\alpha - 1)\Theta + \frac{F_\vartheta}{R} \\
&I\frac{d\varphi}{dI} = \frac{\Phi}{R\cos^2\chi}, \quad I\frac{d\Phi}{dI} = (\alpha - 1)\Phi + \frac{F_\varphi}{R} + \frac{\Theta^2\cos\varphi}{\cos^2\chi\sin^3\varphi} \\
&I\frac{d\omega}{dI} = \frac{\Omega}{R\sin^2\chi\sin^2\psi}, \quad I\frac{d\Omega}{dI} = (\alpha - 1)\Omega + \frac{F_\omega}{R} \\
&I\frac{d\psi}{dI} = \frac{\Psi}{R\sin^2\chi}, \quad I\frac{d\Psi}{dI} = (\alpha - 1)\Psi + \frac{F_\psi}{R} + \frac{\Omega^2\cos\psi}{\sin^2\chi\sin^3\psi},
\end{aligned}\right\}, \quad (71)$$

*) Що при $c' = 0$ ($c_0 = 0$) зводиться до $+\sqrt{\beta_1}$ (пор. ф-лу 68).

яка має інтеграли (21) *), рівнянням

$$R = \pm\sqrt{2F + 2hK - P^2}, \tag{72}$$

та рівнянням

$$\frac{dt}{dI} = \frac{I^\alpha}{R}, \tag{73}$$

з якого, після інтегрування системи (71), t визначається за допомогою квадратури.

Згідно з висновками §§ 6 і 7, траекторіям із загальним співударом відповідають такі розв'язки системи (71), що, при $I \to +0$, $2F$ прямує до певної границі $2F_1 = R_1^2 > 0$, а Θ, χ, Φ, Ω, Ψ прямують до нуля.

Для просторового руху матимемо ті самі граничні конфігурації, при чому, при $\alpha > 1$, φ і ψ прямують до певних скінченних границь φ_1 ψ_1, які можемо вважати відмінними від нуля і π **).

У випадку першої граничної конфігурації (рівносторонній трикутник) матимемо умови (50) — (54) § 10; три з чотирьох величин φ_1, ψ_1, ϑ_1, ω_1, залишаються довільними [1]).

Характеристичне рівняння зводиться до вигляду:

$$\lambda^3(\lambda + 1 - \alpha)^3\left[\lambda^2 + (1-\alpha)\lambda - \alpha(1+\alpha)\left(1 - \sqrt{1 - 3\frac{\mu^2}{M^2}}\right)\right] \times$$
$$\times\left[\lambda^2 + (1-\alpha)\lambda - \alpha(1+\alpha)\left(1 + \sqrt{1 - 3\frac{\mu^2}{M^2}}\right)\right] = 0 \quad (\alpha > 1),$$

при чому трьом нульовим кореням відповідають три параметри орієнтації трикутника.

Шукані функції біля $I = 0$ розкладатимуться, як і в § 10, в ряди, впорядковані за цілими степенями [2])

$$I^{2\alpha}, \quad I^{\lambda_1}, \quad I^{\lambda_2}, \quad I^{\alpha-1} \text{ ***}),$$

але залежитимуть від 10 довільних параметрів, за які можна прийняти, напр., h, a_1, a_2, c_0, c_1, c_2, φ_1, ψ_1, ϑ_1 і t_1. Отже, мусять існувати дві умови співудару.

---

*) Звичайно, також можна використати ці інтеграли, вибравши, наприклад, за площу xOy незмінну площину (так що $c_0 \neq 0$, $c_1 = c_2 = 0$), через що рівняння (71) заміниться системою шести рівнянь з невідомими функціями χ, X, $\vartheta - \omega$, Θ, φ, Φ, рівняннями (72), $\Omega = u_3 - \Theta$, $(u_3 - \Theta)\operatorname{ctg}\psi = -\Phi\sin(\vartheta - \omega) - \Theta\operatorname{ctg}\varphi\cos(\vartheta - \omega)$, $\Psi = \Theta\operatorname{ctg}\varphi\sin(\vartheta - \omega) - \Phi\cos(\vartheta - \omega)$, (73) і $\dfrac{d\vartheta}{dI} = \dfrac{\Theta}{IR\sin^2\varphi\cos^2\chi}$

**) Цих граничних значень завжди можемо уникнути відповідною зміною координатних осей.

[1]) Але неможливо одночасне існування рівностей:

$$\omega_1 = \vartheta_1 \quad \text{і} \quad \psi_1 = \varphi_1$$

[2]) Виключаючи, звичайно, деякі окремі випадки співвідношення мас.

***) Розклад для $t - t_1$ ще має множник $I^{\alpha+1}$.

У випадку прямолінійної граничної конфігурації матимемо умови (63)—(65) § 11 і $\sin(\vartheta_1 - \omega_1) = 0$, $\sin(\varphi_1 \pm \psi_1) = 0$. При належному доборі напряму осей дістанемо:

$$\psi_1 = \varphi_1, \ \omega_1 = \vartheta_1,$$

Характеристичне рівняння буде:

$$\lambda^2(\lambda + 1 - \alpha)^2 [\lambda^2 - (\alpha - 1)\lambda - \beta_1][\lambda^2 - (\alpha - 1)\lambda - \beta_3\beta_4]^2 = 0,$$

при чому двом нульовим кореням його відповідають два параметри орієнтації граничної прямої.

Розклади шуканих функцій біля $I = 0$ впорядковуються, як і в § 11, за цілими степенями $I^{2\alpha}$, I^{λ_1}, I^{λ_2}, $\overline{I^{\lambda_2}}$ *) і залежать від 11 довільних параметрів. Не важко довести, що гранична пряма лежить в незмінній площині. Міркування цього мемуару узагальнюються і на випадок взаємодії за законом (0) § 1, при певних обмеженнях для функції $f(r)$; це узагальнення буде подано в одному з наступних мемуарів.

ЛІТЕРАТУРА

1. K. Sundman, Recherches sur le problème des trois corps. (Acta soc. sc. Fennicae t. XXXIV, 1907).
2. H. Block, Sur les chocs dans le problème des trois corps. (Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. V, 1909).
3. I. Chazy, Sur certaines trajectoires du problème des n corps. (Comptes-Rendus, t. 157, 1913).
4. J. Chazy, Sur les points singuliers de l'intégrale générale du problème des trois corps. (ibid).
5. J. Chazy, Sur certaines trajectoires du problème des n corps. (Bull. Astr., t. XXXV, 1918).
6. Ф. Слудский, К задаче о многих телах (Математ. сборник, т. IX, 1878).
7. K. Sundman, Mémoire sur le problème des trois corps. (Acta Mathematica, t. 36, 1912—13).
8. H. Andoyer, Sur l'équilibre relatif des n corps. (Bull. Astr., t. XXIII, 1906).
9. W. Longley, Some particular solutions in the problem of n bodies. (Bull. of the Amer. math. Soc., 13, 1906—1907).
10. P. Laplace, Traité de mécanique céleste, l. X, ch. VI, 1805.
11. Veltmann, Bewegung in Kegelschnitten von mehr als zwei Körpern, welche sich nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. (Astr. Nachr., 86, 1875).
12. Hoppe, Erweiterung der bekannten Speziallösung des Dreikörperproblems. (Grunerts Archiv der Math. und Physik, 64, 1879).
13. Lehmann Filhés, Über zwei Fälle des Vielkörperproblems. (Astr. Nachr., 127, 1891).
14. O. Dziobek, Über einen merkwürdigen Fall des Vielkörperproblems. (Astr. Nachr., 152, 1900).
15. P. Pizzetti, Casi particolari del problema dei tre corpi. (Rendiconti dei Lincei, v. 5, 13, 1904).
16. E. Lovett, (Annali di Mat., 3, v. 11, 1904).
17. П. Воронец, Преобразование уравнений динамики при помощи линейных интегралов движения (Универс. Изв., т. XLVII, № 1-2, Киев 1907; див. також Унив. Изв., т. XLV, 1905 та Math. Annalen, Bd. LXIII, 1907).
18. T. Banachiewicz, Sur un cas particulier du problème des n corps. (Comptes-Rendus t. 142, 1906).

---

*) Див. дві попередні примітки.

19. Brehm, Particulare Integrale des Problems der n Körper. (Diss. 1908).

20. F. Moulton, (Annals of Math., v. 12, 1910).

21. A. Bilimovitsch, Einige particularen Lösungen des Problems der n Körper. (Astr. Nachr., 189, 1911).

22. Ю. Соколов. Умови загального співудару трьох тіл, що обопільно притягаються за законом Ньютона. (Труди Фіз.-Мат. відділу АН УРСР, т. IX, в. I, 1928).

23. O. Dziobek, Die mathematischen Theorien der Planetenbewegung. (Leipzig, 1888).

24. P. Painleve, Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles. (Stockholm, 1895).

25. Ю. Соколов, Про одну теорему Weierstrass-a. (Журн. Ін-ту матем. АН УРСР № 2, 1936).

26. Ю. Соколов, Про узагальнення однієї теореми J. Chazy. (Журн. Ін-ту матем. АН УРСР, № 1, 1937).

27. C. Jacobi, Problema trium corporum mutuis attractionibus cubis distantiarum inverse proportionalibus recta linea se moventium. (Gesam Werke. Bd. IV).

28. Marcolongo, Il problemo dei tre corpi. (Manuel Hoepli, 1919).

29. J. Chazy, Sur la stabilité avec la loi du cube des distances. (Bull. Astr. 2é série t. I, 1920).

30. M. Kivéliovitch, Régularisation des chocs binaires pour des forces proportionnelles à l'inverse d'une puissance quelconque de la distance. (Renndiconti dei Lincei, v. XVI, f. 5—6, 1932).

31. Ю. Соколов, Про один мемуар M. Kivéliovitch-a. (Журн. Ін-ту матем. АН УРСР, № 4, 1937).

32. Ю. Соколов, Про співудар в обмеженій задачі трьох тіл, які обопільно притягаються пропорціонально їхнім масам і якійсь функції відповідного віддалення. (Журн. Ін-ту матем. АН УРСР, № 3-4, 1934).

33. Ю. Соколов, Про особливі траєкторії в задачі трьох тіл, які обопільно притягаються пропорціонально їх масам і якійсь функції відповідного віддалення. (Журн. Ін-ту матем. АН УРСР, № 3-4, 1935).

34. G. Sokoloff, Sur le choc dans le problème des trois corps qui s'attirent proportionellement à leurs masses et à une fonction de la distance. (Bull. de la Cl. des Sc. de l'Ac. r. de Belgique, XXII, 3, 1936).

34. G. Sokoloff, Sur les trajectoires singulières dans le problème des trois corps. (Bull. de la Cl. des Sc. de l'Ac. r. de Belgique, XXII, 4, 1936).

Ю. Соколов, Про особливі точки інтегралів прямолінійної задачі трьох тіл, які взаємно притягаються обернено пропорціонально довільному степеневі віддалення. (Збірник праць Ін-ту матем. АН УРСР, № 1, 1938).

37. Ю. Соколов, О симметрическом случае в задаче трех тел, взаимно притягивающихся обратно пропорционально кубам расстояний (Киев 1938).

38. Ю. Соколов, Про особливі точки інтегралів рухів в симетричному випадку узагальненої задачі трьох тіл. (Збірн. праць Ін-ту матем. АН УРСР, № 2, 1938).

39. C. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik. (Vorl. 4).

Інститут Математики
Академії Наук УРСР
Київ

Одержано 15. I 1939

Об общем соударении в задаче трех тел, взаимно притягивающихся обратно пропорционально произвольной степени расстояния

Ю. Д. Соколов

РЕЗЮМЕ

В настоящем мемуаре автор исследует траектории с общим соударением задачи трех тел, взаимно притягивающихся обратно пропорционально произвольной степени ($2\alpha+1$, $\alpha>0$) расстояния.

Введение к этой работе содержит краткое изложение результатов исследований, относящихся к этому вопросу.

В § 2 устанавливаются диференциальные уравнения (3)—(3′) относительного движения точки P_1 относительно P_0 и точки P_2 относительно центра инерции масс m_0 и m_1.

В §§ 3 и 4 приводятся некоторые замечания относительно регулярного движения трех тел и характера особых точек интегралов движения на действительной оси (времени).

Принимая за искомые функции сферические координаты точек P_1 и P_2 и переменные (14) § 5, получим диференциальные уравнения (16).

В результате изучения в §§ 6, 7 и 8 поведения искомых функций вблизи момента общего соударения, устанавливается, что, если существует такой конечный момент t_1, что I стремится к нулю при $t \to t_1$, то:

a) В некотором интервале (t_0, t_1) I убывает монотонно.

b) При $\alpha \neq 1$, R^2 и $2F$ стремятся к общему пределу $R_1^2>0$ при $t \to t_1$.

c) X, Θ, Φ, Ω и Ψ стремятся к нулю ($\alpha \neq 1$), в случае $\alpha<1$, $c_0=c_1=c_2=0$, и движение происходит в одной плоскости.

d) χ, τ стремятся к определенным пределам, так что предельными конфигурациями, найденными еще K. Sundman'ом при $\alpha=\dfrac{1}{2}$, являются равносторонний треугольник и прямолинейная конфигурация с одним условием (45), связывающим отношение расстояний и масс.

В §§ 9, 10 и 11, после преобразования уравнений плоской задачи к системе четырех уравнений первого порядка и двум квадратурам, автор устанавливает форму разложений искомых функций около $I=0$, соответственно каждой из предельных конфигураций.

Наконец, § 12 содержит несколько замечаний относительно движения трех материальных точек в пространстве.

Sur la collision générale des trois corps qui s'attirent mutuellement proportionnellement à l'inverse d'une puissance quelconque de la distance

Par *G. Sokoloff*

RÉSUMÉ

L'auteur étudie dans ce mémoire les trajectoires avec collision générale du problème des trois corps qui s'attirent proportionnellement à l'inverse d'une puissance quelconque ($2\alpha+1$, $\alpha>0$) de la distance.

L'introduction à ce travail contient l'exposé sommaire des recherches concernant cette question. En considérant le mouvement relatif du point P_1 par rapport à P_0 et du point P_2 par rapport au centre d'inertie des masses m_0 et m_1, on obtient les équations différentielles (3) — (3′) du § 2.

Dans les §§ 3, 4 on fait quelques remarques concernant le mouvement régulier des trois corps et le caractère des points singuliers sur l'axe rée des intégrales du mouvement. En prenant pour les inconnues du problème les coordonnées polaires des points P_1 et P_2 et les variables (14) du § 5, on obtient les équations différentielles (16). En étudiant dans les §§ 6, 7 et 8 le comportement des fonctions cherchées au voisinage de l'instant d'une collision générale, on établit que, s'il existe un instant fini t_1 tel que I tend vers zéro quand t tend vers t_1:

a) I va constamment en décroissant dans un intervalle (t_0, t_1).

b) Si $\alpha \neq 1$, R^2 et $2F$ tendent vers une limite commune $R_1^2>0$, quand t tend vers t_1,

c) X, Θ, Φ, Ω et Ψ tendent vers zéro ($\alpha \neq 1$), dans le cas $\alpha<1$ $c_0=c_1=$ $=c_2=0$ et le mouvement est plan,

d) χ, τ tendent vers des limites déterminées de telle sorte que les deux figures-limites, obtenues déjà par M. Sundman $\left(\text{dans le cas } \alpha=\frac{1}{2}\right)$ sont le triangle équilateral et une figure, où les trois corps sont en ligne droite avec une condition (45) reliant le rapport des distances et des masses. Dans les §§ 9, 10 et 11, après avoir transformé les équations du problème plan en un système des quatre équations du premier ordre (A), avec I comme variable indépendante, et en deux quadratures l'auteur établit la forme de développements des fonctions cherchées au voisinage de $I=0$, respectivement à chacune des deux figures-limites.

Enfin le § 12 contient quelques remarques concernant le cas du mouvement dans l'espace.

№ 4 ЗБІРНИК ПРАЦЬ ІНСТИТУТУ МАТЕМАТИКИ 1940
АКАДЕМІЇ НАУК УРСР

RECUEIL DES TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE LA RSS D'UKRAINE

Про деякі класи лінійних функціоналів у просторах C_p та про остаткові члени формул наближеного аналізу[1])

(Повідомлення друге)

Є. Я. Ремез

РОЗДІЛ III

Застосування: оцінки остаткових членів деяких формул наближеного аналізу

а) Загальні уваги про інтегральні представлення остаткових членів формул наближеного аналізу, зв'язок із розглядами попередніх двох розділів

В першій частині цієї роботи (розділи I та II) були досліджені основні властивості інтегральних представлень тих лінійних функціоналів $A[f(x)]$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, означених в просторі C_m (m — якесь натуральне число або нуль), які анулюються або для всіх цілих раціональних $f(x) \equiv P_n(x)$ даного степеня[2]) n, де $n \geqslant m-1$, абож для всіх узагальнених поліномів $P_n^*(x)$ певного рангу n якоїсь даної системи $\{u_i(x)\}$ $(i=0, 1, 2,..., n,...)$ лінійно-незалежних функцій, при чому вронскіан $W(u_0, u_1,..., u_{\mu-1})$ припускається відмінним від нуля на всьому сегменті $[a, b]$ принаймні для деяких значень μ, що містяться в межах $m \leqslant \mu \leqslant n+1$. Цілком зрозуміло, що оператор $A[f(x)]$, залежачи від вигляду функції $f(x)$, де f перебігає функціональний простір C_m, може в той же час залежати від одного або кількох параметрів $t, u, v,...$, значення яких фіксуються, або ще — від якихось фіксованих функцій довільного числа аргументів і т. д. Це ні в чому не може змінити наших висновків, аби решта умов залишалася в силі. Візьмімо зокрема важливий для дальшого конкретний випадок

$$A[f(x)] = A[f(x) \mid t] = A[f \mid t], \tag{187}$$

коли функціонал (оператор) A, крім вигляду функції $f(x)$, залежить ще лише від одного параметра t. Якщо для кожного фіксованого значення t, яке належить до певної точкової множини на числовій осі, функціонал (187) посідає усі вищезазначені властивості, то матимемо для цих значень t

[1]) Перша частина цієї роботи була надрукована в Збірнику праць Інституту математики Академії Наук УРСР, 1939, № 3, с.с. 21—62. Див. також стисле повідомлення автора в ДАН СССР, 1940, т. XXVI. № 2.

[2]) Ми, власне, вживаємо тут (і далі в деяких аналогічних випадках) вислів „степеня n" замість точнішого вислову „степеня $\leqslant n$".

і для значень μ, які задовольняють згадану умову (58), інтегральні представлення вигляду

$$A[f(x)\,|\,t]=\int_a^b L_\mu(f\,|\,x)\cdot d_x\alpha_\mu(x;\ t)\ \ (m\leqslant\mu\leqslant n+1) \tag{188}$$

$$A[f(x)\,|\,t]=\int_a^b L_\mu(f\,|\,x)\cdot\varkappa_\mu(x;\ t)dx\ \ (m+1\leqslant\mu\leqslant n+1), \tag{189}$$

які в даному випадку заступають місце представлень (70) та (136). Зокрема, якщо оператор A задовольняє умову С (розділ I), в якій роль поліномів $P_n^*(x)$ відіграють звичайні алгебричні поліноми $P_n(x)$, матимемо:

$$A[f(x)\,|\,t]=\int_a^b f^{(\mu)}(x)\,d_x\alpha_\mu(x;\,t)\ \ (m\leqslant\mu\leqslant n+1) \tag{188'}$$

$$A[f(x)\,|\,t]=-\int_a^b f^{(\mu)}(x)\,\alpha_{\mu-1}(x;\,t)\,dx=\int_a^b f^{(\mu)}(x)\varkappa_\mu(x;t)\,dx\,(m+1\leqslant\mu\leqslant n+1), \tag{189'}$$

де

$$\varkappa_\mu(x;\ t)\equiv-\alpha_{\mu-1}(x+0;\ t) \tag{190}$$

позначає в даному разі, зрозуміла річ, праворучну похідну від $\alpha_\mu(x;\ t)$ по x при зафіксованому t. Формули (188′), (189′) тут, очевидно, заступають місце формул (14), (41) відповідно.

Хай буде

$$S\,[f(x)]\approx T\,[f(x)] \tag{191}$$

будьяка формула наближеного аналізу, яка справедлива точно або для всіх алгебричних поліномів $f(x)\equiv P_n(x)$ даного степеня n, або для узагальнених поліномів $P_n^*(x)$ даного рангу n (див. вище), при чому S та T позначають якісь лінійні функціональні операції, що виконуються над $f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, означені в просторі C_m, а знак $\approx$ позначає наближену рівність. Найбільше значення, яке тут можна надати n, ми будемо називати *порядком точності* формули (191) і будемо взагалі розуміти під n саме оце найбільше значення.

Ми бачимо, що *остача* такої формули

$$S\,[f(x)]-T\,[f(x)]=A\,[f(x)] \tag{192}$$

являє собою якраз лінійний функціонал, що задовольняє вищезгадані умови і, отже, допускає інтегральні представлення типів (70), (136) чи то (14), (41) або, в разі наявності параметра t, інтегральні представлення вигляду (188), (189) чи то (188′), (189′) і т. д. Одержувані таким чином аналогічні вирази остачі являють собою *остаткові члени* розглядуваних фурмул (191).

Досить різноманітні типи формул наближеного аналізу обіймаються цією загальною схемою. Тут досить буде навести деякі приклади. Поруч із звичайними формулами механічних квадратур типу, що відповідає (5), або аналогічними формулами для наближеного обчислення інтегралів Стилтьєса тут можна назвати, наприклад, новий тип формул, недавно застосований J. Hellerich-ом та R. Schmidt-ом [1]), в яких наближене значення

[1]) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 164 (1931), SS. 243—253.

інтеграла Стилтьеса одержується з допомогою лінійної комбінації (із сталими коефіцієнтами) з ординат функції в $(n+1)$ точках сегмента $[a, b]$ та з n звичайних інтегралів, поширених на послідовні окремі інтервали сегмента $[a, b]$. Поруч із різноманітними формулами сумації (Ейлера-Маклорена, Лапласа, Гаусса, Lubbock-a, Woolhouse-a тощо) можна вказати на різні формули числового диференціювання. Поруч із різноманітними випадками „точкової" інтерполяції в звичайному або узагальненому розумінні цього слова, з яких використовуються лише значення даної функції (або її похідних) в окремих точках сегмента $[a, b]$ *), можна назвати той глибоко-оригінальний метод, який був указаний Чебишовим в його мемуарі „Об интерполировании в случае большого числа данных, доставленных наблюдениями" [1]). Наведена вище загальна схема обіймає також формули наближеного представлення функцій з допомогою відрізку розкладу по ортогональних поліномах певної системи і т. д. і т. п.

b) Деякі допоміжні твердження

Маючи на увазі на наступних сторінках докладніше дослідити інтегральні представлення остаткових членів для різних конкретних випадків і зокрема з'ясувати питання щодо можливого зведення цих остаткових членів до простого вигляду типу (171)—(46″) **), ми попереду зупинимось на деяких допоміжних твердженнях (леми I—III), щоб в дальшому не відвертати уваги від основних розглядів.

Лема I. Хай $\varkappa(x)$ означає будьяку дійсну й сумовану (в розумінні Лебега) функцію, означену на сегменті $[a, b]$, яка змінює знак на цьому сегменті, причому припускається, що кожна з двох точкових множин $E(\varkappa>0)$ та $E(\varkappa<0)$ ***) сегмента $[a, b]$ має додатну міру. Тоді існує неперервна на $[a, b]$ функція $f(x)$, яка не анулюється в жодній точці цього сегмента, і така, що

$$\int_a^b f(x)\cdot\varkappa(x)\,dx=0 \tag{193}$$

До того ж таку функцію $f(x)$ завжди можна знайти поміж цілими раціональними функціями

Доведення. Покладаючи

$$\int_a^b \varkappa(x)\,dx=g, \tag{194}$$

*) Слід лише застерегти, що тут виключається, наприклад, параболічна інтерполяція за принципом Чебишова (найменшого максимуму відхилу) при кількості даних ординат, більшій ніж $n+2$ (якщо n позначає степінь інтерполяційного полінома), або за принципом найменших r-х степенів (при $r\neq 2$), оскільки відповідні до цих принципів інтерполяційні задачі вже не мають лінійного характеру.

[1]) П. Л. Чебышев, Сочинения, т. I, сс. 387—469.

**) В тих випадках, коли інтегральний вираз остаткового члена належить до одного із типів (188), (189), (188′), (189′), множник c_μ чи то c в формулах, відповідних до (171), (46″), залежатиме, зрозуміла річ, від параметра t.

***) Тут, наприклад, $E(\varkappa>0)$ позначає множину точок сегмента $[a, b]$, в яких $\varkappa(x)>0$.

справедливість теореми безпосередньо очевидна, якщо $g=0$. Залишаючи цей тривіальний випадок осторонь, припустімо для конкретності $g>0$ та впровадьмо до розгляду дві функції:

$$\varphi_1(x)\equiv 1, \tag{195}$$

$$\varphi_2(x)=1+\frac{1-\widetilde{\operatorname{sg}}\,\varkappa(x)}{2}\cdot\frac{g+h}{\int\limits_a^b|\varkappa(x)|\cdot\frac{1-\widetilde{\operatorname{sg}}\,\varkappa(x)}{2}dx}, \tag{196}$$

де h позначає якунебудь додатну сталу і

$$\widetilde{\operatorname{sg}}\,z=\begin{cases}1 & \text{при } z\geqslant 0\\ -1 & \text{„}\ \ z<0\end{cases} \tag{197}$$

Обидві функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ є додатні й обмежені[1]), при чому, як легко бачити,

$$\int\limits_a^b \varphi_1(x)\cdot\varkappa(x)\,dx=g, \tag{194'}$$

$$\int\limits_a^b \varphi_2(x)\cdot\varkappa(x)\,dx=-h \tag{198}$$

Функція $\varphi_2(x)$ є розривна. Ми, замість неї, впровадимо нову функцію $f_2(x)$, яку побудуємо так. Позначмо через $F_{\mathrm{I}}\subset E_{\mathrm{I}}$ та $F_{\mathrm{II}}\subset E_{\mathrm{II}}$ якінебудь дві замкнені точкові множини, які за мірою відрізняються менше ніж на $\frac{\varepsilon}{2}$ від множин $E_{\mathrm{I}}=E(\varkappa\geqslant 0)$ та $E_{\mathrm{II}}=E(\varkappa<0)$ відповідно (в яких вони містяться), та через $K=F_{\mathrm{I}}+F_{\mathrm{II}}$ — суму цих двох точкових множин, при чому ми припустимо (це завжди припустиме), що K включає обидва кінці сегмента $[a, b]$. За функцію $f_2(x)$ ми візьмемо неперервну на сегменті $[a, b]$ функцію, яка дорівнює $\varphi_2(x)$ на точковій множині K і визначається лінійною інтерполяцією на суміжних інтервалах цієї замкненої точкової множини. Цілком зрозуміло, що різниця

$$\int\limits_a^b f_2(x)\,\varkappa(x)\,dx-\int\limits_a^b \varphi_2(x)\,\varkappa(x)\,dx=\eta \tag{199}$$

абсолютною величиною менша від h при достатній малості ε[2]). Покладаючи ще

$$f_1(x)\equiv\varphi_1(x)\equiv 1, \tag{200}$$

---

[1]) Функція $\varphi_2(x)$ набуває лише два значення: одно, рівне одиниці, на точковій множині $E(\varkappa\geqslant 0)$, друге стале значення — на точковій множині $E(\varkappa<0)$.

[2]) Сума мір згаданих суміжних інтервалів є, очевидно, менша від ε. Крім того, можна відмітити, що $f_2(x)$ міститься поміж тими самими межами, що й $\varphi_2(x)$ при $a\leqslant x\leqslant b$.

Можливість побудувати неперервну функцію $f_2(x)$ з такими властивостями a priori випливає, зрозуміла річ, із того, що вимірна функція $\varphi_2(x)$ посідає властивість „наближеної неперервності“ в розумінні Н. Н. Лузіна. Порів., наприкл., додаткову статтю акад. Лузіна „О строении измеримых функций“ в книзі А. Лебег, „Интегрирование и отыскание примитивных функций“.

маємо таким чином:

$$\int_a^b f_1(x)\varkappa(x)\,dx = g > 0 \tag{194''}$$

$$\int_a^b f_2(x)\varkappa(x)\,dx = -(h-\eta) < 0, \tag{201}$$

де уже обидві функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ не тільки додатні, але й неперервні на сегменті $[a, b]$. Тепер безпосередньо ясно, що неперервна функція

$$f(x) = (h-\eta)\,f_1(x) + g f_2(x) \tag{202}$$

задовольняє цілком вимоги теореми. Коли б ми хотіли нарешті одержати $f(x)$ у вигляді цілої раціональної функції, то, раніш ніж утворювати лінійну комбінацію, аналогічну до (202) (з іншим першим коефіцієнтом), ми б попереду замінили неперервну функцію $f_2(x)$ на таку цілу раціональну функцію, яка на всьому сегменті $[a, b]$ відхиляється від $f_2(x)$ менше, ніж на величину

$$\frac{h-\eta}{\int_a^b |\varkappa(x)|\,dx},$$

що завжди можливо на основі теореми Вейерштрасса.

Наслідок. Якщо $\varkappa(x)$ задовольняє умови доведеної леми, то рівність вигляду

$$\int_a^b f(x)\varkappa(x)\,dx = c\,f(\xi) \quad (c = \text{const.};\ \ \xi \subset [a, b]) \tag{203}$$

не може бути справедливою для всіх неперервних на $[a, b]$ функцій $f(x)$.

Справді, припускаючи спершу $c \neq 0$, бачимо, що рівність (203) не має місця для неперервної функції $f(x)$, побудованої при доведенні леми. Коли ж, навпаки, припустити, що $c = 0$, то вона не має місця, наприклад, для неперервної функції $f_2(x)$, побудованої при доведенні тієї самої леми.

На основі доведеної леми дуже легко одержати й більш сильний висновок: справедливість рівності (203) не буде збережена й тоді, коли ми звузимо структурний клас неперервних функцій $f(x)$, замінивши його, скажімо, на клас функцій r-кратно диференційованих або навіть на клас аналітичних регулярних на сегменті $[a, b]$ функцій $f(x)$. Справді, як видно з попереднього, рівність (203) порушується завжди навіть для деяких цілих раціональних $f(x)$.

Наступна лема II являє собою доповнення й узагальнення першої. Ми на ній зупинимось тут мимохідь, не маючи на оці застосовувати її в дальшому викладі даної статті.

Лема II. Якщо функція обмеженої варіації $\alpha(x)$, означена на сегменті $[a, b]$, не є монотонна, себто можна знайти на цьому сегменті три точки $x_1 < x_2 < x_3$ такі, що $\alpha(x_2) > \alpha(x_1), \alpha(x_3)$ або навпаки: $\alpha(x_2) < \alpha(x_1), \alpha(x_3)$, тоді існує неперервна на сегменті $[a, b]$ функція $f(x)$, не рівна нулю в жодній точці цього сегмента і така, що

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = 0 \tag{204}$$

І тут також функція $f(x)$ із згаданими властивостями може бути знайдена завжди поміж цілими раціональними функціями.

Наслідок. Якщо функція $\alpha(x)$ задовольняє умови леми II, то рівність вигляду

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = c\, f(\xi) \quad (c = \text{const}; \ \xi \subset [a, b]) \tag{205}$$

не може бути справедливою для всіх неперервних на сегменті $[a, b]$ функцій $f(x)$ або хоча б для всіх цілих раціональних $f(x)$.

Доведення леми II одержується з допомогою легкої модифікації міркування, вже застосованого при доведенні леми I, якщо скористатися з перетворення інтеграла Стилтьеса на звичайний інтеграл Лебега (A. Лебег, op., cit., c. 214).

Лема I і наслідок з неї мають очевидне значення при дослідженні остаткових членів, представлених виразами типів (41), (136) або (189), (189'). Щождо леми II і наслідку з неї, то аналогічне значення їх для представлень типів (14), (70) або (188), (188') істотне лише для випадку $\mu = m$, бо при $\mu > m$ застосовні інтегральні представлення попередніх типів [1]).

Лема III. Хай буде $f(x)$ будьяка сумована функція, що має лише скінченну кількість r істотних змін знаку на сегменті $u \leqslant x \leqslant v$ *), і хай буде $F(x)$ її неозначений інтеграл:

$$F(x) = F(u) + \int_u^x f(x)\, dx \tag{208}$$

---

[1]) Розглядувані леми можуть мати застосування також при дослідженні питань дещо іншого типу, де справа йде про двосторонню наближену оцінку лінійного функціонала $S[f(x)]$ з допомогою двох інших лінійних функціоналів $T_1[f(x)]$ та $T_2[f(x)]$, і де розглядаються умови, при яких мають місце нерівності:

$$T_1[f(x)] < S[f(x)] < T_2[f(x)] \tag{206}$$

або

$$T_1[f(x)] > S[f(x)] > T_2[f(x)] \tag{207}$$

*) Кажуть взагалі, що $f(x)$ має r змін знаку на сегменті $[u, v]$, якщо на цьому сегменті можна знайти систему $(r+1)$ послідовних точок $x_1 < x_2 < \cdots < x_{r+1}$, в яких функція $f(x)$ має альтернуючий знак, але не можна знайти аналогічної системи з більшої кількості точок. Проте, з приводу цього означення можна тут зауважити, що величина неозначеного інтеграла (208) не змінюється при заміні функції $f(x)$ на будьяку еквівалентну з нею функцію, себто таку, що відрізняється від неї щонайбільше на точковій множині міри нуль. Говорячи про „кількість істотних змін знаку", ми уже припускаємо, що із множини $\{ f(x) \}$ функцій, еквівалентних до даної $f(x)$, добрано таку, для якої згадане число r є мінімальне.

Тоді: 1) при $F(u)=0, F(v)=0$ функція $F(x)$ має на тому самому сегменті $[u, v]$ щонайбільше $(r-1)$ змін знаку; 2) при $F(u)\neq 0$, $F(v)\neq 0$ — щонайбільше $(r+1)$ змін знаку; 3) нарешті при $F(u)=0$, $F(v)\neq 0$ або $F(u)\neq 0$, $F(v)=0$ — щонайбільше r змін знаку[1]).

Доведення. Припустімо спершу, що сегмент $[u, v]$ можливо розбити на $s+1$ послідовних підсегментів

$$[a_0, a_1], \quad [a_1, a_2], \ldots, [a_s, a_{s+1}] \tag{209}$$

$$(u=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_s<a_{s+1}=v)$$

таких, що на кожному з них функція $F(x)$ зберігає сталий знак, і при переході від будьякого підсегмента до наступного знак $f(x)$ міняється на протилежний. Кажучи, що на сегменті $[a_i, a_{i+1}]$ функція $F(x)$ зберігає, наприклад, додатний знак, ми тут, власне, розуміємо лише те, що вона невід'ємна на цьому сегменті і принаймні в деяких точках цього сегмента більша від нуля.

Хай маємо, для конкретності, випадок $F(u)<0$, $F(v)=0$. Тоді при певному доборі точок x_i на сегментах $[a_i, a_{i+1}]$ $(i=1, 2, \ldots, s)$ матимемо, очевидно:

$$F(a_0)=F(u)<0, \quad F(a_1)=0, \quad F(x_1)>0, \quad F(a_2)=0, \quad F(x_2)<0,$$

$$F(a_3)=0, \quad F(x_3)>0, \ldots, F(a_s)=0, \quad (-1)^{s-1}F(x_s)>0,$$

$$F(a_{s+1})=F(v)=0$$

Із того, що $\int\limits_{a_0}^{x_1} f(x)\,dx=F(x_1)-F(a_0)>0$, видно, що на інтервалі (a_0, x_1) є точкова множина додатної міри, на якій $f(x)>0$. Із того, що $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=F(x_2)-F(x_1)<0$, виходить таксамо, що на інтервалі (x_1, x_2) є точкова множина додатної міри, на якій $f(x)<0$ і т. д. Таким чином, функція $f(x)$ має принаймні s істотних змін знаку, які виявляються при послідовному переході від (a_0, x_1) до (x_1, x_2), від (x_1, x_2) до (x_2, x_3) і т. д., нарешті від (x_{s-1}, x_s) до (x_s, a_{s+1}). Значить, $s\leqslant r$, що цілком відповідає твердженню теореми. Цілком аналогічно трактуються й інші три випадки.

Ми тут зробили припущення, що сегмент $[u, v]$ можна розбити на скінченну кількість $(s+1)$ підсегментів (209) таких, що $F(x)$ змінює знак лише при переході від будьякого з цих підсегментів до наступного. Але це в дійсності завжди має місце. Справді, легко бачити, що в противному разі для скільки завгодного великого s можна було б знайти на сегменті $[u, v]$ $\overline{s+2}$ послідовні точки, в яких функція $F(x)$ мала б альтернуючий знак, і із цього випливала б знову нерівність $s\leqslant r$, яка явно неможлива при скільки завгодно великому s і фіксованому r.

---

[1]) Легко бачити, що зустрінуті нами в розділі I даної роботи співвідношення поміж кількістю змін знаку функції $\alpha_\mu(x)$ та функції $\alpha_{\mu+1}(x)$ на сегменті $[a, b]$ містяться, як окремий випадок, в формулюванні цієї леми.

c) Exempla non minus docent...

1. Розділені різниці й скінченні різниці. Ми почнемо з простого ілюстративного прикладу. Розділена різниця порядку $n+1$:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_{n+1})} =$$

$$= A[f(x)] \qquad (210)$$

може розглядатися як лінійний функціонал в просторі C неперервних функцій $f(x)$. Як добре відомо, він анулюється для всіх поліномів n-го степеня. Тут, при прийнятих нами позначеннях, $m=0$, $[a, b] = [x_0, x_{n+1}]$, якщо припустити $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ фіксованими та занумерованими за ростучою величиною. При $\mu = 1$ матимемо на основі формули (23), виконуючи граничний перехід ($\nu \to \infty$) під знаком операції A *) абож безпосередньо за формулами (100)—(101) при $H_\mu(x, \xi) = H_1(x, \xi) \equiv 1$ (порівн. (63)):

$$\varkappa_1(\xi) = -\alpha_0(\xi + 0) = A[-\lambda_\xi(x)], \qquad (211)$$

де, згідно із (18),

$$-\lambda_\xi(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } x \leqslant \xi \\ \;\;0 \quad „ \quad x > \xi \end{cases}$$

Тепер видно безпосередньо, що функція $\varkappa_1(\xi)$ залишається сталою на кожному з інтервалів (півсегментів) $[x_0, x_1)$, $[x_1, x_2), \dots, [x_n, x_{n+1})$. Таким чином, вона має на інтервалі $(a, b) \equiv (x_0, x_{n+1})$ не більше як n змін знаку. На підставі загальних фактів, відмічених в рубриці 9° розділу I, маємо звідси висновок, що функція $\varkappa_{n+1}(\xi) = -\alpha_n(\xi)$ зберігає сталий знак на всьому сегменті $[a, b]$. Значить, на основі (46), (46″), (47) має місце оцінка

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) = c \cdot f^{(n+1)}(\xi), \qquad (212)$$

де коефіцієнт c, рівний $A\left[\frac{x^{n+1}}{\overline{n+1}!}\right]$, може бути визначений майже без викладок на підставі згаданого уже основного факту, в силу якого $\overline{n+2}$-га розділена різниця функції $\frac{x^{n+1}}{\overline{n+1}!}$ являє собою тотожний нуль, звідки легко одержується висновок, що $\overline{n+1}$-ша розділена різниця цієї функції, при заданому n, являє собою абсолютну сталу, себто зовсім не залежить від добору абсцис $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$. Оцінити цю сталу найлегше, якщо вважаючи $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ фіксованими, примусити $|x_0|$ прямувати до ∞ в (210) при

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{\overline{n+1}!}$$

*) Порівн. зноску до формули (22). Застосовуючи (211), слід мати на увазі, що продовження лінійного функціонала (210), попереду означеного формулою (210) для простору C неперервних функцій $f(x)$, на ширше поле (обмежених та вимірних-B) функцій, що включає зокрема обмежені функції, одержувані граничним переходом від монотонної послідовності неперервних функцій (або загальніше — від будької обмежено-збіжної послідовності неперервних функцій), із додержанням звичайних умов (Лебег, op. cit., с. 219), неодмінно приводить до того самого аналітичного виразу (210).

Таким чином одержуємо безпосередньо

$$c = \frac{1}{\overline{n+1}!}$$

Остаточно приходимо до відомої оцінки:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\overline{n+1}!} \tag{213}$$

$$(\inf \{x_i\} < \xi < \sup \{x_i\})$$

Для скінченної різниці порядку $n+1$

$$\Delta^{n+1} f(a) = f(a + \overline{n+1}\, h - \binom{n+1}{1} f(a+nh) +$$

$$+ \binom{n+1}{2} f(a + \overline{n-1}\, h) - \ldots + (-1)^{n+1} f(a) \tag{214}$$

маємо добре відоме співвідношення:

$$\Delta^{n+1} f_0(a) = \overline{n+1}!\, h^{n+1} f(a, a+h, a+2h, \ldots, a + \overline{n+1}\, h), \tag{215}$$

яке дозволяє безпосередньо поширити на випадок скінченної різниці $\overline{n+1}$-го порядку усі попередні висновки.

Зауважмо, що $\Delta^{n+1} f(a)$ може розглядатися як остача наближеної формули:

$$\Delta^n f(a+h) \simeq \Delta^n f(a) \tag{216}$$

і що величина $(x_{n+1} - x_n) f(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$ допускає аналогічне тлумачення.

Додамо ще таке зауваження загального характеру. В розглядах цього розділу, досліджуючи інтегральні представлення остаткових членів ми приділяємо особливу увагу питанню про можливість перетворення досліджуваних остаткових членів до форми (171) — (46″). Ця форма представлення є дуже визначна своєю простотою і досить зручна для деяких застосувань. Проте, очевидно майже a priori, що важливість знання оцінок типу (171) — (46″) не виключає переваг повертання в певних випадках до вихідних інтегральних представлень. Пояснимо це на простому прикладі. Хай буде

$$f(x) = \begin{cases} -(x-\tau)^{n+2} & \text{при } x \leqslant \tau \\ 0 & \text{„ } x > \tau \end{cases} \qquad (x_0 < \tau < x_{n+1}) \tag{217}$$

Тоді представлення (213) дозволяє лише твердити, що

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) \geqslant 0, \tag{218}$$

тим часом як інтегральне представлення типу (41), з якого (213) виводиться, дозволяє зробити точніший висновок, а саме, що

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) > 0, \tag{219}$$

беручи до уваги, що функція $\varkappa_{n+1}(\xi) = -\alpha_n(\xi + 0)$, невід'ємна на всьому сегменті $[x_0, x_{n+1}]$, як легко бачити, напевне відмінна від нуля на інтервалі (x_0, x_1).

Взагалі застосування представлень остаткових членів у формі (46″) — (171) стає менш вигідним, коли величина $\log|f^{(n+1)}(\xi)|$ чи то $\log|L_\mu(f|\xi)|$ коливається в широких межах при $a < \xi < b$.

2. *Інтерполяція.* Хай буде

$$u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x) \tag{220}$$

система лінійно-незалежних на сегменті $[a, b]$ функцій (з неперервними похідними до порядку $n+1$ включно) така, що $(n+1)$ вронскіанів послідовних порядків

$$W(u_0, u_1, \ldots, u_{\mu-1}) \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{221}$$

відмінні від нуля на всьому сегменті $[a, b]$. Для кожного з цих $n+1$ значень μ відповідне лінійне диференціальне рівняння (59) $L_\mu(y) = 0$ має усі коефіцієнти неперервні на сегменті $[a, b]$. Останнє з цих диференціальних рівнянь є

$$L_{n+1}(y) = \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} + X_{1,n+1}(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + X_{n+1,n+1}(x) \cdot y = 0 \tag{222}$$

Його розв'язками є узагальнені поліноми n-го рангу:

$$P_n^*(x) = C_0 u_0(x) + C_1 u_1(x) + \ldots + C_n u_n(x) \tag{57}$$

системи функцій (220). Згідно з теоремою, що належить G. Pólya [1]), система $(n+1)$ лінійних алгебричних рівнянь щодо $C_0, C_1, \ldots, C_n$

$$P_n^*(x_i) = y_i \; (i = 1, 2, 3, \ldots, n+1), \tag{223}$$

де $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ є будькі дійсні числа і $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leqslant b$, допускає завжди однозначний розв'язок. Звідси безпосередньо випливає пряме узагальнення лагранжової параболічної інтерполяції на випадок інтерполяції з допомогою узагальнених поліномів $P_n^*(x)$ — розв'язків диференціального рівняння (222). Вираз $P_n^*(x)$, що задовольняє умови (223), матиме, очевидно, вигляд

$$P_n^*(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \cdot Q_i(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \cdot Q_i(x; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}), \tag{224}$$

де $Q_i(x)$ є той розв'язок диференціального рівняння (222), який анулюється при

$$x = x_1, x_2, \ldots, , x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}$$

і дорівнює одиниці при $x = x_i$. Якщо у формулі (224) покласти

$$y_i = f(x_i) \; (i = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{225}$$

де $f(x)$ позначає функцію із неперевними похідними до порядку $n+1$ включно на сегменті $[a, b]$, то приходимо до інтерполяційної формули, що її остача

$$f(x) - \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) Q_i(x) \; (a \leqslant x \leqslant b, x \neq x_i) \tag{226}$$

---

[1]) G. Pólya, On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation (Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 24, 1924).

може бути записана також в більш симетричному вигляді:

$$\sum_{i=0}^{n+1} f(z_i)\cdot R_i(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) = A[f(x)], \tag{226'}$$

розуміючи під $z_0, z_1, \ldots, z_{n+1}$ числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x$, розміщені за ростучою величиною, і покладаючи $R_i \equiv -Q_j$ при $z_i = x_j (j = 1, 2, \ldots, n+1)$, $R_i \equiv 1$ при $z_i = x$. Припускаючи зафіксованими не тільки „вузли“ інтерполяції $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, але й число $x \subset [a, b]$, ми можемо розглядати оператор $A[f(x)]$, що означається формулою (226′) як лінійний функціонал в просторі C неперервних на сегменті $[a, b]$ функцій $f(x)$, який анулюється для всіх узагальнених поліномів n-го рангу $P_n^*(x)$ системи функцій (220). Ми можемо, крім того, очевидно, припустити:

$$a = z_0,\ b = z_{n+1}, \tag{227}$$

звужуючи відповідно в разі потреби сегмент $[a, b]$. Таким чином, тут маємо $m = 0$; число μ розділу II може набирати усіх значень в межах

$$0 \leqslant \mu \leqslant n+1$$

При $\mu = 1, 2, \ldots, n+1$ визначальна функція $\alpha_\mu(\xi)$ інтегрального представлення (70) матиме принаймні праворучну похідну обмеженої варіації $\varkappa_\mu(\xi)$, яка визначається тут формулами

$$\varkappa_\mu(\xi) = A[\omega_{\xi,\mu}(x)], \tag{100'}$$

де

$$\omega_{\xi,\mu}(x) = \begin{cases} -H_\mu(x, \xi) & \text{при } x \leqslant \xi \\ 0 & \text{„}\ x > \xi \end{cases} \tag{101'}$$

і має місце також відповідне інтегральне представлення (136). Можна показати, що функція $\varkappa_{n+1}(\xi)$ зберігає сталий знак на сегменті $[a, b]$. Для цього зауважмо спершу, що при $\mu = 1$ формули (100′)—(101′) зводяться до

$$\varkappa_1(\xi) = A[\omega_{\xi,1}(x)], \tag{100''}$$

$$\omega_{\xi,1}(x) = \begin{cases} -\dfrac{u_0(x)}{u_0(\xi)} & \text{при } x \leqslant \xi \\ 0 & \text{„}\ x > \xi \end{cases} \tag{101''}$$

Таким чином, зважаючи на (226′),

$$\varkappa_1(\xi) = -\frac{1}{u_0(\xi)} \sum_{(z_i \leqslant \xi)} u_0(z_i)\, R_i(z_0, z_1, \ldots, z_{n+1}) \tag{228}$$

Другий множник (що виражається сумою) залишається сталим на кожному з інтервалів $z_{j-1} \leqslant \xi < z_j (j = 1, 2, \ldots, n+1)$; щождо першого множника $-\dfrac{1}{u_0(\xi)}$, то він, згідно з попередніми умовами [умова щодо 1-го з вронскіанів

(221)], являє собою неперервну функцію, відмінну від нуля (отже, сталого знаку) на всьому сегменті $[a, b]$. Таким чином, $\varkappa_1(\xi)$ має на інтервалі (a, b) не більше як n змін знаку. Щоб далі мати судження про кількість змін знаку функцій $\varkappa_2(\xi)$, $\varkappa_3(\xi)$ і т. д., зауважмо насамперед, що співвідношення (159) розділу II в застосуванні до випадку

$$\mu_1 = \mu \geqslant 2,\ \mu_2 = \mu_1 + 1 = \mu + 1$$

набуває тут вигляду

$$-\frac{d}{d\xi}\varkappa_{\mu+1}(\xi) + s_\mu(\xi)\,\varkappa_{\mu+1}(\xi) = \varkappa_\mu(\xi), \tag{229}$$

де, як легко бачити [1]),

$$s_\mu(\xi) = X_{1,\mu+1}(\xi) - X_{1,\mu}(\xi) \tag{230}$$

при позначеннях (59). Інакше кажучи,

$$\frac{d}{d\xi}\left(\varkappa_{\mu+1}\cdot e^{-\int s_\mu d\xi}\right) = -\,\varkappa_\mu \cdot e^{-\int s_\mu d\xi} \tag{231}$$

При $\mu = 1$ матиме місце аналогічне співвідношення із заміною лише похідної $\frac{d}{d\xi}$ на праворучну похідну. Звідси випливає при $\mu = 1, 2, \ldots, n$, ураховуючи (134′):

$$\varkappa_{\mu+1}(\xi)\cdot e^{-\int s_\mu(\xi)d\xi} = -\int_a^\xi \varkappa_\mu(\xi)\cdot e^{-\int s_\mu(\xi)d\xi} \tag{232}$$

Беручи на увагу додатність експоненціального множника та ураховуючи ще (135), ми бачимо тепер безпосередньо, застосовуючи лему III послідовно n разів, що $\varkappa_2(\xi)$, — має не більше [1]) як $(n-1)$ змін знаку на $[a,b]$, $\varkappa_3(\xi)$ — не більше [1]) як $(n-2)$ зміни знаку, ..., $\varkappa_n(\xi)$ — не більше [2]) як одну зміну знаку, нарешті $\varkappa_{n+1}(\xi)$ зберігає сталий знак на сегменті $[a, b]$.

Таким чином, має місце представлення типу (171):

$$f(x) - \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\cdot Q_i(x) = A\,[f(x)] = c_{n+1}\,L_{n+1}(f\,|\,\xi), \tag{233}$$

при чому

$$c_{n+1} = c_{n+1}(x;\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = A\,[S_{n+1}(x)], \tag{234}$$

де

$$S_{n+1}(x) = \int_b^x H_{n+1}(x,z)\,dz + \sum_{i=0}^{n} c_i\,u_i(x) \tag{235}$$

позначає будьякий розв'язок диференціального рівняння

$$L_{n+1}(y) = 1 \tag{173′}$$

---

[1]) Досить перевести фактичне обчислення частки символічного ділення диференціальних операторів $L_{\mu+1}$, та L_μ.

[2]) Також і не менше, як легко бачити, переходячи зворотно від $\varkappa_{n+1}(\xi)$ послідовно до $\varkappa_n(\xi)$, $\varkappa_{n-1}(\xi)$, ..., $\varkappa_1(\xi)$.

Взявши зокрема за $S_{n+1}(x)$ той розв'язок рівняння (173'), який анулюється при

$$x = x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\text{ *)}$$

та позначивши його через $S_{n+1}(x; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, матимемо:

$$A[S_{n+1}(x)] = S_{n+1}(x),$$

отже остаточно одержуємо формулу інтерполяції із остатковим членом у вигляді:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \cdot Q_i(x; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) + L_{n+1}(f|\xi) \cdot S_{n+1}(x; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \quad (236)$$

Таке представлення остаткового члена було уперше знайдене іншим шляхом в уже цитованій роботі G. Pólya.

Увага. Спираючись на результати Pólya, легко довести застосовність представлення остаткового члена у формі (171) також в найважливішому (поруч із випадком параболічної інтерполяції, для якого відповідний факт добре відомий з часів Коші) випадку тригонометричної інтерполяції — факт, на якому, вважаємо, варто окремо зупинитися тут, оскільки в самому мемуарі Pólya він не відмічається. А саме, тут має місце наступна формула, що відповідає (236) при $n = 2k$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2k+1} f(x_i) \cdot \frac{\sin\frac{x-x_1}{2} \cdots \sin\frac{x-x_{i-1}}{2} \sin\frac{x-x_{i+1}}{2} \cdots \sin\frac{x-x_{2k+1}}{2}}{\sin\frac{x_i-x_1}{2} \cdots \sin\frac{x_i-x_{i-1}}{2} \sin\frac{x_i-x_{i+1}}{2} \cdots \sin\frac{x_i-x_{2k+1}}{2}} +$$

$$+ L_{2k+1}(f|\xi) \cdot S_{2k+1}(x; x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}) \quad (236')$$

$$(0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, x < 2\pi;$$

$$\inf\{x_1, \ldots, x_{2k+1}, x\} < \xi < \sup\{x_1, \ldots, x_{2k+1}, x\}),$$

де

$$L_{2k+1}(f|\xi) = D(D^2+1)(D^2+4)\ldots(D^2+k^2) f(\xi) \quad (237)$$

(позначаючи символом D диференціювання по ξ) і

$$S_{2k+1}(x; x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}) =$$

$$= \frac{x}{(k!)^2} - \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{x_i}{(k!)^2} \frac{\sin\frac{x-x_1}{2} \cdots \sin\frac{x-x_{i-1}}{2} \sin\frac{x-x_{i+1}}{2} \cdots \sin\frac{x-x_{2k+1}}{2}}{\sin\frac{x_i-x_1}{2} \cdots \sin\frac{x_i-x_{i-1}}{2} \sin\frac{x_i-x_{i+1}}{2} \cdots \sin\frac{x_i-x_{2k+1}}{2}} \quad (238)$$

---

*) Існування й единість такого розв'язку випливає безпосередньо із того, що ми знаємо про існування й единість розв'язання алгебричної системи лінійних рівнянь (223) (згадана теорема Pólya).

Справді, хоч в розглядуваному випадку, де роль функцій (220) відіграють 1, $\cos x$, $\sin x$, $\ldots$, $\cos kx$, $\sin kx$, зазначені на початку цього параграфа властивості вронскіанів (221) (при $n+1=2k+1$) не мають місця для всіх цих вронскіанів на цілому періоді $(0, 2\pi)$ *), але вони напевне мають місце, при заміні згаданих $(2k+1)$ функцій на деякі їх лінійні комбінації, всередині всякого інтервалу довжини 2π (отже й на кожному сегменті $[a, b]$, що його довжина менша 2π), зважаючи [1]) на відомі інтерполяційні властивості скінченних тригонометричних сум порядку k, що споріднюють їх із алгебричними поліномами (існування й единість інтерполяційного виразу, який набирає таких самих значень, як і $f(x)$, в $(2k+1)$ точках інтервалу $(0, 2\pi)$, не обов'язково різних між собою). Із останнього факту і випливає справедливість твердження, оскільки при тригонометричній інтерполяції (маємо на увазі випадок періодичних $f(x)$ періоду 2π) точки $x_1, \ldots, x_{2k+1}, x$ можна завжди припустити розміщеними на відрізку, що його довжина менша 2π.

3. Формули квадратур. Хай буде $q(x)$ якась функція обмеженої варіації на сегменті $[a, b]$. Якщо формула квадратур

$$\int_a^b f(x)\,dq(x) \approx \sum_{i=1}^{r} k_i f(x_i) \quad (a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_r \leqslant b), \tag{239}$$

де абсциси x_i та коефіцієнти k_i є фіксовані числа, незалежні від $f(x)$, задовольняється точно для всіх цілих раціональних $f(x)$ степеня n**), то остача

$$A[f(x)] = \int_a^b f(x)\,dq(x) - \sum_{i=1}^{r} k_i f(x_i) \tag{240}$$

являє собою лінійний функціонал в просторі C неперервних на $[a, b]$ функцій $f(x)$, який анулюється для всіх поліномів n-го степеня. Тут, при попередніх позначеннях, $m=0$. При $\mu=1, 2, \ldots, n+1$ одержуємо на основі (20), (21), (23):

$$\varkappa_\mu(\xi) = -\alpha_{\mu-1}(\xi+0) = -\int_a^{\xi+0} \frac{(x-\xi)^{\mu-1}}{\overline{\mu-1}\,!}\,dq(x) + \sum_{(x_i \leqslant \xi)} k_i \frac{(x_i-\xi)^{\mu-1}}{\overline{\mu-1}\,!}, \tag{241}$$

де $\int_a^{\xi+0}$ є скорочене позначення для $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int_a^{\xi+\varepsilon}$ і при $\mu > 1$ воно завжди рівнозначне до $\int_a^{\xi}$. Зокрема при $q(x) \equiv x$ матимемо:

$$\varkappa_\mu(\xi) = \frac{(a-\xi)^\mu}{\mu!} + \sum_{(x_i \leqslant \xi)} k_i \frac{(x_i-\xi)^{\mu-1}}{\overline{\mu-1}\,!} \quad (\mu = 1, 2 \ldots, n+1) \tag{241'}$$

---

*) Порів. зноску на початку розділу II попереднього повідомлення.

[1]) Порівн. обернену теорему Pólya (op. cit. Theorem IV).

**) Нижче розглядається також приклад формули квадратур дещо іншого роду, яка точно задовольняється для скінченних тригонометричних виразів певного порядку.

Зупинімося на декількох окремих прикладах.

У випадку формул квадратур типа Гаусса маємо $n = 2r - 1$, при чому функцію $q(x)$ припускаємо неубуваючою, коефіціенти k_i усі додатні, а абсциси x_i містяться всі всередині (a, b) *). На основі співвідношень рубрики 9° розділу I, функція $\varkappa_1(\xi)$ має тут щонайменше $(2r-1)$ змін знаку на інтервалі (a, b). З другого ж боку, формула (241) при $\mu = 1$ дозволяє безпосередньо зробити висновок, що кількість змін знаку $\varkappa_1(\xi)$ на інтервалі (a, b) не може й перевищувати цього мінімального числа $2r - 1$, отже (розділ I, рубрика 9°) функція $\varkappa_{2r}(\xi)$ зберігає сталий знак на всьому сегменті $[a, b]$ **).

Хай ще $q(x)$ позначає якунебудь неубуваючу обмежену на сегменті $[a, b]$ функцію, $q(a) = 0$, $q(b) = 1$, і розгляньмо формули квадратур вигляду

$$\int_a^b f(x)\,dq(x) \approx \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i f(x_i) \quad (a < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k} < b) \quad (242)$$

С. Н. Бернштейн з допомогою досить дотепного аналізу довів [1]) існування, для всякого цілого додатного k, такої системи абсцис x_i, при якій формула (242) справедлива точно для всіх поліномів степеня $2k+1$. Для таких формул міркування, цілком подібне до застосованого в попередньому прикладі, показує, що $\varkappa_1(\xi)$ має $(2k+1)$ змін знаку на інтервалі (a, b), а функція $\varkappa_{2k+2}(\xi)$ зберігає сталий знак на $[a, b]$.

Для обох розглянутих типів формул квадратур таким чином остатковий член може бути представлений у формі (46″) при $n = 2r - 1$ та $n = 2k + 1$ відповідно [2]). В інших випадках розгляд інтегральної форми остаткового члена дозволяє, навпаки, встановити неможливість представлення у вигляді (46″). Візьмімо для прикладу формулу Hardy:

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx \approx 0{,}28\,[f(-3) + f(3)] + 1{,}62\,[f(-2) + f(2)] + 2,2 f(0) \quad (243)$$

Стеффенсен в своїй відомій монографії з інтерполяції [3]), зазначивши, що остатковий член цієї формули може бути поданий у вигляді:

$$R = \frac{9}{700}\left[f^{(6)}(\eta_1) - \frac{1}{2} f^{(8)}(\eta_2)\right] \quad (-3 < \eta_1, \eta_2 < 3), \quad (244)$$

---

*) Див., напр., В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, ОНТИ, 1934.

**) Порів. R. Mises, op. cit, § 2, c (Journal f. d. reine und angew. Mathem., Bd. 174, 1935) в більш окремому випадку $q(x) \equiv x$.

[1]) Акад. С. Н. Бернштейн. Деякі застосування параметричного методу до вивчення квадратурних формул (Записки Харківського матем. товариства, серія 4, том XV, 1938, сс. 3—16, зокрема сс. 5—7.

[2]) Для формул типу Гаусса останній факт добре відомий з дослідів А. Маркова та інших, що базувалися на остатковому члені відповідної формули (Ермітової) інтерполяції. Можна також зауважити, що при іншому доборі інтерполяційного полінома за прикладом В. Стеклова (Изв. Росс. Акад. Наук, 1918, № 7) можна було б застосувати аналогічний шлях і для дослідження остаткового члена згаданих формул квадратур типу Бернштейна і таким чином одержати інше доведення відміченого в тексті факту.

[3]) J. F. Steffensen, Interpolation, Baltimore 1927.

додає [1]):

„It is natural to ask whether the remainder-term may not be simplified by putting

$$f^{(6)}(\eta_1) - \frac{1}{2} f^{(8)}(\eta_2) = f^{(6)}(\zeta).$$

This is, however, not possible. It is, in fact, easy to construct a function $f(x)$ of such a nature that $f^{(8)}(x)$, while continuous in the closed interval ± 3, assumes very large values therein, while $f^{(6)}(x)$ only assumes moderate values".

Легко бачити, що наведене міркування не є переконливе. Справді, позначаючи $f^{(6)}(x) = F(x)$, отже $f^{(8)}(x) = F''(x)$, припустімо

$$\min_{-3 \leqslant x \leqslant 3} |F''(x)| = k > 0$$

Тоді графіком функції $y = F(x) \, (-3 \leqslant x \leqslant 3)$ буде опукла дуга, що її вертикальна віддаль від хорди, рівна

$$\frac{(x+3)(x-3)}{2} f''(x_1),$$

має максимум абсолютного значення, не менший $\frac{9}{2} k$. В такому разі максимум вертикальної віддалі тієї самої (опуклої) дуги від першої-ліпшої прямої не може бути менший $\frac{9}{4} k$ за абсолютним значенням [2]); зокрема ж беручи пряму $y = 0$, маємо

$$\max_{-3 \leqslant x \leqslant 3} |F(x)| \geqslant \frac{9}{4} k,$$

і, оскільки ця величина перевищує $\frac{1}{4} \min |F''(x)| = \frac{1}{4} k$, бачимо, що міркування Стеффенсена, справді, не має переконливої сили.

Проте, саме твердження цілком справедливе. Щоб в цьому пересвідчитись, досить скористатися з інтегрального представлення остаткового члена. Функція $\varkappa_6(\xi)$, обчислена за загальною формулою (241′) для випадку (243), як легко бачити, від'ємна при $\xi = -3 + \varepsilon$ при досить малих значеннях $\varepsilon > 0$. З другого ж боку, безпосереднє обчислення показує, що

$$\varkappa_6(0) = \frac{3^6}{6!} - 0{,}28 \, . \, \frac{3^5}{5!} - 1{,}62 \, . \, \frac{2^5}{5!} = \frac{27}{2000} > 0 \qquad (245)$$

Отже, функція $\varkappa_6(\xi)$ не зберігає сталого знаку на сегменті [—3, 3] і, отже, на основі наслідку леми I, представлення остаткового члена

[1]) Op. cit., p. 168.

[2]) Порівн. напр., Є. Ремез, Про методи найкращого, в розумінні Чебишова, наближеного представлення функцій. Вид. Укр. Акад. Наук, Київ 1935, § 2.

формули Hardy у вигляді (46″) (при $n+1=6$) неможливе[1]. Таким чином, розглядуване твердження доведене цілком строго[2].

Як дальший приклад, візмімо нарешті формули „вхідних та вихідних прямокутників“:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{k}\cdot\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i) - \text{формула вхідних прямокутників} \\[2ex] \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k} f(x_i) - \quad \text{„} \quad \text{вихідних} \quad \text{„} \\[2ex] \qquad\qquad\qquad \text{при } x_i = a + i\,\dfrac{b-a}{k} \end{array}\right\} \quad (246)$$

Ці формули квадратур насамперед задовольняються точно для випадку $f(x) = \text{const}$, і цьому фактові відповідають давно дуже добре відомі оцінки остаткових членів:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ост. чл. форм. вх. прям.} = \dfrac{(b-a)^2}{2k}\cdot f'(\xi) \\[2ex] \quad\text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{вих.} \quad \text{„} \quad = -\dfrac{(b-a)^2}{2k}\cdot f'(\eta) \end{array}\right\} (a < \xi, \eta < b) \quad (247)$$

Але, крім того, розглядувані формули квадратур (246) задовольняються точно для ширшої досить важливої категорії функцій, а саме — для скінченних тригонометричних сум порядку $\leqslant k-1$ *), що їх перша гармоніка має період $b-a$:

$$\left.\begin{array}{c} T_\nu = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{r=1}^{\nu} (a_r \cos r\omega x + b_r \sin r\omega x) \\[2ex] \left(\omega = \dfrac{2\pi}{b-a};\ \nu = 0, 1, 2, \ldots, k-1;\ T_0 = \dfrac{a_0}{2} = \text{const}\right) \end{array}\right\}, \quad (248)$$

і саме з цього погляду ми тут хочемо зупинитись на оцінці їх остаткових членів. Розглядаючи, наприклад, випадок формули вхідних прямокутників, остача

$$A[f(x)] = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{k}\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i) \quad (249)$$

$$\left(x_i = a + i\,\frac{b-a}{k}\right)$$

---

[1]) Із (244) легко бачити, що для формули Hardy порядок точності (рубрика (a)) точно дорівнює 5, себто $n=5$, $n+1=6$; ясно, що представлення типу (46″), яке містило б замість $f^{(6)}(\xi)$, похідну більш високого порядку (або більш низького) напевне неможливе.

[2]) Зауважмо мимохідь, що таке саме твердження щодо формули Weddl-я (J. F. Steffensen, ibidem) може бути встановлене цілком аналогічно.

*) Можна додати, що формули (246) задовольняються точно і для вищих гармонік, порядок яких $r > k$ не ділиться націло на k.

являє собою лінійний функціонал в просторі C неперервних на сегменті $[a, b]$ функцій $f(x)$, який анулюється для всіх узагальнених поліномів рангу $2k-2$ системи лінійно-незалежних функцій

$$1, \sin\omega x, \cos\omega x, \sin 2\omega x, \cos 2\omega x, \ldots \tag{250}$$

При попередніх позначеннях маємо тут $m=0$, $n=2k-2$. Ми будемо виходити із інтегральних представлень остачі (249) у формі (136). Умова (58) тут задовольняється для значень

$$\mu = 2\nu + 1 = 1, 3, 5, \ldots, 2k-1 \text{*)} \tag{251}$$

Відповідне лінійне диференціальне рівняння є

$$L_\mu(y) = L_{2\nu+1}(y) = D(D^2+\omega^2)(D^2+4\omega^2)\ldots(D^2+\nu^2\omega^2)\,y = 0, \tag{252}$$

де D є символ диференціювання по x. Функція Коші $H_\mu(x, z)$ є розв'язок цього диференціального рівняння, підпорядкований початковим умовам

$$\left[\frac{\partial^i}{\partial x_i} H_\mu(x, z)\right]_{x=z} = \begin{cases} 0 \text{ при } i = 0, 1, 2, \ldots, \mu-2 \\ 1 \quad „ \quad i = \mu - 1 \end{cases} \tag{93}$$

Безпосередньо видно, що ці умови задовольняє

$$H_\mu(x, z) = H_{2\nu+1}(x, z) = \frac{2^{2\nu}}{\overline{2\nu}!\,\omega^{2\nu}} \sin^{2\nu}\frac{\omega(x-z)}{2} \tag{253}$$

Розглядаючи функції [порівн. (100), (177), (176)]

$$D_d\,\alpha_\mu(\xi) = \varkappa_\mu(\xi), \quad D_g\,\alpha_\mu(\xi) = \rho_\mu(\xi),$$

ми при $a \leqslant \xi \leqslant \frac{a+b}{2}$ скористаємось безпосередньо формулами (100)—(101):

$$\varkappa_\mu(\xi) = A[\omega_{\xi,\mu}(x)],$$

де

$$\omega_{\xi,\mu}(x) = \begin{cases} -\dfrac{2^{2\nu}}{\overline{2\nu}!\,\omega^{2\nu}} \sin^{2\nu}\dfrac{\omega(x-\xi)}{2} \text{ при } x \leqslant \xi \\ 0 \qquad\qquad\qquad „ \quad x > \xi \end{cases} \tag{254}$$

Оскільки тут $\omega_{\xi,\mu}(x)$ є неубуваюча функція від x при $a \leqslant x \leqslant b$, то, очевидно, $\varkappa_\mu(\xi) \geqslant 0$. З другого боку, при $\frac{a+b}{2} < \xi \leqslant b$, ми, виходячи із формул (178)—(179), матимемо:

$$\rho_\mu(\xi) = A[\chi_{\xi,\mu}(x)], \text{ де } \chi_{\xi,\mu}(x) = \begin{cases} 0 \qquad\qquad\qquad \text{при } x < \xi \\ \dfrac{2^{2\nu}}{\overline{2\nu}!\,\omega^{2\nu}} \sin^{2\nu}\dfrac{\omega(x-\xi)}{2} \quad „ \quad x \geqslant \xi \end{cases} \tag{255}$$

*) Інтегральне представлення типу (70) тут, зрозуміло, існує також і при $\mu = 0$.

при чому тут $\chi_{\xi,\mu}(x)$, як функція від x, є знову неубуваюча при $a \leqslant x \leqslant b$, отже, $\rho_\mu(\xi) \geqslant 0$ і, зважаючи на співвідношення (180)—(181), які існують поміж $\varkappa_\mu(\xi)$ та $\rho_\mu(\xi)$, також $\varkappa_\mu(\xi) \geqslant 0$ при $\frac{a+b}{2} < \xi \leqslant b$. Таким чином, встановлено, що для всіх розглядуваних значень (251) індекса μ

$$\varkappa_\mu(\xi) \geqslant 0 \text{ при } a \leqslant \xi \leqslant b \ (\varkappa_\mu(\xi) \neq 0 \text{ при } a < \xi < b) \tag{256}$$

Отже, має місце представлення остаткового члена у вигляді

$$A[f(x)] = c_\mu . L_\mu(f|\xi) \quad (a < \xi < b), \tag{171}$$

де $L_\mu(f|\xi)$ є результат застосування диференціального оператора $L_\mu(y)$ (див. (252)) до функції $y = f(x)$, в якому незалежна змінна x замінена на ξ. Щодо коефіцієнта, то

$$c_\mu = A[S(x)], \tag{257}$$

розуміючи під $S(x)$ перший-ліпший розв'язок диференціального рівняння $L_\mu(y) = 1$, за який найпростіше взяти

$$S(x) = \frac{x}{(\nu!)^2 . \omega^{2\nu}} \tag{258}$$

Виконуючи операцію A, одержуємо таким чином:

$$c_\mu = \frac{1}{(\nu!)^2 \omega^{2\nu}} \cdot \frac{(b-a)^2}{2k} \text{*)} \tag{259}$$

Цілком аналогічно у випадку формули вихідних прямокутників приходимо до представлення (171) при

$$c_\mu = -\frac{1}{(\nu!)^2 \omega^{2\nu}} \cdot \frac{(b-a)^2}{2k} \tag{259'}$$

d) Про остатковий член Лапласової формули квадратур із внутрішніми ординатами

Розгляньмо сумаційно-квадратурну формулу

$$\int_a^{a+rh} f(x)\,dx \approx T + hU_s \ (r > 2s > 0;\ r \text{ та } s - \text{цілі}), \tag{260}$$

де, покладаючи $f(x) = y$, $a + ih = x_i$, $f(x_i) = y_i$, маємо:

$$T = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{r-1} + \frac{1}{2}y_r\right), \tag{261}$$

*) Нагадуємо, що $\mu = 2\nu + 1$ позначає тут перше-ліпше з чисел $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$. Приклад формули вхідних прямокутників при непаристій лише кількості ординат $k = 2s + 1$ і при $[a, b] = [0, 2\pi]$ фігурує також в цитованій у повідомленні I роботі J. Radon-a, де він розглядається лише (за наших позначень) при $\mu = k$. Зауважмо, крім того, що в кінцевий результат, наведений в статті Radon-a, вкралися деякі помилки.

$$\left.\begin{aligned} U_s = &-\frac{1}{12}(\Delta y_{r-1} - \Delta y_0) - \frac{1}{24}(\Delta^2 y_{r-2} + \Delta^2 y_0) - \frac{19}{720}(\Delta^3 y_{r-3} - \Delta^3 y_0) - \\ &- \frac{3}{160}(\Delta^4 y_{r-4} + \Delta^4 y_0) - \frac{863}{60\,480}(\Delta^5 y_{r-5} - \Delta^5 y_0) - \\ &- \frac{275}{24\,192}(\Delta^6 y_{r-6} + \Delta^6 y_0) - \ldots + (-1)^{s+1} L_{s+1} [\Delta^s y_{r-s} + (-1)^s \Delta^s y_0] \end{aligned}\right\} \quad (262)$$

при

$$L_s = \int_0^1 \frac{t(t-1)\ldots(t-\overline{s-1})}{s!}\,dt \quad \left(L_2 = -\frac{1}{12},\ L_3 = \frac{1}{24},\ L_4 = -\frac{19}{720}, \ldots\right) \quad (263)$$

Ми називаємо її формулою Лапласа (із внутрішніми ординатами), оскільки декілька перших її членів наведені в Mécanique céleste (1805) Лапласа[1]) поруч із іншою формулою („формулою Лапласа із зовнішніми ординатами“), яка має вигляд:

$$\int_a^{a+rh} f(x)\,dx \approx T + h V_s, \quad (264)$$

де T має попереднє значення (261), тим часом як

$$\left.\begin{aligned} V_s = &-\frac{1}{12}(\Delta y_r - \Delta y_0) + \frac{1}{24}(\Delta^2 y_r - \Delta^2 y_0) - \frac{19}{720}(\Delta^3 y_r - \Delta^3 y_0) + \\ &+ \frac{3}{160}(\Delta^4 y_r - \Delta^4 y_0) - \ldots + L_{s+1}(\Delta^s y_r - \Delta^s y_0) \end{aligned}\right\} \quad (265)$$

Для формули (264) добре відомі не тільки порядок точності [рубрика (а)], але й вираз остаткового члена[2]) у вигляді:

$$\int_a^{a+rh} f(x)\,dx - T - h V_s = r L_{s+2} h^{s+3} f^{(s+2)}(\xi) \quad (a < \xi < a + rh) \quad (266)$$

Для формули ж (260) порядок точності, рівний $s+1$ при паристих значеннях s і рівний самому s при непаристих значеннях s, був встановлений, здається, лише Grunert-ом[3]). Щождо остаткового члена цієї формули, яка особливо визначна (між іншими сумаційно-квадратурними формулами з різницями) тим, що всі її ординати не виходять за межі інтервалу інтеграції $[a, a+rh]$, і яка широко застосовується в прикладних галузях, зокрема в астрономії, то нам невідомо, щоб досі оцінка його була дана хоча б для декількох перших значень s. Ми тут дослідимо це питання для довільних значень s.

---

[1]) Laplace, Oeuvres, tome IV, p.p. 229—230.

[2]) Тут потрібний вираз остаткового члена одержується безпосередньо інтегруванням остаткового члена відповідної інтерполяційної формули Ньютона (беручи спершу $r = 1$). (Див. H. Nielsen, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, 1908, Bd. 4 № 21, p.p. 1—12, а також J. Steffensen, op. cit.)

[3]) Grunert, Archiv für Mathematik und Physik, Bd 20, SS. 361—422.

Почнімо з зауваження, що права сторона розглядуваної формули (260), коли переписати її у вигляді $\sum_{i=0}^{r} k_i y_i$ (замінивши скінченні різниці їх розгорненими виразами через ординати) відповідно до форми запису на правій стороні (239) *), має, як легко бачити, рівні коефіцієнти при ординатах, рівновіддалених від середини інтервалу інтеграції:

$$k_i = k_{r-i} \; (i = 0, 1, 2, \ldots, r)\,^{**}) \tag{267}$$

Із цього випливають певні симетричні властивості перебігу функцій (241') на сегменті $[a, b] \equiv [a, a + rh]$ в розглядуваному випадку формули квадратур (260). А саме, при $0 \leqslant \eta \leqslant \frac{1}{2} rh$ маємо:

$$\varkappa_\mu\left(a + \frac{1}{2}rh - \eta\right) \equiv (-1)^\mu \varkappa_\mu\left(a + \frac{1}{2}rh + \eta\right) \quad \text{для значень } \mu > 1 \tag{268}$$

$$\varkappa_1\left(a + \frac{1}{2}rh - \eta\right) = -\varkappa_1\left(a + \frac{1}{2}rh + \eta\right) \text{ при } a + \frac{1}{2}rh \pm \eta \neq x_i \tag{269}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

себто при паристих значеннях μ функція $\varkappa_\mu(\xi)$ виявляється паристою функцією аргументу $\xi - \left(a + \frac{1}{2}rh\right)$, а при непаристих значеннях μ — непаристою функцією того самого аргументу із тим застереженням, що при $\mu = 1$ не беруться до уваги значення ξ, які спадаються з абсцисами $x_i = a + ih$ формули квадратур (260). Такого роду симетричні властивості перебігу функцій $\varkappa_\mu(\xi)$ мають місце, взагалі, для всякої формули квадратур (239) із симетричним розподілом абсцис x_i на сегменті $[a, b]$ і з рівними коефіцієнтами при симетрично розташованих ординатах у випадку $q(x) \equiv x$ ***). Щоб в цьому пересвідчитися, досить зіставити формулу (241') із формулою (одержаною на основі (178) — (179)):

$$\rho_\mu(\xi) = \frac{(b-\xi)^\mu}{\mu!} - \sum_{(x_i \geqslant \xi)} k_i \frac{(x_i - \xi)^{\mu-1}}{\overline{\mu - 1}\,!} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{270}$$

де, при позначеннях повідомлення I,

$$\rho_\mu(\xi) = D_g \alpha_\mu(\xi) = D_g \beta_\mu(\xi) = -\beta_{\mu-1}(\xi - 0)$$

Ми бачимо, справді, що $\varkappa_\mu\left(\frac{a+b}{2} - \eta\right) = (-1)^\mu \rho_\mu\left(\frac{a+b}{2} + \eta\right)$, звідки й

---

*) Із тією відміною, що тут нумерація ординат починається з індекса 0, а не 1.

**) Слід підкреслити, що для формули Лапласа із зовнішніми ординатами (264) аналогічна симетрична властивість на сегменті $[a, a + \overline{r+s}\,h]$ не має місця.

***) На очевидних узагальненнях ми не маємо потреби тут зупинятися.

випливають безпосередньо згадані симетричні властивості перебігу функцій $\varkappa_\mu(\xi)$, беручи на увагу відомі нам співвідношення між функціями $\varkappa_\mu(\xi)$ та $\rho_\mu(\xi)$ *).

Друга визначна властивість функцій $\varkappa_\mu(\xi)$ в розглядуваному випадку формули квадратур (260) полягає в періодичності їх перебігу, із періодом h, на сегменті $a+sh \leqslant \xi \leqslant a+\overline{r-s}\,h$ при $r-2s \geqslant 2$. Для функції $\varkappa_1(\xi)$ ця властивість встановлюється майже безпосередньо на основі відповідної формули типу (241′) при $\mu=1$, беручи на увагу, що алгебрична сума коефіцієнтів при ординатах у виразі кожної із скінченних різниць Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0 \ldots$, дорівнює нулю, й помічаючи, що на кожному із послідовних інтервалів $[x_s, x_{s+1})$, $[x_{s+1}, x_{s+2}), \ldots, [x_{r-s-1}, x_{r-s})$ функція $\varkappa_1(\xi)$ являє собою лінійну функцію, яка змінюється від $+\frac{1}{2}h$ до $-\frac{1}{2}h$. Застосовуючи далі метод індукції із послідовним переходом від μ до $\mu+1$ ($\mu=1, 2, \ldots, n$) та маючи на увазі, що $\varkappa_{\mu+1}(\xi)=-\int\limits_a^\xi \varkappa_\mu(\xi)\,d\xi$ в силу (34), досить кожного разу пересвідчитись, що

$$\int\limits_\alpha^{\alpha+h} \varkappa_\mu(\xi)\,d\xi=\varkappa_{\mu+1}(\alpha)-\varkappa_{\mu+1}(\alpha+h)=0 \tag{271}$$

для якогонебудь (хоча б одного) значення $\alpha \subset [x_s, x_{r-s-1}]$. Ураховуючи [на основі відповідної формули типу (241′)], що перебіг функції $\varkappa_{\mu+1}(\xi)$ на сегменті $[x_s, x_{s+2}]$ не залежить від r (припускаючи лише $r \geqslant 2s+2$), можна прийти до потрібних висновків, беручи $\alpha=x_{s+1}$. Справді, при паристих значеннях $\mu+1$, беручи $\alpha=x_{s+1}$, $r=2s+3$, маємо зараз же $\varkappa_{\mu+1}(\alpha)=$ $=\varkappa_{\mu+1}(\alpha+h)$ на основі симетричної властивості перебігу $\varkappa_{\mu+1}(\xi)$ на сегменті $[a, a+rh]$ (властивість (268), де μ замінено на $\mu+1$ при $\eta=\frac{1}{2}h$). При непаристих же значеннях $\mu+1$, беручи один раз $r=2s+2$, другий раз $r=2s+4$, встановлюємо аналогічно, що $\varkappa_{\mu+1}(x_{s+1})=\varkappa_{\mu+1}(x_{s+2})=0$, отже, знову $\varkappa_{\mu+1}(\alpha)=\varkappa_{\mu+1}(\alpha+h)$, що й завершує доведення цікавого для нас факту періодичності.

Базуючись на встановлених фактах, ми тепер можемо перейти до останнього етапу розглядуваного дослідження. Позначмо через $\tilde{\varkappa}_\mu^{(s)}(\xi)$ ($\mu=1, 2, \ldots, s, s+1, s+2$) функції $\varkappa_\mu$, побудовані для формули квадратур (264), яка кінчається різницями даного порядку s, залишаючи позначення $\varkappa_\mu^{(s)}(\xi)$ ($\mu=1, 2, \ldots, s+2$ при паристих значеннях s; $\mu=1, 2, \ldots, s+1$ при непаристих значеннях s) для функцій $\varkappa_\mu$, побудованих відповідно до досліджуваної формули квадратур (260).

Хай спершу s має паристе значення. Зважаючи на симетричні властивості $\varkappa_\mu^{(s)}(\xi)$ (268), досить перевести дослідження в ме-

---

*) Співвідношення (181) — (182) при $\mu=m+1=1$ та співвідношення $\rho_\mu(\xi) \equiv \varkappa_\mu(\xi)$ при $\mu > m+1$.

жах $a \leqslant \xi \leqslant a + \frac{1}{2} rh$. Але в цих межах $\varkappa^{(s)}_{s+2}(\xi)$, як легко бачити на основі (241′), не відрізняються від $\bar{\varkappa}^{(s)}_{s+2}(\xi)$, і ця остання функція напевне зберігає сталий знак на ширшому сегменті $a \leqslant \xi \leqslant a + \overline{r+s}\, h$, зважаючи на існування представлення (266) для остаткового члена формули (264) та спираючись на наслідок з леми I рубрики (b) даного повідомлення. Таким чином, функція $\varkappa^{(s)}_{s+2}(\xi)$, яка є паристою функцією від $\xi - \left(a + \frac{1}{2} rh\right)$, зберігає сталий знак на всьому інтервалі інтеграції $[a, a + rh]$. Цим самим доведено існування представлення типу (46″) для остаткового члена сумаційно-квадратурної формули (260) при *паристих* значеннях s. Коефіцієнт c представлення (46″) тут має таке значення [1]):

$$c = A\left[\frac{x^{s+2}}{\overline{s+2}!}\right] = hL_{s+2}\left\{\left[\Delta^{s+1}\frac{x^{s+2}}{\overline{s+2}!}\right]_{x=a+\overline{r-s-1}\,h} - \left[\Delta^{s+1}\frac{x^{s+2}}{\overline{s+2}\,!}\right]_{x=a}\right\} -$$

$$- h\,L_{s+3}\cdot 2\Delta^{s+2}\frac{x^{s+2}}{\overline{s+2}\,!} = - h^{s+3}\left[2\,L_{s+3} - (r-s-1)\,L_{s+2}\right],$$

звідки маємо остаточну формулу для паристих значень s:

$$\int\limits_a^{a+rh} f(x)\,dx - (T + h\,U_s) = - h^{s+3}\left[2\,L_{s+3} - (r-s-1)\,L_{s+2}\right] f^{(s+2)}(\xi) \qquad (272)$$

$$[a < \xi < a + rh\,; \quad s = 0, 2, 4, 6, \ldots {}^{*})]$$

Хай тепер s—число непаристе. Ми доведемо, що в цьому випадку функція $\varkappa^{(s)}_{s+1}(\xi)$ неодмінно змінює свій знак на елементарному сегменті $[x_s, x_{s+1}]$ (отже, при $r > 2s + 1$,—на кожному з елементарних сегментів $[x_{s+1}, x_{s+2}], \ldots, [x_{r-s-1}, x_{r-s}]$, зважаючи на періодичність). Доводячи від супротивного, припустімо, що $\varkappa^{(s)}_{s+1}(\xi)$ зберігає сталий знак на сегменті $[x_s, x_{s+1}]$. Перебіг $\varkappa^{(s)}_{s+1}(\xi)$ на цьому сегменті залишається такий самий, якщо взяти число r (за умовою більше $2s$) скільки завгодно великим. Тепер зауважмо, що при будьякому значенні $r > 2s + 2$ функція $\varkappa^{(s)}_{s+1}(\xi)$ на сегменті $[x_{s+1}, x_{r-s-1}]$ не відрізняється від $\varkappa^{(s+1)}_{s+1}(\xi)$: справді, коли ξ міститься в зазначених межах, то $\overline{s+1}$-ша різниця, взята при $x = a$ від функції, рівної

$$\begin{cases} -\dfrac{(x-\xi)^s}{s!} & \text{при } x \leqslant \xi \\ 0 & \text{„ } x > \xi \end{cases},$$

---

[1]) $A[f(x)]$ тут, зрозуміло, позначатиме величину $\int\limits_a^{a+rh} f(x)\,dx - (T + h\,U_s)$.

*) При $s = 0$ ($U_s = U_0 = 0$) маємо формулу трапецій із її остатковим членом.

анулюється. Отже, за зробленим припущенням, функція $\varkappa^{(s+1)}_{s+1}(\xi)$ зберігає, одночасно із $\varkappa^{(s)}_{s+1}(\xi)$, сталий знак на сегменті $[x_{s+1}, x_{r-s-1}]$ *), до того ж вона має періодичний перебіг, з періодом h, на цьому сегменті. Але такий висновок негайно веде до суперечності. Справді, коли взяти число r досить велике, то абсолютне значення інтеграла

$$\int_{x_{s+1}}^{x_{r-s-1}} \varkappa^{(s+1)}_{s+1}(\xi)\, d\xi \tag{273}$$

буде за даних обставин скільки завгодно велике, тим часом як на сегментах $[x_0, x_{s+1}] \equiv [a, x_{s+1}]$ та $[x_{r-s-1}, x_r] \equiv [x_{r-s-1}, a+rh]$, на основі відповідних формул типів (241′) та (270) (пам'ятаючи що в даному разі $\rho_\mu(\xi) \equiv \varkappa_\mu(\xi)$, оскільки $\mu = s+1 > m+1 = 1$), функція $\varkappa^{(s+1)}_{s+1}(\xi)$ є обмежена і має перебіг незалежний від r. Таким чином, при досить великих значеннях r рівність [необхідна в силу (34), (15), (17)]

$$\int_{a}^{a+rh} \varkappa^{(s+1)}_{s+1}(\xi)\, d\xi = \varkappa^{(s+1)}_{s+2}(a) - \varkappa^{(s+1)}_{s+2}(a+rh) = 0 \tag{274}$$

стає неможливою, що й виявляє суперечність.

Із одержаного результату виходить, що при непаристих значеннях s представлення остаткового члена формули (260) у вигляді (46″) ніколи не можливе. В цьому випадку доведеться задовольнитися наступним представленням остаткового члена, легко одержуваним через порівняння із „продовженою“ формулою (260), в якій непаристе s замінено на паристе $s+1$:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{a}^{a+rh} f(x)\,dx - (T + hU_s) = -2L_{s+2}h^{s+2}f^{(s+1)}(\xi_1) - \\ &\quad - h^{s+4}[2L_{s+4} - (r-s-2)L_{s+3}]f^{(s+3)}(\xi_2) \\ &\quad (a < \xi_1,\ \xi_2 < a+rh;\ s = 1, 3, 5, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{275}$$

Додамо таку увагу. В попередньому припускалося $r > 2s$, як це звичайно й має місце при застосуванні сумаційно-квадратурних формул. Легко бачити, що чинність представлення (272) у всякому разі зберігається ще при $r = 2s$. Взагалі ж при $0 < r \leqslant 2s$ ми ще одержуємо різні симетричного типу формули механічних квадратур, для яких порядок точності n дорівнює $s+1$ при $s = 2k$ і дорівнює s при $s = 2k+1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Це будуть ще формули із внутрішніми ординатами при $r \geqslant s$. Зокрема a priori можна твердити, що при

---

*) Функція $\varkappa^{(s)}_{s+1}(\xi)$ повинна зберігати сталий знак на елементарних частинах цього сегмента за властивістю періодичності.

$s=2k$ й при $r=s$ або $r=s+1$ повинні одержуватися, як окремий випадок розглядуваних формул, усі *Котесові* формули квадратур. Справді, формули Котеса однозначно визначаються добором абсцис та умовою щодо порядку точності. Відомо (це уперше довів Steffensen 1921—1924), що остатковий член формул Котеса допускає представлення типу (46″). Із попередніх міркувань ясно, що формула (272) при $s=2k$, $r=s$ або $s+1$ дає загальний вираз остаткового члена для всіх формул Котеса, складений з допомогою чисел L_i (263). Маючи на увазі можливі потреби практики, я перевів також безпосереднє дослідження [1]) перебігу функцій $\varkappa^{(2k)}_{2k+2}(\xi)$ для формул (260), що закінчуються різницями паристого порядку $s=2k$, не вищого 6, при $s+1<r<2s$. Виявилося, що ці функції зберігають сталий знак на інтервалі інтеграції. Таким чином, представлення (272) при $s=2, 4, 6$ зберігає силу також і для значень r, що містяться в межах $s\leqslant r\leqslant 2s$. Це зауваження може бути корисне в практиці застосування формули (260) для обчислення ряду послідовних значень неозначеного інтеграла [2]) на першій стадії обчислювального процесу, коли r ще не досягло значення $2s$ і достатнє для цього роду застосувань.

е) Про остаткові члени формул механічних квадратур Чебишова

Для цих дуже важливих формул механічних квадратур скількибудь простої і точної оцінки остаткового члена досі, оскільки нам відомо, також ніким не дано [3]).

Залишаючи осторонь формулу Чебишова з двома ординатами, яка одночасно належить до формул Гауссового типу, що для них оцінка у формі (46″) є відома, ми маємо наступні формули квадратур Чебишова відповідно із трьома, чотирма, п'ятьма, шістьма, сімома та дев'ятьма ординатами:

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{3}\sum_{i=1}^{3} f(x_i) + R_3,\\ &\text{де } x_i = a + t_i(b-a),\ t_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0{,}146446;\quad t_2 = \frac{1}{2};\ t_3 = 1 - t_1 \end{aligned}\right\} \quad (276)$$

[1]) В переведенні відповідних обчислень, а також тих обчислень, з якими було пов'язане дослідження остаткових членів формул квадратур Чебишова (див. наступну рубрику (е)) мені допомогли асистенти Київського Педагогічного інституту ім. Горького К. С. Кунявська та М. Ф. Лемберський.

[2]) Застосування цього роду знаходять місце, наприклад, при переведенні числового інтегрування диференціальних рівнянь за методом послідовних наближень Пікара. Порівн А. Н. Крылов, Приближенное численное интегрирование обыкновенных диференциальных уравнений, 1923.

[3]) Це питання було предметом деяких досліджень покійного академіка В. Стеклова (Известия Росс. Акад. Наук, 1916—1918). Проте вирази, знайдені Стекловим для остаткових членів формул Чебишова, з одного боку, складні, а з другого, — вони не виявляють навіть точного порядку малості остаткового члена.

$$\left.\begin{aligned}&2)\ \int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{4}\sum_{i=1}^{4}f(x_i)+R_4\,;\\&x=a+t_i(b-a),\ t_1=1-t_4=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{15}\sqrt{5}}=0{,}102673;\\&t_2=1-t_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{2}{15}\sqrt{5}}=0{,}406\,204\end{aligned}\right\}\quad(277)$$

$$\left.\begin{aligned}&3)\ \int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{5}\sum_{i=1}^{5}f(x_i)+R_5\,;\\&x_i=a+t_i(b-a),\ t_1=1-t_5=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{12}+\frac{1}{12}\sqrt{11}}=0{,}083751;\\&t_2=1-t_4=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{12}-\frac{1}{12}\sqrt{11}}=0{,}312730\\&t_3=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\quad(278)$$

$$\left.\begin{aligned}&4)\ \int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\sum_{i=1}^{6}f(x_i)+R_6\,;\\&x_i=a+t_i(b-a),\ t_1=1-t_6=0{,}066876\,^{*});\ t_2=1-t_5=0{,}288740;\\&t_3=1-t_4=0{,}366682\end{aligned}\right\}\quad(279)$$

$$\left.\begin{aligned}&5)\ \int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{7}\sum_{i=1}^{7}f(x_i)+R_7\,;\\&x_i=a+t_i(b-a),\ t_1=1-t_7=0{,}058069;\ t_2=1-t_6=0{,}235172;\\&t_3=1-t_5=0{,}338044;\ t_4=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\quad(280)$$

$$\left.\begin{aligned}&6)\ \int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{9}\sum_{i=1}^{9}f(x_i)+R_9\,;\\&x_i=a+t_i(b-a),\ t_1=1-t_9=0{,}044206;\ t_2=1-t_8=0{,}199490;\\&t_3=1-t_7=0{,}235619;\ t_4=1-t_6=0{,}416047,\quad t_5=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\quad(281)$$

---

*) Десяткові дроби в усіх розглядуваних формулах (276)—(281) визначають, як відомо, наближені значення абсцис.

Тут $R_3, R_4, \ldots, R_7, R_9$ позначають остаткові члени розглядуваних формул, які й повинні бути досліджені.

Акад. С. Н. Бернштейн довів [1]), що формул цього типу з іншим числом ординат не існує. Відомо, крім того, що порядок точності [рубрика (а)] $n = n_r$ формули Чебишова із r ординатами дорівнює r при непаристих значеннях r і дорівнює $r+1$ при паристих значеннях r.

З огляду на те, що кількість формул квадратур Чебишова є скінченна, до того ж невелика, виявилося можливим перевести, для кожного з розглядуваних значень $r = 3, 4, 5, 6, 7, 9$, безпосереднє дослідження відповідних функцій $\varkappa_\mu(\xi)$ [див. (241′)], $\mu = 1, 2, 3, \ldots, n_r + 1$ *). Таким шляхом ми знайшли, що функція $\varkappa_{n_r+1}(\xi)$ для кожної із розглядуваних формул квадратур Чебишова зберігає сталий знак на всьому інтервалі інтеграції $[a, b]$.

Зважаючи на симетричну будову формул Чебишова, довелося досліджувати функції $\varkappa_\mu(\xi)$ лише на половині $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ сегмента $[a, b]$**). Крім того, тут можна, не зменшуючи загальності висновків, фактично обмежитися випадком інтервалу інтеграції $[a, b] \equiv [0, 1]$. Відповідні до цього випадку функції $\varkappa_\mu(\xi)$ позначмо на хвилину через $\tilde{\varkappa}_\mu(\xi)$. Користуючись перетворенням змінного $\frac{x-a}{b-a} = t$ та покладаючи відповідно до цього

$$\frac{\xi - a}{b - a} = \tau, \tag{282}$$

легко бачити на основі (241′), що має місце просте співвідношення:

$$\varkappa_\mu(\xi) = (b-a)^\mu \tilde{\varkappa}_\mu(\tau) \tag{283}$$

де, зрозуміло, функції $\varkappa_\mu$ й $\tilde{\varkappa}_\mu$ повинні відповідати тій самій формулі квадратур, написаній в одному випадку для довільного інтервалу інтеграції $[a, b]$, в другому ж випадку — більш спеціально для інтервалу інтеграції $[0, 1]$. В дальшому, оскільки не буде небезпеки змішення, будемо, замість $\tilde{\varkappa}_\mu(\tau)$ писати простіше $\varkappa_\mu(\tau)$.

Формула (276). Тут $r = 3$, $n_r = 3$, $n_r + 1 = 4$. Послідовне дослідження функцій $\varkappa_\mu(\tau)$ (241′), $\mu = 1, 2, 3, 4$, при чому нулі та (при $\mu = 1$) точки розриву неперервності попередньої функції є єдиними можливими точками максимум—мінімум для наступної, дозволяє безпосередньо виявити, що функція $\varkappa_4(\tau)$ зберігає сталий знак на сегменті $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, отже, і на всьому сегменті $[0, 1]$.

---

[1]) Доклады Акад. Наук СССР, 1937, том XIV, № 6.

*) В дійсності, як буде видно з дальшого, вдалося дістати усі потрібні висновки, дослідивши, для кожного значення r, взагалі, не всі зазначені тут функції $\varkappa_\mu(\xi)$, а лише деякі з них.

**) Див. відповідні загальні уваги в попередній рубриці (d) цієї статті.

Формула (277). $r=4$, $n_r=5$, $n_r+1=6$. Тут виявляється, що $\varkappa_2(\tau)$ має на сегменті $[0, 1]$ лише 4 зміни знаку, а саме при $\tau=\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$, де

$$\tau_1 = 1 - \tau_4 = 0{,}1443; \quad \tau_2 = 1 - \tau_3 = 0{,}3557$$

Із цього виходить a priori, на основі загальних співвідношень рубрики 9° розділу I попереднього повідомлення, що функція $\varkappa_{n+1}(\tau) = \varkappa_6(\tau)$ може мати не більше як $4-(6-2)=0$ змін знаку, себто вона зберігає сталий знак на сегменті $[0, 1]$.

Формула (278). $r=5$, $n_r+1=6$. Тут при послідовному розгляді $\varkappa_1(\tau)$, $\varkappa_2(\tau)$, $\varkappa_3(\tau)$ виявляється, що $\varkappa_3(\tau)$ має лише три зміни знаку, а саме при $\tau=\tau_1, \tau_2, \tau_3$, де $\tau_1 = 1-\tau_3$ лежить поміж точкою від'ємного мінімуму

$$\tau = 0{,}1194 \quad (\varkappa_3 = -0{,}000\,156)$$

та точкою додатного максимуму

$$\tau = 0{,}2806 \quad (\varkappa_3 = +0{,}00020)\ ^{*)}$$

і $\tau_2 = \frac{1}{2}$. Таким чином, як і в попередньому випадку, доходимо висновку, що

$$\varkappa_{n+1}(\tau) = \varkappa_6(\tau)$$

має не більше як $3-(6-3)=0$ змін знаку, себто зберігає сталий знак на сегменті $[0, 1]$.

Формула (279). $r=6$, $n_r+1=8$. Тут виявляється, що $\varkappa_2(\tau)$ має лише 6 змін знаку, при $\tau=\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_6$, де

$$\tau_1 = 1-\tau_6 = 0{,}09263; \quad \tau_2 = 1-\tau_5 = 0{,}2408; \quad \tau_3 = 1-\tau_4 = 0{,}4039$$

Отже, функція $\varkappa_{n+1}(\tau) = \varkappa_8(\tau)$ зберігає сталий знак на сегменті $[0, 1]$.

Формула (280). $r=7$, $n_r+1=8$. Тут виявляється, що $\varkappa_4(\tau)$ має лише 4 зміни знаку, при $\tau=\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$, де $\tau_1 = 1-\tau_4$ лежить поміж точкою додатного максимуму

$$\tau = 0{,}1281 \quad (\varkappa_4 = +0{,}0000030 = „+0{,}0^5 30")$$

та точкою від'ємного мінімуму

$$\tau = 0{,}2830 \quad (\varkappa_4 = -0{,}0^5 70),$$

а $\tau_2 = 1-\tau_3$ лежить між цією-таки точкою від'ємного мінімуму та наступною точкою додатного максимуму

$$\tau = 0{,}4705 \quad (\varkappa_4 = +0{,}0^5 7)\ ^{**)}.$$

Звідси, як і в попередніх випадках, доходимо висновку, що $\varkappa_{n+1}(\tau) = \varkappa_8(\tau)$ зберігає сталий знак на сегменті $[0, 1]$.

---

*) Іншими точками максимум—мінімум на лівій половині сегмента $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ є ще лише $\tau = 0{,}3625$ ($\varkappa_3 = +0{,}00008$) та $\tau = 0{,}4375$ ($\varkappa_3 = +0{,}00012$).

**) Крім цих точок максимум — мінімум та симетричних із ними, $\varkappa_4(\tau)$ має ще одну лише точку мінімум при $\tau = \frac{1}{2}$ ($\varkappa_4 = +0{,}0^5 63$)

Формула (281). $r = 9$, $n_r + 1 = 10$. Тут виявляється, що $\varkappa_2(\tau)$ має лише 8 змін знаку, при $\tau = \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_8$, де

$$\tau_1 = 1 - \tau_8 = 0{,}06089; \quad \tau_2 = 1 - \tau_7 = 0{,}16133; \quad \tau_3 = 1 - \tau_6 = 0{,}26553;$$

$$\tau_4 = 1 - \tau_5 = 0{,}40113$$

Отже, $\varkappa_{n+1}(\tau) = \varkappa_{10}(\tau)$ зберігає сталий знак на всьому сегменті $[0, 1]$.

Із результатів переведеного дослідження, видно, що остаткові члени усіх розглядуваних формул квадратур (276—281) допускають представлення вигляду (46″). Обчислюючи для кожного з розглядуваних остаткових членів коефіціент c при $f^{(n+1)}(\xi)$ за формулою [1])

$$c = A\left[\frac{x^{n+1} + g_1 x^n + g_2 x^{n-1} + \ldots}{\overline{n+1}\,!}\right], \tag{47'}$$

при чому вираз в чисельнику дробу являє собою якийнебудь поліном із старшим членом x^{n+1}, що анулюється для всіх абсцис відповідної формули квадратур [2]), приходимо до наступних виразів остаткових членів, де, в кожній формулі, $a < \xi < b$:

$$R_3 = \frac{(b-a)^5}{11\,520} f^{(4)}(\xi) \approx 0{,}0^4 868\ (b-a)^5 f^{(4)}(\xi) \tag{276'}$$

$$R_4 = \frac{(b-a)^7}{2\,721\,600} f^{(6)}(\xi) \approx 0{,}0^6 367\ (b-a)^7 f^{(6)}(\xi) \tag{277'}$$

$$R_5 = \frac{13\ (b-a)^7}{69\,672\,960} f^{(6)}(\xi) \approx 0{,}0^6 187\ (b-a)^7 f^{(6)}(\xi) \tag{278'}$$

$$R_6 = \frac{(b-a)^9}{2\,032\,128\,000} f^{(8)}(\xi) \approx 0{,}0^9 492\ (b-a)^9 f^{(8)}(\xi) \tag{279'}$$

$$R_7 = \frac{0{,}281\ (b-a)^9}{1\,003\,290\,624} f^{(8)}(\xi) \approx 0{,}0^9 280\ (b-a)^9 f^{(8)}(\xi) \tag{280'}$$

$$R_9 = \frac{0{,}163\ (b-a)^{11}}{549\,357\,355\,008} f^{(10)}(\xi) \approx 0{,}0^{12} 297\ (b-a)^{11} f^{(10)}(\xi) \tag{281'}$$

---

[1]) A позначає тут, звичайно, операцію (240) для відповідного випадку.

[2]) Можна, наприклад, одержати згаданий поліном, множачи на x чи на x^2 ліву сторону алгебричного рівняння, яке визначає абсциси відповідної формули квадратур. Зрозуміло, що і в цьому обчисленні зручно звести загальний випадок до окремого випадку

$$[a, b] \equiv [-1, +1]$$

f) Про остаткові члени формул наближеного диференціювання, які виводяться із інтерполяційних формул Стірлінга та Бесселя

Найбільш важливі формули числового диференціювання, які одержуються послідовним диференціюванням інтерполяційних формул Стірлінга та Бесселя, належать також до числа тих, для яких оцінка остаткового члена досі, оскільки нам відомо, не була відмічена [1]).

Інтерполяційні ряди Стірлінга та Бесселя можна подати, як відомо, в такому вигляді:

$$\left.\begin{array}{l} f_0+t\dot{\delta} f_0+\dfrac{t^2}{2!}\delta^2 f_0+\dfrac{t(t^2-1)}{3!}\dot{\delta}^3 f_0+\dfrac{t^2(t^2-1)}{4!}\delta^4 f_0+ \\ +\dfrac{t(t^2-1)(t^2-4)}{5!}\dot{\delta}^5 f_0+\dfrac{t^2(t^2-1)(t^2-4)}{6!}\delta^6 f_0+\dots \end{array}\right\}, \qquad (S)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{f}_{1/2}+\tau\,\delta f_{1/2}+\dfrac{\tau^2-\frac{1}{4}}{2!}\dot{\delta}^2 f_{1/2}+\dfrac{\tau\left(\tau^2-\frac{1}{4}\right)}{3!}\delta^3 f_{1/2}+ \\ +\dfrac{\left(\tau^2-\frac{1}{4}\right)\left(\tau^2-\frac{9}{4}\right)}{4!}\dot{\delta}^4 f_{1/2}++\dfrac{\tau\left(\tau^2-\frac{1}{4}\right)\left(\tau^2-\frac{9}{4}\right)}{5!}\delta^5 f_{1/2}+ \\ +\dfrac{\left(\tau^2-\frac{1}{4}\right)\left(\tau^2-\frac{9}{4}\right)\left(\tau^2-\frac{25}{4}\right)}{6!}\dot{\delta}^6 f_{1/2}+\dots \end{array}\right\}, \qquad (B)$$

де

$$f_i=f(x_i)=f(a+ih);\ i=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\dots;$$

$$t=\frac{x-a}{h};\ \tau=\frac{x-a-\frac{1}{2}h}{h};$$

δ^ν позначає центровану скінченну різницю порядку ν, а через $\dot{\delta}^\nu$ (з крапкою нагорі; $\nu=1, 2, 3,\dots$) ми тут позначаємо доповняльні (середні арифметичні) числа схеми центрованих різниць, і аналогічне значення має $\dot{f}_{1/2}$. У випадку цілої раціональної $f(x)$ степеня n ці ряди автоматично обриваються після членів, що містять різниці порядку n, і виражають в цьому випадку точне значення $f(a+th)$, відп. $f\left(a+\frac{1}{2}+\tau h\right)$. Члени цих рядів є навперемінно паристі та непаристі функції від t, відповідно τ. Продиференціювавши $\overline{\nu+1}$-членні відрізки цих рядів s разів ($s\leqslant\nu$) послідовно по x та поклавши після диференціювань $t=0$, відповідно $\tau=0$, одержуємо

---

[1]) Деякі цікаві факти, що стосуються цього кола питань, можна знайти в цитованому вище мемуарі Birkhoff-а, а також в цитованій монографії В. Л. Гончарова.

вирази, які дають точні значення $f^{(s)}(a)$, відповідно $f^{(s)}\left(a+\frac{1}{2}h\right)$ у випадку цілої раціональної $f(x)$ степеня ν, якщо $\nu-s$ є число непаристе, і навіть степеня $\nu+1$, якщо $\nu-s$ є число паристе. Ті самі вирази у випадку будьякої $f(x)$, що посідає лише достатню кількість послідовних неперервних похідних, можуть розглядатись як наближені вирази для $f^{(s)}(a)$, відповідно $f^{(s)}\left(a+\frac{1}{2}h\right)$.

Найбільше практичне значення мають одержувані таким шляхом наближені формули для $f^{(2k)}(a)$ та для $f^{(2k-1)}\left(a+\frac{1}{2}h\right)$, $k=1, 2, 3, \ldots$ [1]). Наприклад, для перших двох похідних приходимо таким шляхом до формальних розкладів

$$f'\left(a+\frac{1}{2}h\right)\sim\frac{1}{h}\left(\delta f_{1/2}-\frac{1}{24}\delta^3 f_{1/2}+\frac{3}{640}\delta^5 f_{1/2}-\frac{5}{7168}\delta^7 f_{1/2}+\right.$$

$$\left.+\frac{35}{294\,912}\delta^9 f_{1/2}-\ldots\right) \tag{284}$$

$$f''(a)\sim\frac{1}{h^2}\left(\delta^2 f_0-\frac{1}{12}\delta^4 f_0+\frac{1}{90}\delta^6 f_0-\frac{1}{560}\delta^8 f_0+\frac{1}{3150}\delta^{10} f_0-\ldots\right) \tag{285}$$

Загальніше, при $k=1, 2, 3, \ldots$, матимемо формальні розклади вигляду:

$$\left.\begin{aligned} f^{(2k)}(a)\sim\frac{1}{h^{2k}}[\delta^{2k} f_0-p_{2k,1}\delta^{2k+2} f_0+p_{2k,2}\delta^{2k+4} f_0-\\ -p_{2k,3}\delta^{2k+6} f_0+\ldots+(-1)^r p_{2k,r}\delta^{2k+2r} f_0\pm\ldots] \end{aligned}\right\}, \tag{286}$$

$$\left.\begin{aligned} f^{(2k-1)}\left(a+\frac{1}{2}h\right)\sim\frac{1}{h^{2k-1}}[\delta^{2k-1} f_{1/2}-q_{2k-1,1}\delta^{2k+1} f_{1/2}+q_{2k-1,2}\delta^{2k+3} f_{1/2}-\\ -q_{2k-1,3}\delta^{2k+5} f_{1/2}+\ldots+(-1)^r q_{2k-1,r}\delta^{2k-1+2r} f_{1/2}\pm\ldots], \end{aligned}\right\} \tag{287}$$

де

$$p_{2k,r},\quad q_{2k-1,r}\quad (r=1, 2, 3, \ldots)$$

є певні додатні раціональні числа [2]), закон складання яких може бути виведений із рядів (S) та (B).

Якщо, навпаки, продиференціювати формулу Стірлінга непаристу кількість разів або формулу Бесселя—паристу кількість разів та покласти після

---

[1]) Порів., наприклад, Fr. A. Willers, Praktische Analysis, Berlin und Leipzig 1928.

[2]) Як відомо, вони можуть бути виражені через числа Бернуллі вищих порядків. Див. N. E. Nörlund, Differenzenrechnung, 1924, Kap. VIII, § 7. В цій книзі питання розглядається з істотно іншого погляду — стосовно до аналітичних $f(x)$ на комплексній площині.

диференціювань $t=0$, відповідно $\tau=0$, то приходимо при $k=1, 2, 3, \ldots$, до інших формальних розкладів вигляду:

$$f^{(2k-1)}(a) \sim \frac{1}{h^{2k-1}} \left[\dot{\delta}^{2k-1} f_0 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r p_{2k-1,r} \dot{\delta}^{2k-1+2r} f_0 \right] \tag{288}$$

$$f^{(2k)}\left(a+\frac{1}{2}h\right) \sim \frac{1}{h^{2k}} \left[\dot{\delta}^{2k} f_{1/2} + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r q_{2k,r} \dot{\delta}^{2k+2r} f_{1/2} \right], \tag{289}$$

де уже фігурують не основні, а доповняльні числа схеми центрованих різниць.

Користуючись відрізками формальних розкладів (284) — (289), ми маємо ряд наближених формул числового диференціювання. Ми хочемо тут відмітити, що остаткові члени усіх цих формул допускають представлення вигляду (46'').

Наприклад, у випадку формул, що одержуються із розкладів (286) остача має вигляд:

$$f^{(2k)}(a) - \frac{1}{h^{2k}} \left[\delta^{2k} f(a) + \sum_{i=1}^{r} (-1)^i p_{2k,i} \delta^{2k+2i} f(a) \right] = A[f(x)] \tag{290}$$

Вона являє собою лінійний функціонал в просторі C_{2k} функцій $f(x)$ з неперервними похідними до порядку $2k$ включно на сегменті

$$[a-\overline{k+r}h,\ a+\overline{k+r}h], \tag{291}$$

який анулюється для всіх цілих раціональних $f(x)$ степеня $2k+2r+1$. Отже, тут, при попередніх позначеннях, $m=2k$, $n=2k+2r+1$. Позначмо ще через I_1 та I_2 відповідно півзамкнені інтервали

$$[a-\overline{k+r}h,\ a) \quad \text{та} \quad (a,\ a+\overline{k+r}h], \tag{292}$$

де точка a в обох випадках виключається. Складаючи тут для кожної із функцій $\varkappa_\mu(\xi)$ два явні вирази, аналогічні до (241') та до (270) відповідно, що з них один особливо простий на інтервалі I_1; другий — на інтервалі I_2, матимемо при $\mu=2k+1,\ 2k+2, \ldots, 2k+2r+2$:

$$\varkappa_\mu(\xi) = \sum_{(x_i \leqslant \xi)} c_i \frac{(x_i-\xi)^{\mu-1}}{\overline{\mu-1}\,!} \quad \text{при } \xi \subset I_1, \tag{293}$$

$$\varkappa_\mu(\xi) = \sum_{(x_i \geqslant \xi)} \breve{c}_i \frac{(x_i-\xi)^{\mu-1}}{\overline{\mu-1}\,!} \quad ,, \quad \xi \subset I_2, \tag{294}$$

де

$$x_i = a+ih; \quad i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(k+r);$$

c_i та $\breve{c}_i$ позначають певні сталі коефіцієнти, при чому, зважаючи на симетричну будову виразу (290) та ураховуючи протилежність знаків у виразах типу (101) та (179), матимемо:

$$c_{-i} = -\breve{c}_i \tag{295}$$

Звідси бачимо, що $\varkappa_\mu(\xi)$ ($\mu = 2k+1,\ 2k+2, \ldots, 2k+2r+2$), розглядувані як функції від $\xi - a$, є паристі функції при паристих значеннях μ і непаристі функції при непаристих значеннях μ (не беручи на увагу лише значення $\varkappa_{2k+1}(a)$ при $\mu = 2k+1$).

Зупинімось докладніше на функції $\varkappa_{2k+1}(\xi)$. Для неї можна написати на основі (100) — (101) при

$$H_\mu(x, \xi) = H_{2k+1}(x, \xi) = \frac{(x-\xi)^{2k}}{\overline{2k}!}$$

такий вираз, що має силу на всьому сегменті (291):

$$\varkappa_{2k+1}(\xi) = \sum_{(x_i \leqslant \xi)} c_i \frac{(x_i - \xi)^{2k}}{\overline{2k}!} + \rho, \text{ де } \rho = \begin{cases} \ \ 0 \text{ при } \xi < a \\ -1 \quad „ \quad \xi \geqslant a \end{cases} \tag{296}$$

Із нього видно, що єдиною точкою розриву цієї функції на сегменті (291) є $\xi = a$, де вона зазнає стрибок, рівний — 1. Позначаючи через $\varkappa'_{2k+1}(\xi)$ неперервну на всьому сегменті (291) функцію

$$\varkappa'_{2k+1}(\xi) = \sum_{(x_i \leqslant \xi)} c_i \frac{(x_i - \xi)^{2k-1}}{\overline{2k-1}\,!}, \tag{297}$$

матимемо, як легко бачити [1]),

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_{2k+1}(\xi) &= \int_{a-\overline{k+r}\,h}^{\xi} \varkappa'_{2k+1}(\xi)\, d\xi \quad \text{при} \quad \xi \subset I_1 \\ \varkappa_{2k+1}(\xi) &= \int_{a+\overline{k+r}\,h}^{\xi} \varkappa'_{2k+1}(\xi)\, d\xi \quad\ „ \quad\ \xi \subset I_2 \end{aligned}\right\} \tag{298}$$

Функція $\varkappa'_{2k+1}(\xi)$, як видно із (297), анулюється на лівому кінці сегмента (291). Крім того, оскільки вона (як похідна від непаристої функції) являє собою паристу функцію від $\xi - a$, то вона анулюється і на правому кінці. Далі бачимо, що ця функція $\varkappa'_{2k+1}(\xi)$ має на всьому сегменті (291) послідовні неперервні похідні

$$\varkappa''_{2k+1}(\xi),\ \varkappa'''_{2k+1}(\xi), \ldots, \varkappa^{(2k-1)}_{2k+1}(\xi),$$

які анулюються на обох кінцях сегмента, і остання із цих похідних має ще кусково-неперервну „майже-похідну" [в розумінні зноски до (81)] $\bar{\varkappa}^{(2k)}_{2k+1}(\xi)$, яка є сталою на кожному із $2k+2r$ часткових інтервалів:

$$(a - \overline{k+r}\,h,\ a - \overline{k+r-1}\,h), \ldots, (a + \overline{k+r-1}\,h,\ a + \overline{k+r}\,h) \tag{299}$$

Беручи на увагу ці факти, а також інтегральні співвідношення між самими функціями $\varkappa_\mu(\xi)$ ($\mu = 2k+1, \ldots, 2k+2r+2$), які мають місце на основі (34) (де $\alpha_\mu(\xi) \equiv -\varkappa_{\mu+1}(\xi)$, $\mu = 2k, 2k+1, \ldots, 2k+2r$), та спираючись

---

[1]) Слід урахувати, що $\varkappa_{2k+1}(\xi)$ анулюється на обох кінцях сегмента (291), як це безпосередньо показують вирази (293) та (294).

на лему III рубрики (b) (випадки 1 та 3), бачимо насамперед, що, оскільки функція $\overline{\varkappa}_{2k+1}^{(2k)}(\xi)$, яка є сталою на кожному з інтервалів (299), не може мати на сегменті (291) більше ніж $2k+2r-1$ істотних змін знаку, то функції

$$\varkappa_{2k+1}^{(2k-1)}(\xi),\quad \varkappa_{2k+1}^{(2k-2)}(\xi),\ldots,\varkappa_{2k+1}'(\xi)$$

мають відповідно не більше як $2k+2r-2$, $2k+2r-3,\ldots,2r$ змін знаку на сегменті (291), отже, остання з цих функцій має щонайбільше r змін знаку на кожному з двох інтервалів (292); далі — що функція $\varkappa_{2k+1}(\xi)$ має таксамо щонайбільше r змін знаку на кожному з цих двох інтервалів, отже — щонайбільше $2r+1$ змін знаку на цілому сегменті (291); нарешті — що функції

$$\varkappa_{2k+2}(\xi),\ \varkappa_{2k+3}(\xi),\ldots,\varkappa_{2k+2r+2}(\xi)$$

мають відповідно не більше як $2r$, $2r-1,\ldots,0$ змін знаку на сегменті (291), що й завершує доведення для випадку формул числового диференціювання, що виводяться із розкладів (286).

У випадку розкладів (287) доведення здійснюється так само. Щодо цікавих для нас виразів остаткових членів обох розглядуваних груп формул, то, як легко бачити, представлення типу (46″) набирають тут вигляду

$$(-1)^{r+1}p_{2k,r+1}h^{2r+2}f^{(2k+2r+2)}(\xi)$$

для формул, що виводяться із (286), та

$$(-1)^{r+1}q_{2k-1,r+1}h^{2r+2}f^{(2k+2r+1)}(\xi)$$

для формул, що виводяться із (287), при чому, наприклад, в першому випадку ξ міститься всередині сегмента (291). Зокрема варто відмітити випадок $r=0$. Зробивши всі обчислення, приходимо тут до такої формули:

$$\left.\begin{array}{c} f^{(s)}(x)=\dfrac{\delta^s f(x)}{h^s}-\dfrac{s}{24}h^2 f^{(s+2)}(\xi)\,^{*)} \\[2ex] \left(x-\dfrac{s}{2}h<\xi<x+\dfrac{s}{2}h\right) \end{array}\right\} \qquad (300)$$

яка має силу однаково при паристих та непаристих значеннях s.

Аналогічно трактуються й випадки розкладів (288) та (289), при чому тут, оцінюючи насамперед можливу кількість змін знаку функцій $\overline{\varkappa}_{2k}^{(2k-1)}(\xi)$ у випадку формул, що виводяться із (288), та функцій $\overline{\varkappa}_{2k+1}^{(2k)}(\xi)$ у випадку формул, що виводяться із (289), необхідно взяти на увагу паристість

---

*) $$\delta^s f(x)=f\left(x+\frac{s}{2}h\right)-\binom{s}{1}f\left(x+\overline{\frac{s}{2}-1}\,h\right)+$$
$$+\binom{s}{2}f\left(x+\overline{\frac{s}{2}-2}\,h\right)-\ldots+(-1)^s f\left(x-\frac{s}{2}h\right)$$

$\overline{\varkappa}_{2k}^{(2k-1)}(\xi)$ (як функцій від $\xi - a$) та непаристість $\overline{\varkappa}_{2k+1}^{(2k)}(\xi)$ (як функцій від $\xi - a + \frac{1}{2}h\Big)$.

Користуючись розглядуваними формулами наближеного диференціювання для того, щоб визначати значення похідних різних порядків для ряду еквідистантних значень

$$x = a,\ a \pm h,\ a \pm 2h, \ldots$$

чи то

$$x = a + \frac{1}{2}h,\ \ a + \frac{1}{2}h \pm h,\ \ a + \frac{1}{2}h \pm 2h, \ldots,$$

можна далі обчисляти значення тих самих похідних в проміжних точках шляхом інтерполяційним, при чому обидва етапи обчислення допускатимуть оцінку остаткових членів з допомогою виразів типу (46″). Якби ми захотіли обчисляти наближені значення похідних різних порядків в проміжних точках б е з п о с е р е д н і м диференціюванням формул Стірлінга або Бесселя, то, як легко переконатися, представлення остаткових членів відповідних формул у вигляді (46″) с т а є н е м о ж л и в и м п р и д о в і л ь н о м у д о б о р і з г а д а н и х п р о м і ж н и х точок. Справді, припустімо, що, наприклад, наближене значення $f^{(2k)}(x)$ обчисляють для довільних значень, проміжних між $x = a$ та $x = a + h$, диференціюючи $2k$ разів (по x) $2k + 2r + 1$ - членний відрізок інтерполяційного ряду (S). П о р я д о к т о ч н о с т і [рубрика (a)] одержуваної таким чином формули наближеного диференціювання, при довільному x, буде уже, очевидно, не $2k + 2r + 1$, як це було при $x = a$, а лише $2k + 2r$. Відповідна функція $\varkappa_{2k+2r+1}(\xi; t)$ для д о с и т ь м а л и х значень t відрізнятиметься скільки завгодно мало від функції $\varkappa_{2k+2r+1}(\xi;\ 0) = \varkappa_{2k+2r+1}(\xi)$, про яку була мова вище, отже, матимемо (для досить малих значень t) напевне принаймні

$$2k + 2r + 2 - (2k + 2r + 1),$$

себто 1 зміну знаку на сегменті (291), що й доводить справедливість нашого твердження.

Інститут Математики
Академії Наук УРСР
Київ

Одержано 3.VIII. 1939

О некоторых классах линейных функционалов в пространствах C_p и об остаточных членах формул приближенного анализа

(Сообщение II)

Е. Я. Ремез

РЕЗЮМЕ

В этой части работы, после установления нескольких вспомогательных предложений [рубрика (b)], дается приложение общего метода исследования остаточных членов, основания которого изложены в предыдущем сообщении, к ряду конкретных случаев. Наряду с некоторыми иллюстративными примерами здесь приводятся новые результаты, касающиеся оценок различных формул приближенного анализа. В частности, здесь впервые, по-видимому, указываются простые и точные оценки остаточных членов таких общеупотребительных формул, как суммационно-квадратурная формула Лапласа с внутренними ординатами, формулы квадратур Чебышева, формулы приближенного диференцирования, выводимые из интерполяционных рядов Стирлинга и Бесселя.

Sur certaines classes de fonctionnelles linéaires dans les espaces C_p et sur les termes complémentaires des formules d'analyse approximative

(Communication II) [1])

Par *E. Rémès*

RÉSUMÉ

Après avoir établi quelques propositions auxiliaires (section b), j'applique ici à divers cas concrets la méthode générale pour l'investigation des termes complémentaires, dont les fondements ont été exposés dans la communication précédente. A côté de certains exemples explicatifs, on trouve ici de nouveaux résultats concernant les évaluations des termes complémentaires de différentes formules de l'analyse approximative. En particulier, ici sont indiquées pour la première fois, à ce qu'il paraît, des évaluations simples ainsi qu' exactes pour les termes complémentaires de telles formules largement usitées comme la formule sommatoire et de quadratures de Laplace à ordonnées intérieures, comme les formules de quadratures de Tchebycheff, comme les formules de différentiation approximative déduites des séries d'interpolation de Stirling et Bessel.

---

[1]) La première partie de cet article a paru dans Les Travaux de l'Institut Mathématique de l'Académie des Sciences de la RSS d'Ukraine, 1939, № 3. v. aussi la note de l'auteur dans les Comptes-Rendus (Doklady) de l'Acad. des Sc. de l'URSS, 1940, t. XXVI, № 2.