№ 4 ЗБІРНИК ПРАЦЬ ІНСТИТУТУ МАТЕМАТИКИ 1940
АКАДЕМІЇ НАУК УРСР

RECUEIL DES TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE LA RSS D'UKRAINE

Основні рівняння рівноваги пружних оболонок і деякі методи їх інтегрування

М. О. Кільчевський

ЧАСТИНА ПЕРША

ВСТУП

§ 1. Основна термінологія та позначення

Введемо спочатку основну термінологію та позначення.

Оболонкою в теорії пружності називають тіло, обмежене двома зовнішніми паралельними поверхнями (у випадку оболонки сталої товщини) та контурною поверхнею. Утворення контурної поверхні вказано нижче. Зовнішні поверхні припускаються вільними від особливих точок і, отже, такими, що мають в кожній точці одну дотичну площину. Відстань між зовнішніми поверхнями будемо позначати через $2h$. Цю відстань покладаємо настільки малою порівнюючи з рештою розмірів, що членами порядку вищого від h^3 можна нехтувати.

В дальшому ми в деякій мірі уточнимо припущення про малість h і дамо йому певне механічне обгрунтування.

Серединною (середньою) поверхнею оболонки ми будемо звати поверхню, яка лежить між зовнішніми поверхнями на рівних відстанях між ними. Ця поверхня відіграє основну роль в теорії оболонок.

Простір в оболонці ми арифметизуємо з допомогою координатної сітки x^1, x^2 та $x^3=z$, при чому координатні лінії $x^1=c_1$ та $x^2=c_2$ в серединній поверхні збігаються з лініями кривини, x^3 місцевого координатного базису в недеформованій оболонці напрямимо по нормалі до серединної поверхні. Масштаб на цій осі покладемо рівним одиниці.

Границю серединної поверхні назвемо контуром оболонки. Геометричне місце нормалей до недеформованої серединної поверхні, проведених в точках контура, звемо контурною поверхнею.

Повернемося до питання про величину h. Щоб одержати більш точне поняття про величину h, приймемо один з основних габаритних розмірів оболонки за одиницю виміру для всієї решти лінійних розмірів. Якщо кривини серединної поверхні відрізняються від нуля, можна як основний розмір вибрати, наприклад, менший радіус кривини. У випадку пластинки кривини серединної поверхні дорівнюють нулю. Тоді за основний розмір можна вибрати будьяку величину, що в середньому характеризує розміри срединної площини. Ми припускаємо, що при такому виборі одиниць товщина оболонки виражається правильним дробом [1]). Для простоти ми в дальшому будемо припускати що проведено вказаний вибір одиниць, хоч це і не є необхідним. Щождо збереження всіх величин аж до величини порядку h^3 включно, то це знайде своє пояснення в їх механічному характері. Нижче буде показано, що моменти сил пружності, які виникають при переносі векторів напруження до серединної поверхні, мають порядок не нижчий від порядку h^3. Тому, враховуючи вплив моментів, ми не маємо права нехтувати членами порядку h^3.

§ 2. Визначення основної задачі даного дослідження

В цій роботі ми маємо намір дослідити два питання теорії оболонок.

Поперше, ми розглянемо основні спрощуючі припущення про механічну суть всієї задачі в цілому, які дозволяють тримірну задачу теорії пружності звести до двомірної. Ми покажемо, що в ряді випадків спрощуючі припущення недостатньо обгрунтовані і через те можуть привести до неправильних остаточних висновків.

Користуючись загальними методами тензорного аналізу, ми дістанемо загальну еластостатичну систему рівнянь теорії оболонок. З цієї системи, як окремі випадки, можна одержати рівняння сучасної теорії оболонок, наведені в різних працях. Зокрема, ми зупинимося на аналізі робіт Лява, Зандена і Тельке, Флюгге, Донелла і Краусса [2]). Ми вкажемо на відсутність ряду членів у рівняннях Зандена і Тельке та Флюгге без відповідного достатнього обгрунтування. Таксамо стане зовсім ясним наближений характер рівнянь Лява і з'ясуються границі, в яких можна застосовувати його теорію. Далі ми дослідимо питання про безпосередній зв'язок між рівняннями теорії оболонок та загальними рівняннями теорії пружності. При цьому з'ясується, що, взагалі кажучи, після зведення тримірної задачі до двомірної, ми дістаємо несумісну систему диференціальних рівнянь в переміщеннях серединної поверхні. Отже, дальший розвиток задачі може полягати у відшуканні найкращого наближення з цієї системи несумісних рівнянь в тому або іншому розумінні (в розумінні методу найменших квадратів, в розумінні Чебишова і т. д.). Це питання не розглянуто докладно в даній роботі і буде темою окремого дослідження. Раніш, наскільки нам відомо, воно не ставилося. Виявлення механічного змісту задачі, крім самостійного теоретичного інтересу, необхідне для розв'язання другого питання теорії оболонок.

---

[1]) Наприклад для купола планетарія в Дрездені маємо: радіус кривини $R = 14{,}76$ *м.*, $h = 2$ *см* $= 0{,}02$ *м.* Відношення $\dfrac{h}{R} = h_1 \cong 0{,}001$ (Ф. Дишингер „Оболочки, тонкостенные купола и своды", Госстройиздат, 1932). Часто вважають, що це „характеристичне відношення" не повинне перевищувати $^1/_5$.

[2]) Загальний список літератури буде наведений в кінці роботи.

Другим по порядку (але не по значенню) питанням теорії оболонок є питання про інтегрування еластостатичної системи рівнянь. Ми не будемо зупинятися докладно на повчальній історії цього питання — вона висвітлена в достатній мірі в ряді досліджень [1]).

Зауважимо тільки, що коли вважати фізичні припущення про умови рівноваги пружних оболонок, які приводять до певної еластостатичної системи рівнянь, недостатньо обгрунтованими, то ще в більшій мірі це стосується теорії інтегрування відповідних рівнянь, побудованої на цілій низці додаткових припущень.

Наприклад, теорія Мейсснера (Meissner) спирається в основному на рівняння, знайдені Лявом, та застосовує точні методи інтегрування, але при цьому нехтує членами порядку $\frac{h}{R}$, де R — один з радіусів кривини серединної поверхні [2]). Отже, точність остаточних результатів відносно невелика, хоч і достатня для вивчення ряду практично важливих задач.

Метод асимптотичного інтегрування був застосований Рейсснером і Блюменталем в 1912 році до вивчення напруг в сферичній оболонці. Далі він був поширений І. Я. Штаєрманом на оболонки обертання довільного обрису (1925). Цим самим питанням займався Геккелер, проте, його результати, опубліковані на рік пізніше, ніж результати І. Я. Штаєрмана, поступаються перед останніми точністю. Взагалі кажучи, „точні" результати, одержані школою Мейсснера, мало відрізняються точністю від результатів, одержаних за допомогою методу асимптотичного інтегрування. За допомогою методу Мейсснера були розглянуті такі окремі задачі, які зводяться до розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь. Мейсснером та його учнями розглянуті сферичні оболонки, циліндричні, тороідальні і конічні. У всіх цих випадках загальна система рівнянь зводиться до двох незалежних диференціальних рівнянь другого порядку.

Особливістю всіх праць по інтегруванню еластостатичної системи рівнянь є надмірна спеціалізація методів, що не дає можливості значно поширити границі їх застосовності. Найбільш загальним методом є, безумовно, метод асимптотичного інтегрування, але і він головним чином застосовується до оболонок обертання.

В нашій роботі ми розвиваємо загальний метод розв'язання задачі, що базується на зведенні останньої до розв'язання деякої системи інтегральних рівнянь. Це дозволяє в дальшому скористуватися деякими методами апроксимації функцій (наприклад, методом найменших квадратів), для одержання наближених розв'язків. Зведення до системи інтегральних рівнянь нерозривно зв'язане з загальною механічною теорією деформацій оболонки, розвинутою на початку роботи. Ця теорія дозволяє побудувати ядра інтегральних рівнянь, які за своїм фізичним змістом уявляють із себе

---

[1]) Див., наприклад, статтю проф. І. Я. Штаєрмана „Об интегрировании диференциальных уравнений равновесия упругих оболочек" (Вісті КПІ, книга 2, 1927).

[2]) І. Я. Штаєрман „О приложении методов интерполяции к приближенному интегрированию диференциальных уравнений равновесия упругих оболочек" (Вісті К. П. І. кн. 2, 1927).

пружну реакцію серединної поверхні, еквівалентну деякій узагальненій одиничній силі, прикладеній до оболонки.

Ймовірно, що існуючі наближені розв'язки задач теорії оболонок випливають з основної системи інтегральних рівнянь, якщо провести в них заміну ядер їх певними наближеними значеннями, що відповідають деяким методам апроксимації функцій. Докладне вивчення зазначеного питання в цій роботі не виконане.

Підсумовуючи все сказане, остаточно визначимо задачі, поставлені в цій роботі так: 1) вивчити загальну механічну схему роботи оболонки, що відрізняє її від решти задач теорії пружності; скласти по можливості загальну систему еластостатичних рівнянь і 2) вказати на деякі загальні методи інтегрування еластостатичної системи рівнянь, придатні по можливості для більшого обсягу окремих випадків. Розв'язання цих питань дозволить перевірити існуючі теорії оболонок та відповідні їм рівняння, а також знайти новий напрям в теорії інтегрування еластостатичної системи.

Ми розглядаємо головним чином лінійну задачу, що спирається на лінійний закон Гука. Вивчення деформацій оболонок за границями пропорціональності і теорія великих деформацій в основному виходять за межі даного дослідження. Деякі висновки відносно рівнянь теорії оболонок з урахуванням нелінійних членів все ж включені у нашу працю.

§ 3. Основні рівняння теорії пружності в інваріантній формі

Наведемо для довідок основні рівняння теорії пружності в інваріантній формі.

Рівняння рівноваги суцільного середовища має вигляд:

$$\nabla_k \tau^{ik} + \rho F^i = 0 \tag{a}$$

(∇_k — коваріантна похідна, τ^{ik} — компоненти тензора напружень, F^i — компоненти масових сил).

Закон Гука можна записати так:

$$\tau^{ik} = \left(\frac{1}{2}\lambda g^{ik} g^{\alpha\beta} + \mu g^{i\alpha} g^{k\beta}\right) D_{\alpha\beta} \tag{b}$$

(λ, μ — пружні сталі Ляме, $g^{\rho\sigma}$ — контраваріантні компоненти метричного тензора, $D_{\alpha\beta}$ — компоненти тензора деформації)

$$D_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha \tag{c}$$

u_ρ — компоненти вектора переміщень).

Вводячи (c) до (b) і (b) до (a), дістанемо рівняння рівноваги пружного тіла в переміщеннях:

$$\mu g^{i\alpha} g^{k\beta} \nabla_k \nabla_\beta u_\alpha + (\lambda + \mu) g^{ik} g^{\alpha\beta} \nabla_k \nabla_\alpha u_\beta + \rho F^i = 0. \tag{d}$$

$$(i,\ k,\ \alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3)$$

При цьому ми користувалися теоремою Річчі (Ricci) та, припускаючи простір всередині оболонки евклідовим, прирівняли нулю компоненти тензора кривини.

Рівняння (d) в ортогональних координатах спрощуються та набирають вигляду:

$$\mu g^{ii} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_i + (\lambda + \mu) g^{ii} g^{\alpha\alpha} \nabla_i \nabla_\alpha u_\alpha + \rho F^i = 0 \tag{e}$$

$$(i, \ \alpha = 1, \ 2, \ 3)$$

або інакше:

$$\mu g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_i + (\lambda + \mu) g^{\alpha\alpha} \nabla_i \nabla_\alpha u_\alpha + \rho F_i = 0 \tag{f}$$

$$(i, \ \alpha = 1, \ 2, \ 3)$$

РОЗДІЛ І

УЗАГАЛЬНЕНА КЛАСИЧНА ТЕОРІЯ ОБОЛОНОК

§ 1. Основні геометричні співвідношення

Для дальших досліджень нам необхідно розглянути два питання: а) зв'язок метричного тензора недеформованої оболонки в довільній точці $M(x^1, x^2, x^3)$ з метричним тензором у відповідній точці серединної поверхні $M_1(x^1, x^2, 0)$ і b) зв'язок між тензорними величинами, визначеними в довільній точці оболонки і еквівалентними їм величинами в серединній поверхні.

Поняття еквівалентності нами встановлюється на основі загальної теорії паралельного перенесення тензорів, що належить Т. Леві-Чівіта.

Припустімо, що недеформована серединна поверхня арифметизована з допомогою координатної сітки, що збігається з її лініями кривини, як було вказано у Вступі. Дві осі місцевого координатного триедра будуть напрямлені по дотичних до ліній кривини, третя вісь — по нормалі до серединної поверхні, утворюючи з першими двома осями праву систему координат. Масштаб по третій осі в недеформованій оболонці, як уже було вказано, припускаємо рівним одиниці.

Нехай векторне рівняння недеформованої серединної поверхні буде:

$$\bar{r} = \bar{r}(x^1, \ x^2) \tag{1}$$

де $\bar{r}$ — радіус-вектор точки на серединній поверхні. В цьому випадку тангенціальна частина метричного тензора на недеформованій серединній поверхні визначається так:

$$g_{11} = (\bar{r}_{x^1}, \bar{r}_{x^1}); \ g_{22} = (\bar{r}_{x^2}, \bar{r}_{x^2}); \ g_{12} = (\bar{r}_{x^1}, \bar{r}_{x^2}) = 0, \tag{2}$$

де

$$\bar{r}_{x^i} = \partial_i \bar{r}$$

Аналогічно визначається метричний тензор на поверхні, паралельній до серединної. Рівняння такої поверхні має форму:

$$\bar{r}^z = \bar{r} + z\bar{q} \tag{3}$$

($\bar{r}^z$ — радіус-вектор точки, яка знаходиться на віддалі z від серединної поверхні, $\bar{q}$ — одиничний орт нормалі до серединної поверхні).

Прийнявши до уваги формули Родріга:

$$\partial_i \bar{q} = - k_i \partial_i \bar{r},$$

де

$$k_i = \frac{1}{R_i}$$

одна з головних кривин серединної поверхні, а також формули (2), заміняючи в останніх радіус-вектор серединної поверхні на радіус-вектор $\bar{r}^z$ (ф-ла 3), дістанемо:

$$g_{ii}^z = g_{ii}(1 - zk_i)^2 \tag{4}$$

На основі цієї формули можна визначити похідні від компонентів тангенціальної частини метричного тензора по координаті z при $z = 0$:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\partial g_{ii}^z}{\partial z} = -2k_i g_{ii} \tag{5}$$

$$(i = 1, 2)$$

Формули (4) — (5) розв'язують перше з двох поставлених питань. Переходимо до розгляду другого. В дальшій роботі ми будемо зустрічатися з тензорними величинами, визначеними в криволінійних системах координат. Тому в дальшому широко використаємо операцію паралельного перенесення векторів, вперше встановлену Т. Леві-Чівіта. Як відомо, при нескінченно малому перенесенні компоненти контраваріантного вектора набирають приростів:

$$dA^i = -\Gamma_{\lambda h}^i A^\lambda dx^h, \tag{6}$$

де $\Gamma_{\lambda h}^i$ — відомі з диференціальної геометрії символи Крістофеля 2-го роду:

$$\Gamma_{\lambda h}^i = \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial g_{kh}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{kh}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda h}}{\partial x^k} \right)$$

Приріст вектора на скінченному переміщенні залежить від путі перенесення [1]). Тому умовмося надалі при перенесенні всіх величин до серединної поверхні переносити їх, рухаючи вздовж координатних ліній x^3 Тоді питання зводиться до інтегрування системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$dA^i = -A^\lambda \Gamma_{\lambda 3}^i dx^3 \tag{6a}$$

де величини A^λ задані в точці з координатою $x^3 = z$. Цій системі диференціальних рівнянь з указаними початковими умовами відповідає система інтегральних рівнянь:

$$A^i(t) = A^i(z) + \int_t^z A^\lambda(\xi) \Gamma_{\lambda 3}^i(\xi) d\xi \tag{6b}$$

Застосуємо тепер спосіб послідовних наближень, покладаючи спочатку в правій частині

$$A^\lambda(\xi) = A^\lambda(z)$$

[1]) Далі можна було б використати припущення про те, що простір в оболонці — евклідів. Але це не спростило б одержання наступних формул.

Знайдемо перше наближення:

$$A^i_{(1)}(t) = A^i(z) + A^\lambda(z) \int_t^z \Gamma^i_{\lambda 3}(\xi)\, d\xi$$

Підставимо знов в праву частину рівняння (6b), замість

$$A^\lambda(\xi),\ A^\lambda_{(1)}(\xi)$$

Знайдемо:

$$A^i_{(2)}(t) = A^i(z) + A^\lambda(z) \int_t^z \Gamma^i_{\lambda 3}(\xi)\, d\xi + A^\rho(z) \int_t^z \int_\xi^z \Gamma^\lambda_{\rho 3}(\xi_1)\, \Gamma^i_{\lambda 3}(\xi)\, d\xi_1\, d\xi$$

Продовжуючи цей процес, одержимо після деяких перестановок індексів, покладаючи $t = 0$:

$$A^i(0) = A^i(z) = A^\lambda(z)\, \Phi^i_\lambda, \tag{7}$$

де

$$\Phi^i_\lambda = \int_0^z \Gamma^i_{\lambda 3}(\xi)\, d\xi + \int_0^z \int_\xi^z \Gamma^{\lambda_1}_{\lambda 3}(\xi_1)\, \Gamma^i_{\lambda_1 3}(\xi)\, d\xi_1\, d\xi + \ldots =$$

$$= \int_0^z \Gamma^i_{\lambda 3}(\xi)\, d\xi + \int_0^z \int_0^{\xi_1} \Gamma^{\lambda_1}_{\lambda 3}(\xi_1)\, \Gamma^i_{\lambda_1 3}(\xi)\, d\xi_1\, d\xi + \ldots \tag{7a}$$

Цілком аналогічно можна розглянути перенесення коваріантного вектора до серединної поверхні з точки з координатою $x^3 = z$. Знайдемо:

$$A_i(0) = A_i(z) - A_\lambda(z)\, \Phi^\lambda_i, \tag{8}$$

де

$$\Phi^\lambda_i = \int_0^z \Gamma^\lambda_{i3}(\xi)\, d\xi - \int_0^z \int_0^{\xi_1} \Gamma^\lambda_{\lambda_1 3}(\xi_1)\, \Gamma^{\lambda_1}_{i3}(\xi)\, d\xi_1\, d\xi + \ldots \tag{8a}$$

Дослідимо збіжність одержаних рядів. Розглянемо ряд (7a). Нехай

$$M = \max \left| \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \right| \text{ и } \max |z| = h,$$

Тоді знайдемо:

$$\Phi^i_\lambda \leqslant Mh + 3\frac{M^2 h^2}{2!} + 3^2 \frac{M^3 h^3}{3!} + \ldots$$

Звідси випливає, що ряд для Φ^i_λ абсолютно збігається, тому що відношення наступного члена до попереднього, яке дорівнює $\frac{3Mh}{n}$, прямує до нуля при зростанні n. Аналогічне дослідження показує збіжність ряду (8a).

На закінчення зауважимо, що величини Φ не є компонентами векторної величини у звичайному розумінні цього слова, тому що вони не зв'язані з певною точкою простору. Ці величини дозволяють провести перетворення тензорних функцій, визначених в будьякій точці оболонки, на величини, визначені в метриці на серединній поверхні.

§ 2. Зведення деформацій до серединної поверхні

Основна задача теорії оболонок полягає у визначенні деформованого та напруженого стану серединної поверхні, яка ніби замінює тримірну оболонку. Для розв'язання цієї задачі необхідно, поперше, визначити тензор деформації в різних точках оболонки через переміщення серединної поверхні і, подруге, пов'язати напруження в різних точках оболонки з силами, умовно прикладеними до серединної поверхні та їм еквівалентними. Розглянемо спочатку першу задачу. Шукані вирази для компонентів тензора деформації ми дістанемо, розкладаючи тензор деформації, що відноситься до точки з координатою $x^3 = z$ в ряд Тейлора. Необхідно окремо підкреслити, що для одержання розкладу, що дає можливість визначити тензор деформації в метриці простору на серединній поверхні, необхідно у звичайній формулі Тейлора замінити звичайні частинні похідні на абсолютні (коваріантні), тому що вказана дія пов'язана з паралельним перенесенням тензора деформації в розумінні Леві-Чівіта.

Позначаючи через $(\Delta r)^\alpha$ компоненти вектора переміщення між точкою $M(x', x^2, z)$ та точкою $M_0(x', x^2, 0)$ на серединній поверхні, дістанемо шуканий розклад. Він матиме вигляд:

$$D^z_{ik} = D_{ik} + \nabla_\mu D_{ik} (\Delta r)^\mu + \frac{1}{2!} \nabla_\nu \nabla_\mu D_{ik} (\Delta r)^\mu (\Delta r)^\nu + \ldots \tag{9}$$

(∇_λ — символ коваріантної похідної, D^z_{ik} і D_{ik} — компоненти тензора деформації в точці з координатою z і на серединній поверхні). Тензор деформації ми визначимо, нехтуючи нелінійними членами, як симетричну частину подвоєної коваріантної похідної від вектора переміщення. Компоненти тензора деформації матимуть вигляд:

$$D_{ik}(x^1, x^2, z) = \nabla_i u_k (x^1, x^2, z) + \nabla_k u_i (x^1, x^2, z), \tag{10}$$

при чому коваріантні похідні обчислені в метриці недеформованої оболонки. Візьмемо далі до уваги, що

$$(\Delta r)^1 = (\Delta r)^2 = 0; \; (\Delta r)^3 \overset{*}{=} z \; ^{*)} \tag{11}$$

Формула (9) набирає вигляду:

$$D^z_{ik} \overset{*}{=} D_{ik} + z \nabla_3 D_{ik} + \frac{1}{2} z^2 \nabla_3 \nabla_3 D_{ik} + \ldots \tag{11}$$

Знаком $\overset{*}{=}$ відмічено обставину, що рівність (11) залишається інваріантною лише при перетвореннях координат x^1 та x^2. В загальному випадку інваріантною буде тільки рівність (9). Зауважмо також, що вираз

$$z^m \underbrace{\nabla_3 \ldots \nabla_3}_{m \text{ раз}} D_{ik}$$

є компонентом тензора 2-го рангу при перетвореннях координат x^1 та x^2. В загальному випадку цей член перетворюється, як третій член в правій частині формули (9).

---

*) Тут ми нехтуємо деформацією оболонки. Точніші вирази для $(\Delta \bar{r})^i$ наведені в § 4. ч. II

Позначмо D^z_{ii} через $2\varepsilon^z_i$, D^z_{ik} (якщо $i \neq k$)—через γ^z_{ik}. Очевидно, ε^z_i характеризують відносні розтяги в напрямах відповідних координатних ліній, γ^z_{ik} — характеризують відносні зсуви. Підставляючи в (11) вираз (10), змінюючи порядок операцій ∇_λ і $z\nabla_3$ *) помітивши, що функція

$$z^m \underbrace{\nabla_3 \ldots \nabla_3}_{m \text{ раз}} u_\lambda$$

є компонентом коваріантного вектора, дістанемо:

$$\varepsilon^z_1 = \partial_1 u_1 - \Gamma^1_{11} u_1 - \Gamma^2_{11} u_2 - g_{11} k_1 u_3 + z\,[\partial_1 (\partial_3 u_1 + k_1 u_1) - \Gamma^1_{11} (\partial_3 u_1 + k_1 u_1) -$$
$$- \Gamma^2_{11} (\partial_3 u_2 + k_2 u_2) - g_{11} k_1 \partial_3 u_3] + \ldots \qquad (12a)$$

$$\varepsilon^z_2 = \partial_2 u_2 - \Gamma^1_{22} u_1 - \Gamma^2_{22} u_2 - g_{22} k_2 u_3 + z\,[\partial_2 (\partial_3 u_2 + k_2 u_2) - \Gamma^1_{12} (\partial_3 u_1 + k_1 u_1) -$$
$$- \Gamma^2_{22} (\partial_3 u_2 + k_2 u_2) - g_{22} k_2 \partial_3 u_3] + \ldots \qquad (12b)$$

$$\varepsilon^z_3 = \partial_3 u_3 + z\,\partial^2_3 u_3 + \ldots \qquad (12c)$$

$$\gamma^z_{12} = \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 - 2\Gamma^1_{12} u_1 - 2\Gamma^2_{12} u_2 + z\,[\partial_1 (\partial_3 u_2 + k_2 u_2) + \partial_2 (\partial_3 u_1 + k_1 u_1) -$$
$$- 2\Gamma^1_{12} (\partial_3 u_1 + k_1 u_1) - 2\Gamma^2_{12} (\partial_3 u_2 + k_2 u_2)] + \ldots \qquad (12d)$$

$$\gamma^z_{13} = \partial_3 u_1 + \partial_1 u_3 + 2k_1 u_1 + z\,[\partial_3 (\partial_3 u_1 + k_1 u_1) + \partial_1 \partial_3 u_3 +$$
$$+ 2k_1 (\partial_3 u_1 + k_1 u_1)] + \ldots \qquad (12e)$$

$$\gamma^z_{23} = \partial_3 u_2 + \partial_2 u_3 + 2k_2 u_2 + z\,[\partial_3 (\partial_3 u_2 + k_2 u_2) + \partial_2 \partial_3 u_3 +$$
$$+ 2k_2 (\partial_3 u_2 + k_2 u_2)] + \ldots \qquad (12f)$$

Коефіцієнтами при z в цих розкладах є значення відповідних функцій (символів Крістофеля, компонентів переміщення та їх похідних), при $z = 0$ (на серединній поверхні). Все ж ці розклади не дозволяють звести загальну тримірну задачу до двомірної, тому що вони містять в своєму складі похідні по третій координаті x^3. Дальша задача полягатиме в заміні цих похідних функціями від самих переміщень та їх похідних по координатах x^1 та x^2. Істотною додатковою умовою для розв'язання цієї задачі є умова про те, що розв'язок не повинен містити операції інтегрування.

§ 3. Основні формули зведення тримірної задачі до двомірної. Узагальнення гіпотези Кірхгофа

Зведення тримірної задачі до двомірної, як ми могла бачити вище, повинне зводитися до деяких додаткових обмежень, що накладаються на похідні від переміщень по третій координаті x^3 і які дозволяють виразити ці похідні через значення самих функцій u_i та значення їх похідних по координатах x^1 і x^2 при $x^3 = 0$ (на серединній поверхні). Одним із способів зведення є гіпотеза Кірхгофа про те, що нормальний до серединної

*) Тут і в дальшому ми покладаємо, що тензор Рімана-Крістофеля дорівнює нулю.

поверхні недеформованої оболонки елемент залишається нормальним і до деформованої поверхні, не змінюючи своєї довжини [1]). Це припущення відіграє в теорії оболонок роль гіпотези плоских перерізів в теорії балок. В наслідок своєї простоти та задовільного збігу з експериментальними даними для ряду випадків, гіпотеза Кірхгофа дістала велике поширення. Гіпотеза Кірхгофа приводить до рівностей:

$$\varepsilon_3^z = 0, \quad \gamma_{13}^z = 0, \quad r_{23}^z = 0,$$

які дають можливість розв'язати задачу зведення без інтегрування.

Дійсно, ці рівності будьякого значення координати x^3 мають вигляд:

$$\partial_3 u_3 = 0 \tag{13a}$$

$$\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3 + 2k_1 u_1 = 0 \tag{13b}$$

$$\partial_1 u_2 + \partial_2 u_3 + 2k_2 u_2 = 0 \tag{13c}$$

Звідси знаходимо:

$$\partial_3 u_1 = -\partial_1 u_3 - 2k_1 u_1 \tag{13d}$$

$$\partial_3 u_2 = -\partial_3 u_3 - 2k_2 u_2 \tag{13e}$$

Рівності (13d) та (13e) разом з рівністю (13a) розв'язують задачу зведення. Але, як відомо, гіпотеза Кірхгофа, взагалі кажучи, суперечить точковим умовам рівноваги на поверхні.

Справді, дві з цих умов в нашій системі координат мають вигляд:

$$\tau^{i3} = \mu\, g^{ii} g^{33} \gamma_{i3}^h = X^i \tag{14}$$

$$(i = 1, 2)$$

Отже гіпотеза Кірхгофа не суперечить умовам лише при $X^i = 0$. Крім того, вона надмірно обмежує шукані функції. Ляв узагальнив гіпотезу Кірхгофа, застосувавши загальні умови рівноваги. Але загального алгоритма розв'язання у Лява немає. Такий алгоритм був знайдений Крауссом, але він складний і в значній мірі залишає невикористаними точкові умови рівноваги всередині оболонки та на її поверхні. Переходячи до розв'язання поставленої задачі, зауважимо, що умови рівноваги пружного тіла в переміщеннях (див. Вступ, рівняння III) дають можливість визначити для кожного значення z коваріантні похідні другого порядку по координаті $x^3 = z$ від компонентів переміщення через похідні першого порядку по z, похідні по решті координат і самі функції u_i. Ці рівняння в припущеннях, розглянутих у Вступі, можна написати в такій формі:

$$\mu \nabla_3 \nabla_3 u_i + (\lambda + \mu) g^{\alpha\alpha} \nabla_i \nabla_\alpha u_\alpha + \mu g^{\beta\beta} \Delta_\beta \nabla_\beta u_i + \rho F_i = 0 \tag{15a}$$

$$(i = 1, 2;\ \alpha = 1, 2, 3;\ \beta = 1, 2) \qquad (\text{По } i \text{ не підсумовуємо!})$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla_3 \nabla_3 u_3 + (\lambda + \mu) g^{\alpha\alpha} \nabla_3 \nabla_\alpha u_\alpha + \mu g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_3 + \rho F_3 = 0 \tag{15b}$$

$$(\alpha = 1, 2)$$

---

[1]) Остання обставина звичайно не застерігається. В теорії пластинок вона зайва.

З цих рівнянь дістаємо:

$$\nabla_3 \nabla_3 u_i \overset{*}{=} -\frac{\lambda+\mu}{\mu} g^{\alpha\alpha} \nabla_i \nabla_\alpha u_\alpha - g^{\beta\beta} \nabla_\beta \nabla_\beta u_i - \frac{\rho}{\mu} F_i \tag{16a}$$

$(i=1, 2;\ \alpha=1, 2, 3;\ \beta=1, 2)$ (По i не підсумовуємо!)

$$\nabla_3 \nabla_3 u_3 \overset{*}{=} -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \nabla_3 u_\alpha - \frac{\mu}{\lambda+2\mu} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_3 - \frac{\rho}{\lambda+2\mu} F_3 \tag{16b}$$

$(\alpha=1, 2)$

Далі, диференціюючи знайдені рівності, дістаємо:

$$\nabla_3 \nabla_3 \nabla_3 u_i \overset{*}{=} -\frac{\lambda+\mu}{\mu} \left(g^{\alpha\alpha} \nabla_i \nabla_\alpha \nabla_3 u_\alpha + \nabla_i \nabla_3 \nabla_3 u_3\right) -$$

$$- g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\alpha \nabla_3 u_i - \frac{\rho}{\mu} \nabla_3 F_i$$

$(\alpha=1, 2;\ i=1, 2)$

$$\nabla_3 \nabla_3 \nabla_3 u_3 \overset{*}{=} -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \nabla_3 \nabla_3 u_\alpha - \frac{\mu}{\lambda+2\mu} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\alpha \nabla_3 u_3 -$$

$$- \frac{\rho}{\lambda+2\mu} \nabla_3 F_3$$

$(\alpha=1, 2)$

Підставляючи в одержані вирази значення других похідних $\nabla_3 \nabla_3 u_k$ з формул (16a)—(16b), дістанемо остаточні вирази для третіх похідних:

$$\nabla_3 \nabla_3 \nabla_3 u_i \overset{*}{=} g^{\alpha\alpha} \left[\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \left(\nabla_i \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_3 - \nabla_i \nabla_\alpha \nabla_3 u_\alpha\right) - \nabla_\alpha \nabla_\alpha \nabla_3 u_i \right] +$$

$$+ \frac{(\lambda+\mu)\rho}{\mu(\lambda+2\mu)} \nabla_i F_3 - \frac{\rho}{\mu} \nabla_3 F_i; \tag{17a}$$

$(\alpha=1, 2;\ i=1, 2)$

$$\nabla_3 \nabla_3 \nabla_3 u_3 \overset{*}{=} \frac{\lambda+\mu}{\mu} g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta} \nabla_\alpha \nabla_\alpha \nabla_\beta u_\beta + \frac{\lambda}{\mu} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\alpha \nabla_3 u_3 +$$

$$+ \frac{(\lambda+\mu)\rho}{\mu(\lambda+2\mu)} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha F_\alpha - \frac{\rho}{\lambda+2\mu} \nabla_3 F_3 \tag{17b}$$

$(\alpha, \beta=1, 2)$

При всіх цих обчисленнях ми припускали, що тензор Рімана –Крістофеля дорівнює нулю.

Аналогічно, диференціюючи рівняння (17a) — (17b) і застосовуючи повторно рівняння (16a)—(17b), можна знайти вираз для похідних довільної кратності через похідні, що містять в своєму складі оператор ∇_3 у порядку не вищому, ніж перший. Як видно з формул (16a)—(17b), рівняння рівноваги значно обмежують задачу про зведення вивчення тримірного деформованого та напруженого станів оболонки до вивчення двомірного напруженого і деформованого станів серединної поверхні. Для остаточного розв'язання цієї задачі треба ще визначити функції $(\nabla_3 u_i)_0$. Особливість питання полягає в тому, що це визначення треба провести без інтегрування. Розглянемо розклад компонентів тензора деформації D^z_{i3}, згідно з формулами (11):

$$D^z_{i3} = D_{0,i3} + z\, D_{1,i3} + \frac{1}{2} z^2\, D_{2,i3} + \ldots, \tag{18}$$

де

$$D_{0,i3} = (\nabla_3 u_i)_0 + (\nabla_i u_3)_0 \tag{18a}$$

Задача зведення буде розв'язана, якщо будуть знайдені коефіцієнти $D_{0,i3}$. Але неможливо безпосередньо визначити їх незалежно від решти коефіцієнтів.

Тому задача зведення—задача неозначена [1]). Власно кажучи, існує безліч способів зведення, які відповідають різним припущенням відносно коефіцієнтів $D_{0,i3}$.

Кірхгоф в теорії пластинок (як вже зазначалося вище) дорівнював ці коефіцієнти нулю, але цей найпростіший спосіб зведення в загальному випадку суперечить точковим умовам рівноваги на поверхні. Розглянемо один спосіб зведення, який якраз базується на використанні цих рівнянь рівноваги.

Обмежуючись у формулах (18) двома першими членами, використовуючи закон Гука теорії пружності (Вступ, ф-ла II), одержимо:

$$D_{0,i3} + h\, D_{1,i3} + \ldots \overset{*}{=} \frac{X_{(h)i}}{\mu} \tag{19a}$$

$$(\lambda + 2\mu)\, D_{0,33} + \lambda g^{\alpha\alpha} D_{0,\alpha\alpha} + h\,[(\lambda + 2\mu)\, D_{1,33} + \lambda g^{\alpha\alpha} D_{1,\alpha\alpha}] + \ldots = 2X_{(h)3}, \tag{19b}$$

$$(\alpha = 1,\ 2)$$

де $X_{(h)i}$ та $X_{(h)3}$ — компоненти вектора напружень при $z = h$, перенесені до серединної поверхні згідно з формулами (8); $g^{\alpha\alpha}$ — контраваріантні компоненти метричного тензора на серединній поверхні, λ та μ — коефіцієнти Ляме. З рівнянь (19a) та (19b) дістанемо перше наближення для $D_{0,i3}$:

$$D^{\mathrm{I}}_{0,i3} \overset{*}{=} \frac{1}{2\mu} (X_{(+h)i} + X_{(-h)i}) \tag{20a}$$

$$D^{\mathrm{I}}_{0,33} \overset{*}{=} \frac{1}{\lambda + 2\mu} (X_{(+h)3} + X_{(-h)3}) - \frac{\lambda g^{\alpha\alpha}}{\lambda + 2\mu} D_{0,\alpha\alpha}), \tag{20b}$$

$$(\alpha = 1, 2)$$

при чому

$$D_{0,\alpha\alpha} = 2\, (\nabla_\alpha u_\alpha)_0$$

[1]) Якщо використовувати лише рівняння (15a).

Користуючись виразами (20a)—(20b), як першими наближеннями, знайдемо на основі (18a):

$$(\nabla_3 u_i) = D^{\mathrm{I}}_{0,i3} - (\nabla_i u_3)_0 \quad (i = 1,\ 2) \tag{21a}$$

$$(\nabla_3 u_3)_0 = \frac{1}{2} D_{0,33} \tag{21b}$$

Покладаючи, що функції $D_{0,i3}$ і $D_{0,33}$ диференціювальні і підставляючи знайдені вирази коваріантних похідних у рівняння (16a)—(17b), дістанемо:

$$\nabla_3 \nabla_3 u_i \stackrel{*}{=} -g^{\alpha\alpha}\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu} \nabla_i \nabla_\alpha u_\alpha + \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_i\right) - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} \nabla_i D_{0,33} - \frac{\rho}{\mu} F_i \tag{22a}$$

$$(i,\ \alpha = 1,\ 2)$$

$$\nabla_3 \nabla_3 u_3 \stackrel{*}{=} -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} g^{\alpha\alpha} (\nabla_\alpha D_{0,\alpha 3} - \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_3) -$$

$$-\frac{\mu}{\lambda+2\mu} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_3 - \frac{\rho}{\lambda+2\mu} F_3, \ (\alpha = 1,\ 2) \tag{22b}$$

або остаточно, на основі формул (20a)—(20b), знаходимо перші наближення:

$$(\nabla_3 \nabla_3 u_i)^{\mathrm{I}} \stackrel{*}{=} -g^{\alpha\alpha}\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu} \nabla_i \nabla_\alpha u_\alpha + \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_i\right) -$$

$$-\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} \nabla_i (X_{(+h)3} + X_{(-h)3}) + \frac{\lambda(\lambda+\mu)}{\mu(\lambda+2\mu)} g^{\alpha\alpha} \nabla_i \nabla_\alpha u_\alpha - \frac{\rho}{\mu} F_i \tag{23a}$$

$$(i,\ \alpha = 1,\ 2)$$

$$(\nabla_3 \nabla_3 u_3)^{\mathrm{I}} \stackrel{*}{=} -\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} \nabla_\alpha (X_{(+h)\alpha} + X_{(-h)\alpha}) +$$

$$+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_3 - \frac{\rho}{\lambda+2\mu} F_3 \tag{23b}$$

$$(\alpha = 1,\ 2)$$

Ще раз нагадаємо, що рівняння (22a)—(22b) мають місце лише при $z = 0$.

Далі рівняння (17a)—(17b) дадуть після підставлення похідних першого порядку ∇_3, на основі формул (21a) (21b), такі вирази для похідних третього порядку:

$$\nabla_3 \nabla_3 \nabla_3 u_i \stackrel{*}{=} g^{\alpha\alpha}\left[\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} (2\nabla_i \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_3 - \nabla_i \nabla_\alpha D_{0,\alpha 3}) -\right.$$

$$\left. - \nabla_\alpha \nabla_\alpha D_{0,i3} + \nabla_\alpha \nabla_\alpha \nabla_i u_3\right] + \frac{\rho(\lambda+\mu)}{\mu(\lambda+2\mu)} \nabla_i F_3 - \frac{\rho}{\mu} \nabla_3 F_i \tag{24a}$$

$$(i,\ \alpha = 1,\ 2)$$

$$\nabla_3 \nabla_3 \nabla_3 u_3 \overset{*}{=} \frac{\lambda+\mu}{\mu} g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta} \nabla_\alpha \nabla_\alpha \nabla_\beta u_\beta + \frac{\lambda}{2\mu} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\alpha D_{0,33} +$$

$$+ \frac{(\lambda+\mu)\rho}{\mu(\lambda+2\mu)} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha F_\alpha - \frac{\rho}{\lambda+2\mu} \nabla_3 F_3 \tag{24b}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2)$$

Підставляючи в одержані вирази значення $D^{\mathrm{I}}_{0,i3}$ та $D^{\mathrm{I}}_{0,33}$, з формул (20a) та (20b) дістанемо перші наближення для похідних третього порядку:

$$(\nabla_3 \nabla_3 \nabla_3 u_i)^{\mathrm{I}} \overset{*}{=} g^{\alpha\alpha} \left\{ \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \left[2\nabla_i \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_3 - \frac{1}{2\mu} \nabla_i \nabla_\alpha (X_{(+h)\alpha} + X_{(-h)\alpha}) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\mu} \nabla_\alpha \nabla_\alpha (X_{(+h)i} + X_{(-h)i}) + \nabla_\alpha \nabla_\alpha \nabla_i u_3 \right\} +$$

$$+ \frac{(\lambda+\mu)\rho}{\mu(\lambda+2\mu)} \nabla_i F_3 - \frac{\rho}{\mu} \nabla_3 F_i \tag{25a}$$

$$(\alpha = 1, 2)$$

$$(\nabla_3 \nabla_3 \nabla_3 u_3)^{\mathrm{I}} \overset{*}{=} \frac{\lambda+\mu}{\mu} g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta} \nabla_\alpha \nabla_\alpha \nabla_\beta u_\beta +$$

$$+ \frac{\lambda}{2\mu(\lambda+2\mu)} g^{\alpha\alpha} [\nabla_\alpha \nabla_\alpha (X_{(+h)3} + X_{(-h)3}) - 2\lambda\, g^{\beta\beta} \nabla_\alpha \nabla_\alpha \nabla_\beta u_\beta] +$$

$$+ \frac{\rho(\lambda+\mu)}{\mu(\lambda+2\mu)} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha F_\alpha - \frac{\rho}{\mu+2\mu} \nabla_3 F_3 \tag{25b}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2)$$

Як і рівняння (23a)—(23b), ці рівняння мають місце лише при $z = 0$.

На основі рівнянь (23a)—(25b) обчислимо такі за порядком коефіцієнти розкладів компонентів тензора деформації D^z_{i3}:

$$D_{1,i3} = (\nabla_i \nabla_3 u_3)_0 + (\nabla_3 \nabla_3 u_i)_0 \tag{26a}$$

$$D_{2,i3} = (\nabla_i \nabla_3 \nabla_3 u_3)_0 + (\nabla_3 \nabla_3 \nabla_3 u_i)_0 \tag{26b}$$

та коефіцієнти $D_{1,jj}$ і $D_{2,jj}$ $(j = 1, 2)$:

$$D_{1,jj} = 2(\nabla_j \nabla_3 u_j)_0 \tag{27a}$$

$$D_{2,jj} = 2(\nabla_j \nabla_3 \nabla_3 u_j)_0 \tag{27b}$$

Використовуючи рівняння (23a)—(23b), (25a)—(25b), можна визначити коефіцієнти $D_{1,i3}, \ldots, D_{2,j3}$ через перше наближення. Для коефіцієнтів $D_{2,i3}$, $D_{1,jj}$, $D_{2,jj}$, одержимо такі вирази:

$$D^{\mathrm{I}}_{1,33} = 2(\nabla_3 \nabla_3 u_3)^{\mathrm{I}} \tag{28a}$$

$$D^{\mathrm{I}}_{2,i3} = - \frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)} \nabla_i \nabla_\alpha (X^\alpha_{(+h)} + X^\alpha_{(-h)}) + \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} g^{\alpha\alpha} \nabla_i \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_3 -$$

$$-\frac{g^{\alpha\alpha}}{2\mu}\nabla_\alpha\nabla_\alpha\left(X_{(+h)i}+X_{(-h)i}\right)+\frac{\rho\lambda}{\mu(\lambda+2\mu)}\nabla_i F_3-\frac{\rho}{\mu}\nabla_3 F_i \tag{28b}$$

$$(i=1,\ 2)$$

$$D^{\mathrm{I}}_{1,jj}=2\left(\nabla_j\ D^{\mathrm{I}}_{0,j3}-\nabla_j\nabla_j u_3\right)=\frac{1}{\mu}\nabla_j\left(X_{(+h)j}+X_{(-h)j}\right)-2\nabla_j\nabla_j u_3 \tag{28c}$$

(не підсумовувати по j; $i=1,\ 2$).

$$D^{\mathrm{I}}_{2,jj}=-2g^{\alpha\alpha}\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\nabla_j\nabla_j\nabla_\alpha u_\alpha+\nabla_j\nabla_\alpha\nabla_\alpha u_j\right)-\frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}\nabla_j\nabla_j\left(X_{(+h)3}+\right.$$

$$\left.+X_{(-h)3}\right)+\frac{2\lambda(\lambda+\mu)}{\mu(\lambda+2\mu)}g^{\alpha\alpha}\nabla_j\nabla_j\nabla_\alpha u_\alpha-\frac{2\rho}{\mu}\nabla_j F_j \tag{28d}$$

$$D^{\mathrm{I}}_{2,33}=2\left(\nabla_3\nabla_3\nabla_3 u_3\right)^{\mathrm{I}} \tag{28e}$$

Підставляючи знайдені вирази коефіцієнтів розкладів до умов на поверхні, дістанемо після їх розв'язання відносно $D_{0,i3}$ та $D_{0,33}$ другі наближення для вказаних коефіцієнтів, що містять в своєму складі члени порядку h^2. Справді, умови на поверхні після відкинення членів порядку h^3 можна записати в такій формі:

$$D_{0,i3}+hD_{1,i3}+\frac{1}{2}h^2 D_{2,i3}+\cdots=\frac{X_{(h)i}}{\mu} \tag{29a}$$

$$(i=1,\ 2)$$

$$(\lambda+2\mu)D_{0,33}+\lambda g^{jj}D_{0,jj}+h\left[(\lambda+2\mu)D_{1,33}+\lambda g^{jj}D_{1,jj}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[(\lambda+2\mu)D_{2,33}+\lambda g^{jj}D_{2,jj}\right]+\ldots=2X_{(h)3} \tag{29b}$$

$$(j=1,\ 2)$$

Як і в рівняннях (19a)—(19b), $X_{(h)i}$ та $X_{(h)3}$ — компоненти вектора напружень на граничних поверхнях елементу оболонки, перенесені в серединну поверхню. Система рівнянь (29a)—(29b) складається з шести рівнянь, які відповідають шістьом точковим умовам рівноваги на поверхнях, обмежуючих елемент оболонки. Отже, ми можемо визначити шість невідомих коефіцієнтів через решту їх. Будемо визначати коефіцієнти $D_{0,i3}$ та $D_{1,i3}$, а $D_{2,i3}$ визначмо за формулами (28b) і 28e).

Дістанемо:

$$D^{\mathrm{II}}_{0,i3}=D^{\mathrm{I}}_{0,i3}-\frac{h^2}{2}D^{\mathrm{I}}_{2,i3} \tag{30a}$$

$$D^{\mathrm{II}}_{0,33}=D^{\mathrm{I}}_{0,33}-\frac{h^2}{2(\lambda+2\mu)}\left[(\lambda+2\mu)D^{\mathrm{I}}_{2,33}+\lambda g^{jj}D_{2,jj}\right] \tag{30b}$$

$$(i,\ j=1,\ 2)$$

Підставляючи у рівняння (30a)—(30b) вирази (28b), (28), (28c), одержимо вирази для другого наближення в остаточній формі. Вони мають вигляд:

$$D^{II}_{0,i3} \overset{*}{=} \frac{1}{2\mu}(X_{(+h)i} + X_{(-h)i}) + \frac{h^2}{1\cdot 2}\left\{ \frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)} \nabla_i \nabla_\alpha (X^\alpha_{(+h)} + X^\alpha_{(-h)}) - \right.$$

$$- \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} g^{\alpha\alpha} \nabla_i \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_3 - \frac{g^{\alpha\alpha}}{2\mu} \nabla_\alpha \nabla_\alpha (X_{(+h)i} + X_{(-h)i}) -$$

$$\left. - \frac{\lambda\rho}{\mu(\lambda+2\mu)} \cdot \nabla_i F_3 + \frac{\rho}{\mu} \nabla_3 F_i \right\} \tag{31a}$$

$$D^{II}_{0,33} \overset{*}{=} \frac{1}{\lambda+2\mu}(X_{(+h)3} + X_{(-h)3}) - \frac{\lambda g^{\alpha\alpha}}{\lambda+2\mu} D_{0,\alpha\alpha} -$$

$$- \frac{h^2}{2(\lambda+2\mu)} \left[\frac{8\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta} \nabla_\alpha \nabla_\alpha \nabla_\beta u_\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\alpha (X_{(+h)3} + X_{(-h)3}) + 2\rho g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha F_\alpha - 2\rho \nabla_3 F_3 \right] \tag{31b}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2)$$

Вказаний процес можна продовжити і далі. Так, наприклад, третє наближення, очевидно, дає:

$$D^{III}_{0,i3} = D^{I}_{0,i3} - \frac{h^2}{2!} D^{III}_{2,i3} \tag{32a}$$

$$D^{III}_{0,33} = D^{I}_{0,33} - \frac{h^2}{2!(\lambda+2\mu)} [(\lambda+2\mu) D^{II}_{2,33} + \lambda g^{jj} D^{II}_{2,jj}] \tag{32b}$$

Членами, що містять h^4, можна нехтувати, отже, третє наближення збігається з другим (про це докладніше див. нижче).

Друге наближення дає для задач теорії оболонок цілком достатню точність. Воно дасть можливість одержати розклади компонентів тензора деформації до членів, що містять z^2 і, таким чином, як буде вказано нижче, одержати вирази для зведених до серединної поверхні зусиль, які містять члени порядку h^3, тобто порядку зведених моментів. Необхідність такого зведення була вказана Ф. Крауссом [1]).

Метод, вказаний нами, втрачає силу, якщо $X^i_{(\lambda)}$ та ρF_i не мають похідних будьякого порядку. Ці особливі випадки ми тут не розглядаємо.

З одержаних нами виразів для перших наближень видно, що вплив навантаження на поверхні оболонки має головним чином місцевий характер.

§ 4. Про збіжність розглянутого процесу послідовних наближень

Зробимо в кінці декілька зауважень про збіжність одержаних послідовних наближень. Перш за все розглянемо загальний вираз для n-го наближеного значення коефіцієнтів $D_{0,i3}$ та $D_{0,33}$.

---

[1]) Див. список літератури в кінці праці.

На підставі вищевикладеного дістанемо:

$$D^{(1)}_{0,i3} = D^{(0)}_{0,i3} \tag{33a}$$

$$D^{(2)}_{0,i3} = D^{(0)}_{0,i3} - \frac{h^2}{2!} D^{(0)}_{2,i3} \tag{33b}$$

$$D^{(3)}_{0,i3} = D^{(0)}_{0,i3} - \frac{h^2}{2!} D^{(2)}_{2,i} \tag{33e}$$

$$D^{(4)}_{0,i3} = D^{(0)}_{0,i3} - \frac{h^2}{2!} D^{(3)}_{2,i3} - \frac{h^4}{4!} D^{(3)}_{4,i3} \tag{33d}$$

. . . .

. . . .

де $D^{(0)}_{i3}$ визначається з формули (20).

Розглядаючи ці вирази, легко встановити, що третє наближення фактично повинне збігатися з другим. Справді, при одержанні третього наближення нами були відкинуті члени порядку h^4. Але член $\frac{h^2}{2!} D^{(2)}_{2,i3}$ відрізняється від члена $\frac{h^2}{2!} D^{(0)}_{2,i3}$ якраз на члени порядку h^4. Отже, їх треба відкинути, і тоді третє наближення збігатиметься з другим. Ці самі міркування показують, що всяке непаристе наближення збігається з попереднім паристим. Враховуючи порядок відкинутих членів, дістанемо загальний вираз для наближення порядку $2q$:

$$D^{(2q)}_{0,i3} = D^{(0)}_{0,i3} - \frac{h^2}{2!} D^{(2q-2)}_{2,i3} - \frac{h^4}{4!} D^{(2q-4)}_{4,i3} - \ldots - \frac{h^{2q}}{(2q)!} D^{(0)}_{2q,i3} \tag{34a}$$

Аналогічний вираз одержимо для $D^{2q}_{0,33}$:

$$D^{(2q)}_{0,33} = D^{(0)}_{0,i3} - \frac{h^2}{2!} \overline{D}^{(2q-2)}_{2,33} - \frac{h^4}{4!} \overline{D}^{(2q-4)}_{4,33} - \ldots - \frac{h^{2q}}{(2q)!} \overline{D}^{(0)}_{2q,33}, \tag{34в}$$

де

$$\overline{D}^{\rho}_{\sigma.33} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left[(\lambda + 2\mu) D^{\rho}_{\sigma,33} + \lambda g^{jj} D^{\rho}_{\sigma,jj} \right] \tag{35}$$

$$(\sigma = 1,2)$$

Очевидно, збіжність розглянутого процесу послідовних наближень визначається збіжністю рядів:

$$D^{(0)}_{0,i3} + (D^{(1)}_{0,i3} - D^{(0)}_{0,i3}) + (D^{(2)}_{0,i3} - D^{(1)}_{0,i3}) + \ldots + (D^{(2q)}_{0,i3} - D^{(2q-1)}_{0,i3}) + \ldots \tag{36a}$$

$$D^{(0)}_{0,33} + (D^{(1)}_{0,33} - D^{(0)}_{0,33}) + (D^{(2)}_{0,33} - D^{(1)}_{033}) + \ldots + (D^{(2q)}_{0,33} - D^{(2q-1)}_{0,33}) + \ldots \tag{36b}$$

Загальне дослідження збіжності вказаних рядів становить значні труднощі. Ми обмежимося в даній роботі лише деякими висновками, які дозволяють встановити збіжність при окремих припущеннях відносно навантаження на поверхнях оболонки і переміщень точок серединної поверхні. На підставі попереднього, ми можемо представити коефіцієнти розкладів компонентів D_{i3} тензора деформацій так:

$$D_{\sigma,i3} = D_\sigma + D_{\sigma i}(D_{0,i3}) + D_{\sigma,3}(D_{0,33}) \tag{37a}$$

$$D_{\sigma,33} = D_{\sigma,3} + D_{\sigma,i3}(D_{0,i3}) + D_{\sigma,33}(D_{0,33}), \tag{37b}$$

де D деякі лінійні оператори, які мають властивість, що

$$D(ax+by) = aD(x) + bD(y)$$

Оператори D_σ та $D_{\sigma,3}$ залежать тільки від компонентів переміщень та їх похідних по координатах x^1 і x^2.

З допомогою цих операторів можна представити послідовні наближення для коефіцієнтів $D_{0,i3}$ та $D_{0,33}$ в такому вигляді:

$$D^{\mathrm{I}}_{0,i3} = D^{(0)}_{0,i3} \tag{38a}$$

$$D^{\mathrm{I}}_{0,33} = D^{(0)}_{0,33} \tag{38b}$$

$$D^{(2)}_{0,i3} = D^{(0)}_{0,i3} - \frac{h^2}{2}\left\{ D_2 + D_{2i}\left(D^{(0)}_{0,i3}\right) + D_{23}\left(D^{(0)}_{0,33}\right)\right\} \tag{38c}$$

$$D^{(2)}_{0,33} = D^{(0)}_{0,33} - \frac{h^2}{2}\left\{ D_{23} + D_{2i3}\left(D^{(0)}_{0,i3}\right) + D_{223}\left(D^{(0)}_{0,33}\right)\right\} \tag{38d}$$

$$D^{(3)}_{0,i3} = D^{(2)}_{0,i3} \tag{36e}$$

$$D^{(3)}_{0,33} = D^{(2)}_{0,33} \tag{38f}$$

$$D^{(4)}_{0,i3} = D^{(2)}_{0,i3} + h^4\left\{ \frac{1}{(2!)^2}\left[D_{2i}\left(D^{(0)}_{2,i3}\right) + D_{23}\left(\overline{D}^{(0)}_{2,33}\right)\right] - \frac{1}{4!}D^{(0)}_{4,i3}\right\} \tag{38g}$$

$$D^{(4)}_{0,33} = D^{(2)}_{0,33} + h^4\left\{ \frac{1}{(2!)^2}\left[D_{2,i3}\left(D^{(0)}_{2i3}\right) + D_{233}\left(\overline{D}^{(0)}_{2,33}\right)\right] - \frac{1}{4!}\overline{D}^{(0)}_{4,33}\right\} \tag{38h}$$

. . . .

. . . .

$$\begin{aligned} D^{(6)}_{0,i3} = D^{(4)}_{0,i3} - h^6 \Big\{ & \frac{1}{(2!)^3}\left[D_{2i}D_{2i}\left(D^{(0)}_{2,i3}\right) + D_{2i}D_{23}\left(\overline{D}^{(0)}_{2,33}\right) + \right. \\ & \left. + D_{23}D_{2i3}\left(D^{(0)}_{2i3}\right) + D_{23}D_{233}\left(\overline{D}^{(0)}_{2,33}\right)\right] - \frac{1}{2!4!}\left[D_{2i}\left(D^{(0)}_{4,i3}\right) + \right. \\ & \left. + D_{23}\left(D^{(0)}_{4,33}\right) + D_{4i}\left(D^{(0)}_{2,i3}\right) + D_{43}\left(\overline{D}^{(0)}_{2,33}\right)\right] + \frac{1}{6!}D^{(0)}_{6,i3}\Big\} \end{aligned} \tag{38k}$$

. . . .

З одержаних виразів легко помітити, що при деяких умовах, які повинні задовольнятися переміщеннями і зовнішніми силами, а також їх похідними, ряди (36a) — (36b) будуть знакозмінними. Справді, загальний член ряду (36a) можна представити в такому вигляді:

$$a_{2q} = (-1)^q h^{2q} \sum \frac{(-1)^k}{m_1!\,m_2!\ldots m_k!} D_{(m_1 \ldots m_k)}, \tag{39}$$

де через $D_{(m_1 \ldots m_k)}$ позначено деякий лінійний оператор, складений аналогічно виразам у квадратних дужках в формулах (38a) — (38k), одержаних нами вище. Цілі, паристі числа m_i зв'язані залежністю:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = 2q \tag{39a}$$

При цьому: $m_1 = 2, \ldots, m_k = 2k$. Сума в формулі (39) поширюється на всі комбінації чисел m_{k_1} що задовольняють співвідношення (30a). Оператор $D_{(m_1 \ldots m_k)}$, очевидно, містить похідні від переміщень порядку $2q$. Якщо ці оператори мають сталий знак і існує загальна верхня границя для переміщень, зовнішніх сил та їх похідних, то можна знайти таке стале додатне число A, щоб мала місце нерівність:

$$|D_{(m_1 \ldots m_k)}| < A^{2q}$$

Тоді

$$|a_q| < \frac{(hA)^{2q}}{(2!)^q}$$

В наслідок обмеженості переміщень і сил, можна завжди знайти товщину оболонки, при якій

$$\frac{hA}{\sqrt{2}} < 1,$$

так що ряди (36a) — (36b) будуть збіжні.

Зауважмо, що висловлені нами міркування лише в загальних рисах стверджують правильність знайденого прийому послідовних наближень, але їх не можна розглядати як загальне доведення збіжності послідовних наближень до деякої границі. Можливо навіть, що в деяких випадках навантаженості збіжність не матиме місця.

У сприятливих випадках похибка не перевищує першого відкинутого члена. Наприклад, друге наближення дає похибку порядку h^4.

§ 5. Наближені вирази для компонентів тензора деформації (перша група еластостатичних рівнянь)

Виконуючи зведення з допомогою методу, розглянутого в попередньому параграфі і вертаючись до рівнянь (12a) — (12f), дістанемо після заміни похідних від компонентів вектора u_i по x^3 через похідні по решті змінних першу групу еластостатичних рівнянь. Звичайно першим членам розкладу тангенціальної частини тензора деформацій надають такої форми:

$$\varepsilon_1^z = \varepsilon_1 - z\varkappa_{11} + \ldots . \tag{40a}$$

$$\varepsilon_2^z = \varepsilon_2 - z\varkappa_{22} + \ldots \tag{40b}$$

$$\gamma_{12}^z = \gamma_{12} - z\varkappa_{12} + \ldots, \tag{40c}$$

де ε_1, ε_2 та γ_{12} складають тензор двомірної деформації серединної поверхні та визначаються формулами:

$$\varepsilon_1 = \partial_1 u_1 - \frac{1}{2g_{11}} u_1 \partial_1 g_{11} + \frac{1}{2g_{22}} u_2 \partial_2 g_{11} - k_1 g_{11} u_3 \tag{41a}$$

$$\varepsilon_2 = \partial_2 u_2 + \frac{1}{2g_{11}} u_1 \partial_1 g_{22} - \frac{1}{2g_{11}} u_2 \partial_2 g_{22} - k_2 g_{22} u_3 \tag{41b}$$

$$\gamma_{12} = \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 - \frac{u_2}{g_{11}} \partial_2 g_{11} - \frac{1}{g_{22}} u_1 \partial_1 g_{22} \tag{41c}$$

Величини $\varkappa_{ik}$ є компоненти симетричного коваріантного, двомірного тензора 2-го рангу, який зветься тензором змін кривини. Треба зауважити, що Ляв помилково вважав цей тензор асиметричним.

Компоненти тензора $\varkappa_{ik}$ після виключення похідних $\partial_3 u_i$ за допомогою формул зведення, набирають такого вигляду:

$$\varkappa_{11}^{(i)} = \partial_1 (\partial_1 u_3 + k_1 u_1) - \frac{1}{2g_{11}} \partial_1 g_{11} (\partial_1 u_3 + k_1 u_1) + \frac{1}{2g_{22}} \partial_2 g_{11} (\partial_2 u_3 + k_2 u_2) -$$

$$- \partial_1 D_{0,13}^{(i)} + \frac{1}{2g_{11}} \partial_1 g_{11} D_{0,13}^{(i)} - \frac{1}{2g_{22}} \partial_2 g_{11} D_{0,23}^{(i)} + \frac{1}{2} k_1 g_{11} D_{0,33}^{(i)} \tag{42a}$$

$$\varkappa_{22}^{(i)} = \partial_2 (\partial_2 u_3 + k_2 u_2) + \frac{1}{2g_{11}} \partial_1 g_{22} ((\partial_1 u_3 + k_1 u_1) - \frac{1}{2g_{22}} \partial_2 g_{22} (\partial_2 u_3 + k_2 u_2) -$$

$$- \partial_2 D_{0,23}^{(i)} - \frac{1}{2g_{11}} D_{0,13}^{(i)} \partial_1 g_{22} + \frac{1}{2g_{22}} D_{0.23}^{(i)} \partial_2 g_{22} + \frac{1}{2} k_2 g_{22} D_{0,33}^{(i)} \tag{42b}$$

$$\varkappa_{12}^{(i)} = \partial_1 (\partial_2 u_3 + k_2 u_2) + \partial_2 (\partial_1 u_3 + k_1 u_1) - \frac{1}{g_{11}} \partial_2 g_{11} (\partial_1 u_3 + k_1 u_1) -$$

$$- \frac{1}{g_{22}} \partial_1 g_{22} \; (\partial_2 u_3 + k_2 u_2) - \partial_1 D_{0,23}^{(i)} - \partial_2 D_{0,13}^{(i)} + \frac{1}{g_{11}} D_{0,13}^{(i)} \partial_2 g_{11} +$$

$$+ \frac{1}{g_{22}} D_{0,23}^{(i)} \partial_1 g_{22} \tag{42c}$$

В цих формулах $D_{0,\alpha 3}^{i}$ — перший коефіцієнт у розкладі D_{i3}^{z}, який відповідає i-му наближенню. Формула (42c) показує, ще тензор змін кривини — симетричний. Основними відмінами знайдених формул від аналогічних формул Лява є симетричність тензора $\varkappa_{ik}$ і наявність додаткових членів, залежних від $D_{0,j3}^{(i)}$. Ці члени характеризують дію місцевих навантажень на кривину оболонки.

Випишемо для довідок вирази компонентів тензора $\varkappa_{ik}$ для другого наближення. Дістанемо:

$$\varkappa_{11}^{(2)} = \partial_1 (\partial_1 u_3 + k_1 u_1) - \frac{1}{2g_{11}} \partial_1 g_{11} (\partial_1 u_3 + k_1 u_1) + \frac{1}{2g_{22}} \partial_2 g_{11} (\partial_2 u_3 + k_2 u_2) -$$

$$- \frac{1}{2\mu} \partial_1 (X_{(+h)1} + X_{(-h)1}) + \frac{1}{4\mu} (X^1_{(+h)} + X^1_{(-h)}) \partial_1 g_{11} - \frac{1}{4\mu} (X^2_{(+h)} + X^2_{(-h)}) \partial_2 g_{11} +$$

$$+ \frac{k_1 g_{11}}{2(\lambda + 2\mu)} (X^3_{(+h)} + X^3_{(-h)} - \lambda g^{jj} D_{0,jj}) + \frac{h^2}{2!} D_1(u) \tag{43a}$$

$$\varkappa_{22}^{(2)} = \partial_2(\partial_2 u_3 + k_2 u_2) + \frac{1}{2g_{11}}(\partial_1 u_3 + k_1 u_1)\partial_1 g_{22} - \frac{1}{2g_{22}}(\partial_2 u_3 + k_2 u_2)\partial_2 g_{22} -$$

$$-\frac{1}{2\mu}\partial_2(X_{(+h)2} + X_{(-h)2}) + \frac{1}{4\mu}(X^2_{(+h)} + X^2_{(-h)})\partial_2 g_{22} -$$

$$-\frac{1}{4\mu}(X^1_{(+h)} + X^1_{(-h)})\partial_1 g_{22} + \frac{k_2 g_{22}}{2(\lambda+2\mu)}(X^3_{(+h)} + X^3_{(-h)} - \lambda g^{jj} D_{0,jj})$$

$$+\frac{h^2}{2!}D_2(u_j) \tag{43b}$$

$$\varkappa_{12}^{(2)} = \partial_1(\partial_2 u_3 + k_2 u_2) + \partial_2(\partial_1 u_3 + k_1 u_1) - \frac{1}{g_{11}}(\partial_1 u_3 + k_1 u_1)\partial_2 g_{11} -$$

$$-\frac{1}{g_{22}}(\partial_2 u_3 + k_2 u_2)\partial_1 g_{22} - \frac{1}{2\mu}[\partial_1(X_{(+h)2} + X_{(-h)2})$$

$$+\partial_2(X_{(+h)1} + X_{(-h)1})] + \frac{1}{2\mu}(X^1_{(+h)} + X^1_{(-h)})\partial_2 g_{11} +$$

$$+\frac{1}{2\mu}(X^2_{(+h)} + X^2_{(-h)})\partial_1 g_{22} + \frac{h^2}{2}D_{12}(u_j) \tag{43c}$$

В цих формулах буквами D_1, D_2 та D_{12} позначені деякі лінійні операції, проведені над компонентами вектора u_j. Ми не наводимо їх у розкритому вигляді через їх громіздкість. Крім того, ми будемо шукати в дальшому розкладання до членів порядку h^2 включно, а члени з множником h^2, як видно з формул (40а) — (40с), дадуть після їх підставлення у вираз для D^z_{ik} члени порядку h^3, тобто для вказаної цілі вони зайві.

Виведемо тепер остаточні вирази для розкладання компонентів тензора деформації D^z_{ik} за степенями z до членів порядку z^2 включно. Знайдемо для тангенціальної частини:

$$D^z_{11} = 2\varepsilon^z_1 = 2(\varepsilon_1 - z\varkappa_{11}) + z^2\nabla_1\nabla_3\nabla_3 u_1 + \ldots \tag{44a}$$

$$D^z_{22} = 2\varepsilon^z_2 = 2(\varepsilon_2 - z\varkappa_{22}) + z^2\nabla_2\nabla_3\nabla_3 u_2 + \ldots \tag{44b}$$

$$D^z_{12} = \gamma_{12} - z\varkappa_{12} + \frac{1}{2}z^2(\nabla_2\nabla_3\nabla_3 u_1 + \nabla_1\nabla_3\nabla_3 u_2) + \ldots \tag{44c}$$

Підставляючи значення других похідних $\nabla_3\nabla_3 u_i$ з формул (23а), знайдемо:

$$D^z_{11} = 2(\varepsilon_1 - z\varkappa_{11}) - z^2\Big[g^{\alpha\alpha}\Big(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\nabla_1\nabla_1\nabla_\alpha u_2 + \nabla_1\nabla_\alpha\nabla_\alpha u_1\Big) +$$

$$+\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\nabla_1\nabla_1(X^3_{(+h)} + X^3_{(-h)}) + \frac{\rho}{\mu}\nabla_1 F_1\Big] + \ldots \tag{45a}$$

$$D^z_{22} = 2(\varepsilon_2 - z\varkappa_{22}) - z^2\Big[g^{\alpha\alpha}\Big(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\nabla_2\nabla_2\nabla_\alpha u_\alpha + \nabla_2\nabla_\alpha\nabla_\alpha u_2\Big) +$$

$$+\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\nabla_2\nabla_2(X^3_{(+h)} + X^3_{(-h)}) + \frac{\rho}{\mu}\nabla_2 F_2\Big] + \ldots \tag{45b}$$

$$D^z_{12} = \gamma_{12} - z\varkappa_{12} - \frac{1}{2} z^2 \left\{ g^{\alpha\alpha} \left[\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \nabla_1 \nabla_2 \nabla_\alpha u_\alpha + \right.\right.$$

$$\left. + \nabla_1 \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_2 + \nabla_2 \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_1 \right] + \frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)} \nabla_1 \nabla_2 \left(X^3_{(+h)} + X^3_{(-h)} \right) +$$

$$\left. + \frac{\rho}{\mu} (\nabla_2 F_1 + \nabla_1 F_2) \right\} + \ldots \qquad (45c)$$

Так само знайдемо розклади для компонентів D^z_{i3}:

$$D^z_{i3} = D_{0,i3} + zD_{1,i3} + \frac{1}{2} z^2 D_{2,i3} + \ldots \qquad (46)$$

Очевидно, для коефіцієнтів $D_{0,i3}$ треба взяти друге наближення, а для коефіцієнтів $D_{1,i3}$ та $D_{2,i3}$ — перше, тому що наступне наближення дасть після його підставлення в (47) члени порядку h^3 та h^4.

Отже дістанемо:

$$D^z_{i3} = D^{(2)}_{0,i3} + zD^{(1)}_{1,i3} + \frac{1}{2} z^2 D^{(1)}_{2,i3} + \ldots, \qquad (47)$$

або

$$D^z_{i3} = D^{(2)}_{0,i3} + zD^{(1)}_{1,i3} - \frac{1}{2} (h^2 - z^2) D^1_{2,i3} + \ldots, \qquad (47b)$$

де коефіцієнти розкладу визначаються формулами (28a)—(28c) та (31a)—(31b).

Формули (43a) — (47b) розв'язують задачу про зведення деформацій до серединної поверхні.

§ 6. Зауваження про незводимі випадки

Розглянутий метод зведення тримірної задачі до двомірної, очевидно, може бути використаний лише в тих випадках, коли напруження на зовнішніх поверхнях оболонки, а також об'ємні сили — функції координат x^1 і x^2, які диференціюються і мають принаймні похідні трьох перших порядків. У решті випадків цей метод незастосовний. Проте, можна знайти наближений розв'язок і в незастосовних випадках, користуючись принципом Сен-Венана. А саме, завжди можна замінити навантаження в особливих точках іншим навантаженням, статично еквівалентним заданому, але таким, що не має аналітичних особливостей. При цьому деформації зміняться лише в безпосередньому околі особливої точки. Через те, що ми взагалі з допомогою методу зведення знаходимо лише наближені значення деформацій, ця обставина не є істотною. Безперечно, при цьому втрачається можливість вивчення місцевих перенапружень, які можуть виникнути в оболонці.

§ 7. Вирази зведених до серединної поверхні зусиль та моментів

Основною особливістю класичної теорії оболонок є заміна тензора напружень теорії пружності системою йому статично еквівалентних векторів сил, що діють на контурні поверхні оболонки, зведених до серединної поверхні з допомогою паралельного перенесення, а також відповідних моментів долучених пар. До обчислення цих величин ми і приступаємо.

Арифметизуємо простір в недеформованій оболонці так, як це було вказано вище. Об'єктом нашого дослідження є елемент оболонки, обмеженої двома поверхнями, паралельними до серединної та двома парами координатних поверхень $x^1 z$ і $x^2 z$, які знаходяться нескінченно близько одна від одної.

Елемент має скінченний розмір у напрямі осі x^3, рівній $2h$ ($2h$ — товщина оболонки). При цих умовах лінійний елемент простору в недеформованій оболонці матиме форму:

$$d\sigma^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{48}$$

Після деформації лінійний елемент набирає загального вигляду:

$$ds^2 = \bar{g}_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{49}$$

$$(i, k = 1, 2, 3)$$

Умовмося тепер позначати всі величини, що стосуються контурної площадки, до деформації, перпендикулярної до координатної лінії x^i, відповідним індексом (i) у дужках. Введімо далі зусилля, тобто сили внутрішніх напружень, віднесені до одиниці довжини координатної лінії, яка лежить на перетині серединної поверхні і контурної площадки. Визначимо вектор елементу площі, що лежить в координатній поверхні $(\nu 3)$ $(\nu = 1, 2)$. На основі відомих формул векторного числення знайдемо, позначаючи вектор елементарної площі через $d\bar{S}_{(\nu 3)}$:

$$d\bar{S}_{\nu 3} = \bar{e}^{\mu} \sqrt{\bar{g}^z}\, dx^{\nu}\, dx^3,$$

де числа μ, ν набирають значень, які утворюють переставлення чисел 1 і 2; $\bar{g}^z$ — детермінант, складений з компонентів метричного тензора $\bar{g}^z_{ik}$. Звідси знайдемо:

$$(d\bar{S}_{\nu 3})_{\mu} = \sqrt{\bar{g}^z}\, dx^{\nu}\, dx^3 = \frac{F_{\nu 3}}{\sqrt{\bar{g}^{\mu\mu}_{(z)}}}\, dx^{\nu}\, dx^3, \tag{50}$$

де

$$F_{\nu 3} = \sqrt{\bar{g}^z_{\nu\nu}\, \bar{g}^z_{33} - (\bar{g}^z_{\nu 3})^2}$$

(решта компонентів вектора $d\bar{S}_{\nu 3}$ дорівнюють нулю).

Далі визначаємо контраваріантні компоненти вектора напружень. Одержимо:

$$dF^i_{(\mu)} = \tau^{i\mu}\,(d\bar{S}_{\nu 3})_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{\mu\mu}}}\, \tau^{i\mu} F_{\nu 3}\, dx^{\nu}\, dx^3 \tag{50a}$$

У всіх наведених формулах $\bar{g}^z_{ik}$ — компоненти фундаментального тензора на відстані z від серединної поверхні, $\tau^{i\mu}$ — контраваріантні компоненти тензора напружень.

Переносячи вектор $d\overline{F}_i$ до серединної поверхні, дістанемо на основі формул (7) — (7a):

$$(dF^{\mu}_{(i)})_{z=0} = (\tau^{i\mu} + \tau^{i\lambda}\,\Phi^{\overline{\mu}}_{\lambda})\,\frac{F_{\nu 3}}{\sqrt{\overline{g}_{ii}}}\,dx^{\nu}\,dx^{3}$$

Позначаючи далі вектори зусиль через

$$S^{i}_{(\mu)} = \frac{\int\limits_{-h}^{+h}(dF^{i}_{(\mu)})_{z=0}}{\sqrt{\overline{g}_{\nu\nu}}\,dx^{\nu}},$$

одержимо:

$$S^{i}_{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{\overline{g}_{\nu\nu}}}\int\limits_{-h}^{+h}(\tau^{i\mu} + \tau^{i\lambda}\,\Phi^{\overline{\mu}}_{\lambda})\,\frac{F_{\nu 3}}{\sqrt{\overline{g}_{\mu\mu}}}\,dx^{3}, \tag{51}$$

$$(i, \lambda = 1, 2, 3; \quad \mu, \nu = 1, 2)$$

де $S^{i}_{(\mu)}$ — контраваріантні компоненти зусиль, що діють на μ-у контурну поверхню. (По ν та μ не підсумовуємо!).

Через те, що скалярний добуток двох векторів не змінюється при паралельному перенесенні, ми можемо незалежно один від одного перенести тензор напружень і вектор елементарної площадки в серединну поверхню. Тоді одержимо:

$$(dF^{i}_{(\mu)})_{z=0} = \overline{\tau}^{i\mu}(1 - \Phi^{\mu}_{\mu})\,\frac{F_{\nu 3}}{\sqrt{\overline{g}^{\mu\mu}_{(z)}}}\,dx^{\nu}\,dx^{3}$$

і далі:

$$S^{i}_{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{\overline{g}_{\nu\nu}}}\int\limits_{-h}^{+h}\overline{\tau}^{i\mu}(1 - \Phi^{\mu}_{\mu})\,\frac{F_{\nu 3}}{\sqrt{\overline{g}^{\mu\mu}_{z}}}\,dx^{3}, \tag{52}$$

$$(\mu, \nu = 1, 2; \; i = 1, 2, 3)$$

де $\overline{\tau}^{i\mu}$ — тензор напружень, перенесений в серединну поверхню.

Аналогічно до цього визначаються головні моменти долучених пар.

Утворення долученого моменту складається з двох етапів: 1) при всякому нескінченно малому перенесенні вектора сили виникає елементарна долучена пара; 2) вектор цієї пари переноситься паралельно самому собі за правилами паралельного перенесення векторів до центра зведення. Головний вектор долучених пар одержується як геометрична сума моментів елементарних долучених пар. Якщо перенести вектор з точки з координатою $x^3 = z$ в точку з координатою $x^3 = \zeta$, то в формулах (7a)—(8) інтеграли поширюються на відрізок від ζ до z. Відповідні вирази позначатимемо через $\Phi^{\lambda}_{(\zeta)\overline{i}}$ та $\Phi^{\overline{i}}_{\zeta(\lambda)}$. Коваріантні компоненти вектора напружень визначаються на основі формули (50a) так:

$$dF_{(\mu)i} = \tau^{\mu}_{\cdot\, i}\,(d\overline{S}_{\nu 3})_{\mu} = \tau^{\mu}_{\cdot\, i}\sqrt{\overline{g}^{z}}\,dx^{\nu}\,dx^{3}$$

Після паралельного перенесення з точки z в точку ζ:

$$(dF_{(\mu)i})_{x^3=\zeta} = (\tau^{\mu}_{\cdot\, i} - \tau_{\cdot\,\lambda}\, \Phi^{\lambda}_{(\zeta)i}) \sqrt{g^z}\, dx_{\nu}\, dx^3$$

(в цих виразах $\tau^{\mu}_{\cdot\, i}$ — змішані компоненти тензора напружень).

Обчислимо тепер контраваріантні компоненти долученого моменту, який відповідає переміщенню вектора $(d\overline{F}^i)_{x^3=\zeta}$ на віддалі $d\zeta$.

Коваріантні компоненти вектора переміщення визначаються так:

$$dr_i = \overline{g}^{(\zeta)}_{i3}\, d\zeta + \ldots$$

Тоді на основі відомої формули векторного числення визначаємо контраваріантні компоненти долученого моменту:

$$dL^k_{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{\overline{g}^{\zeta}}} [\overline{g}^{\zeta}_{\alpha 3} (\tau^{\mu}_{\cdot\,\beta} - \tau^{\mu}_{\cdot\,\lambda} \Phi^{\lambda}_{(\zeta)})_{\beta} - \overline{g}^{\zeta}_{\beta 3} (\tau_{\cdot\,\alpha} - \tau_{\cdot\,\lambda} \Phi^{\lambda}_{(\zeta)\alpha})] \sqrt{g^z}\, dx^{\nu}\, d\zeta\, dx^3$$

$$(k, \alpha, \beta = 1, 2, 3;\ \mu, \nu = 1, 2)$$

Тепер перенесемо вектор $d\overline{L}_{(\mu)}$ за правилами паралельного перенесення вздовж лінії x^3 з точки з координатою $x^3 = \zeta$ в серединну поверхню. Позначмо через $\overline{\Phi}^{\bar{i}}_{\lambda}$ величини, які відповідають величинам $\Phi^{\bar{i}}_{\lambda}$ у формулах (7) — (7а), необхідні для обчислення контраваріантних компонентів перенесеного вектора. Тоді, на основі формули (7), дістанемо:

$$\overset{*}{d} L^k_{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{g^{\zeta}}} \{ [\overline{g}^{\zeta}_{k+1,3} (\tau^{\mu}_{\cdot\, k+2} - \tau^{\mu}_{\cdot\,\lambda} \Phi^{\lambda}_{(\zeta)k+2}) - \overline{g}^{\zeta}_{k+2,3} (\tau^{\mu}_{\cdot\, k+1} - \tau^{\mu}_{\cdot\,\lambda} \Phi^{\lambda}_{(\zeta)k+1})] +$$

$$+ [\overline{g}^{\zeta}_{\alpha+1,3} (\tau^{\mu}_{\cdot\,\alpha+2} - \tau^{\mu}_{\cdot\,\lambda} \Phi^{\lambda}_{(\zeta)\alpha+2}) - \overline{g}^{\zeta}_{\alpha+2,3} (\tau^{\mu}_{\cdot\,\alpha+1} - \tau^{\mu}_{\cdot\,\lambda} \Phi^{\lambda}_{(\zeta)\alpha+1})] \overline{\Phi}^{\bar{k}}_{\alpha} \} \sqrt{\overline{g}^z}\, dx^{\nu}\, d\zeta\, dx^3$$

Введімо, як і вище, моменти внутрішніх сил, зведених до серединної поверхні та віднесених до одиниці довжини координатної лінії, яка лежить у відповідній контурній площадці:

$$L^k_{(\mu)} = \frac{\int\limits_{-h}^{+h}\int\limits_{0}^{z} (\overset{*}{d} L^k_{(\mu)})_0}{\sqrt{\overline{g}_{\nu\nu}}\, dx^{\nu}},$$

або після скорочення:

$$L^k_{(} = \frac{1}{\sqrt{\overline{g}_{\nu\nu}}} \int\limits_{-h}^{+h} \int\limits_{0}^{z} \frac{1}{\sqrt{\overline{g}^{\zeta}}} \{ [\overline{g}^{\zeta}_{k+1,3} (\tau^{\mu}_{\cdot\, k+2} - \tau^{\mu}_{\cdot\,\lambda} \Phi^{\lambda}_{(\zeta)k+2}) -$$

$$- \overline{g}^{\zeta}_{k+2,3} (\tau^{\mu}_{\cdot\, k+1} - \tau^{\mu}_{\cdot\,\lambda} \Phi^{\lambda}_{(\zeta)k+1})] + [\overline{g}^{\zeta}_{\alpha+\ \ ,} (\tau^{\mu}_{\cdot\,\alpha+2} - \tau^{\mu}_{\cdot\,\lambda} \Phi^{\lambda}_{(\zeta)\alpha+2}) -$$

$$- \overline{g}^{\zeta}_{\alpha+2,3} (\tau^{\mu}_{\cdot\,\alpha+1} - \tau^{\mu}_{\cdot\,\lambda} \Phi^{\lambda}_{(\zeta)\alpha+1})] \overline{\Phi}^{\bar{k}}_{\alpha} \} \sqrt{g^z}\, d\zeta\, dx^3$$

Цю формулу можна представити в дещо іншій формі, скориставшись з тієї властивості паралельного перенесення, що результат паралельного перенесення деякої тензорної функції можна одержати, переносячи незалежно один від одного її тензорні аргументи і утворюючи з них після перенесення нову тензорну функцію, так само як попередня була утворена з відповідних аргументів до перенесення.

На підставі цього знайдемо:

1) вектор напруження, перенесений в серединну поверхню, матиме вигляд:

$$(dF_{(\mu)i})_0 = \overline{\tau}^{\mu}_{\cdot\, i}\,(1 - \Phi^{\mu}_{\mu})\sqrt{g^z}\, dx^{\nu}\, dx^3$$

($\overline{\tau}^{\mu}_{\cdot\, i}$ — змішані компоненти тензора напружень після паралельного перенесення);

2) вектор dr_i матиме таку форму:

$$(dr_i)_0 = \overline{g}_{i\lambda}\,(\delta^{\lambda}_3 + \overline{\Phi}^{\lambda}_3)\, d\zeta \qquad \left(\delta^{\lambda}_3 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \lambda \neq 3 \\ 1 & \text{„} \quad \lambda = 3 \end{cases}\right)$$

В результаті паралельного перенесення $\overline{g}^{r}_{i3}$ переходить в $\overline{g}_{i3}$ (теорема Ricci).

На підставі цього знайдемо:

$$L^k_{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{g_{\nu\nu}}}\int\limits_{-h}^{+h}\int\limits_{0}^{z} \frac{1}{\sqrt{g}}\,(\overline{g}_{k+1,\lambda}\,\overline{\tau}^{\mu}_{\cdot\, k+2} - \overline{g}_{k+2,\lambda}\,\overline{\tau}^{\mu}_{\cdot\, k+1})\,(1 - \Phi^{\mu}_{\mu})\,(\delta^{\lambda}_3 + \overline{\Phi}^{\lambda}_3)\sqrt{g^z}\, d\zeta\, dx^3$$

$$(\mu = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3)$$

Дослідження одержаних формул буде дано нижче. Перейдемо тепер до складання другої групи еластостатичних рівнянь.

§. 8. Друга група еластостатичних рівнянь. (Вирази зусиль деформації)

Друга група еластостатичних рівнянь охоплює залежності між зведеними до серединної поверхні зусиллями та моментами і деформаціями серединної поверхні. Ці залежності можна одержати на підставі закону Гука [(Вступ, ф-ла (b)].

Для зведених до серединної поверхні напружень і деформацій закон Гука дає можливість написати після відкинення нелінійних членів такі співвідношення:

$$\tau^{ii} = \frac{1}{2}\lambda\, g^{ii} g^{\beta\beta} D^z_{\beta\beta} + \mu\, g^{ii} g^{ii} D^z_{ii} \tag{55}$$

$$(i = 1, 2, 3; \ \beta = 1, 2, 3; \ \text{по } i \text{ не підсумовуємо!})$$

$$\overline{\tau}^{ik} = \mu g^{ii} g^{kk} D^z_{ik}; \qquad (i \neq k) \tag{56}$$

$(i,\ k = 1, 2, 3;$ по i та k не підсумовуємо; λ і μ — пружні сталі Ляме)

Значення компонентів метричного тензора взяті на серединній поверхні.

Знайдемо тепер розклади компонентів тензора напружень на серединній поверхні за степенями z. Очевидно, ці розклади матимуть вигляд:

$$\overline{\tau}^{ik} = \overline{\tau}^{ik}_{(0)} + z\,\overline{\tau}^{ik}_{(1)} + \frac{1}{2} z^2 \overline{\tau}^{ik}_{(2)} + \dots \tag{57}$$

З порівняння формули (57) з формулами (11) і загальним виразом закону Гука [(див. Вступ, ф-ла (b)] дістанемо:

$$\overline{\tau}^{ik}_{(m)} = \left(\frac{1}{2}\lambda g^{ik} g^{\alpha\beta} + \mu g^{i\alpha} g^{k\beta}\right) D_{(m)\alpha\beta},$$

тому що функції g^{ik} від z не залежать ($g^{ik}=0$, якщо $i \neq k$).

Тому ми можемо безпосередньо написати:

$$\overline{\tau}^{ik} = \left(\frac{1}{2}\lambda g^{i\alpha} g^{\alpha\beta} + \mu g^{i\alpha} g^{k\beta}\right)\left(D_{0,\alpha\beta} + z D_{1,\alpha\beta} + \frac{1}{2} z^2 D_{2,\alpha\beta} + \dots\right) \tag{58}$$

(в нашому випадку $g_{ik} = g^{ik} = 0$, якщо $i \neq k$).

Обчислимо тепер значення величин $\Phi^{\overline{i}}_{\lambda}$, $\Phi^{\lambda}_{\overline{i}}$, $\Phi^{\overline{i}}_{(\zeta)\lambda}$ й т. д., що входять у формули (52) — (54).

Через те, що ми відкидаємо члени нелінійні відносно компонентів тензора деформації, ми визначатимемо символи Крістофеля в метриці недеформованої оболонки. При цих умовах відмінними від нуля між символами Крістофеля $\Gamma^{i}_{\lambda 3}$ залишаться символи Γ^{i}_{i3}, які виражаються так:

$$\Gamma^{i}_{i3} = \frac{1}{2 g^{z}_{ii}} \frac{\partial g^{z}_{ii}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \ln(1 - k_i z) \tag{59}$$
$$(i = 1, 2)$$

Обчисляючи $\Phi^{\overline{\mu}}_{\lambda}$, знайдемо:

$$\Phi^{\overline{\mu}}_{\lambda} = \Phi^{\overline{\mu}}_{\mu} = \ln(1 - k_\mu z) + \frac{1}{2!}\ln^2(1 - k_\mu z) + \dots = e^{\ln(1 - k_\mu z)} - 1,$$

тобто

$$\Phi^{\overline{\mu}}_{\mu} = -z k_\mu \tag{60}$$

Визначимо тепер $\Phi^{\mu}_{\overline{\mu}}$. З формули (8а) дістанемо:

$$\Phi^{\mu}_{\overline{\mu}} = \ln(1 - z k_\mu) - \frac{1}{2!}\ln^2(1 - z k_\mu) + \dots = 1 - e^{-\ln(1 - k_\mu z)}$$

тобто

$$\Phi^{\mu}_{\overline{\mu}} = -\frac{z k_\mu}{1 - z k_\mu} = -z k_\mu (1 + z k_\mu + \dots) \tag{61}$$

Так само знайдемо:

$$\Phi^{3}_{(\zeta)\overline{3}} = 0 \tag{61a}$$

Далі, при тих самих умовах знаходимо:

$$\frac{F_{\nu 3}}{\sqrt{g^{\mu\mu}_{(z)}}} = \sqrt{g^{z}} = \sqrt{g^{z}_{11} g^{z}_{22}},$$

або, на основі формул (4):

$$\frac{F_{\nu 3}}{\sqrt{g_{(z)}^{\mu\mu}}} = \sqrt{g^z} = \sqrt{g_{11}\, g_{22}}\,(1 - zk_1)(1 - z\,k_2) \tag{62}$$

З виразів (52)—для зведених зусиль дістанемо:

$$S^i_{(\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{g_{\nu\nu}}}\left(\frac{1}{2}\lambda\, g^{i\sigma} g^{\alpha\beta} + \mu\, g^{i\alpha} g^{\sigma\beta}\right)\int\limits_{-h}^{+h}\left(D_{0,\alpha\beta} + z\,D_{1,\alpha\beta} + \frac{1}{2} z^2 D_{2,\alpha\beta} + \ldots\right)\times$$

$$\times(1 + z\,k_\sigma + z^2 k_\sigma^2 + \ldots)\sqrt{g_{11} g_{22}}\,[1 - z\,(k_1 + k_2) + z^2 k_1 k_2]\,dz$$

$$(\sigma, \nu = 1, 2) \tag{63a}$$

Виконуючи інтегрування і обмежуючись членами порядку h^3, одержимо:

$$S^i_{(\sigma)} = 2\sqrt{g_{\sigma\sigma}}\left(\frac{1}{2}\lambda\, g^{i\sigma} g^{\alpha\beta} + \mu g^{i\alpha} g^{\sigma\beta}\right)\left\{h\,D_{0,\alpha\beta} + \frac{h^3}{3}\left[D_{1,\alpha\beta}(k_\sigma - \right.\right.$$

$$\left.\left. - k_1 - k_2) + \frac{1}{2} D_{2,\alpha\beta}\right]\right\} + \ldots \tag{63b}$$

Визначмо тепер складові зусиль окремо.
Дістанемо:

$$S^1_{(1)} = 2\sqrt{g_{11}}\left\{\frac{1}{2}\lambda\, g^{11} g^{\beta\beta}\left[h\,D_{0,\beta\beta} + \frac{h^3}{3}\left(\frac{1}{2} D_{2,\beta\beta} - D_{1,\beta\beta}\,k_2\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \mu\, g^{11} g^{11}\left[hD_{0,11} + \frac{h^3}{3}\left(\frac{1}{2} D_{2,11} - D_{1,11}\,k_2\right)\right]\right\} + \ldots \tag{64a}$$

$$S^2_{(1)} = 2\mu\sqrt{g_{11}}\, g^{22} g^{11}\left\{h\,D_{0,12} + \frac{h^3}{3}\left(\frac{1}{2} D_{2,12} - D_{1,12}\,k_2\right)\right\} + \ldots \tag{64b}$$

$$S^3_{(1)} = 2\mu\sqrt{g_{11}}\, g^{11}\left[hD_{0,13} + \frac{h^3}{3}\left(\frac{1}{2} D_{2,13} - D_{1,13}\,k_2\right)\right] + \ldots \tag{64c}$$

$$S^1_{(2)} = 2\mu\sqrt{g_{22}}\, g^{11} g^{22}\left\{hD_{0,12} + \frac{h^3}{3}\left(\frac{1}{2} D_{2,12} - D_{1,11}\,k_1\right)\right\} + \ldots \tag{64d}$$

$$S^2_{(2)} = 2\sqrt{g_{22}}\left\{\frac{1}{2}\lambda\, g^{22} g^{\beta\beta}\left[hD_{0,\beta\beta} + \frac{h^3}{3}\left(\frac{1}{2} D_{2,\beta\beta} - D_{1,\beta\beta} k_1\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \mu\, g^{22}\, g^{22}\left[hD_{0,22} + \frac{h^3}{3}\left(\frac{1}{2} D_{2,22} - D_{1,22}\,k_1\right)\right\} + \ldots \tag{64e}$$

$$S^3_{(2)} = 2\mu\sqrt{g_{22}}\, g^{22}\left[h\,D_{0,23} + \frac{h^3}{3}\left(\frac{1}{2} D_{2,23} - D_{1,23}\,k_1\right)\right] + \ldots \tag{64f}$$

Перейдімо тепер до обчислення компонентів долучених моментів. На основі формул (54), (61), (61a), (62), дістанемо:

$$L^k_\sigma = \frac{1}{\sqrt{g_{\nu\nu}}}\left[g_{k+1,3}\left(\frac{1}{2}\lambda g^{\sigma}_{\cdot k+2} g^{\alpha\beta} + \mu g^{\sigma\alpha} g^{\ \beta}_{\cdot k+2}\right) - g_{k+2,3}\left(\frac{1}{2}\lambda g^{\ \sigma}_{\cdot k+1} g_{\alpha\beta} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mu g^{\sigma\alpha} g^{\ \beta}_{\cdot k+1}\right)\right]\int\limits_{-h}^{+h} z\left(D_{0,\alpha\beta} + zD_{1,\alpha\beta} + \frac{1}{2}z^2 D_{2,\alpha\beta} + \ldots\right)(1 - zk_1) \times$$

$$\times (1 - zk_2)(1 + zk_\sigma + z^2 k_\sigma^2 + \ldots)\,dz \tag{65}$$

Виконуючи інтегрування і обмежуючись членами порядку h^3, знайдемо:

$$L^k_{(\sigma)} = \frac{2h^3}{3\sqrt{g_{\nu\nu}}}\left[g_{k+1,3}\left(\frac{1}{2}\lambda g^{\ \sigma}_{\cdot k+2} g^{\alpha\beta} + \mu g^{\sigma\alpha} g^{\ \beta}_{\cdot k+2}\right) - g_{k+2,3}\left(\frac{1}{2}\lambda g^{\ \sigma}_{\cdot k+1} g^{\alpha\beta} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mu g^{\sigma\alpha} g^{\ \beta}_{\cdot k+1}\right)\right][D_{1,\alpha\beta} + D_{0,\alpha\beta}(k_\sigma - k_1 - k_2)] + \ldots \tag{66}$$

Випишімо тепер окремо складові згинаючих моментів. Дістанемо:

$$L^1_{(1)} = -\frac{2h^3}{3\sqrt{g_{22}}} g^{11}(D_{1,12} - D_{0,12} k_2) + \ldots \tag{67a}$$

$$L^2_{(1)} = \frac{2h^3}{3\sqrt{g_{22}}}\left[\frac{1}{2}\lambda g^{\beta\beta}(D_{1,\beta\beta} - D_{0,\beta\beta} k_2) - \mu g^{11}(D_{1,11} - D_{0,11} k_2)\right] + \ldots \tag{67b}$$

$$L^3_{(1)} = 0 \tag{67c}$$

$$L^1_{(2)} = -\frac{2h^3}{3\sqrt{g_{11}}}\left\{\frac{1}{2}\lambda g^{\beta\beta}(D_{1,\beta\beta} - D_{0,\beta\beta} k_1) + \mu g^{22}(D_{1,22} - D_{0,22} k_1)\right\} \tag{67d}$$

$$L^2_{(2)} = \frac{2h^3\mu}{3\sqrt{g_{11}}} g^{22}(D_{1,12} - D_{0,12} k_1) + \ldots \tag{67e}$$

$$L^3_{(2)} = 0 \tag{67f}$$

$$(\beta = 1,\ 2,\ 3)$$

З цих формул випливає, що долучений момент розміщений тангенціально до серединної поверхні. Моменти $L^1_{(1)}$ та $L^2_{(2)}$ — скручуючі моменти, моменти $L^2_{(1)}$ та $L^1_{(2)}$ — згинаючі.

При мало викривленій серединній поверхні членами, що містять множник k_i, у цих та попередніх формулах можна нехтувати.

Виразимо тепер зведені зусилля та моменти через переміщення. Для цього перепишемо формулу (63) для зусиль так:

$$S^i_{(\sigma)} = L\sqrt{g_{\sigma\sigma}}\left\{\lambda g^{i\sigma}(g^{\alpha\alpha} D_{0,\alpha\alpha} + D^{II}_{0,33}) + 2\mu g^{ii} g^{\sigma\sigma} D_{0,i\sigma}\right\} +$$

$$+ \frac{h^3}{3}\sqrt{g_{\sigma\sigma}}\left\{\lambda g^{i\sigma}\left[(g^{\alpha\alpha} D^{I}_{1,\alpha\alpha} + D^{I}_{1,33})(k_\sigma - k_1 - k_2) + \frac{1}{2} g_{\alpha\alpha} D^{I,\alpha\alpha}_{2} + \frac{1}{2} D^{I}_{2,33}\right] + \right.$$

$$\left. + 2\mu g^{ii} g^{\sigma\sigma}\left[\frac{1}{2} D^{I}_{2,i3} + D^{I}_{1,i\sigma}(k_\sigma - k_1 - k_2)\right]\right\} + \ldots \tag{68}$$

$$(\alpha = 1,\ 2)$$

(По i та σ не підсумовуємо! В цій формулі $i, \sigma = 1, 2$).

В першому члені беремо друге наближення для $D_{0,33}$, тому що воно дає можливість одержати додаткові члени порядку h^3. В другому члені скрізь прийняті перші наближення, тому що другі дали б додаткові члени тільки порядку h^5.

Якщо $i=3$, то зусилля визначатиметься з такої формули:

$$S^3_{(\sigma)}=2\mu\sqrt{g_{\sigma\sigma}g^{\sigma\sigma}}\left\{h D^{\mathrm{II}}_{0,\sigma 3}+\frac{h^3}{3}\left[D^{\mathrm{I}}_{1,\sigma 3}(k_\sigma-k_1-k_2)+\frac{1}{2}D^{\mathrm{I}}_{2,\sigma 3}\right]\right\}+\ldots \tag{69}$$

Підставляючи значення величин $D_{\rho,\alpha\beta}$, виражені через переміщення, і користуючись формулами (22а)—(28е), знайдемо такі вирази для зусиль:

$$S^i_{(\sigma)}=h\sqrt{g^{\sigma\sigma}}\left\{\lambda g^{i\sigma}\left[\frac{X_{(+h)3}+X_{(-h)3}}{\lambda+2\mu}+\frac{4\mu}{\lambda+2\mu}\nabla_\alpha u^\alpha\right]+\right.$$

$$\left.+2\mu g^{ii}g^{\sigma\sigma}(\nabla_i u_\sigma+\nabla_\sigma u_i)\right\}+\frac{h^3}{2!}\left\{2\lambda g^{i\sigma}\sqrt{g_{\sigma\sigma}}\left[\left(\nabla_\alpha\frac{X^\alpha_{(+h)}+X^\alpha_{(-h)}}{\lambda+2\mu}-\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{4\mu}{\lambda+2\mu}g^{\alpha\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\alpha u_3-\frac{2\rho}{\lambda+2\mu}F_3\right)(k_\sigma-k_1-k_2)-$$

$$-\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta}\nabla_\sigma\nabla_\alpha\nabla_\beta u_\beta-\frac{1}{2(\lambda+2\mu)}g^{\alpha\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\alpha(X^3_{(+h)}+X^3_{(-h)})-$$

$$\left.-\frac{\rho}{\lambda+2\mu}g^{\alpha\alpha}\nabla_\alpha F_\alpha-\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\nabla_3 F_3\right]+4\mu g^{ii}g^{\sigma\sigma}\left[\left(g_{\sigma\sigma}\nabla_i\frac{X^\sigma_{(-h)}+X^\sigma_{(-h)}}{2\mu}+\right.\right.$$

$$\left.+g^{ii}\nabla_\sigma\frac{X^i_{(+h)}+X^i_{(-h)}}{2\mu}-2\nabla_i\nabla_\sigma u_3\right)(k_\sigma-k_1-k_2)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(2\frac{\lambda+\mu}{\mu}g^{\alpha\alpha}\nabla_i\nabla_\sigma\nabla_\alpha u_\alpha+g^{\alpha\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\alpha\nabla_\sigma u_i+g^{\alpha\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\alpha\nabla_i u_\sigma+\right.$$

$$+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\nabla_i\nabla_\sigma\frac{X_{(+h)3}+X_{(-h)3}}{\mu}-\frac{2\lambda}{\mu}g^{\alpha\alpha}\nabla_i\nabla_\sigma\nabla_\alpha u_\alpha+\frac{\rho}{\mu}\nabla_\sigma F_i+$$

$$\left.\left.+\frac{\rho}{\mu}\nabla_i F_\sigma\right)\right]-\frac{3\lambda g^{i\sigma}\sqrt{g^{\sigma\sigma}}}{\lambda+2\mu}\left[\frac{8\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta}\nabla_\alpha\nabla^\beta\nabla_\alpha u_\beta+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}g^{\alpha\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\alpha(X_{(+h)3}+X_{(-h)})+2\rho g^{\alpha\alpha}\nabla_\alpha F_\alpha-2\rho\nabla_3 F_3\right]\right\}+\ldots \tag{70a}$$

($i,\sigma=1,2$; $\alpha=1,2$; по i та σ не підсумовуємо!).

$$S^3_{(\sigma)}=h\sqrt{g^{\sigma\sigma}}(X^\sigma_{(+h)}+X^\sigma_{(-h)})+\frac{2}{3}h^3 g^{\sigma\sigma}\sqrt{g^{\sigma\sigma}}\left\{\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\times\right.$$

$$\times\nabla_\sigma\nabla_\alpha(X^\alpha_{(+h)}+X^\alpha_{(-h)})-g^{\alpha\alpha}\left[\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\nabla_\sigma\nabla_\alpha\nabla_\alpha u_3-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\nabla_\sigma\nabla_\alpha\frac{X_{(+h)\alpha}+X_{(-h)\alpha}}{2\mu}-\nabla_\alpha\nabla_\alpha\frac{X_{(+h)\sigma}+X_{(-h)\sigma}}{2\mu}\right]-$$

$$-\frac{\lambda\rho}{\mu(\lambda+2\mu)}\nabla_\sigma F_3+(k_\sigma-k_1-k_2)\left[\frac{1}{2(\lambda+2\mu)}\nabla_\sigma(X_{(+h)3}+X_{(-h)3})-g^{\alpha\alpha}\nabla^\alpha\nabla_\alpha u_\sigma-\right.$$

$$\left.-\frac{2(2\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}g^{\alpha\alpha}\nabla_\sigma\nabla_\alpha u_\alpha-\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\nabla_\sigma(X_{(+h)3}+X_{(-h)3})-\frac{\rho}{\mu}F_\sigma\right]\Bigg\}+\ldots \quad (70b)$$

($\alpha=1, 2$; $\sigma=1, 2$; по σ та α не підсумовуємо!)

Перейдімо до розгляду згинаючих моментів. Вираз (66) для згинаючих моментів можна представити в такій формі:

$$L^k_{(\sigma)}=\frac{2h^3}{3\sqrt{g_{\nu\nu}}}\left\{\frac{1}{2}\lambda(g_{k+1,3}\,g^{\cdot\sigma}_{\cdot k+2}-g_{k+2,3}\,g^{\cdot\sigma}_{\cdot k+1})[g^{\alpha\alpha}D^{\mathrm{I}}_{1,\alpha\alpha}+\right.$$

$$+(g^{\alpha\alpha}D^{\mathrm{I}}_{0,\alpha\alpha}+D^{\mathrm{I}}_{0,33})(k_\sigma-k_1-k_2)+D^{\mathrm{I}}_{1,33}]+$$

$$+\mu g^{\sigma\sigma}(g_{k+1,3}\,g^{\cdot\alpha}_{\cdot k+2}-g_{k+2,3}\,g^{\cdot\alpha}_{\cdot k+1})[D^{\mathrm{I}}_{1,\sigma\alpha}+D^{\mathrm{I}}_{0,\sigma\alpha}(k_\sigma-$$

$$-k_1-k_2)]+\mu g^{\sigma\sigma}(g_{k+1,3}\,g^{\cdot 3}_{\cdot k+2}-g_{k+2,3}\,g^{\cdot 3}_{\cdot k+1})[D^{\mathrm{I}}_{1,\sigma 3}+$$

$$\left.+D^{\mathrm{I}}_{0,\sigma 3}(k_\sigma-k_1-k_2)]\right\} \quad (71)$$

($\alpha, \sigma=1, 2$; $k, k+1, k+2=1, 2, 3$; по σ не пісумовуємо!)

На основі формул (20a), (20b) і тих, що з них випливають, дістанемо:

$$L^k_{(\sigma)}=\frac{2h^3}{3\sqrt{g_{\nu\nu}}}\left\{\frac{1}{2}\lambda(g_{k+1,3}\,g^{\cdot\sigma}_{\cdot k+2}-g_{k+2,3}\,g^{\sigma}_{\cdot k+1})\times\right.$$

$$\times\left[\nabla_\alpha\frac{X^\alpha_{(+h)}+X^\alpha_{(-h)}}{\lambda+2\mu}-\frac{4\mu}{\lambda+2\mu}g^{\alpha\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\alpha u_3+\right.$$

$$+\left(\frac{X^3_{(+h)}+X^3_{(-h)}}{\lambda+2\mu}-\frac{4\mu}{\lambda+2\mu}g^{\alpha\alpha}\nabla_\alpha u_\alpha\right)(k_\sigma-k_1-k_2)-$$

$$\left.-\frac{2\rho}{\lambda+2\mu}F_3\right]+\mu g^{\sigma\sigma}(g_{k+1,3}\,g^{\cdot\alpha}_{\cdot k+2}-g_{k+2,3}\,g^{\cdot\alpha}_{\cdot k+1})\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2\mu}\nabla_\sigma(X_{(+h)\alpha}+X_{(-h)\alpha})+\frac{1}{2\mu}\nabla_\alpha(X_{(+h)\sigma}+X_{(-h)\sigma})-\right.$$

$$\left.-2\nabla_\alpha\nabla_\sigma u_3+(\nabla_\sigma u_\alpha+\nabla_\alpha u_\sigma)(k_\sigma-k_1-k_2)\right]+\mu g^{\sigma\sigma}(g_{k+1,3}\,g^{\cdot 3}_{\cdot k+2}-$$

$$-g_{k+2,3}\,g^{\cdot 3}_{\cdot k+1})\left[-\frac{\lambda}{2(\lambda+2\mu)}\nabla_\sigma(X^3_{(+h)}+X^3_{(-h)})-\right.$$

$$-\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}g^{\alpha\alpha}\nabla_\sigma\nabla_\alpha u_\alpha-g^{\alpha\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\alpha u_\sigma-\frac{\rho}{\mu}F_\sigma+$$

$$\left.\left.+\frac{g_{\sigma\sigma}}{2\mu}(X^\sigma_{(+h)}+X^\sigma_{(-h)})(k_\sigma-k_1-k_2)\right]\right\}+\ldots \quad (72)$$

($\alpha, \sigma=1, 2$; по σ не підсумовуємо!)

Формули (70a)—(70b) та (72) виражають зусилля і моменти через переміщення та складають другу групу еластостатичної системи рівнянь теорії оболонок. Ці формули звичайно спрощуються шляхом введення різних допоміжних гіпотез щодо характеру деформованого стану оболонки. Таким чином, виникають окремі теорії оболонок. Декілька подібних гіпотез буде розглянуто нами нижче.

§ 9. Рівняння рівноваги (третя група рівнянь еластостатичної системи)

Переходимо до складання третьої групи рівнянь еластостатичної системи, а саме рівнянь рівноваги елементу оболонки. Механічними умовами рівноваги є, як відомо, рівність нулю головних вектора та моменту зовнішніх сил, що діють на контур серединної поверхні і утворених, як було зазначено вище, з елементарних сил в результаті їх зведення до серединної поверхні. Виберемо одну з вершин елементу серединної поверхні за центр зведення так, щоб переходи до сторін, не суміжних з цією вершиною, проходили в напрямах додатних диференціалів dx^1 та dx^2. Зводячи до центра зведення вектори сил, які діють на контурну площадку (2, 3), дістанемо:

$$\Delta(S^i_{(1)}\sqrt{g_{22}}dx^2)=\left[\frac{\partial(S^i_{(1)}\sqrt{g_{22}})}{\partial x^1}+\Gamma^i_{\lambda 1}S^\lambda_{(1)}\sqrt{g_{22}}\right]dx^1\,dx^2$$

(Перенесення проводимо, переносячи вектори вздовж лінії $x^2=\mathrm{const}$).

Так само знайдемо:

$$\Delta(S^i_{(2)}\sqrt{g_{11}}\,dx^1)=\left[\frac{\partial(S^i_{(2)}\sqrt{g_{11}})}{\partial x^2}+\Gamma^i_{\lambda 2}S^\lambda_{(2)}\sqrt{g_{11}}\right]dx^1\,dx^2$$

Перенесемо в серединну поверхню зовнішні сили, що діють на зовнішні поверхні оболонки. Позначімо контраваріантні компоненти сил, діючих на одиниці зовнішніх поверхень оболонки відповідно $X^i_{(\pm h)}$. Сили, що діють на елемент зовнішніх поверхень, визначатимуться відповідно так:

$$X^i_{(\pm h)}\sqrt{g^h_{11}g^h_{22}-(g^h_{12})^2}\,dx^1\,dx^2$$

Перенесемо ці сили, за правилами паралельного перенесення, в серединну поверхню, вздовж ліній x^3. Одержимо зведений вектор:

$$F^i\,dx^1\,dx^2=\left\{(X^i_{(+h)}+X^\lambda_{(+h)}\,\Phi^i_{(+h)\lambda})\sqrt{g^{+h}_{11}g^{+h}_{22}-(g^{+h}_{12})^2}+\right.$$

$$\left.+(X^i_{(-h)}+X^\lambda_{(-h)}\,\Phi^i_{(-h)\lambda})\sqrt{g^{-h}_{11}g^{-h}_{22}-(g^{-h}_{12})^2}\right\}dx^1\,dx^2, \qquad (73)$$

де $\Phi^i_{(h)\lambda}$ визначається з формул (7a) після заміни z на h.

Додаючи зведені вектори сил, дістанемо три перші умови рівноваги:

$$\partial_k(S^i_{(k)}\sqrt{g_{k+1\,k+1}})+\Gamma^i_{\lambda k}S^\lambda_{(k)}\sqrt{g_{k+1\,k+1}}+F^i=0 \qquad (74)$$

$$(\lambda, i=1,2,3;\quad k=1,2)$$

(Знаки сумації по k пропускаємо. Числа k і $k+1$ набирають відповідно значень, які утворюють переставлення чисел 1, 2).

Переходимо тепер до рівнянь моментів. В ці рівняння входитимуть, крім долучених моментів $L^k_{(\sigma)}$, моменти, безпосередньо залежні від зусиль $S^k_{(\sigma)}$. Щождо моментів $L^k_{(\sigma)}$, то вони увійдуть у рівняння так само, як зусилля $S^k_{(\sigma)}$ увійшли у рівняння (74). Тому ми докладно розберемо лише моменти, безпосередньо залежні від $S^k_{(\sigma)}$. Обчислення будемо вести в коваріантних компонентах.

Обчислюючи, знайдемо:

$$dM^i_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\bar{g}_{i+1,k}\, S_{(k)i+2}\sqrt{\bar{g}_{k+1,k+1}} - \bar{g}_{i+2,k}\, S_{(k)i+1}\sqrt{\bar{g}_{k+1,k+1}}\right) dx^1 dx^2$$

(Підсумовуємо по k; k і $k+1$ набирають значень 1, 2).

Аналогічно обчислюються моменти зовнішніх сил, зведені до серединної поверхні. Шукані умови рівноваги набирають вигляду:

$$\partial_k\left(L^i_{(k)}\sqrt{\bar{g}_{k+1k+1}}\right) + \Gamma^i_{\lambda k} L^\lambda_{(k)}\sqrt{\bar{g}_{k+1k+1}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}\left(\bar{g}_{i+1,k} S_{(k)i+2}\sqrt{\bar{g}_{k+1,k+1}} - g_{i+2,k} S_{(k)i+1}\sqrt{\bar{g}_{k+1,k+1}}\right) + M^i = 0 \qquad (75)$$

(Індекси i, $i+1$, $i+2$ набирають значень 1, 2, 3; k і $k+1$ — значень 1, 2. M^i — момент зовнішніх сил, перенесених в серединну поверхню).

Рівняння рівноваги (74) та (75) можна записати в інваріантній формі, якщо індекс (k) розглядати як другий контраваріантний індекс і помітити, що в вибраній нами системі координат

$$S^\lambda_{(3)} = L^\lambda_{(3)} \overset{*}{=} 0;\quad \partial_3\left(S^i_{(k)}\sqrt{\bar{g}_{k+1k+1}}\right) \overset{*}{=} \partial_3\left(L^i_{(k)}\sqrt{\bar{g}_{k+1k+1}}\right) = 0$$

Тоді одержимо:

$$\nabla_k\left(S^i_{(k)}\sqrt{\bar{g}_{k+1k+1}}\right) + F^i = 0 \qquad (76)$$

$$\nabla_k\left(L^i_{(k)}\sqrt{\bar{g}_{k+1k+1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}\left(\bar{g}_{i+1,k}\, S_{(k)i+2} - \bar{g}_{i+2,k}\, S_{(k)i+1}\right)\sqrt{\bar{g}_{k+1k+1}} + M^i = 0 \qquad (77)$$

$$(k, k+1 = 1,\ 2;\quad i,\quad i+1,\quad i+2 = 1,\ 2,\ 3)$$

(В цих рівняннях підсумовуємо по k, надаючи k, і відповідно $k+1$, значень 1 та 2).

Перейдімо до дослідження одержаної системи еластостатичних рівнянь.

§ 10. Дослідження третього рівняння системи (75)

Умови рівності нулю головного моменту сил, що діють на кінці елементу оболонки, складаються з трьох рівнянь, які відповідно виражають рівність нулю трьох складових головного моменту.

Ми вже бачили, що головний момент долучених пар сил $\overline{L}_{(\sigma)}$ лежить повністю в серединній поверхні деформованої оболонки, тому що його складова $L^3_{(\sigma)}$ дорівнює нулю в прийнятій нами системі координат. Безперечно, в інших системах вектор $\overline{L}_{(\sigma)}$ матиме всі складові відмінними від нуля, але між ними завжди існуватиме лінійна залежність, яка виражає, що вектор $\overline{L}_{(\sigma)}$ — вектор, дотичний до серединної поверхні.

Ми зараз покажемо, що умови рівноваги (75) приводять також до висновку, що вектор — момент зовнішніх сил M повинен бути дотичним до серединної поверхні. Звідси можна буде зробити висновок, що з трьох рівнянь системи (75) незалежними є тільки два. Це було помічено ще Ф. Крауссом в його роботі з теорії оболонок. (Докладно про роботу Краусса див. нижче). Ляв уникав користуватися третім рівнянням системи (75), мотивуючи це тим, що для розв'язування задач воно зайве, але відкидання його припустиме з погляду наближеного характеру всієї системи в цілому. Для деяких наближень Ляв знайшов, ще ці рівняння обертаються в тотожність.

Перейдімо до доведення висловленого нами положення. Зважаючи на інваріантний характер еластостатичних рівнянь, виведених нами, досить довести обертання третього рівняння системи (75) в тотожність в деякій, спеціально вибраній, координатній системі. Як таку виберемо систему координат з координатними лініями $\overline{x}^1$ та $\overline{x}^2$, які збігаються з лініями кривини деформованої серединної поверхні. Третю вісь напрямимо по нормалі до деформованої серединної поверхні та масштаб на ній вважатимемо рівним одиниці.

Тоді третє рівняння системи (75) набере такої форми:

$$\overline{\Gamma}^3_{11}\overline{L}^1_{(1)}\sqrt{\overline{g}_{22}}+\overline{\Gamma}^3_{22}\overline{L}^2_{(2)}\sqrt{\overline{g}_{11}}+\frac{1}{\sqrt{\overline{g}}}\left\{\overline{g}_{11}\overline{S}_{(1)2}\sqrt{\overline{g}_{22}}-\overline{g}_{22}S_{2(1)}\sqrt{\overline{g}_{11}}\right\}+\overline{M}^3=0 \tag{78}$$

(Риска над позначенням деякої величини показує, що її значення віднесено до вказаної вище координатної системи).

Далі знайдемо:

$$\overline{S}_{(1)2}=\overline{g}_{22}\,\overline{S}^2_{(1)};\quad \overline{S}_{(2)1}=\overline{g}_{11}S^1_{(2} \tag{79}$$

На основі формули (5) дістанемо:

$$\overline{\Gamma}^3_{11}=\overline{g}_{11}\overline{k}_1;\quad \overline{\Gamma}^3_{22}=\overline{g}_{22}\,\overline{k}_2 \tag{80}$$

Далі знаходимо:

$$\Phi^1_1=-\frac{\overline{k}_1\overline{z}}{1-\overline{k}_1\overline{z}};\quad \Phi^2_2=-\frac{\overline{z}\,\overline{k}_2}{1-\overline{z}\,\overline{k}_2} \tag{81}$$

$$\sqrt{\overline{g}^z}=\frac{\overline{\Gamma}_{\nu 3}}{\sqrt{\overline{g}_z^{\mu\mu}}}=\sqrt{\overline{g}}\,(1-\overline{z}\,\overline{k}_1)\,(1-\overline{z}\,\overline{k}_2) \tag{82}$$

На основі формул (52) — (54) дістанемо:

$$\overline{S}^2_{(1)}=\sqrt{\overline{g}_{11}}\int\limits_{-\overline{h}}^{+\overline{h}}\overline{\tau}^{12}(1-\overline{z}\,\overline{k}_2)d\overline{z} \tag{83a}$$

$$\overline{S}^1_{(2)} = \sqrt{\overline{g}_{22}} \int_{-\overline{h}}^{+\overline{h}} \overline{\tau}^{12}(1 - \overline{z}\,\overline{k}_1)\,d\overline{z} \tag{83a}$$

$$\overline{L}^1_{(1)} = -\sqrt{\overline{g}_{22}} \int_{-\overline{h}}^{+\overline{h}} \overline{z}\,\overline{\tau}^{12}(1 - \overline{z}\,\overline{k}_2)\,d\overline{z} \tag{83c}$$

$$\overline{L}^2_{(2)} = \sqrt{\overline{g}_{11}} \int_{-\overline{h}}^{+\overline{h}} \overline{z}\,\overline{\tau}^{12}(1 - \overline{z}\,\overline{k}_1)\,d\overline{z} \tag{83d}$$

На основі формул (79), які виражають коваріантні компоненти зусиль через контраваріантні, рівнянню рівноваги (78) можна надати такого вигляду:

$$\sqrt{\overline{g}_{22}}\left(S^2_{(1)}\sqrt{\overline{g}_{11}\overline{g}_{22}} + L^1_{(1)}\overline{\Gamma}^3_{11}\right) - \sqrt{\overline{g}_{11}}\left(\overline{S}^1_{(2)}\sqrt{\overline{g}_{11}\overline{g}_{22}} - \overline{L}^2_{(2)}\overline{\Gamma}^3_{22}\right) + \overline{M}^3 = 0, \tag{84}$$

або

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \overline{M}^3 = 0,$$

де I і II позначають відповідно перший та другий доданки в рівняннях (84). На основі формул (80)—(83) перший та другий доданки матимуть такий вигляд:

$$\mathrm{I} = \overline{g}_{11}\overline{g}_{22} \int_{-\overline{h}}^{+\overline{h}} \overline{\tau}^{12}(1 - \overline{z}\,\overline{k}_1)(1 - \overline{z}\,\overline{k}_2)\,d\overline{z}$$

$$\mathrm{II} = -\overline{g}_{11}\overline{g}_{22} \int_{-\overline{h}}^{+\overline{h}} \overline{\tau}^{12}(1 - \overline{z}\,\overline{k}_1)(1 - \overline{z}\,\overline{k}_2)\,d\overline{z}$$

Отже, рівняння системи (75) зводиться до умови:

$$\overline{M}^3 = 0, \tag{85}$$

яке виражає умови дотикання вектора $\overline{M}$ до серединної поверхні.

Тому, система зведених до серединної поверхні зусиль та моментів не може врівноважити зовнішні сили, якщо вони зводяться до пари сил, що лежить в площині, паралельній до дотичної до серединної поверхні площини.

Із всього сказаного випливає, що з трьох рівнянь системи (75) незалежних буде тільки два.

Це твердження базується на інваріантних властивостях одержаних нами еластостатичних рівнянь.

§ 11. Зведення еластостатичності системи трьох рівнянь

Основні формули зведення тримірної задачі теорії пружності до двомірної виражають деформації в різних точках оболонки, зусилля і моменти через переміщення точок серединної поверхні та їх похідні, а також зовнішні сили, прикладені до елементу оболонки. Таким чином, шістнадцять невідомих функцій (шість зусиль, чотири моменти і шість компонентів тензора деформації) виражаються через три складові вектора переміщення точок серединної поверхні. Крім залежностей між вказаними функціями і переміщеннями, ми маємо п'ять незалежних умов рівноваги. Отже, кількість рівнянь на два перевищує кількість невідомих функцій. Проте, це не є серйозною перешкодою для розв'язання задачі. Треба мати на увазі, що одержані нами рівняння — рівняння наближені. Тому, вибір певного шляху для розв'язання основної системи рівнянь теорії оболонок відповідає лише вибору деякого наближення [1]).

Цілком зрозуміло, що інтеграли рівнянь тримірної задачі теорії пружності одночасно задовольняють всі п'ять рівнянь рівноваги, отже незалежних між цими рівняннями є лише три. Але встановити це безпосередньо з допомогою наших наближених формул нам здається неможливим.

Щоб звести основну задачу теорії оболонок до інтегрування трьох рівнянь, ми виберемо звичайний прийом класичної теорії оболонок, який полягає в попередньому виключенні перерізуючих сил на основі перших двох рівнянь моментів (останнє рівняння ми не беремо до уваги, тому, що воно або є наслідком рівнянь, або зводиться до рівності $\overline{M}^3=0$, як було вказано вище).

Можна було б вибрати інший прийом, наприклад, не користуватися рівняннями моментів або будьякими двома іншими рівняннями рівноваги, а скористуватися для виключення перерізуючих сил рівняннями (75). Але точність цих рівнянь напевно значно нижча точності рівнянь моментів; формули (70а)—(72) відповідають наближеному представленню функцій в даній точці, а рівняння моментів відповідають наближеному представленню функції в середньому. На підставі фізичних особливостей питання можна твердити, що останнє представлення повинне дати хороші результати, тому що воно виражає умову рівноваги елементу оболонки в цілому.

Переходимо до визначення перерізуючих сил. Якщо ми хочемо одержати лінійні рівняння відносно складових вектора переміщень та його похідних, нам треба нехтувати змінами метричного тензора, пов'язаними з деформаціями. Тоді коваріантні компоненти зусиль визначаться через контраваріантні в такий спосіб:

$$S_{(\alpha)\beta}=g_{\beta\beta}S_{(\alpha)}^{\beta} \tag{86}$$

(По β не підсумовуємо!).

На основі цього перші два рівняння моментів можна переписати так:

$$\partial_k\left(L_{(k)}^{1}\sqrt{g_{k+1,k+1}}\right)+\Gamma_{\alpha k}^{1}L_{(k)}^{\alpha}\sqrt{g_{k+1\,k+1}}+S_{(2)}^{3}\sqrt{g_{22}}+M^1=0 \tag{87a}$$

$$\partial_k\left(L_{(k)}^{2}\sqrt{g_{k+1,\,k+1}}\right)+\Gamma_{\alpha k}^{2}L_{(k)}^{\alpha}\sqrt{g_{k+1\,k+1}}-S_{(1)}^{3}\sqrt{g_{11}}+M^2=0 \tag{87b}$$

$$(\alpha,\ k,\ k+1=1,\ 2)$$

Звідси знаходимо:

$$S_{(1)}^{3}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left[M^2+\nabla_k\left(L_{(k)}^{2}\sqrt{g_{k+1\,k+1}}\right)\right] \tag{88a}$$

[1]) Більш докладно див. ч. II цієї праці.

$$S^3_{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}[M^1 + \nabla_k (L^1_{(k)}\sqrt{g_{k+1\,k+1}})] \tag{88b}$$

В цих формулах через ∇_k позначена абсолютна двомірна похідна. Індекс (k) розглядається як контраваріантний індекс.

Рівняння рівноваги (74) можна представити з допомогою двомірних похідних у такій формі:

$$\nabla_k(S^i_{(k)}\sqrt{g_{k+1\,k+1}}) + \Gamma^i_{31}S^3_{(1)}\sqrt{g_{22}} + \Gamma^i_{32}S^3_{(2)}\sqrt{g_{11}} + F^i = 0 \tag{89}$$

$$(i = 1,\ 2)$$

Третє рівняння залишимо покищо без змін.

Зазначмо, що в нашому випадку символи Крістофеля $\Gamma^i_{3\alpha}$ визначаються так:

$$\Gamma^i_{31} = g^{i\alpha}\Gamma_{\alpha,31} = \frac{1}{2} g^{ii}\Gamma_{i,31}$$

$$\Gamma^i_{32} = \frac{1}{2} g^{ii}\,\Gamma_{i,32}\,,$$

звідки знаходимо:

$$\Gamma^i_{31} = \frac{1}{2} g^{ii}\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^3}; \quad \Gamma^i_{32} = \frac{1}{2} g^{ii}\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^3} \ \text{(по } i \text{ не підсумовувати!)}$$

Відрізнятися від нуля будуть лише символи

$$\Gamma^1_{13} = -k_1; \qquad \Gamma^2_{32} = -k_2$$

Тому перші рівняння перепишуться так:

$$\nabla_k(S^1_{(k)}\sqrt{g_{k+1\,k+1}}) - k_1 S^3_{(1)}\sqrt{g_{22}} + F^1 = 0 \tag{90a}$$

$$\nabla_k(S^2_{(k)}\sqrt{g_{k+1k+1}}) - k_2 S^3_{(2)}\sqrt{g_{11}} + F^2 = 0 \tag{90b}$$

$$(k,\ k+1 = 1,\ 2)$$

Третє рівняння можна розглядати, як скалярне рівняння в двомірній системі координат на серединній поверхні, і надати йому такої форми:

$$\nabla_k(S^3_{(k)}\sqrt{g_{k+1\,k+1}}) - S^3_{(k)}\sqrt{g_{k+1\,k+1}}\ \Gamma^\lambda_{k\lambda} + \Gamma^3_{11}S^1_{(1)}\sqrt{g_{22}} + \Gamma^3_{22}S^2_{(2)}\sqrt{g_{11}} + F^3 = 0$$

або остаточно:

$$\nabla_k(S^3_{(k)}\sqrt{g_{k+1\,k+1}}) - S^3_{(k)}\sqrt{g_{k+1\,k+1}}\,\partial_k \ln\sqrt{g_{11}g_{22}} + g_{11}k_1 S^1_{(1)}\sqrt{g_{22}} +$$
$$+ g_{22}k_2 S^2_{(2)}\sqrt{g_{11}} + F^3 = 0 \tag{91}$$

Помічаючи, що $S^3_{(k)}$ на основі формул (88a)—(88b) можна записати в такій формі:

$$S^3_{(k)} = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{g_{kk}}}\left\{M^{k+1} + \nabla_\alpha(L^{k+1}_{(\alpha)}\sqrt{g_{\alpha+1\alpha+1}})\right\}, \tag{92}$$

де k і $k+1$, α і $\alpha+1$ набирають значень 1 і 2 (по k не підсумовуємо!), можна надати рівнянням рівноваги такого вигляду:

$$\nabla_k \left(S^i_{(k)} \sqrt{g_{k+1\,k+1}}\right) + (-1)^i_i \frac{k_i \sqrt{g}}{g^{ii}} \left\{ M^{i+1} + \nabla_\alpha \left(L^{i+1}_{(\alpha)} \sqrt{g_{\alpha+1\,\alpha+1}}\right\} + F^i = 0 \quad (93)$$

$$(i,\ i+1,\ k,\ k+1,\ \alpha,\ \alpha+1 = 1,\ 2) \qquad \text{(По } i \text{ не підсумовуємо!)}$$

$$(-1)^{k+1} \nabla_k \left\{ \frac{\sqrt{g}}{g_{kk}} \left[M^{k+1} + \nabla_\alpha \left(L^{k+1}_{(\alpha)} \sqrt{g_{\alpha+1\,\alpha+1}}\right)\right]\right\} +$$

$$+ (-1)^k \frac{1}{g_{kk}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k} \left\{ M^{k+1} + \nabla_\alpha \left(L^{k+1}_{(\alpha)} \sqrt{g_{\alpha+1\,\alpha+1}}\right)\right\} +$$

$$+ g_{\alpha\alpha} k_\alpha S^\alpha_{(\alpha)} \sqrt{g_{\alpha+1\,\alpha+1}} + F^3 = 0 \quad (94)$$

$$(k,\ k+1,\ \alpha,\ \alpha+1 = 1,\ 2)$$

Підставляючи в ці рівняння значення зусиль та моментів, виражені через переміщення [формули (70а)—(72)], дістанемо три рівняння з трьома невідомими функціями u_i. Це підставлення ми тут не будемо виконувати через громіздкість одержуваних рівнянь. Зручніше робити підставлення в кожному окремому випадку окремо. Складність основної системи рівнянь теорії оболонок примушує вводити окремі припущення про характер деформованого стану оболонки, про співвідношення між її розмірами і т. д., які дозволяють відкинути деякі члени. В дальшому ми докладно зупинимося на деяких наближених теоріях, одержуваних шляхом відкидання ряду членів із загальних рівнянь. Вадою їх є те, що іноді поряд з дійсно малими членами відкидаються члени значної величини. Це стається в наслідок недосконалості методів, застосовуваних для виведення основної еластостатичної системи. Зауважмо, нарешті, що відкидання нелінійних членів, проведене нами, неприпустиме в тих випадках, коли оболонка навантажена силами, які лежать в серединній поверхні. В цих випадках необхідно зберігати у рівняннях нелінійні члени, які містять компоненти зусиль $S^1_{(i)}$ та $S^2_{(i)}$, тому що ці члени за величиною можуть перевищувати решту членів.

§ 12. Граничні умови

Розглянемо тепер ті умови на границях оболонки, які повинні задовольнятися шуканими функціями. Ці умови, як відомо, бувають двох типів: 1) на границі оболонки задані зовнішні сили та 2) на границі оболонки задані переміщення. Розглянемо спочатку умови першого типу.

Нехай рівняння дуги контура границі оболонки, що лежить в серединній поверхні, будуть

$$x^i = x^i_0(s) \quad (95)$$

$$(i = 1,\ 2)$$

Зробимо перетворення координат так, щоб дуга контура була одною з координатних ліній, а друге сімейство координатних ліній перетинало дугу контура під прямим кутом. Приймемо, що останнє сімейство координатних ліній є сімейство геодезичних кривих деформованої серединної поверхні. Як нові координати виберемо довжину дуги контура і довжину дуги другого сімейства координатних ліній.

Через те, що ми будемо розглядати лише вузьку смужку оболонки, безпосередньо прилеглу до контура серединної поверхні, формули перетворення координат будемо шукати у вигляді степеневих рядів, впорядкованих за степенями n, де n — довжина дуги координатної лінії, ортогональної до дуги контура. Нехай

$$x^i = a_0^i(s) + n a_1^i(s) + n^2 a_2^i(s) + \dots, \qquad (96)$$

$$(i = 1, 2)$$

де s — довжина дуги контура.

Довжину дуги n будемо відлічувати від дуги контура. Додатним напрямом будемо вважати напрям зовнішньої нормалі до дуги контура. Тоді при $n = 0$ ми дістанемо:

$$x^i = a_0^i(s)$$

Це рівняння повинне бути рівнянням дуги контура. Отже,

$$a_0^i(s) = x_0^i(s)$$

Далі, зважаючи на умову ортогональності, дістанемо:

$$(\overline{g}_{ik}\, x'^i\, \dot{x}^k)_{n=0} = 0,$$

де x'^i позначено похідну від x^i по n, а $\dot{x}^k$ — похідну від x^k по s.

Цю умову можна переписати в такій формі:

$$\left(\frac{x'^1}{x'^2}\right)_{n=0} = -\frac{\overline{g}_{2\alpha}\, \dot{x}^\alpha}{\overline{g}_{1\alpha}\, \dot{x}^\alpha} = q(s) \qquad (97)$$

Помічаючи, що

$$x'^i = a_1^i(s) + 2n a_2^i(s) + \cdots,$$

знайдемо:

$$a_1^i(s) = (-1)^i \lambda(s)\, \overline{g}_{i+1,\alpha}\, \dot{x}^\alpha \qquad \text{(по } i \text{ не підсумовуємо!)}$$

Функцію λ знайдемо з умови:

$$(\overline{g}_{ik}\, x'^i\, x'^k)_{n=0} = 1;$$

$$\lambda^2(s) \doteq \frac{1}{(\dot{x})^2\,(\overline{g}_{11} - 2\overline{g}_{12} + \overline{g}_{22})}$$

Диференціюючи далі (96), одержимо:

$$x''^i = 2a_2^i(s) + 6a_3^i(s)\, n + \cdots$$

Через те, що сімейство координатних ліній збігається з сімейством геодезичних ліній, знайдемо:

$$2a_2^i(s)+\cdots+\Gamma^i_{\alpha\beta}\left[a_1^\alpha(s)+2na_2^\alpha(s)+\cdots\right]\left[a_1^\beta(s)+2na_2^\beta(s)+\cdots\right]=0$$

Покладаючи $n=0$, знайдемо:

$$a_2^i(s)=-\frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{\alpha\beta}\right)_{n=0}a_1^\alpha(s)\,a_1^\beta(s) \tag{98}$$

Через те, що до формул перетворення тензорних величин (власне тензорів та символів Крістофеля) входять похідні не вищі 2-го порядку, ми обмежимося обчисленими коефіцієнтами. Після перетворення координат будемо розглядати дугу контура, як координатну лінію $\bar{x}^1$, а дугу нормальної кривої, — як координатну лінію $\bar{x}^2$. Знайдемо тепер компоненти головного вектора сил пружності, прикладених до деякої дуги контура, і компоненти відповідного моменту долучених пар сил.

Переносячи всі сили паралельно до самих себе в деяку точку дуги контура, вздовж цієї дуги, одержимо компоненти головного вектора:

$$R^i=\int_0^l\left(S^i_{(s)}+S^\lambda_{(s)}\Phi^{\bar{i}}_{(s)\lambda}\right)d\bar{x}^1, \tag{99}$$

де $\Phi^{\bar{i}}_{(s)\lambda}$ має вигляд, аналогічний вигляду величин $\Phi^{\bar{i}}_{\lambda}$ [ф-ла (77а)]:

$$\Phi^{\bar{i}}_{(s)\lambda}=\int_0^s\bar{\Gamma}^i_{\lambda 1}(\xi)\,d\xi+\int_0^s\int_0^{\xi_1}\bar{\Gamma}^{\lambda_1}_{\lambda 1}(\xi)\,\bar{\Gamma}^i_{\lambda_1 1}(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi+\cdots, \tag{100}$$

причому символи Крістофеля обчислені в новій системі координат та s — замкнено в границях між значеннями 0 і l.

Головний момент долучених пар сил обчислюється аналогічно моменту, зведеному до серединної поверхні [формула (53)]:

$$\begin{aligned}L^i=L_0^i&+\int_0^l\left(L^i_{(s)}+L^\lambda_{(s)}\Phi^i_{(s)\lambda}\right)d\bar{x}^1+\int_0^l\int_0^{\bar{x}^1}\frac{1}{\sqrt{\bar{g}^\sigma}}\Big\{\bar{g}^{(\sigma)}_{i+1,1}\left(S_{(s)i+2}-S_{(s)\lambda}\Phi^\lambda_{(\sigma)i+2}\right)-\bar{g}^{(\sigma)}_{i+2,1}\left(S_{(s)i+1}-S_{(s)\lambda}\Phi^\lambda_{(\sigma)i+1}\right)+\\&+\left[\bar{g}^{(\sigma)}_{\beta+1,1}\left(S_{(s)\beta+2}-S_{(s)\lambda}\Phi^\lambda_{(\sigma)\beta+2}\right)-g^{(\sigma)}_{\beta+2,1}\left(S_{(s)\beta+1}-S_{(s)\lambda}\Phi^\lambda_{(\sigma)\beta+1}\right)\right]\bar{\Phi}^i_\beta\Big\}\,d\sigma\,d\bar{x}^1\end{aligned} \tag{101}$$

(L_0^i — значення моменту при $l=0$, коваріантні компоненти елементарного переміщення $r_i=g_{i1}\,d\bar{x}^1$).

В цій формулі величини $\Phi^\lambda_{(\sigma)\alpha}$ мають значення, аналогічні величинам $\Phi^\lambda_{(\zeta)\alpha}$ у формулі (53), із заміною ζ на σ і шляху інтегрування вздовж координатної лінії x^3 на шлях інтегрування вздовж дуги контура. Так само визначається решта величин Φ. Значення індекса (σ) аналогічне значенню індекса (ζ) в формулах (53).

З допомогою інтегрування частинами та на основі формули (100) вираз для головного моменту зведених пар сил можна представити в такій формі:

$$L^i = L_0^i + lL_{(l)}^i + \int\limits_0^l \int\limits_0^{\overline{x}^1} \Big\{ -\frac{\partial L_{(s)}^i}{\partial \overline{x}^1} + L_{(s)}^\lambda \overline{\Gamma}_{\lambda 1}^i(\sigma) + L_{(s)}^\lambda \Big[\int\limits_0^\sigma \overline{\Gamma}_{\lambda 1}^{\lambda_1}(\xi) \overline{\Gamma}_{\lambda_1 1}^i(\sigma) d\xi + \cdots \Big] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\overline{g}^{(\sigma)}}} \Big[[\overline{g}_{i+1,1}^{(\sigma)} (S_{(s)i+2} - S_{(s)\lambda} \Phi_{(\sigma)i+2}^\lambda) - \overline{g}_{i+2,1}^{(\sigma)} (S_{(s)i+1} - S_{(s)\lambda} \Phi_{(\sigma)i+1}^\lambda)] +$$

$$+ [\overline{g}_{\beta+1,1}^{(\sigma)} (S_{(s)\beta+2} - S_{(s)\lambda} \Phi_{(\sigma)\beta+2}^\lambda) - \overline{g}_{\beta+2,1}^{(\sigma)} (S_{(s)\beta+1} - S_{(s)\lambda} \Phi_{(\sigma)\beta+1}^\lambda)] \overline{\Phi}_\beta^i \Big] \Big\} d\sigma\, d\overline{x}^1 \quad (102)$$

З цієї формули видно, що головний момент долучених пар складається з двох частин: суми зосереджених моментів, що діють на кінці відрізка контурної кривої, і моменту деякого навантаження, розподіленого по дузі цієї контурної кривої.

Перший доданок можна представити з допомогою пари сил, що їх прикладено до кінців відрізка дуги контура.

Розглянемо тепер додаткові зусилля, якими можна замінити моменти $L_{(s)}^i$, не змінюючи головного моменту зведених пар сил L^i. Будемо стягувати дугу контура в точку. Відкидаючи в під'інтегральному виразі в формулі (102), для одержання першого наближення, малі величини першого порядку, ми прийдемо до такої задачі: визначити зусилля $S_{(s)}^i$, якщо відомі їх моменти відносно заданої точки.

Позначмо через m^i перші два доданки в під'інтегральному виразі в формулах (102):

$$m^i = -\frac{\partial L_{(s)}^i}{\partial \overline{x}^1} + L_{(s)}^\lambda \overline{\Gamma}_{\lambda 1}^i(s)$$

(тут ми замінили σ на s, нехтуючи малими першого порядку).

Величини $s_{(s)}^i$ визначаються із системи рівнянь:

$$m^1 = \frac{1}{\sqrt{\overline{g}}} (\overline{g}_{21}\, s_{(s)3} - \overline{g}_{31}\, s_{(s)2}) \tag{103a}$$

$$m^2 = \frac{1}{\sqrt{\overline{g}}} (\overline{g}_{31}\, s_{(s)1} - \overline{g}_{11}\, s_{(s)3}) \tag{103b}$$

$$m^3 = \frac{1}{\sqrt{\overline{g}}} (\overline{g}_{11}\, s_{(s)2} - \overline{g}_{21}\, s_{(s)1}) \tag{103c}$$

Помічаючи, що в новій системі координат $g_{ik} = 0$, якщо $i \neq k$, дістанемо:

$$s_{(s)3} = -\frac{\sqrt{\overline{g}}}{\overline{g}_{11}} m^2 \tag{104}$$

Рівняння (103а) взагалі не задовольняється при $m^1 = 0$. З рівняння (103с) знайдемо:

$$s_{(s)2} = \frac{\sqrt{\overline{g}}}{\overline{g}_{11}} m^3 \tag{105}$$

На підставі викладеного можна зробити висновок, що складову моменту m^1 не можна замінити розподіленим навантаженням, а складові m^2 та m^3 можна замінити навантаженням, яке визначається формулами (104)—(105). У розкритій формі ці рівняння мають вигляд:

$$s_{(s)3} \overset{*}{=} \frac{\sqrt{\overline{g}}}{\overline{g}_{11}} \left(\frac{\partial L^2_{(s)}}{\partial \overline{x}^1} - L^\lambda_{(s)} \overline{\Gamma}^2_{(\lambda,)3}(s) \right) \tag{104a}$$

$$s_{(s)2} \overset{*}{=} \frac{\sqrt{\overline{g}}}{\overline{g}_{11}} L^\lambda_{(s)} \overline{\Gamma}^3_{\lambda 1} \tag{105a}$$

В цих формулах компоненти $L^2_{(s)}$ відповідають скручуючим моментам, $L^1_{(s)}$ — згинаючим. Зусилля $s_{(s)3}$ — перерізуючі зусилля; зусилля $s_{(s)2}$ — зусилля розтягу. Залежність між перерізуючими силами і скручуючими моментами помітив ще Кірхгоф в теорії пластинок. Вплив згинаючих моментів пов'язаний з наявністю кривини оболонки.

Формули (104а)—(105а)—формули наближені. Ми навели їх з метою дати ті попередні висновки щодо можливої заміни системи моментів розподіленим навантаженням, які були зроблені нами вище.

На підставі цих висновків ми будемо і в загальному випадку заміняти систему моментів m^2 і m^3 деяким розподіленим навантаженням, а момент m^1 залишимо без змін. Відповідні компоненти розподіленого навантаження, як і вище, позначмо через $s_{(s)2}$ та $s_{(s)3}$. Для визначення цих компонентів ми маємо систему лінійних рівнянь

$$a_{22}\, s_{(s)2} + a_{23}\, s_{(s)3} = m^2 \tag{106a}$$

$$a_{32}\, s_{(s)2} + a_{33}\, s_{(s)3} = m^3, \tag{106b}$$

де коефіцієнти мають такі значення:

$$a_{22} = \int_0^{\overline{x}^1} \frac{\overline{g}_{11}^{(\sigma)}}{\sqrt{\overline{g}^\sigma}} \left\{ \Phi^2_{(\sigma)3} + \left(1 - \Phi^2_{(\sigma)2}\right) \overline{\Phi}^2_{(3)} \right\} d\sigma \tag{107a}$$

$$a_{23} = -\int_0^{\overline{x}^1} \frac{\overline{g}_{11}^{(\sigma)}}{\sqrt{\overline{g}^\sigma}} \left(1 - \Phi^3_{(\sigma)3}\right)\left(1 + \overline{\Phi}^2_2\right) d\sigma \tag{107b}$$

$$a_{32} = \int_0^{\overline{x}^1} \frac{\overline{g}_{11}^{(\sigma)}}{\sqrt{\overline{g}^{(\sigma)}}} \left(1 - \Phi^2_{(\sigma)2}\right)\left(1 + \overline{\Phi}^3_3\right) d\sigma \tag{107c}$$

$$a_{33} = -\int_0^{\overline{x}^1} \frac{\overline{g}_{11}^{\sigma}}{\sqrt{\overline{g}^{(\sigma)}}} \left\{ \Phi^3_{(\sigma)2} + \left(1 - \Phi^2_{(\sigma)3}\right) \overline{\Phi}^3_2 \right\} d\sigma \tag{107d}$$

Моменти m^2 та m^3 визначаються з таких формул:

$$m^2 \doteq -\frac{\partial L^2_{(s)}}{\partial \bar{x}^1} + L^\lambda_{(s)} \Phi^2_{(s)\lambda} \tag{108a}$$

$$m^3 \doteq L^\lambda_{(s)} \Phi^3_{(s)\lambda} \tag{108b}$$

Розв'язуючи рівняння (106a) та (106b), знайдемо:

$$s_{(s)2} = \frac{a_{33}\, m^2 - a_{23}\, m^3}{a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}} \tag{109a}$$

$$s_{(s)3} = \frac{a_{22}\, m^3 - a_{32}\, m^2}{a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}} \tag{109b}$$

З всього сказаного випливає, що система зусиль і моментів, які діють на дугу контура, може бути замінена новою системою зусиль і моментів, статично еквівалентною першій системі. Позначаючи всі величини, які належать до цієї нової системи, рисками над відповідними буквами, дістанемо такі вирази для зусиль:

$$\overline{S}_{(s)1} = S_{(s)1} \tag{110a}$$

$$\overline{S}_{(s)2} = S_{(s)2} + s_{(s)2} \tag{110b}$$

$$\overline{S}_{(s)3} = S_{(s)3} + s_{(s)3} \tag{110c}$$

Вирази для складових головного моменту матимуть такий вигляд:

$$\overline{L}^1_{(s)} + L^1_{(s)} \tag{111a}$$

$$\overline{L}^2_{(s)} = 0 \tag{111b}$$

$$\overline{L}^3_{(s)} = 0 \tag{111c}$$

Крім того, на кінці відрізка дуги контура будуть діяти зосереджені сили, що складають пару з моментом, рівним сумі $L^i_0 + L^i_{(l)}\, l$.

Все це дає нам можливість остаточно одержати ті умови на границі оболонки, яким повинні задовольняти шукані функції. Через те, що принцип Сен-Венана дає нам право замінити одну систему зовнішніх сил іншою, статично еквівалентною першій, при чому внутрішній розподіл напружень змінюється дуже мало на незначній віддалі від точок прикладення зовнішніх сил, ми можемо замінити систему зусиль і моментів $S_{(s)i}$ та $L^i_{(s)}$ системою $\overline{S}_{(s)i}$ та $\overline{L}^i_{(s)}$ і визначити граничні умови в такий спосіб: на контурній кривій зусилля зсуву, розтягу, перерізуюча сила та згинаючий момент повинні набирати заданих значень $\overline{S}_{(s)1}$, $\overline{S}_{(s)2}$, $\overline{S}_{(s)3}$ та $\overline{L}^1_{(s)}$. Скручуючий момент $\overline{L}^2_{(s)}$ повинен дорівнювати нулю. Проте, остання умова неістотна, тому що виконання перших умов забезпечує такий розподіл зусиль на контурі, який замінює собою момент $L^2_{(s)}$. Крім того, на кінцях дуги контура внутрішні сили повинні звестись до зосереджених сил, що врівноважують сили, які утворюють пару з моментом $L_0^i + L_{(l)}^i l$. Таким чином, в кожній точці контура шукані функції повинні задовольняти всього чотири умови. Пуассон вважав, що кількість цих умов дорівнює п'тьом, але вже Кірхгоф, Кельвін, і Тет в теорії пластинок прийшли до чотирьох умов, звичайно, окремого вигляду, порівнюючи з одержаними нами. Ляв зазначає, що Пуассон знайшов правильні розв'язки окремих задач лише тому, що в цих задачах скручуючі моменти на дузі контура дорівнювали нулю.

Умови другого типу полягають в заданих на дузі контура переміщеннях. Наприклад, якщо кінці оболонки заправлені і не можуть повертатися, ці умови будуть такі:

$$(u_i)_s = 0; \quad \left(\frac{\partial u_3}{\partial x^2}\right)_s = 0$$

Взагалі ж, ці умови можуть бути надзвичайно різноманітними в залежності від властивостей заправлення кінця оболонки. Нижче ми ще зупинимося на них при розгляді деяких окремих випадків.

§ 13. Дослідження еластостатичних рівнянь теорії оболонок, що належить Ляву

Ми переходимо тепер до вивчення еластостатичних систем рівнянь теорії оболонок, одержаних рядом дослідників. Почнемо з розгляду рівнянь, складених Лявом, які одержали найбільш широке поширення за 50 років, що пройшли з моменту їх опублікування (1888 р.).

Перш за все порівняємо прийняті нами позначення основних величин із позначеннями, прийнятими Лявом. В своїх роботах Ляв користувався не компонентами тензорних величин, а їх проекціями на осі певного місцевого координатного триедра. Таким чином, не можна знайти безпосередньо рівність між основними величинами у нас і у Лява, а можна говорити спочатку про їх відповідність.

Ляв позначає зусилля розтягу T_1 і T_2, зсуву—S_1 та S_2, перерізуючі сили—N_1 і N_2, згинаючі моменти—G_1 та G_2, скручуючі—H_1 і H_2. В наших рівняннях контрваріанти зусиль розтягу позначені $S^1_{(1)}$ і $S^2_{(2)}$, зусилля зсуву—$S^1_{(2)}$ і $S^2_{(1)}$, перерізуючих зусиль—$S^3_{(1)}$ і $S^3_{(2)}$, згинаючих моментів—$L^1_{(2)}$ і $L^2_{(1)}$, скручуючих моментів—$L^1_{(1)}$ і $L^2_{(2)}$. Як відомо, залежність між проекціями вектора на осі місцевого координатного триедра та його коваріантними компонентами має такий вигляд:

$$A_{x^k} = \frac{A_k}{\sqrt{g_{kk}}} \tag{112a}$$

де A_{x^k} проекція вектора на вісь x^k місцевого координатного триедра. Якщо система координат ортогональна, то з попередньої формули випливає також:

$$A_{x^k} = A^k \sqrt{g_{kk}} \tag{112b}$$

В загальному випадку

$$A_{x^k} = A^i \frac{g_{ik}}{\sqrt{g_{kk}}} \tag{112c}$$

На основі формули (112c), можна написати залежності між складовими зусиль і моментів в роботах Лява та їх контраваріантними компонентами, прийнятими нами. Проте, зробити це безпосередньо не можна, тому що Ляв в своїх роботах іноді користувався не проекціями на осі деформованого координатного триедра, а будував допоміжний триедр xyz, причому вісь Ox напрямляв по дотичній до деформованої лінії x^1, вісь Oy — перпендикулярно до неї, а вісь Oz — по нормалі до деформованої серединної поверхні. Якщо позначити кут між осями x^1 і x^2 через

$$\frac{\pi}{2} - \omega,$$

між віссю Oy та x^3 — через

$$\frac{\pi}{2} - \varphi$$

і між осями Oz та x^3 — через ψ, то проекції деякого вектора на осі рухомого триедра виражаються так:

$$A_x = A_{x^1};\ A_y = A^2\sqrt{g_{22}}\cos\omega + A^3\sqrt{g_{33}}\sin\varphi \tag{113}$$

$$A_z = A^3\sqrt{g_{33}}\cos\psi$$

Помічаючи, що кути ω, φ, ψ є величини порядку компонентів тензора деформації, дістанемо:

$$\begin{aligned} A_y &= A^2\sqrt{g_{22}}\left(1 - \frac{\omega^2}{2!}\right) + A^3\sqrt{g_{33}}\,\varphi + \dots \\ A_z &= A^3\sqrt{g_{33}}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!}\right) + \dots \end{aligned} \tag{114}$$

Тепер ми можемо привести у відповідність основні величини, які входять у формули Лява і в наші рівняння. Зауважмо перш за все, що у рівняннях Лява компоненти метричного тензора недеформованої серединної поверхні g_{11} та g_{22} позначені A^2 і B^2. Проекції вектора переміщення на осі недеформованого координатного триедра Ляв позначає через u, v, w. З формул (113) — (114) можна зробити висновок, що ці проекції відрізняються від проекцій на осі деформованого триедра на малі величини другого порядку малості, якщо вважати переміщення малими величинами. Тому, відкидаючи нелінійні відносно переміщень і деформацій члени, знайдемо такі залежності між коваріантними компонентами вектора переміщення в системі координат x^1 та x^2 і його проекціями на осі місцевого координатного триедра:

$$u_1 = u\sqrt{g_{11}};\quad u_2 = v\sqrt{g_{22}};\quad u_3 = w\sqrt{g_{33}} \tag{115}$$

При обчисленні проекцій на осі рухомого триедра зусиль та моментів необхідно взяти до уваги різницю в перерізах оболонки, проведених через вісь Oy і деформовану криву Ox^2. Якщо позначити вектор зусилля в перерізі Oy через $\bar{S}_y$, в перерізі Ox^1 через $\bar{S}_{(2)}$ і в перерізі $O\lambda^2$ через $\bar{S}_{(1)}$, то між ними існує залежність:

$$\bar{S}_y = \bar{S}_{(2)} \sin \omega + \bar{S}_{(1)} \cos \omega \tag{116}$$

Взявши це до уваги, а також формули (113), дістанемо:

$$T_1 = \frac{\bar{g}_{ik} S^k_{(1)}}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \cos \omega + \frac{\bar{g}_{ik} S^k_{(2)}}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \sin \omega \tag{117a}$$

$$S_1 = \left(S^2_{(1)} \sqrt{\bar{g}_{22}} \cos \omega + S^3_{(1)} \sqrt{\bar{g}_{33}} \sin \varphi\right) \cos \omega +$$

$$+ \left(S^2_{(2)} \sqrt{\bar{g}_{22}} \cos \omega + S^3_{(1)} \sqrt{\bar{g}_{33}} \sin \varphi\right) \sin \omega \tag{117b}$$

$$N_1 = (S^{3'}_{(1)} \cos \omega + S^3_{(2)} \sin \omega) \sqrt{\bar{g}_{33}} \cos \psi \tag{117c}$$

$$S_2 = -\frac{\bar{g}_{ik} S^k_{(2)}}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \tag{117d}$$

$$T_2 = S^2_{(2)} \sqrt{\bar{g}_{22}} \cos \omega + S^3_{(2)} \sqrt{\bar{g}_{33}} \sin \varphi \tag{117e}$$

$$N_2 = S^3_{(2)} \sqrt{\bar{g}_{33}} \cos \psi \tag{117f}$$

$$H_1 = \frac{\bar{g}_{ik} L^k_{(1)}}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \cos \omega + \frac{\bar{g}_{ik} L^k_{(2)}}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \sin \omega \tag{117g}$$

$$G_1 = L^2_{(1)} \sqrt{\bar{g}_{22}} \cos^2 \omega + L^2_{(2)} \sqrt{\bar{g}_{22}} \cos \omega \sin \omega \tag{117h}$$

$$H_2 = L^2_{(2)} \sqrt{\bar{g}_{22}} \cos \omega \tag{117i}$$

$$G_2 = -\frac{\bar{g}_{ik} L^k_{(2)}}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \tag{117k}$$

Переходимо тепер до послідовного розгляду окремих груп еластостатичних рівнянь.

Перша група рівнянь складається з рівнянь (41a) — (41c), (42a) — (42c), висновків з них, нарешті, з формул (45a) — (45c) та (47), які дають вирази для компонентів тензора деформації аж до членів порядку z^2. Рівняння (41a) — (42c) збігаються з формулами (21') с. 547 у Лява [1]), якщо взяти до уваги формули (115) і виразити компоненти тензора деформації серединної поверхні через його проекції на осі координатного триедра

---

[1]) В дальшому ми будемо посилатися на нумерацію формул в курсі А. Лява „Математическая теория упругости" ОНТИ, 1936.

недеформованої оболонки. Вирази (42a) — (42c) відрізняються від відповідних формул у Лява [(26) с. 548)] перш за все своєю симетричністю. Замінімо компонент $\varkappa_{12}$ тензора змін кривини, що відповідає величині τ у рівняннях Лява, через проекцію на осі координатного триедра недеформованої оболонки. Знайдемо, використовуючи деякі позначення Лява:

$$\varkappa_{x^1x^2} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial x^2} + \frac{v}{R_2}\right) + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial x^1} + \frac{u}{R_1}\right) -$$

$$-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial x^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial x^1} + \frac{u}{R_1}\right) - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x^1}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial x^2} + \frac{v}{R_2}\right) +$$

$$+ \text{члени, які залежать від } D^{(i)}_{\rho,i3} \tag{118a}$$

У рівняннях Лява ми зустрічаємо замість $\varkappa_{x^1x^2}$ асиметричний член τ:

$$\tau = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial x^2} + \frac{v}{R_2}\right) - \frac{1}{A^2B}\frac{\partial A}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x^1} - \frac{1}{AR_1}\frac{\partial v}{\partial x^1} \tag{118b}$$

Як видно з теорії Лява:

$$\tau = \frac{P_1'}{A}$$

де P_1' — величина проекції на вісь x^1 миттьової кутової швидкості рухомого триедра, якщо початок його ковзається із швидкістю, рівною одиниці по лінії $x^2 = \text{const}$. Природно було б побудувати компонент із різниці величин $\frac{P_1'}{A}$ та $\frac{q_2'}{B}$, де q_2 має значення, аналогічне p_1', але при русі вздовж лінії $x^1 = c$ відрізняється знаком від p_1'. Проте, як видно з дальшого (с. 553), Ляв вважає алгебричну суму величин $\frac{p_1'}{A}$ і $\frac{q_2'}{B}$ малою величиною. Цей висновок він робить, грунтуючись на формулі (11) стр. 543, з якої видно, що ця сума має порядок величини $\gamma_{12}k_1$ (в наших позначеннях). Тому цю алгебричну суму можна додати, або відняти, без великої похибки. Звідси випливає приблизно такий хід обчислень:

$$\frac{p_1'}{A} - \frac{q_2'}{B} \cong \frac{p_1'}{A} - \frac{q_2'}{B} + \left(\frac{p_1'}{A} + \frac{q_2'}{B}\right) = \frac{2p_1'}{A} = 2\tau\,.$$

Проти цього не було б заперечень, якби завжди покладати зсуви у серединній поверхні малими, а кривину її великою. Але тоді у формулах (26) Лява можна усунути члени, які містять множники k_i і похідні від u та v по координатах x^1 і x^2.

У всякому разі, залишається неочевидним, що їх величина значно перевищує величину добутку $k_1\gamma_{12}$. Тому ми вважаємо за доцільне зберегти член $\varkappa_{12}$ в симетричній формі, одержаній нами.

Величини $\varkappa_{11}$ і $\varkappa_{22}$ в основному збігаються з величинами $\varkappa_1$ і $\varkappa_2$ Лява, відрізняючись, як і $\varkappa_{12}$, додатковими членами, які залежать від функцій $D^{(i)}_{\rho,i3}$. Про метод послідовних наближень Лява скажемо декілька слів нижче. Тут зауважмо тільки, що вирази (26) Лява є остаточними і, таким чином, члени, що містять z у розкладах компонентів тензора деформації дальшим поправкам не підлягають. Це, звичайно, необгрунтовано, хоч Ляв розглядає головним чином друге наближення для тих випадків, коли зовнішні поверхні оболонки вільні від навантажень. При цьому можна покласти $D_{0,i3}$ рівними нулю, не заперечуючи умови рівноваги на поверхні.

Розглянемо тепер другу групу еластостатичних рівнянь. Співвідношення між проекціями зусиль і моментів у Лява та їх контраваріантними компонентами в нашій роботі виражаються формулами (117a) — (117k). Якщо нехтувати малими першого порядку у порівнянні із скінченними членами, ці формули значно спрощуються. Дістанемо:

$$T_1=\sqrt{g_{11}}\,S^1_{(1)}\,;\quad S_1=\sqrt{g_{22}}\,S^2_{(1)}\,;\quad N_1=S^3_{(1)}$$

$$T_2=\sqrt{g_{22}}\,S^2_{(2)}\,;\quad S_2=-\sqrt{g_{11}}\,S^1_{(2)}\,;\quad N_2=S^3_{(2)} \tag{119}$$

$$H_1=\sqrt{g_{11}}\,L^1_{(1)}\,;\quad G_1=\sqrt{g_{22}}\,L^2_{(1)}\,;\quad H_2=\sqrt{g_{22}}\,L^2_{(2)}\,;\quad G_2=-\sqrt{g_{11}}\,L^1_{(2)}$$

Якщо відкинути деформації, формули (52) — (54) збігатимуться з формулами (31) — (32) с. 555 Лява.

Розглянемо формулу (52). На основі формул (61) та (62), дістанемо, замінюючи $\bar{\tau}^{\mu\nu}$ через проекцію на основі рівності $\bar{\tau}^{i\mu}=\dfrac{\bar{\tau}_{x^i\,x^\mu}}{\sqrt{g_{ii}\,g_{\mu\mu}}}$

$$S_{(\mu)x^i}=\int\limits_{-h}^{+h}\bar{\tau}_{x^i\,x^\mu}(1-zk_\nu)\,dz \tag{120}$$

$$(\mu,\ \nu=1,\,2)$$

Цей вираз збігається з формулами (31) Лява. Подібний до цього вираз одержимо, користуючись формулами (51), з тією тільки різницею, що замість значень компонентів тензора напружень, перенесених у серединну поверхню за правилами паралельного перенесення, у них входять значення компонентів тензора напружень у різних точках оболонки.

Причина цього полягає у тім, що при відкиданні деформацій лінія x^3 стає прямою лінією і паралельне перенесення по Леві-Чивіта збігається із звичайним паралельним перенесенням у евклідовому просторі. На підставі цього, можна твердити, що формули (31) — (32) Лява цілком точні. Їх вадою є те, що компоненти тензора деформації лише у неявній формі входять у склад радіусів кривини R_1' та R_2', що у значній мірі утруднює дослідження окремих питань, як буде видно з дальшого.

На основі формул, які визначають зусилля і моменти через напруження, закону Гука та розкладів компонентів тензора деформацій, ми одержуємо вирази зусиль та моментів через переміщення. Нами одержані вирази для зусиль, що містять члени порядку h^3, тобто порядку зведених моментів. На необхідність такого представлення зусиль вказував Ф. Краусс (див. нижче). Тієї ж точки зору дотримується також І. Я. Штаєрман.

Вирази для зусиль і моментів (70a) — (70b), (72), одержані нами, дуже відрізняється від формул другого наближення Лява (формули (42) — (44)

с.с. 560—561). Причиною є, поперше, та обставина, що Ляв нехтував рядом членів, вважаючи, як завжди, кривину оболонки малою. Крім того, ним розглянуто випадок відсутності напруження на зовнішніх поверхнях оболонки та відсутності масових сил. При цих обставинах Ляв вводив додаткове припущення про розподіл напружень τ_{i3} ($i=1, 2, 3$), що відповідає узагальненому плоскому напруженому стану. Звичайно, одержані нами вирази мають більш загальний характер, так само як і застосований нами метод послідовних наближень є більш загальним, ніж метод Лява. Прийом Лява є прикладом одержання окремих формул з допомогою додаткових механічних припущень, які забезпечують хороші результати при застосуванні цих формул у відповідних випадках. Цьому прийому треба віддати перевагу перед звичайним способом спрощення наближених формул шляхом усунення ряду членів на підставі загальної оцінки їх величини без додаткового механічного тлумачення їх ролі.

Переходимо до розгляду третьої групи еластостатичних рівнянь — рівнянь рівноваги.

Одержані нами рівняння (74) — (75) це найбільш загальні можливі рівняння рівноваги, тому що при їх виведенні ми не робили будьяких припущень про характер деформації серединної поверхні.

Рівняння теорії Лява виведені фактично при припущенні, що серединна поверхня нерозтяжна і не зазнає зсувів (с. 561). Отже, у рівняннях рівноваги відсутній ряд членів, які мають порядок у ряді випадків однаковий з порядком членів, залишених у рівняннях. Розгляньмо, наприклад, перше рівняння системи (74). Основною відміною між цим рівнянням і відповідним рівнянням Лява являється наявність в ньому члена

$$\Gamma^1_{11} S^1_{(1)} \sqrt{g_{22}}$$

Розглянемо це питання докладніше.

Величина $S^1_{(1)}$ входить також у перший член рівняння, який має вигляд:

$$\partial_1 \left(S^1_{(1)} \sqrt{g_{22}} \right)$$

Перейдімо тепер від контраваріантних компонентів до проекцій, нехтуючи деформаціями (див. ф-лу 119). Підставляючи відповідний вираз у перший член рівняння та відкидаючи деформації, дістанемо:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(S^1_{(1)}\sqrt{g_{22}}\right) \cong \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{T_1\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\right) \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\left(T_1\sqrt{g_{22}}\right)}{\partial x^1} -$$

$$-\frac{1}{2} g^{-\frac{3}{2}} T_1 \sqrt{g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}$$

З другого боку,

$$\Gamma^1_{11} S^1_{(1)} \sqrt{g_{22}} \cong \frac{1}{2} g_{11}^{-\frac{3}{2}} T_1 \sqrt{g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}$$

Отже, якщо відкинути деформації, цей член анулюється в сумі з першим. Але, якщо взяти до уваги деформацію розтягу серединної поверхні, від якої саме залежить $\overline{\Gamma}^1_{11}$, то вплив компонентів такої деформації на рівняння рівноваги стає цілком наочним. Можна легко представити собі деформації, при яких порядок додаткових членів в $\Gamma^1_{11} S^1_{(1)} \sqrt{g_{22}}$ буде однаковим із порядком хоч би такого члена, як $q'_2 A N_2$ (у позначеннях Лява), де

$$q'_2 = -\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial x^1} + \frac{u}{R_1}\right) + \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial x^1}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial x^2} + \frac{v}{R_2}\right) -$$

$$-\frac{B}{AR_2}\left(\frac{\partial v}{\partial x^1} - \frac{u}{B}\frac{\partial A}{\partial x^2}\right)$$

Цей член також залежить від деформації оболонки і зникає разом з нею. Зауважмо, що величина $S^1_{(1)}$ у всякому разі може бути такого ж порядку, як і величина N_2. Отже тут ми знаходимо необгрунтовану у ряді випадків відсутність членів, однакових по величині із членами, залишеними у рівнянні. Переходимо до рівнянь моментів.

Ми показали, що незалежних рівнянь у системі (75) буде лише два. Це питання зовсім не розглядалось Лявом. Ляв уникав користуватися цим рівнянням, вказуючи, що воно зайве. Надмір числа рівнянь над числом невідомих функцій Ляв, як звичайно, не вважав великою перешкодою для розв'язання загальної задачі теорії оболонок, через те, що вся система рівнянь теорії оболонок — система наближена.

Все ж питання про рівняння системи (75) надзвичайно важливе, тому що воно по-новому висвітлює питання про механічні властивості оболонок. Виявляється, що система пружних зусиль і моментів, зведених до серединної поверхні, не може врівноважити зовнішні сили, що зводяться до пари, яка лежить в площині, дотичній до серединної поверхні.

Зробімо тепер загальні висновки щодо рівнянь теорії Лява. Позитивною рисою цієї наближеної теорії є наявність певних механічних передумов, покладених в основу спрощуючих гіпотез. Тому формули Лява дають гарні результати у певних границях для деформацій і кривини оболонки. На підставі викладеного, зрозуміло, що теорію Лява можна застосовувати при наявності малих розтягів серединної поверхні з великими радіусами кривини, а також при умові існування незначних навантажень на зовнішніх поверхнях оболонки. Ці обмеження особливо вплинули на склад тензора змін кривини та рівняння рівноваги. Великою вадою теорії Лява треба визнати відсутність систематичного методу послідовних наближень. Його розв'язки мають в значній мірі окремий характер.

§ 14. Короткий огляд роботи Ф. Краусса „Основні рівняння теорії оболонок“ [1])

Робота Ф. Краусса є крупним кроком вперед у теорії оболонок. У протилежність Ляву, Краусс поставив перед собою задачу „встановити основну систему рівнянь в інваріантній формі без відкидання деяких членів, яке проводять на підставі припущення про малість переміщень“) (Вступ,

[1]) Grundgleichungen der Schalentheorie (Math. Ann., Bd. 101; 1929).

с. 62). Далі Краусс зазначає, що він знайшов загальний метод послідовних наближень в теорії оболонок. Цьому методові послідовних наближень присвячена значна частина роботи. Зупинімося на його розгляді.

Напружений стан в оболонці Ф. Краусс, як і інші автори, характеризує тензором зусиль (рівнодійна напружень), зведених до серединної поверхні. Між цим тензором і тензором напружень на кожній поверхні, паралельній до серединної, існує співвідношення, яке у позначеннях Краусса має вигляд (с. 85)

$$\gamma^z \mathfrak{q} = \frac{F^z}{F} \mathfrak{T}^z \mathfrak{q}, \tag{121}$$

де $\gamma^z \mathfrak{q}$ — вектор напружень на серединній поверхні, визначений з допомогою „тензора зусиль“, $\mathfrak{T}^z \mathfrak{q}$ — вектор напружень на поверхні, паралельній до серединної. Тензор γ^z є рівнодійною напружень на скороченому елементі оболонки, тобто на елементі, що простягається від зовнішньої поверхні з координатою $x^3 = -h$ до поверхні з координатою $x^3 = z$. З формули (121) видно, що n-му коефіцієнту розкладу в ряд за степенями z тензора $\mathfrak{T}^z$ відповідає n-ий коефіцієнт розкладу тензора γ^z.

Далі, на підставі закону Гука і виразу тензора деформацій через переміщення можна твердити, що n-й коефіцієнт розкладу в ряд за степенями z тензора напружень виражається через $n+1$ коефіцієнт розкладу в ряд вектора переміщень. Ф. Краусс визначає $n+1$ коефіцієнт розкладу в ряд вектора переміщень через решту коефіцієнтів і n-й коефіцієнт розкладу в ряд тензора напружень і, грунтуючись далі на формулі (121), замінює n-й коефіцієнт розкладу в ряд тензора напружень через n-й коефіцієнт розкладу в ряд за степенями z „тензора зусиль“. Але останній виражається формулами (51) із заміною h на z, з яких видно, що n-й коефіцієнт розкладу в ряд тензора γ^z може бути також виражений через $n-1$ коефіцієнт розкладу в ряд тензора напружень, або через n коефіцієнтів розкладу в ряд вектора переміщень.

Звідси та з попереднього випливає, що між $n+1$ коефіцієнтом розкладу в ряд вектора переміщень існує залежність, що дозволяє виразити $n+1$-й коефіцієнт через n попередніх. Це співвідношення Краусс називає „умовою зведення“. Звідси, між іншим, випливає, що задаючи перший коефіцієнт розкладу, можна послідовно одержати решту. Ці перші коефіцієнти Ф. Краусс задає так, щоб задовольнялись умови на поверхні. Одержані вирази для переміщень підставляємо в умови рівноваги елементу оболонки і розв'язуємо двомірну задачу до кінця. В результаті дістанемо перше наближення.

Для розгляду поправок розглядають умови рівноваги скороченого елементу. З цих умов рівноваги визначають значення напружень на поверхнях, паралельних до серединної, і таким чином, вводячи їх в „умови зведення“, дістаємо друге наближення і т. д. Питанням про збіжність цього процесу Краусс не займався.

Метод Краусса істотно відрізняється від нашого методу послідовних наближень. Ф. Краусс зовсім не користується основними рівняннями рівноваги теорії пружності, поставивши собі за мету не виходити з області представлень класичної теорії оболонки, в яких він вважає за основне заміну тензора напружень тензором зусиль та загальних умов рівноваги — умовами рівноваги пружної поверхні. Між тим залежності між коефіцієнтами розкладу вектора переміщень в ряд найбільш природно випливають з основних рівнянь теорії пружності, як нами було показано вище.

Одною з головних відмін між нашим методом і методом Краусса є те, що послідовні наближення, одержувані нами, не залежать від інтегрування диференціальних рівнянь. Це в значній мірі спрощує проведення обчислень. Наш метод здається нам більш загальним, тому що він спирається безпосередньо на загальні рівняння теорії пружності. Ф. Краусс перший звернув увагу на те, що останнє шосте рівняння рівноваги обертається в тотожність, якщо на поверхнях оболонки не прикладені пари сил у площинах, паралельних до серединної поверхні. Рівняння рівноваги, складені ним, значно відрізняються від наших механічним змістом величин, які входять до них, але загальне їх значення залишається, зрозуміло, звичайним. Висновок свій Краусс зробив, користуючись формулами, які виражають зусилля і моменти, менш загальними, ніж знайдені нами (формули Краусса стосуються випадку прямолінійної осі Oz).

Скажемо на закінчення декілька слів про символіку в роботі Краусса. Краусс уникає дій над компонентами тензорних функцій та замінює їх безпосереднім позначенням цих дій над тензорами. Крупною вадою цього методу є необхідність введення цілого ряду різних позначень тих операцій, які в символіці Ricci одержуються в результаті дій над індексами. При великій кількості дій утворюється нагромаджування символів різних операцій, так що втрачається основна перевага безпосереднього оперування з тензорними величинами — його геометрична наочність.

§ 15. Еластостатична система рівнянь для циліндричних оболонок

Розглянемо тепер, як окремий випадок одержаної нами вище загальної еластостатичної системи рівнянь, рівняння для циліндричних оболонок.

Нехай вісь Ox^2 деякої декартової системи координат збігається за напрямом з твірною циліндра; осі Ox та Oy лежать в площині, перпендикулярній до твірних. Рівняння циліндричної серединної поверхні до деформації можна представити в такій формі:

$$\begin{aligned} x &= x(x^1) \\ y &= y(x^1) \\ x^2 &= x^2, \end{aligned} \tag{122}$$

де x^1 — довжина дуги напрямної.

Квадрат лінійного елементу серединної поверхні матиме евклідову форму:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dx^2)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 \tag{123}$$

Звідси робимо висновок, що

$$g_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = k \\ 0, & \text{„} \quad i \neq k \end{cases} \tag{124}$$

Компоненти метричного тензора на віддалі z від серединної поверхні визначаються за формулами (4):

$$g^z_{11} = (1 - k_1 z)^2$$

$$g^z_{22} = 1 \tag{125}$$

Обчислімо тепер символи Крістофеля для недеформованої серединної поверхні. Відрізнятися від нуля будуть лише символи:

$$\Gamma^1_{13} = \left[\frac{\partial}{\partial z} \ln(1 - k_1 z)\right]_{z=0} = -\left(\frac{k_1}{1 - k_1 z}\right)_{z=0} = -k_1 \tag{126}$$

$$\Gamma^3_{11} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^z_{11}}{\partial z}\right)_{z=0} = k_1,$$

де k_1 — головна кривина циліндричної оболонки; k_1 залежить тільки від змінної x_1. Звідси випливає, що коваріантна похідна ∇_2 збігається із звичайною похідною ∂_2. Тепер ми можемо одержати у розкритій формі основні рівняння теорії циліндричних оболонок. Випишемо їх послідовно.

а) Перша група еластостатичних рівнянь

Компоненти двомірного тензора деформації серединної поверхні, які визначаються формулами (41a) — (41c), набирають вигляду:

$$\varepsilon_1 = \partial_1 u_1 - k_1 u_3 \tag{127a}$$

$$\varepsilon_2 = \partial_2 u_2 \tag{127b}$$

$$\gamma_{12} = \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 \tag{127c}$$

Компоненти тензора змін кривини для i-го наближення, згідно з формулами (42a) — (42c) можна записати в такій формі:

$$\varkappa^{(i)}_{11} = \partial_1 (\partial_1 u_2 + k_1 u_1) - \partial_1 D^{(i)}_{0,13} + \frac{1}{2} k_1 D^{(i)}_{0,33} \tag{128a}$$

$$\varkappa^{(i)}_{22} = \partial^2_2 u_3 - \partial_2 D^{(i)}_{0,23} \tag{128b}$$

$$\varkappa^{(i)}_{12} = \partial_1 \partial_2 u_3 + \partial_2 (\partial_1 u_3 + k_1 u_1) - \partial_1 D^{(i)}_{0,.3} - \partial_2 D^{(i)}_{0,13} \tag{128c}$$

Розклади компонентів тензора деформації також спрощуються. На основі формул (45a) — (45c) знайдемо:

$$D^z_{11} = 2(\varepsilon_1 - z\varkappa^{(1)}_{11}) - z^2 \left\{ \frac{2\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} \left[\partial^3_1 u_1 + k_1 \partial^2_1 u - \right.\right.$$

$$\left. - \partial^2_1 (k_1 D^{\mathrm{I}}_{0,13}) - \partial_1 (k_1 D^{(\mathrm{I})}_{0,13}) - \frac{1}{2} k_1 \partial_1 (k_1 D^{(\mathrm{I})}_{0,33}) - \frac{1}{2} k^2_1 D^{(\mathrm{I})\,3}_{0,3} - 2k_1 \nabla_2 D^{(\mathrm{I})\,3}_{0,1} \right] +$$

$$+ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[\partial^2_1 \partial_2 u_2 + k_1 \partial^2_2 u_3 - k_1 \partial_2 D^{(\mathrm{I})}_{0,23} \right] +$$

$$+\partial_1 \partial_2^2 u_1 - k_1 \partial_2^2 u_3 + \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} \nabla_1 \nabla_1 (X^3_{(+h)} + X^3_{(-h)}) + \frac{\rho}{\mu} \nabla_1 F_1 \Big\} + \ldots \tag{129a}$$

$$D^z_{22} = 2(\varepsilon_2 - z\varkappa^{(I)}_{22}) - z^2 \Big\{ \frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu} \partial_2^3 u_2 + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} (\partial_1 \partial_2^2 u_1 - k_1 \partial_2^2 u_3) + \partial_1^2 \partial_2 u_2$$

$$+ k_1 \partial_2^2 u_3 - k_1 \partial_2 D^{(I)}_{0,23} + \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} \nabla_2 \nabla_2 (X^3_{(+h)} + X^3_{(-h)}) + \frac{\rho}{\mu} \partial_2 F_2 \Big\} + \ldots \tag{129b}$$

$$D^z_{12} = \gamma_{12} - z\varkappa^{(I)}_{12} - \frac{1}{2} z^2 \Big\{ \frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu} [\partial_1^2 \partial_2 u_1 - \partial_1 \partial_2 (k_1 u_3) - k_1 \partial_2 D^{(I)}_{0,13} + \partial_1 \partial_2^2 u_2]$$

$$+ \partial_2^3 u_1 + \partial_1^3 u_2 + \frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)} \nabla_1 \nabla_2 (X^3_{(+h)} + X^3_{(-h)}) + \frac{\rho}{\mu} (\nabla_2 + \nabla_1 F_2) \Big\} + \ldots \tag{129c}$$

У всі ці формули введено перше наближення, тому що друге дасть додаткові члени порядку h^4, тобто порядку відкинутих членів.

Так само, користуючись формулою (47), знайдемо розклади решти компонентів тензора деформації.

Цим розкладам можна надати вигляду:

$$D^z_{i3} = D^I_{0,i3} + zD^z_{1,i3} - \frac{1}{2}(h^2 - z^2) D^I_{2,i3} + \ldots \tag{130}$$

Тут ми будемо визначати $D^I_{1,i3}$ безпосередньо з умов на зовнішніх поверхнях оболонки, а не за формулами (26a), (28a). Для $i = 1, 2$ знайдемо:

$$D^z_{i3} = \frac{1}{2\mu}(X_{(+h)i} + X_{(-h)i}) + \frac{z}{2\mu h}(X_{(+h)i} + X_{(-h)i}) + \frac{1}{2}(h^2 - z^2) \times$$

$$\times \frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)} \nabla_i \nabla_\alpha (X^\alpha_{(+h)} + X^\alpha_{(-h)}) - \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} g^{\alpha\alpha} \nabla_i \nabla_\alpha \nabla_\alpha u_3 + \tag{131}$$

$$+ \frac{g_{\alpha\alpha}}{2\mu} \nabla_\alpha \nabla_\alpha (X_{(+h)i} + X_{(-h)i}) + \frac{\lambda\rho}{\mu(\lambda+2\mu)} \nabla_i F_3 - \frac{\rho}{\mu} \nabla_3 F_i \Big] + \ldots$$

$$(i, \alpha = 1, 2)$$

$$D^z_{33} = \frac{1}{\lambda+2\mu}(X^3_{(+h)} + X^3_{(-h)}) - \frac{\lambda g^{\alpha\alpha}}{\lambda+2\mu} D_{0,\alpha\alpha} +$$

$$+ z\Big\{ \frac{X^3_{(+h)} - X^3_{(-h)}}{h(\lambda+2\mu)} - \frac{\lambda g^{\alpha\alpha}}{\lambda+2\mu} \Big[\frac{1}{\mu} \nabla_\alpha (X_{(+h)\alpha} + X_{(-h)\alpha}) -$$

$$- 2\nabla_\alpha \nabla_\alpha u_3 \Big] \Big\} - (h^2 - z^2) \Big\{ \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta} \nabla_\alpha \nabla_\alpha \nabla_\beta u_\beta +$$

$$+\frac{\lambda}{2\mu(\lambda+2\mu)}g^{\alpha\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\alpha\left(X^3_{(+h)}+X^3_{(-h)}\right)+\frac{(\lambda+\mu)\rho}{\mu(\lambda+2\mu)}g^{\alpha\alpha}\nabla_\alpha F_\alpha-$$

$$-\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\nabla_3 F_3\Big\}+\dots \tag{132}$$

$$(\alpha,\beta=1,2)$$

Рівняння (127) — (132) складають першу групу еластостатичних рівнянь. Розгляньмо рівняння другої групи.

b) Друга група еластостатичних рівнянь

Залежності (64a) — (67e) між зусиллями, моментами та коефіцієнтами розкладу в ряді компонентів тензора деформації також спрощуються у випадку циліндричних оболонок. Приймаючи до уваги формули (64), (67), (124), а також (129), одержимо:

$$S^1_{(1)}=2h\left[\lambda\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\frac{1}{2}D^{(II)}_{0,33}\right)+2\mu\varepsilon_1\right]+\frac{1}{3}h^3\left(\frac{\lambda}{2}g^{\beta\beta}D_{2,\beta\beta}+\mu D_{2,11}\right)+\dots \tag{133a}$$

$$S^2_{(1)}=2h\mu\gamma_{12}+\frac{1}{3}h^3\mu D_{2,12}+\dots \tag{133b}$$

$$S^3_{(1)}=2\mu\left[hD_{0,13}+\frac{h^3}{6}D_{2,13}\right]+\dots \tag{133c}$$

$$S^1_{(2)}=2h\mu\gamma_{12}+\frac{2}{3}\mu h^3\left(\frac{1}{2}D_{2,12}+k_1\varkappa^{(I)}_{12}\right)+\dots \tag{133d}$$

$$S^2_{(2)}=2h\left[\lambda\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\frac{1}{2}D^{(II)}_{0,33}\right)+2\mu\varepsilon_2\right]+$$

$$+\frac{1}{3}h^3\left[\lambda g^{\beta\beta}\left(\frac{1}{2}D_{2,\beta\beta}-k_1D_{1\beta\beta}\right)+2\mu\left(\frac{1}{2}D_{2,22}-2k_1\varkappa^{(I)}_{22}\right)\right]+\dots \tag{133e}$$

$$S^3_{(2)}=2\mu\left[hD_{0,23}+\frac{h^3}{3}\left(\frac{1}{2}D_{2,23}-k_1D_{1,23}\right)\right]+\dots \tag{133f}$$

$$(\beta=1,2,3)$$

В цих, попередніх та наступних формулах ми зберігаємо $g^{\beta\beta}$ з метою зберегти умову про підсумовування, бо $g^{\beta\beta}=1$ на серединній поверхні.

Розгляньмо вирази для моментів. Із формул (67) легко одержимо:

$$L^1_{(1)}=\frac{2}{3}h^3\mu\varkappa^{(I)}_{12}+\cdots \tag{134a}$$

$$L^2_{(1)}=\frac{1}{3}\left(\lambda g^{\beta\beta}D_{1,\beta\beta}-4\mu\varkappa^{(I)}_{11}\right)+\cdots \tag{134b}$$

$$L^1_{(2)}=-\frac{1}{3}h^3\left[\lambda g^{\beta\beta}(D_{1,\beta\beta}-k_1D_{0,\beta\beta})-4\mu\left(\varkappa^1_{22}+k_1\varepsilon_2\right)\right]+\cdots \tag{134c}$$

$$L^{2}_{(1)} = -\frac{2}{3}\mu h^{3}\left(\varkappa^{(1)}_{12} + k_1 \gamma_{12}\right) + \cdots \tag{134d}$$

З цих формул видно залежність моментів від розтягів серединної поверхні. Чим менша кривина оболонки, тим незначніший цей вплив.

Ми не будемо виражати зусилля і моменти через переміщення. Це можна легко зробити, користуючись формулами (70) — (72) або безпосередньо підставляючи значення коефіцієнтів розкладу тензора деформацій, виражені через переміщення, в одержані нами вирази. При цьому коефіцієнт $D_{1,\alpha\beta}$ можна визначати безпосередньо з умов рівноваги на зовнішніх поверхнях оболонки. При такому способі визначення вирази для зусиль і моментів будуть містити члени порядку h^2.

c) Третя група еластостатичних рівнянь (рівняння рівноваги)

Розглянемо тепер рівняння рівноваги. З рівнянь (74) дістанемо (відкидаючи деформації):

$$\partial_1 S^{1}_{(1)} + \partial_2 S^{1}_{(2)} - k_1 S^{3}_{(1)} + X^{1} = 0 \tag{135a}$$

$$\partial_1 S^{2}_{(1)} + \partial_2 S^{2}_{(2)} + \qquad X^{2} = 0 \tag{135b}$$

$$\partial_1 S^{3}_{(1)} + \partial_2 S^{3}_{(2)} + k_1 S^{1}_{(1)} + X^{3} = 0 \tag{135c}$$

Так само рівняння (75) дадуть можливість написати:

$$\partial_1 L^{1}_{(1)} + \partial_2 L^{1}_{(2)} + S_{(2)3} + M^{1} = 0 \tag{136a}$$

$$\partial_3 L^{2}_{(1)} + \partial_2 L^{2}_{(2)} - S_{(1)3} + M^{2} = 0 \tag{136b}$$

Третє рівняння, як було показано, зводиться до рівності:

$$M^{3} = 0$$

Але ці рівняння можна застосовувати лише у тих випадках, коли зусилля і моменти виражаються через переміщення з допомогою лінійних залежностей. У ряді випадків їх застосовувати не можна — наприклад, у тих випадках, коли оболонка навантажена силами, що лежать в серединній поверхні. У цих випадках зусилля визначаються почасти безпосередньо, почасти виражаються через переміщення, при чому вже не можна користуватися лінійними формулами, зважаючи на значну величину, яку можуть мати вектор переміщень, зусилля і моменти. Тому ми виведемо більш загальні умови рівноваги, грунтуючись на рівняннях (74) — (75) — найбільш загальних умовах рівноваги.

Компоненти метричного тензора деформованої серединної поверхні будуть:

$$\bar{g}_{ik} = g_{ik} + D_{ik} \tag{137}$$

Метричний тензор на віддалі z від серединної поверхні матиме такі компоненти:

$$\bar{g}^{z}_{ik} = g^{z}_{ik} + D^{z}_{ik} \tag{137a}$$

Обчислімо тепер компоненти тензора $D^{z}_{\alpha\beta}$. Нагадаємо, що вирази цього тензора, знайдені нами вище, визначають його після перенесення на серединну поверхню. Тому точки з координатою $x^3 = z$ компонента тензора деформації будуть такі:

$$D^{z}_{ik} = D_{0,\alpha\beta} + zD_{1,\alpha\beta} + \cdots - \left[(D_{0,\lambda\beta} + zD_{1,\lambda\beta} + \cdots)\,\Phi^{\lambda}_{\alpha} + \right.$$
$$\left. + (D_{0,\alpha\lambda} + zD_{1,\alpha\lambda} + \cdots)\,\Phi^{\lambda}_{\beta}\right] \tag{137b}$$

На основі формул (59) — (61), дістанемо:

$$D^{z}_{\alpha\beta} = D_{0,\alpha\beta} + z\,[D_{1,\alpha\beta} + D_{\,,\alpha\beta}\,(k_\alpha + k_\beta)] + \cdots, \tag{138}$$

при чому k_3 слід вважати рівним нулю.

Цю саму формулу для компонентів D^{z}_{11} та D^{z}_{12} можна одержати на основі формули (4).

Таким чином, одержимо остаточно:

$$g^{z'}_{\alpha\beta} = \bar{g}^{z}_{\alpha\beta} + D_{0,\alpha\beta} + z\,[D_{1,\alpha\beta} + D_{0,\alpha\beta}(k_\alpha + k_\beta)] + \cdots \tag{139}$$

На основі цієї формули, можна визначити контраваріантні компоненти фундаментального тензора і символи Крістофеля 2-го роду на серединній поверхні циліндричної оболонки. Дістанемо:

$$\bar{g}^{ik} = \delta^{i}_{k} - D_{ik} + \cdots, \tag{140}$$

$$\text{де} \qquad \delta^{i}_{k} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i = k \\ 0, \quad „ \quad i \neq k \end{cases}$$

$$\bar{\Gamma}^{1}_{11} = \frac{1}{2}\,(\partial_1 D_{0,11} - 2k_1 D_{0,13});\; \bar{\Gamma}^{1}_{12} = \frac{1}{2}\,\partial_2 D_{0,11}$$

$$\bar{\Gamma}^{1}_{13} = \frac{1}{2}\,[-2k_1(1 - D_{11}) + D_{1,11} + 2k_1 D_{0,11}]$$

$$\bar{\Gamma}^{1}_{23} = \frac{1}{2}\,(D_{1,12} + k_1 D_{0,12} + \partial_2 D_{0,13} - \partial_1 D_{0,23})$$

$$\bar{\Gamma}^{1}_{22} = \frac{1}{2}\,(2\partial_2 D_{0,12} - \partial_1 D_{0,22})$$

$$\bar{\Gamma}^{1}_{33} = \frac{1}{2}\,[2(D_{1,13} + k_1 D_{0,13}) - \partial_1 D_{0,33}]$$

$$\bar{\Gamma}^{2}_{11} = \frac{1}{2}\,[2\partial_1 D_{0,12} - \partial_2 D_{0,11} - 2k_1 D_{0,23}]$$

$$\bar{\Gamma}^{2}_{12} = \frac{1}{2}\,\partial_1 D_{0,22}$$

$$\overline{\Gamma}^2_{13} = \frac{1}{2}(3k_1 D_{0,12} + D_{1,12} + \partial_1 D_{0,23} - \partial_2 D_{0,13})$$

$$\overline{\Gamma}^2_{23} = \frac{1}{2} D_{1,22}$$

$$\overline{\Gamma}^2_{22} = \frac{1}{2} \partial_2 D_{0,22};$$

$$\overline{\Gamma}^2_{33} = \frac{1}{2}(2D_{1,23} + \partial_2 D_{0,33})$$

$$\overline{\Gamma}^3_{11} = \frac{1}{2}[2\partial_1 D_{0,13} + 2(1 + D_{1,33})k_1 - D_{1,11} - 2k_1 D_{0,11}] \tag{141}$$

$$\overline{\Gamma}^3_{12} = \frac{1}{2}(\partial_2 D_{0,13} + \partial_1 D_{0,23} - D_{1,12} - k_1 D_{0,12})$$

$$\overline{\Gamma}^3_{13} = \frac{1}{2}(2k_1 D_{0,13} + \partial_1 D_{0,33})$$

$$\overline{\Gamma}^3_{23} = \frac{1}{2} \partial_2 D_{0,33}$$

$$\overline{\Gamma}^3_{22} = \frac{1}{2}(2\partial_2 D_{0,23} - D_{1,22})$$

$$\overline{\Gamma}^3_{33} = \frac{1}{2} D_{1,33}$$

Тепер ми напишемо рівняння рівноваги в розгорнутому вигляді: Дістанемо:

$$\partial_1 [S^1_{(1)}(1 + \varepsilon_2)] + \partial_2 [S^1_{(2)}(1 + \varepsilon_1)] + (\partial_1 \varepsilon_1 - k_1 D_{0,13}) S^1_{(1)} + \partial_2 \varepsilon_1 S^1_{(2)} +$$
$$+ \partial_2 \varepsilon_1 S^2_{(1)} + (\partial_2 \gamma_{12} - \partial_1 \varepsilon_2) S^2_{(2)} + [2k_1 \varepsilon_1 - \varkappa_{11} - k_1(1 - 2\varepsilon_1)] S^3_{(1)}(1 + \varepsilon_2) +$$
$$+ \frac{1}{2}(k_1 \gamma_{12} - \varkappa_{12} + \partial_2 D_{0,13} - \partial_1 D_{0,23}) S^3_{(2)} + X^1 = 0; \tag{142a}$$

$$\partial_1 [S^2_{(1)}(1 + \varepsilon_2)] + \partial_2 [S^2_{(2)}(1 + \varepsilon_1)] +$$
$$+ (\partial_1 \gamma_{12} - \partial_2 \varepsilon_1 - k_1 D_{0,23}) S^1_{(1)} + \partial_1 \varepsilon_2 S^1_{(2)} + \partial_1 \varepsilon_2 S^2_{(1)} + \partial_2 \varepsilon_2 S^2_{(2)} +$$
$$+ \left(\frac{3}{2} k_1 \gamma_{12} - \frac{1}{2} \varkappa_{12} + \partial_1 D_{0,23} - \partial_2 D_{0,13}\right) S^3_{(1)} - \varkappa_{22} S^3_{(2)} + X^2 = 0; \tag{142a}$$

$$\partial_1 [S^3_{(1)}(1 + \varepsilon_2)] + \partial_2 [S^3_{(2)}(1 + \varepsilon_1)] +$$
$$+ [\partial_1 D_{0,13} + (1 + D_{0,33}) k_1 + \varkappa_{11} - 2k_1 \varepsilon_1](1 + \varepsilon_2) S^1_{(1)} +$$
$$+ \frac{1}{2}(\partial_2 D_{0,13} - \partial_1 D_{0,23} + \varkappa_{12} - k_1 \gamma_{12}) S^1_{(2)} + \frac{1}{2}(\partial_2 D_{0,13} +$$
$$+ \partial_1 D_{0,23} + \varkappa_{12} - k_1 \gamma_{12}) S^2_{(1)} + (\partial_2 D_{0,23} + \varkappa_{22}) S^2_{(2)} +$$
$$+ \left(\frac{1}{2} D_{0,33} + k_1 D_{0,13}\right) S^3_{(1)} + \frac{1}{2} \partial_2 D_{0,33} S^3_{(2)} + X^3 = 0; \tag{142c}$$

$$\partial_1 [L^1_{(1)}(1+\varepsilon_2)] + \partial_2 [L^1_{(2)}(1+\varepsilon_1)] + (\partial_1 \varepsilon_1 - k_1 D_{0,13}) L^1_{(1)} +$$
$$+ \partial_2 \varepsilon_1 L^1_{(2)} + \partial_2 \varepsilon_1 L^2_{(1)} + (\partial_2 \gamma_{12} - \partial_1 \varepsilon_2) L^2_{(2)} +$$
$$+ \gamma_{12} S_{(1)3} + (1+2\varepsilon_2)(1+\varepsilon_1)\left(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \frac{1}{2} D_{0,33}\right) S_{(2)3} -$$
$$- D_{0,13} S_{(1)2} - D_{0,23} S_{(2)2} + M^1 = 0; \qquad (143a)$$

$$\partial_1 [L^2_{(1)}(1+\varepsilon_2)] + \partial_2 [L^2_{(2)}(1+\varepsilon_1)] + (\partial_1 \gamma_{12} - \partial_2 \varepsilon_1 -$$
$$- k_1 D_{0,23}) L^1_{(1)} + \partial_1 \varepsilon_2 L^1_{(2)} + \partial_1 \varepsilon_2 L^2_{(1)} + \partial_2 \varepsilon_2 L^2_{(2)} +$$
$$+ D_{0,13} S_{(1)1} + D_{0,23} S_{(2)1} - (1+2\varepsilon_1)(1+$$
$$+ \varepsilon_2)\left(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \frac{1}{2} D_{0,33}\right) S_{(1)3} - \gamma_{12} S_{(2)3} + M^2 = 0 \qquad (143b)$$

Рівняння (143a) — (143b) складають третю групу рівнянь загальної еластостатичної системи теорії циліндричних оболонок. Одержана нами загальна еластостатична система дає можливість провести оцінку точності рівнянь, виведених іншими авторами з допомогою безпосередніх геометричних міркувань.

§ 16. Дослідження рівнянь рівноваги циліндричних оболонок, одержаних Sanden'ом і Tölke [1]) („Stabilitätsprobleme dünner, kreiszylindrischer Schalen")

В роботі з стійкості колових циліндричних оболонок Занден і Тельке вивели систему еластостатичних рівнянь, більш загальну, ніж система рівнянь Лява (для цього окремого випадку). Вказані автори взяли до уваги також розтяг серединної поверхні. Нижче ми наводимо докладний аналіз рівнянь Занден і Тельке та вказуємо на деякі похибки, знайдені нами. Почнімо з розгляду першої групи еластостатичних рівнянь (залежностей між деформаціями та переміщеннями).

При вивченні цієї групи рівнянь треба мати на увазі, що проекції тензорних величин на осі місцевого координатного триедра деформованої серединної поверхні ми маємо право замінити їх контраваріантними (коваріантними) компонентами, відкидаючи деякі члени, нелінійні відносно компонентів тензора деформацій. В дальшому ми замінюємо позначення Зандена і Тельке відповідними нашими позначеннями.

Співвідношення між компонентами тензора двомірної деформації і тензора змін кривини Занден і Тельке прийняли ті ж, що і Ляв, за винятком компонента $\varkappa_{11}$, в якому похідна $\partial_1(k_1 u_1)$ замінена величиною $\frac{u_3}{a^2}$, де a — радіус недеформованої серединної поверхні. Ця заміна законна тільки для колового циліндра. Решта зауважень щодо першої групи рівнянь, висловлена нами при дослідженні рівнянь теорії Лява, залишаються в силі і тут.

[1]) Ing. Archiv, III Bd I Heft 1932, S.S. 24—66.

Перейдімо до розгляду співвідношень між зусиллями, моментами та коефіцієнтами розкладу в ряди компонентів тензора деформації. Якщо зважити на те, що вісь x^3 в статті Зандена і Тельке має напрям, протилежний вибраному нами (нами вибраний як додатний напрям — напрям до центра кривини перерізу, нормального до осі циліндра), то вирази, одержані нами, збігаються з формулами (133) — (134), якщо вважати, що зовнішні поверхні циліндра вільні від навантажень, і відкинути в формулах (133) члени, які містять h^3. Це звичайно, впливає на точність остаточних результатів. Особливо серйозний вплив може мати застосування гипотези Кірхгофа при наявності навантажень на зовнішніх поверхнях циліндра. У своїй статті Занден і Тельке розглядають стійкість колового циліндра, що знаходиться під дією осьового стиску і радіальних навантажень. Очевидно, знайдені критичні значення прикладеної системи сил перевищують дійсні, тому що застосування гіпотези Кірхгофа рівносильне накладанню зайвих зв'язків, що, як відомо, підвищує стійкість.

Розгляньмо тепер рівняння рівноваги. У своїй статті автори не вказують, чи є ті зусилля і моменти, які вони вводять у рівняння рівноваги, проекціями відповідних векторів на осі недеформованого координатного триедра, або, навпаки, їх треба вважати проекціями на осі тієї допоміжної системи координат, якою користувався Ляв. Проте, не дивлячись на це, можна повністю встановити, що в одержані ними рівняння не ввійшли деякі члени, що мають порядок малості, однаковий із порядком малості членів, введених у рівняння.

Для встановлення цього перепишемо рівняння рівноваги, виведені Занден і Тельке у наших позначеннях[1]).

Рівняння рівноваги мають такий вигляд:

$$\partial_1 S_{(1)x^1} + \partial_2 S_{(2)x^1} - \partial_1 \varepsilon_2 S_{(2)x^2} + \partial_2 \varepsilon_1 S_{(1)x^2} -$$

$$-(k_1 - \varkappa_{11}) S_{(1)x^3} + \frac{1}{2} \varkappa_{12} S_{(2)x^3} + X_{x^1} = 0 \qquad (144a)$$

$$\partial_2 S_{(2)x^2} + \partial_1 S_{(1)x^2} + \partial_1 \varepsilon_2 S_{(2)x^1} - \partial_2 \varepsilon_1 S_{(1)x^1} + \varkappa_{22} S_{(2)x^3} +$$

$$+ \frac{1}{2} \varkappa_{12} S_{(1)x^3} + X_{x^2} = 0 \qquad (144b)$$

$$\partial_1 S_{(1)x^3} + \partial_2 S_{(2)x^3} - \varkappa_{22} S_{(2)x^2} - (\varkappa_{11} - k_1) S_{(1)x^1} -$$

$$-\frac{1}{2} \varkappa_{12} (S_{(2)x^1} + S_{(1)x^2}) + X_{x^3} = 0 \qquad (144c)$$

$$\partial_1 L_{(1)x^1} + \partial_2 L_{(2)x^1} + \gamma_{12} S_{(1)x^3} - \partial_1 \varepsilon_2 L_{(2)x^2} + \partial_2 \varepsilon_1 L_{(1)x^2} + S_{(2)x^3} = 0 \qquad (144d)$$

---

[1]) В статі Зандена і Тельке прийняті такі позначення: координата x^1 позначена $a\varphi$, де a — радіус циліндра, φ — кут між двома площинами, які проходять через вісь циліндра, координата x^2 позначена x; нашій координаті x^3 відповідає координата $-z$. Проекції зусиль: $S_{(1)x^1} = s_\varphi$; $S_{(1)x^2} = -t_\varphi$; $S_{(1)x^3} = -n_\varphi$; $S_{(2)x^1} = t_x$; $S_{(2)x^2} = s_x$; $S_{(2)x^3} = -n_x$ Проекції моментів: $L_{(1)x^1} = d_\varphi$; $L_{(1)x^2} = -b_\varphi$; $L_{(2)x^1} = b_x$; $L_{(2)x^2} = d_x$. Рівність вказана з точністю малих членів першого порядку малості.

$$\partial_2 L_{(2)x^2} + \partial_1 L_{(1)x^1} - \gamma_{12} S_{(2)x^3} + \partial_1 \varepsilon_2 L_{(2)x^2} - \partial_2 \varepsilon_1 L_{(1)x^1} - S_{(1)x^3} = 0 \tag{144a}$$

$$S_{(2)x^1} + S_{(1)x^2} + \gamma_{12}(S_{(1)x^1} - S_{(2)x^2}) + \varkappa_{22} L_{(2)x^2} +$$

$$+ (\varkappa_{11} - k_1) L_{(1)x^1} + \frac{1}{2}\varkappa_{12}(L_{(2)x^1} - L_{(1)x^2}) = 0 \tag{144b}$$

Порівняймо ці рівняння з рівняннями (142a) — (143b). При порівнянні треба перш за все мати на увазі, що компоненти тензора змін кривини в наших рівняннях відрізняються знаком від компонентів цього тензора у рівняннях Зандена і Тельке, тому що вісь x^3 в їхній роботі має напрям, протилежний прийнятому нами. Крім того, треба мати на увазі залежність між проекціями зусиль на осі та їх контраваріантними компонентами. Ці залежності мають такий вигляд:

$$S^{\beta}_{(i)} = (\delta^{k}_{\beta} - D_{k\beta}) S_{(i)x^k}(1 + \varepsilon_k) + \cdots$$

Якщо розглядати проекції на осі допоміжного триедра, яким користувався Ляв, слід скористуватися формулами, виведеними нами при вивченні формул Лява. У розгорнутому вигляді залежності між проекціями зусиль або моментів на осі допоміжного (рухомого) триедра та їх контраваріантними компонентами можна написати в такій формі:

$$A^{1}_{(1)} = (1 - D_{11})(1 + \varepsilon_1) A_{(x)x} - D_{12}(1 + \varepsilon_2) A_{(x)y} -$$

$$- D_{13}(1 + \varepsilon_3)(A_{(x)x}\gamma_{13} + A_{(x)y}\gamma_{23} + A_{(x)z}) + \cdots \tag{145a}$$

$$A^{2}_{(1)} = - D_{12}(1 + \varepsilon_1) A_{(x)x} + (1 - D_{22})(1 + \varepsilon_2) A_{(x)y} -$$

$$- D_{23}(1 + \varepsilon_3)(A_{(x)x}\gamma_{13} + A_{(x)y}\gamma_{23} + A_{(x)z}) + \cdots \tag{145b}$$

$$A^{3}_{(1)} = - D_{13}(1 + \varepsilon_1) A_{(x)x} - D_{23}(1 + \varepsilon_2) A_{(x)y} +$$

$$+ (1 - D_{33})(1 + \varepsilon_3)(A_{(x)x}\gamma_{13} + A_{(x)y}\gamma_{23} + A_{(x)z}) + \cdots \tag{145c}$$

$$A^{1}_{(2)} = (1 - D_{11})(1 + \varepsilon_1)(A_{(y)x} + A_{(x)x}\gamma_{12}) - D_{12}(1 + \varepsilon_2)(A_{(y)y} + A_{(x)y}\gamma_{12}) -$$

$$- D_{13}(1 + \varepsilon_3)(A_{(y)x}\gamma_{13} + A_{(y)y}\gamma_{23} + A_{(y)z} + \cdots) + \cdots \tag{145d}$$

$$A^{2}_{(2)} = - D_{12}(1 + \varepsilon_1)(A_{(y)x} + A_{(x)x}\gamma_{12}) + (1 - D_{22})(1 + \varepsilon_2)(A_{(y)y} + A_{(x)y}\gamma_{12}) -$$

$$- D_{23}(1 + \varepsilon_3)(A_{(y)x}\gamma_{13} + A_{(y)y}\gamma_{23} + A_{(y)z} + \cdots) + \cdots \tag{145e}$$

$$A^{3}_{(2)} = - D_{13}(1 + \varepsilon_1)(A_{(y)x} + A_{(x)x}\gamma_{12}) - D_{23}(1 + \varepsilon_2)(A_{(y)y} + A_{(x)y}\gamma_{12}) +$$

$$+ (1 - D_{33})(1 + \varepsilon_3) A_{(y)x}\gamma_{13} + A_{(y)y}\gamma_{23} + A_{(y)z} + \cdots) + \cdots \tag{145f}$$

В цих формулах буквою $A_{(i)}$ позначене зусилля або момент на контурній площадці (i). При їх виведенні нами були відкинуті деякі члени, нелінійні відносно компонентів тензора деформацій.

Порівняймо тепер рівняння (142a) з рівнянням (144a).

Для зручності порівняння напишемо вирази для $S^{1}_{(1)}$ та $S^{1}_{(2)}$, користуючись формулами (145). Знайдемо (з точністю до малих старших порядків):

$$S^{1}_{(1)} = S_{(1)x^1} - S_{(1)x^1}\varepsilon_1 - \gamma_{12} S_{(1)x^2} - \gamma_{13} S_{(1)x^3} + \cdots$$

$$S^1_{(2)} = S_{(2)x^2} - S_{(2)x^2}\varepsilon_1 + \gamma_{12}(S_{(1)x^1} - S_{(2)x^2}) - \gamma_{13} S_{(2)x^3} + \cdots$$

(Нами позначені проекції зусиль $S_{(y)x^k}$ через $S_{(2)x^k}$).

Рівняння (142а) набирають такого вигляду:

$$\partial_1 S_{(1)x^1} + \partial_2 S_{(1)x^2} + S_{(1)x^1}(\partial_2 \gamma_{12} + \partial_1 \varepsilon_2 - k_1 D_{0,13}) +$$
$$+ S_{(1)x^2}(\partial_2 \varepsilon_1 - \partial_1 \gamma_{12}) - S_{(2)x^2}\partial_1 \varepsilon_2 - k_1(1 + 4\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) S_{(1)x^3} -$$
$$- \varkappa_{11} S_{(1)x^3} - \varepsilon_1 \partial_1 S_{(1)x^1} + \gamma_{12}(\partial_2 S_{(1)x^1} - \partial_2 S_{(2)x^2} - \partial_1 S_{(1)x^2}) - \tag{145}$$
$$- \gamma_{13}(\partial_1 S_{(1)x^3} + \partial_2 S_{(2)x^3}) + \frac{1}{2}(k_1 \gamma_{12} - \varkappa_{12} - \partial_1 D_{0,23}) S^3_{(2)} + X_{x^1} = 0$$

Порівняння цього рівняння з рівнянням (144а) показує, що в останньому відсутній цілий ряд членів. Віднімаючи від лівої сторони рівняння (145) ліву сторону рівняння (144а), дістанемо:

$$S_{(1)x^1}(\partial_2 \gamma_{12} + \partial_1 \varepsilon_2 - k_1 D_{0,13}) - S_{(1)x^2}\partial_1 \gamma_{12} -$$
$$- k_1(4\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) S_{(1)x^3} + \frac{1}{2}(k_1 \gamma_{12} - \partial_1 D_{0,23}) S_{(2)x^3} - \varepsilon_1 \partial_1 S_{(1)x^1} +$$
$$+ \gamma_{12}(\partial_2 S_{(1)x^1} - \partial_2 S_{(2)x^2} - \partial_1 S_{(1)x^2}) - \gamma_{13}(\partial_1 S_{(1)x^3} + \partial_2 S_{(2)x^3})$$

Розглядаючи цю суму, переконуємося, що у рівняннях Зандена і Тельке пропущені члени, які мають порядок малості в загальному випадку такий самий, як і порядок малості членів, залишених у рівняннях. Так, автори скрізь нехтують множниками $\partial_1 \gamma_{12}$ та $\partial_2 \gamma_{12}$. Це здається нам безпідставним.

Виникає питання про точність результатів, одержаних інтегруванням цих рівнянь. Нам здається, що точність ця вельми сумнівна. Напевно, вона не вища за точність результатів, одержаних шляхом інтегрування рівнянь, в яких усунутий ще ряд членів, які містять компоненти тензора деформації. Зазначмо ще, що великий вплив може зробити введення гіпотези Кірхгофа, як ми вже відмітили вище.

§ 17. Дослідження рівнянь рівноваги циліндричних оболонок, складених Flugge („Die Stabilität der Kreiszylinderschallen“ [1])

Тепер розглянемо рівняння, складені Флюгге для розв'язання тої самої проблеми, якою займалися Занден і Тельке. Рівняння Флюгге мають деякі характерні особливості, на яких ми хочемо тут зупинитися.

Перш за все Флюгге розглядає розклад компонентів тензора деформації, не відносячи їх до серединної поверхні. Через це вираз для D^z_{12} (в наших позначеннях) несиметрично виражається через переміщення точок серединної поверхні. Проте, ця асиметрія внутрішньо обгрунтована, чого немає у Лява. Саме D^z_{12} виявляється залежним від обертання елементу серединної поверхні навколо нормалі. Це являється одною з головних зовнішніх відмін між першою групою еластостатичних рівнянь в нашій

[1]) Ing. Archiv, III Bd. 5 H. 1932.

роботі і в роботі Флюгге. Принципіальна різниця полягала в наявності у наших формулах допоміжних членів, які увійшли в основні рівняння шляхом узагальнення гіпотези Кірхгофа. Отже дуже значні розходження спостерігаються у всіх членах розкладу в ряди компонентів тензора деформації. Зупинімося на цьому питанні докладніше.

На підставі наочних геометричних міркувань, користуючися гіпотезою Кірхгофа, Флюгге знайшов такий вираз для компонента тензора деформації ε_1 (в наших позначеннях):

$$\varepsilon_1^z = \partial_1 u_1 - \frac{u_3}{a-z} - z\,\frac{a\partial_1^2 u_3}{a-z}$$

Формули аналогічного вигляду одержані для ε_2^z та γ_{12}^z.

Звідси ми бачимо, що коефіціенти розкладу ε_1^z за степенями z всі виражаються через другі похідні від u_3 по x^1 та x^2. Проте, цілком очевидно, що вже коефіціент розкладу при z^2 повинен містити треті похідні від компонентів переміщення. Формули Флюгге є висновком з гіпотези Кірхгофа, а ми вже бачили в якій мірі вона обмежує деформації оболонки.

Користуючись виразами для компонентів тензора деформацій, Флюгге знаходить вираз для зусиль та моментів. При цьому у виразах для зусиль він зберігає члени, які містять h^3. Це було б значним кроком вперед порівнюючи з роботою Зандена і Тельке, якщо ці формули не були б одержані безпосередньо на основі гіпотези Кірхгофа. Адже гіпотеза Кірхгофа по суті полягає в тому, що ми нехтуємо у розкладах компонентів тензора деформації членами, що містять z^2. А тому точність тих членів у виразах зусиль, які містять h^3, сумнівна. (Ляв у таких випадках вводив у гіпотезу Кірхгофа поправкові члени). Але необхідність введення членів, які містять h^3 у вирази для зусиль, очевидна, як ми вже вказували це вище.

Вирази зведених моментів, одержані Флюгге, містять члени, залежні від розтягів серединної поверхні. Ці рівняння в основному збігаються з одержаними нами (якщо, звичайно, не зважати на члени, залежні від узагальнення гіпотези Кірхгофа).

Звернімося тепер до рівнянь рівноваги. Ці рівняння значно спрощені порівнюючи з рівняннями Зандена і Тельке. Наприклад, перше рівняння рівноваги містить лише чотири члени. У наших позначеннях воно має такий вигляд:

$$\partial_1 S_{(1)x^1} + \partial_2 S_{(2)x^1} + \partial_2^2 u_1 S_{(1)x^1} - k_1 S_{(1)x^3} = 0 \qquad (146)$$

Порівняймо це рівняння з рівнянням (145) і (146). Порівняння з рівнянням (144а) показує, що в цьому рівнянні є член, який не містять рівняння Зандена і Тельке, а саме член $\partial_2^2 u_1 S_{(1)x^1}$. Цей член є частиною члена $\partial_2 \gamma_{12} S_{(1)x^1}$, який входить у рівняння (145).

Такі ж висновки можна зробити відносно решти рівнянь.

Тому виникає те саме питання, яке виникло вже при дослідженні рівнянь Зандена і Тельке, — про доцільність введення членів тієї ж малості, як і відкинуті. При знайдених нами похибках, звичайно, не можна бути певними і за точність остаточних результатів інтегрування цих рівнянь, через те, що неточні основні рівняння: неточні в тому розумінні, що відкинуто члени, які нічим не відрізняються від залишених. Цілком зрозуміло, що причина цих помилок полягає у недосконалості методів, застосованих вказаними дослідниками для складання основної еластостатичної системи.

На закінчення скажемо, що Занден і Тельке і Флюгге складають всі шість рівнянь рівноваги, при чому перші автори користуються шостим рівнянням для виключення деяких зусиль. Флюгге зауважує, що шосте рівняння повинне обернутися в тотожність, але докладно на цьому питанні не зупиняється.

Висновки з теорій перелічених авторів відносно значень критичної системи навантажень перевірялися експериментально. Збіг результатів дослідів із наперед обчисленими даними виявилося, як треба було чекати, незадовільним. Інтересно, що більшість дослідів показує значно меншу величину для критичних навантажень, ніж наперед обчислене [1]). Це звичайно пояснюють неточністю виготовлення зразків, неточністю постановки експерименту і т. д. Проте, якщо це дійсно було б так, очевидно, експерименти давали б не тільки менші значення для критичної системи навантажень, але й більші, при чому тих і других випадків було б приблизно однакова кількість. Через те, що це не спостерігається, треба зробити висновок, що неточною є основна теорія. Саме основне значення належить застосовуваній більшістю авторів гіпотезі Кірхгофа, яка механічно еквівалентна системі додаткових зв'язків, накладуваних на оболонку, що, як відомо, підвищує її загальну стійкість.

Переходимо тепер до розгляду одної наближеної теорії, яка одержала за останній час значне поширення.

§ 18. Наближена теорія Donnell'а („Стійкість тонкостінних труб при крученні") [2])

В резюме до своєї статті Доннелл вказує, що в результаті 50 випробувань руйнуючий скручуючий момент виявився меншим на 25—40% від теоретично обчисленого моменту, який відповідає початку випинання, тобто від критичного моменту. Причину цього розходження автор відносить за рахунок початкового ексцентриситету труб. Ця причина є досить можливою при випробуваннях труб на кручення, але подібне явище спостерігається також при інших видах випробувань [наприклад, при осьовому стиску, при осьовому стиску з одночасним радіальним навантаженням (досліди Yamana)]. Тому нам здається, що треба переглянути розв'язок перелічених задач, користуючись узагальненою гіпотезою Кірхгофа.

---

[1]) О. С. Гекк и Г. Эбнер, „Формулы и методы расчета на прочность плоских и изогнутых пластин, применяемых в самолетостроении (перекл. з нім.) (Сб. рефер. и перевод. под редакцией А. Уманского и П. Знаменского, изд. ЦАГИ, 1937).

[2]) L. H. Donnell, Stability of thin walled tubes under torsion. National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) № 479, 1933. (Ми користувалися перекладом цієї статті, вміщеним у Сборн. рефер. и перев., видання ЦАГИ).

У своїй статті Доннелл згадує про роботу Зандена і Тельке і відмічає, що їх результати для одного окремого випадку були також одержані і ним, але за допомогою значно простіших рівнянь. Це хорошо погоджується з нашими висновками про відсутність у рівняннях цих авторів деяких членів, однакових за порядком малості із залишеними. Очевидно, можна нехтувати і цими залишеними членами, при чому точність результатів залишиться приблизно такою ж, як і попередня. Сам Доннелл вважає рівняння Зандена і Тельке надзвичайно точними, але вказує, що рівняння рівноваги, які не враховують всіх величин, можуть виявитися менш точними, ніж його наближене рівняння. Доннелл відкидає у рівняннях рівноваги всі члени, які містять компоненти тензора деформації, за винятком члена, який містить зусилля зсуву в третьому рівнянні. Як видно з рівняння (142с), цей член залежить від компонента тензора змін кривини $\varkappa_{12}$. Цю величину Доннелл спрощує, обмежуючись членом $\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial s}$ (у його позначеннях). В результаті таких спрощень Доннелл зводить розв'язання задачі до інтегрування деякого рівняння 8-го порядку відносно радіального переміщення, яке є безпосереднім узагальненням відомого основного рівняння теорії пластинок. Ми його тут наводити не будемо.

Інститут Математики
Академії Наук УРСР
Київ

Одержано 15.XI 1939

Основные уравнения равновесия упругих оболочек и некоторые методы их интегрирования. I

Н. А. Кильчевский

РЕЗЮМЕ

В первой части настоящей работы нами были выведены основные уравнения теории оболочек при помощи замены тензора напряжений системой усилий и моментов, действующих на края срединной поверхности, и выражения всех величин, характеризующих деформированное и напряженное состояние оболочки, через перемещения срединной поверхности и их производные по внутренним координатам срединной поверхности.

При этом мы несколько обобщили гипотезу Кирхгофа о поведении нормали к недеформированной срединной поверхности оболочки путем учета влияния нагрузок на поверхности. Найденные дополнительные члены могут иметь значение при исследованиях явлений неустойчивости. Подробный анализ уравнений первой части работы и их сравнение с уравнениями в работах ряда авторов показывает, что в ряде случаев имеет место необоснованное пренебрежение членами, имеющими одинаковый порядок малости с членами, оставленными в уравнениях. Это было показано нами

на примерах уравнений, приведенных Занден и Тельке и Флюгге в их работах по устойчивости оболочек. Можно предположить, что в этих неточностях скрыта отчасти причина плохого совпадения теоретических результатов с экспериментальными (в особенности в теории устойчивости). Метод вывода основных уравнений теории оболочек, рассмотренный в первой части, имеет значительные достоинства, которые заключаются в возможности упрощать полученные уравнения, сообразно конкретным условиям задачи. Именно подобным образом были получены известные в настоящее время различные частные системы эластостатических уравнений.

Из результатов первой части отметим еще инвариантный характер основных уравнений. Связь между усилиями, моментами и деформациями определяется зависимостями между усилиями, моментами и двумя симметрическими тензорами; первый из них определяет двухмерные деформации срединной поверхности, второй является тензором изменений кривизны. Этот последний тензор отличается от соответствующих величин в теории Лява, которые составляют асимметричный тензор [1]).

Показано, что шестое уравнение равновесия является следствием остальных.

Les équations fondamentales de l'équilibre des enveloppes élastiques et quelques méthodes de leurs intégration. I

Par *N. A. Kiltchevsky*

RÉSUMÉ

Dans la première partie du présent article l'auteur a déduit les équations fondamentales de la théorie des enveloppes en remplaçant le tenseur des tensions par un système de forces et de moments agissant sur les bords de la surface médiaire et en exprimant toutes les grandeurs qui caractérisent l'état déformé et tendu de la enveloppe par les déplacements de la surface médiaire, ainsi que par leurs dérivées par rapport aux coordonées intrinsèques de la surface médiaire.

L'auteur a généralisé dans un certain dégré l'hypothèse de Kirchhoff concernant l'attitude de la normale à la surface médiaire, en tenant compte de l'effet des charges sur la surface. Les membres additifs trouvés peuvent avoir une signification pour l'étude des phénomènes de l'instabilité. L'analyse detaillée des équations de la première partie de l'article présent et leur comparaison avec les équations d'autres auteurs montrent, que dans bien des cas on ne prend pas en considération les membres qui sont d'un même ordre de

---

[1]) Указанная неточность изложения Лява связана с его предположениями относительно малости некоторых членов. Это было указано мной в докладе, прочитанном на конференции по прикладной математике в О. Т. Н. Акад. Наук СССР 4. II. 1938 г. Соответствующая статья напечатана в журнале „Прикладная математика и механика“ (т. II, в. 4, 1939).

В последнее время появилась статья Гольденвейзера, в которой автор также приходит к выводу о симметрии величин, характеризующих изменения кривизны.

grandeur que les membres conservés dans les équations. Cela fut démontré à l'aide des équations citées par Sanden, Tölke et Flügge dans leurs travaux concernant la stabilité des enveloppes. On peut supposer que ces inexactitudes sont partiellement la cause d'une divergence entre les resultats théoriques et expérimentaux (particulièrement dans la théorie de stabilité). La méthode de déduction des équations fondamentales de la théorie des enveloppes étudiée dans la première partie possède de grands avantages en ce sens qu'ils donnent la possibilité de simplifier les équations obtenues en accord avec les conditions concrètes du problème. A présent on a obtenu justement d'une telle manière les différents systèmes particuliers des équations élastostatiques.

Parmi les resultats de la première partie nous devons noter encore le caractère invariant des équations fondamentales. La rélation entre les forces, les moments et les déformations est définie par les dépendances entre les forces, les moments et deux tenseurs symétriques. Le premier d'entre eux définit les déformations bidimensionales de la surface médiaire, le second est le tenseur des variations de la curbature. Le dernier tenseur se distingue des grandeurs respectives dans la théorie de Love qui composent un tenseur asymétrique [1]).

Il est démontré que la sixième équation de l'équilibre est une conséquence des autres équations.

---

[1]) L'inexactidtude mentionnée de l'exposition de Love s'explique par ses suppositions concernant la petitesse de quelques membres. L'auteur a démontré cela dans son rapport fait à la conférence de la mathematique appliquée devant la Section des Sciences Techniques de l'Académie de Sciences de l'URSS, 4.II.1938. L'article correspondant est publié dans le journal „Mathématique appliquée et Mecanique" V.III.F.4.1939.

Récemment fut publié l'article de Goldenveiser dans lequel cet auteur vient aussi à la conclusion, qu'il existe une symétrie entre les grandeurs caractérisant les variations de la courbature.

№ 4 ЗБІРНИК ПРАЦЬ ІНСТИТУТУ МАТЕМАТИКИ 1940
АКАДЕМІЇ НАУК УРСР

RECUEIL DES TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE LA RSS D'UKRAINE

О построении потока, обтекающего тонкий профиль

Н. И. Ахиезер

Известный метод Мунка для приближенного расчета тонкого профиля применим тогда, когда скелет профиля мало отличается от отрезка прямой линии.

В настоящей заметке мы ставим себе задачу обобщить метод Мунка на тот случай, когда скелет профиля мало отличается от дуги окружности.

Итак, пусть дана некоторая простая гладкая дуга AB, причем A есть задний, а B — передний ее носик. Направим ось x-ов по хорде $\overline{AB}$, а начало координат поместим в середине хорды. Требуется построить поток идеальной несжимаемой жидкости, омывающей рассматриваемую дугу, если:

a) скорость на бесконечности задана:

$$u_\infty = -V_0 \cos\alpha, \quad v_\infty = V_0 \sin\alpha;$$

b) в точке A скорость течения должна быть конечной (гипотеза Н. Е. Жуковского);

c) вихри вне дуги отсутствуют всюду на конечном расстоянии.

Для решения этой задачи ищем эквивалентное дуге AB распределение вихревых точек. Обозначая плотность этих вихрей через k, получаем известное уравнение:

$$\frac{1}{2\pi}\Re\left\{\frac{dz}{ds}\int_{AB}'\frac{k(z')\,ds'}{z-z'}\right\} = u_\infty\frac{dy}{ds} - v_\infty\frac{dx}{ds}, \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $ds = |dz|$; штрих указывает, что интеграл берется, как главное значение в смысле Коши.

Примем, что дуга AB мало отличается от дуги окружности $\breve{AB}$, имеющей уравнение:

$$z = iy_0 + iRe^{i\vartheta} \quad (-\tau \leqslant \vartheta \leqslant \tau), \tag{2}$$

причем $0 < \tau < \pi$, точка $\vartheta = -\tau$ отвечает переднему, а точка $\vartheta = \tau$—заднему носику.

Заменим точное уравнение (1) приближенным уравнением, подставляя в левую часть вместо z и z' их значения, отвечающие дуге окружности $\breve{AB}$ согласно формуле (2).

Мы получим приближенное уравнение:

$$\frac{1}{2\pi}\Re\left\{ie^{i\vartheta}\int_{-\tau}^{\tau}{}'\frac{\gamma(\varphi)\,d\varphi}{e^{i\vartheta}-e^{i\varphi}}\right\} = u_\infty\frac{dy}{d\vartheta} - v_\infty\frac{dx}{d\vartheta},$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau}{}' \gamma(\varphi)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}\,d\varphi = g(\vartheta),$$

где функцию

$$2\left(u_\infty \frac{dy}{d\vartheta} - v_\infty \frac{dx}{d\vartheta}\right) = g(\vartheta)$$

мы должны считать известной.

По понятным гидродинамическим соображениям будем искать $\gamma(\varphi)$ в виде:

$$\gamma(\varphi) = \sqrt{\frac{\sin\frac{\tau-\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\tau}{2}}}\; h(\varphi),$$

так что наше уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau}{}' \sqrt{\frac{\sin\frac{\tau-\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\tau}{2}}}\; h(\varphi)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}\,d\varphi = g(\vartheta),\quad (-\tau<\vartheta<\tau) \tag{3}$$

Решение этого уравнения основывается на некоторых соотношениях, являющихся обобщением известных соотношений Гильберта, которым в последнее время были посвящены важные исследования А. Плеснера и М. Рисса.

Можно доказать следующее предложение.

Теорема. Если

$$G(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau}{}' p(\varphi)H(\varphi)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}\,d\varphi +$$

$$+\frac{1}{2\pi\sin\frac{\tau}{2}}\int_{-\tau}^{\tau} p(-\varphi)\,G(\varphi)\,d\varphi - \frac{\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau} p(\varphi)\,H(\varphi)\,d\varphi,$$

где

$$p(\varphi) = \sqrt{\frac{\sin\frac{\tau-\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\tau}{2}}}$$

и

$$-\tau<\vartheta<\tau,$$

то

$$H(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau}{}' p(-\vartheta)\,G(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\vartheta}{2}\,d\vartheta +$$

$$+\frac{1}{2\pi\sin\frac{\tau}{2}}\int_{-\tau}^{\tau}p(\vartheta)H(\vartheta)d\vartheta-\frac{\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau}p(-\vartheta)\,G(\vartheta)\,d\vartheta$$

Каждая из этих формул дает единственное решение уравнения, представляемого другой формулой. Если $H(\varphi)$ есть тригонометрическая сумма порядка n, то тем же свойством обладает и $G(\vartheta)$. Для аэродинамики предположение, что $H(\varphi)$ и $G(\vartheta)$ суть конечные тригонометрические суммы, вполне достаточно, но написанные соотношения справедливы уже тогда, когда, $H(\varphi)$ $(G(\vartheta))$ есть измеримая функция, для которой существует интеграл

$$\int_{-\tau}^{\tau}p(\varphi)\,|H(\varphi)|^2\,d\varphi\;\left(\int_{-\tau}^{\tau}p(-\vartheta)\,|G(\vartheta)|^2\,d\vartheta\right)$$

В этом случае эти соотношения будут иметь место почти всюду в интервале $(-\tau,\tau)$.

На основании сформулированной теоремы из соотношения (3) вытекает, что

$$\int_{-\tau}^{\tau}p(\varphi)\,h(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{\cos\frac{\tau}{2}}\int_{-\tau}^{\tau}p(-\vartheta)\,g(\vartheta)\,d\vartheta \tag{4}$$

и

$$h(\varphi)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau}p(-\vartheta)\,g(\vartheta)\,d\vartheta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau}p(-\vartheta)g(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\vartheta}{2}d\vartheta \tag{5}$$

Таким образом, плотность вихрей найдена. Для практики наиболее существенным является нахождение подъемной силы и ее момента.

Подъемная сила по теореме Н. Е Жуковского равна

$$P=\rho\,V_0\int_{-\tau}^{\tau}\gamma(\varphi)\,d\varphi$$

Поэтому, в силу формулы (4),

$$P=2\rho\,V_0\frac{1}{\cos\frac{\tau}{2}}\int_{-\tau}^{\tau}\sqrt{\frac{\sin\frac{\vartheta+\tau}{2}}{\sin\frac{\tau-\vartheta}{2}}}\left\{u_\infty\frac{dy}{d\vartheta}-v_\infty\frac{dx}{d\vartheta}\right\}d\vartheta \tag{6}$$

Пользуясь формулой (5) можно получить момент сил давления относительно какой-нибудь точки.

Беря в качестве этой точки, например, центр окружности, которой принадлежит дуга $\breve{AB}$, получим, что

$$M = \rho R V_0 \int_{-\tau}^{\tau} \sqrt{\frac{\sin\frac{\tau-\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\tau}{2}}}\, h(\varphi)\sin(\varphi+\alpha)\,d\varphi =$$

$$= 2\rho R V_0 \int_{-\tau}^{\tau} \sqrt{\frac{\sin\frac{\vartheta+\tau}{2}}{\sin\frac{\tau-\vartheta}{2}}} \left\{u_\infty \frac{dy}{d\vartheta} - v_\infty \frac{dx}{d\vartheta}\right\} \left\{\sin\left(\vartheta - \frac{\tau}{2} + \alpha\right) - \right.$$

$$\left. - \cos\alpha \, . \, \sin\frac{\tau}{2}\right\} d\vartheta \qquad (7)$$

Формулы (6) и (7) аналогичны формулам Мунка — Глауэрта.

Если дуга $\breve{AB}$ является точно дугою окружности, значения, даваемые формулами (6) и (7), должны совпасть с результатами точной теории.

Формула (6) в случае

$$x = -R\sin\vartheta, \ y = y_0 + R\cos\vartheta,$$

действительно, дает хорошо известное выражение:

$$P = 4\pi\rho \sin\frac{\tau}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\tau}{2}\right) R V_0^2$$

Для применения формул (5), (6) и (7) к частным задачам полезен следующий ряд интегралов:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\tau}^{\tau} \sqrt{\frac{\sin\frac{\tau-\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\tau}{2}}}\, e^{-ik\varphi}\,d\varphi = i\left\{e^{-\frac{i\tau}{2}} P_{k-1}(\cos\tau) - e^{\frac{i\tau}{2}} P_k\ (\cos\tau)\right\}$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\tau}^{\tau} \sqrt{\frac{\sin\frac{\tau-\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\tau}{2}}}\,d\varphi = 2\sin\frac{\tau}{2},$$

где P_k суть полиномы Лежандра,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau}{}' \sqrt{\frac{\sin\frac{\tau-\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\tau}{2}}}\,\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}\,d\varphi = \cos\frac{\tau}{2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau}{}' \sqrt{\frac{\sin\frac{\tau-\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\tau}{2}}}\, e^{-ik\varphi} \operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= i\left\{ae^{-ik\vartheta} + \sum_{r=1}^{k-1} a_r\, e^{-i(k-r)\vartheta} + \frac{1}{2}a_k\right\} \quad (k=1, 2, 3, \ldots),$$

где
$$a = -ie^{i\frac{\tau}{2}}$$

Отметим еще следующее любопытное обстоятельство, которое, повидимому, является частным случаем некоторых общих фактов:

Если полиномы

$$\Phi_m(\vartheta) = x_0 + x_1 e^{-i\vartheta} + \ldots + x_m e^{-im\vartheta} \quad (m=0, 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяют условиям ортонормированности

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\tau}^{\tau} \sqrt{\frac{\sin\frac{\tau-\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta+\tau}{2}}}\, \Phi_m(\vartheta)\, \overline{\Phi_n(\vartheta)}\, d\vartheta = \delta_{m,n},$$

то полиномы

$$\Psi_m(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau}{}' \sqrt{\frac{\sin\frac{\tau-\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\tau}{2}}}\, \Phi_m(\varphi) \operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}\, d\varphi$$

$$(m=0, 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяют условиям:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\tau}^{\tau} \sqrt{\frac{\sin\frac{\vartheta+\tau}{2}}{\sin\frac{\tau-\vartheta}{2}}}\, \Psi_m(\vartheta)\, \overline{\Psi_n(\vartheta)}\, d\vartheta = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n \neq 0) \\ \cos^2\frac{\tau}{2} & (m = n = 0) \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что

$$\Psi_0(\varphi) = \cos\frac{\tau}{2}\, \Phi_0(\varphi)$$

$$\Psi_k(\varphi) = ia\, \overline{\Phi_k(-\varphi)} \qquad (k=1, 2, 3, \ldots).$$

Институт математики и механики
Харьковского Государственного Университета

Получено 1 XII. 1939

Про побудову потоку, що обтікає тонкий профіль

Н. І. Ахієзер

РЕЗЮМЕ

В цій замітці узагальнюється відомий метод Мунка на той випадок, коли середня лінія профілю мало відрізняється від колової дуги (а не відрізка, як у Мунка).

Über die Konstruktion des Stromes um ein dünnes Profil

N. Achyeser

ZUSAMMENFASSUNG

In vorliegender Arbeit wird die bekannte Methode von Munk für den Fall angewandt, wo die Mittellinie des Profils sich wenig von einem Kreisbogen (aber nicht von einer Strecke, wie bei Munk) unterscheidet.

№ 4 ЗБІРНИК ПРАЦЬ ІНСТИТУТУ МАТЕМАТИКИ 1940
АКАДЕМІЇ НАУК УРСР

RECUEIL DES TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE LA RSS D'UKRAINE

Про оператори, які переставляють інтегральні інваріанти неперервної групи перетворень

Г. І. Дрінфельд

(Повідомлення I)

§ 1. В цій роботі добутки диференціалів скрізь вважаються альтернативними, знак сумації відкидається, якщо підсумовуємо по індексу, який зустрічається двічі (навіть коли цей індекс обидва рази стоїть знизу).

Основною метою роботи є виявити, в якій мірі відомі властивості оператора, який переставляє інтеграли лінійного однорідного рівняння з частинними похідними, зберігаються в оператора, який переставляє інтегральні інваріанти однакового порядку неперервної групи перетворень. Таке питання природно поставити, коли звернути увагу на те, що інтеграли рівняння

$$X(f)=0$$

є в той же час інваріантами — інтегральними інваріантами нульового порядку — однопараметричної групи перетворень, заданої інфінітезимальним оператором $X(f)$.

Разом з тим, ми хочемо узагальнити один з результатів попередньої нашої роботи [1]), в якій між іншим було показано, що інфінітезимальний оператор групи перетворень, оберненої до даної, переставляє інтегральні інваріанти даної групи.

Ми обмежимося в цій статті розглядом однопараметричних груп.

§ 2. Припускаючи, що однопараметрична група перетворень G визначається інфінітезимальним оператором

$$X(f)=X_i\frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{1}$$

введемо в розгляд оператори

$$Y(f)=Y_i\frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{2}$$

$$Z(f)=Z_i\frac{\partial f}{\partial x^i}=(X, Y)f=\left\{X(Y_i)-Y(X_i)\right\}\frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{3}$$

і доведемо твердження:

---

[1]) Збірник праць Інституту математики АН УРСР № 3, 1939.

Якщо інтеграл

$$I = \int A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} dx^{\alpha_1} dx^{\alpha_2} \ldots dx^{\alpha_p} \tag{4}$$

є інтегральним інваріантом групи G, то інтеграл

$$J = \int B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} dx^{\alpha_1} dx^{\alpha_2} \ldots dx^{\alpha_p}, \tag{5}$$

де

$$B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} = Y(A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}) + \sum_j A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} j \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p} \frac{\partial Y^j}{\partial x^{\alpha_i}}, \tag{6}$$

який є результатом застосування оператора (2) до інтеграла (4), буде інтегральним інваріантом тої ж групи тоді й тільки тоді, коли інтеграл (4) є інтегральним інваріантом групи, визначеної оператором (3).

Для того щоб інтеграл (4) був інтегральним інваріантом групи G, тобто з точністю до малих порядку вище першого не мінявся при перетвореннях

$$x^i \to x^i + tX_i,$$

де t мала величина, потрібно і досить, щоб він був інтегральним інваріантом системи рівнянь:

$$\frac{dx^1}{X_1} = \frac{dx^2}{X_2} = \ldots = \frac{dx^n}{X_n} = d\tau,$$

а для цього потрібно і досить [1]), щоб задовольнялися тотожності:

$$X(A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}) + \sum_j A_{\alpha \ldots \alpha_{i-1} j \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p} \frac{\partial X_j}{\partial x^{\alpha_i}} = 0, \tag{7}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p = 1, 2, \ldots, n)$$

якими ми і будемо далі користуватися.

Серед тотожностей (7) є і такі:

$$X(A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1} j \alpha_{r+1} \ldots \alpha_p}) + \sum_i A_{\alpha \ldots \alpha_{r-1} j \alpha_{r+1} \ldots \alpha_{i-1} k \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p} \frac{\partial X_k}{\partial x^{\alpha_i}} +$$

$$+ A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1} k \alpha_{r+1} \ldots \alpha_p} \frac{\partial X_k}{\partial x^j} = 0 \tag{8}$$

Помноживши рівності (8) на

$$\frac{\partial Y_j}{\partial x^{\alpha_r}}$$

і підсумувавши по значках j, r, дістанемо:

$$\sum_r X(A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1} j \alpha_{r+1} \ldots \alpha_p}) \frac{\partial Y_i}{\partial x^{\alpha_r}} + \sum_i \sum_r A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1} j \alpha_{r+1} \ldots \alpha_{i-1} k \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p} \frac{\partial X_k}{\partial x^{\alpha_i}} \frac{\partial Y_j}{\partial x^{\alpha^r}} +$$

$$+ \sum_r A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1} k \alpha_{r+1} \ldots \alpha_p} \frac{\partial X_k}{\partial x^j} \frac{\partial Y_j}{\partial x^{\alpha_r}} = 0 \tag{9}$$

[1]) Див. наприклад, Th. De-Donder, Théorie des invariants intégraux, Paris 1927.

Далі, коли застосувати до тотожностей (7) оператор (2), то одержуються тотожності:

$$YX(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p})+\sum_i Y(A_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}j\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p})\frac{\partial X_j}{\partial x^{\alpha_i}}+$$

$$+\sum_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}j\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p}Y\left(\frac{\partial X_j}{\partial x^{\alpha_i}}\right)=0 \qquad (10)$$

Нарешті, зауважмо, що коли продиференціюємо рівності

$$Z_j=X(Y_j)-Y(X_j),$$

які є висновком з (3), по x^{α_i}, одержимо:

$$\frac{\partial Z_j}{\partial x^{\alpha_i}}=X\left(\frac{\partial Y_j}{\partial x^{\alpha_i}}\right)-Y\left(\frac{\partial X_j}{\partial x^{\alpha_i}}\right)+\frac{\partial Y_j}{\partial x^k}\frac{\partial X_k}{\partial x^{\alpha_i}}-\frac{\partial X_j}{\partial x^k}\frac{\partial Y_k}{\partial x^{\alpha_i}} \qquad (11)$$

Поклавши

$$X(B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p})+\sum_i B_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}j\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p}\frac{\partial X_j}{\partial x^{\alpha_i}}=u,$$

на основі рівностей (6), маємо:

$$u=XY(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p})+\sum_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}j\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p}X\left(\frac{\partial Y_j}{\partial x^{\alpha_i}}\right)+$$

$$+\sum_i X(A_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}j\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p})\frac{\partial Y_j}{\partial x^{\alpha_i}}+\sum_i Y(A_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}k\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p})\frac{\partial X_k}{\partial x^{\alpha_i}}+$$

$$+\sum_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}j\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p}\frac{\partial X_k}{\partial x^{\alpha_i}}\frac{\partial Y_j}{\partial x^k}+$$

$$+\sum_i\sum_r A_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}j\alpha_{r+1}\ldots\alpha_{i-1}k\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p}\frac{\partial X}{\partial x^{\alpha_i}}\frac{\partial Y_j}{\partial x^{\alpha_r}} \qquad (12)$$

Коли відняти з рівностей (12) тотожності (9) і (10) та взяти до уваги рівності (11), то вийде:

$$u=Z(A_{\alpha_1\ldots\alpha_p})+\sum_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}j\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p}\frac{\partial Z_j}{\partial x^{\alpha_i}}$$

Отже тотожності

$$X(B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p})+\sum_i B_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}j\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p}\frac{\partial X_j}{\partial x^{\alpha_i}}=0 \qquad (13)$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p=1,2,\ldots,n)$$

еквівалентні з тотожностями

$$Z(A_{\alpha_1\ldots\alpha_p})+\sum_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}j\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p}\frac{\partial Z_j}{\partial x^{\alpha_i}}=0 \qquad (14)$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p=1,2,\ldots,n)$$

Цим наше твердження доведене.

§ 3. Переходячи тепер до розгляду властивостей оператора, який переставляє довільні інтегральні інваріанти певного порядку, доведімо таке твердження:

Якщо кожний інтегральний інваріант (4) p-го порядку групи G, визначеної оператором (1), за допомогою оператора (2), по схемі (5)—(6), перетворюється знову в інтегральний інваріант тої ж групи, то

$$(X, Y)f = \lambda X(f), \tag{15}$$

де λ — величина, незалежна від f.

Нехай будуть функції

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

n незалежних інтегралів рівняння

$$X(f) = 0 \tag{16}$$

Легко перевірити, за допомогою тотожностей (7), що коли інтеграл (4) — інтегральний інваріант групи G, то будуть інтегральними інваріантами тої ж групи і інтеграли

$$\int \varphi_i A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} dx^{\alpha_1} dx^{\alpha_2} \ldots dx^{\alpha_p}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

На підставі твердження попереднього параграфа повинні одночасно задовольнятися такі тотожності:

$$Z(A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}) + \sum_i A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} j \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p} \frac{\partial Z_j}{\partial x^{\alpha_i}} = 0,$$

$$Z(\varphi_k A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}) + \sum_i \varphi_k A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} j \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p} \frac{\partial Z_j}{\partial x^{\alpha_i}} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Звідси виходить:

$$Z(\varphi_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Отже мусить бути:

$$Z(f) = \lambda X(f)$$

Доведена властивість оператора (2) аналогічна, але, як покажемо далі, не тотожна відомій властивості оператора, який переставляє інтеграли рівняння (16).

§ 4. Припустімо, що оператор (2) задовольняє умову (15) і що інтеграли (4) та (5) є інтегральні інваріанти групи, визначеної оператором (1). При таких припущеннях задовольняються тотожності (7) і тотожності

$$\lambda X(A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}) + \sum_i A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} j \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p} \frac{\partial(\lambda X_j)}{\partial x^{\alpha_i}} = 0, \tag{17}$$

які одержуються з тотожностей (14) на основі рівності (15).

З тотожностей (7) і (17) виходить, що множник λ повинен задовольняти умови:

$$\sum_i A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} j \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p} X_j \frac{\partial \lambda}{\partial x^{\alpha_i}} = 0 \tag{18}$$

Навпаки, умови (18) і тотожності (7) приводять до тотожностей (17). Тому, пригадавши результат попереднього параграфа, маємо таке твердження:

Для того щоб оператор (2) переставляв інтегральні інваріанти p-го порядку групи, визначеної оператором (1), потрібно і досить, щоб задовольнялися умови (15) і (18), — останні для кожного інтегрального інваріанта.

Умови (18), очевидно, задовольняються, коли покласти

$$\lambda = \text{const}, \tag{19}$$

але таке припущення не завжди обов'язкове.

Так, наприклад, коли покласти

$$p = n,$$

то рівності (4), (5), (7), (17) заміняться, відповідно, на такі:

$$I = \int M dx^1 dx^2 \ldots dx^n \tag{4$_1$}$$

$$J = \int \left\{ Y(M) + M \sum_i \frac{\partial Y_i}{\partial x^i} \right\} dx^1 dx^2 \ldots dx^n \tag{5$_1$}$$

$$X(M) + M \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x^i} = 0 \tag{7$_1$}$$

$$\lambda X(M) + M \sum \frac{\partial (\lambda X_i)}{\partial x^i} = 0 \tag{17$_1$}$$

і тому умова (18) заміниться на одну таку:

$$X_i \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} = 0,$$

яка означає, що λ повинна бути інтегралом рівняння

$$X(f) = 0,$$

і тільки. Бути величині λ сталою не обов'язково.

§ 5. В зв'язку з наявністю прикладу, указаного в попередньому параграфі, стає обов'язковим доведення такого твердження:

Для того щоб оператор (2) переставляв, по схемі (5) — (6), інтегральні інваріанти всіх порядків групи перетворень, визначеної оператором (1), потрібно і досить, щоб оператори (1), (2) задовольняли умову:

$$(X, Y) f = \text{const.}\ X(f)$$

Нам досить показати, що хоч для одного p єдиним висновком з умов (18) є рівність (19).

Покладімо

$$p = n - 1$$

В інтегралі (4) під'інтегральний вираз запишемо у формі:

$$A_1\, dx^2 \ldots dx^n + A_2\, dx^3 \ldots dx^n\, dx^1 + \ldots + A_n\, dx^1 \ldots dx^{n-1},$$

якщо n — непаристе число, і у формі:

$$A_1\, dx^2 \ldots dx^n - A_2\, dx^3 \ldots dx^n\, dx^1 + \ldots - A_n\, dx^1 \ldots dx^{n-1},$$

якщо n — паристе число.

При такому записі тотожності (7) в обох випадках заміняться на такі:

$$X(A_j) - A(X_j) + A_j \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x^i} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{20}$$

Тут:

$$A(f) = A_i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Рівності (14) заміняться на рівності:

$$Z(A_j) - A(Z_j) + A_j \sum_i \frac{\partial Z_i}{\partial x^i} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

і тому рівності (17) заміняться на такі:

$$\lambda X(A_j) - A(\lambda X_j) + A_j \sum_i \frac{\partial (\lambda X_i)}{\partial x_i} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Отже, умови (18), в розглядуваному випадку, зводяться до умов:

$$A_j X(\lambda) - X_j A(\lambda) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

Зауважмо, що існує точно $C_n^{n-1} = n$ лінійно-незалежних інтегральних інваріантів $(n-1)$-го порядку. Серед них тільки один задовольняє умови:

$$\frac{A_j}{X_j} = \frac{A_k}{X_k} \qquad (j = 1, 2, \ldots n;\ \ k = 1, 2, \ldots n),$$

і тому з рівностей (21) виходить:

$$X(\lambda) = 0$$

$$A(\lambda) = 0$$

Знову-таки, через існування n лінійно-незалежних інтегральних інваріантів, виходить, що можна написати n лінійно-незалежних лінійних рівнянь вигляду (22), які мають своїм інтегралом λ. Отже, мусить бути

$$\lambda = \mathrm{const}$$

Доведене твердження можна сформулювати і так:

Для того щоб оператор (2) переставляв інтегральні інваріанти всіх порядків групи перетворень, визначеної оператором (1), потрібно і досить, щоб група, визначена оператором (1), була інваріантною підгрупою двопараметричної групи, визначеної сукупністю операторів (1) і (2).

Так сформульоване твердження ми сподіваємося узагальнити на випадок r-параметричної ($r > 1$) групи.

Інститут Математики
Академії Наук УРСР
Київ

Одержано 13.X 1939

Об операторах, перемещающих интегральные инварианты непрерывной группы преобразований

Г. И Дринфельд

(Сообщение I)

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются одно-параметрическая группа преобразований с инфинитезимальным оператором (1) и оператор (2), перемещающий, по схеме (4)—(5)—(6), интегральные инварианты p-го порядка этой группы.

Среди прочих доказывается утверждение:

Для того чтобы оператор (2), по схеме (4)—(5)—(6), перемещал интегральные инварианты всех порядков однопараметрической группы с инфинитезимальным оператором (1), необходимо и достаточно, чтобы эта группа была инвариантной подгруппой двупараметрической группы с инфинитезимальными операторами (1) и (2).

Sur les opérateurs, permutant les invariants intégraux d'un groupe de transformations continues

Par *G. Drinfeld*

(Communication I)

RÉSUMÉ

On considère un groupe de transformations avec un opérateur infinitésimal (1) et un opérateur (2) permutant les invariants intégraux de l'ordre *p* de ce groupe suivant le schéma (4)—(5)—(6). Entre autres, on démontre l'affirmation qui suit:

Pour que l'opérateur (2) d'après le schéma (4)—(5)—(6) permute les invariants intégraux de tous les ordres d'un groupe à un paramètre avec l'opérateur infinitésimal (1), il faut et il suffit, que ce groupe soit un sous-groupe invariant d'un groupe à deux paramètres avec les opérateurs infinitésimaux (1) et (2).

№ 4 ЗБІРНИК ПРАЦЬ ІНСТИТУТУ МАТЕМАТИКИ 1940
АКАДЕМІЇ НАУК УРСР

RECUEIL DES TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE LA RSS D'UKRAINE

О структуре функции Грина обыкновенного диференциального оператора

Г. М. Финкельштейн

Пусть

$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) \frac{d^k y}{dx^k}$$

некоторый диференциальный оператор, коэфициенты которого суть непрерывные функции в замкнутом интервале $\langle a, b \rangle$, причем $l_n(x) \neq 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Если существуют k первых производных для функции $l_k(x)$, то сопряженный оператор $L'(y)$ представляется в виде

$$L'(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k (l_k y)}{dx^k}$$

Как известно, функцией Грина оператора $L(y)$ называется функция двух переменных $K(x, s)$, обладающая следующими свойствами:

1°. Существуют непрерывные производные по x до $(n-2)$-го порядка включительно.

2°. Существует непрерывная производная по x $(n-1)$-го порядка за исключением $x = s$ и

$$\left.\frac{\partial^{n-1} K(x, s)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=s+0} - \left.\frac{\partial^{n-1} K(x, s)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=s-0} = \frac{1}{l_0(s)}$$

3°. Функция $K(x, s)$ удовлетворяет однородному диференциальному уравнению $L(y) = 0$, за исключением $x = s$. Нетрудно видеть [1]), что условие 2° можно обобщить следующим образом:

---

[1]) См. M. Krein, Sur les opérateurs differentiels autoadjoints et leurs fonctions de Green symétriques, Математический сборник, т. 2, вып. 6, 1937 г.

$$\left.\frac{\partial^{p+q} K(x,s)}{\partial x^p\,\partial s^q}\right|_{x=s+0} - \left.\frac{\partial^{p+q} K(x,s)}{\partial x^p\,\partial s^q}\right|_{x=s-0} = \begin{cases} 0 & \text{при } p+q<n-1 \\ \dfrac{(-1)^q}{l_0(s)} & \text{„ } p+q=n-1 \end{cases} \tag{1}$$

Известно, что функция Грина $K(x, s)$ оператора $L(y)$, для которого существует сопряженный оператор $L'(y)$, представляется в виде:

$$K(x,s)=\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{q} \psi_j(x)\chi_j(s) & \text{при } x\leqslant s \\ \sum\limits_{j=1}^{p} \psi_j^*(x)\chi_j^*(s) & \text{„ } x\geqslant s, \end{cases}$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_q$, равно как и $\psi_1^*, \ldots, \psi_p^*$ — некоторые системы линейно-независимых решений однородного уравнения $L(y)=0$ и $\chi_1, \ldots, \chi_q$, равно как и $\chi_1^*, \ldots, \chi_p^*$, — некоторые системы линейно-независимых решений сопряженного однородного уравнения $L'(y)=0$.

Нетрудно видеть, что всегда $p+q\geqslant n$. Случай $p+q=n$ имеет место тогда и только тогда, когда функция Грина $K(x, s)$ соответствует системе граничных условий, распадающихся на p условий, относящихся к концу $x=a$, и q условий, относящихся к концу $x=b$. В этом случае функция Грина представляется в виде:

$$K(x,s)=\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{q} \psi_i(x)\chi_i(s) & \text{при } x\leqslant s \\ \sum\limits_{i=q+1}^{n} \psi_i(x)\chi_i(s) & \text{„ } x\geqslant s, \end{cases}$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — система линейно-независимых решений однородного уравнения $L(y)=0$ и $\chi_1, \ldots, \chi_n$ — система линейно-независимых решений сопряженного однородного уравнения $L'(y)=0$.

В связи с последними исследованиями по теории осцилляционных операторов представляют, как нам кажется, интерес устанавливаемые нами ниже формулы, связывающие функции ψ_i и χ_i, через которые выражается функция Грина $K(x, s)$.

§ 1

Теорема. Если функция Грина $K(x, s)$ допускает представление

$$K(x,s)=\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{q} \psi_i(x)\chi_i(s) & \text{при } x\leqslant s \\ \sum\limits_{i=q+1}^{n} \psi_i(x)\chi_i(s) & \text{„ } x\geqslant s, \end{cases}$$

где ψ_i и χ_i $(=1, 2, \ldots, n)$ соответственно линейно-независимые решения уравнений $L(y)=0$ и $L'(y)=0$, то выполняются соотношения:*)

$$W(\chi_1, \ldots, \chi_n) \cdot W(\psi_1, \ldots, \psi_k) = \frac{(-1)^{kn - \frac{n(n-1)+k(k+1)}{2} - l}}{l_0^k(x)} \cdot W(\chi_n, \cdots, \chi_{k+1}),$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2}$$

где

$$l = \min(q, k)$$

Доказательство. Рассмотрим произведение определителей:

$$\begin{vmatrix} \chi_n & \ldots & \chi_{k+1} & \chi_k & \ldots & \chi_1 \\ \chi_n' & \ldots & \chi_{k+1}' & \chi_k' & \ldots & \chi_1' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_n^{(n-k-1)} & \ldots & \chi_{k+1}^{(n-k-1)} & \chi_k^{(n-k-1)} & \ldots & \chi_1^{(n-k-1)} \\ \chi_n^{(n-k)} & \ldots & \chi_{k+1}^{(n-k)} & \chi_k^{(n-k)} & \ldots & \chi_1^{(n-k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_n^{(n-1)} & \ldots & \chi_{k+1}^{(n-1)} & \chi_k^{(n-1)} & \ldots & \chi_1^{(n-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 1 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots 1 & 0 & \ldots 0 \\ \overset{*}{\psi}_n & \overset{*}{\psi}_{n-1} \ldots & \overset{*}{\psi}_{k+1} & \overset{*}{\psi}_n & \ldots \overset{*}{\psi}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_n^{*(k-1)} & \psi_{n-1}^{*(k-1)} \ldots & \psi_{k+1}^{*(k-1)} & \psi_k^{*(k-1)} & \ldots \psi_1^{*(k-1)} \end{vmatrix}$$

где:

$$\overset{*}{\psi}_1 = -\psi_1, \quad \overset{*}{\psi}_2 = -\psi_2, \ \ldots, \ \overset{*}{\psi}_q = -\psi_q, \quad \overset{*}{\psi}_{q+1} = \psi_{q+1}, \ \ldots, \ \overset{*}{\psi}_n = \psi_n$$

Перемножая эти определители по горизонталям, мы получим:

$$(-1)^{l + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2}} \cdot W(\chi_1 \ldots \chi_k \chi_{k+1} \ldots \chi_n) \cdot W(\psi_1 \ldots \psi_k) =$$

$$= \begin{vmatrix} \chi_n & \ldots \chi_{k+1} & S_{00} & S_{10} & \ldots S_{k-10} \\ \chi_n' & \ldots \chi_{k+1}' & S_{01} & S_{11} & \ldots S_{k-11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_n^{(n-k-1)} & \ldots \chi_{k+1}^{(n-k-1)} & S_{0n-k-1} & S_{1n-k-1} & \ldots S_{k-1n-k-1} \\ \chi_n^{(n-k)} & \ldots \chi_{k+1}^{(n-k)} & S_{0n-k} & S_{1n-k} & \ldots S_{k-1n-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_n^{(n-1)} & \ldots \chi_{k+1}^{(n-1)} & S_{0n-1} & S_{1n-1} & \ldots S_{k-1n-1} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

где:

$$l = \min(q, k)$$

$$S_{ij} = \sum_{k=q+1}^{n} \psi_k^{(i)}(x)\chi_k^{(j)}(x) - \sum_{k=1}^{q} \psi_k^{(i)}(x)\chi_k^{(j)}(x) =$$

$$= \frac{\partial^{i+j} K(x+0, x)}{\partial x^i \partial s^j} - \frac{\partial^{i+j} K(x-0, x)}{\partial x^i \partial s^j}.$$

---

*) $W(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ обозначает вронскиан для системы функций $\psi_1, \ldots, \psi_k$, т. е.

$$W(\psi_1 \ldots \psi_k) = \begin{vmatrix} \psi_1 & \ldots \psi_k \\ \psi_1' & \ldots \psi_k' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \psi_1^{(k+1)} & \ldots \psi_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

В силу соотношений (1) получаем:

$$S_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{при } i+j<n-1 \\ \dfrac{(-1)^j}{l_0(x)} & \text{„ } i+j=n-1 \end{cases}$$

Подставляя в равенство (3) значения S_{ij} из (4), мы получим:

$$(-1)^{l+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}}\cdot W(\chi_1\ldots\chi_k\chi_{k+1}\ldots\chi_n)\cdot W(\psi_1\ldots\psi_k)=$$

$$=\left|\begin{array}{ccc:ccc} \multicolumn{3}{c:}{W(\chi_n\ldots\chi_{k+1})} & \multicolumn{3}{c}{0} \\ \hdashline \chi_n^{(n-k)} & \ldots & \chi_{k+1}^{(n-k)} & 0 & \ldots\ldots & \dfrac{(-1)^{n-k}}{l_0(x)} \\ \vdots & & \vdots & & & \\ \chi_n^{(n-1)} & \ldots & \chi_{k+1}^{(n-1)} & \dfrac{(-1)^{n-1}}{l_0(x)} & \ldots & S_{k-1,n-1} \end{array}\right|$$

Окончательно получаем:

$$W(\chi_1\ldots\chi_n)\cdot W(\psi_1\ldots\psi_k)=\frac{(-1)^{kn-\frac{n(n-1)+k(k+1)}{2}-l}}{l_0^k(x)}\cdot W(\chi_n\ldots\chi_{k+1})$$

Теорема доказана.

§ 2

Согласно терминологии М. Г. Крейна[1]) функция двух переменных $K(x, s)$ называется ядром Келлога, если при любом $n=1, 2, 3\ldots$ выполняются условия:

$$1^\circ.\quad K\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \ldots x_n \\ s_1\, s_2 \ldots s_n \end{pmatrix}\geqslant 0 \quad \text{при} \quad a\leqslant \begin{matrix} x_1<x_2<\ldots<x_n \\ s_1<s_2<\ldots<s_n \end{matrix}\leqslant b$$

$$2^\circ.\quad K\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \ldots x_n \\ x_1\, x_2 \ldots x_n \end{pmatrix}>0 \quad \text{„} \quad a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b$$

Диференциальный оператор $L(y)$ называется осцилляционным, если один из операторов $L(y)$ либо $-L(y)$ имеет по крайней мере одну функцию Грина, являющуюся ядром Келлога.

При этом мы будем говорить, что оператор $L(y)$ принадлежит к классу (p, q), если функция Грина, являющаяся ядром Келлога, соответствует системе граничных условий вида:

$$Y|_{x=a}=Y'|_{x=a}=\ldots=Y^{(p-1)}|_{x=a}=0$$

$$Y|_{x=b}=Y'|_{x=b}=\ldots=Y^{(q-1)}|_{x=b}=0$$

---

[1]) M. Krein, Sur quelques applications de noyaux de Kellogg aux problèmes d'oscillation. Записки Харьк. мат. о-ва, т. 11, сер. 4, 1935 г.

Можно доказать [1]), что всякий осцилляционный оператор $L(y)$ принадлежит к некоторому классу (p, q). М. Г. Крейн [2]) установил следующий критерий осцилляционного самосопряженного диференциального оператора:

Теорема 1. Для того чтобы самосопряженный оператор $L(y)$ был осцилляционным, необходимо и достаточно, чтобы $(-1)^n l_0(x) > 0$ и чтобы диференциальная система

$$L(y)=0, \quad y|_{x=a}=y'|_{x=a}=\ldots=y^{(n-1)}|_{x=a}=0$$

обладала n решениями $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)$ такими, что

$$W(\omega_1)>0, \; W(\omega_1, \omega_2)>0, \ldots, W(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)>0 \text{ при } a<x<b,$$

где последнее неравенство имеет место также при $x=b$.

В дальнейшем им также был установлен критерий осцилляционности обыкновенного диференциального оператора самого общего типа, который можно сформулировать так [3]):

Теорема 2. Для того чтобы диференциальный оператор $L(y)$ был осцилляционным, принадлежащим классу (p, q), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Диференциальная система

$$L(y)=0, \quad y|_{x=a}=y'|_{x=a}=\ldots=y^{(p-1)}|_{x=a}=0$$

имеет q линейно-независимых решений $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ таких, что

$$W(\omega_1)>0, \; W(\omega_1, \omega_2)>0, \ldots, W(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q)>0 \text{ при } a<x<b$$

2. Диференциальная система

$$L(y)=0, \quad y|_{x=b}=y'|_{x=b}=\ldots y^{(q-1)}|_{x=b}=0$$

имеет p линейно-независимых решений $\omega_{q+1}, \ldots, \omega_n$ таких, что

$$W(\omega_1, \ldots, \omega_q, \omega_{q+1})>0, \ldots, W(\omega_1, \ldots \omega_q, \ldots, \omega_n)>0 \text{ при } a<x<b$$

3. $$W(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q)|_{x=b}>0$$

В случае, если для оператора $L(y)$ существует сопряженный оператор $L'(y)$, то, пользуясь формулами (2), установленными в § 1, мы можем сформулировать критерий осцилляционности оператора $L(y)$ в такой

---

[1]) Для самосопряженного оператора $L(y)$ это доказано М. Г. Крейном в работе Sur quelques propriétés des noyaux de Kellogg, Записки Харьковск. мат. о-ва, т. XII, сер. 4. Для несамосопряженного оператора доказательство проведено в нашей диссертации „Об осцилляционных функциях Грина несамосопряженного диференциального оператора". В последнее время М. Г. Крейн доказал эту теорему также и для того случая, когда несамосопряженный оператор $L(y)$ имеет недиференцируемые коэфициенты (см. ниже, сноска 3).

[2]) М. Крейн, Об осцилляционных диференциальных операторах, Докл. Академии Наук СССР, т. IV (XIII), 1936 г.

[3]) М. Крейн, О несимметрических осцилляционных функциях Грина обыкновенных диференциальных операторов, ДАН, т. XXV, № 9, 1939 (см. теор. 3).

форме, из которой вытекала бы связь между обоими критериями, сформулированными выше.

Теорема 3. Для того чтобы диференциальный оператор был осцилляционным, принадлежащим классу (p, q), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Диференциальная система

$$L(y)=0,\ y|_{x=a}=y'|_{x=a}=\ldots=y^{(p-1)}|_{x=a}=0$$

имеет q линейно-независимых решений $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ таких, что

$$W(\omega_1)>0,\ W(\omega_1, \omega_2,)>0, \ldots, W(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_q)>0 \text{ при } a<x<b,$$

2. Диференциальная система

$$L(y)=0,\ \ y|_{x=a}=y'|_{x=a}=\ldots=y^{(q-1)}|_{x=a}=0$$

имеет p линейно-независимых $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_p$ таких, что

$$W(\varkappa_1)>0,\ \ W(\varkappa_1, \varkappa_2,)>0, \ldots, W(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_d)>0 \text{ при } a<x<b$$

3. $$W(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q)|_{x=b}>0$$

Доказательство. Из теоремы (2) вытекает, что функцию Грина оператора $L(y)$, соответствующую системе (p, q) простейших граничных условий, можно представить в виде:

$$K(x,s)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{q}\omega_i(x)\chi_i(s) & \text{при}\quad x\leqslant s\\[2ex] \sum\limits_{i=q+1}^{n}\omega_i(x)\chi_i(s) & ,,\quad x\geqslant s,\end{cases}$$

где $\chi_1, \ldots, \chi_n$ — система линейно-независимых решений сопряженного уравнения $L'(y)=0$. Из формулы (2) получаем:

$$W(\chi_1\ldots\chi_n)\cdot W(\omega_1\ldots\omega_k)=\frac{\pm 1}{l_0^k(x)}\cdot W(\chi_n\ldots\chi_{k+1}) \quad (k=1, 2, \ldots, n-1)$$

и, следовательно, при $k=q,\ q+1, \ldots, n-1$ получаем:

$$W(\chi_n\ldots\chi_{q+1})\neq 0,\ W(\chi_n, \ldots\chi_{q+2})\neq 0, \ldots, W(\chi_n)\neq 0 \text{ при } a<x<b$$

Полагая

$$\pm\chi_n=\varkappa_1,\ \ \pm\chi_{n-1}=\varkappa_2,\ \ldots\ \pm\chi_{q+1}=\varkappa_p$$

и подбирая соответствующим образом знак для χ_i, мы получим:

$$W(\varkappa_1)>0,\ W(\varkappa_1, \varkappa_2)>0,\ \ldots,\ W(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_p)>0 \text{ при } a<x<b$$

Нетрудно видеть, что система p линейно-независимых функций $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_p$ является системой решений диференциальной системы:

$$L'(y)=0, \quad y|_{x=a}=y'|_{x=a}=\ldots=y^{(q-1)}|_{x=a}=0$$

В заключение заметим, что при $p=q$ из доказанной теоремы вытекает теорема 1.

Государственный Университет
Одесса

Получено 21.X. 1939

Про структуру функції Гріна звичайного диференціального оператора

Г. М. Фінкельштейн

РЕЗЮМЕ

Нехай $K(x, s)$ є функція Гріна диференціального оператора

$$L(y)=\sum_{k-0}^{n} l_k(x)\frac{d_y^k}{dx^k},$$

де $l_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ має k неперервних похідних у замкненому інтервалі $<a, b>$.

Як відомо, для оператора $L(y)$ існує самоспряжений оператор $L'(y)$, представленого у формі:

$$L'(y)=\sum_{n=0}^{n}(-1)\frac{d^k(l_k y)}{dx^k}.$$

Якщо функція Гріна $K(x, s)$ відповідає системі граничних умов Штурмового типу, то вона припускає таке представлення:

$$K(x, s)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{q}\psi_i(x)\chi_i(s) & (x\leqslant s)\\ \sum_{i=q+1}^{n}\psi_i(x)\chi_i(s) & (x\geqslant s),\end{cases}$$

де $\psi_1, \ldots, \psi_n$ та $\chi_1, \ldots, \chi_n$ є системи лінійно-незалежних розв'язків відповідно рівняння $L(y)=0$ та спряженого однорідного рівняння $L'(y)=0$.

В цій роботі ми доводимо, що функції $\psi_i(x)$ та $\chi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ зв'язані формулами:

$$W(\chi_1, \ldots, \chi_n)\,.\,W(\psi_1, \ldots, \psi_k)=\frac{(-1)^{kn-\frac{n(n-1)+k(k+1)}{2}-l}}{l_0^k(x)}\,.\,W(\chi_n, \ldots, \chi_{k+1}), \quad (2)$$

де

$$l=\min\,(q,\ k) \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

Припустімо, що граничні умови:

$$\begin{cases} y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(p-1)}(a) = 0 \\ y(b) = y'(b) = \cdots = y^{(q-1)}(b) = 0 \end{cases} \quad (p+q=n)$$

є не особливі для оператора $L(y)$, а $K^{(p,q)}(x,s)$ позначає функцію Гріна, що відповідає цим умовам.

М. Г. Крейн знайшов необхідні та достатні умови, щоб одно з двох ядер $\pm K^{(q,p)}(x,s)$ являло собою Келлогове ядро[1]).

Користуючись формулами (1), ми показуємо, що умови М. Г. Крейна еквівалентні таким:

1° Диференціальна система:

$$L(y)=0,\ y|_{x=a} = y'|_{x=a} = \cdots = y^{(p-1)}|_{x=a} = 0$$

має q лінійно-незалежних розв'язків $\omega_1, \ldots, \omega_q$, таких, що

$$W(\omega_1) > 0,\ W(\omega_1, \omega_2) > 0, \ldots, W(\omega_1, \ldots, \omega_q) > 0 \ \text{для}\ a < x < b$$

2° Диференціальна система:

$$L'(y)=0,\ y|_{x=a} = y'|_{x=a} = \cdots = y^{(q-1)}|_{x=a} = 0$$

має p лінійно-незалежних розв'язків $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_p$, таких, що

$$W(\varkappa_1) > 0,\ W(\varkappa_1, \varkappa_2) > 0, \ldots, W(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p) > \ \text{для}\ a < x < b$$

З цього критерію виходить залежність поміж критеріями, встановленими М. Г. Крейном для самоспряжених та несамоспряжених диференціальних операторів.

On the Structure of the Green Function of an Ordinary Differential Operator

G. M. Finkelstein

SUMMARY

Let the function $K(x,s)$ be the Green function of a differential operator

$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) \frac{d^k y}{dx^k},$$

where $l_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ has k continuous derivatives in the closed interval $\langle a, b \rangle$.

---

[1]) M. Krein, ДАН, т. IV (XIII), № 9 (113), 1936, і т. XXV, № 8, 1939.

As we know, there exists for the operator $L(y)$ an self-adjoint operator $L'(y)$, which is presented in the form

$$L'(y)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^k(l_k y)}{dx^k}$$

If the Green function $K(x,s)$ corresponds to a system of boundary conditions of the Sturm type it admits the representation

$$K(x,s)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{q}\psi_i(x)\,\chi_i(s) & (x\leqslant s)\\ \sum\limits_{i=q+1}^{n}\psi_i(x)\,\chi_i(s) & (x\geqslant s)\end{cases}$$

where $\psi_1,\ldots,\psi_n$ and $\chi_1,\ldots,\chi_n$ are systems of linear independent solutions respectively of the equation $L(y)=0$ and of the adjoint homogeneous equation $L(y)=0$.

In this paper we prove that the functions $\psi_i(x)$ and $\chi_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ are connected by the formulas

$$W(\chi_1,\ldots,\chi_n)\,.\,W(\psi_1,\ldots,\psi_k)=\frac{(-1)^{kn-\frac{n(n-1)+k(k+1)}{2}-l}}{l_0^k(x)}\cdot W(\chi_n'\ldots\chi_{k+1})$$

$$(k=1,2,\ldots,n)$$

where

$$l=\min\,(q,k) \tag{I}$$

Let the boundary conditions

$$\begin{cases}y(a)=y'(a)=\cdots=y^{(p-1)}(a)=0\\ y(b)=y'(b)=\cdots=y^{(q-1)}(b)=0\end{cases}\quad (p+q=n)$$

be non-singular for the operator $L(y)$ and let $K^{(p,q)}(x,s)$ denote the Green function corresponding to these conditions.

M. G. Krein has found the necessary and sufficient conditions that one of two kernels $\pm K^{(p,q)}(x,s)$ be a Kellogg kernel.[1])

Using the formulas (I) we show that Krein's conditions are equivalent to the following:

1°. The differential system.

$$L(y)=0,\quad y|_{x=a}=y'|_{x=a}=\cdots=y^{(p+1)}|_{x=a}=0$$

has q linear independent solutions $\omega_1,\ldots,\omega_q$ such that

$$W(\omega_1)>0,\ W(\omega_1,\omega_2)>0,\ldots,\ W(\omega_1,\ldots,\omega_q)>0 \text{ for } a<x<b$$

---

[1]) M. Krein, Comptes-Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS, Volume IV (XIII), № 9 (113), 1936, et Volume XXV, № 9, 1939.

2°. The differential system.

$$L'(y)=0,\ y|_{x=a}=y'|_{x=a}=\cdots=y^{(q+1)}|_{x=a}=0$$

has p linear independent solutions $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_p$ such that

$$W(\varkappa_1)>0,\ W(\varkappa_1\,\varkappa_2)>0, \ldots,\ W(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p)>0 \text{ for } a<x<b$$

From this criterion follows a dependence between the criterions, established by M. G. Krein for self-adjoint and not self-adjoint differential operators.

№ 4 ЗБІРНИК ПРАЦЬ ІНСТИТУТУ МАТЕМАТИКИ 1940
АКАДЕМІЇ НАУК УРСР

RECUEIL DES TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE LA RSS D'UKRAINE

Про одну функцію, що асимптотично найменш відхиляється від нуля на сталому інтервалі

С. Зуховицький

В цій замітці розглядається в розумінні С. Н. Бернштейна асимптотичний розв'язок для випадку $n \to \infty$ та сталого інтервалу $<-h, h>$ задачі, розв'язаної в статті автора „Про апроксимацію функцій поліномами. II“ [1]) для випадку сталого n та $h \to 0$.

Задача. Серед усіх функцій вигляду

$$W(x) = \frac{\sigma_0 x^{n+l} + \sigma_1 x^{n+l-1} + \cdots + \sigma_k x^{n+l-k} + p_{k+1} x^{n+l-k-1} + \cdots + p_{n+l}}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2l})}}, \tag{1}$$

де $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$ дані дійсні числа, а $a_1, a_2, \ldots, a_{2l}$ дані числа, що не лежать на інтервалі $<-1, 1>$ і якщо серед них є комплексні, то вони попарно спряжені, знайти ту, яка асимптотично при $n \to \infty$ найменш відхиляється від нуля на інтервалі $<-1, 1>$, й знайти величину її відхилення.

Як і в згаданій роботі, будемо шукати поліном [2])

$$s_{k+1} x^{n+l-k-1} + s_{k+2} x^{n+l-k-2} + \cdots + s_{n+l}$$

так, щоб найменш відхилялася від нуля на інтервалі $<-1, 1>$ функція

$$V(x) = \frac{\sigma_0 x^{n+l} + \sigma_1 x^{n+l-1} + \cdots + \sigma_k x^{n+l-k} + s_{k+1} x^{n+l-k-1} + \cdots + s_{n+l}}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2l})}} +$$

$$+ \frac{r_1 x^{k-1} + r_2 x^{k-2} + \cdots + r_k}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2l})(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_k)}} \tag{2}$$

при таких значеннях параметрів $r_1, r_2, \ldots, r_k$; $b_1, b_2, \ldots, b_k$, при яких

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left| \frac{r_1 x^{k-1} + r_2 x^{k-2} + \cdots + r_k}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2l})(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_k)}} \right| \tag{3}$$

буде, порівнюючи з $L = \max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |W(x)|$, величиною нескінченно малою, якщо $n \to \infty$.

[1]) Журнал Інституту математ. АН УРСР, № 1, 1938.

[2]) S. Bernstein, Leçons sur les propriétés extremales et la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris 1926.

Поклавши [1]):

$$x=\frac{1}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right);\; v=x-\sqrt{x^2-1}$$

$$a_i=\frac{1}{2}\left(\alpha_i+\frac{1}{\alpha_i}\right),\; |\alpha_i|<1\;(i=1,2,\ldots,2l)$$

$$b_j=\frac{1}{2}\left(\beta_j+\frac{1}{\beta_j}\right),\; |\beta_j|<1\;(j=1,2,\ldots,k),$$

знайдемо:

$$V(x)=\frac{M}{2}\left\{v^{-n}\prod_{i=1}^{2l}\sqrt{\frac{1-v\alpha_i}{v-\alpha_i}}\cdot\prod_{j=1}^{k}\frac{v-\beta_j}{1-v\beta_j}+\right.$$

$$\left.+v^n\prod_{i=1}^{2l}\sqrt{\frac{v-\alpha_i}{1-v\alpha_i}}\cdot\prod_{j=1}^{k}\frac{1-v\beta_j}{v-\beta_j}\right\}= \tag{4}$$

$$=\frac{M}{2}\left\{v^{-n}\prod_{i=1}^{2l}\sqrt{\frac{1-v\alpha_i}{v-\alpha_i}}\cdot\frac{\mu_0v^k+\mu_1v^{k-1}+\cdots+\mu_k}{\mu_kv^k+\mu_{k-1}v^{k-1}+\cdots+\mu_0}+\right.$$

$$\left.+v^n\prod_{i=1}^{2l}\sqrt{\frac{v-\alpha_i}{1-v\alpha_i}}\cdot\frac{\mu_kv^k+\mu_{k-1}v^{k-1}+\cdots+\mu_0}{\mu_0v^k+\mu_1v^{k-1}+\cdots+\mu_k}\right\},$$

де

$$|V(x)|\leqslant\pm M \text{ при } |v|=1$$

Легко перевірити, що коли x описує інтервал $<-1, 1>$, тобто v описує півколо $|v|=1$, то $V(x)$ набирає значення M, з навперемінними знаками, в $n+l-k+1$ точках.

Визначивши далі:

$$\prod_{i=1}^{2l}(1-v\alpha_i)=B_{2l}v^{2l}+B_{2l-1}v^{2l-1}+\ldots+B_0,$$

$$\frac{M}{2^l\prod\limits_{i=1}^{2l}\sqrt{\alpha_i}}=\frac{M}{2^l\sqrt{B_{2l}}}=N;$$

одержимо для N рівняння:

$$\begin{vmatrix}
\tau_k-B_0N, & \tau_{k-1}-B_1N, & \ldots, & \tau_1-B_{k-1}N, & \tau_0-B_kN\\
\tau_{k-1} & ,\tau_{k-2}-B_0N, & \ldots, & \tau_0-B_{k-2}N, & -B_{k-1}N\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\tau_1, & \tau_0, & \ldots, & -B_0N, & -B_1N\\
\tau_0, & 0, & \ldots, & 0, & -B_0N
\end{vmatrix}=0, \tag{5}$$

[1]) N. Achyeser, Asymptotische Lösung einer Aufgabe über Polynome minimaler Abweichung, Comm. de la Soc. Math. de Kharkoff, 1930.

N. Achyeser, Über einige Funktionen, die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen, Bull. de la Soc. Phys.-Math. de Kazan, S. III, t. 3, 1928.

де

$$\tau_{2i}=\frac{1}{2^{n+l-1}\,i!}\left\{\sigma_0(n+l)^i+A_1^{(i)}(n+l)^{i-1}+A_2^{(i)}(n+l)^{i-2}+\ldots+A_i^{(i)}\right\}$$

$$\tau_{2i-1}=\frac{1}{2^{n+l-2}(i-1)!}\left\{\sigma_1(n+l)^{i-1}+B_1^{(i-1)}(n+l)^{i-2}+\right.$$

$$\left.B_2^{(i-1)}(n+l)^{i-3}+\ldots+B_{i-1}^{(i-1)}\right\},$$

при чому

$$A_1^{(i}=-\frac{i(i-1)}{2}\sigma_0+4i\sigma_2$$

$$A_2^{(i)}=\frac{i(i-1)(i-2)(3i-1)}{24}\sigma_0-2(i+2)i(i-1)\sigma_2+16i(i-1)\sigma_4$$

$$B_1^{(i-1)}=-\frac{i(i-1)}{2}\sigma_1+4(i-1)\sigma_3$$

$$B_2^{(i-1)}=\frac{i(i-1)(i-2)(3i-1)}{24}\sigma_1-2(i-1)(i-2)(i-3)\sigma_3+16(i-1)(i-2)\sigma_5$$

Всі корені рівняння (5) дійсні [1]) та прямують до нуля при $n\to\infty$.

Зазначивши найбільший з них через N, одержимо для перших двох членів його асимптотичного розкладу рівняння:

$$N^2-(\tau_k-B_1\tau_{k-1}+\tau_{k-2})N-(\tau_{k-1}^2-\tau_k\tau_{k-2})=0$$

Нехай

$$k=2p-1$$

Тоді перші два члени асимптотичного розкладу M запишуться так:

$$M=2^lB_{2l}N=\frac{B_{2l}}{2^n(p-1)!}\left\{\left(2\sigma_1-B_1\sigma_0+\sqrt{(2\sigma_1-B_1\sigma_0)^2+4\sigma_0^2}\right)n^{p-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{B\sqrt{(2\sigma_1-B_1\sigma_0)^2+4\sigma_0^2}-(B_1B-4C)\sigma_0+2B\sigma_1}{\sqrt{(2\sigma_1-B_1\sigma_0)^2+4\sigma_0^2}}n^{p-2}+\ldots\right\},$$

де

$$B=\frac{1}{2}(p-1)(p-2l-2)B_1\sigma_0+(p-1)(2l-p+2)\sigma_1-$$

$$-4(p-1)B_1\sigma_2+8(p-1)\sigma_3$$

$$C=\frac{1}{2}(p-1)(2l-p+2)\sigma_0+4(p-1)\sigma_2$$

Якщо ж

$$k=2p,$$

---

[1]) Див., напр., Г. Міракʼян, Sur une nouvelle fonction qui s'ecarte le moins possible de zéro. Comm. de la Soc. Math. de Kharkoff, sér 4, t. 12 (1935), де вказана література.

то

$$M = \frac{B_{2l}}{2^{n-1}p!}(\sigma_0 n^p + B^* n^{p-1} + \ldots),$$

де

$$B^* = \frac{p}{2}(2l - p + 3)\sigma_0 - 2p B_1 \sigma_1 + 4p\sigma_2$$

Зазначмо

$$\varepsilon = \frac{1}{|M|} \cdot \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left| \frac{r_1 x^{k-1} + r_2 x^{k-2} + \ldots + r_k}{\prod\limits_{i=1}^{2l} \sqrt{x - a_i} \prod\limits_{j=1}^{k} (x - b_j)} \right|$$

Тоді для паристого k одержимо:

$$\varepsilon = C_1 n^{k-1} \left(\frac{C_2}{\sqrt{n}} \right)^{n-l+k-2},$$

де C_1 та C_2 обмежені при $n \to \infty$.

У випадку непаристого k знайдемо:

$$\varepsilon = C_3 \left(\frac{2\sigma_0}{2\sigma_1 - B_1\sigma_0 + \sqrt{(2\sigma_1 - B\,\sigma_0)^2 + 4\sigma_0^2}} \right)^{n-l-1},$$

де C_3 обмежено при $n \to \infty$.

Для відхилення L знайдемо:

$$|M|(1-\varepsilon) \leqslant L \leqslant |M|(1+\varepsilon)$$

Рекурентні формули для визначення коефіцієнтів

$$s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_{n+l}$$

через

$$\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k; \; a_1, a_2, \ldots, a_{2l}$$

побудовані в згаданій вище роботі, де треба покласти $h = 1$ й так само, як там, легко збудувати асимптотичні розв'язки, для $n \to \infty$ та сталого інтервалу $< -1, 1 >$, численних окремих випадків розглянутої в цій замітці задачі.

Інститут Математики
Академії Наук УРСР, Київ

Одержано 17.I 1940

Об одной функции, асимптотически наименее уклоняющейся от нуля на постоянном интервале

С. Зуховицкий

РЕЗЮМЕ

В этой заметке рассматривается в смысле С. Н. Бернштейна асимптотическое решение, при $n \to \infty$ и постоянном интервале $<-h, h>$, задачи, исследованной в статье автора „Об аппроксимации функций полиномами. II“ [1]) для случая постоянного n и $h \to 0$.

Sur une fonction qui s'écarte asymptotiquement le moins possible de zéro sur un intervalle fixe

Par *S. Zoukhovitzky*

RÉSUMÉ

On considère ici d'un autre point de vue un problème antérieurement étudié dans l'article de l'auteur „Sur l'approximation des fonctions par les polynômes. II“ (Ce Journal, 1938, № 1, p. 25—40).

Dans la note présente est considérée, au sens de S. N. Bernstein, une solution asymptotique du même problème lorsque le degré du polynôme croît indéfiniment, l'intervalle restant fixe.

---

[1]) Журнал Інституту математики АН УРСР, № 1, 1938.

ЗМІСТ — СОДЕРЖАНИЕ — SOMMAIRE

Літредактор і коректор *І. М. Коган*

Випусковий [illegible] *Каганов*

Уповн. Головл. № 8055. Вид. № 957. Зам. 272. Тир. 1000+70 Ф. пап. 70×108. *см.* Вага 49,2 к арк. $5^1/_2$. Друк. зн. в 1 пап. арк. 112 т. Здано до друкарні 10/III 1940 р. Підписано до друку 31/V 19

Ціна 7 крб.

Друкарня-літографія Академії Наук УРСР у Києві