

Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М.

# Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок

Київ - 2019

**В.М. Трач, А.В. Подворний, М.М. Хоружий**

**ДЕФОРМУВАННЯ  
ТА СТІЙКІСТЬ НЕТОНКИХ  
АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК**

*Монографія*

**Видавництво «Каравела»  
Київ – 2019**

УДК 539.3, 624.074.04

Д 39

*Рецензенти:*

**Гайдайчук В. В.**, д.т.н., професор,  
Київський національний університет будівництва і архітектури.

**Марчук О. В.**, д.т.н., професор,  
Національний транспортний університет.

**Шваб'юк В. І.**, д.т.н., професор,  
Луцький національний технічний університет.

**Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М.**

**Д 39 Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок:** Монографія. –К.: Видавництво «Каравела», 2019. – 274 с.

**ISBN 978-966-222-993-8**

В монографії викладені результати дослідження напружено-деформованого стану та стійкості нетонких і товстих анізотропних оболонок обертання нульової гауссової кривини, що виготовлені з композитних матеріалів з однією площиною пружної симетрії. Наслідком низького порядку симетрії є те, що при докритичному деформуванні, втраті стійкості суттєво проявляється взаємозв'язок деформацій розтягу, зсуву, згину та кручення, коли при відсутності відповідного навантаження оболонка закручується, а втрата стійкості супроводжується утворенням гвинтоподібних форм. Розрахункові моделі, формулюванню яких присвячена ця книжка, спрямовані на отримання достовірної кількісної інформації про вплив вказаних зв'язків на критичні навантаження при осьовому тиску, рівномірному зовнішньому тиску. Використовуються нелінійні рівняння теорії нетонких анізотропних оболонок та теорії пружності, особливістю яких є здатність описувати виявлені ефекти, що становлять значний практичний інтерес. Систематичне вивчення напружено-деформованого стану та стійкості оболонок проведено за допомогою методів Ньютона-Канторовича, Бубнова-Гальборкіна та дискретної ортогоналізації. Наведено багаточисельні розрахункові дані у вигляді таблиць та графіків.

Отримані результати можуть бути використані при проектуванні анізотропних оболонкових систем в науково-дослідних, виробничих закладах і установах, а також викладачами, аспірантами та студентами відповідних спеціальностей.

УДК 539.3, 624.074.04

© Трач В. М., Подворний А. В.,  
Хоружий М. М., 2019

**ISBN 978-966-222-993-8**

© Видавництво “Каравела”, 2019

## ЗМІСТ

<b>ЗМІСТ</b> .....	<b>3</b>
<b>ВСТУП</b> .....	<b>6</b>
<b>РОЗДІЛ 1. ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП І КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ НЕТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК</b> .....	<b>31</b>
1.1. Потенціальна енергія деформації пружних анізотропних оболонок.....	31
1.2. Побудова функціонала Рейсснера для виводу нелінійних рівнянь рівноваги теорії нетонких анізотропних оболонок.....	44
1.3. Виведення канонічної системи рівнянь нелінійної теорії нетонких анізотропних оболонок .....	49
1.4. Висновки до розділу 1 .....	63
<b>РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ</b> .....	<b>65</b>
2.1. Система рівнянь, що описує нелінійну осесиметричну деформацію анізотропних оболонок .	65
2.2. Застосування методу Ньютона-Канторовича для побудови чисельного алгоритму розв’язку нелінійної задачі про осесиметричне деформування анізотропних оболонок обертання .....	70
2.3. Дослідження напружено-деформованого стану анізотропних оболонок обертання .....	78
2.3.1. Напружено-деформований стан циліндричних оболонок .....	80
2.3.1.1. Циліндричні оболонки під дією зовнішнього рівномірного тиску .....	81
2.3.1.2. Циліндричні оболонки під дією осьового тиску.....	94

2.3.2. Напружено-деформований стан конічних оболонки .....	105
2.3.2.1. Конічні оболонки під дією зовнішнього рівномірного тиску .....	106
2.3.2.2. Конічні оболонки під дією осьового тиску ..	113
2.4. Висновки до розділу 2 .....	120

### **РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ НА СТІЙКІСТЬ ПРУЖНИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК..... 123**

3.1. Двовимірні рівняння стійкості пружних анізотропних оболонки.....	123
3.2. Використання рядів Фур'є в комплексній формі для побудови нормальної системи рівнянь стійкості анізотропних оболонки 10-го порядку.....	131
3.3. Методика чисельного розв'язання рівнянь стійкості пружних анізотропних оболонки з комплексними коефіцієнтами.....	135
3.4. Підтвердження достовірності отримуваних результатів .....	145
3.5. Дослідження стійкості нетонких анізотропних оболонки нульової гауссової кривини .....	154
3.5.1. Вплив товщини анізотропних оболонки на їх стійкість .....	156
3.5.1.1. Стійкість одношарових анізотропних циліндричних оболонки під дією осьового тиску.....	156
3.5.1.2. Стійкість одношарових анізотропних циліндричних оболонки під дією зовнішнього рівномірного тиску .....	160
3.5.2. Вплив довжини твірної на стійкість циліндричних анізотропних оболонки.....	163
3.5.2.1. Одношарова оболонка під дією осьового тиску .....	164
3.5.2.2. Одношарова оболонка під дією зовнішнього рівномірного тиску .....	171

3.5.3. Вплив умов закріплення торців на стійкість циліндричних анізотропних оболонок.....	178
3.5.3.1. Одношарова циліндрична оболонка під дією осьового тиску.....	179
3.5.3.2. Одношарова циліндрична оболонка під дією зовнішнього рівномірного тиску.....	185
3.5.4. Стійкість тришарових анізотропних циліндричних оболонок .....	192
3.5.5. Стійкість анізотропних конічних оболонок ....	198
3.6. Висновки до розділу 3 .....	204
<b>РОЗДІЛ 4. НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОВСТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК В ТРИВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ.....</b>	<b>207</b>
4.1. Система рівнянь, що описує вісесиметричну деформацію анізотропної циліндричної оболонки в тривимірній постановці.....	209
4.2. Дослідження напружено-деформованого стану анізотропних товстих циліндричних оболонок .....	221
4.3. Висновки до розділу 4 .....	229
<b>РОЗДІЛ 5. РОЗРАХУНОК НА СТІЙКІСТЬ ПРУЖНИХ ТОВСТИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК В ТРИВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ.....</b>	<b>231</b>
5.1. Система рівнянь, що описує стійкість анізотропних циліндричних оболонок в тривимірній постановці.....	231
5.2. Дослідження стійкості анізотропних товстих циліндричних оболонок .....	242
5.3. Висновки до розділу 5 .....	247
<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>249</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....</b>	<b>255</b>

## ВСТУП

Розвиток теорії оболонок і розв'язок задач, що виникають в цій частині будівельної механіки, є предметом багатьох досліджень. Як правило в процесі експлуатації тонкостінні елементи конструкцій вичерпують несну здатність шляхом втрати стійкості. Дослідженню цього механічного явища для оболонок з композиційних матеріалів присвячені багаточисельні роботи, огляд яких наведено в [1, 5, 6, 26, 30, 34-36, 50, 62, 65, 66, 75, 110, 120, 137, 189, 197].

Питання стійкості тонкостінних елементів конструкцій з композиційних матеріалів зазвичай розглядалися на основі прикладних класичних теорій, побудованих на основі кінематичних і статичних гіпотез. Більшість теоретичних розв'язків отримано в рамках концепції Ейлера. Розрахунок критичного навантаження зводиться до знаходження мінімального власного числа однорідної крайової задачі. Завдяки розвитку чисельних методів, що дають змогу розв'язувати крайові задачі з змінними коефіцієнтами, цей підхід виявився досить ефективним при розрахунку стійкості складних оболонкових конструкцій. Незважаючи на переваги обчислювального характеру, багато питань деформування конструкцій при

використанні підходу Ейлера залишаються без відповіді, а в деяких випадках розв'язок лінеаризованої задачі не дає навіть приблизної оцінки несної здатності конструкції. Для того, аби уникнути цих недоліків, при розрахунку стійкості оболонок з композитів багатьма авторами використовується підхід Доннелла [173], Кармана і Цзяня [181], який базується на розв'язку нелінійних рівнянь теорії оболонок при фізично виправданій апроксимації переміщень методом Папковича-Гальборкіна. Однак, як і при дослідженні стійкості оболонок з традиційних конструкційних матеріалів, для оболонок з композитів не вдалось в обох варіантах розрахунку отримати задовільного узгодження між теорією та експериментом. Тим не менш, розв'язок задач нелінійного деформування оболонок відіграв важливу роль в розумінні явища втрати стійкості. Спочатку Флюгге [175], а потім Доннелл і Ван [174] дійшли висновку, що неспівпадіння критичних навантажень, отриманих експериментально і теоретично, пояснюється присутністю недосконалостей у реальних оболонках, що не враховуються при математичному формулюванні задачі.

Одним з найбільш розповсюджених способів виготовлення оболонкових елементів з композитів є



намотування. Характерна особливість при цьому полягає в тому, що хоча оболонки утворюються з однорідних ортотропних матеріалів, змінність кута армування обумовлює значну анізотропію і неоднорідність механічних характеристик. Найнижчий рівень симетрії матеріалу таких шарів складає наявність однієї площини, в якій механічні властивості симетричні.

В роботах [11-17, 34, 54-63, 66-76, 107-110, 115-117] приводяться методи розрахунку на стійкість армованих оболонок, для випадків, коли головні напрямки пружності матеріалу співпадають з осями прийнятої системи координат або для випадків відхилення головних напрямів пружності від осей без урахування додаткових констант матеріалу в узагальненому законі Гука, що виникають при такому утворенні конструкцій. Шаруватий композитний матеріал в цьому випадку розглядається в цілому як ортотропний.

Найбільш повне дослідження стійкості тонких анізотропних оболонок обертання нульової, додатної та від'ємної гауссових кривин, що виготовлені з композитних матеріалів з однією площиною пружної симетрії наведено в монографії В.А. Баженова, М.П. Семенюка, В.М. Трача [20].

Використання класичної моделі теорії оболонок,

основаної на гіпотезах Кірхгофа-Лява, яка має достатньо просте математичне формулювання, дало можливість вирішувати більшість важливих практичних задач, в тому числі, розрахунків на стійкість. Проте, існує достатня кількість оболонок, де точність класичної теорії стає недостатньою, з-за значного відношення товщини до радіусу. Крім того, багато синтетичних матеріалів мають підвищену піддатливість до міжшарового зсуву і тому навіть порівняно невеликі за величиною дотичні напруження, що викликають зрушення паралельних шарів, помітно впливають на загальну деформацію оболонки [3, 5, 23-26, 47-53, 55, 70, 83, 90, 92, 101, 107, 111, 115-118, 121, 122, 135-138]. Одним із шляхів уточнення класичної теорії оболонок є застосування моделей, менш жорстких, ніж гіпотези Кірхгофа-Лява. У зв'язку з цим з'явилося багато теорій, побудованих, як і класична, методом гіпотез про характер розподілу переміщень, деформацій або напружень за товщиною оболонки, проте вільних від основної гіпотези класичної теорії – гіпотези про не деформованість нормалей. Всі уточнені теорії в той чи інший спосіб враховують деформацію зсуву.

Першою моделлю, що виходить за рамки класичних гіпотез, була зсувна модель С.П. Тимошенка [142].

Подальший розвиток уточнені теорії однорідних і неоднорідних за товщиною оболонок, що враховують деформації поперечних зсувів, отримали в роботах С.А. Амбарцумяна [3], В.В. Болотіна [26], Г.А. Ваніна [28-31], М.П. Семенюка [123-133], Е.І. Григолюка [47-53], Я.М. Григоренко [54-63], В.І. Корольова [92, 93], А.Н. Андрєєва [5], Б.Л. Пелеха [106], В.Г. Піскунова [107-110], А.П. Прусакова [114], Р.Б. Рікардса, Г.А. Тетерса [120], А.Ф. Рябова [121], А.О. Рассказова [115-117], Л.П. Хорошуна [160-163], Рейсснера [119] та ін.

В даний час в дослідженнях стійкості однорідних і неоднорідних по товщині оболонок сформувався кілька напрямків.

Перший з них пов'язаний з застосуванням для вирішення зазначеного завдання рівнянь тривимірної теорії пружності [11-14, 66-76, 92-93]. Цей шлях є найкращим з точки зору точності врахування ефектів, пов'язаних з неоднорідністю будови за товщиною шаруватих тіл. Однак труднощі математичного характеру, що виникають при вирішенні конкретних завдань, стримують широке застосування цього підходу в практиці інженерних розрахунків [121].

До другого напрямку можна віднести дослідження,

засноване на моделях, побудованих шляхом формулювання відповідних кінематичних і статичних гіпотез для кожного шару окремо [5, 18-25, 47-63, 115-117, 123-133, 144-158]. Цей підхід поступається першому в точності кількісного опису ефектів, пов'язаних з неоднорідністю будови, проте він дозволяє уловити якісні особливості явища втрати стійкості шаруватих оболонок. Основним недоліком цього способу є труднощі технічного характеру, що виникають при чисельній реалізації, внаслідок залежності порядку розв'язувальної системи диференціальних рівнянь від кількості шарів в оболонках.

Третій напрям ґрунтується на заміні неоднорідних за товщиною оболонок деякою однорідною моделлю з наведеними (ефективними) жорсткостями [3, 114, 160-163]. Це досягається введенням деяких спрощувальних припущень щодо характеру залежності напружено-деформованого стану від виродження поперечної координати, єдиних для всього пакета в цілому. Цей шлях розв'язання задач стійкості для шаруватих оболонок найбільш простий в реалізації, але він володіє недоліком в сенсі точності кількісного і якісного опису явища втрати стійкості. Область його застосування обмежується завданнями загальної втрати стійкості.

Зупинимося детальніше на основних, на наш погляд, роботах зазначених напрямків теорії оболонок.

До першого напрямку, як вказувалося вище, відносяться роботи, виконані в тривимірній постановці без залучення будь-яких гіпотез. Такий підхід дозволяє вирішувати завдання механіки полімерних армованих матеріалів й проводити розрахунок елементів конструкцій з них. Оцінити похибки і визначити області застосування тих чи тих припущень, що застосовуються в наближених теоріях шаруватих оболонок, в залежності від фізико-механічних характеристик композитних матеріалів. Що стосується дослідження стійкості композитних матеріалів і елементів конструкцій з них такий підхід розроблений А.Н. Гузем [66-76] та І.Ю. Бабичем [11-17].

У зазначених роботах побудовані спільні рішення задач стійкості тривимірних пружних тіл при однорідних докритичних станах, викладені результати досліджень стійкості оболонок, що виготовлені із матеріалів з малою зсувною жорсткістю. У монографіях [67, 87, 88], а також в роботах [16, 17] наведено графічний матеріал, що дозволяє отримувати значення критичних навантажень для різних геометричних параметрів оболонок і механічних характеристик матеріалу, отримані оцінки та встановлені

області застосовності прикладних теорій стійкості.

Структурна неоднорідність композитних матеріалів і шаруватих оболонок з них створюють необхідність побудови розрахункових моделей, що враховують ці особливості при дослідженні напружено-деформованого стану й стійкості конструкцій. Перехід від неоднорідних матеріалів до однорідних анізотропних здійснюється за допомогою методів мікромеханіки композитів у довгохвильовому наближенні. В роботі [11] наведені результати порівняння критичних навантажень, отриманих на основі лінеаризованих рівнянь теорії пружності та рівнянь, що побудовані в наближенні теорії Тимошенка. Крім пружних композитів, розглянута розрахункова модель армованих матеріалів і оболонкових конструкцій з них при деформуванні за межами пружності.

В [12] побудовано наближену розрахункову модель деформування шару волокнистого композиту, що складається з пружно-пластичних компонентів. Ця модель покладена в основу виводу рівнянь стану багат шарових оболонок із різноманітними варіантами армування. Нелінійні рівняння докритичного стану розв'язуються за допомогою методу дискретної ортогоналізації при використанні покрокового навантаження. Однорідна

задача розв'язується чисельним методом дискретної ортогоналізації. Показано, що раціональні проекти оболонок при комбінованому навантаженні можна знайти, якщо побудувати графік, що огинає граничні криві, вираховані для конкретних варіантів армування. Для пружних оболонок огинаюча крива опукла, для пружно-пластичних має змінний знак кривини.

В основі побудови двовимірних рівнянь прикладних теорій шаруватих оболонок, що відносяться до другого напрямку, лежить метод гіпотез, застосований для кожного шару окремо. Метод гіпотез пов'язаний з деякими спрощувачими припущеннями щодо характеру напружено-деформованого стану в елементі оболонки. Ці припущення формулюються, як правило, на основі фізично наочних уявлень, що мають модельний характер. У роботах зазначеного напрямку істотно враховуються особливості поведінки шаруватих оболонок, що зумовлені дискретністю їх будови. При цьому порядок системи рівнянь залежить від числа шарів.

Основні співвідношення теорії багат шарових оболонок з лінійно-в'язко-пружного матеріалу сформульовані Е.І. Григолоком [47-53]. Тут для кожного шару приймається гіпотеза прямої лінії, згідно з якою

поперечне стиснення матеріалу шарів не враховується; нормаль до вихідної поверхні оболонки в процесі деформації повертається не викривляючись, але і не залишається перпендикулярною до деформованої вихідної поверхні. В роботах Е.І. Григолоука та П.П. Чулкова [47, 49] отримані нелінійні рівняння шаруватих анізотропних оболонок, що знаходяться під дією різноманітних зовнішніх впливів. Порядок чергування несучих шарів і наповнювачів заздалегідь не оговорюється. Перехід від цієї гіпотези до гіпотези Кірхгофа-Лява для якого-небудь шару відбувається автоматично, якщо спрямувати його модулі поперечного зсуву до нескінченності. Для оболонок симетричної будови за товщиною та однакових граничних умов для симетрично розташованих шарів система рівнянь рівноваги ( $S$  – число шарів-наповнювачів) істотно спрощується. Введення допоміжної диференціюємої функції, через яку можуть бути виражені прогини та зсуви, дозволяє звести задачу до визначення функцій зусиль і переміщень до системи двох диференціальних рівнянь. Ці співвідношення в основному були використані при вирішенні часткових завдань стійкості при кінцевих прогинах оболонок, аналізі даних і залежності критичного навантаження та параметрів хвилеутворення від



геометричних й фізичних характеристик [68].

При дослідженні стійкості тришарових циліндричних оболонок в [82] з несучими шарами різної жорсткості при осьовому стисненні та зовнішньому тиску для зсувів прийнятий закон ломаної лінії за товщиною пакета. Несиметричність структури означає наявність різної товщини та різних пружних характеристик матеріалів несучих шарів. Розрахунки показали, що найбільші величини критичних навантажень можуть бути як при симетричній, так і при несиметричній структурі тришарового пакета, в залежності від співвідношень між жорсткостями несучих шарів і наповнювачів. Ці результати підтверджують висновки роботи І.Я. Аміро [4].

У монографії Г.А. Ваніна, М.П. Семенюка, Р.Ф. Ємельянова [29] на підставі гіпотези ломаної лінії викладена методика розрахунку критичних навантажень і форм втрати стійкості тришарових циліндричних оболонок при неосесиметричному зовнішньому тиску. Приведені оцінки впливу неоднорідності і моментного докритичного стану на величину критичного навантаження.

Важливе місце займають дослідження шаруватих оболонок, засновані на застосуванні запропонованої В.В. Болотіним континуальної теорії армованих середовищ

[26]. Застосування теорії шаруватих середовищ дозволяє проводити досить повний аналіз локальних ефектів в шаруватих конструкціях при втраті стійкості. В [116] показано, що при аналізі стійкості оболонок невеликої товщини можна нехтувати різницею метрики шарів і вважати нормальне переміщення сталим за товщиною пакета шарів. При зростанні зсувної жорсткості м'яких шарів, в нормальному до серединної поверхні напрямку, критичні величини тиску для товстостінних багат шарових оболонок різко зростають, а форми втрати стійкості стають більш мінливими. Останнє пояснюється підкріплювальною дією м'яких шарів. Для досить тонких оболонок прогини всіх жорстких шарів при втраті стійкості практично однакові (загальна форма втрати стійкості).

Кабановим В.В. в [82] розглянуто задачу про стійкість багат шарової циліндричної оболонки під дією поздовжніх зусиль. Для жорстких шарів справедлива гіпотеза Кірхгофа-Лява. Показано, що характер форми втрати стійкості істотно залежить від жорсткості м'яких шарів. Якщо жорсткість мала, то форма випинання буде близька до форми втрати стійкості одношарової оболонки при осьовому стисканні. При цьому випинається тільки зовнішній шар. Подальше збільшення жорсткості м'яких

шарів призводить до того, що критичному навантаженню буде відповідати осесиметрична форма випинання. При невеликих відмінностях в жорсткостях шарів оболонка починає працювати як монолітна. Форма випинання при цьому знову не буде осесиметричною. Цю особливість хвилеутворення зазначено в роботі С.Н. Сухініна [137] при дослідженні на стійкість при осьовому стисненні тришарової циліндричної оболонки з ортотропних матеріалів.

Подальший розвиток теорія шаруватих середовищ отримала в роботах Я.М. Григоренка [54-63], в яких вона поширена для випадку багат шарових оболонок.

У роботах Я.М. Григоренка, А.Т. Василенко [55-57, 59, 61] наведені основні рівняння шаруватих анізотропних оболонок з урахуванням неоднорідності деформацій поперечного зсуву, що зумовлена відмінністю пружних властивостей матеріалу шарів. В основу даного підходу покладено припущення про наявність в шарах оболонки локальних кутів повороту, обумовлених поперечними зсувами, та задоволенні на поверхні контакту суміжних шарів умовам безперервності переміщень й напружень. Це дозволяє виразити переміщення та кути повороту всіх шарів через відповідні величини одного з них і таким

чином отримати рівняння, порядок яких не залежить від числа шарів.

Поряд з напрямком, що заснований на формулюванні кінематичних гіпотез для кожного шару окремо, розвиваються різні наближені підходи, засновані на прийнятті гіпотез для всього пакета шарів в цілому. Такий шлях отримання рівнянь бере початок від робіт С.А. Амбарцумяна [3]. Умови спільної роботи шарів без ковзання дозволяють визначити розподіл тангенціальних переміщень за товщиною всього багатошарового пакета. Система диференціальних рівнянь, загальний порядок якої не залежить від числа шарів, може бути отримана як з умов рівноваги елемента багатошарової конструкції, так і за допомогою варіаційних принципів. Стосовно до тонких анізотропних оболонок, запропонована С.А. Амбарцумяном теорія дозволяє розглядати будь-який закон розподілу дотичних напружень за товщиною. Однак для більшості випадків в якості апроксимуючої функції обрана квадратна парабола.

Прийняття гіпотези прямолінійного елемента для всього пакета в цілому також, як і припущення про характер розподілу поперечних дотичних напружень за товщиною, не дає можливості враховувати неоднорідність

деформацій поперечного зсуву, викликану відмінностями пружних властивостей матеріалу.

Більш точному обліку ефектів, обумовлених неоднорідністю матеріалу за товщиною багат шарових оболонок присвячені роботи О.Ф. Рябова [121], О.О. Рассказова [115-117], А.П. Прусакова [114], В.Г. Піскунова [107-109] та ін.

О.Ф. Рябовим, в якості першого наближення, вважається справедливою гіпотеза недеформованої нормалі для всього пакета шарів. Потім з рівнянь рівноваги визначаються величини поперечних нормальних і дотичних напружень, а із закону Гука – нормальні переміщення  $n$ -го шару. Таким чином знайдені поперечні дотичні та нормальні напруження використовуються потім для побудови другого наближення, в якому визначаються деформації. В результаті закон розподілу тангенціальних переміщень за товщиною кожного шару виявляється нелінійним. Напруження визначаються з рівнянь Гука для тришарового напруженого стану. Варіаційним методом отримана система диференціальних рівнянь десятого порядку, що відрізняється лише членами в правій частині від рівнянь неоднорідних оболонок, отриманих на основі класичної теорії. Врахування деформацій зсуву

проводиться за допомогою деякої скалярної функції координат, однакової для всіх шарів. Урахування стискання шару пов'язаний лише зі зміною його товщини за рахунок ефекту Пуассона. Підхід до побудови рівнянь, сформульований О.Ф. Рябовим, ідейно близький до теорії С.А. Амбарцумяна, проте на відміну від останньої в ньому враховуються поперечні нормальні напруження та деформації.

У роботах О.О. Рассказова [115-117] пропонується варіант теорії, заснований на статичних гіпотезах про зміну за товщиною поперечних дотичних і нормальних напружень й на кінематичній гіпотезі про зміну поперечної деформації обтиснення, що дозволяє враховувати ефекти поперечного зсуву та обтиснення в кожному з шарів.

Л.П. Хорошунюм в працях [161-163] запропоновано підхід до побудови теорії багатошарових оболонок, заснований на відмові від кінематичних гіпотез і заміні їх поданням про однорідний в напрямку тангенціальних координат напружено-деформований стан малого тонкостінного елемента. Цей підхід безпосередньо впливає з прийнятих в механіці суцільних середовищ уявлень і способів опису, фізично цілком наочний і має модельний характер. При цьому отримання розв'язків

уточнених рівнянь характеризується меншим обсягом викладок і обчислень, що полегшує їх застосування в численних прикладних задачах.

З наведеного вище огляду літературних джерел випливає, що в даний час існує досить багато варіантів прикладних теорій шаруватих оболонок, що з більшою або меншою точністю описують особливості деформування, пов'язані з неоднорідністю будови пакета. При побудові прикладних теорій перевага віддається методу гіпотез, при якому формулюються кінематичні або статичні гіпотези для всього пакета оболонки в цілому, тобто неоднорідна за товщиною оболонка замінюється деякою однорідною, еквівалентною вихідної оболонці в сенсі наведених жорсткостей.

У літературі відсутня ґрунтовна інформація щодо порівняння результатів, отримуваних при розв'язку задач стійкості за різними прикладними та тривимірними теоріями шаруватих оболонок. Таке порівняння було б корисно з точки зору вироблення рекомендацій щодо вибору найбільш ефективного варіанту моделі неоднорідних оболонок з точки зору розв'язання задач стійкості, а також дозволило б з'ясувати можливості в кількісному та якісному описі прикладних уточнених

теорій, що представляють другий і третій напрямки розвитку теорії шаруватих оболонок.

Основна маса досліджень за теоріями шаруватих оболонок відноситься до загальних теоретичних побудов. Значно меншу кількість робіт присвячено розв'язанню конкретних завдань з стійкості шаруватих оболонок; недостатньо повно з'ясовано якість і ступінь впливу різних факторів, пов'язаних з неоднорідністю будови (структура пакета, схеми армування, механічні характеристики шарів) оболонок на запас стійкості розглянутих механічних систем.

При дії стискаючого навантаження оболонка може втратити несну здатність з різних причин: внаслідок загальної або місцевої втрати стійкості, а також, вичерпання міцності матеріалу та, відповідно, руйнування. Різні причини втрати стійкості композитних циліндричних оболонок, із урахуванням початкових геометричних недосконалостей, граничних умов, послідовності укладання шарів композиту, ефекту анізотропії та ексцентриситету прикладання навантаження, були експериментально досліджені Р.М.Weaver і представлені в [200] для оболонок з різними шарами і з різною їх конфігурацією. В роботі зазначено, що складність експерименту полягає в тому, що



поведінка оболонки під стисканням, в значній мірі, залежить від якості проведення випробування. Якщо недостатньо точно змодельовано граничні умови, навантаження, а також присутні початкові геометричні відхилення відносно теоретичної моделі, виникає значна розбіжність між теорією та експериментом [202].

На відміну від оболонки, що виготовлені з ізотропних матеріалів, в шаруватих композитних оболонках взаємопов'язані деформації розтягу та згину. Внаслідок невдалого їх виготовлення при поздовжньому згині таких конструкцій можуть виникати відшарування, що призводить до зменшення величини критичного навантаження. Багато експериментальних досліджень проводились тільки на криволінійних фрагментах шаруватих панелей, з метою уникнення великої вартості та труднощів, що виникали при виготовленні й дослідженні повнооб'ємних циліндричних оболонки [191].

В [197] R.C. Tennyson докладно розглянуті теоретичні та експериментальні дослідження стійкості шаруватих циліндричних оболонки. Показана залежність критичного навантаження від властивостей матеріалу із урахуванням геометричної нелінійності та умов закріплення конструкції. Також приведена кореляція між теоретичними

дослідженнями й експериментом. Аналогічні дослідження для композитних тонких і товстих циліндрів (з різним відношенням радіусу до товщини) з кільцевим і гвинтовим намотуванням описані в [187, 193]. Випробування таких оболонок на дію осьового тиску показали, що при деяких кутах намотки стискаюче навантаження викликає деформацію зсуву, що призводить до нових форм втрати стійкості. В оболонках, що мають менше відхилення радіуса до товщини відбулося руйнування матеріалу від дії зсувних напружень, в той час, як оболонки, з більшим відношенням втратили стійкість за класичною формою. Величини критичних навантажень, отримані експериментальним шляхом, склали близько 65-85% від теоретичних значень в лінійно-пружній постановці.

Із приведеного вище огляду літературних джерел, що не претендує на його повноту, присвячених стійкості оболонкових конструкцій, слід відмітити, що в даний час із різних видів оболонок обертання найбільш вивченими є оболонки, виготовлені з класичних матеріалів. В багатьох роботах розглядалися циліндри та конуси, утворені укладкою однонапрямлених композитів вздовж твірної, в коловому напрямках або в під кутом до системи координат конструкції без урахування всіх механічних параметрів.

Практично відсутні дослідження стійкості анізотропних оболонок з урахуванням всіх констант узагальненого закону Гука. В запропонованих методиках докритичний напружено-деформований стан оболонкових систем приймають безмоментним або напівмоментним, що призводить до наближених розв'язків, і в небагатьох роботах - моментним. Зрозуміло, що існує серйозна потреба в дослідженні стійкості оболонок, виготовлених з композитних матеріалів, при різних кутах намотування композитного волокна, з урахуванням додаткових сталих матеріалу.

Для розв'язку таких задач запропоновано різноманітні варіанти уточнених моделей оболонок, отриманих на основі менш жорстких припущень, ніж Кірхгофа-Лява. З них найбільшого використання набула теорія типу Тимошенка.

В зв'язку з цим у монографії ставиться задача розробки підходу до розв'язання задач стійкості нетонких анізотропних оболонок з композитів, що базується на уточненій теорії типу Тимошенка. Задача в такому випадку сильно ускладнюється через взаємозв'язок деформацій розтягу, зсуву, згину та кручення, причому це проявляється як в докритичній стадії деформування

оболонок, так і при випинанні. Найбільш повну інформацію про втрату стійкості можна отримати, якщо докритичний напружено-деформований стан змоделювати на основі геометрично нелінійної теорії, а в рівняннях стійкості мають бути враховані зусилля, прогини та повороти, обумовлені вказаною вище взаємодією.

З наведеного випливає, застосування уточненої теорії типу Тимошенка для визначення параметрів напружено-деформованого стану, а також стійкості становить основу прогнозу надійного функціонування конструкцій з нетонких анізотропних оболонок обертання й тому являє собою актуальну та надзвичайно важливу проблему, що має як наукове, так і прикладне значення.

В той же час існує необхідність у дослідженні та перевірці достовірності отримуваних з використанням різноманітних теорій результатів напружено-деформованого стану та стійкості нетонких анізотропних оболонок обертання. Для цього як найкраще підходять тривимірні співвідношення теорії пружності. Результати отримані таким чином, з деякої точки зору, можуть вважатись еталонними.

У вступі наведено стислий огляд літературних джерел, що пов'язані з розглядуваною тематикою про напружено-

деформований стан і стійкість анізотропних оболонок. Зазначена актуальність досліджуваної тематики, наукова новизна та практична цінність.

Перший розділ присвячений реалізації ідеї побудови варіаційних принципів та систем канонічних рівнянь нелінійної теорії анізотропних оболонок за допомогою методів аналітичної механіки.

В другому розділі виконане розв'язання нелінійної задачі про напружено-деформований стан анізотропних оболонок обертання при дії осесиметричних навантажень. Лінеаризація нелінійних рівнянь рівноваги реалізується методом Ньютона-Канторовича. Проаналізований напружений стан анізотропних циліндричних і конічних оболонок під дією осевого тиску та зовнішнього рівномірного тиску.

У третьому розділі побудована розв'язувальна система однорідних диференціальних рівнянь стійкості нетонких анізотропних оболонок обертання у нормальному вигляді. Для цього використовується отримана у другому розділі нелінійна система канонічних диференціальних рівнянь рівноваги. Приведення двовимірної задачі до одновимірної здійснено представленням розв'язувальних функцій у вигляді комплексних рядів Фур'є за коловою координатою. Проведені потрібні видозміни у методі ортогоналізації для

можливості застосування його до розв'язку диференціальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами. Проведені дослідження стійкості циліндричних і конічних оболонок з композитів, що утворені косоперехресним укладанням шарів армованого волокнами матеріалу. Розглядаються такі навантаження як осьовий тиск і поверхневий рівномірний тиск. Досліджено вплив анізотропії матеріалу на критичні значення вказаних навантажень при декількох типах граничних умов. Проведені співставлення отриманих результатів з чисельними розрахунками на стійкість анізотропних оболонок, отриманих за методикою, розробленою в [20], що спирається на гіпотези Кірхгофа-Лява.

В четвертому розділі на основі співвідношень теорії пружності в тривимірній постановці розв'язується задача про напружено-деформований стан товстих анізотропних циліндричних оболонок обертання при дії вісесиметричного розподіленого зовнішнього тиску. Для приведення тривимірної задачі до одновимірної використовується метод Бубнова-Гальоркіна. Розв'язок, таким чином, отриманої системи диференціальних рівнянь проводиться з використанням методу дискретної ортогоналізації. За допомогою розробленої методики

визначено параметри напружено-деформованого стану анізотропних циліндричних оболонок, що знаходяться під дією зовнішнього розподіленого тиску.

У п'ятому розділі розв'язана задача розрахунку на стійкість анізотропних оболонок обертання у тривимірній постановці. Для приведення тривимірної задачі до одновимірної використано метод Бубнова-Гальоркіна та представлення розв'язувальних функцій, за коловою координатою, у вигляді тригонометричних рядів Фур'є. Для розв'язку системи диференціальних рівнянь використаний метод дискретної ортогоналізації. Досліджена стійкість циліндричних оболонок, виготовлених з волокнистих композитів з різноманітними схемами армування та конфігураціями пакету шарів.

## **РОЗДІЛ 1. ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП І КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ НЕТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК**

### **1.1. Потенціальна енергія деформації пружних анізотропних оболонок**

В роботах [87, 88], напевне, вперше розроблялась ідея побудови варіаційних принципів і систем канонічних рівнянь нелінійної теорії анізотропних оболонок за допомогою методів аналітичної механіки. Згідно з нею, щоб побудувати всі необхідні співвідношення теорії, достатньо мати одну скалярну функцію. Такою функцією є потенціальна енергія деформації оболонки як тривимірного тіла. Якщо прийняти гіпотези про розподіл переміщень за товщиною оболонки, то цього достатньо, щоб побудувати не лише кінематичні співвідношення, але й рівняння рівноваги. Такий підхід було застосовано в роботі [20] для побудови нелінійної теорії тонких анізотропних оболонок. Тому підемо цим шляхом і отримаємо потенціальну енергію деформації теорії нетонких анізотропних оболонок.

Відомо [3, 87, 88], що енергія деформації довільного тіла при використанні закону Гука точно буде представлена у такому вигляді:



$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{23}\varepsilon_{23}) d\Omega, \quad (1.1)$$

де  $\sigma_{ij}$  – напруження на трьох взаємно перпендикулярних площадках елемента, виділеного з пружного тіла;  $\varepsilon_{ij}$  – відповідні до них відносні видовження та зсуви (деформації);  $d\Omega$  – об’єм виділеного у вигляді паралелепіпеда елемента.

Приймається, що грані цього елемента перпендикулярні, тому

$$d\Omega = A_1 A_2 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (1.2)$$

Тут  $A_1, A_2$  – параметри Ляме, коефіцієнти першої квадратичної форми координатної поверхні; вісь  $z$  – пряма, перпендикулярна до цієї поверхні; система координат  $\alpha_1, \alpha_2, z$  – права;  $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ ,  $h$  – товщина оболонки.

Згідно з теорією Тимошенка покладемо  $\varepsilon_{i3} \neq 0, i = 1, 2$ , а також  $\sigma_{33} = 0$ . Це дає можливість записати (1.1) так

$$\begin{aligned}
 V = \frac{1}{2} \int \int \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} & (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \\
 & + \sigma_{23}\varepsilon_{23}) A_1 A_2 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz d\alpha_1 d\alpha_2.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Анізотропні оболонки виготовляються, як правило, методом намотування або викладки на оправку окремих шарів, що мають незначну товщину. Це дозволяє вважати, що найнижчий рівень симетрії матеріалу таких шарів складає наявність однієї площини, в якій механічні властивості симетричні. Нехай вісь  $z$  перпендикулярна до цієї площини. Тоді співвідношення закону Гука для анізотропного матеріалу з однією площиною симетрії мають вигляд [3]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= a'_{11}\varepsilon_{11} + a'_{12}\varepsilon_{22} + a'_{13}\varepsilon_{33} + a'_{16}\varepsilon_{12}, \\
 \sigma_{22} &= a'_{12}\varepsilon_{11} + a'_{22}\varepsilon_{22} + a'_{23}\varepsilon_{33} + a'_{26}\varepsilon_{12}, \\
 \sigma_{12} &= a'_{16}\varepsilon_{11} + a'_{26}\varepsilon_{22} + a'_{36}\varepsilon_{33} + a'_{66}\varepsilon_{12}, \\
 \sigma_{13} &= a'_{45}\varepsilon_{23} + a'_{55}\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = a'_{44}\varepsilon_{23} + a'_{45}\varepsilon_{13}, \\
 \sigma_{33} &= a'_{13}\varepsilon_{11} + a'_{23}\varepsilon_{22} + a'_{33}\varepsilon_{33} + a'_{36}\varepsilon_{12}.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

З умови  $\sigma_{33} \approx 0$  знайдемо:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{a'_{13}}{a'_{33}}\varepsilon_{11} - \frac{a'_{23}}{a'_{33}}\varepsilon_{22} - \frac{a'_{36}}{a'_{33}}\varepsilon_{12}. \tag{1.5}$$

Підставимо цей вираз в співвідношення (1.4). Тоді стосовно співвідношень пружності оболонок для кожного шару будемо мати:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= a_{11}\varepsilon_{11} + a_{12}\varepsilon_{22} + a_{16}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} &= a_{12}\varepsilon_{11} + a_{22}\varepsilon_{22} + a_{26}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{12} &= a_{16}\varepsilon_{11} + a_{26}\varepsilon_{22} + a_{66}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{23} &= a_{44}\varepsilon_{23} + a_{45}\varepsilon_{13}, \sigma_{13} = a_{45}\varepsilon_{23} + a_{55}\varepsilon_{13},\end{aligned}\tag{1.6}$$

де

$$\begin{aligned}a_{11} &= a'_{11} - \frac{(a'_{13})^2}{a'_{33}}, \quad a_{12} = a'_{12} - \frac{a'_{13}a'_{23}}{a'_{33}}, \\ a_{22} &= a'_{22} - \frac{(a'_{23})^2}{a'_{33}}, \quad a_{26} = a'_{26} - \frac{a'_{23}a'_{36}}{a'_{33}}, \\ a_{44} &= -\frac{a'_{44}}{a'_{44}a'_{55} - (a'_{45})^2}, \quad a_{45} = -\frac{a'_{45}}{a'_{44}a'_{55} - (a'_{45})^2}, \\ a_{16} &= a'_{16} - \frac{a'_{13}a'_{36}}{a'_{33}}, \quad a_{66} = a'_{66} - \frac{(a'_{36})^2}{a'_{33}}, \\ a_{55} &= -\frac{a'_{55}}{a'_{44}a'_{55} - (a'_{45})^2}.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Якщо переміщення  $u$ ,  $v$ ,  $w$  представити, згідно з гіпотезами Тимошенко, у вигляді лінійних розкладів за координатою  $z$ :

$$u = u_0 + z\theta_1, \quad v = v_0 + z\theta_2, \quad w = w_0 + z\chi,\tag{1.8}$$

то для деформацій з точністю до квадратичних членів в [102] отримано:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \bar{\varepsilon}_{11} + zk_{11} + z^2\nu_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \bar{\varepsilon}_{22} + zk_{22} + z^2\nu_{22}, \\ \varepsilon_{12} &= \bar{\varepsilon}_{12} + zk_{12} + z^2\nu_{12}, \\ \varepsilon_{13} &= \bar{\varepsilon}_{13} \left( 1 + \frac{z}{R_1} + \frac{z^2}{R_1^2} \right), \quad \varepsilon_{23} = \bar{\varepsilon}_{23} \left( 1 + \frac{z}{R_2} + \frac{z^2}{R_2^2} \right), \\ \varepsilon_{33} &= \chi + \frac{1}{2}(\chi^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2).\end{aligned}\tag{1.9}$$

В цих виразах прийемо, що

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{11} &= \varepsilon_{11} + \frac{1}{2}\theta_1^2, \quad \bar{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_{22} + \frac{1}{2}\theta_2^2, \quad \bar{\varepsilon}_{12} = \theta_1\theta_2, \\ \bar{\varepsilon}_{13} &= \theta_1 + \theta_1', \quad \bar{\varepsilon}_{23} = \theta_2 + \theta_2',\end{aligned}\tag{1.10}$$

$$k_{11} = \chi_{11} + \varepsilon_1\chi_{11} + \theta_1\chi_{13}, \quad k_{22} = \chi_{22} + \varepsilon_2\chi_{22} + \theta_2\chi_{23}, \quad k_{12} = \tau_1^* + \tau_2^*,$$

$$\nu_{11} = \frac{1}{R_1}k_{11} + \frac{1}{2}(\chi_{11}^2 + \tau_1^2 + \chi_{13}^2), \quad \nu_{22} = \frac{1}{R_2}k_{22} + \frac{1}{2}(\chi_{22}^2 + \tau_2^2 + \chi_{23}^2),$$

$$\nu_{12} = \frac{1}{R_1}\tau_1^* + \frac{1}{R_1}\tau_2^* + \chi_{11}\tau_2 + \chi_{22}\tau_1 + \chi_{13}\chi_{23},$$

$$\text{де } \chi_1 = k_1 + \frac{\varepsilon_1}{R_1}, \quad \chi_2 = k_2 + \frac{\varepsilon_2}{R_2}, \quad \tau_1 = t_1, \tau_2 = t_2,$$

$$\tau_1^* = \tau_1 + \varepsilon_2\tau_1 + \theta_2\chi_{13}, \quad \tau_2^* = \tau_2 + \varepsilon_1\tau_2 + \theta_1\chi_{23},$$

$$\chi_{13} = k_{13} + \frac{1}{R_1}\theta_1, \quad \chi_{23} = k_{23} + \frac{1}{R_2}\theta_2.$$

Якщо вважати, як це прийнято в лінійній теорії, що квадратами всіх величин в наведених співвідношеннях можна знехтувати, то отримаємо для деформацій та приростів кривин і кручення відомі вирази, приведені в [5, 30]:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + a_1 v - \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + a_2 v - \frac{w}{R_2},$$

$$\varepsilon_{12} = \theta'_1 + \theta'_2,$$

$$\kappa_{11} = \kappa_1 + \frac{\varepsilon_1}{R_1}, \quad \kappa_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta'_1}{\partial \alpha_1} + a_1 \theta'_1 - \frac{\theta'_2}{R_1}, \quad \kappa_{22} = \kappa_2 + \frac{\varepsilon_2}{R_2},$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta'_1}{\partial \alpha_2} + a_2 \theta - \frac{\theta'_2}{R_2}, \quad \kappa_{12} = t_1 + t_2, \quad t_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} - a_1 \theta_1,$$

$$t_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_2} - a_2 \theta_2,$$

$$v_{11} = \frac{1}{R_1} \kappa_{11}, \quad v_{22} = \frac{1}{R_2} \kappa_{22}, \quad v_{12} = \frac{1}{R_1} \tau_1 + \frac{1}{R_2} \tau_2. \quad (1.11)$$

В (1.11) використані позначення:

$$a_1 = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad a_2 = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}. \quad (1.12)$$

Кути повороту та залежності для кривин і кручення  $\kappa_{ij}$

мають вид:

$$\theta_1' = \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{u}{R_1}, \quad \theta_2' = \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{u}{R_2}, \quad (1.13)$$

$$\kappa_{11} = \kappa_1 + \frac{1}{R_1} \varepsilon_{11}, \quad \kappa_{22} = \kappa_2 + \frac{1}{R_2} \varepsilon_{22},$$

$$\kappa_{12} = 2\tau + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \varepsilon_{12}. \quad (1.14)$$

У виразі кручення  $\kappa_{12}$  маємо функцію  $\tau$ , а також  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{22}$

$$t_1 = t_2 = \tau, \quad \nu_{11} = \frac{1}{R_1} \kappa_{11}, \quad \nu_{22} = \frac{1}{R_2} \kappa_{22}, \quad \nu_{12} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tau. \quad (1.15)$$

В теорії оболонок типу Тимошенко прийнято, що  $\varepsilon_{33} \ll \varepsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ). Тому в усіх інших співвідношеннях, крім (2.6),  $\varepsilon_{33} = 0$ . З (1.9) витікає наближене значення функції  $\chi$

$$\chi = -\frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2). \quad (1.16)$$

Маючи представлення (1.9) з визначеними коефіцієнтами  $\bar{\varepsilon}_{ij}$ ,  $k_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  через переміщення (1.11), можемо отримати співвідношення пружності для оболонок, підставивши їх в співвідношення (1.6) та проінтегрувавши за товщиною. В роботі [3] показано, що для цієї мети краще використати вираз потенціальної енергії. Йдучи таким шляхом, після підстановки розкладів (1.9) в

співвідношення (1.6), то останні використаємо в запису потенціальної енергії (1.3) та здійснимо інтегрування за координатою  $z$ . Представимо наведені вище залежності в векторно-матричному вигляді. Введемо вектори та матрицю

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & 0 & 0 \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Тоді співвідношення (1.6) матимуть вигляд

$$\sigma = a\varepsilon, \quad (1.18)$$

а потенціальну енергію деформацій (1.3) запишемо так

$$V = \frac{1}{2} \int \int \int_z \varepsilon^T a \varepsilon \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) A_1 A_2 dz d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1.19)$$

де символ “ $T$ ” позначає операцію транспонування. Вектор  $\varepsilon$  з урахуванням розкладів компонентів деформації за координатою  $z$  також можна представити у вигляді

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + z\chi + z^2\nu, \quad (1.20)$$

$$\text{де } \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{12} \\ \bar{\varepsilon}_{23} \\ \bar{\varepsilon}_{13} \end{bmatrix}, \chi = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \nu = \begin{bmatrix} \nu_{11} \\ \nu_{22} \\ \nu_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Якщо ввести такі позначення окремих частин потенціальної енергії

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^T a \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_3^T a \bar{\varepsilon}_3, \quad \mathcal{E}_1 = 2 \bar{\varepsilon}^T a \chi, \\ \mathcal{E}_2 &= 2 \bar{\varepsilon}^T a \nu + \chi^T a \chi, \end{aligned} \quad (1.21)$$

то енергія деформації (1.19) може бути подана у вигляді

$$V = \frac{1}{2} \int \int \int_z (\mathcal{E}_0 + z \mathcal{E}_1 + z^2 \mathcal{E}_2) (1 - 2Hz + kz^2) dz d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1.22)$$

де  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  – середня кривина,  $k = \frac{1}{R_1 R_2}$  – гауссова

кривина поверхні, від якої йде відлік координати  $z$ .

В (1.22) проведемо інтегрування за координатою  $z$ . У виразах для  $\mathcal{E}_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , залежними від координати  $z$  можуть бути лише константи пружності  $a_{ij}$ . Проінтегруємо відповідні матриці за цією координатою. Отримаємо матриці жорсткості на розтяг-стиск, взаємного впливу тангенціальних і згинальних деформацій, згину та



кручення відповідно

$$C = \int_z adz, B = \int_z zadz, D = \int_z z^2 adz. \quad (1.23)$$

Потенціальна енергія деформації оболонки у двовимірному представленні набуває вигляду функціонала

$$V = \frac{1}{2} \iint \left[ \varepsilon^T (C - 2HB + kD) \varepsilon + \varepsilon_3^T (C - 2HB + kD) \varepsilon_3 + \right. \\ \left. + 2\varepsilon^T (B - 2HD) \chi + \chi^T D \chi + 2\varepsilon^T D v \right] A_1 A_2 dz d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (1.24)$$

Компоненти вектора  $v$  виражаються через компоненти вектора  $\chi_2$ , який є складовою  $\varepsilon_{33}$

$$v = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} k_{11} \\ \frac{1}{R_2} k_{12} \\ \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma_m \chi_2, \quad (1.25)$$

$$\text{де } \gamma_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Враховуючи цей факт, запишемо

$$V = \frac{1}{2} \iint \left[ \varepsilon^T (C - 2HB + kD) \varepsilon + \bar{\varepsilon}_3^T (C - 2HB + kD) \bar{\varepsilon}_3 + \right. \\ \left. + 2\varepsilon^T (B - 2HD + D\gamma_m) \chi + \chi^T D\chi \right] A_1 A_2 dz d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (1.26)$$

Вираз потенціальної енергії (1.26) може бути використаний для отримання основних співвідношень теорії анізотропних оболонок. В роботах [3, 6, 20, 87, 88] як міра деформації згину і кручення використовуються параметри  $k_{11}$ ,  $k_{22}$ ,  $k_{12}$ . Врахуємо, що

$$\chi = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & \varepsilon_{11} \\ \frac{1}{R_2} & \varepsilon_{22} \\ 2H & \varepsilon_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\chi} + \rho_m \varepsilon, \quad (1.27)$$

$$\text{де } \rho_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тоді отримаємо

$$V = \frac{1}{2} \iint \left[ \varepsilon^T (C - 2HB + kD + 2(B - 2HD)\rho_m + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \bar{\varepsilon}_3^T (C - 2HB + kD) \bar{\varepsilon}_3 + 2D\alpha_m + \rho_m^T D\rho_m \Big] \varepsilon + \\
 & + \left[ 2\varepsilon^T (B - 2HD + D\gamma_m + \rho_m D) \tilde{\chi} + \tilde{\chi}_m^T D\chi \right] A_1 A_2 dz d\alpha_1 d\alpha_2,
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

де, окрім введених позначень, маємо

$$\alpha_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4H^2 - 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.29}$$

Перейдемо до представлення потенціальної енергії деформації в координатному вигляді. Виконавши в (1.28) всі операції над компонентами векторів і матриць, отримаємо

$$\begin{aligned}
 V = \frac{1}{2} \iint & \left[ C_{11}^* \varepsilon_{11}^2 + 2C_{12}^* \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + C_{22}^* \varepsilon_{22}^2 + 2C_{16}^* \varepsilon_{11} \varepsilon_{12} + 2C_{26}^* \varepsilon_{22} \varepsilon_{12} + \right. \\
 & + C_{16}^* \varepsilon_{12}^2 + 2B_{11}^* \varepsilon_{11} \kappa_1 + 2B_{12}^* (\varepsilon_{11} \kappa_{22} + \varepsilon_{22} \kappa_{11}) + 2B_{22}^* \varepsilon_{22} \kappa_{22} + \\
 & + 2B_{16}^* \varepsilon_{11} k_{12} + 2B_{26}^* \varepsilon_{22} k_{12} + 2B_{26}^{*'} \varepsilon_{12} \kappa_{22} + 2B_{16}^{*'} \varepsilon_{12} \kappa_{11} + 2B_{66}^* \varepsilon_{12} k_{12} + \\
 & + 2D_{11} k_{11}^2 + 2D_{12} k_{11} k_{12} + 2D_{16} \kappa_{11} k_{12} + 2D_{26} \kappa_{22} k_{12} + D_{22} \kappa_{22}^2 + \\
 & \left. + D_{66} k_{12}^2 + C_{44}^* \varepsilon_{23}^2 + C_{45}^* \varepsilon_{23} \varepsilon_{13} + C_{55}^* \varepsilon_{13}^2 \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2.
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Жорсткості в цьому виразі залежать від геометричних параметрів оболонки. Це є наслідком того, що при побудові (1.30) враховувались залежність метрики

оболонки від координати  $z$ . Вираз (1.30) в лінійному варіанті співвідношень для ізотропних оболонок співпадає з залежністю (9.10) монографії [102]. Спрощення виконані в [102], дозволяють отримати найбільш простий варіант співвідношень пружності, що задовольняють шостому рівнянню рівноваги. При побудові пружного потенціалу анізотропних оболонок в [2] проведені аналогічні спрощення. Якщо у виразі (1.30) знехтувати складовими впливу поперечних зсувів, то потенціальна енергія деформації збігається з такою, що отримана у [20].

Пружний потенціал вигляду (1.30) є найбільш загальним для анізотропних оболонок однорідних чи неоднорідних за товщиною. Його достатньо [87, 88] для побудови канонічної системи рівнянь нелінійної теорії оболонок при використанні перетворення Лежандра та побудові варіаційного принципу, що є гамільтоною формою принципу мінімуму потенціальної енергії. Цей принцип співпадає з принципом Рейсснера. За допомогою формалізму Гамільтона з використанням (1.30) можна отримати різні частинні варіаційні рівняння для розв'язку різноманітних задач теорії анізотропних оболонок.

## 1.2. Побудова функціонала Рейсснера для виводу нелінійних рівнянь рівноваги теорії нетонких анізотропних оболонок

Потенціальна енергія деформації анізотропних оболонок середньої товщини представлена виразом (1.30). В ньому жорсткості  $C_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$  визначаються загальноприйнятими формулами [56]. Для присутніх жорсткостей  $C_{ij}^*$ ,  $B_{ij}^*$ ,  $B'_{ij}$  маємо такі вирази:

$$\begin{aligned}C_{11}^* &= C_{11} - HB_{11} + 2\sqrt{E} \frac{1}{R_1} D_{11}, & C_{22}^* &= C_{22} - HB_{22} + 2\sqrt{E} \frac{1}{R_2} D_{22}, \\C_{12}^* &= C_{12} - 2HB_{12}, & C_{66}^* &= C_{66} - 2HB_{66} + (4E + \kappa)D_{66}, \\C_{16}^* &= C_{16} - HB_{16} + 2\sqrt{E} \frac{1}{R_1} D_{11}, & C_{26}^* &= C_{26} - HB_{26} + 2\sqrt{E} \frac{1}{R_2} D_{22}, \\B_{11}^* &= B_{11} + 2\sqrt{E}D_{11}, & B_{12}^* &= B_{12}, & B_{22}^* &= B_{22} - 2\sqrt{E}D_{22}, \\B_{16}^* &= B_{16} + \sqrt{E}D_{16}, & B_{26}^* &= B_{26} - \sqrt{E}D_{26}, & B'_{16} &= B_{16} + \frac{1}{R_1} D_{16}, \\B'_{26} &= B_{26} + \frac{1}{R_2} D_{26}, & B_{66}^* &= B_{26} + HD_{26}.\end{aligned}\tag{1.31}$$

У них використані відомі з диференціальної геометрії позначення:  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  – середня кривина,  $k = \frac{1}{R_1 R_2}$  –

гауссова кривина,  $E = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2$  – ейлерова різниця

поверхні.

За використання виразу потенціальної енергії (1.30) виконаємо перетворення Лежандра згідно загальної схеми.

Введемо нові змінні:

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{11}} = C_{11}^* \varepsilon_{11} + C_{12}^* \varepsilon_{22} + C_{16}^* \varepsilon_{12} + B_{11}^* \kappa_{11} + B_{12} \kappa_{22} + B_{16}^* \kappa_{12}, \\
 T_{22} &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{22}} = C_{12}^* \varepsilon_{11} + C_{22}^* \varepsilon_{22} + C_{26}^* \varepsilon_{12} + B_{12} \kappa_{11} + B_{22}^* \kappa_{22} + B_{26}^* \kappa_{12}, \\
 T_{12} &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{12}} = C_{16}^* \varepsilon_{11} + C_{26}^* \varepsilon_{22} + C_{66}^* \varepsilon_{12} + B_{16}'' \kappa_{11} + B_{26}' \kappa_{22} + B_{66}^* \kappa_{12}, \\
 M_{11} &= \frac{\partial V}{\partial \kappa_1} = B_{11}^* \varepsilon_{11} + B_{12} \varepsilon_{22} + B_{16}' \varepsilon_{12} + D_{11} \kappa_{11} + D_{12} \kappa_{22} + D_{16} \kappa_{12}, \\
 M_{22} &= \frac{\partial V}{\partial \kappa_2} = B_{12} \varepsilon_{11} + B_{22}^* \varepsilon_{22} + B_{26}' \varepsilon_{12} + D_{12} \kappa_{11} + D_{22} \kappa_{22} + D_{26} \kappa_{12}, \\
 M_{12} &= \frac{\partial V}{\partial \kappa_{12}} = B_{16}^* \varepsilon_{11} + B_{26}^* \varepsilon_{22} + B_{66}^* \varepsilon_{12} + D_{16} \kappa_{11} + D_{26} \kappa_{22} + D_{66} \kappa_{12}, \\
 T_{13} &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{13}} = C_{45}^* \varepsilon_{23} + 2C_{55}^* \varepsilon_{13}, \\
 T_{23} &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{23}} = 2C_{44}^* \varepsilon_{23} + C_{45}^* \varepsilon_{13},
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

де  $\kappa_{12} = 2\tau$ .

Тут  $V$  – підінтегральний вираз в (1.30),  $T_{ij}$ ,  $Q_{ij}$ ,  $M_{ij}$  – зусилля та моменти, що діють в перерізах оболонки. Для ізотропних оболонок вирази (1.32) співпадають з співвідношеннями пружності [102].

Введемо нову гамільтонову функцію

$$H_q = T_{11}\varepsilon_{11} + T_{22}\varepsilon_{22} + T_{12}\varepsilon_{12} + M_{11}\kappa_{11} + M_{22}\kappa_{22} + M_{12}\kappa_{12} + T_{23}\varepsilon_{23} + T_{13}\varepsilon_{13} - V'. \quad (1.33)$$

Із залежностей (1.32) знайдемо вирази для деформацій, виражені через зусилля та моменти. Для зменшення та спрощення виразів введемо векторно-матричні позначення:

- вектори зусиль  $T = [T_{11} \quad T_{22} \quad T_{12}]^T$ ,  $T_3 = [T_{13} \quad T_{23}]^T$ ;
- вектор моментів  $M = [M_{11} \quad M_{22} \quad M_{12}]^T$ ;
- вектор тангенціальних деформацій  $\varepsilon = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{12}]^T$ ;
- вектор зсувних деформацій  $\varepsilon_3 = [\varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{23}]^T$ ;
- вектор приростів кривин і кручення  $\chi = [k_{11} \quad k_{22} \quad k_{12}]^T$ .

Буква “Т” позначає транспонування.

Матриці жорсткостей в (1.33) складаються з блоків

$$C = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & C_{16}^* \\ C_{12}^* & C_{22}^* & C_{26}^* \\ C_{16}^* & C_{26}^* & C_{66}^* \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12} & B_{16}^* \\ B_{12} & B_{22}^* & B_{26}^* \\ B'_{16} & B'_{26} & B_{66}^* \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}, C' = \begin{bmatrix} C_{44}^* & C_{45}^* \\ C_{45}^* & C_{55}^* \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Як видно, матриці  $C$ ,  $D$  і  $C'$  – симетричні, а  $B$  є несиметричною. Використовуючи введені позначення, співвідношення (1.33) запишемо в такому вигляді

$$\begin{bmatrix} T \\ M \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & B & 0 \\ B^T & D & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

а вираз для потенціальної енергії (1.30) в згорнутій матричній формі буде таким:

$$V(\varepsilon, \chi) = \iint V'(\varepsilon, \chi) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1.36)$$

$$\text{де } V'(\varepsilon, \chi) = \frac{1}{2} (\varepsilon^T C \varepsilon + 2\varepsilon^T B \chi + \chi^T D \chi + \varepsilon_3^T C' \varepsilon_3). \quad (1.37)$$

Аналіз матричного співвідношення (1.35) з урахуванням блочності дозволяє подати так

$$\begin{bmatrix} T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}, \quad (1.38)$$

$$T_3 = C' \varepsilon_3. \quad (1.39)$$

Очевидно, що це дозволить простіше здійснити матричні перетворення.

Обернені до (1.38) і (1.39), вирази деформацій через



зусилля та моменти можна записати

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & P \\ P^T & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M \end{bmatrix}, \quad (1.40)$$

$$\varepsilon_3 = C^{-1}T_3. \quad (1.41)$$

В (1.40) введено позначення:

$$A = C^{-1} + C^{-1}B(D - B^T C^{-1}B)^{-1}BC^{-1},$$

$$P = -C^{-1}B(D - B^T C^{-1}B)^{-1},$$

$$P^T = -(D - B^T C^{-1}B)^{-1}BC^{-1}, \quad G = (D - B^T C^{-1}B)^{-1}. \quad (1.42)$$

Після підстановки виразів для деформацій (1.40), (1.41) в (1.33) отримаємо

$$H_q = \frac{1}{2} \left( T^T AT + 2T^T PM + M^T GM + T_3^T C^T T_3 \right). \quad (1.43)$$

Цей вираз за виключенням останнього доданку повністю співпадає з таким, що приведений в [20] для тонких анізотропних оболонок.

Утворимо інтеграл дії

$$\Pi_R = \iint \left[ T^T \varepsilon(u) + M^T \chi(u) + T_3^T \varepsilon_3(u) - H_q \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - A. \quad (1.44)$$

Цей інтеграл є функціоналом Рейсснера. У ньому  $\varepsilon(u)$ ,  $\chi(u)$ ,  $\varepsilon_3(u)$  – це вирази відповідних деформацій, що записані через переміщення,  $A$  – робота зовнішніх сил. Як відомо, в принципі Рейсснера незалежно варіюються як переміщення, так і зусилля. При цьому істинному станві

рівноваги відповідає точка стаціонарності функціонала (1.44), а це дозволяє отримати канонічну систему рівнянь, що складена із рівнянь рівноваги, рівнянь стану та відповідних їм граничних умов.

### 1.3. Виведення канонічної системи рівнянь нелінійної теорії нетонких анізотропних оболонок

Виконаємо перетворення Лежандра. Введемо нові змінні  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $T_{13}$

$$T_{11} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{11}}, T_{12} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{12}}, T_{13} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{13}}$$

$$M_{11} = \frac{\partial V}{\partial k_{11}}, M_{12} = \frac{\partial V}{\partial k_{12}}, \quad (1.45)$$

В (1.32) вони представлені розгорнутими співвідношеннями.

Введемо такі векторно-матричні позначення

$$T_1 = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ M_{11} \\ M_{12} \\ T_{13} \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} T_{22} \\ M_{22} \\ M_{21} \\ T_{21} \\ T_{23} \end{bmatrix}, \varepsilon_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ k_{11} \\ k_{12} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{22} \\ k_{22} \\ k_{21} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{16}^* & B_{11}^* & B_{16}^* & 0 \\ C_{16}^* & C_{66}^* & B'_{16} & B_{66}^* & 0 \\ B_{11}^* & B'_{16} & D_{11} & D_{16} & 0 \\ B_{16}^* & B_{66}^* & D_{16} & D_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{55}^* \end{bmatrix}, \\
 H_{12} &= \begin{bmatrix} C_{12}^* & B_{12} & B_{16}^* & C_{16}^* & 0 \\ C_{26}^* & B'_{16} & B_{66}^* & C_{66}^* & 0 \\ B_{12} & D_{12} & D_{16} & B'_{16} & 0 \\ B_{26}^* & D_{26} & D_{66} & B_{66}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{45}^* \end{bmatrix}, \\
 H_{22} &= \begin{bmatrix} C_{12}^* & B_{22}^* & B_{26}^* & C_{26}^* & 0 \\ B_{22}^* & D_{22} & D_{26} & B'_{26} & 0 \\ B_{26}^* & D_{26} & D_{66} & B_{66}^* & 0 \\ C_{26}^* & B'_{26} & B_{66}^* & C_{66}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{44}^* \end{bmatrix}. \quad (1.46)
 \end{aligned}$$

З погляду на використання залежностей (1.45), матриці (1.46) для жорсткісних характеристик доцільніше представити так

$$H_{11} = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{16}^* & B_{11}^* & B_{16}^* & 0 \\ C_{16}^* & C_{66}^* & B'_{16} & D_{16} & 0 \\ B_{11}^* & B'_{16} & D_{11} & B_{66}^* & 0 \\ B_{16}^* & D_{16} & B_{66}^* & D_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{55}^* \end{bmatrix},$$

$$H_{12} = \begin{bmatrix} C_{12}^* & B_{12} & B_{16}^* & 0 & 0 \\ C_{26}^* & B_{26}' & B_{66}^* & 0 & 0 \\ B_{12} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{26}^* & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{45}^* \end{bmatrix},$$

$$H_{22} = \begin{bmatrix} C_{12}^* & B_{22}^* & B_{26}^* & 0 & 0 \\ B_{22}^* & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{26}^* & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45}^* & 2C_{44}^* \end{bmatrix}. \quad (1.47)$$

Функцію  $V'(\varepsilon, k_i), i=1,2$  запишемо за допомогою введених позначень. Тоді маємо

$$V'(\varepsilon, k) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} [\varepsilon_1^T H_{11} \varepsilon_1 + 2\varepsilon_1^T H_{12} \varepsilon_2 + \varepsilon_2^T H_{22} \varepsilon_2]. \quad (1.48)$$

Із співвідношення

$$T_1 = H_{11} \varepsilon_1 + H_{12} \varepsilon_2 \quad (1.49)$$

знайдемо

$$\varepsilon_1 = H_{11}^{-1} T_1 + H_{11}^{-1} H_{12} \varepsilon_2. \quad (1.50)$$

Підставимо у вираз (1.48) залежність для  $\varepsilon_1$ . Тоді отримаємо

$$V'(\varepsilon, k) = \frac{1}{2} \left[ T_1^T H_{11}^{-1} T_1 + \varepsilon_2^T (H_{22} - H_{12}^T H_{11}^{-1} H_{12}) \varepsilon_2 \right]. \quad (1.51)$$

Утворимо нову функцію

$$H_q = T_1^T \varepsilon_1 + V'(\varepsilon, k). \quad (1.52)$$

Після використання залежності для  $\varepsilon_1$  (1.50) отримаємо “функцію Гамільтона”

$$H_q = \frac{1}{2} \left[ T_1^T H_{11}^{-1} T_1 - 2T_1^T H_{11}^{-1} H_{12} \varepsilon_2 - \varepsilon_2^T (H_{22} - H_{12}^T H_{11}^{-1} H_{12}) \varepsilon_2 \right]. \quad (1.53)$$

Згідно з методом Гамільтона інтеграл дії має вигляд

$$A_R = \iint \left[ T_{11} \varepsilon_{11}(u) + T_{12} \varepsilon_{12}(u) + M_{11} k_{11}(u) + M_{12} k_{12}(u) + \right. \\ \left. + T_{13} \varepsilon_{13}(u) - H_q \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - A. \quad (1.54)$$

В (1.54)  $\varepsilon_{ij}(u)$  – вирази для деформацій (1.9), (1.10);  $A$  – робота зовнішніх сил;  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{13}$ ,  $M_{11}$ ,  $M_{12}$  – зусилля та моменти.

Запишемо варіацію функціонала  $A_R$  (1.54) з урахуванням варіювання в ньому за зусиллями, моментом і переміщенням

$$\delta A_R = \iint \left[ \varepsilon_{11}(u) \delta T_{11} + \varepsilon_{12}(u) \delta T_{12} + k_{11}(u) \delta M_{11} + k_{12}(u) \delta M_{12} + \right. \\ \left. + \varepsilon_{13}(u) \delta T_{13} - \delta T_1^T (H_{11}^{-1} T + H_{11}^{-1} H_{12} \varepsilon_2) + T_{11} \delta \varepsilon_{11}(u) + T_{12} \delta \varepsilon_{12}(u) + \right. \\ \left. + M_{11} \delta k_{11}(u) + M_{12} \delta k_{12}(u) + T_{13} \delta \varepsilon_{13}(u) - \right. \\ \left. - (T_1^T H_{11}^{-1} H_{12} + \varepsilon_2^T (H_{22} - H_{21} H_{11}^{-1} H_{12})) \delta \varepsilon_2 \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \delta A. \quad (1.55)$$

Введемо позначення

$$T_2 = H_{12}^T H_{11}^{-1} T_1^T + (H_{22} - H_{21} H_{11}^{-1} H_{12}) \varepsilon_2. \quad (1.56)$$

Тоді варіація  $\delta A_R$  у матричній формі має вигляд

$$\begin{aligned} \delta A_R = & \iint [\delta T_1 [\varepsilon_1(u) - H_{11}^{-1} T_1 - H_{11}^{-1} H_{12} \varepsilon_2] + T_1^T \delta \varepsilon_1(u) + \\ & + \delta T_{12} \varepsilon_{12}(u) + \delta M_{11} k_{11}(u) + \delta M_{12} k_{12} + \delta T_{13} \varepsilon_{13}(u) + \\ & + T_{11} \delta \varepsilon_{11}(u) + T_{12} \delta \varepsilon_{12}(u) + M_{11} \delta \mathcal{K}_{11}(u) + M_{12} \delta \mathcal{K}_{12} + \\ & + T_{13} \delta \varepsilon_{13}(u) + T_2^T \delta \varepsilon_2] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \delta A. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Варіацію роботи  $\delta A$  зовнішніх навантажень  $q_1, q_2, q_3$ , що прикладені до поверхні оболонки, торцевих зусиль  $T_{ii}^0$ ,  $T_{i3}^0$  і моментів  $M_{ii}^0$  при  $\alpha_i = const$  ( $i = 1, 2$ ) представимо так

$$\begin{aligned} \delta A = & \iint (q_1 \delta u + q_2 \delta v + q_3 \delta w) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + \int_{\alpha_{2,0}}^{\alpha_{2,k}} \left[ T_{11}^0 \delta u + \left( T_{12}^0 - \frac{M_{12}^0}{R_2} \right) \delta v + \left( T_{13}^0 + \frac{\partial M_{12}^0}{\partial \alpha_2} \right) \delta w + \right. \\ & + M_{11}^0 \delta \theta_1 + M_{12}^0 \delta \theta_2 \Big]_{\alpha_{1,1}}^{\alpha_{1,k}} A_2 d\alpha_2 + \\ & + \int_{\alpha_{1,0}}^{\alpha_{1,k}} \left[ \left( T_{12}^0 - \frac{M_{12}^0}{R_1} \right) \delta u + T_{22}^0 \delta v + \left( T_{23}^0 + \frac{\partial M_{12}^0}{\partial \alpha_1} \right) \delta w - \right. \\ & \left. - M_{22}^0 \delta \theta_2 + M_{12}^0 \delta \theta_1 \right]_{\alpha_{2,1}}^{\alpha_{2,k}} A_1 d\alpha_1. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Враховуючи те, що  $\delta A_R = 0$  і варіації зусиль  $T_{11}, T_{12}, T_{13}$ , моментів  $M_{11}, M_{12}$ , переміщень  $u, v, w, \theta_1, \theta_2 \in$

довільними величинами, можна прирівняти до нуля вирази при варіаціях вказаних величин. Отримаємо систему з 10 рівнянь. Вона складена із п'яти рівнянь стану і п'яти нелінійних неоднорідних диференціальних рівнянь рівноваги другого порядку кожне та відповідних їм граничних умов

$$\varepsilon_{11}(u) = b_{11}T_{11} + b_{12}T_{12} + b_{13}M_{11} + b_{14}M_{12} + b'_{11}\varepsilon_{22} + b''_{11}k_{22}; \quad (1.59)$$

$$\varepsilon_{12}(u) = b_{21}T_{11} + b_{22}T_{12} + b_{23}M_{11} + b_{24}M_{12} + b'_{21}\varepsilon_{22} + b''_{21}k_{22};$$

$$k_{11}(u) = b_{31}T_{11} + b_{32}T_{12} + b_{33}M_{11} + b_{34}M_{12} + b'_{31}\varepsilon_{22} + b''_{31}k_{22};$$

$$k_{12}(u) = b_{41}T_{11} + b_{42}T_{12} + b_{43}M_{11} + b_{44}M_{12} + b'_{41}\varepsilon_{22} + b''_{41}k_{22};$$

$$\varepsilon_{13}(u) = b_{55}T_{13} + b'_{55}T_{23};$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{12}^* + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{22} + \frac{1}{R_1} T_{13} + q_1 = 0$$

;

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{12}^* + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{11} + \frac{1}{R_2} T_{23} + q_2 = 0;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{23}}{\partial \alpha_2} T_{12}^* + \frac{1}{R_1} T_{11} + \frac{1}{R_2} T_{22} + q_3 = 0;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} M_{12}^* - \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}^*}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} - T_{13} = 0;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{12}^*}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{12}^* - \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{11} + T_{23} = 0.$$

При записі цих рівнянь використані такі позначення:

$b_{ij}$  – це компоненти матриці  $H_{11}^{-1}$ ;  $b'_{ij}$ ,  $b''_{ij}$  – компоненти матриці  $H_{11}^{-1}H_{12}$ ,  $T_{12}^* = T_{12} + T_{21}$ ,  $M_{12}^* = M_{12} + M_{21}$ .

Граничні умови формуються відносно однієї з величин з кожної пари

при  $\alpha_1 = const$ :

$$(T_{11}^*, u), (T_{12}^*, \nu), (T_{13}^*, w), (M_{11}, \theta_1), (M_{12}, \theta_2). \quad (1.60)$$

Цей випадок представлення системи диференціальних рівнянь і граничних умов придатний для розв'язку осесиметричних задач нелінійної статички оболонок обертання, а також задач стійкості оболонок, замкнених за координатою  $\alpha_2$ . Представлення розв'язувальних функцій рядами Фур'є за координатою  $\alpha_2$  дозволяє із системи рівнянь (1.59) отримати систему звичайних диференціальних рівнянь нормального виду. Для розв'язку крайової задачі, що сформульована у вигляді нормальної системи диференціальних рівнянь і граничних умов відносно функцій (1.58), можна застосовувати метод дискретної ортогоналізації [42]. Шлях отримання розв'язку від постановки задачі до отримання числових результатів варіаційного принципу (1.55) є значно коротший, ніж при використанні повного варіаційного принципу Рейсснера (1.44)



Варіацію роботи  $\delta A$  зовнішніх навантажень  $q_1, q_2, q_3$ , що прикладені до поверхні оболонки, торцевих зусиль  $T_{ii}^0$ ,  $T_{i3}^0$  і моментів  $M_{ii}^0$  при  $\alpha_i = const$  ( $i = 1, 2$ ) представимо так

$$\begin{aligned} \delta A = & \iint (q_1 \delta u + q_2 \delta v + q_3 \delta w) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \quad (1.61) \\ & + \int_{\alpha_{2,0}}^{\alpha_{2,k}} \left[ T_{11}^0 \delta u + (T_{12}^*)^0 \delta v + T_{13}^0 \delta w + M_{11}^0 \delta \theta_1 + (M_{12}^*)^0 \delta \theta_2 \right]_{\alpha_{1,1}}^{\alpha_{1,k}} A_2 d\alpha_2 + \\ & + \int_{\alpha_{1,0}}^{\alpha_{1,k}} \left[ (T_{12}^*)^0 \delta u + T_{22}^0 \delta v + T_{23}^0 \delta w - (M_{12}^*)^0 \delta \theta_1 + M_{22}^0 \delta \theta_2 \right]_{\alpha_{2,1}}^{\alpha_{2,k}} A_1 d\alpha_1. \end{aligned}$$

В подальшому перепишемо рівняння стану та рівняння рівноваги (1.59) так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} = & b_{11} T_{11} + b_{12} T_{12} + b_{13} M_{11} + b_{14} M_{12} + \\ & + b'_{11} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{w}{R_2} \right) - b''_{11} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 \right) - \\ & - \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{w}{R_2} + \frac{1}{2} \theta_2^2; \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} = & b_{21} T_{11} + b_{22} T_{12} + b_{23} M_{11} + b_{24} M_{12} + \\ & + b'_{21} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{w}{R_2} \right) - b''_{21} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 \right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2} \theta_2^2;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} = b_{55} T_{13} + b'_{55} T_{23} - \frac{u}{R_1} - \theta_1;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} = b_{31} T_{11} + b_{32} T_{12} + b_{33} M_{11} + b_{34} M_{12} +$$

$$b'_{31} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{w}{R_2} \right) - b''_{31} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 \right) +$$

$$+ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \theta_2 + \frac{1}{2} \theta_2^2;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_1} = b_{41} T_{11} + b_{42} T_{12} + b_{43} M_{11} + b_{44} M_{12} +$$

$$b'_{41} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{w}{R_2} \right) - b''_{41} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 \right) +$$

$$+ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \theta_1 - \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_2 + \frac{1}{2} \theta_2^2;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{12}^* - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{22} - \frac{1}{R_1} T_{13} - q_1;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{12}^* - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{11} - \frac{1}{R_2} T_{23} - q_2;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{13}}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{23}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{R_1} T_{11} - \frac{1}{R_2} T_{22} - q_3;$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}^*}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} M_{12}^* + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} + T_{13} + T_{11} \theta_1; \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{12}^*}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{12}^* - \\ &- \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{11} - T_{23} + T_{22} \theta_2. \end{aligned} \quad (1.62)$$

В рівняннях (1.62) слід замінити зусилля  $T_{23}$ ,  $T_{22}$  та моменти  $M_{12}$ ,  $M_{22}$ , які тут є пасивними змінними, їх виразами. Для цього виконаємо такі перетворення.

Скористаємось матричними співвідношеннями

$$\begin{bmatrix} T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ k \end{bmatrix}. \quad (1.63)$$

Тут всі позначення використані в (1.63) є блочними матрицями. З (1.63) знаходимо

$$\varepsilon = C^{-1}T - C^{-1}Bk, \quad M = B^T C^{-1}T + (D - B^T C^{-1}B)k. \quad (1.64)$$

В (1.64) матриці мають вид

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \\ T_{13} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & C_{16}^* & 0 \\ C_{21}^* & C_{22}^* & C_{26}^* & 0 \\ C_{16}^* & C_{26}^* & C_{66}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{55}^* \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12} & B_{16}^* & 0 \\ B_{12} & B_{22}^* & B_{26}^* & 0 \\ B_{16}^* & B_{26}^* & B_{66}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.65)$$

Виконаємо перетворення матриць, що представлені в (1.63). Повний матричний запис  $\varepsilon = C^{-1}T - C^{-1}Bk$  призводить до таких рівнянь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= A_{11}T_{11} + A_{12}T_{22} + A_{16}T_{12} - d_{11}k_{11} - d_{12}k_{22} - d_{16}k_{12}; \\ \varepsilon_{22} &= A_{12}T_{11} + A_{22}T_{22} + A_{26}T_{12} - d_{21}k_{11} - d_{22}k_{22} - d_{26}k_{12}; \\ \varepsilon_{12} &= A_{16}T_{11} + A_{26}T_{22} + A_{66}T_{12} - d_{61}k_{11} - d_{62}k_{22} - d_{66}k_{12}; \\ \varepsilon_{13} &= A_{44}T_{13}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

В (1.66) введені позначення:  $A_{ij}$  – це компоненти матриці  $C^{-1}$ ;  $d_{ij}$ , – компоненти матриці  $C^{-1}B$ .

Після перетворення матричного запису  $M = B^T C^{-1}T + (D - B^T C^{-1}B)k$  маємо такі вирази

$$\begin{aligned} M_{11} &= d_{11}T_{11} + d_{12}T_{22} + d_{16}T_{12} - \\ &- (D_{11} - D_{11}^0)k_{11} + (D_{12} - D_{12}^0)k_{22} + (D_{16} - D_{16}^0)k_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{22} &= d_{12}T_{11} + d_{22}T_{22} + d_{26}T_{12} - \\
 &- (D_{12} - D_{12}^0)k_{11} + (D_{22} - D_{22}^0)k_{22} + (D_{26} - D_{26}^0)k_{12}, \\
 M_{12} &= d_{16}T_{11} + d_{26}T_{22} + d_{66}T_{12} - \\
 &- (D_{16} - D_{16}^0)k_{11} + (D_{26} - D_{26}^0)k_{22} + (D_{66} - D_{66}^0)k_{12}. \quad (1.67)
 \end{aligned}$$

Тут,  $D_{ij}^0$  – компоненти матриці  $d_{ij}B$ .

Вирази (1.66) також містять в  $k_{11}$  і  $k_{12}$  перші похідні по  $\alpha_1$ . Для того щоб звільнитися від них в (1.66) і (1.67) виконаємо такі перетворення.

Використаємо геометричні рівняння та рівняння стану

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= d_{11}T_{11} + d_{12}T_{22} + d_{16}T_{12} + \\
 &+ (D_{11} - D_{11}^0)k_{11} + (D_{12} - D_{12}^0)k_{22} + (D_{16} - D_{16}^0)k_{12}; \\
 \varepsilon_{22} &= A_{12}T_{11} + A_{22}T_{12} + A_{26}T_{12} - d_{21}k_{11} - d_{22}k_{22} - d_{26}k_{12}; \\
 \varepsilon_{13} &= T_{13} \frac{1}{2C_{55}^*} - \frac{C_{45}^*}{2C_{55}^*} \varepsilon_{23}; \quad (1.68)
 \end{aligned}$$

$$k_{12} = b_{41}T_{11} + b_{42}T_{12} + b_{43}M_{11} + b_{44}M_{12} + b'_{41}\varepsilon_{22} - b''_{41}k_{22};$$

$$\varepsilon_{11} = b_{11}T_{11} + b_{12}T_{12} + b_{13}M_{11} + b_{14}M_{12} + b'_{11}\varepsilon_{22} - b''_{11}k_{22};$$

$$\varepsilon_{11} = A_{11}T_{11} + A_{12}T_{22} + A_{16}T_{12} - d_{11}k_{11} - d_{12}k_{22} - d_{16}k_{12};$$

$$\varepsilon_{12} = b_{21}T_{11} + b_{22}T_{12} + b_{13}M_{11} + b_{14}M_{12} + b'_{11}\varepsilon_{22} - b''_{11}k_{22};$$

$$\varepsilon_{12} = A_{16}T_{11} + A_{26}T_{22} + A_{66}T_{12} - d_{61}k_{11} - d_{62}k_{22} - d_{66}k_{12}.$$

Співставимо відповідні рівняння та виконаємо деякі

перетворення. Введемо позначення

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= b_{12} - A_{16} + d_{11}b_{32} + d_{16}b_{42}; \quad f_{12} = -A_{12}; \\
 f_{13} &= b_{14} + d_{11}b_{34} + d_{16}b_{44}; \\
 z_1 &= T_{11}(b_{11} - A_{11} + d_{11}b_{31} + d_{16}b_{41}) + M_{11}(b_{33} + d_{11}b_{34} + d_{16}b_{43}) + \\
 &+ \varepsilon_{22}(b'_{11} + d_{11}b'_{31} + d_{16}b'_{41}) + k_{22}(b''_{11} + d_{11}b''_{31} + d_{16}b''_{41}); \\
 f_{21} &= b_{22} - A_{66} + d_{61}b_{32} + d_{66}b_{42}; \quad f_{22} = -A_{26}; \\
 f_{23} &= b_{14} + d_{61}b_{34} + d_{66}b_{44}; \\
 z_2 &= T_{11}(b_{21} - A_{16} + d_{61}b_{31} + d_{66}b_{41}) + M_{11}(b_{13} + d_{61}b_{33} + d_{66}b_{43}) + \\
 &+ \varepsilon_{22}(b'_{11} + d_{61}b'_{31} + d_{66}b'_{41}) + k_{22}(b''_{11} + d_{61}b''_{31} + d_{66}b''_{41}); \\
 f_{31} &= d_{16} + (D_{11} - D_{11}^0)b_{32} + (D_{16} - D_{16}^0)b_{42}; \quad f_{32} = d_{12}; \\
 f_{33} &= (D_{11} - D_{11}^0)b_{34} + (D_{16} - D_{16}^0)b_{43}; \\
 z_3 &= -T_{11}[d_{11} + (D_{11} - D_{11}^0)b_{31} + (D_{16} - D_{16}^0)b_{41}] + \\
 &+ M_{11}[1 - (D_{11} - D_{11}^0)b_{33} - (D_{16} - D_{16}^0)b_{43}] - \\
 &- \varepsilon_{22}[(D_{11} - D_{11}^0)b'_{31} + (D_{16} - D_{16}^0)b'_{41}] + \\
 &+ k_{22}[(D_{11} - D_{11}^0)b''_{31} + (D_{16} - D_{16}^0)b''_{41}]. \tag{1.69}
 \end{aligned}$$

З урахуванням введених позначень матимемо таку систему з 3-х рівнянь

$$\begin{cases}
 f_{11}T_{12} + f_{12}T_{22} + f_{13}M_{12} = z_1; \\
 f_{21}T_{12} + f_{22}T_{22} + f_{23}M_{12} = z_2; \\
 f_{31}T_{12} + f_{32}T_{22} + f_{33}M_{12} = z_3.
 \end{cases} \tag{1.70}$$

Її розв'язок:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = \\ &= f_{33}(f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}) + f_{31}(f_{12}f_{23} - f_{13}f_{22}) + f_{32}(f_{21}f_{13} - f_{23}f_{11}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{T_{12}} &= \begin{vmatrix} z_1 & f_{12} & f_{13} \\ z_2 & f_{22} & f_{23} \\ z_3 & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = \\ &= z_1(f_{22}f_{33} - f_{32}f_{23}) + z_2(f_{32}f_{13} - f_{12}f_{23}) + z_3(f_{12}f_{23} - f_{22}f_{13}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{T_{22}} &= \begin{vmatrix} f_{11} & z_1 & f_{13} \\ f_{21} & z_2 & f_{23} \\ f_{31} & z_3 & f_{33} \end{vmatrix} = \\ &= z_1(f_{23}f_{31} - f_{21}f_{33}) + z_2(f_{11}f_{33} - f_{31}f_{13}) + z_3(f_{21}f_{13} - f_{23}f_{11}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{M_{12}} &= \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & z_1 \\ f_{21} & f_{22} & z_2 \\ f_{31} & f_{32} & z_3 \end{vmatrix} = \\ &= z_1(f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22}) + z_2(f_{12}f_{31} - f_{11}f_{32}) + z_3(f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{12} &= \frac{\Delta_{T_{12}}}{\Delta} = \\ &= \frac{1}{\Delta} [z_1(f_{22}f_{33} - f_{32}f_{23}) + z_2(f_{32}f_{13} - f_{12}f_{23}) + z_3(f_{12}f_{23} - f_{22}f_{13})]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{22} &= \frac{\Delta_{T_{22}}}{\Delta} = \\ &= \frac{1}{\Delta} [z_1(f_{23}f_{31} - f_{21}f_{33}) + z_2(f_{11}f_{33} - f_{31}f_{13}) + z_3(f_{21}f_{13} - f_{23}f_{11})]; \end{aligned}$$

$$M_{12} = \frac{\Delta_{M_{12}}}{\Delta} = \quad (1.71)$$

$$= \frac{1}{\Delta} [z_1(f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22}) + z_2(f_{12}f_{31} - f_{11}f_{32}) + z_3(f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12})]$$

Для встановлення залежності для  $T_{23}$  скористаємось системою

$$\begin{aligned} T_{13} &= C_{45}^* \varepsilon_{23} + 2C_{55}^* \varepsilon_{13}, \\ T_{23} &= 2C_{44}^* \varepsilon_{23} + C_{45}^* \varepsilon_{13}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

З першого рівняння маємо

$$\varepsilon_{13} = T_{13} \frac{1}{2C_{55}^*} - \frac{C_{45}^*}{2C_{55}^*} \varepsilon_{23}. \quad (1.73)$$

Підставимо його у друге рівняння (1.72). Тоді

$$T_{23} = \left( 2C_{44}^* - \frac{(C_{45}^*)^2}{2C_{55}^*} \right) \varepsilon_{23} + \frac{C_{45}^*}{2C_{55}^*} T_{13}. \quad (1.74)$$

#### 1.4. Висновки до розділу 1

Щоб побудувати всі необхідні співвідношення нелінійної теорії анізотропних оболонок при аналітичному підході достатньо мати одну скалярну функцію. Такою функцією є потенціальна енергія оболонок як тривимірного тіла. Якщо прийняти гіпотези про розподіл переміщень за товщиною оболонки, то цього достатньо,



щоб побудувати не тільки кінематичні співвідношення теорії оболонок, але і рівняння статички. При цьому буде повна відповідність між кінематичними та силовими функціями.

Показано, що при застосуванні методу перетворення Гамільтона до функції потенціальної енергії системи оболонка-навантаження, можливо побудувати частинні, відносно варіаційного принципу Рейсснера, варіаційні принципи. З умови їх стаціонарності здобуваються системи канонічних рівнянь, придатні для розв'язку певного класу задач теорії оболонок. Використання цих принципів узагальнює методи побудови розв'язувальних систем рівнянь і розширює можливості застосування відомих чисельних методів.

Отже, при використанні модифікованого змішаного варіаційного принципу, виведено нелінійну систему неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку кожне, що описує напружено-деформований стан анізотропних композитних оболонок обертання в рамках нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка.

## РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

### 2.1. Система рівнянь, що описує нелінійну осесиметричну деформацію анізотропних оболонок

При осесиметричних деформаціях система (1.62)

набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} &= b_{11} T_{11} + b_{12} T_{12} + b_{13} M_{11} + b_{14} M_{12} + b'_{11} \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \\ &- b'_{11} \frac{w}{R_2} - b''_{11} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 - \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{w}{R_2} + \frac{1}{2} \theta_2^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} &= b_{21} T_{11} + b_{22} T_{12} + b_{23} M_{11} + b_{24} M_{12} + b'_{21} \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \\ &- b'_{21} \frac{w}{R_2} - b''_{21} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 + \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2} \theta_2^2; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} = b_{55} T_{13} + b'_{55} T_{23} - \frac{u}{R_1} - \theta_1;$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} &= b_{31} T_{11} + b_{32} T_{12} + b_{33} M_{11} + b_{34} M_{12} + b'_{31} \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \\ &- b'_{31} \frac{w}{R_2} - b''_{31} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 + \frac{1}{2} \theta_2^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_1} &= b_{41} T_{11} + b_{42} T_{12} + b_{43} M_{11} + b_{44} M_{12} + b'_{41} \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \\
 &- b'_{41} \frac{w}{R_2} - b''_{41} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_2 + \frac{1}{2} \theta_2^2; \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{22} - \frac{1}{R_1} T_{13} - q_1; \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{12}^* - \frac{1}{R_2} T_{23}; \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{13}}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{R_1} T_{11} - \frac{1}{R_2} T_{22} - q_3; \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}^*}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} + T_{13} + T_{11} \theta_1; \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{12}^*}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{12}^* - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{11} - T_{23} + T_{22} \theta_2.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Система рівнянь (2.1) дозволяє враховувати зміну товщини оболонки вздовж широти. Зусилля  $T_{12}$ ,  $T_{22}$ ,  $T_{23}$  і момент  $M_{12}$ , що входять у рівняння (2.1) є пасивними змінними. Тому для їх заміни виконаємо такі перетворення.

Введемо позначення в зусилля  $T_{12}$ ,  $T_{22}$  і момент  $M_{12}$ , що входять в рівняння (2.1):

$$G_{11} = b_{11} - A_{11} + d_{11} b_{31} + d_{16} b_{41},$$

$$\begin{aligned}
 G_{12} &= b_{33} + d_{11}b_{34} + d_{16}b_{43}, \\
 G_{13} &= b'_{11} + d_{11}b'_{31} + d_{16}b'_{41}, \\
 G_{14} &= b'_{11} + d_{12} + d_{11}b''_{31} + d_{16}b''_{41}, \\
 G_{21} &= b_{21} - A_{16} + d_{61}b_{31} + d_{66}b_{41}, \\
 G_{22} &= b_{13} + d_{61}b_{33} + d_{66}b_{43}, \\
 G_{23} &= b'_{11} + d_{61}b'_{31} + d_{66}b'_{41}, \\
 G_{24} &= b''_{11} + d_{62} + d_{61}b''_{31} + d_{66}b''_{41}, \\
 G_{31} &= d_{11} + (D_{11} - D_{11}^0)b_{31} + (D_{16} - D_{16}^0)b_{41}, \\
 G_{32} &= 1 - (D_{11} - D_{11}^0)b_{33} - (D_{16} - D_{16}^0)b_{43}, \\
 G_{33} &= (D_{11} - D_{11}^0)b'_{31} + (D_{16} - D_{16}^0)b'_{41}, \\
 G_{34} &= (D_{11} - D_{11}^0)b''_{31} + (D_{16} - D_{16}^0)b''_{41}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

З урахуванням введених позначень зусилля  $T_{12}$ ,  $T_{22}$ ,  $T_{23}$

і момент  $M_{12}$  такі

$$\begin{aligned}
 T_{12} &= \frac{1}{\Delta} \left[ (f_{22}f_{33} - f_{32}f_{23}) \times \left( T_{11}G_{11} + M_{11}G_{12} + \frac{u}{A_1A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} G_{13} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - G_{13} \frac{w}{R_2} + \frac{1}{A_1A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 G_{14} + \frac{1}{2} G_{13} \theta_2^2 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (f_{32}f_{13} - f_{12}f_{23}) \times \left( T_{11}G_{21} + M_{11}G_{22} + \frac{u}{A_1A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} G_{23} - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -G_{23} \frac{w}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 G_{24} + \frac{1}{2} G_{23} \theta_2^2 \Big) + \\
 & + (f_{12} f_{23} - f_{22} f_{13}) \times \left( -T_{11} G_{31} + M_{11} G_{32} - \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} G_{33} + \right. \\
 & \left. + G_{33} \frac{w}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 G_{34} - \frac{1}{2} G_{33} \theta_2^2 \right) \Big]; \\
 \\
 T_{22} = & \frac{1}{\Delta} \left[ (f_{23} f_{31} - f_{21} f_{33}) \times \left( T_{11} G_{11} + M_{11} G_{12} + \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} G_{13} - \right. \right. \\
 & \left. - G_{13} \frac{w}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 G_{14} + \frac{1}{2} G_{13} \theta_2^2 \right) + \\
 & + (f_{11} f_{33} - f_{31} f_{13}) \times \left( T_{11} G_{21} + M_{11} G_{22} + \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} G_{23} - \right. \\
 & \left. - G_{23} \frac{w}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 G_{24} + \frac{1}{2} G_{23} \theta_2^2 + \right. \\
 & \left. + (f_{21} f_{13} - f_{23} f_{11}) \times \left( -T_{11} G_{31} + M_{11} G_{32} - \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} G_{33} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + G_{33} \frac{w}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 G_{34} - \frac{1}{2} G_{33} \theta_2^2 \right) \right] \Big]; \\
 \\
 M_{22} = & \frac{1}{\Delta} \left[ (f_{21} f_{32} - f_{31} f_{22}) \times (T_{11} G_{11} + M_{11} G_{12} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} G_{13} - G_{13} \frac{w}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 G_{14} + \frac{1}{2} G_{13} \theta_2^2 \Big) + \\
 & + (f_{12} f_{31} - f_{11} f_{32}) \times \left( T_{11} G_{21} + M_{11} G_{22} + \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} G_{23} - \right. \\
 & - G_{23} \frac{w}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 G_{24} + \frac{1}{2} G_{23} \theta_2^2 \Big) + \quad (2.3) \\
 & + (f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}) \times \left( -T_{11} G_{31} + M_{11} G_{32} - \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} G_{33} + \right. \\
 & \left. + G_{33} \frac{w}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 G_{34} - \frac{1}{2} G_{33} \theta_2^2 \right) \Big];
 \end{aligned}$$

$$T_{23} = \left( 2C_{44}^* - \frac{(C_{45}^*)^2}{2C_{55}^*} \right) \theta_2 + \left( 2C_{44}^* - \frac{(C_{45}^*)^2}{2C_{55}^*} \right) \frac{v}{R_2} + \frac{C_{45}^*}{2C_{55}^*} T_{13}.$$

Вирази для  $f_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1,3}$  представлені у (1.69).

Для оболонок обертання параметри геометрії  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  не залежать від координати  $\alpha_2$ . Не залежить від  $\alpha_2$  також переміщення, якщо навантаження на оболонку є осесиметричним. В рівняннях (2.1) присутній тільки нормальний тиск інтенсивністю  $q$ , який рівномірно розподілений за коловою координатою  $\alpha_2$ . Але на відміну

від ізотропних чи ортотропних оболонок для розглянутих анізотропних оболонок система (2.1) не розпадається на дві незалежні, одна з яких описує осесиметричний згин оболонки, а інша осесиметричне кручення. Завдяки співвідношенням пружності вигляду (1.32) в рівняннях (2.1) деформації розтягу та зсуву взаємопов'язані. Це вносить певні труднощі в розв'язок задачі. Є лише незначна кількість робіт, присвячених розв'язку подібних задач [20, 132, 133], а ефекти в деформуванні оболонок, пов'язані з наявністю подібних взаємовпливів, залишаються малодослідженими.

## **2.2. Застосування методу Ньютона-Канторовича для побудови чисельного алгоритму розв'язку нелінійної задачі про осесиметричне деформування анізотропних оболонок обертання**

Для реалізації ідеї розв'язання нелінійної диференціальної системи рівнянь (2.1), потрібно спочатку провести її лінеаризацію згідно з методом Ньютона-Канторовича. Цей метод застосовується для розв'язку нелінійних рівнянь, що виникають в задачах різноманітного походження. Основна проблема на шляху отримання розв'язку цим методом полягає в визначенні початкового наближення. В задачах механіки ця проблема

розв'язується легко завдяки тому, що навантаження можна задавати малими приростами (кроками). При порівняно мало інтенсивних навантаженнях реакція конструкції описується лінійними рівняннями. Розв'язок цих рівнянь використовується як початкове наближення при застосуванні методу Ньютона-Канторовича до розв'язку нелінійних рівнянь при збільшенні інтенсивності навантаження.

Запишемо систему (2.1) у вигляді

$$\frac{dy_i}{d\alpha_1} = f_i(y_1, \dots, y_{10}), \quad i = 1, 2, \dots, 10. \quad (2.4)$$

Функції  $y_i$  задовольняють граничним умовам

$$A_1 y = b_1, \quad A_2 y = b_2, \quad (2.5)$$

при  $\alpha_1 = \alpha_{1,0}$  і  $\alpha_1 = \alpha_{1,k}$ . Ця ж система у векторному вигляді запишеться як

$$\frac{dY}{d\alpha_1} = f(y). \quad (2.6)$$

Крайові умови мають представлення (2.5). Згідно з методом Ньютона-Канторовича систему рівнянь (2.4) лінеаризуємо в околі наближеного розв'язку  $y^0$ , виконавши заміну

$$f(y) = f(y^0) + J(y_0)(y - y_0), \quad (2.7)$$



де  $J(y_0)$  – матриця Якобі. Сама по собі заміна ще не дає можливість знайти уточнений розв’язок  $y$ . Однак створений на її основі алгоритм знаходження розв’язків систем такого вигляду

$$\frac{dy^{n+1}}{d\alpha_1} = f(y^n) + J(y^n)(y^{n+1} - y^n), \quad n = 0, 1, 2 \quad (2.8)$$

з граничними умовами при  $\alpha_1 = \alpha_{1,0}$  і  $\alpha_1 = \alpha_{1,k}$

$$A_1 y^{n+1} = b_1, \quad A_2 y^{n+1} = b_2, \quad (2.9)$$

дозволяє знаходити точний розв’язок  $y^n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Кількість ітерацій на практиці є обмеженою, тому розв’язок знаходиться з певною точністю. Запис крайової задачі (2.4), (2.5) у вигляді (2.8), (2.9) називається квазілінеаризацією. Застосуємо процедуру квазілінеаризації до задачі (2.8), (2.9). Наведемо форму запису деяких функцій у вигляді ітераційних співвідношень. При їх виводі використовуємо правило скалярного множення векторів, заданих компонентами:

$$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3. \quad (2.10)$$

Для  $\varepsilon_{11}$  отримуємо

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{n+1} &= \varepsilon_1^n + \frac{1}{2}\theta_1^{n^2} - (1, \theta_1^n) \begin{pmatrix} \varepsilon_1^n \\ \theta_1^n \end{pmatrix} + (1, \theta_1^n) \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{n+1} \\ \theta_1^{n+1} \end{pmatrix} = \\ &= \varepsilon_1^{n+1} + \theta_1^n \theta_1^{n+1} - \frac{1}{2}(\theta_1^n)^2.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Для  $\varepsilon_{12}$  з тією ж точністю маємо

$$\varepsilon_{12}^{n+1} = \theta_1^{n+1}\theta_2^n + \theta_1^n\theta_1^{n+1} - \theta_1^n\theta_2^n.\quad (2.13)$$

Ітераційні вирази інших нелінійних функцій утворюються аналогічно. Спільним для них те, що при  $n \rightarrow \infty$ , коли  $(y^{n+1} - y^n) \rightarrow 0$ , вони набувають свого початкового вигляду.

Система розв'язувальних рівнянь (2.4) після квазілінеаризації заміниться послідовністю рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_1} \frac{dy_1^{n+1}}{d\alpha_1} &= T_{22}^{n+1} \psi_2 + \frac{1}{R_1} y_3^{n+1}; \\ \frac{1}{A_1} \frac{dy_2^{n+1}}{d\alpha_1} &= -(y_2^{n+1} + T_{12}^{n+1})\psi_2 + \left(\frac{2}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\psi_2 M_{12}^{n+1} + \\ &+ \frac{1}{R_2} (T_{12}^{n+1} \theta_1^n + T_{12}^n \theta_1^{n+1} + T_{22}^{n+1} \theta_2^n + T_{22}^n \theta_2^{n+1}) - \frac{1}{R_2} (T_{12}^n \theta_1^n + T_{22}^n \theta_2^n); \\ \frac{1}{A_1} \frac{dy_3^{n+1}}{d\alpha_1} &= -\psi_2 y_3^{n+1} - \frac{1}{R_1} y_1^{n+1} - \frac{1}{R_2} T_{22}^{n+1} - q; \\ \frac{1}{A_1} \frac{dy_4^{n+1}}{d\alpha_1} &= -\psi_2 (y_4^{n+1} - M_{22}^{n+1}) + y_3^{n+1} - T_{11}^{n+1} \theta_1^n - T_{11}^n \theta_1^{n+1} -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -T_{12}^{n+1} \theta_2^n - T_{12}^n \theta_2^{n+1} + T_{11}^n \theta_1^n + T_{12}^n \theta_2^n; \\
 & \frac{1}{A_1} \frac{dy_5^{n+1}}{d\alpha_1} = \frac{1}{R_1} y_7^{n+1} - \theta_1^{n+1} \theta_1^n + A_{11} T_{11}^{n+1} + A_{12} T_{12}^{n+1} + A_{13} y_4^{n+1} - \\
 & -d_{11} \varepsilon_{22}^{n+1} - d_{12} \kappa_{22}^{n+1} - d_{13} \kappa_{12}^{n+1} + \frac{1}{2} (\theta_1^n)^2; \\
 & \frac{1}{A_1} \frac{dy_6^{n+1}}{d\alpha_1} = \psi_2 y_6^{n+1} - \theta_1^{n+1} \theta_2^n - \theta_1^n \theta_2^{n+1} + A_{21} T_{11}^{n+1} + A_{22} T_{12}^{n+1} + \\
 & + A_{23} y_4^{n+1} - d_{21} \varepsilon_{22}^{n+1} - d_{22} \kappa_{22}^{n+1} - d_{23} \kappa_{12}^{n+1} + \theta_1^n \theta_2^n; \\
 & \frac{1}{A_1} \frac{dy_7^{n+1}}{d\alpha_1} = -\frac{1}{R_1} y_5^{n+1} - y_8^{n+1}; \tag{2.14} \\
 & \frac{1}{A_1} \frac{dy_8^{n+1}}{d\alpha_1} = -\frac{1}{R_1} \varepsilon_1^{n+1} + A_{33} T_{11}^{n+1} + A_{23} T_{12}^{n+1} + A_{33} y_4^{n+1} - \\
 & -d_{31} \varepsilon_{22}^{n+1} - d_{32} \kappa_{22}^{n+1} - d_{33} \kappa_{12}^{n+1}; \\
 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_9^{n+1}}{\partial \alpha_1} = b_{41} T_{11}^{n+1} + b_{42} T_{12}^{n+1} + b_{43} M_{11}^{n+1} + b_{44} M_{12}^{n+1} + \\
 & + b'_{41} \frac{u^{n+1}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - b'_{41} \frac{w^{n+1}}{R_2} - b''_{41} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1^{n+1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_2^{n+1} + \left(\frac{1}{2} \theta_2^n\right)^2; \\
 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_{10}^{n+1}}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{R_1} T_{11}^{n+1} - \frac{1}{R_2} T_{22}^{n+1},
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 y_1^{n+1} &= T_{11}, y_2^{n+1} = T_{12}^{n+1} - \frac{1}{R_2} M_{12}^{n+1}, y_3^{n+1} = T_{13}^{n+1} + T_{11}^{n+1} \theta_1^n + \\
 &+ T_{11}^n \theta_1^{n+1} + T_{12}^{n+1} \theta_2^n + T_{12}^n \theta_2^{n+1} - T_{11}^n \theta_1^n - T_{12}^n \theta_2^n, \\
 y_4^{n+1} &= M_{11}^{n+1}, y_5^{n+1} = u^{n+1}, y_6^{n+1} = v^{n+1}, y_7^{n+1} = w^{n+1}, \\
 y_8^{n+1} &= \theta_1^{n+1}, y_9^{n+1} = \theta_2^{n+1}, y_{10}^{n+1} = T_{13}^{n+1}, \quad (2.15) \\
 \varepsilon_{22}^{n+1} &= \varepsilon_2^{n+1} + \theta_2^{n+1} \theta_2^n - \frac{1}{2} (\omega_2^n)^2 - \frac{1}{2} (\theta_2^n)^2, \\
 \kappa_{22}^{n+1} &= -\frac{1}{R_2^2} y_7^{n+1} + \psi_2 (y_8^{n+1} + \frac{1}{R_2} y_5^{n+1}).
 \end{aligned}$$

Зусилля  $T_{22}^{n+1}$  і моменти  $M_{22}^{n+1}$ ,  $M_{12}^{n+1}$  виражаються через активні змінні співвідношеннями (1.63) з відповідними індексами функцій.

Система (2.15) лінеаризована, тому як самі функції  $y_i^{n+1}$ , так і вирази від них входять в праві частини лінійно. Це дозволяє привести систему (2.15) до стандартного нормального вигляду.

Введемо позначення

$$\begin{aligned}
 f'_{11} &= d_{11} \varepsilon_{22}^{n+1} + d_{12} \kappa_{22}^{n+1}, \\
 f'_{21} &= (C_{22} - C_{22}^0) \varepsilon_{22}^{n+1} + (K_{22} - K_{22}^0) \kappa_{22}^{n+1}, \\
 f'_{12} &= d_{21} \varepsilon_{22}^{n+1} + d_{22} \kappa_{22}^{n+1}, \\
 f'_{22} &= (K_{22} - K_{22}^0) \varepsilon_{22}^{n+1} + (D_{22} - D_{22}^0) \kappa_{22}^{n+1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'_{13} &= d_{31}\varepsilon_{22}^{n+1} + d_{32}\kappa_{22}^{n+1}, \\
 f'_{23} &= (K_{26} - K_{26}^0)\varepsilon_{22}^{n+1} + (D_{26} - D_{26}^0)\kappa_{22}^{n+1}, \\
 z_{11} &= 1 - \frac{1}{R_2}d_{23}, \quad z_{12} = T_{11}^n - \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)(D_{66} - D_{66}^0), \\
 z_{21} &= A_{22}, \quad z_{22} = 1 + \varepsilon_1^n + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)d_{23}, \\
 z_{31} &= A_{12}, \quad z_{32} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)d_{13}, \tag{2.16} \\
 x_1 &= y_2^{n+1} + y_1^{n+1}\left(\frac{1}{R_2}d_{13} - \omega_1^n\right) + \\
 &+ \frac{1}{R_2}d_{33}y_4^{n+1} \frac{1}{R_2}(K_{26} - K_{26}^0)\varepsilon_{22}^{n+1} + \frac{1}{R_2}(D_{26} - D_{26}^0)\kappa_{22}^{n+1}, \\
 x_2 &= -\theta_1^{n+1}\theta_2^n - \theta_1^n\theta_2^{n+1} + A_{12}(y_1^{n+1}) + A_{23}y_4^{n+1} - (f'_{13})^{n+1} + \theta_1^n, \\
 x_3 &= A_{11}y_4^{n+1} + A_{13}y_4^{n+1} + y_8^n y_8^{n+1} - (f'_{11})^{n+1} + \frac{1}{2}(\theta_1^n)^2.
 \end{aligned}$$

Відносно функцій  $\varepsilon_1^{n+1}$ ,  $S^{n+1}$  з допомогою введених позначень запишемо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
 z_{11}T_{12}^{n+1} &= x_1, \\
 -z_{21}T_{12}^{n+1} &= x_2, \\
 \varepsilon_1^{n+1} - z_{31}T_{12}^{n+1} &= x_3. \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

Її розв'язок має вигляд

$$\varepsilon_1^{n+1} = \frac{\Delta_4}{z_{11}}, \quad S^{n+1} = \frac{x_1}{z_{11}}, \quad (2.18)$$

де

$$\Delta_4 = x_3 z_{11} + x_1 z_{31}. \quad (2.19)$$

Враховуючи те, що  $T_{11}^{n+1} = y_1^{n+1}$  і формули (2.18), систему рівнянь (2.15) можемо представити в стандартному нормальному вигляді

$$\frac{1}{A_1} \frac{dy_i^{n+1}}{d\alpha_1} = f_i(y_1, \dots, y_{10}). \quad (2.20)$$

Крайові умови зберігають форму запису (2.9).

Сукупність систем (2.20) розв'язується послідовно при  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Відбувається зближення  $n$ -го і  $(n+1)$ -го розв'язків. Якщо різниця між цими розв'язками стає меншою заданої точності, то процес послідовних наближень припиняється. Але в задачі про нелінійне деформування оболонок обертання при деякому значенні навантаження збіжність ітераційного процесу порушується. Це пов'язано з тим, що визначник системи граничних умов (2.9) наближається до нуля. Навантаження, при якому ітераційний процес порушується, буде критичним. Відбувається інтенсивний ріст прогинів, оболонка втрачає стійкість.

### 2.3. Дослідження напружено-деформованого стану анізотропних оболонок обертання

За допомогою розробленої методики визначимо параметри напружено-деформованого стану анізотропних циліндричних (рис. 2.1) і конічних оболонок (рис. 2.2), що входять до класу оболонок нульової гауссової кривини, під дією осьового тиску та зовнішнього рівномірного тиску.

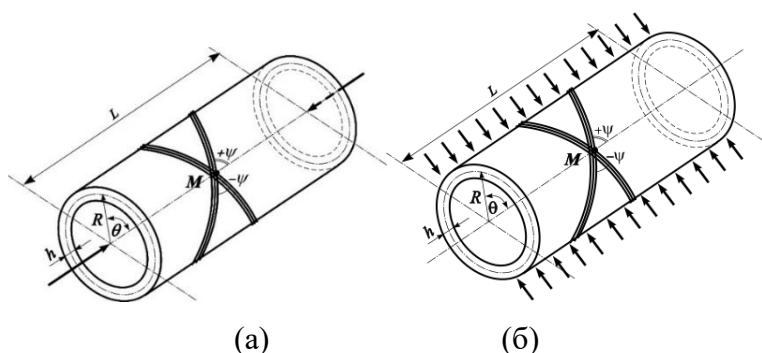


Рис. 2.1. Циліндрична оболонка під дією осьового тиску (а) та зовнішнього рівномірного тиску (б)

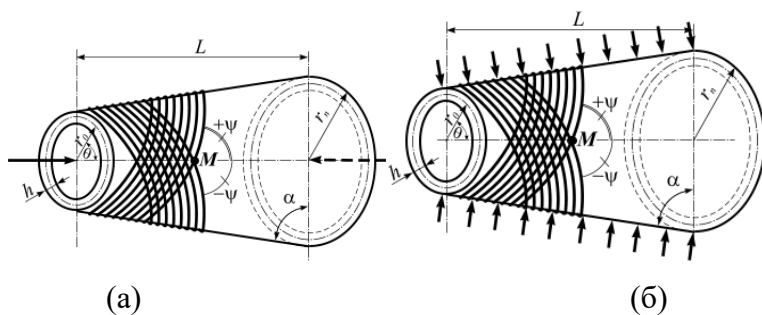


Рис. 2.2. Конічна оболонка під дією осьового тиску (а) та зовнішнього рівномірного тиску (б)

При проведенні розрахунків розглядатимуться оболонки, що виготовлені із боропластика. У власних осях цей матеріал ортотропний. Механічні характеристики композиту такі:  $E_{11} = 0,212 \cdot 10^6 \text{ МПа}$ ,  $E_{12} = 0,112 \cdot 10^6 \text{ МПа}$ ,  $G_{12} = G_{13} = 5,9 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $G_{23} = 4,32 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $\nu_{12} = 0,214$ .

Відносно координатних осей на серединній поверхні оболонки осі ортотропії можуть бути повернуті на довільний кут  $\psi$ . При  $\psi \neq 0^\circ, 90^\circ$  він втрачає властивості ортотропії та веде себе при деформуванні як матеріал з однією площиною пружної симетрії. Визначення параметрів нелінійного напружено-деформованого стану проводимуться для оболонок із двома типами структурних пакетів: одношарових ( $+\psi$ ) (рис. 2.3) та тришарових із косоперехресним армуванням ( $+\psi/-\psi/+ \psi$ ) (рис. 2.4). Для другого варіанту армування прийнято, що модуль пружності середнього шару на порядок менший, ніж крайніх ( $E_c^* = 0,1E_c$ ).



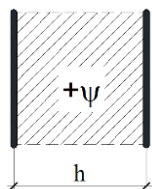


Рис. 2.3. Одношаровий структурний пакет

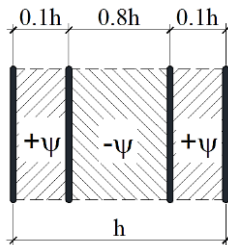


Рис. 2.4. Тришаровий структурний пакет

Для зменшення кількості громіздких перетворень при опису результатів, введемо скорочені позначення різних варіантів теорій:

- основний підхід, представлений рівняннями (2.1), в якому реалізована геометрична нелінійна теорія розрахунку нетонких анізотропних оболонок обертання, в скороченому запису будемо називати «ТНАО»;
- другий підхід, який також використовує розроблену методику, але відрізняється від першого тим, що  $B_{i6} = 0$  і  $D_{i6} = 0$  (ортотропний матеріал) — «ТНОО».

### 2.3.1. Напружено-деформований стан циліндричних оболонок

Послідовно збільшуючи товщину пакету  $h$  по

відношенню до радіуса  $R$  оболонки  $h/R$ , проаналізований вплив кута укладання волокнистого композиту  $\psi$  на напружено-деформований стан оболонок. В розрахунках прийнято, що відношення довжини  $L$  до радіуса  $R$  циліндричної оболонки (рис. 2.1) рівне одиниці.

Закріплення торців оболонки прийняте таке: один з них шарнірно нерухомий, а інший – шарнірно рухомий

при $\alpha_1 = \alpha_0$ :	$u = v = w = M_{11} = M_{12} = 0$
при $\alpha_1 = \alpha_L$ :	осьовий тиск: $v = w = M_{11} = M_{12} = 0, T_{11} = -T_{11}^0$ зовнішній тиск: $v = w = M_{11} = M_{12} = T_{11} = 0$

### 2.3.1.1. Циліндричні оболонки під дією зовнішнього рівномірного тиску

В табл. 2.1–2.4 приведені величини параметрів напружено-деформованого стану: зусиль (меридіональних –  $T_{11}$ , колових –  $T_{22}$ , зсувних –  $T_{12}$ , поперечних –  $T_{13}$ ); моментів (меридіональних –  $M_{11}$ , крутних –  $M_{12}$ ) в залежності від зміни кута укладання волокнистого композиту  $\psi$  в одношаровій та тришаровій циліндричних анізотропних оболонках. Їх величини здобуті за використанням двох підходів. В першому з них реалізована основна

геометрично нелінійна теорія, яка спирається на геометричні співвідношення (1.9) при  $B_{i6}$  і  $D_{i6}$  не рівних нулеві (ТНАО). Другий підхід використовує основну методику (ТНАО), але відрізняється від першого тим, що  $B_{i6} = 0$  і  $D_{i6} = 0$ , тобто матеріал оболонки є ортотропним (ТНОО). Результати наведені для оболонки із товщиною пакету по відношенню до радіуса:  $h/R = 0,01$  і  $h/R = 0,1$ .

Структура табл. 2.1–2.4 та інших сформовані наступним чином. В першій колонці дано посилання на підходи (ТНАО), (ТНОО) за якими були встановлені параметри напружено-деформованого стану. Друга колонка – це значення кута  $\psi$ . Всі інші колонки таблиці являють собою величини відповідно зусиль  $T_{11}$ ,  $T_{22}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{13}$  і моментів  $M_{11}$ ,  $M_{12}$  отримані за координатою твірної циліндра, що представлена відношенням  $x/L=0,5$ . В колонці поряд з меридіональним зусиллям  $T_{11}$  приведені значення  $n$ , що характеризує параметр, так званого, колового хвилеутворення.

*РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕТОНКІХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ*

Таблиця 2.1

Одношарова циліндрична оболонка під дією зовнішнього тиску  
із  $h/R=0,01$

Варіант теорії	$\psi$ , град	Параметри напружено-деформованого стану						
		$T_{11}$ , [n] (кН/м)		$T_{12}$ , (кН/м)	$T_{22}$ , (кН/м)	$M_{11}$ , (кНм/м)	$M_{12}$ , (кНм/м)	$T_{13}$ , (кН/м)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ТНАО	0	0.0	[10]	0.00E+00	-1.45	-3.19E-03	0.00E+00	6.53E-02
ТНОО	0	0.0	[10]	0.00E+00	-1.45	-3.19E-03	0.00E+00	6.53E-02
ТНАО	10	0.0	[10]	4.17E-02	-1.47	-2.94E-03	1.63E-04	6.56E-02
ТНОО	10	0.0	[10]	0.00E+00	-1.49	-2.95E-03	0.00E+00	6.63E-02
ТНАО	20	0.0	[9]	8.93E-02	-1.52	-2.23E-03	2.26E-04	6.60E-02
ТНОО	20	0.0	[10]	0.00E+00	-1.54	-2.20E-03	0.00E+00	6.69E-02
ТНАО	30	0.0	[9]	1.43E-01	-1.60	-1.30E-03	1.63E-04	6.61E-02
ТНОО	30	0.0	[9]	0.00E+00	-1.61	-1.22E-03	0.00E+00	6.74E-02
ТНАО	40	0.0	[9]	1.96E-01	-1.69	-4.68E-04	4.57E-05	6.56E-02
ТНОО	40	0.0	[9]	0.00E+00	-1.72	-3.68E-04	0.00E+00	6.81E-02
ТНАО	50	0.0	[9]	2.32E-01	-1.79	4.12E-05	-2.98E-05	6.50E-02
ТНОО	50	0.0	[9]	0.00E+00	-1.82	1.11E-04	0.00E+00	6.81E-02
ТНАО	60	0.0	[9]	2.34E-01	-1.91	2.31E-04	-3.96E-05	6.53E-02
ТНОО	60	0.0	[9]	0.00E+00	-1.91	2.50E-04	0.00E+00	6.74E-02
ТНАО	70	0.0	[9]	1.88E-01	-1.98	2.42E-04	-2.05E-05	6.54E-02
ТНОО	70	0.0	[9]	0.00E+00	-1.98	2.36E-04	0.00E+00	6.69E-02
ТНАО	80	0.0	[8]	1.02E-01	-1.99	2.03E-04	-5.76E-06	6.48E-02
ТНОО	80	0.0	[8]	0.00E+00	-1.99	1.99E-04	0.00E+00	6.53E-02
ТНАО	90	0.0	[8]	3.74E-17	-2.02	1.88E-04	-1.48E-21	6.55E-02
ТНОО	90	0.0	[8]	3.74E-17	-2.02	1.88E-04	-1.48E-21	6.55E-02

Таблиця 2.2

Одношарова циліндрична оболонка під дією зовнішнього тиску  
із  $h/R=0,1$

Варіант теорії	$\psi$ , град	Параметри напружено-деформованого стану						
		$T_{11}$ , [n] (кН/м)	$T_{12}$ , (кН/м)	$T_{22}$ , (кН/м)	$M_{11}$ , (кНм/м)	$M_{12}$ , (кНм/м)	$T_{13}$ , (кН/м)	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ТНАО	0	0.0	[5]	0.00	-666.30	83.18	0.000	-0.348
ТНОО	0	0.0	[5]	0.00	-666.30	83.18	0.000	-0.348
ТНАО	10	0.0	[5]	13.29	-672.00	80.72	-4.725	-0.400
ТНОО	10	0.0	[5]	0.00	-672.20	80.67	0.000	-0.368
ТНАО	20	0.0	[5]	28.28	-681.80	72.96	-8.034	-0.559
ТНОО	20	0.0	[5]	0.00	-690.60	73.62	0.000	-0.427
ТНАО	30	0.0	[5]	45.06	-695.40	61.53	-9.058	-0.813
ТНОО	30	0.0	[5]	0.00	-714.00	62.55	0.000	-0.510
ТНАО	40	0.0	[5]	61.60	-719.10	49.22	-7.996	-1.120
ТНОО	40	0.0	[5]	0.00	-740.00	49.67	0.000	-0.595
ТНАО	50	0.0	[5]	71.83	-739.50	37.35	-5.660	-1.315
ТНОО	50	0.0	[5]	0.00	-752.90	36.90	0.000	-0.653
ТНАО	60	0.0	[5]	70.73	-758.50	27.88	-3.288	-1.291
ТНОО	60	0.0	[4]	0.00	-762.00	27.04	0.000	-0.681
ТНАО	70	0.0	[4]	55.18	-758.10	20.93	-1.546	-1.031
ТНОО	70	0.0	[4]	0.00	-760.20	20.42	0.000	-0.680
ТНАО	80	0.0	[4]	29.39	-741.80	16.70	-0.554	-0.752
ТНОО	80	0.0	[4]	0.00	-742.40	16.55	0.000	-0.657
ТНАО	90	0.0	[4]	0.00	-740.00	15.46	0.000	-0.651
ТНОО	90	0.0	[4]	0.00	-740.00	15.46	0.000	-0.651

*РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН НЕТОНКІХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ*

Таблиця 2.3

Тришарова циліндрична оболонка під дією зовнішнього тиску  
із  $h/R=0,01$

Варіант теорії	$\psi$ , град	Параметри напружено-деформованого стану						
		$T_{11}$ , [n] (кН/м)		$T_{12}$ , (кН/м)	$T_{22}$ , (кН/м)	$M_{11}$ , (кНм/м)	$M_{12}$ , (кНм/м)	$T_{13}$ , (кН/м)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ТНАО	0	0.0	[9]	0.00E+00	-0.686	-6.92E-03	0.00E+00	3.62E-02
ТНОО	0	0.0	[9]	0.00E+00	-0.686	-6.92E-03	0.00E+00	3.62E-02
ТНАО	10	0.0	[9]	8.21E-03	-0.689	-6.60E-03	3.05E-04	3.60E-02
ТНОО	10	0.0	[9]	0.00E+00	-0.689	-6.60E-03	0.00E+00	3.61E-02
ТНАО	20	0.0	[9]	1.78E-02	-0.724	-5.88E-03	5.09E-04	3.70E-02
ТНОО	20	0.0	[9]	0.00E+00	-0.724	-5.87E-03	0.00E+00	3.70E-02
ТНАО	30	0.0	[9]	2.82E-02	-0.746	-4.49E-03	5.14E-04	3.66E-02
ТНОО	30	0.0	[9]	0.00E+00	-0.770	-4.62E-03	0.00E+00	3.79E-02
ТНАО	40	0.0	[9]	3.96E-02	-0.806	-3.06E-03	3.80E-04	3.76E-02
ТНОО	40	0.0	[9]	0.00E+00	-0.806	-3.03E-03	0.00E+00	3.77E-02
ТНАО	50	0.0	[8]	4.53E-02	-0.827	-1.64E-03	1.86E-04	3.63E-02
ТНОО	50	0.0	[8]	0.00E+00	-0.853	-1.66E-03	0.00E+00	3.77E-02
ТНАО	60	0.0	[8]	4.56E-02	-0.879	-7.57E-04	6.44E-05	3.65E-02
ТНОО	60	0.0	[8]	0.00E+00	-0.879	-7.35E-04	0.00E+00	3.67E-02
ТНАО	70	0.0	[8]	3.61E-02	-0.897	-2.73E-04	1.36E-05	3.56E-02
ТНОО	70	0.0	[8]	0.00E+00	-0.897	-2.63E-04	0.00E+00	3.58E-02
ТНАО	80	0.0	[8]	2.03E-02	-0.930	-7.09E-05	1.20E-06	3.60E-02
ТНОО	80	0.0	[8]	0.00E+00	-0.930	-6.84E-05	0.00E+00	3.60E-02
ТНАО	90	0.0	[8]	0.00E+00	-0.942	-1.55E-05	0.00E+00	3.61E-02
ТНОО	90	0.0	[8]	0.00E+00	-0.942	-1.55E-05	0.00E+00	3.61E-02

Таблиця 2.4

Тришарова циліндрична оболонка під дією зовнішнього тиску  
із  $h/R=0,1$

Варіант теорії	$\psi$ , град	Параметри напружено-деформованого стану						
		$T_{11}$ , [n] (кН/м)		$T_{12}$ , (кН/м)	$T_{22}$ , (кН/м)	$M_{11}$ , (кНм/м)	$M_{12}$ , (кНм/м)	$T_{13}$ , (кН/м)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ТНАО	0	0.0	[5]	0.00	-427.80	109.40	0.000	80.09
ТНОО	0	0.0	[5]	0.00	-427.80	109.40	0.000	80.09
ТНАО	10	0.0	[5]	3.05	-418.70	103.30	-4.938	76.86
ТНОО	10	0.0	[5]	0.00	-425.90	105.10	0.000	78.18
ТНАО	20	0.0	[5]	6.35	-404.60	89.67	-8.093	70.14
ТНОО	20	0.0	[5]	0.00	-412.10	91.29	0.000	71.45
ТНАО	30	0.0	[5]	9.86	-390.10	72.49	-8.811	61.91
ТНОО	30	0.0	[5]	0.00	-398.10	73.90	0.000	63.21
ТНАО	40	0.0	[5]	12.94	-378.70	55.66	-7.561	54.03
ТНОО	40	0.0	[5]	0.00	-395.80	58.06	0.000	56.54
ТНАО	50	0.0	[4]	14.73	-374.80	42.04	-5.441	48.02
ТНОО	50	0.0	[4]	0.00	-393.50	43.99	0.000	50.51
ТНАО	60	0.0	[4]	13.90	-365.70	31.33	-3.265	42.74
ТНОО	60	0.0	[4]	0.00	-366.10	31.24	0.000	42.88
ТНАО	70	0.0	[4]	10.68	-357.80	24.45	-1.681	39.16
ТНОО	70	0.0	[4]	0.00	-358.10	24.39	0.000	39.25
ТНАО	80	0.0	[4]	5.72	-350.70	20.66	-0.677	36.96
ТНОО	80	0.0	[4]	0.00	-350.80	20.64	0.000	37.00
ТНАО	90	0.0	[4]	0.00	-355.70	19.91	0.000	37.04
ТНОО	90	0.0	[4]	0.00	-355.70	19.91	0.000	37.04

На рис. 2.5, 2.6 наведені графіки в осях: зусилля – кут  $\psi$ , що побудовані для значень координати твірної циліндра  $x/L=0,5$ . Криві, які представлені суцільними лініями на графіках, отримані за основним пропонованим підходом (ТНАО), а штриховими – за тією ж методикою, лише з ортотропною моделлю матеріалу (ТНОО).

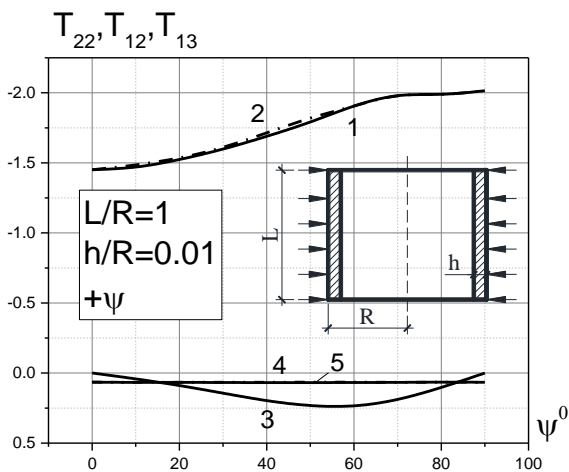
Криві за номерами 1 і 2 описують наявні в напруженому стані анізотропної оболонки колові зусилля  $T_{22}$ . Графік 3 – це зсувні зусилля  $T_{12}$ . Поперечні зусилля  $T_{13}$  описуються кривими 4 та 5.

З аналізу видно: від дії симетричного навантаження (зовнішнього тиску) – напружено-деформований стан одношарової анізотропної оболонки є несиметричним. Підтвердженням цього є наявність в напруженому стані анізотропної оболонки також зсувних зусиль  $T_{12}$ , моментів кручення  $M_{12}$ .

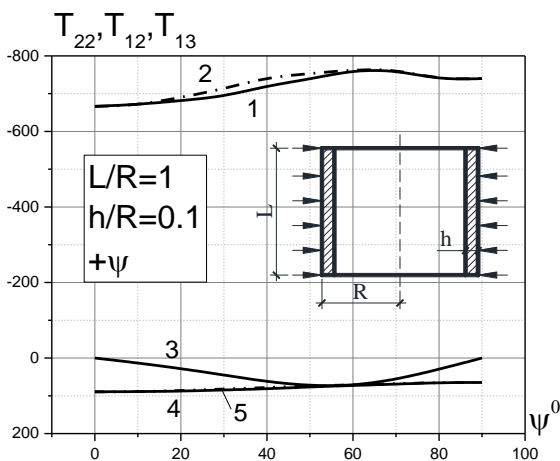
Як показують розрахунки, зсувні зусилля  $T_{12}$  для ортотропних оболонок приймають нульові значення. При цьому величини таких зусиль (крива 3) зростають зі зростанням кута  $\psi$  та набувають значень, що істотно відрізняються від нуля, особливо при  $50^\circ \leq \psi \leq 60^\circ$  при дії



на оболонку зовнішнього тиску. По іншому розподіляються в оболонці колові зусилля  $T_{22}$ . Зі зростанням кута  $\psi$  вони неспинно збільшуються, як для анізотропної (крива 1), так і для ортотропної оболонки (крива 2). Слід відмітити наявність в напруженому стані поперечних зусиль  $T_{13}$ , які мають тенденцію до збільшення при зростанні товщини оболонки. Це особливо помітно для тришарового варіанту структурного пакету із крайніми шарами більш високої жорсткості, ніж середній. Так, під дією зовнішнього тиску в тришарових циліндричних оболонках поперечні зусилля  $T_{13}$  зростають від 3,8% при відношенні  $h/R = 0,01$  до 18,7% при  $h/R = 0,1$ . Також, результати розрахунку напруженого стану, показують, що збільшення товщини оболонки наближає величини тангенціальних зусиль до таких, що отримані для ортотропного варіанту.

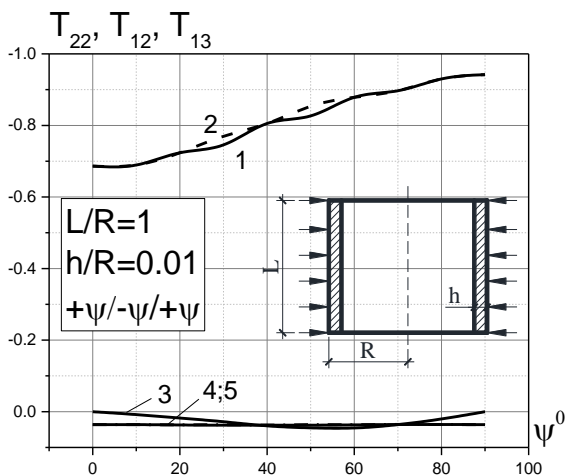


(а)

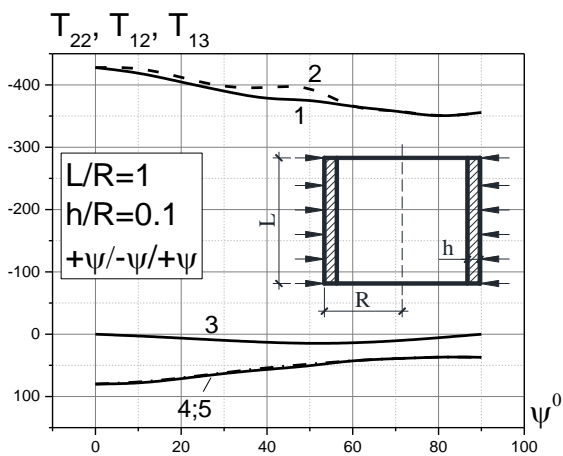


(б)

Рис. 2.5. Розподіл тангенціальних зусиль в одношаровій оболонці від дії зовнішнього тиску із  $h/R = 0,01$  (а);  $0,1$  (б) – відповідно



(a)



(б)

Рис. 2.6. Розподіл тангенціальних зусиль в тришаровій оболонці від дії зовнішнього тиску із  $h/R=0,01$  (а);  $0,1$  (б) – відповідно

Моментний напружений стан одношарової та тришарової циліндричних анізотропних оболонок, що знаходяться під дією зовнішнього рівномірного тиску показаний на рис. 2.7 та 2.8 відповідно. Графік 1 описує меридіональні моменти  $M_{11}$ , знайдені за основним підходом (ТНАО). Крива 2 не враховує в цій методиці коефіцієнти  $B_{i6}$  і  $D_{i6}$ , тобто матеріал оболонки є ортотропним (ТНОО). Графік 3 являє собою зміну величини крутних моментів  $M_{12}$ , які, як показує розрахунок, для ортотропних циліндричних оболонок приймають нульові значення. Меридіональні  $M_{11}$  та крутні  $M_{12}$  моменти визначені за координатою  $x/L = 0,5$  твірної циліндра для оболонок товщинами  $h/R = 0,01$  (а);  $h/R = 0,1$  (б) – відповідно.

Як показують розрахунки, величина згинових і крутних складових в тришаровій оболонці є більшою, ніж в одношаровій, хоча характер графіків в залежності від кута намотки  $\psi$  подібний для обох типів структурних пакетів. Під дією зовнішнього тиску меридіональні моменти  $M_{11}$  досягають максимального значення при куті  $\psi = 0^\circ$  і з збільшенням кута намотки спадають. Крутні

моменти  $M_{12}$ , в залежності від  $\psi$  набувають значень, що істотно відрізняються від нуля, особливо при  $\psi \approx 30^\circ$ .

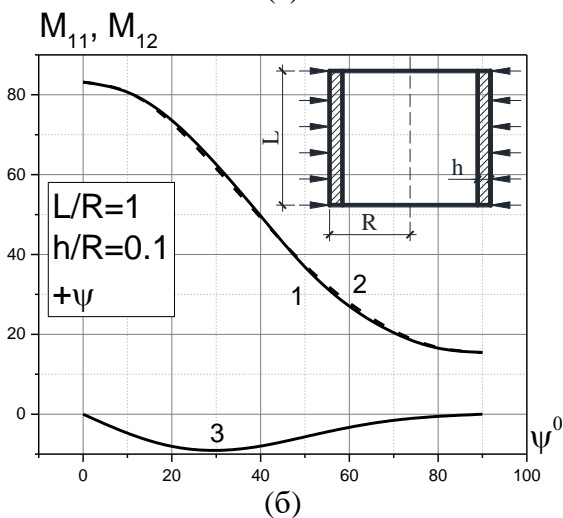
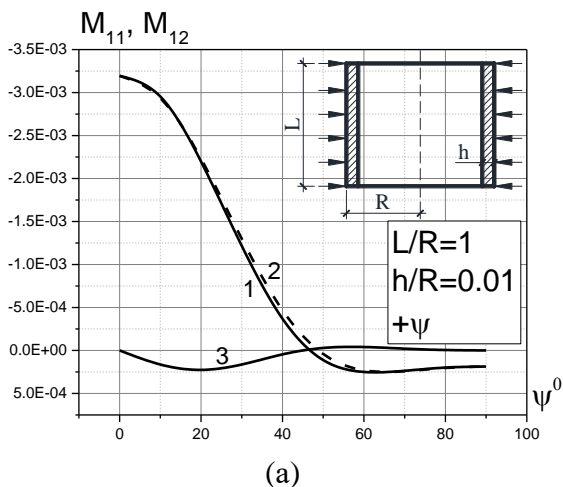
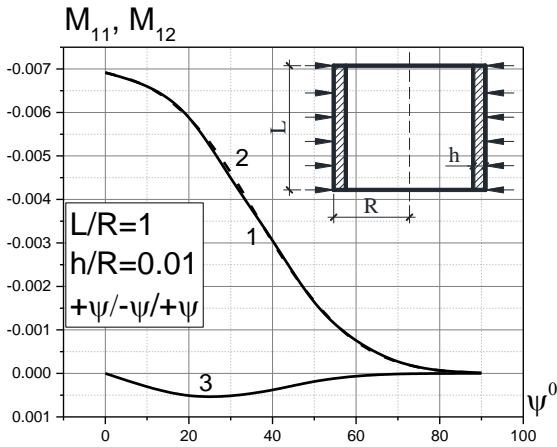
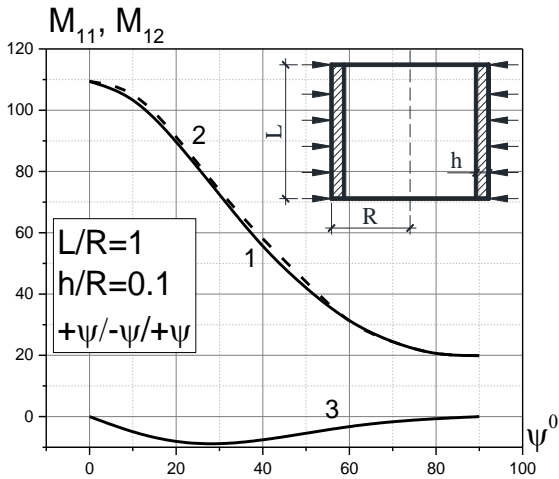


Рис. 2.7. Розподіл меридіональних і крутних моментів в одношаровій циліндричній оболонці під дією зовнішнього тиску із  $h/R=0,01$  (а);  $0,1$  (б) – відповідно



(a)



(б)

Рис. 2.8. Розподіл меридіональних і крутних моментів в тришаровій циліндричній оболонці під дією зовнішнього тиску із  $h/R = 0,01$  (а);  $0,1$  (б) – відповідно

### **2.3.1.2. Циліндричні оболонки оболонки під дією осьового тиску**

Результати розрахунків напружено-деформованих станів одношарової та тришарової циліндричної оболонки під дією осьового стискання приведені в табл. 2.5–2.8, що мають таку саму структуру, як і табл. 2.1–2.4.

Зусилля та моменти здобуті за використанням двох підходів. В першому з них реалізована основна геометрична нелінійна теорія розрахунку нетонких анізотропних оболонок обертання (ТНАО). Результати представлені суцільними лініями на графіках. Другий підхід також використовує розроблену методику, але відрізняється від першого тим, що  $B_{i6} = 0$  і  $D_{i6} = 0$  (ортотропний матеріал) (ТНОО) і представлений штриховими лініями на графіках.

На рис. 2.9, 2.10 представлені графіки, що ілюструють залежність тангенціальних зусиль від зміни кута укладання волокнистого композиту  $\psi$  в одношаровій та тришаровій циліндричних анізотропних оболонках, що знаходяться під дією осьового тиску. Результати приведені для оболонок із товщиною пакету по відношенню до радіуса: а)  $h/R = 0,01$ ; б)  $h/R = 0,1$ .

*РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕТОНКІХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ*

Таблиця 2.5

Одношарова циліндрична оболонка під дією осьового тиску із  
із  $h/R=0,01$

Варіант теорії	$\psi$ , град	Параметри напружено-деформованого стану						
		$T_{11}$ , [n] (кН/м)		$T_{12}$ , (кН/м)	$T_{22}$ , (кН/м)	$M_{11}$ , (кНм/м)	$M_{12}$ , (кНм/м)	$T_{13}$ , (кН/м)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ТНАО	0	-7.71	[9]	0.000	-0.870	-1.43E-01	0.00E+00	0.0750
ТНОО	0	-7.71	[9]	0.000	-0.870	-1.43E-01	0.00E+00	0.0750
ТНАО	10	-7.56	[9]	0.412	-0.918	-1.29E-01	7.93E-03	0.0727
ТНОО	10	-7.73	[9]	0.000	-0.941	-1.62E-01	0.00E+00	0.0839
ТНАО	20	-7.11	[8]	0.714	-1.032	-9.02E-02	1.07E-02	0.0633
ТНОО	20	-7.73	[9]	0.000	-1.132	-2.00E-01	0.00E+00	0.1059
ТНАО	30	-6.92	[8]	0.895	-1.232	-8.40E-02	1.34E-02	0.0699
ТНОО	30	-7.65	[9]	0.000	-1.393	-1.99E-01	0.00E+00	0.1274
ТНАО	40	-6.89	[8]	0.938	-1.454	-7.22E-02	1.30E-02	0.0832
ТНОО	40	-7.65	[9]	0.000	-1.675	-1.48E-01	0.00E+00	0.1496
ТНАО	50	-7.08	[8]	0.858	-1.653	-4.09E-02	7.50E-03	0.1043
ТНОО	50	-7.65	[9]	0.000	-1.880	-3.94E-02	0.00E+00	0.1549
ТНАО	60	-7.29	[8]	0.677	-1.747	1.64E-02	-1.30E-03	0.1150
ТНОО	60	-7.75	[9]	0.000	-1.959	5.68E-02	0.00E+00	0.1561
ТНАО	70	-7.55	[8]	0.456	-1.754	6.38E-02	-5.02E-03	0.1205
ТНОО	70	-7.82	[9]	0.000	-1.883	9.40E-02	0.00E+00	0.1427
ТНАО	80	-7.73	[9]	0.226	-1.699	7.57E-02	-2.95E-03	0.1150
ТНОО	80	-7.81	[9]	0.000	-1.739	8.37E-02	0.00E+00	0.1214
ТНАО	90	-7.79	[9]	0.000	-1.667	7.46E-02	-1.01E-18	0.1112
ТНОО	90	-7.79	[9]	0.000	-1.667	7.46E-02	0.00E+00	0.1112



Таблиця 2.6

Одношарова циліндрична оболонка під дією осьового тиску із  
із  $h/R=0,1$

Варіант теорії	$\psi$ , град	Параметри напружено-деформованого стану						
		$T_{11}$ , [н] (кН/м)	$T_{12}$ , (кН/м)	$T_{22}$ , (кН/м)	$M_{11}$ , (кНм/м)	$M_{12}$ , (кНм/м)	$T_{13}$ , (кН/м)	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ТНАО	0	-931.5	[1]	0.0	-105.3	-39.30	0.00	85.15
ТНОО	0	-931.5	[1]	0.0	-105.3	-39.30	0.00	85.15
ТНАО	10	-918.7	[1]	45.2	-111.4	-37.16	2.62	82.73
ТНОО	10	-918.7	[1]	0.0	-111.9	-37.03	0.00	82.42
ТНАО	20	-897.3	[1]	79.7	-129.1	-32.28	4.38	82.48
ТНОО	20	-897.3	[1]	0.0	-131.5	-31.80	0.00	81.49
ТНАО	30	-857.6	[2]	96.3	-150.1	-30.59	5.53	76.98
ТНОО	30	-866.8	[1]	0.0	-157.9	-20.52	0.00	72.98
ТНАО	40	-830.7	[1]	95.5	-170.8	-6.04	2.08	67.66
ТНОО	40	-840.1	[2]	0.0	-184.2	-15.33	0.00	69.42
ТНАО	50	-821.3	[1]	81.5	-186.0	10.28	-0.65	55.42
ТНОО	50	-840.1	[1]	0.0	-206.7	14.93	0.00	58.37
ТНАО	60	-820.7	[1]	60.5	-191.4	34.77	-3.66	73.90
ТНОО	60	-848.4	[1]	0.0	-214.7	39.11	0.00	93.87
ТНАО	70	-835.1	[2]	38.5	-190.3	47.07	-3.54	64.59
ТНОО	70	-861.8	[1]	0.0	-207.8	87.51	0.00	72.70
ТНАО	80	-807.1	[3]	18.6	-176.7	39.29	-1.41	42.43
ТНОО	80	-815.7	[3]	0.0	-181.7	42.49	0.00	44.51
ТНАО	90	-796.0	[3]	0.0	-170.5	35.68	0.00	37.69
ТНОО	90	-796.0	[3]	0.0	-170.5	35.68	0.00	37.69

*РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕТОНКІХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ*

Таблиця 2.7

Тришарова циліндрична оболонка під дією осевого тиску із  $h/R=0,01$

Варіант теорії	$\psi$ , град	Параметри напружено-деформованого стану						
		$T_{11}$ , [n] (кН/м)		$T_{12}$ , (кН/м)	$T_{22}$ , (кН/м)	$M_{11}$ , (кНм/м)	$M_{12}$ , (кНм/м)	$T_{13}$ , (кН/м)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ТНАО	0	-3.13	[7]	0.000	-0.353	-0.0365	0.00E+00	0.0414
ТНОО	0	-3.13	[7]	0.000	-0.353	-0.0365	0.00E+00	0.0414
ТНАО	10	-3.14	[7]	0.073	-0.382	-0.0533	2.78E-03	0.0462
ТНОО	10	-3.14	[7]	0.000	-0.382	-0.0533	0.00E+00	0.0462
ТНАО	20	-3.11	[7]	0.132	-0.454	-0.0925	8.75E-03	0.0548
ТНОО	20	-3.14	[8]	0.000	-0.460	-0.1090	0.00E+00	0.0589
ТНАО	30	-3.05	[7]	0.166	-0.552	-0.1401	1.75E-02	0.0639
ТНОО	30	-3.08	[8]	0.000	-0.561	-0.1634	0.00E+00	0.0692
ТНАО	40	-2.97	[7]	0.170	-0.646	-0.1572	2.18E-02	0.0684
ТНОО	40	-3.01	[8]	0.000	-0.659	-0.1798	0.00E+00	0.0741
ТНАО	50	-2.93	[7]	0.149	-0.715	-0.1403	1.87E-02	0.0694
ТНОО	50	-2.97	[8]	0.000	-0.731	-0.1564	0.00E+00	0.0748
ТНАО	60	-2.94	[7]	0.115	-0.736	-0.0978	1.08E-02	0.0656
ТНОО	60	-2.97	[8]	0.000	-0.752	-0.1066	0.00E+00	0.0702
ТНАО	70	-2.97	[7]	0.076	-0.710	-0.0564	4.37E-03	0.0590
ТНОО	70	-2.97	[7]	0.000	-0.715	-0.0543	0.00E+00	0.0630
ТНАО	80	-2.97	[7]	0.037	-0.659	-0.0285	1.16E-03	0.0495
ТНОО	80	-3.00	[8]	0.000	-0.668	-0.0309	0.00E+00	0.0529
ТНАО	90	-2.99	[7]	0.000	-0.641	-0.0222	0.00E+00	0.0484
ТНОО	90	-2.99	[7]	0.000	-0.641	-0.0222	0.00E+00	0.0484

Таблиця 2.8

Тришарова циліндрична оболонка під дією осевого тиску із  
із  $h/R=0,1$

Варіант теорії	$\psi$ , град	Параметри напружено-деформованого стану						
		$T_{11}$ , [n] (кН/м)	$T_{12}$ , (кН/м)	$T_{22}$ , (кН/м)	$M_{11}$ , (кНм/м)	$M_{12}$ , (кНм/м)	$T_{13}$ , (кН/м)	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ТНАО	0	-394.8	[1]	0.00	-44.7	-388.8	0.00	428.10
ТНОО	0	-394.8	[1]	0.00	-44.7	-388.8	0.00	428.10
ТНАО	10	-357.0	[1]	5.51	-43.4	-88.7	4.48	310.20
ТНОО	10	-390.3	[1]	0.00	-47.6	-273.6	0.00	309.70
ТНАО	20	-348.7	[2]	9.84	-50.8	-72.3	6.99	170.50
ТНОО	20	-376.3	[1]	0.00	-55.2	-138.4	0.00	170.50
ТНАО	30	-351.1	[2]	10.82	-63.1	-65.2	8.55	105.10
ТНОО	30	-358.3	[1]	0.00	-65.3	-74.3	0.00	105.70
ТНАО	40	-341.1	[1]	11.09	-73.4	-39.5	6.11	69.81
ТНОО	40	-341.1	[1]	0.00	-74.9	-39.2	0.00	69.01
ТНАО	50	-330.1	[1]	9.89	-79.6	-18.5	3.12	50.19
ТНОО	50	-330.1	[1]	0.00	-81.3	-18.1	0.00	49.21
ТНАО	60	-322.5	[1]	7.64	-80.2	-4.0	1.00	32.57
ТНОО	60	-322.5	[2]	0.00	-81.7	-8.5	0.00	69.13
ТНАО	70	-321.1	[1]	5.00	-76.5	2.0	0.23	49.27
ТНОО	70	-324.5	[1]	0.00	-78.3	5.1	0.00	26.99
ТНАО	80	-323.6	[3]	2.42	-71.8	6.9	-0.06	49.74
ТНОО	80	-323.6	[3]	0.00	-72.1	7.9	0.00	39.47
ТНАО	90	-325.7	[1]	0.00	-69.8	14.7	0.00	-14.99
ТНОО	90	-325.7	[1]	0.00	-69.8	14.7	0.00	-14.99

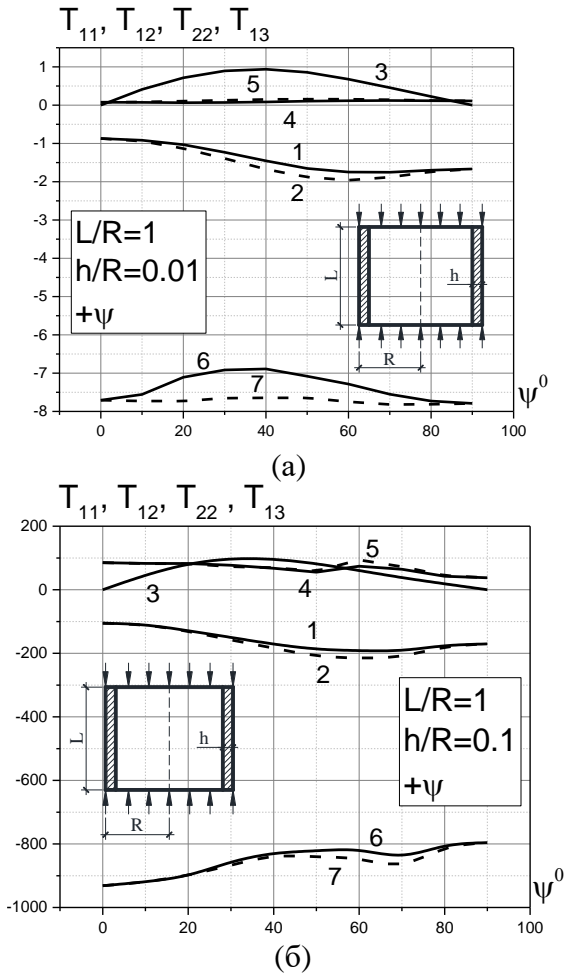
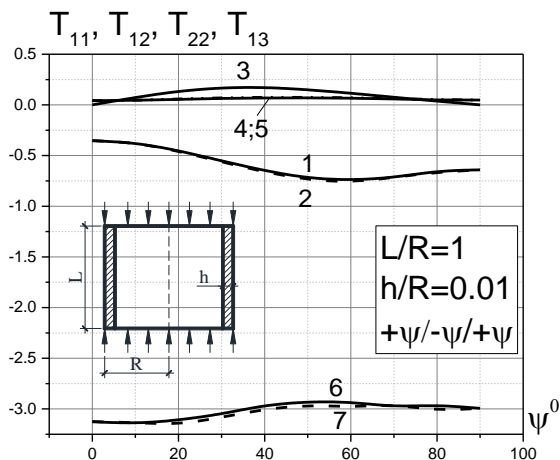
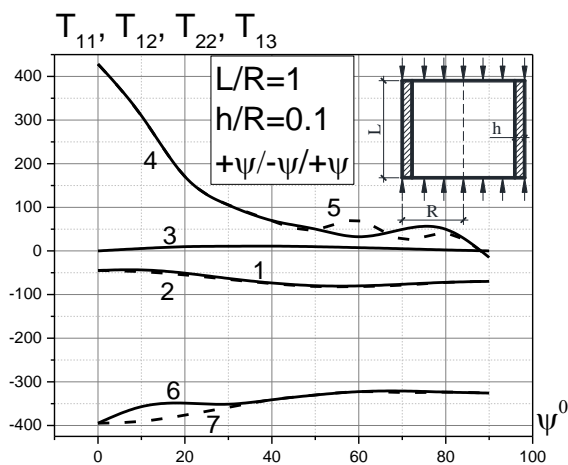


Рис.2.9. Розподіл меридіональних і крутних моментів в одношаровій циліндричній оболонці під дією осевого тиску із  $h/R = 0,01$  (а);  $0,1$  (б) – відповідно



(a)



(б)

Рис.2.10. Розподіл меридіональних і крутних моментів в тришаровій циліндричній оболонці під дією осевого тиску із  $h/R = 0,01$  (а);  $0,1$  (б) – відповідно

Від дії осьового тиску кривими за номерами 1 і 2 на рис. 2.9, 2.10 описуються наявні в напруженому стані анізотропної оболонки колові зусилля  $T_{22}$ . Графік 3 – це зсувні зусилля  $T_{12}$ . Поперечні зусилля  $T_{13}$  описуються кривими 4 та 5, а залежностями 6, 7 показані меридіональні зусилля  $T_{11}$ .

Приведені графіки рис. 2.9, 2.10 дозволяють зробити такі висновки. Криві 1, 4, 6 представляють значення колових  $T_{22}$ , поперечних  $T_{13}$  та меридіональних  $T_{11}$  зусиль відповідно. Вони здобуті за методикою (ТНАО), що враховує геометричну нелінійність і при цьому коефіцієнти  $B_{i6}$  і  $D_{i6}$  не дорівнюють нулю. Зазначені зусилля порівняно з такими ж, але знайденими за методикою (ТНОО) (криві 2, 5, 7) приймають найменші значення, хоча результати розрахунку напруженого стану, показують, що при збільшенні товщини оболонки величини тангенціальних зусиль прямують до однакових значень. Очевидно, що запропонована методика (ТНАО) порівняно з (ТНОО) більш повно описує специфіку напружено-деформованого стану анізотропних оболонок. Це дало можливість знайти для анізотропних оболонок

зсувні зусилля  $T_{12}$  при кутах  $\psi$ , що відрізняються від  $0^\circ$  та  $90^\circ$ . При цьому величини таких зусиль (крива 3) зростають зі збільшенням кута  $\psi$  та набувають значень, що істотно відрізняються від нуля, особливо при  $\psi \approx 45^\circ$ . Як впливає з графіків, колові  $T_{22}$  та зсувні зусилля  $T_{12}$  для одношарових оболонок є рівними за величинами, але протилежні за знаками. В тришарових – спостерігається збільшення величини  $T_{22}$  у порівнянні з  $T_{12}$  орієнтовно в 6-8 раз. Слід зауважити, що при збільшенні товщини оболонки ця тенденція зберігається. Також необхідно відмітити наявність в напруженому стані поперечних зусиль  $T_{13}$ , що мають тенденцію до збільшення при зростанні товщини оболонки. Це особливо помітно для тришарового варіанту структурного пакету із крайніми шарами більш високої жорсткості, ніж середній. Так, при осьовому тиску поперечні зусилля  $T_{13}$  в тришаровій оболонці зростають від 2,4% при  $h/R = 0,01$  до 108,4% при відносній товщині оболонки  $h/R = 0,1$ .

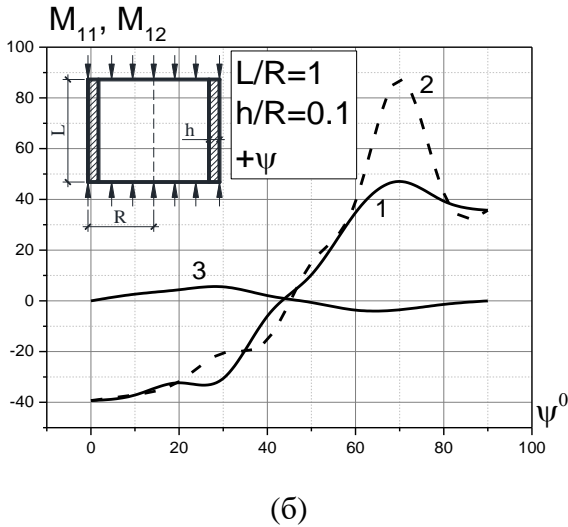
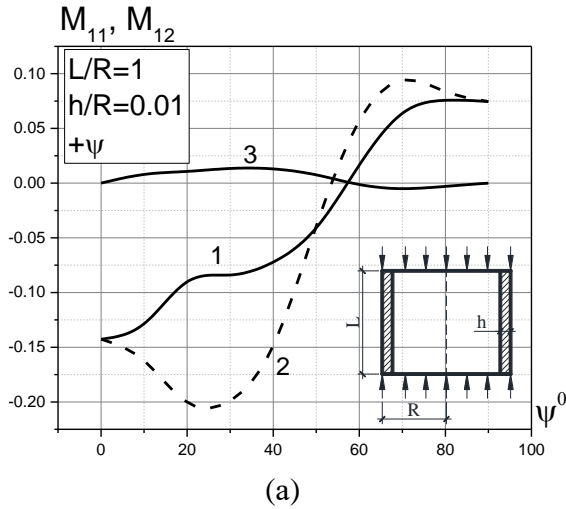


Рис.2.11. Розподіл меридіональних та крутних моментів в одношаровій циліндричній оболонці під дією осевого тиску із  $h/R=0,01$  (а);  $0,1$  (б) – відповідно



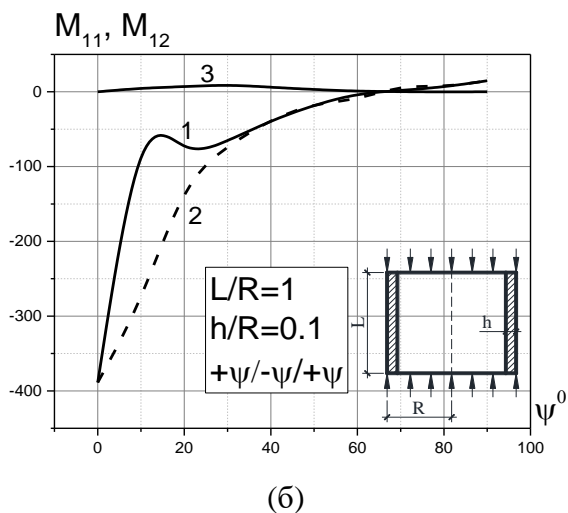
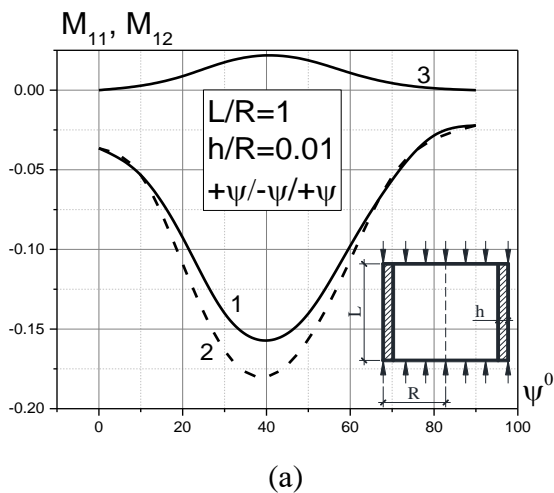


Рис.2.12. Розподіл меридіональних та крутних моментів в тришаровій циліндричній оболонці під дією осевого тиску із  $h/R=0,01$  (а);  $0,1$  (б) – відповідно

На рис. 2.11, 2.12 меридіональні  $M_{11}$  та крутні  $M_{12}$  моменти визначені для координати твірної циліндра  $x/L=0,5$ . Графіки 1 і 2 описують меридіональні моменти  $M_{11}$ , що здобуті за методиками (ТНАО) і (ТНОО) відповідно. Крива 3 представляє крутні моменти  $M_{12}$ , що отримані за методикою (ТНАО). Аналіз даних табл. 2.5–2.8 та рис. 2.11, 2.12 дозволяє стверджувати, що при дії осьового тиску залежність меридіональних і крутних моментів від кута намотки композиту  $\psi$  має кососиметричний характер. Моменти  $M_{11}$  досягають максимального значення при кутах  $\psi=0^\circ, 90^\circ$ , а крутні – при  $\psi \approx 30^\circ, 60^\circ$  відповідно.

### 2.3.2. Напружено-деформований стан конічних оболонок

Проаналізовано вплив кута конусності  $\alpha$  на напружено-деформований стан тришарових конічних анізотропних оболонок товщиною  $h/R=0,1$ , що знаходяться під осьовим стисканням (рис. 2.2а) та рівномірним зовнішнім тиском (рис. 2.2б). Геометрія конічних оболонок описана такими співвідношеннями:

$$R_0 = r_0 / \sin \alpha ; R_n = r_n / \sin \alpha ; L = (r_n - r_0) / \cos \alpha ,$$

де  $\alpha$  – кут нахилу твірної оболонки до основи більшого радіуса;  $r_0$  – радіус меншої основи конуса;  $r_n$  – радіус більшої основи конуса. Для досліджуваних оболонок прийнято, що  $r_0=1,0$  м. Довжина конічних оболонок була сталою та рівною  $L=1,0$  м.

Закріплення торців оболонки прийняте таке: один з них шарнірно нерухомий ( $u = v = w = M_{11} = M_{12} = 0$ ), а інший – шарнірно рухомий ( $v = w = M_{11} = M_{12} = 0, T_{11} = -T_{11}^0$ ) при осьовому стисканні, а для зовнішнього тиску – ( $v = w = M_{11} = M_{12} = T_{11} = 0$ ).

### **2.3.2.1. Конічні оболонки під дією зовнішнього рівномірного тиску**

Результати розрахунків напружено-деформованого стану тришарової конічної оболонки товщиною  $h/R=0,1$  під дією зовнішнього рівномірного тиску для кутів конусності  $\alpha = 80^\circ, 70^\circ, 60^\circ$  відповідно приведені в табл. 2.9–2.11, що мають таку саму структуру, як і табл. 2.1–2.4.

На рис. 3.13 наведений графік в осях: зусилля – кут  $\psi$ , що побудовані для значень координати твірної конуса  $x/L=0,5$ . Зусилля та моменти здобуті за використанням двох підходів. В першому з них реалізована основна

геометрична нелінійна теорія розрахунку нетонких анізотропних оболонок обертання (ТНАО). Результати представлені суцільними лініями на графіках. Другий підхід також використовує розроблену методику, але відрізняється від першого тим, що  $B_{i6} = 0$  і  $D_{i6} = 0$  (ортотропний матеріал) (ТНОО) і представлений штриховими лініями на графіках.

Під дією зовнішнього тиску на рис. 2.13а кривими за номерами 1 і 2 описуються наявні в напруженому стані анізотропної оболонки колові зусилля  $T_{22}$ . Графік 3 – це зсувні зусилля  $T_{12}$ . Поперечні зусилля  $T_{13}$  описуються кривими 4 та 5.

Таблиця 2.9

Тришарова конічна оболонка під дією зовнішнього тиску із  $\alpha = 80^\circ$

Варіант теорії	$\psi$ , град	Параметри напружено-деформованого стану						
		$T_{11}$ , [n] (кН/м)	$T_{12}$ , (кН/м)	$T_{22}$ , (кН/м)	$M_{11}$ , (кНм/м)	$M_{12}$ , (кНм/м)	$T_{13}$ , (кН/м)	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ТНАО	0	-67.66	[9]	0	-1387	616.8	0	451
ТНОО	0	-67.66	[9]	0	-1387	616.8	0	451
ТНАО	10	-69.04	[8]	8.203	-1417	610	-28.65	447.8
ТНОО	10	-69.03	[8]	0	-1417	610	0	447.8
ТНАО	20	-71.04	[8]	19.56	-1455	566.3	-50.19	422.2
ТНОО	20	-71	[8]	0	-1455	566.2	0	422.4
ТНАО	30	-74.38	[7]	35.33	-1519	501.2	-59.78	384.8
ТНОО	30	-74.3	[8]	0	-1520	501	0	385.2
ТНАО	40	-78.08	[7]	52.43	-1585	420	-55.98	338.6
ТНОО	40	-77.95	[7]	0	-1586	419.6	0	339.3
ТНАО	50	-78.43	[7]	61.25	-1572	323.3	-41.09	281.2
ТНОО	50	-78.26	[7]	0	-1573	322.8	0	282
ТНАО	60	-68.48	[5]	50.52	-1338	213.4	-21.91	206.6
ТНОО	60	-70.26	[5]	0	-1381	220	0	213.6
ТНАО	70	-51.48	[4]	28.78	-980.6	126.8	-8.628	137.7
ТНОО	70	-59.76	[4]	0	-1152	149.5	0	161.2
ТНАО	80	-54.21	[4]	16.63	-1035	118.4	-3.867	136.9
ТНОО	80	-54.19	[4]	0	-1036	118.4	0	137
ТНАО	90	-55.15	[4]	0	-1055	115.7	0	136.9
ТНОО	90	-55.15	[4]	0	-1055	115.7	0	136.9

*РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕТОНКІХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ*

Таблиця 2.10

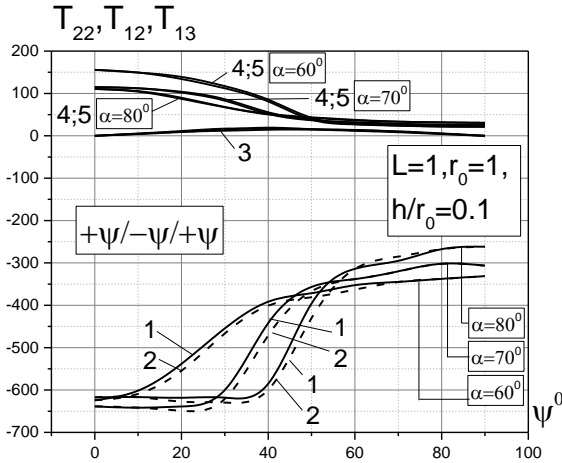
Тришарова конічна оболонка під дією зовнішнього тиску із  $\alpha = 70^\circ$

Варіант теорії	$\psi$ , град	Параметри напружено-деформованого стану						
		$T_{11}$ , [n] (кН/м)		$T_{12}$ , (кН/м)	$T_{22}$ , (кН/м)	$M_{11}$ , (кНм/м)	$M_{12}$ , (кНм/м)	$T_{13}$ , (кН/м)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ТНАО	0	-53.23	[8]	0	-638.7	216	0	114.9
ТНОО	0	-53.23	[8]	0	-638.7	216	0	114.9
ТНАО	10	-53.55	[7]	5.369	-641.7	209	-9.877	112.1
ТНОО	10	-53.54	[8]	0	-641.7	209	0	112.1
ТНАО	20	-53.87	[8]	11.32	-638.8	185.3	-16.5	102
ТНОО	20	-54.38	[8]	0	-649	188.7	0	104
ТНАО	30	-52.27	[8]	16.77	-599.9	142.8	-17.07	82.96
ТНОО	30	-53.47	[8]	0	-621.1	148.4	0	86.4
ТНАО	40	-41.61	[6]	16.39	-441.9	79.82	-10.61	51.88
ТНОО	40	-43.76	[6]	0	-471.1	85.27	0	55.49
ТНАО	50	-34.77	[5]	14.85	-356.8	48.49	-6.1	36.68
ТНОО	50	-35.49	[5]	0	-366.6	49.67	0	37.87
ТНАО	60	-33.18	[4]	13.33	-338.1	35.24	-3.542	31.44
ТНОО	60	-33.08	[4]	0	-338.4	35.1	0	31.68
ТНАО	70	-31.47	[4]	9.725	-319.8	26.84	-1.765	28.11
ТНОО	70	-31.41	[4]	0	-320	26.76	0	28.27
ТНАО	80	-29.75	[1]	4.962	-301.9	22.05	-0.687	25.95
ТНОО	80	-29.73	[4]	0	-301.9	22.03	0	26
ТНАО	90	-30.11	[4]	0	-306.5	21.35	0	26.18
ТНОО	90	-30.11	[4]	0	-306.5	21.35	0	26.18

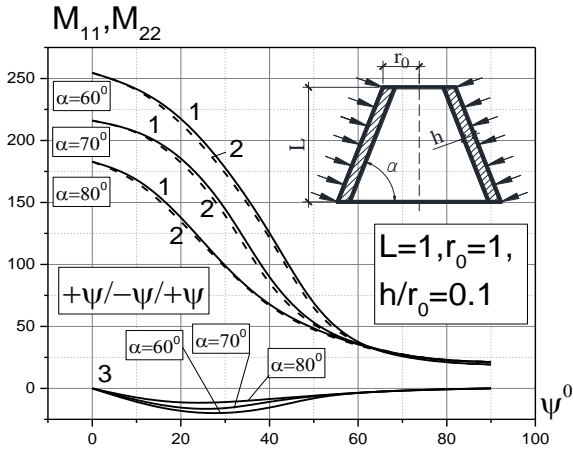
Таблиця 2.11

Тришарова конічна оболонка під дією зовнішнього тиску із  $\alpha = 60^\circ$

Варіант теорії	$\psi$ , град	Параметри напружено-деформованого стану						
		$T_{11}$ , [n] (кН/м)	$T_{12}$ , (кН/м)	$T_{22}$ , (кН/м)	$M_{11}$ , (кНм/м)	$M_{12}$ , (кНм/м)	$T_{13}$ , (кН/м)	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ТНАО	0	-49.13	[7]	0	-617.2	254.5	0	155.7
ТНОО	0	-49.13	[7]	0	-617.2	254.5	0	155.7
ТНАО	10	-49.92	[7]	4.137	-616.6	243.5	-11.48	149.3
ТНОО	10	-49.92	[7]	0	-616.6	243.4	0	149.3
ТНАО	20	-51.84	[7]	9.022	-618.3	215.6	-19.12	134
ТНОО	20	-51.23	[7]	0	-627.3	220.3	0	139.2
ТНАО	30	-54.67	[7]	14.66	-617.9	175.3	-20.8	112.1
ТНОО	30	-54.12	[7]	0	-629.5	179.8	0	117.3
ТНАО	40	-57.81	[7]	19.23	-585.1	123.8	-16.23	81.02
ТНОО	40	-57.65	[7]	0	-599.6	127.3	0	85.34
ТНАО	50	-49.76	[6]	15.69	-395.9	57.91	-7.136	38.36
ТНОО	50	-52.29	[6]	0	-430.3	63.13	0	42.73
ТНАО	60	-41.76	[5]	11.86	-313.8	34.47	-3.369	27.04
ТНОО	60	-41.61	[5]	0	-313.8	34.27	0	27.3
ТНАО	70	-39.39	[5]	8.566	-295.2	26.08	-1.647	24.41
ТНОО	70	-38.19	[4]	0	-285.2	25.08	0	23.73
ТНАО	80	-35.96	[4]	4.185	-267.6	20.6	-0.6115	21.94
ТНОО	80	-35.93	[4]	0	-267.6	20.57	0	21.99
ТНАО	90	-35.14	[4]	0.00	-261.6	19.22	0.00	21.47
ТНОО	90	-35.14	[4]	0.00	-261.6	19.22	0.00	21.47



(a)



(б)

Рис.2.13. Розподіл тангенціальних зусиль (а) та меридіональних і крутних моментів (б) в тришаровій конічній оболонці під дією зовнішнього тиску



Величини зусиль  $T_{12}$  (крива 3) зростають зі зростанням кута  $\psi$  та набувають значень, що відрізняються від нуля, для зовнішнього тиску при  $50^\circ \leq \psi \leq 60^\circ$ . Аналіз графіків дозволяє зробити висновок, що зміна кута конусності оболонки не впливає на величину зсувних зусиль  $T_{12}$ . Як і у випадку із циліндричною оболонкою, під дією зовнішнього тиску поперечні зусилля  $T_{13}$  (криві 4, 5) мають тенденцію до збільшення своїх значень, по-перше, при зростанні товщини оболонки, по друге, при зменшенні кута конусності оболонки. В тришарових конічних оболонках відносною товщиною  $h/R = 0,1$  поперечні зусилля  $T_{13}$  по відношенню до колових зусиль  $T_{22}$  максимально становлять 17,7% при  $\alpha = 80^\circ$ , 18,0% – при  $\alpha = 70^\circ$  і 25,2% – при  $\alpha = 60^\circ$  відповідно.

Графіки 1, 2 на рис. 2.13б описують меридіональні моменти  $M_{11}$ , знайдені за основним підходом (ТНАО) для тришарової конічної оболонки, що знаходяться під дією зовнішнього рівномірного тиску. Крива 2 не враховує в цій методиці коефіцієнти  $B_{i6}$  і  $D_{i6}$ , тобто матеріал оболонки є ортотропним. Графік 3 являє собою зміну величини крутних моментів  $M_{12}$  в залежності від кута намотки композиту  $\psi$ ,

що набувають значень, які істотно відрізняються від нуля, особливо при  $\psi \approx 30^\circ$ . Як показують розрахунки, крутні моменти  $M_{12}$  для ортотропних конічних оболонок приймають нульові значення. При дії зовнішнього тиску зменшення кута конусності оболонки, за ТНАО, призводить до збільшення моментів  $M_{11}$  і  $M_{12}$ .

### **2.3.2.2. Конічні оболонки під дією осьового тиску**

Результати розрахунків напружено-деформованого стану тришарової конічної оболонки товщиною  $h/R = 0,1$  під дією осьового тиску для кутів конусності  $\alpha = 80^\circ, 70^\circ, 60^\circ$  відповідно приведені в табл. 2.12–2.14, що мають таку саму структуру, як і табл. 2.1–2.4.

Таблиця 2.12

Тришарова конічна оболонка під дією осьового тиску із  $\alpha = 80^\circ$

Варіант теорії	$\psi$ , град	Параметри напружено-деформованого стану						
		$T_{11}$ , [n] (кН/м)	$T_{12}$ , (кН/м)	$T_{22}$ , (кН/м)	$M_{11}$ , (кНм/м)	$M_{12}$ , (кНм/м)	$T_{13}$ , (кН/м)	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ТНАО	0	-366.3	[2]	0	-2.285	-27.76	0	33.5
ТНОО	0	-366.3	[2]	0	-2.285	-27.76	0	33.5
ТНАО	10	-362.4	[2]	8.293	-3.802	-26.99	1.488	31.69
ТНОО	10	-362.4	[2]	0	-3.824	-26.98	0	31.77
ТНАО	20	-350	[2]	14.67	-7.779	-23.55	2.476	26.73
ТНОО	20	-350	[2]	0	-7.897	-23.47	0	27.05
ТНАО	30	-334	[3]	18.25	-10.2	-18.75	2.674	14.52
ТНОО	30	-334	[3]	0	-10.8	-18.44	0	16.1
ТНАО	40	-315.4	[3]	18.29	-11.49	-11.28	1.944	8.321
ТНОО	40	-315.4	[2]	0	-12.21	-10.95	0	9.738
ТНАО	50	-298.8	[3]	15.76	-7.795	-4.181	0.9194	4.425
ТНОО	50	-302.1	[3]	0	-6.138	-4.782	0	0.553
ТНАО	60	-285.4	[3]	11.96	2.568	0.7598	0.2071	1.698
ТНОО	60	-288.6	[3]	0	3.322	0.6772	0	0.1719
ТНАО	70	-275	[3]	7.828	17.04	3.21	-0.04913	0.0314
ТНОО	70	-275	[3]	0	17.1	3.247	0	0.1936
ТНАО	80	-265.7	[3]	3.792	29.27	3.975	-0.05432	-0.2792
ТНОО	80	-265.7	[3]	0	29.33	3.98	0	-0.2445
ТНАО	90	-262.1	[3]	0	34.03	4.093	0	-0.3226
ТНОО	90	-262.1	[3]	0	34.03	4.093	0	0

*РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ*

Таблиця 2.13

Тришарова конічна оболонка під дією осьового тиску із  $\alpha = 70^\circ$

Варіант теорії	$\psi$ , град	Параметри напружено-деформованого стану						
		$T_{11}$ , [н] (кН/м)		$T_{12}$ , (кН/м)	$T_{22}$ , (кН/м)	$M_{11}$ , (кНм/м)	$M_{12}$ , (кНм/м)	$T_{13}$ , (кН/м)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ТНАО	0	-282.5	[3]	0	25.2	-1.056	0	3.665
ТНОО	0	-282.5	[3]	0	25.2	-1.056	0	3.665
ТНАО	10	-283.8	[3]	8.058	25.19	-1.69	0.2016	3.551
ТНОО	10	-283.8	[3]	0	25.23	-1.694	0	3.557
ТНАО	20	-282.7	[3]	14.76	25.64	-2.935	0.473	2.727
ТНОО	20	-282.7	[3]	0	25.8	-2.942	0	2.752
ТНАО	30	-273.5	[3]	18.46	27.97	-3.192	0.6246	1.151
ТНОО	30	-276.3	[3]	0	29.36	-3.631	0	0.1509
ТНАО	40	-262.4	[3]	18.97	35.99	-2.446	0.5285	-1.755
ТНОО	40	-262.4	[3]	0	36.43	-2.405	0	-1.598
ТНАО	50	-247.9	[3]	16.41	49.03	-0.6997	0.2295	-2.765
ТНОО	50	-250.8	[3]	0	51.31	-0.9503	0	-3.769
ТНАО	60	-236.4	[3]	12.49	68.95	0.3668	0.0306	-3.452
ТНОО	60	-236.4	[3]	0	69.77	0.3896	0	-3.284
ТНАО	70	-225	[3]	8.026	89.55	0.7958	-0.02931	-2.724
ТНОО	70	-227.8	[3]	0	91.91	0.689	0	-3.321
ТНАО	80	-220.1	[3]	3.935	107.4	0.7124	-0.02072	-2.582
ТНОО	80	-220.1	[3]	0	107.7	0.7125	0	-2.548
ТНАО	90	-217.1	[3]	0	113.3	0.6962	0	-2.165
ТНОО	90	-217.1	[3]	0	113.3	0.6962	0	-2.165

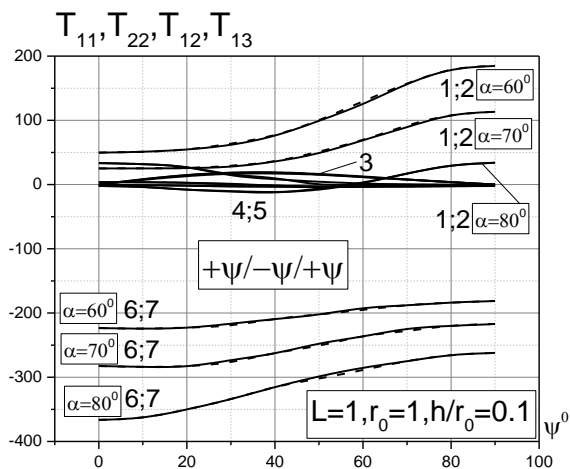
Таблиця 2.14

Тришарова конічна оболонка під дією осевого тиску із  $\alpha = 60^\circ$

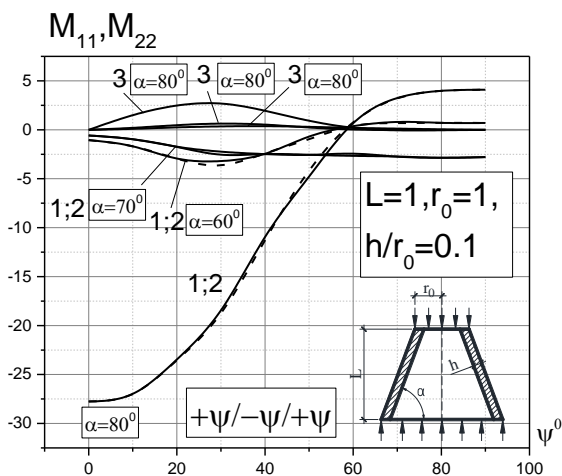
Варіант теорії	$\psi$ , град	Параметри напружено-деформованого стану						
		$T_{11}$ , [n] (кН/м)	$T_{12}$ , (кН/м)	$T_{22}$ , (кН/м)	$M_{11}$ , (кНм/м)	$M_{12}$ , (кНм/м)	$T_{13}$ , (кН/м)	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ТНАО	0	-223.4	[3]	0	49.79	-0.5796	0	-0.5695
ТНОО	0	-223.4	[3]	0	49.79	-0.5796	0	-0.5695
ТНАО	10	-224.2	[3]	7.141	51.09	-0.9657	0.09926	-0.9481
ТНОО	10	-224.2	[3]	0	51.15	-0.9715	0	-0.9403
ТНАО	20	-222.7	[3]	13.12	54.68	-1.725	0.2398	-1.672
ТНОО	20	-222.7	[3]	0	54.91	-1.742	0	-1.643
ТНАО	30	-216.7	[3]	16.6	61.9	-2.238	0.3502	-2.385
ТНОО	30	-219.1	[3]	0	63.83	-2.541	0	-2.99
ТНАО	40	-209.5	[3]	17.22	76.37	-2.48	0.3687	-3.307
ТНОО	40	-209.5	[3]	0	77.23	-2.487	0	-3.192
ТНАО	50	-202.2	[3]	15.29	99.21	-2.562	0.3019	-3.769
ТНОО	50	-202.2	[3]	0	100.4	-2.552	0	-3.599
ТНАО	60	-192.7	[3]	11.51	125.6	-2.436	0.1945	-2.611
ТНОО	60	-195.1	[3]	0	129.5	-2.666	0	-3.118
ТНАО	70	-187.9	[3]	7.598	156.2	-2.742	0.1232	-1.915
ТНОО	70	-187.9	[3]	0	157.2	-2.729	0	-1.794
ТНАО	80	-183.9	[3]	3.695	178.2	-2.857	0.05512	-0.8847
ТНОО	80	-183.9	[3]	0	178.6	-2.852	0	-0.8445
ТНАО	90	-181.3	[3]	0	184.8	-2.787	0	-0.2036
ТНОО	90	-181.3	[3]	0	184.8	-2.787	0	-0.2036

На рис. 2.14 наведений графік в осях: зусилля – кут  $\psi$ , що побудовані для значень координати твірної конуса  $x/L=0,5$ . Зусилля і моменти здобуті за використанням двох підходів. В першому з них реалізована основна геометрична нелінійна теорія розрахунку нетонких анізотропних оболонок обертання (ТНАО). Результати представлені суцільними лініями на графіках. Другий підхід також використовує розроблену методику, але відрізняється від першого тим, що  $B_{i6}=0$  і  $D_{i6}=0$  (ортотропний матеріал) (ТНОО) і представлений штриховими лініями на графіках.

Від дії осьового тиску кривими за номерами 1 і 2 описуються наявні в напруженому стані анізотропної оболонки колові зусилля  $T_{22}$ . Графік 3 – це зсувні зусилля  $T_{12}$ . Поперечні зусилля  $T_{13}$  описуються кривими 4 та 5, а залежностями 6, 7 показані меридіональні зусилля  $T_{11}$ .



(a)



(б)

Рис.2.14. Розподіл тангенціальних зусиль (а) та меридіональних і крутних моментів (б) в тришаровій конічній оболонці під дією осьового тиску

Зсувні зусилля  $T_{12}$  в конічних оболонках під осьовим тиском приймають нульові значення для кутів  $\psi = 0^\circ, 90^\circ$ . Однак, величини таких зусиль (крива 3) зростають зі зростанням кута  $\psi$  та набувають значень, що істотно відрізняються від нуля при  $\psi \approx 30^\circ$ . Аналіз графіка дозволяє зробити висновок, що зміна кута конусності оболонки не впливає на величину зсувних зусиль  $T_{12}$ . Під дією осьового тиску поперечні зусилля  $T_{13}$  (криві 4, 5) мають тенденцію прямувати до нульових значень при збільшенні кута конусності оболонки. При осьовому тиску залежність поперечних зусиль від величини меридіональних  $T_{11}$  для кутів конусності  $\alpha = 80^\circ, 70^\circ, 60^\circ$  тришарової оболонки із  $h/R = 0,1$  відповідно становлять 9,1%, 1,5%, 1,4%. Зі зростанням кута  $\psi$  меридіональні зусилля  $T_{11}$  (криві 6, 7) в конічній оболонці при дії осьового тиску невинно зменшуються, а колові зусилля  $T_{22}$  (криві 1, 2) невинно збільшуються як для анізотропного, так і для ортотропного варіанту. Спостерігається, перерозподіл зусиль при зменшенні кута конусності оболонки: значення зусиль  $T_{11}$  зменшуються, а  $T_{22}$ , навпаки, збільшуються.



Графіки 1, 2 на рис. 2.14б описують меридіональні моменти  $M_{11}$  за основним підходом (ТНАО) для тришарової конічної оболонки, що знаходяться під дією осьового тиску. Крива 2 не враховує в цій методиці коефіцієнти  $B_{i6}$  і  $D_{i6}$ , тобто матеріал оболонки є ортотропним. Графік 3 являє собою зміну величини крутних моментів  $M_{12}$  в залежності від кута намотки композиту  $\psi$ , що набувають значень, які істотно відрізняються від нуля, особливо при  $\psi \approx 30^\circ$ . Як показують розрахунки, крутні моменти  $M_{12}$  для ортотропних конічних оболонок приймають нульові значення. За ТНАО, при осьовому стисканні зменшення кута конусності оболонки призводить до зменшення моментів  $M_{11}$  і  $M_{12}$ .

## 2.4. Висновки до розділу 2

В розділі розв'язана геометрично нелінійна задача про напружено-деформований стан анізотропних оболонок обертання нульової гауссової кривини при осесиметричних навантаженнях.

Для лінеаризації нелінійних рівнянь використовується метод Ньютона-Канторовича. Розв'язок лінеаризованої крайової задачі стійкості виконаний методом Кутта-Мерсона

з дискретною ортогоналізацією за С.К.Годуновим.

За допомогою розробленої методики визначено параметри напружено-деформованого стану анізотропних циліндричних і конічних оболонок, що знаходяться під дією осьового тиску чи зовнішнього рівномірного тиску.

Аналіз анізотропних циліндричних і конічних оболонок, що знаходяться під дією осьового тиску і зовнішнього рівномірного тиску показав наявність в напруженому стані поперечних зусиль  $T_{13}$ . Із збільшенням товщини пакету поперечні зусилля  $T_{13}$  мають тенденцію до зростання. Це особливо помітно для тришарового варіанту структурного пакету із крайніми шарами більш високої жорсткості, ніж середній. Так, під дією зовнішнього тиску в тришарових циліндричних оболонках поперечні зусилля  $T_{13}$  зростають від 3,8% при відношенні  $h/R = 0,01$  до 18,7% при  $h/R = 0,1$ . При осьовому тиску поперечні зусилля змінюються від 2,4% при  $h/R = 0,01$  до 108,4% для відносної товщини оболонки  $h/R = 0,1$ .

В конічних анізотропних оболонках на величину поперечних зусиль крім товщини оболонки, впливає також і кут конусності  $\alpha$ . При збільшенні кута нахилу твірної до

радіуса основи поперечні зусилля в одношаровій оболонці мають тенденцію до зменшення при осьовому тиску та збільшення при зовнішньому рівномірному тиску. Під дією зовнішнього тиску в тришарових конічних оболонках товщиною  $h/R = 0,1$  поперечні зусилля  $T_{13}$  по відношенню до колових зусиль  $T_{22}$  максимально становлять 17,7%, 18,0%, 25,2% – при  $\alpha = 80^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $60^\circ$  – відповідно.

## РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ НА СТІЙКІСТЬ ПРУЖНИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК

### 3.1. Двовимірні рівняння стійкості пружних анізотропних оболонок

Нелінійну систему рівнянь (2.1) можна використовувати для побудови рівнянь, за допомогою яких визначається критичний стан оболонок, пов'язаний з явищем біфуркації. З математичної точки зору це означає, що при деякому значенні навантаження розв'язок нелінійних рівнянь стає неоднозначним. В теорії стійкості пружних конструкцій напружено-деформований стан, який виникає після прикладання навантаження, починаючи від майже нульового, називається основним. В багатовимірному просторі змінних, що описують рух кожної точки конструкції при збільшенні навантаження, можна уявити траєкторію руху у вигляді неперервної кривої. В критичній точці однозначність траєкторії деформування порушується. Стає можливим перехід на іншу траєкторію. Це явище розгалуження основної траєкторії (біфуркації) можна досліджувати методами теорії розгалуження розв'язків диференціальних рівнянь, що й використовується в роботах [5, 78]. Запропонований Ейлером критерій стійкості [2, 26] не протирічить цій

теорії та відповідає першому етапу, що закінчується визначенням критичної точки. Згідно з критерієм Ейлера, при критичному значенні навантаження поряд з основною формою рівноваги існує нескінченно близька до неї суміжна форма. Якщо переміщення  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , деформації  $\varepsilon_{ij}$ , зусилля  $T_{ij}$  і моменти  $M_{ij}$ , що характеризують основний стан позначити індексом «0», то суміжний стан буде відрізнятись малими приростами (збуреннями) цих величин. В суміжному стані вектор переміщень має своїми компонентами величини  $u_0 + u$ ,  $v_0 + v$ ,  $w_0 + w$ , тензор деформацій – величини  $\varepsilon_{ij,0} + \varepsilon_{ij}$ , тензори зусиль і моментів  $T_{ij,0} = T_{ij}$ ,  $M_{ij,0} = M_{ij}$ . Вказані функції як основного стану, так і збуреного можуть бути розв'язаними за допомогою системи нелінійних рівнянь (2.1).

Позначимо функції, через які виражаються граничні умови при  $\alpha_1 = const$ , так:

$$\begin{aligned} y_1 = u, \quad y_2 = v, \quad y_3 = w, \quad y_4 = \theta_1, \quad y_5 = \theta_2, \\ y_6 = T_{11}, \quad y_7 = T_{12}^*, \quad y_8 = T_{13}, \quad y_9 = M_{11}, \quad y_{10} = M_{12}^*. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Це дає можливість записати рівняння (2.1) в узагальненому вигляді

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1} = L_i(y) + q_i, \quad (3.2)$$

де  $y$  – вектор компонентами якого є функції  $y_i$ ;  $q_i$  – компоненти навантаження,  $L_i$  – нелінійні диференціальні оператори,  $i = 1, \dots, 10$ . На основній траєкторії деформування рівняння (3.2) мають вигляд

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_{i,o}}{\partial \alpha_1} = L_i(y_o) + q_i. \quad (3.3)$$

Тоді як на суміжній їх потрібно записати у такий спосіб

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial (y_{i,o} + y_i)}{\partial \alpha_1} = L_i(y_o + y) + q_i. \quad (3.4)$$

У відповідності з критерієм Ейлера тут  $y_i$  – це нескінченно малі збурення основного стану. Тому, користуючись поняттям похідної Фреше, можемо обмежитись в рядах Тейлора тільки двома членами

$$L_i(y_o + y) = L_i(y_o) + L_{i,j}(y_o)y. \quad (3.5)$$

Тут  $L_{i,j}$  – похідні Фреше від операторів  $L_i$  за аргументом  $y_j$  ( $j = 1, \dots, 10$ ). Рівняння (3.4) набує вигляду

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_{i,o}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1} = L_i(y_o) + L_{i,j}(y_o)y + q_i. \quad (3.6)$$

Враховуючи те, що навантаження  $q_i$  основного і суміжного станів однакові, а функції з індексом “0” задовольняють рівнянням (3.3), з виразу (3.6) отримуємо лінеаризовані рівняння відносно приростів функцій  $q_i$  при біфуркації

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1} = L_{i,j}(y_o) y. \quad (3.7)$$

Або систему диференціальних рівнянь такого вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{21}^*}{\partial \alpha_2} - a_1(y_2 + T_{21}^*) - a_2(y_1 - T_{21}^*) + \frac{1}{R_1} y_3, \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_2}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22}^*}{\partial \alpha_2} - a_2(y_2 + T_{21}^*) + a_1(y_1 - T_{22}^*) + \frac{1}{R_2} T_{23}^*, \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_3}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{23}^*}{\partial \alpha_2} - a_2 y_3 - a_1 T_{23}^* - \frac{1}{R_1} y_1 - \frac{1}{R_2} T_{22}^*, \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_4}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2} - 2a_1 M_{12} - a_2(y_4 - M_{22}) T_{13}, \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_5}{\partial \alpha_1} &= -a_1 y_{12} + \frac{1}{R_1} y_7 - \varepsilon_1 \varepsilon_{1,0} - \theta_1 \theta_1^0 + A_{11} T_{11} + A_{12} T_{12} + \\ &+ A_{13} y_4 + d_{11} \varepsilon_{22} + d_{12} \kappa_{22} + d_{13} \kappa_{12}, \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_6}{\partial \alpha_1} &= a_1 y_5 - \theta_{1,0} \theta_2 - \theta_1 \theta_{2,0} + \\ &+ A_{21} T_{11} + A_{22} T_{12} + A_{23} y_4 + d_{21} \varepsilon_{22} + d_{22} \kappa_{22} + d_{23} \kappa_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_7}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{R_1} y_5 - y_8, \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_8}{\partial \alpha_1} &= a_1 \theta_2 + A_{31} T_{11} + A_{32} T_{12} + A_{33} y_4 + d_{31} \varepsilon_{22} + d_{32} \kappa_{22} + d_{33} \kappa_{12}, \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_9}{\partial \alpha_1} &= T_{23}^* + d_{31} \varepsilon_{22} + d_{32} \kappa_{22} + d_{33} \kappa_{12}, \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_{10}}{\partial \alpha_1} &= M_{12}^* + A_{32} T_{12}^* + d_{33} \kappa_{12}. \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

В системі (3.8) використано позначення:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= u, \quad y_2 = v, \quad y_3 = w, \quad y_4 = \theta_1, \quad y_5 = \theta_2, \\
 y_6 &= T_{11}(1 + \varepsilon_{1,0}) + T_{11,0} \varepsilon_1, \quad y_7 = T_{12}(1 + \varepsilon_{2,0}) + T_{12,0} \varepsilon_2 - \frac{2}{R_2} M_{12}, \\
 y_8 &= T_{13} + T_{11,0} \theta_1 + T_{11,0} \theta_{1,0} + T_{12} \theta_2 + T_{12} \theta_{2,0}, \quad y_9 = M_{11}, \\
 y_{10} &= M_{12}^*, \quad T_{21}^* = T_{12}(1 + \varepsilon_{1,0}), \quad T_{22}^* = T_{22}(1 + \varepsilon_{2,0}) + T_{22,0} \varepsilon_2, \\
 T_{23}^* &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} - a_1 (y_4 - M_{22}) + 2a_2 M_{12} + \\
 &+ T_{11,0} \theta_1 + T_{11} \theta_{1,0} + T_{12,0} \theta_2 + T_{12} \theta_{2,0}. \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

Зусилля  $T_{22}$ ,  $T_{23}$  та моменти  $M_{22}$ ,  $M_{12}$  є пасивними змінними. Вони використані тільки як позначення таких залежностей:

$$\begin{aligned}
 T_{22} &= d_{11} T_{11} + d_{21} T_{12} + d_{31} M_{11} - (C_{22}^* - C_{22}^0) \varepsilon_{22} - \\
 &- (B_{22}^* - B_{22}^0) \kappa_{22} - (B_{26}^* - B_{26}^0) \kappa_{12};
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 M_{22} &= d_{12}T_{11} + d_{22}T_{12} + d_{32}M_{11} - (B_{22}^* - B_{22}^0)\varepsilon_{22} - \\
 &- (D_{22} - D_{22}^0)\kappa_{22} - (D_{26} - D_{26}^0)\kappa_{12}; \\
 M_{12} &= d_{13}T_{11} + d_{23}T_{12} + d_{33}M_{11} - (B_{26}^* - B_{26}^0)\varepsilon_{22} - \\
 &- (D_{26} - D_{26}^0)\kappa_{22} - (D_{66} - D_{66}^0)\kappa_{12}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Праві частини рівнянь (3.8) містять функції  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $\varepsilon_1$ . Їх потрібно виразити через розв'язувальні функції  $y_i$ . Якщо такі вирази будуть знайдені, то для визначення функцій  $T_{22}$ ,  $M_{22}$ ,  $M_{12}$  досить буде скористатись залежностями (3.10). Враховуючи те, що

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_5}{\partial \alpha_1} + a_1 y_6 - \frac{1}{R_1} y_7, \\
 \kappa_{12} = \tau &= 2 \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial y_8}{\partial \alpha_2} + a_2 \frac{1}{A_2} \frac{\partial y_7}{\partial \alpha_2} + a_2 \frac{y_6}{R_2} - \frac{1}{R_2} \omega_1 \right)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

запишемо п'яте і шосте рівняння системи (3.8) та перші два вирази (3.9) у такому вигляді

$$\varepsilon_1(1 + \varepsilon_{1,0}) - A_{11}T_{11} - A_{12}T_{12} = f_5,$$

$$\varepsilon_1\omega_{2,0} - A_{21}T_{11} - A_{22}T_{12} = f_6,$$

$$\varepsilon_1T_{11,0} + T_{11}(1 + \varepsilon_{1,0}) = y_1,$$

$$T_{11} \left( \omega_{1,0} - \frac{2}{R_2} d_{13} \right) + T_{12} \left( 1 + \varepsilon_{2,0} - \frac{2}{R_2} d_{23} \right) =$$

$$= y_2 - T_{12,0}\varepsilon_2 + \frac{2}{R_2}d_{33}y_4 - \frac{2}{R_2}(B_{26}^* - B_{26}^0)\varepsilon_{22} - \\ - \frac{2}{R_2}(D_{26} - D_{26}^0)\kappa_{22} - \frac{2}{R_2}(D_{66} - D_{66}^0)\kappa'_{12},$$

де

$$f_5 = y_8\theta_{1,0} + A_{13}y_4 + d_{11}\varepsilon_{22} + d_{12}\kappa_{22} + d_{13}\kappa'_{12}, \\ f_6 = y_{8,0}\theta_2 - \varepsilon_2\omega_{1,0} + y_8\theta_{2,0} + A_{23}y_4 + d_{21}\varepsilon_{22} + d_{22}\kappa_{22} + d_{23}\kappa'_{12}, \\ g_1 = y_1, g_2 = y_2 - T_{12,0}\varepsilon_2 + \frac{2}{R_2}d_{33}y_4 - \frac{2}{R_2}(B_{26}^* - B_{26}^0)\varepsilon_{22} - \\ - \frac{2}{R_2}\left(D_{26} - D_{26}^0\right)\kappa_{22} - \frac{2}{R_2}(D_{66} - D_{66}^0)\kappa'_{12}. \quad (3.12)$$

Маємо систему рівнянь для визначення невідомих.

Після незначних спрощень вона набуває вигляду

$$\varepsilon_1 - A_{11}T_{11} - A_{12}T_{12} = f_5, \\ -A_{21}T_{11} - A_{22}T_{12} = f_6, \\ \varepsilon_1 T_{11,0} + T_{11} = g_1, \\ T_{12} = g_2. \quad (3.13)$$

При виключенні змінних  $T_{11}$  і  $T_{12}$  отримуємо два рівняння

$$\varepsilon_1(1 + A_{11}T_{11,0}) = f_5^*, \\ \varepsilon_1(A_{21}T_{11,0}) = f_6^*, \quad (3.14)$$

де

$$f_5^* = f_5 + g_1 \left[ A_{11} + \left( \frac{2}{R_2} d_{13} \right) \right] + g_2(A_{12}),$$

$$f_6^* = f_6 + g_1 \left[ A_{21} - (A_{22}) \left( \frac{2}{R_2} d_{13} \right) \right] + g_2(A_{22}). \quad (3.15)$$

За правилом Крамера знаходимо

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}. \quad (3.16)$$

Значення визначників  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta$  знаходимо за формулами

$$\Delta_1 = f_5^* [1 + (A_{22})T_{11,0}] - f_6^* [(A_{12})T_{11,0}],$$

$$\Delta_2 = -f_5^* (A_{21}T_{11,0}) + (1 + A_{11}T_{11,0})f_6^*,$$

$$\Delta = (1 + A_{11}T_{11,0}) [1 + (A_{22})T_{11,0}] - [(A_{12})T_{11,0}] [(A_{21}T_{11,0})]. \quad (3.17)$$

Коли відомі вирази для  $\varepsilon_1$  через розв'язувальні функції, то можемо також знайти

$$T_{12} = [\varepsilon_1 (A_{21}T_{11,0}) - f_6 - A_{21}g_1] (A_{22})^{-1},$$

$$T_{11} = g_1 - \varepsilon_1 T_{11,0},$$

$$T_{13} = y_3 + T_{11,0}y_8 - T_{11}y_{8,0} - T_{12,0}\theta_2 - T_{12,0}\theta_{2,0}. \quad (3.18)$$

Враховуючи періодичність шуканих функцій у цьому напрямку, можна апроксимувати їх тригонометричними рядами Фур'є і тим звести систему (3.8) до системи

звичайних диференціальних рівнянь.

### 3.2. Використання рядів Фур'є в комплексній формі для побудови нормальної системи рівнянь стійкості анізотропних оболонок 10-го порядку

Розглядувані оболонки замкнуті, тому розв'язувальні функції періодичні за коловою координатою  $\alpha_2$  або  $\varphi$ . Для задоволення вимогам періодичності за  $\alpha_2$ , скористаємось рядами Фур'є у комплексній формі

$$y_j = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} y_{j,n} e^{in\varphi}, \quad \varphi = \alpha_2, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi, \quad (3.19)$$

де  $y_{j,n}$  – комплексні функції  $j=1,\dots,10$ , а  $n$  – параметр колового хвилеутворення.

Після підстановки (3.19) в систему рівнянь стійкості (3.8), отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь, яка кожного додатного значення  $n$  має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{dy_{1,n}}{d\alpha_1} &= -in_a (T_{12,n}) + \psi_2 (T_{22,n} - T_{11,n}) + \frac{1}{R_1} (y_{3,n} - in_a M_{12,n}); \\ \frac{1}{A_1} \frac{dy_{2,n}}{d\alpha_1} &= -in_a (T_{22,n}) - \psi_2 (2T_{12,n}) + \left( \frac{3}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \psi_2 M_{12,n} + \\ &+ \frac{1}{R_2} (-T_{12}^0 y_{8,n} + T_{22}^0 \theta_{2,n} - T_{12,n} y_8^0 + T_{22,n} \theta_2^0 + in_a M_{12,n}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{A_1} \frac{dy_{3,n}}{d\alpha_1} &= -in_a \left( -T_{12}^0 y_{8,n} + T_{22}^0 \theta_{2,n} - T_{12,n} y_8^0 + T_{22,n} \theta_2^0 + 2\psi_2 M_{12,n} \right) - \\
 &- \psi_2 y_{3,n} - \frac{1}{R_1} y_{1,n} - \frac{1}{R_2} (T_{22,n}); \\
 \frac{1}{A_1} \frac{dy_{4,n}}{d\alpha_1} &= -in_a M_{12,n} - \psi_2 (y_{4,n} - M_{22,n}) + y_{3,n} + T_{11}^0 y_{8,n} + \\
 &+ T_{11,n} y_8^0 - T_{12}^0 \theta_{2,n} - T_{12,n} \theta_2^0; \\
 \frac{1}{A_1} \frac{dy_{5,n}}{d\alpha_1} &= \frac{1}{R_1} y_{7,n} - y_{8,n} y_8^0 + A_{11} T_{11,n} + A_{12} T_{12,n} + A_{13} y_{4,n} - \\
 &- d_{11} \varepsilon_{22,n} - d_{12} \chi_{22,n} - d_{13} \chi_{12,n}; \\
 \frac{1}{A_1} \frac{dy_{6,n}}{d\partial\alpha_1} &= -in_a y_{5,n} + \psi_2 y_{6,n} + y_{8,n} \theta_2^0 + y_8^0 \theta_{2,n} + \quad (3.20) \\
 &+ A_{12} T_{11,n} + A_{22} T_{12,n} + A_{23} y_{4,n} - d_{21} \varepsilon_{22,n} - d_{22} \chi_{22,n} - d_{23} \chi_{12,n}; \\
 \frac{1}{A_1} \frac{dy_{7,n}}{d\alpha_1} &= -\frac{1}{R_1} y_{5,n} - y_{8,n}; \\
 \frac{1}{A_1} \frac{dy_{8,n}}{d\alpha_1} &= -\frac{1}{R_1} \varepsilon_{1,n} + A_{13} T_{11,n} + A_{23} T_{12,n} + A_{33} y_{4,n} - \\
 &- d_{31} \varepsilon_{22,n} - d_{32} k_{22,n} - d_{33} k_{12,n}; \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_{9,n}}{\partial\alpha_1} &= T_{23,n}^* + d_{31} \varepsilon_{22,n} + d_{32} \kappa_{22,n} + d_{33} \kappa_{12,n}; \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_{10,n}}{\partial\alpha_1} &= M_{12,n}^* + A_{32} T_{12,n}^* + d_{33} \kappa_{12,n},
 \end{aligned}$$

де  $n_a = n / A_2$ .

Таким чином, задача статичної стійкості симетрично завантаженої пружної анізотропної оболонки обертання зведена до системи з десяти звичайних однорідних диференціальних рівнянь у нормальній формі (3.20) із змінними коефіцієнтами і однорідними граничними умовами:

$$\text{на контурі } \alpha_1 = \alpha_0 : B_o y_n = 0,$$

$$\text{на контурі } \alpha_1 = \alpha_l : B_n y_n = 0. \quad (3.21)$$

Мінімальне власне значення однорідної крайової задачі (3.20), (3.21) характеризує момент переходу від симетричного основного рівноважного стану до несиметричного, якому властиві відповідне число  $n$  хвиль в коловому напрямку. Цей стан рівноваги повністю характеризується:  $y_{1,n}, \dots, y_{10,n}, T_{11,n}, T_{22,n}, T_{12,n}, M_{22,n}, M_{12,n}, \varepsilon_{1,n}, \varepsilon_{2,n}, \varepsilon_{22,n}, \theta_{1,n}, \theta_{2,n}, k_{22,n}, k_{12,n}$ , а також докритичними параметрами  $T_{11}^0, T_{22}^0, T_{12}^0, \theta_1^0, \theta_2^0$ .

Зусилля і моменти, що входять в (3.20), визначаються із залежностей

$$T_{11,n} = y_{6,n};$$

$$\begin{aligned}
 T_{22,n} &= d_{11}T_{11,n} + d_{21}T_{12,n} + d_{31}y_{4,n} + (C_{22} - C_{22}^0)\varepsilon_{22,n} + \\
 &+ (K_{22} - K_{22}^0)k_{22,n} + (K_{26} - K_{26}^0)k_{12,n}; \\
 M_{22,n} &= d_{12}T_{11,n} + d_{22}T_{12,n} + d_{32}y_{4,n} + (K_{22} - K_{22}^0)\varepsilon_{22,n} + \\
 &+ (D_{22} - D_{22}^0)k_{22,n} + (D_{26} - D_{26}^0)k_{12,n}; \\
 M_{12,n} &= d_{13}T_{11,n} + d_{23}T_{12,n} + d_{33}y_{4,n} + (K_{26} - K_{26}^0)\varepsilon_{22,n} + \\
 &+ (D_{26} - D_{26}^0)k_{22,n} + (D_{66} - D_{66}^0)k_{12,n}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Окрім цих, вирази для визначення  $\varepsilon_{1,n}$  і  $T_{12,n}$  мають

вигляд

$$\varepsilon_{1,n} = \Delta_1 / \Delta^*, \text{ а } T_{12,n} = (z_{3,n}) / r_{22}, \tag{3.23}$$

де введені такі позначення

$$\begin{aligned}
 \Delta^* &= r_{12}^*, \Delta_1 = r_{12}^* z_{1,n}^* - r_{11}^* z_{2,n}^*, \\
 r_{11}^* &= r_{11} - \frac{r_{21}}{r_{22}}(-A_{12}), r_{12}^* = r_{12} - \frac{r_{21}}{r_{22}}(-A_{22}), \\
 r_{11} &= d_{13} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), r_{12} = 1 + \varepsilon_2^0 + d_{23} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \\
 r_{22} &= 1 - \frac{1}{R_2} d_{23}, \\
 z_{1,n}^* &= z_{1,n} - \frac{1}{r_{22}} z_{3,n}(-A_{12}), z_{2,n}^* = z_{2,n} - \frac{1}{r_{22}} z_{3,n}(-A_{22}), \\
 z_{1,n} &= A_{11}(y_{1,n}) + y_{8,n} \theta_1^0 + A_{13}y_{4,n} - d_{11}\varepsilon_{22,n} - d_{12}k_{22,n} - d_{13}k_{12,n},
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$z_{2,n} = A_{12}(y_{1,n}) + y_{8,n}\theta_2^0 + y_8^0\theta_{2,n} + A_{23}y_{4,n} -$$

$$- d_{12}\varepsilon_{22,n} - d_{22}k_{22,n} - d_{23}k_{12,n},$$

$$z_{3,n} = -\left(-\frac{1}{R_2}d_{13}\right)(y_{1,n}) + y_{2,n} + \frac{1}{R_2}d_{33}y_{4,n} + \frac{1}{R_2}(K_{26} - K_{26}^0)\varepsilon_{22,n} +$$

$$+ \frac{1}{R_2}(D_{26} - D_{26}^0)k_{22,n} + \frac{1}{R_2}(D_{66} - D_{66}^0)k_{12,n}.$$

Мінімальне власне число знаходиться при послідовному збільшенні навантаження, коли визначник матриці граничних умов дорівнює нулю. При розв'язку системи диференціальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами визначник є комплексним. Щоб існував розв'язок системи однорідних алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами необхідно, щоб були одночасно рівними нулю дійсна та уявна частини визначника. Методика розв'язку, розглядуваної крайової задачі, базується на чисельному методі дискретної ортогоналізації [58].

### **3.3. Методика чисельного розв'язання рівнянь стійкості пружних анізотропних оболонок з комплексними коефіцієнтами**

Метод дискретної ортогоналізації [56, 58] дає змогу здобувати чисельні розв'язки крайових задач для лінійних



звичайних диференціальних рівнянь, коли наявні швидкозмінні розв'язки, що зменшуються чи збільшуються. Суть методу полягає у тому, що весь інтервал інтегрування розбивають на ділянки, на кожній з них проводять чисельне інтегрування вихідного диференціального рівняння так само, як і при використанні методу початкових параметрів. Довжини ділянок вибирають такими, що б в межах однієї ділянки розв'язки однорідного рівняння залишились лінійно незалежними. При переході від ділянки до ділянки над матрицею розв'язків здійснюються лінійні перетворення, щоб вектори часткових розв'язків однорідного та неоднорідного рівнянь були ортогональними. Таким чином, вдається зберегти лінійну незалежність розв'язків на всьому інтервалі інтегрування. Крім того, щоб запобігти надзвичайному збільшенню чисельних значень розв'язків, на границях ділянок вводять нормуючі множники.

Таким чином, весь інтервал інтегрування  $0 \leq x \leq l$  розбивають на  $k$  ділянок.  $0 \leq x \leq x_1$ ,  $x_1 \leq x \leq x_2$ , ...,  $x_{k-1} \leq x \leq x = l$ . На кожній з ділянок, наприклад, за номером  $j$  будують систему векторів  $r$  розв'язку однорідного рівняння  $y_n^{(j)}(x) (h = 1, 2, \dots, r)$  і вектор розв'язків

неоднорідного рівняння  $y_0^{(j)}(x)$ . Повний розв'язок на  $j$ -й ділянці

$$y(x) = y_n^{(j)}(x) + \sum_{k=1}^n C_k^{(j)} y_k^{(j)}(x), \quad (3.25)$$

де  $C_k^{(j)}$  –  $r$  сталих для  $j$ -ї ділянки.

У вираз (3.25) входять лише  $r$  сталих для системи диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку, оскільки розв'язки  $y_0(x)$ ,  $y_k(x)$  побудовані так, що  $m$  граничних умов при  $x=0$  виконуються автоматично.

Вираз (3.25) можливо записати в матричному вигляді

$$\begin{aligned} Y^j(x) &= [y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots, y_r^{(j)}, y_0^{(j)}] = \\ &= \begin{bmatrix} y_{1,1}^{(j)} & y_{1,2}^{(j)} & \dots & y_{1,r}^{(j)} & y_{1,0}^{(j)} \\ y_{2,1}^{(j)} & y_{2,2}^{(j)} & \dots & y_{2,r}^{(j)} & y_{2,0}^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n,1}^{(j)} & y_{n,2}^{(j)} & \dots & y_{n,r}^{(j)} & y_{n,0}^{(j)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

та вектор

$$C^j = [C_1^{(j)}, C_2^{(j)}, \dots, C_r^{(j)}, 1]. \quad (3.27)$$

Тоді

$$y(x) = Y^{(j)}(x)C^{(j)} \quad (x_{j-1} \leq x \leq x_j). \quad (3.28)$$

Із умови неперервності розв'язку в точках ділення  $x_j$  випливає, що

$$Y^{(j)}(x_j)C^{(j)} = Y^{(j+1)}(x_j)C^{(j+1)}. \quad (3.29)$$

Перейдемо до викладання методу побудови розв'язків  $Y^{(j)}$ . Для цього вибираємо систему  $r$  лінійно незалежних векторів  $z_k^{(0)}$  ( $h = 1, 2, \dots, r$ ) і вектор  $z_0^{(0)}$  так що б вираз

$$y(0) = z_0^{(0)} + \sum_{k=1}^r C_k z_k^{(0)} \quad (3.30)$$

задовольнив граничним умовам при  $x=0$  для будь-яких значень  $C_k$ . Після чого на першій ділянці  $r$  разів інтегруємо однорідне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dx} y_k = F y_k \quad (h = 1, 2, 3, \dots, r) \quad (3.31)$$

при початкових умовах

$$y_k(0) = z_k^{(0)}, \quad (3.32)$$

а також розв'язуємо задачу Коші для неоднорідного рівняння

$$\frac{d}{dx} y_0 = F y_0 + q \quad (3.33)$$

при початковій умові  $y_0(0) = z_0^{(0)}$ .

Внаслідок інтегрування знаходимо матрицю розв'язків у точці  $x = x_1$ :

$$Y^{(1)}(x) = [y_1^{(1)}(x_1), y_2^{(1)}(x_1), \dots, y_r^{(1)}(x_1), y_0^{(1)}(x_1)] =$$

$$= \begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \dots & y_{1,r} & y_{1,0} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & \dots & y_{2,r} & y_{2,0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n,1} & y_{n,2} & \dots & y_{n,r} & y_{n,0} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Вектори, що входять у цю матрицю

$$y_i = [y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}] \quad (i = 1, 2, \dots, r, 0) \quad (3.35)$$

підлягають потім ортогоналізації та нормуванню за такими формулами:

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= \sqrt{(y_1 y_1)}, \quad z_1 = \frac{1}{\omega_{11}} y_1, \\ \omega_{12} &= \sqrt{(z_1 y_2)}, \quad \omega_{22} = \sqrt{(y_2 y_2) - \omega_{12}^2}, \quad z_2 = \frac{1}{\omega_{22}} (y_2 - z_1 \omega_{12}), \\ \omega_{13} &= (z_1 y_3), \quad \omega_{23} = (z_2 y_3), \quad \omega_{33} = \sqrt{(y_3 y_3) - \omega_{13}^2 - \omega_{23}^2}, \\ z_3 &= \frac{1}{\omega_{33}} (y_3 - z_1 \omega_{13} - z_2 \omega_{23}), \\ &\dots \dots \dots \\ z_r &= \frac{1}{\omega_{rr}} (y_r - z_1 \omega_{1r} - z_2 \omega_{2r} - \dots - z_{r-1} \omega_{r-1,r}), \\ \omega_{10} &= (z_1 y_0), \quad \omega_{20} = (z_2 y_0), \quad \dots, \quad \omega_{r0} = (z_r y_0), \\ z_0 &= y_0 - z_1 \omega_{10} - z_2 \omega_{20} - \dots - z_r \omega_{r0}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

де в дужках мають місце скалярні добутки векторів

$$(z_m y_n) = \sum_{i=1}^n z_{im} y_{ik}. \quad (3.37)$$

За формулами (3.37) знаходимо  $(r+1)$  векторів  $z_k (k=1,2,\dots,r,0)$ , що утворюють матрицю

$$z = \left[ z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \dots, z_r^{(1)}, z_0^{(1)} \right] = \begin{bmatrix} z_{1,1}^{(1)} & z_{1,2}^{(1)} & \dots & z_{1,r}^{(1)} & z_{1,0}^{(1)} \\ z_{2,1}^{(1)} & z_{2,2}^{(1)} & \dots & z_{2,r}^{(1)} & z_{2,0}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n,1}^{(1)} & z_{n,2}^{(1)} & \dots & z_{n,r}^{(1)} & z_{n,0}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

і величини  $\omega_{ij}$ , що утворюють трикутну матрицю

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \dots & \omega_{1r} & \omega_{10} \\ 0 & \omega_{22} & \omega_{23} & \dots & \omega_{2r} & \omega_{20} \\ 0 & 0 & \omega_{33} & \dots & \omega_{3r} & \omega_{30} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_{rr} & \omega_{r0} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Верхні індекси при  $z$  і  $\Omega$  вказують на точку  $(x_1)$ , для якої знайдені ці матриці.

Формули (3.36) встановлюють зв'язок між матрицями  $Y^{(1)}(x)$ ,  $z^{(1)}$  і  $\Omega$  у вигляді

$$Y^{(1)}(x) = z^{(1)} \Omega^{(1)}. \quad (3.40)$$

Вектори  $z$  мають такі властивості:

- 1) скалярний добуток будь-яких різних векторів  $(z_i z_k) = 0 (i \neq k)$ , що є свідченням ортогональності векторів;
- 2) норма кожного із векторів  $z_k (k=1,2,\dots,r) (z_k z_k) = 1$

( $k = 1, 2, \dots, r$ ).

Вектори  $z_k^{(1)}$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) приймаємо за початкові значення при розв'язку задачі Коші для однорідного рівняння (3.31) на другій ділянці  $x_1 \leq x \leq x_2$ , а вектор  $z_0^{(1)}$  – для неоднорідного рівняння (3.33). Після інтегрування знаходимо вектори  $y_k^{(2)}(x_2)$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) і  $y_0^{(2)}(x_2)$ , що складають матрицю  $Y^{(2)}$ . І вектори знову ортогоналізуємо за формулами (3.36), причому знаходимо матриці  $z^{(2)}$  і  $\Omega^{(2)}$ .

Після цього за початковими умовами, що визначаються векторами  $z^{(2)}$  інтегруємо однорідні та неоднорідні рівняння на третій ділянці, при цьому здійснюємо ортогоналізацію тощо.

Внаслідок інтегрування на останній  $p$ -й ділянці знаходимо вектори  $y_k^{(p)}(l)$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ), що складають матрицю  $Y^{(p)}(l)$ .

Граничні умови при  $x = l$  дозволяють знайти  $r$  сталих, що входять до рівняння

$$y(l) = Y^{(p)}(l)C^{(p)}, \quad (3.41)$$

де  $C^{(p)} = [C_1^{(p)}, C_2^{(p)}, \dots, C_r^{(p)}, 1]$ , а також вектор розв'язку  $y(l)$ .

Далі можливо послідовно визначити вектор розв'язку в усіх точках розбивання  $x_j$ . При цьому використовують

умову (3.29) неперервності розв'язків. Підставляючи до неї

$$Y^{(j+1)}(x_j) = z^{(j)}, Y^{(j)}(x_j) = z^{(j)}\Omega^{(j)},$$

знайдемо  $z^{(j)}\Omega^{(j)}C^{(j)} = z^{(j)}\Omega^{(j)}C^{(j+1)}$ .

Звідси випливає, що вектори сталих на сусідніх ділянках зв'язані залежностями

$$\Omega^{(j)}C^{(j)} = C^{(j+1)}. \quad (3.42)$$

Оскільки вектор сталих на останній  $p$ -й ділянці знайдений з граничних умов (3.41), встановлені трикутникові матриці  $\Omega$ , то розв'язуючи послідовно рівняння (3.42) в  $p-1, p-2, \dots, 2$ -й, 1-й точках розбивання, можна знайти вектори  $C^{(j)}$  і вектори розв'язку крайової задачі

$$y(x_j) = z^{(j)}C^{(j+1)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, p-1). \quad (3.43)$$

Розв'язок рівнянь (3.42) не викликає значних труднощів через наявність трикутникових матриць  $\Omega^{(j)}$ . Записаний в дійсній формі алгоритм цього розв'язку

$$C_r^{(j)} = \frac{1}{\omega_{r,r}^{(j)}} \left( C_r^{(j+1)} - \omega_{r,0}^{(j)} \right),$$

$$C_{r-1}^{(j)} = \frac{1}{\omega_{r-1,r-1}^{(j)}} \left( C_{r-1}^{(j+1)} - \omega_{r-1,r}^{(j)} C_r^{(j)} - \omega_{r-1,0}^{(j)} \right), \quad (3.44)$$

$$C_{r-2}^{(j)} = \frac{1}{\omega_{r-2,r-2}^{(j)}} \left( C_{r-2}^{(j+1)} - \omega_{r-2,r-1}^{(j)} C_{r-1}^{(j)} - \omega_{r-2,r}^{(j)} C_r^{(j)} - \omega_{r-2,0}^{(j)} \right),$$

.....

$$C_1^{(j)} = \frac{1}{\omega_{11}^{(j)}} \left( C_1^{(j+1)} - \omega_{12}^{(j)} C_2^{(j)} - \omega_{13}^{(j)} C_3^{(j)} - \dots - \omega_{1r}^{(j)} C_r^{(j)} - \omega_{10}^{(j)} \right).$$

При практичному використанні методу необхідно мати на увазі, що при виконанні процедури ортогоналізації скалярні добутки не мають фізичного змісту. Тому результат ортогоналізації суттєво залежить від вибору масштабу окремих компонентів вектора стану.

Щоб застосувати викладену процедуру ортогоналізації до комплексних векторів, спочатку запишемо формули (3.43) у такому вигляді

$$\begin{aligned} y_1 &= \omega_{11} z_1, \\ y_2 &= \omega_{12} z_1 + \omega_{22} z_2, \\ y_3 &= \omega_{13} z_1 + \omega_{23} z_2 + \omega_{33} z_3, \\ &\dots\dots\dots \\ y_r &= \omega_{1r} z_1 + \omega_{2r} z_2 + \omega_{3r} z_3 + \dots + \omega_{rr} z_r. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Задача стійкості однорідна, тому розклад для вектора  $y_0$  не проводимо. Вирази (3.43) – це формули розкладу векторів  $y_i$  по системі ортогональних векторів  $z$ . Ці вектори можуть бути як дійсними, так комплексним. Умова ортогоналізації для комплексних векторів  $z_i$  має вигляд



$$(z_i, \bar{z}_k) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \quad (i \neq 0, k \neq 0) \end{cases}. \quad (3.46)$$

Дужками позначено скалярний добуток векторів, риска над  $z_k$  означає, що цей вектор спряжений по  $z_k$ . Використаємо властивість (3.46) для знаходження коефіцієнтів  $\omega_{ik}$ . Для цього будемо домножувати ліві та праві частини рівностей (3.45) на відповідні спряжені вектори  $\bar{y}_i$  або  $\bar{z}_i$ . Послідовність дій, що призводить до побудови ортонормованих комплексних векторів  $z_i$ , буде виглядати так:

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= \sqrt{y_1, \bar{y}_1}, \quad z_1 = \frac{1}{\omega_{11} y_1}, \\ \omega_{12} &= (z_1, \bar{y}_2), \quad \omega_{22} = \sqrt{(y_2, \bar{y}_2) - \omega_{12}^2}, \quad z_2 = \frac{1}{\omega_{22}} (y_2 - z_1 \omega_{12}), \\ \omega_{13} &= (z_1, \bar{y}_3), \quad \omega_{23} = (z_2, \bar{y}_3), \quad \omega_{33} = \sqrt{(y_3, \bar{y}_3) - \omega_{13}^2 - \omega_{23}^2}, \\ z_3 &= \frac{1}{\omega_{33}} (y_3 - z_1 \omega_{13} - z_2 \omega_{23}), \\ &\dots\dots\dots \\ z_r &= \frac{1}{\omega_{rr}} (y_r - z_1 \omega_{1r} - z_2 \omega_{2r} - \dots - z_{r-1} \omega_{r-1,r}). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Порівнюючи формули (3.47) і (3.43), помічаємо, що їхня основна властивість полягає у специфіці визначення скалярного добутку в полі комплексних векторів. Тому з

урахуванням цієї відмінності всі викладені вище операції мають місце і відносно комплексних розв'язків. Однак визначник системи рівнянь (3.31) в даному випадку буде комплексним. Для існування нетривіального розв'язку однорідної системи необхідно, щоб дійсна та уявна його частки дорівнювали нулю. На відміну від використовуваного раніше розв'язку розв'язувальних функцій в повні тригонометричні ряди Фур'є, коли аналогічний визначник був десятого порядку, в полі комплексних чисел його розмірність в два рази менша. Але найголовніше, що при переході через нуль обидві частини визначника змінюють знак на протилежний. Це значно покращує точність визначення критичних навантажень. При проведенні розрахунків, як показує досвід, накопичення похибок призводить до того, що в деяких випадках порушується одночасність зміни знаків обох частин визначника. Потрібно в таких випадках змінювати крок навантаження та кількість точок розбиття інтервалу.

### **3.4. Підтвердження достовірності отриманих результатів**

Обґрунтованість і достовірність отриманих результатів забезпечена математичною коректністю постановки задач;

застосуванням апробованих і обґрунтованих методів чисельного інтегрування при розв'язанні нелінійних неоднорідних й однорідних систем диференціальних рівнянь; збіжністю результатів при реалізації чисельного методу і контролем їх точності.

Для оцінки практичної збіжності чисельного методу визначення критичних навантажень для оболонок нульової гаусової кривини також виконані співставлення результатів розрахунку з даними інших авторів.

В роботі [20] проведені дослідження впливу механічних характеристик на стійкість тонких циліндричних оболонок анізотропної структури. Досліджено вплив «неортогotropних» констант узагальненого закону Гука на стійкість тонких анізотропних оболонок при геометрично нелінійному підході за методикою, що спирається на гіпотези Кірхгофа-Лява. Приведені залежності впливу кута повороту головних напрямків пружності матеріалу на стійкість циліндричних і конічних оболонок під дією осевого тиску та зовнішнього рівномірного тиску.

Виконаємо розрахунок анізотропної циліндричної оболонки за допомогою розробленої в роботі методики, що ґрунтується на уточненій теорії Тимошенко, та виконаємо

співставлення з результатами, що отримані в [20]. Геометричні параметри оболонки такі:  $L = 2m$ ,  $R = 1m$ , де  $L$  і  $R$  – відповідно довжина твірної і радіус циліндричної оболонки. В якості матеріалу шару вибрано однонапрямлений композит – боропластик, загальною товщиною  $h=1$  мм. Механічні характеристики такого матеріалу:

$$E_{11} = 2,8 \cdot 10^6 \text{ МПа}, E_{12} = 3,1 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$G_{12} = 1,05 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu_{12} = 0,25.$$

Умови закріплення оболонки прийняті шарнірно-нерухомими на обох торцях:  $u = v = w = M_{11} = M_{12} = 0$ .

В таблиці 3 представлені результати розрахунків на стійкість за використанням двох підходів: запропонованою методикою, що ґрунтується на гіпотезах уточненої теорії Тимошенко, та критичними значеннями, отриманими за методикою чисельного розрахунку, для якої характерним є використання геометричних співвідношень, представлених в роботі [20].

Розрахунки проведені для випадку дії рівномірно розподіленого зовнішнього тиску з урахуванням (анізотропний матеріал) та без урахування (ортотропний матеріал) додаткових механічних параметрів композиту  $B_{i6}$

і  $D_{i6}$ .

При цьому знаходились мінімальні значення критичного тиску  $q^{cr}$ , а також відповідне колове хвилеутворення  $n$  (їхні величини вказані поряд з критичними навантаженнями). Також, в таблиці зазначено величину розбіжності у відсотках величин критичних значень зовнішнього тиску.

Таблиця 3.1

Критичні значення зовнішнього тиску для одношарової циліндричної оболонки

$\psi$ , град	$q^{cr}$									
	Анізотропна модель					Ортотропна модель				
	Варіант теорії				$\Delta$ , %	Варіант теорії				$\Delta$ , %
	[20]	$n$	ТНАО	$n$		[20]		ТНОО	$n$	
0	2.33	9	2.355	8	1.1	2.33	9	2.355	8	1.1
10	2.56	10	2.636	8	2.9	2.68	10	2.722	8	1.5
20	3.05	10	3.096	8	1.5	3.34	11	3.364	9	0.7
30	3.72	10	3.765	7	1.2	4.09	10	4.135	8	1.1
40	4.69	9	4.702	7	0.3	5.08	9	5.09	7	0.2
50	5.94	8	5.942	6	0.0	6.42	8	6.44	7	0.3
60	7.14	8	7.172	6	0.4	7.59	8	7.638	6	0.6
70	8.28	7	8.34	5	0.7	8.85	7	8.92	6	0.8
80	8.59	6	8.63	5	0.5	9.34	7	9.426	5	0.9
90	8.7	6	8.756	5	0.6	8.7	6	8.756	5	0.6

Згідно з табл. 3.1 на рис. 3.1 відповідно, в осях критичні навантаження – кут  $\psi$ , представлені графіки що ілюструють вплив кута укладання композиту на величини критичних навантажень зовнішнього тиску. Суцільні криві – це критичні

значення здобуті за представленою в дисертації методикою (ТНАО). Штрихові отримані за розрахунковою методикою, що представлена в [20] і ґрунтується на гіпотезах Кірхгофа-Лява.

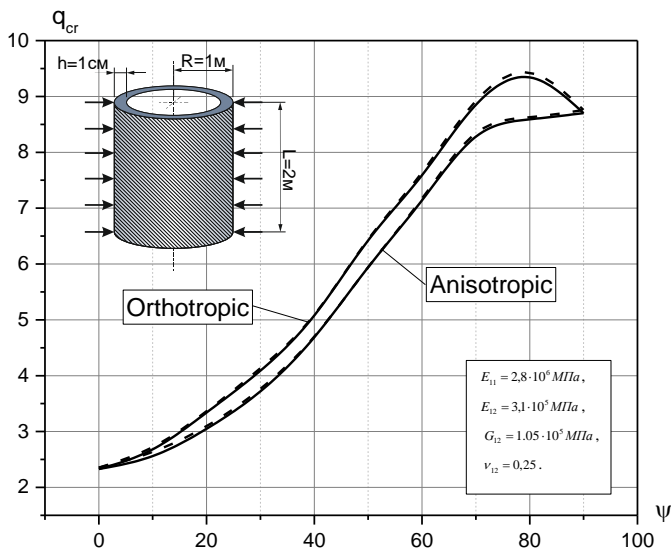


Рис. 3. 1. Величини критичних навантажень зовнішнього тиску для одношарової циліндричної оболонки

Аналіз результатів розрахунку, дає змогу констатувати співпадіння результатів розрахунку на стійкість тонкої анізотропної оболонки за двома методиками. Максимальна розбіжність між значення критичного тиску  $q^{cr}$  склала 2,9%.

В роботі Weaver P.M. [200] представлені дані експериментального дослідження стійкості шаруватого циліндра при осьовому тиску, виготовленого з композита CFPR T800-924 при укладанні шарів композиту під кутами  $\psi = \pm 45^\circ$ . Результати розрахунку здійснені за допомогою скінченоелементної моделі та аналітичного розрахунку, з виведення формули для критичного навантаження. Автором отримано задовільне співпадіння результатів експериментальних даних і теоретичних розрахунків. Геометричні параметри циліндра такі:  $L=250$  мм, радіус  $R=56$  мм. Оболонка виготовлена шляхом намотування 4-х

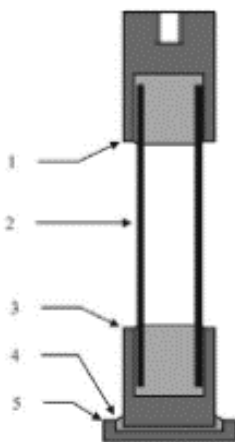


Рис. 3. 2. Схема дослідної установки

шарів композиту CFPR T800-924 загальною товщиною  $h=0,5$  мм навколо оправи.

Механічні характеристики композиту:

$$E_{11} = 0,161 \cdot 10^6 \text{ МПа},$$

$$E_{12} = 0,115 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu_{12} = 0,349,$$

$$G_{12} = G_{13} = 7,17 \cdot 10^3 \text{ МПа},$$

$$G_{23} = 7,0 \cdot 10^3 \text{ МПа}.$$

Краї оболонки при випробуванні були зафіксовані в обіймах (рис. 3.2), що при чисельному розрахунку моделюється як граничні

умови типу жорсткого защемлення:  $u = v = w = \theta_1 = \theta_2 = 0$ .

За результатами випробування дослідний циліндр втратив стійкість при навантаженні  $T_{11}^{cr} = 17,4$  кН. Був зафіксований згин зразка, що складався з набору хвиль в окружному напрямку в середній частині оболонки в кількості  $n = 4$  (рис. 3.3)

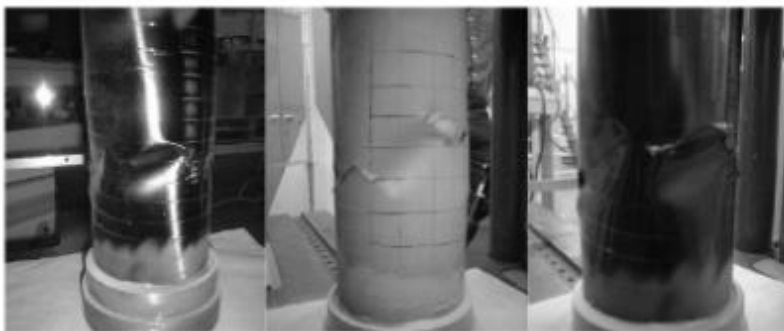


Рис. 3. 3. Вигляд дослідних зразків після втрати стійкості

При використанні розробленої методики, що ґрунтується на використанні співвідношень уточненої теорії Тимошенка (скрочене позначення «ТНАО»), виконаний чисельний розрахунок представленої в [200] циліндричної оболонки. За результатами розрахунку, величина критичного осьового тиску становить  $T_{11}^{cr} = 16,4$  кН пр кількості хвиль  $n=4$ . Розбіжність із експериментальними даними, отриманими в [200] становить 5,7%, що свідчить про коректність



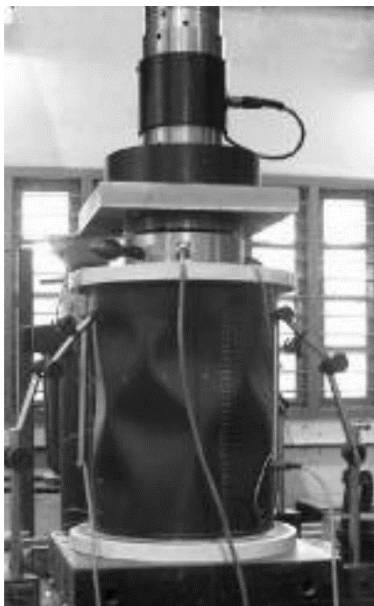


Рис. 3. 4. Схема дослідної установки

отриманих даних за результатами чисельного розрахунку по методиці ТНАО.

В [187] проведені експериментальні дослідження (рис. 3.4) циліндричних оболонок із композиту CFPR T300/914UD під дією статичного осьового тиску та виконані співставлення отриманих результатів із величинами критичних значень осьового тиску із чисельного

розрахунку, при використанні методу скінченних елементів (МСЕ).

Експериментальні дослідження виконувались для циліндра із внутрішнім діаметром 300 мм, довжиною 400 мм і товщиною 1 мм. Оболонка складалась із 8-ми симетрично розташованих композитних шарів, товщиною 0,125 мм кожен, на основі однонапрямленої вуглепоксидної смоли (T300/914UD):  $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/0^\circ]/[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/0^\circ]$ .

Таким чином номінальна товщина циліндричної

оболонки склала 1мм, а відношення радіуса оболонки до її товщини 150,5.

Механічні характеристики композиту такі:

$$E_{11} = 148,5 \cdot 10^3 \text{ МПа}, E_{12} = 9,85 \cdot 10^3 \text{ МПа},$$

$$G_{12} = 4,8 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \nu_{12} = 0,286.$$

При використанні розробленої методики (ТНАО) виконаний чисельний розрахунок представленої в [187] оболонки. Результати подані в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Критичні значення осевого тиску для циліндричної оболонки

$T_{11}^{cr}$ , кН			
Метод дослідження			
Чисельний МСЕ [187]	Експеримент [187]	Чисельний ТНАО	Чисельний ТНОО
108 [n=11]	99,8 [n=11]	105,8 [n=10]	107,2 [n=11]

Величина критичного осевого стискаючого навантаження, отримана згідно методики (ТНАО) і (ТНОО) для циліндричної оболонки дуже близька до експериментального значення [187]. Розбіжність складає менше 10%.

### **3.5. Дослідження стійкості нетонких анізотропних оболонок нульової гауссової кривини**

У цьому підрозділі зосередимо увагу на стійкості циліндричних і конічних оболонок, що входять до класу оболонок нульової гауссової кривини.

При осьовому тиску чи під дією зовнішнього тиску розглядатимуться боропластикові оболонки. Вихідним матеріалом однонапрявленого армованого шару є борні волокна. Механічні характеристики композиту такі:

$$E_{11} = 0,212 \cdot 10^6 \text{ МПа}, E_{12} = 0,112 \cdot 10^6 \text{ МПа}, \nu_{12} = 0,214,$$

$$G_{12} = G_{13} = 5,9 \cdot 10^4 \text{ МПа}, G_{23} = 4,32 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

При косопрехресному укладанні шарів утворюється анізотропний матеріал, співвідношення пружності якого відносно інтегральних величин мають вигляд (1.32). Присутні в них коефіцієнти  $B_{i6}$  і  $D_{i6}$  при  $i = 1, 2$  для кутів  $\psi_i \neq 0^\circ, 90^\circ$  в загальному випадку не дорівнюють нулю.

В перших підрозділах даного розділу будемо розглядати стійкість шаруватих оболонок з відношенням довжини  $L$  до радіуса оболонки  $R$  рівним одиниці ( $L/R = 1$ ). Закріплення торців оболонки будемо вважати однотипним: один з них шарнірно нерухомий ( $u = v = w = M_{11} = M_{12} = 0$ ), а інший – шарнірно рухомий ( $v = w = M_{11} = M_{12} = 0, T_{11} = -T_{11}^0$ ) при осьовому тиску та

( $v = w = M_{11} = M_{12} = T_{11} = 0$ ) – при зовнішньому. В наступних – дослідимо залежність критичних навантажень від довжини оболонки і граничних умов. Наведемо також приклади розрахунку на стійкість з іншими варіантами будови шаруватого пакету.

Розрахункові дані оцінимо за допомогою використання основної теорії, розв’язувальна система рівнянь якої представлена у вигляді (3.20). Співставлення чисельно отримуваних величин критичних навантажень будемо здійснювати з чисельними розрахунками на стійкість анізотропних оболонок, за методикою, що розроблена в [20] для тонких анізотропних оболонок і спирається на гіпотези Кірхгофа-Лява.

Для зменшення кількості громіздких перетворень при опису результатів, введемо скорочені позначення різних варіантів теорій:

- основний підхід розрахунку на стійкість, представлений рівняннями (3.20), в скороченому запису назвемо «ТСаО»;
- підхід, який використовує розроблену в [20] методику, що ґрунтується на гіпотезах Кірхгофа-Лява – «ТСаК».

### **3.5.1. Вплив товщини анізотропних оболонок на їх стійкість**

#### **3.5.1.1. Стійкість одношарових анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового тиску**

Розглядається стійкість одношарової оболонки під дією осьового тиску з відношенням довжини  $L$  до радіуса оболонки  $R$  рівним одиниці ( $L/R = 1$ ). Закріплення торців оболонки таке: один з них шарнірно нерухомий ( $u = v = w = M_{11} = M_{12} = 0$ ), а інший – шарнірно рухомий ( $v = w = M_{11} = M_{12} = 0, T_{11} = -T_{11}^0$ ). У табл. 3.3 наведені величини критичних значень стискаючих навантажень  $T_{11}^{cr}$  для оболонки з різним відношенням товщини  $h$  оболонки до її радіуса  $R$  (0,01; 0,1; 0,2). Результати здобуті за використанням двох підходів. В першому стовпці таблиці представлені результати розрахунків на стійкість нетонких оболонок за пропонованою методикою (ТСаО), що спирається на використання чисельного методу дискретної ортогоналізації при врахуванні моментного геометрично нелінійного напружено-деформованого стану. Другими приведені критичні значення, отримані за тією ж методикою чисельного розрахунку, для якої характерним є використання гіпотез Крхгофа-Лява, представлених в [20] (ТСаК). При цьому знаходились мінімальні значення  $T_{11}^{cr}$ , а також відповідне колове хвилеутворення  $n$  (величини

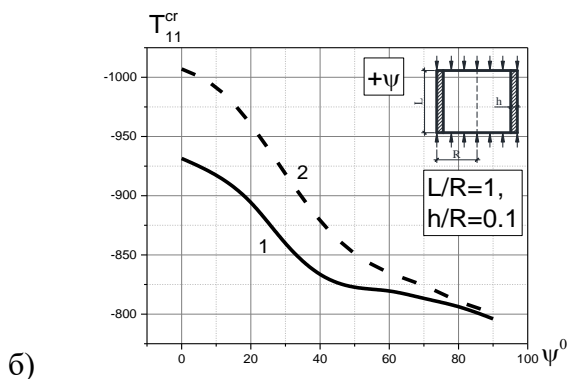
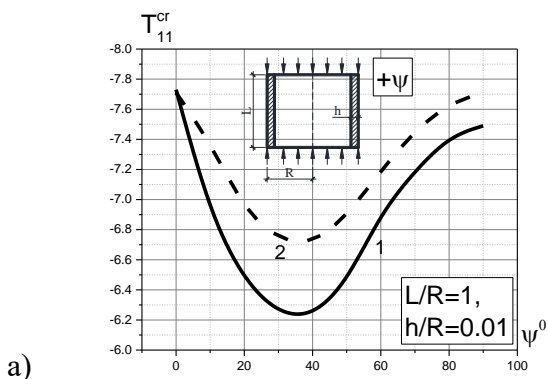
вказані в дужках під критичними навантаженнями). Окрім цього, в таблиці дано похибку у відсотках знаходження величин критичних значень стискаючих зусиль відносно до пропонованої (ТСаО) методики розрахунку на стійкість анізотропних циліндричних оболонок.

Таблиця 3.3

Величини критичних значень осевого тиску для одношарової оболонки в кН

Кут $\psi$ , град	h/R								
	0.01			0.1			0.2		
	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %
0	-7.71	-7.73	0.3	-931.5	-1007	8.1	-3556	-3590	1
	[9]	[7]		[3]	[3]		[3]	[3]	
10	-7.38	-6.9	6.5	-918.7	-995	8.3	-3400	-3560	4.7
	[8]	[9]		[3]	[3]		[3]	[3]	
20	-6.93	-6.46	6.8	-897.3	-962	7.2	-2772	-3540	27.7
	[8]	[9]		[3]	[3]		[3]	[3]	
30	-6.73	-6.24	7.3	-857.6	-918	7	-2693	-3540	31.5
	[8]	[8]		[3]	[3]		[3]	[3]	
40	-6.7	-6.22	7.2	-830.7	-877	5.6	-2719	-3600	32.4
	[7]	[8]		[3]	[3]		[3]	[3]	
50	-6.89	-6.45	6.4	-821.3	-849	3.4	-2756	-3750	36.1
	[7]	[9]		[3]	[3]		[3]	[3]	
60	-7.19	-6.91	3.9	-820.7	-834	1.6	-2840	-3990	40.5
	[7]	[7]		[3]	[3]		[3]	[3]	
70	-7.46	-7.19	3.6	-815.8	-825	1.2	-3305	-4250	28.6
	[8]	[10]		[3]	[2]		[3]	[3]	
80	-7.64	-7.42	2.9	-807.1	-810	0.4	-3263	-4220	29.3
	[8]	[9]		[3]	[3]		[3]	[3]	
90	-7.71	-7.49	2.9	-796	-801	0.6	-3319	-4180	25.9
	[8]	[8]		[3]	[3]		[3]	[3]	

Згідно табл. 3.3 на рис. 3.5 в осях  $T_{11}^{cr} - \psi$  представлені графіки, що ілюструють вплив кута  $\psi$  на величини критичних значень осевих зусиль  $T_{11}^{cr}$ . Крива 1 – це критичні значення здобуті за основною методикою (ТСаО). Графік 2 отриманий за розрахунковою методикою (ТСаК), що ґрунтується на гіпотезах Кірхгофа-Лява.



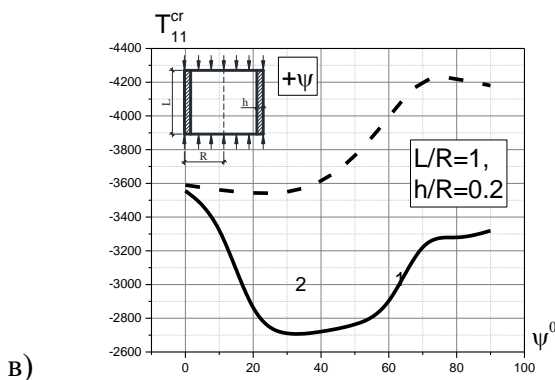


Рис. 3.5. Критичні значення осевих стискаючих зусиль для одношарової оболонки  
 а) –  $h/R = 0,01$ ; б) –  $h/R = 0,1$ ; в) –  $h/R = 0,2$

Основний пропонуваній підхід розрахунку на стійкість циліндричних анізотропних оболонок (ТСАО) призводить до отримання менших величин критичних навантажень порівняно із методикою, що спирається на гіпотези Кірхгофа-Лява (ТСАК). Різниця між величинами критичних навантажень знайдених за двома підходами для тонких оболонок є незначною. При товщині оболонки  $h/R = 0,01$  ця розбіжність 7,3% при дії осевого тиску. При збільшенні товщини оболонки, різниця між величинами критичних навантажень, що отримані за різними підходами, починає зростати. При  $h/R = 0,1$  різниця складає 8,3%, а при  $h/R = 0,2$  – 40,5%.



### **3.5.1.2. Стійкість одношарових анізотропних циліндричних оболонок під дією зовнішнього рівномірного тиску**

Докритичний напружено-деформований стан анізотропних циліндричних оболонок, що знаходяться під дією зовнішнього тиску, суттєво відрізняється від такого ж, що викликаний осьовим тиском. Наявність такої відмінності пов'язана з дещо іншим проявом взаємозв'язку між деформаціями стиску та зсуву, згину та кручення, які в свою чергу можуть призвести до нових особливостей втрати стійкості оболонками, що знаходяться під зовнішнім тиском.

Результати розрахунку критичних значень зовнішнього тиску  $q_{cr}$  в залежності від зміни кута укладання волокнистого композиту  $\psi$  в одношаровій циліндричній анізотропній оболонці приведені в табл. 3.4, яка має таку саму структуру, як і табл. 3.3. Їх величини здобуті за використанням двох підходів. В першому з них реалізована основна геометрична нелінійна теорія розрахунку нетонких анізотропних оболонок обертання (ТСАО). Другий підхід використовує розроблену в [20] методику розрахунку стійкості тонких анізотропних оболонок, за використання гіпотез Кірхгофа-Лява (ТСАК).

Згідно табл. 3.4 на рис. 3.6 представлені графіки, що

ілюструють вплив кута  $\psi$  на величини критичних значень зовнішнього тиску  $q_{cr}$ . Крива 1 – це критичні навантаження здобуті за основною методикою (ТСаО). Графік 2 отриманий за розрахунковою методикою (ТСаК).

Таблиця 3.4

Величини критичних навантажень зовнішнього тиску одношарової оболонки в кН/м<sup>2</sup>

Кут $\psi$ , град	h/R								
	0.01			0.1			0.2		
	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %
0	-3.82	-4.21	9.3	-616	-666.3	7.5	-6773	-11000	62.4
	[9]	[10]		[5]	[5]		[10]	[6]	
10	-4.24	-4.62	8.2	-620	-672	7.7	-6876	-11100	61.4
	[10]	[10]		[5]	[5]		[10]	[6]	
20	-5.38	-5.92	9.1	-632	-681.8	7.3	-7003	-11400	62.8
	[11]	[11]		[5]	[5]		[10]	[5]	
30	-6.88	-7.45	7.7	-651	-695.4	6.4	-6957	-11900	71.1
	[11]	[11]		[5]	[5]		[10]	[5]	
40	-8.98	-9.53	5.8	-675	-719.1	6.1	-6673	-12300	84.3
	[10]	[10]		[5]	[5]		[7]	[5]	
50	-11.18	-12.12	7.8	-692	-739.5	6.4	-5750	-11700	103.5
	[8]	[9]		[5]	[5]		[5]	[4]	
60	-12.78	-13.77	7.2	-696	-758.5	8.2	-5122	-6790	32.6
	[7]	[7]		[4]	[5]		[4]	[4]	
70	-13.6	-14.13	3.5	-694	-758.1	8.5	-4775	-5800	21.5
	[7]	[7]		[4]	[5]		[4]	[4]	
80	-14.2	-14.34	1	-691	-741.7	6.8	-4681	-5500	17.5
	[7]	[7]		[4]	[4]		[4]	[4]	
90	-14.08	-14.18	0.7	-689	-740	6.9	-4648	-5430	16.8
	[6]	[6]		[4]	[5]		[4]	[4]	

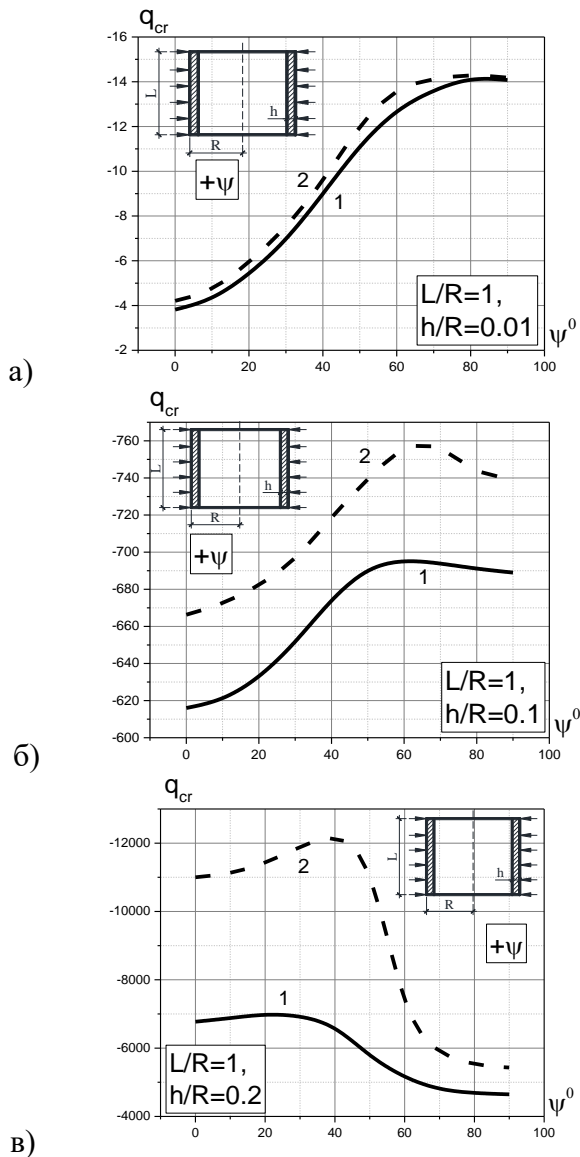


Рис. 3.6. Величини критичних навантажень зовнішнього тиску для одношарової оболонки

а) –  $h/R=0,01$ ; б) –  $h/R=0,1$ ; в) –  $h/R=0,2$

Як витікає з проведених розрахунків, основний пропонуванний підхід розрахунку на стійкість циліндричних анізотропних оболонок (ТСаО) призводить до отримання менших величин критичних навантажень порівняно із методикою, що спирається на гіпотези Кірхгофа-Лява (ТСаК). Різниця між величинами критичних навантажень знайдених за двома підходами для тонких оболонок є незначною. При товщині оболонки  $h/R = 0,01$  ця розбіжність не перевищує 9,3% при дії зовнішнього тиску. При збільшенні товщини оболонки, різниця між величинами критичних навантажень, що отримані за різними підходами, починає зростати. Для зовнішнього тиску різниця складає: при  $h/R = 0,1$  – 13%, а при  $h/R = 0,2$  – 103%.

### **3.5.2. Вплив довжини твірної на стійкість циліндричних анізотропних оболонок**

В даному підрозділі за допомогою вищевикладеної у роботі основної методики (ТСаО), досліджено вплив на величини критичних навантажень кута укладання композиту  $\psi$  для оболонок з різним відношенням довжини  $L$  до радіуса  $R$ :  $L/R = 0,5$  та  $L/R = 1,5$  . Розглядається стійкість

циліндричних оболонок, що виготовлені з боропластика під дією осьового тиску та зовнішнього рівномірного розподіленого тиску.

Приведені результати досліджень з встановлення величин критичних навантажень для оболонок з таким відношенням товщини  $h$  оболонки до їх радіуса  $R$ :  $h/R = 0,1; 0,2$  – відповідно.

### **3.5.2.1. Одношарова оболонка під дією осьового тиску**

Представлені результати розрахунків на стійкість циліндричної оболонки під дією осьового тиску з такими самими механічними характеристиками і закріпленнями торців, що і в підрозділі 3.5.1. Встановлені величини критичних навантажень осьового тиску залежно від кута  $\psi$  укладання армуючого матеріалу та товщини оболонки. Досліджено два варіанти циліндричних оболонок з різним відношенням довжини  $L$  до радіуса оболонки  $R$ :  $L/R = 0,5$  та  $L/R = 1,5$ . Результати досліджень приведені в табл. 3.5. і табл. 3.6 відповідно, що мають таку саму структуру як і табл. 3.3. Значення критичних навантажень здобуті за використанням двох підходів. В першому з них реалізована основна теорія розрахунку нетонких

анізотропних оболонок обертання (ТСаО). Другий підхід використовує розроблену в [20] методику розрахунку на стійкість тонких анізотропних оболонок, за використання гіпотез Кірхгофа-Лява (ТСаК).

Таблиця 3.5

Величини критичних значень осьового тиску для одношарової оболонки в кН при  $L/R=0,5$

Кут $\psi$ , град	h/R					
	0.1			0.2		
	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %
0	-923	-984	6.6	-4403	-6190	40.6
	[3]	[3]		[3]	[3]	
10	-918.7	-972	5.8	-4362	-6080	39.4
	[3]	[3]		[3]	[3]	
20	-879.6	-938	6.6	-4158	-5760	38.5
	[3]	[3]		[3]	[3]	
30	-857.6	-897	4.6	-3652	-5320	45.7
	[3]	[3]		[3]	[3]	
40	-811.8	-858	5.7	-3474	-4850	39.6
	[3]	[3]		[3]	[3]	
50	-811.8	-838	3.2	-3436	-4460	29.8
	[3]	[3]		[10]	[3]	
60	-820.7	-840	2.4	-3320	-4190	26.2
	[3]	[3]		[3]	[3]	
70	-835.1	-858	2.7	-3021	-4040	33.7
	[3]	[3]		[3]	[3]	
80	-858.6	-881	2.6	-3022	-3990	32
	[3]	[3]		[3]	[3]	
90	-889.1	-908	2.1	-3319	-4060	22.3
	[3]	[3]		[3]	[3]	

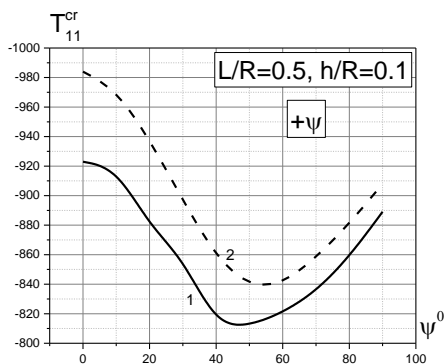
Таблиця 3.6

Величини критичних значень осевого тиску для одношарової оболонки в кН при  $L/R=1,5$

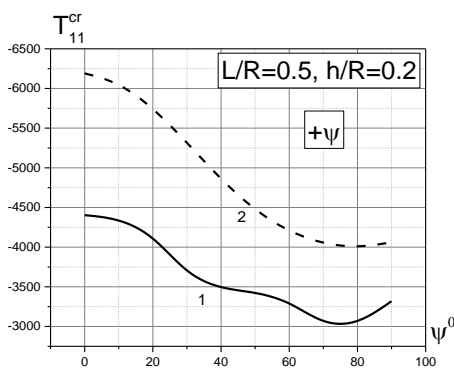
Кут $\psi$ , град	h/R					
	0.1			0.2		
	ТСАО	ТСАК	$\Delta$ , %	ТСАО	ТСАК	$\Delta$ , %
0	-764	-770.6	0.9	-3353	-3410	1.7
	[3]	[3]		[2]	[2]	
10	-745	-764.2	2.5	-3331	-3437	3.2
	[3]	[3]		[2]	[2]	
20	-726	-755.2	3.9	-3270	-3410	4.3
	[3]	[3]		[2]	[2]	
30	-713	-728.5	2.1	-3209	-3430	6.9
	[3]	[3]		[2]	[2]	
40	-698	-708	1.4	-3134	-3300	5.3
	[3]	[3]		[2]	[2]	
50	-682	-689.1	1	-2983	-3120	4.6
	[3]	[3]		[2]	[2]	
60	-674	-682.4	1.2	-2840	-2940	3.5
	[3]	[3]		[2]	[2]	
70	-675	-684.1	1.3	-2701	-2780	2.9
	[3]	[3]		[2]	[2]	
80	-682	-695.5	1.9	-2610	-2690	3.1
	[3]	[3]		[2]	[2]	
90	-687	-694.4	1.1	-2608	-2660	2
	[3]	[3]		[2]	[2]	

Згідно з табл. 3.5 і 3.6 на рис. 3.7 і 3.8 відповідно, в осях критичні навантаження  $T_{11}^{cr}$  – кут  $\psi$ , представлені графіки що ілюструють вплив кута укладання композиту на величини критичних значень осевого тиску. Крива 1 –

це критичні значення здобуті за основною методикою (ТСаО), графік 2 – (ТСаК).



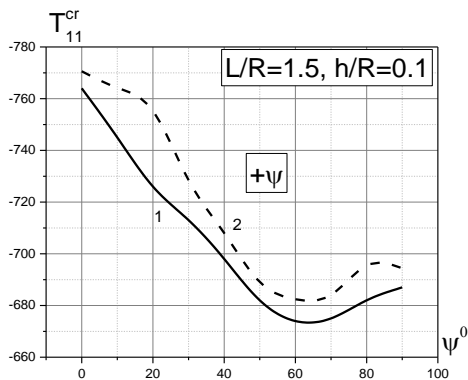
а)



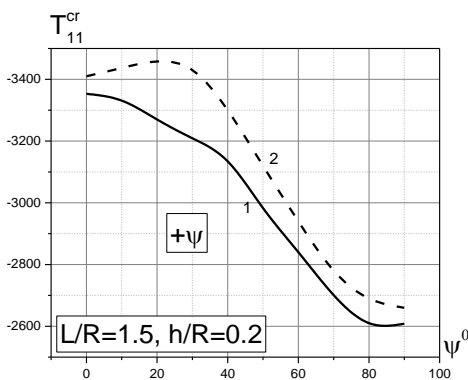
б)

Рис. 3.7. Критичні значення осевих стискаючих зусиль для одношарової оболонки при  $L/R=0,5$   
а)  $-h/R=0,1$ ; б)  $-h/R=0,2$





а)



б)

Рис. 3.8. Критичні значення осевих стискаючих зусиль для одношарової оболонки при  $L/R=1,5$   
а)  $-h/R=0,1$ ; б)  $-h/R=0,2$

Аналіз графіків, представлених на рис. 3.7 і рис. 3.8 дає змогу зробити такі висновки. Різниця між величинами критичних навантажень знайдених за методикою розрахунків на стійкість (ТСаО) порівняно із даними здобутими за

методикою (ТСАК) для оболонок із  $L/R = 0,5$ , товщиною до  $h/R = 0,1$  є незначною. Максимальна розбіжність складає 6,6%. При збільшенні товщини оболонки, різниця між величинами критичних навантажень, що отримані за різними підходами, починає зростати. При товщині оболонки  $h/R = 0,2$  розбіжність в результатах досягає 45,5%. Для оболонок із відношенням  $L/R = 1,5$  різниця між величинами критичних навантажень знайдених за методикою розрахунків на стійкість (ТСаО) у порівнянні із методикою (ТСАК) залишається малою, і навіть при товщині оболонки  $h/R = 0,2$  максимально складає 7,5%.

На рис. 3.9 представлено співставлення величин критичних навантажень осьового тиску для оболонок із відношенням  $L/R = 0,5; 1; 1,5$ . Тут введені такі позначення. Під символом «а» приведені графіки здобуті для анізотропних оболонок з  $L/R = 0,5$ , символом «b» –  $L/R = 1$ , символом «с» –  $L/R = 1,5$ .

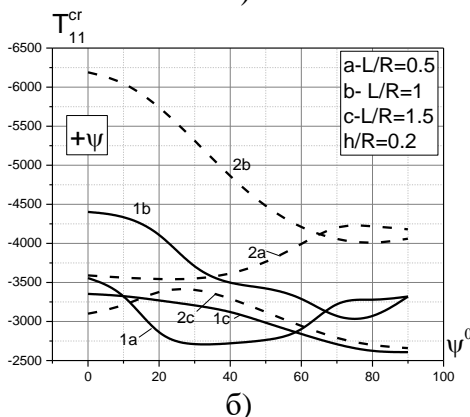
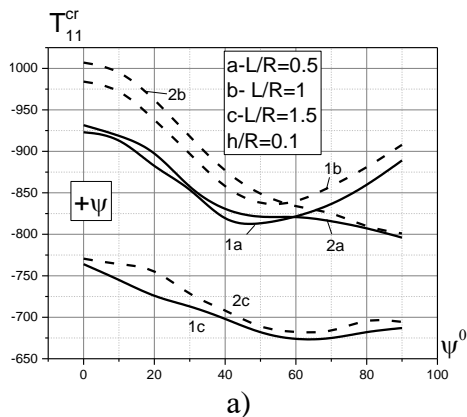


Рис. 3.9. Критичні значення осевих стискаючих зусиль для одношарової оболонки при  $L/R=0,5; 1,0; 1,5$   
а) –  $h/R=0,1$ ; б) –  $h/R=0,2$

Аналіз графічних залежностей дозволяє зробити такі висновки. Анізотропні циліндричні оболонки із відношенням  $L/R=1,5$  сприймають критичні навантаження осьового тиску орієнтовно в 1,5 раз менші ніж оболонки із  $L/R=1$  та  $L/R=0,5$ . Значення критичних навантажень осьового тиску

для оболонок з  $L/R = 0,5$  орієнтовно дорівнюють величинам для  $L/R = 1$ .

### **3.5.2.2. Одношарова оболонка під дією зовнішнього рівномірного тиску**

Представлені результати розрахунків на стійкість циліндричної оболонки під зовнішнього рівномірного тиску з такими самими механічними характеристиками та закріпленнями торців, що і в підрозділі 3.5.1. Встановлені величини критичних навантажень осевого тиску залежно від кута  $\psi$  укладання армуючого матеріалу та товщини оболонки. Досліджено два варіанти циліндричних оболонок з різним відношенням довжини  $L$  до радіуса оболонки  $R$  :  $L/R=0,5$  та  $L/R=1,5$ . Результати досліджень приведені в табл. 3.7. і табл. 3.8 відповідно, які мають таку саму структуру, як і табл. 3.3. Значення критичних навантажень здобуті за використанням двох підходів. В першому з них реалізована основна теорія розрахунку нетонких анізотропних оболонок обертання (ТСАО). Другий підхід використовує розроблену в [20] методику розрахунку стійкості тонких анізотропних оболонок, за використання гіпотез Кірхгофа-Лява (ТСАК).

Таблиця 3.7

Величини критичних навантажень зовнішнього тиску для одношарової оболонки в  $\text{кН/м}^2$  при  $L/R=0,5$

Кут $\psi$ , град	h/R					
	0.1			0.2		
	ТСАО	ТСАК	$\Delta$ , %	ТСАО	ТСАК	$\Delta$ , %
0	-2745	-3130	14	-5983	-6650	11.1
	[15]	[15]		[6]	[6]	
10	-2761	-3240	17.3	-6161	-7600	23.4
	[15]	[14]		[6]	[6]	
20	-2801	-3390	21	-6439	-8290	28.7
	[16]	[12]		[6]	[6]	
30	-2899	-3620	24.9	-6788	-8460	24.6
	[16]	[11]		[5]	[5]	
40	-3085	-3940	29.4	-7038	-9360	33
	[13]	[10]		[5]	[5]	
50	-3295	-4340	31.7	-7171	-10300	43.6
	[11]	[10]		[5]	[5]	
60	-3309	-4760	43.9	-7265	-11700	61
	[12]	[9]		[4]	[4]	
70	-3517	-5180	47.3	-7944	-12200	53.6
	[11]	[9]		[6]	[6]	
80	-3686	-5380	46	-8068	-12700	57.4
	[10]	[9]		[7]	[7]	
90	-3646	-5480	50.3	-8132	-12800	57.4
	[11]	[9]		[11]	[11]	

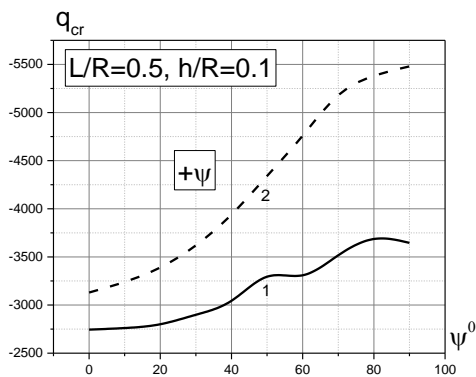
Таблиця 3.8

Величини критичних навантажень зовнішнього тиску для одношарової оболонки в  $\text{кН/м}^2$  при  $L/R=1,5$

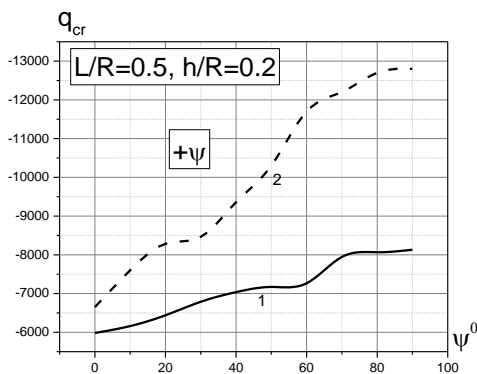
Кут $\psi$ , град	h/R					
	0.1			0.2		
	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %
0	-322	-356.2	9.6	-2340	-2327	0.6
	[4]	[4]		[3]	[4]	
10	-326	-357.6	8.8	-2370	-2344	1.1
	[4]	[4]		[3]	[4]	
20	-338	-373.4	9.5	-2380	-2400	0.8
	[4]	[4]		[3]	[4]	
30	-356	-388.3	8.3	-2440	-2495	2.2
	[4]	[4]		[3]	[4]	
40	-375	-408	8.1	-2510	-2630	4.6
	[4]	[4]		[3]	[3]	
50	-393	-427	8	-2570	-2650	3
	[4]	[4]		[3]	[3]	
60	-408	-434.7	6.1	-2620	-2660	1.5
	[4]	[4]		[3]	[3]	
70	-420	-446.4	5.9	-2620	-2717	3.6
	[4]	[4]		[3]	[3]	
80	-426	-452.4	5.8	-2630	-2689	2.2
	[4]	[4]		[3]	[3]	
90	-429	-450.1	4.7	-2630	-2675	1.7
	[4]	[4]		[3]	[3]	

Згідно з табл. 3.7 і 3.8 на рис. 3.10 і 3.11 відповідно, в осях критичні навантаження  $q_{cr}$  – кут  $\psi$ , представлені графіки що ілюструють вплив кута укладання композиту на величини критичних значень осевого тиску. Крива 1 –

це критичні значення здобуті за основною методикою (ТСаО), графік 2 – (ТСаК).

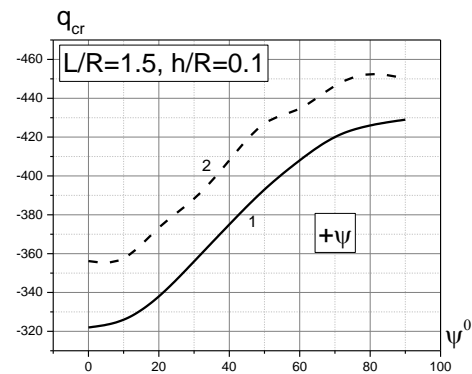


а)

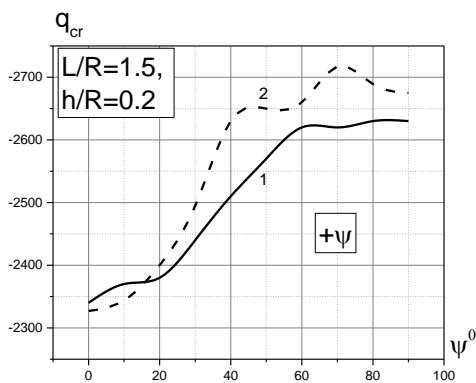


б)

Рис. 3.10. Величини критичних навантажень зовнішнього тиску для одношарової циліндричної оболонки при  $L/R=0,5$   
а)  $-h/R=0,1$ ; б)  $-h/R=0,2$



а)



б)

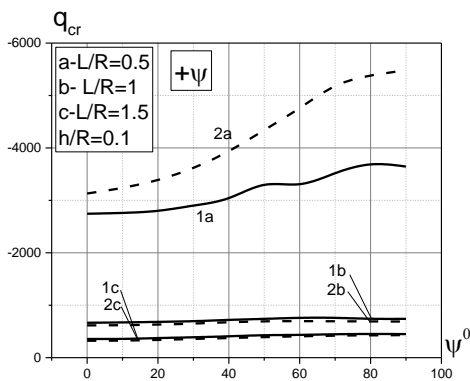
Рис. 3.11. Величини критичних навантажень зовнішнього тиску для одношарової циліндричної оболонки при  $L/R=1,5$   
а) –  $h/R=0,1$ ; б) –  $h/R=0,2$



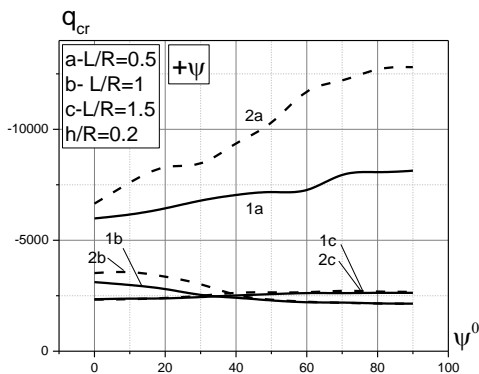
Аналіз графіків, представлених на рис. 3.10 і рис. 3.11 дає змогу зробити такі висновки. Різниця між величинами критичних навантажень знайдених за методикою розрахунків на стійкість (ТСаО) порівняно із даними здобутими за методикою (ТСаК) для оболонок із  $L/R = 0,5$  складає максимально 50,3% при  $h = 0,1R$  і 57,4% при  $h = 0,2R$ . Для оболонок із відношенням  $L/R = 1,5$  різниця між величинами критичних навантажень знайдених за методикою розрахунків на стійкість (ТСаО) у порівнянні із методикою (ТСаК) залишається незначною, і навіть при товщині оболонки  $h/R = 0,2$  максимально складає 9,6%.

На рис. 3.12 представлено співставлення величин критичних навантажень зовнішнього тиску для одношарових циліндричних оболонок із відношенням  $L/R = 0,5; 1; 1,5$ . Тут введені такі позначення. Під символом «а» приведені графіки здобуті для анізотропних оболонок з  $L/R = 0,5$ , символом «б» –  $L/R = 1$ , символом «с» –  $L/R = 1,5$ . Аналіз графічних залежностей дозволяє зробити наступні висновки. Короткі анізотропні циліндричні оболонки із відношенням  $L/R = 0,5$  сприймають критичні навантаження зовнішнього тиску орієнтовно в чотири рази більші ніж оболонки із  $L/R = 1$ . Значення критичних навантажень зовнішнього рівномірного

тиску для оболонок з  $L/R=1,5$  орієнтовно дорівнюють величинам для  $L/R=1$ .



а)



б)

Рис. 3.12. Величини критичних навантажень зовнішнього тиску для одношарової оболонки при  $L/R=0,5; 1,0; 1,5$   
а) –  $h/R=0,1$ ; б) –  $h/R=0,2$

### 3.5.3. Вплив умов закріплення торців на стійкість циліндричних анізотропних оболонок

В даному підрозділі за допомогою вищевикладеної у роботі основної методики (ТСаО), досліджено вплив на величини критичних навантажень кута укладання композиту  $\psi$  для оболонок із різними умовами закріплення торців. Розглядається стійкість циліндричних оболонок, що виготовлені з боропластика під дією осьового тиску та зовнішнього рівномірного розподіленого тиску.

Приведені результати досліджень з встановлення величин критичних навантажень для оболонок з відношенням довжини  $L$  до радіуса оболонки  $R$  рівним одиниці ( $L/R=1$ ). Розрахунки проведені для оболонок з різним відношенням товщини  $h$  оболонки до їх радіуса  $R$ : 0,1; 0,2.

Розглянуто такі типи закріплення:

- ГУ-1 – один торець – шарнірно нерухомий, а інший – шарнірно рухомий

$\alpha_1 = \alpha_0 :$	$u = v = w = M_{11} = M_{12} = 0$
$\alpha_1 = \alpha_L :$	осьовий тиск: $v = w = M_{11} = M_{12} = 0, T_{11} = -T_{11}^0$ зовнішній тиск: $v = w = M_{11} = M_{12} = T_{11} = 0$

- ГУ-2 – один край жорстко затиснений, а другий – вільний

$\alpha_1 = \alpha_0 :$	$u = v = w = \theta_1 = \theta_2 = 0$
$\alpha_1 = \alpha_L :$	осьовий тиск: $T_{12} = T_{13} = M_{11} = M_{12} = 0, T_{11} = -T_{11}^0$ зовнішній тиск: $T_{11} = T_{12} = T_{13} = M_{11} = M_{12} = 0$

- ГУ-3 – жорстке затиснення обох торців

$\alpha_1 = \alpha_0 :$	$u = v = w = \theta_1 = \theta_2 = 0$
$\alpha_1 = \alpha_L :$	осьовий тиск: $v = w = \theta_1 = \theta_2 = 0, T_{11} = -T_{11}^0$ зовнішній тиск: $v = w = \theta_1 = \theta_2 = T_{11} = 0$

### 3.5.3.1. Одношарова циліндрична оболонка під дією осьового тиску

У табл. 3.9 та 3.10, які мають таку ж структуру як і попередні, наведені результати досліджень зі встановлення величин критичних навантажень осьового тиску залежно від кута  $\psi$  укладання армуючого матеріалу для різних умов закріплення торців одношарових циліндричних оболонок (ГУ-2, ГУ-3) із відношенням  $L/R=1$ . Розрахунки проведені для боропластикової оболонки, механічні характеристики якої наведені в підрозділі 4.4.1. Значення критичних навантажень отримані для оболонок із відношенням товщини  $h$  радіуса  $R$  рівним 0,1 та 0,2.

Згідно з даними табл.3.9 і 3.10 на рис. 3.13 і рис. 3.14 відповідно представлені графіки в осях критичні значення осьового тиску  $T_{11}^{cr}$  – кут  $\psi$ . Кривою 1 описано величини

критичних значень осьового тиску, що здобуті за основною методикою (ТСаО). Графік 2 отриманий за розрахунковою методикою (ТСаК), що ґрунтується на гіпотезах Кірхгофа-Лява.

Таблиця 3.9

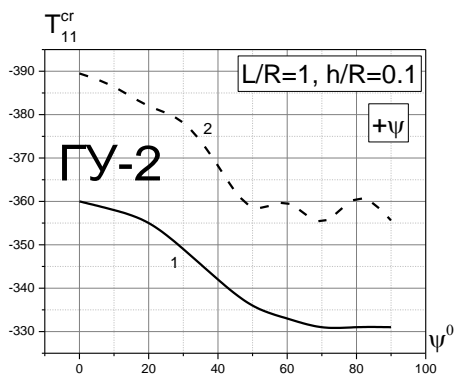
Критичні зусилля для одношарової циліндричної оболонки під осьовим тиском в кН при  $L/R=1$  із ГУ-2

Кут $\psi$ , град	h/R					
	0.1			0.2		
	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %
0	-360	-389.5	7.6	-1544	-1592	3
	[3]	[3]		[2]	[2]	
10	-358	-386.4	7.3	-1542	-1580	2.4
	[3]	[3]		[2]	[2]	
20	-355	-382	7.1	-1535	-1564	1.9
	[3]	[3]		[0]	[2]	
30	-349	-378.1	7.7	-1520	-1549	1.9
	[3]	[3]		[2]	[2]	
40	-342	-368.2	7.1	-1493	-1473	1.4
	[3]	[3]		[2]	[2]	
50	-336	-358.7	6.3	-1456	-1435	1.5
	[3]	[3]		[2]	[2]	
60	-333	-359.6	7.4	-1414	-1402	0.9
	[3]	[3]		[2]	[2]	
70	-331	-355.4	6.9	-1379	-1386	0.5
	[3]	[3]		[2]	[2]	
80	-331	-360.6	8.2	-1358	-1374	1.2
	[3]	[3]		[2]	[2]	
90	-331	-355.6	6.9	-1350	-1355	0.4
	[3]	[3]		[2]	[2]	

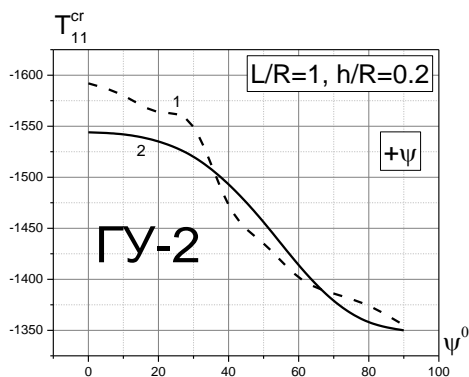
Таблиця 3.10

Критичні зусилля для одношарової циліндричної оболонки під осьовим тиском в кН при  $L/R=1$  із ГУ-3

Кут $\psi$ , град	h/R					
	0.1			0.2		
	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %
0	-1355	-1498	10.6	-5318	-7270	36.7
	[2]	[2]		[2]	[2]	
10	-1348	-1488	10.4	-5255	-7165	36.3
	[2]	[2]		[2]	[2]	
20	-1315	-1448	10.1	-4727	-6870	45.3
	[2]	[2]		[2]	[2]	
30	-1245	-1394	12	-4020	-6480	61.2
	[2]	[2]		[2]	[2]	
40	-1171	-1368	16.8	-3587	-6095	69.9
	[2]	[2]		[2]	[2]	
50	-1104	-1288	16.7	-3361	-5815	73
	[2]	[2]		[2]	[2]	
60	-1070	-1214	13.5	-3910	-5695	45.7
	[2]	[2]		[2]	[2]	
70	-1048	-1176	12.2	-3767	-5720	51.8
	[2]	[2]		[2]	[2]	
80	-1039	-1148	10.5	-4327	-5835	34.9
	[2]	[2]		[2]	[2]	
90	-1033	-1146	10.9	-4336	-5870	35.4
	[2]	[2]		[2]	[2]	

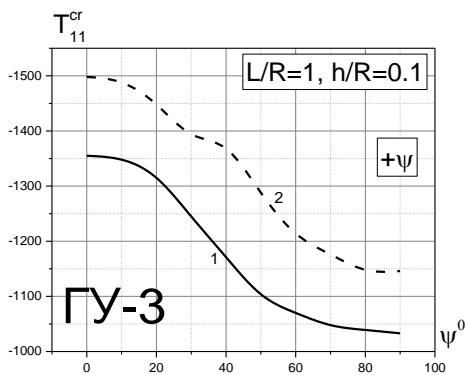


а)

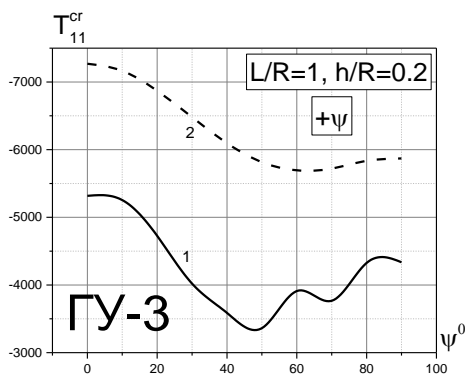


б)

Рис.3.13. Критичні значення осевих стискаючих зусиль для одношарової циліндричної оболонки при  $L/R=1$  із ГУ-2  
а) –  $h/R=0,1$ ; б) –  $h/R=0,2$



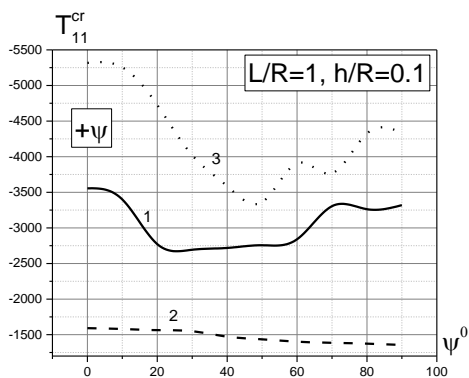
а)



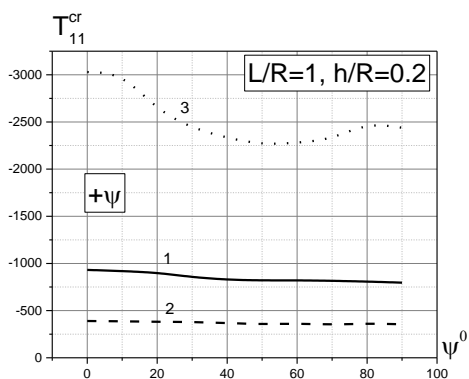
б)

Рис.3.14. Критичні значення осевих стискаючих зусиль для одношарової циліндричної оболонки при  $L/R=1$  із ГУ-3  
а) –  $h/R=0,1$ ; б) –  $h/R=0,2$





a)



б)

Рис. 3.15. Критичні значення для одношарової циліндричної оболонки під дією осевого тиску в залежності від умов закріплення торців (Т CAO): 1 – ГУ-1; 2 – ГУ-2; 3 – ГУ-3  
а) –  $h/R=0,1$ ; б) –  $h/R=0,2$

Аналіз даних табл. 3.9, 3.10 та рис. 3.13–3.15 дозволяє зробити наступні якісні та кількісні висновки. Умови закріплення торців циліндричних оболонок можуть значно впливати на величини критичних осьових навантажень. Найбільші величини критичних навантажень відповідно до результатів розрахунків, отриманих за методикою (ТСАО), сприймає оболонка із закріпленням типу ГУ-3. Найменші величини осьових навантажень мають місце для закріплення ГУ-2. Різниця між критичними величинами, отриманими при урахуванні закріплень ГУ-1 і ГУ-2 сягає 60%, а при – ГУ-1 і ГУ-3 – 70%. Слід відмітити, що відмінність критичних навантажень для граничних умов типу ГУ-2 для методик ТОН і ТСАК є досить незначною і максимально становить 3% при  $h/R = 0,2$ . Найбільша відмінність в критичних значеннях осьового тиску за двома методиками має місце для закріплення ГУ-3 і для кута  $\psi = 40^\circ$  при  $h/R = 0,2$  вона дорівнює 69,9%.

### **3.5.3.2. Одношарова циліндрична оболонка під дією зовнішнього рівномірного тиску**

У табл. 3.11 та 3.12, що мають таку ж структуру як і попередні, наведені результати досліджень зі встановлення величин критичних навантажень зовнішнього тиску

залежно від кута  $\psi$  укладання армуючого матеріалу для різних умов закріплення торців одношарових циліндричних оболонок (ГУ-2, ГУ-3) із відношенням  $L/R=1$ . Розрахунки проведені для боропластикової оболонки, механічні характеристики якої наведені в підрозділі 3.4.1. Значення критичних навантажень отримані для оболонок із відношенням товщини  $h$  радіуса  $R$  дорівнюють 0,1 та 0,2 відповідно.

Згідно з даними табл. 3.11 і 3.12 на рис. 3.16 і рис. 3.17 відповідно представлені графіки в осях критичні навантаження зовнішнього тиску  $q_{cr}$  – кут  $\psi$ . Кривою 1 описано величини, що здобуті за основною методикою (ТСаО). Графік 2 отриманий за розрахунковою методикою (ТСаК), що ґрунтується на гіпотезах Кірхгофа-Лява.

Таблиця 3.11

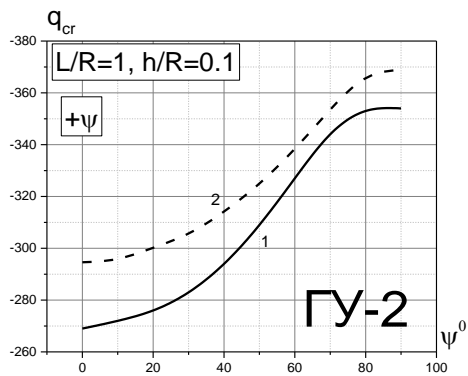
Критичні зусилля для одношарової циліндричної оболонки під дією зовнішнього тиску при  $L/R=1$  із ГУ-2

Кут $\psi$ , град	h/R					
	0.1			0.2		
	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %
0	-269.0	-294.6	8.7	-2001.0	-2091.0	4.3
	[4]	[4]		[3]	[4]	
10	-272.0	-295.9	8.1	-1998.0	-2099.0	4.8
	[4]	[4]		[3]	[4]	
20	-276.0	-300.2	8.1	-2013.0	-2116.0	4.9
	[4]	[4]		[3]	[3]	
30	-283.0	-305.7	7.4	-2043.0	-2144.0	4.7
	[4]	[4]		[3]	[3]	
40	-294.0	-314.2	6.4	-2072.0	-2161.0	4.1
	[4]	[4]		[3]	[3]	
50	-309.0	-325	4.9	-2125.0	-2179.0	2.5
	[4]	[4]		[3]	[3]	
60	-327.0	-338.4	3.4	-2181.0	-2185.0	0.2
	[4]	[4]		[3]	[3]	
70	-344.0	-353.5	2.7	-2216.0	-2188.0	1.3
	[4]	[4]		[3]	[3]	
80	-353.0	-365.7	3.5	-2261.0	-2201.0	2.7
	[4]	[4]		[3]	[3]	
90	-354.0	-368.9	4	-2262.0	-2207.0	2
	[4]	[3]		[3]	[3]	

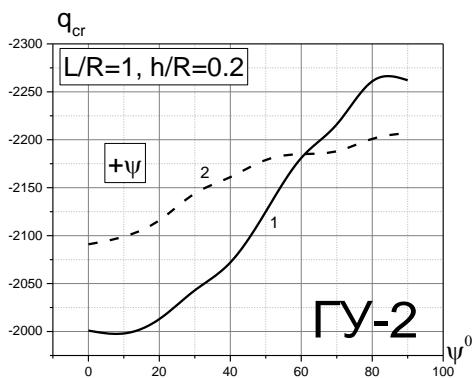
Таблиця 3.12

Критичні зусилля для одношарової циліндричної оболонки під дією зовнішнього тиску при  $L/R=1$  із ГУ-3

Кут $\psi$ , град	h/R								
	0.05			0.1			0.15		
	ТСАО	ТСАК	$\Delta$ , %	ТСАО	ТСАК	$\Delta$ , %	ТСАО	ТСАК	$\Delta$ , %
0	-123.7	-134.4	8	-1220.0	-1493.0	22.4	-4588.0	-9152.0	99.5
	[6]	[6]		[7]	[4]		[11]	[9]	
10	-124.2	-134.9	7.9	-1208.0	-1513.0	25.2	-4621.0	-9246.0	100.1
	[6]	[6]		[7]	[4]		[11]	[9]	
20	-126.5	-137.2	7.8	-1167.0	-1416.0	21.3	-4699.0	-9568.0	103.6
	[6]	[6]		[6]	[6]		[10]	[8]	
30	-128.2	-139.8	8.3	-1110.0	-1246.0	12.3	-4687.0	-10150.0	116.5
	[6]	[6]		[6]	[6]		[8]	[8]	
40	-131.9	-143.6	8.1	-1079.0	-1170.0	8.4	-4266.0	-10970.0	157.1
	[6]	[6]		[6]	[5]		[5]	[8]	
50	-135.1	-146.7	7.9	-1029.0	-1083.0	5.3	-4036.0	-10350.0	156,4
	[6]	[6]		[6]	[5]		[5]	[6]	
60	-138.7	-149.3	7.1	-1030.0	-1046.0	1.5	-3358.0	-5958.0	77.5
	[6]	[6]		[5]	[5]		[5]	[5]	
70	-140.8	-150	6.1	-1008.0	-1046.0	3.8	-3184.0	-4282.0	34.5
	[6]	[6]		[5]	[5]		[5]	[5]	
80	-141.7	-151.3	6.4	-1005.0	-1029.0	2.4	-3098.0	-3965.0	28
	[5]	[6]		[5]	[5]		[5]	[5]	
90	-141.5	-151.2	6.4	-1003.0	-1027.0	2.4	-3066.0	-3889.0	26.9
	[5]	[6]		[5]	[5]		[5]	[5]	



а)



б)

Рис.3.16. Критичні зусилля для одношарової циліндричної оболонки під дією зовнішнього тиску при  $L/R=1$  із ГУ-2  
а) –  $h/R=0,1$ ; б) –  $h/R=0,2$

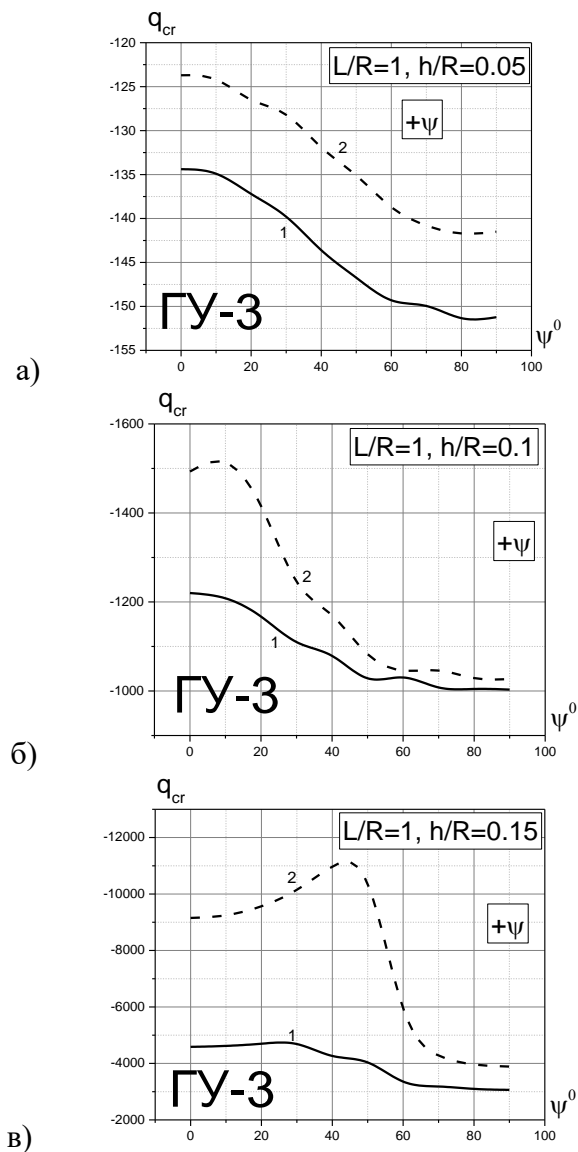


Рис.3.17. Критичні зусилля для одношарової циліндричної оболонки під дією зовнішнього тиску при  $L/R=1$  із ГУ-3  
 а) –  $h/R=0,05$ ; б) –  $h/R=0,1$ ; в) –  $h/R=0,15$

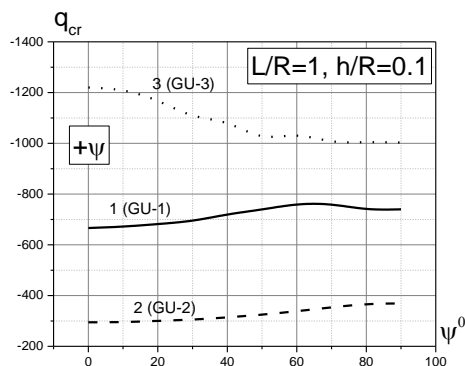


Рис. 3.18. Критичні зусилля для одношарової циліндричної оболонки під дією зовнішнього тиску в залежності від умов закріплення торців (ТСаО): 1 – ГУ-1; 2 – ГУ-2; 3 – ГУ-3

Аналіз даних табл.3.11 і 3.12 та рис. 3.16–3.18 дозволяє зробити такі висновки. Умови закріплення торців циліндричних оболонок можуть значно впливати на величини критичних навантажень зовнішнього тиску. Врахування в розрахунках на стійкість закріплення торців типу ГУ-2 призводить до найменших величин критичних навантажень порівняно із ГУ-1 та ГУ-3. При цьому різниця у величинах критичних навантажень між ГУ-1 і ГУ-2 сягає 50%. Слід відмітити, що відмінність критичних навантажень для граничних умов типу ГУ-2 для методик ТСаО і ТСаК є досить незначною і максимально становить 4,9% при  $h/R=0,15$ . Найбільша відмінність в критичних значеннях зовнішнього тиску має місце для



закріплення ГУ-3 і для кута  $\psi = 40^\circ$  при  $h/R = 0,2$  вона дорівнює 157,1%.

### **3.5.4. Стійкість тришарових анізотропних циліндричних оболонок**

Розглядається стійкість шаруватої оболонки під дією осьового тиску та зовнішнього рівномірного тиску з відношенням довжини  $L$  до радіуса оболонки  $R$  рівним одиниці ( $L/R = 1$ ). Один торець оболонки закріплений шарнірно-рухомо, а інший шарнірно-нерухомо. Оболонка складена із трьох шарів різної товщини. Схема розташування шарів пакету показана на рис. 1.3.

Матеріал крайніх шарів – боропластик. Його механічні характеристики такі:  $E = 4,2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0,21$  [57]. В якості матеріалу середнього шару прийнятий матеріал, у якого  $E_c^* = 0,1E_c$ .

У табл. 3.13. і 3.14 наведені величини критичних значень стискаючих навантажень  $T_{11}^{cr}$  і величини критичних значень рівномірного тиску  $q_{cr}$  відповідно для оболонок з різним відношенням товщини  $h$  оболонки до її радіуса  $R$  ( $h/R = 0,1; 0,15; 0,2$ ). Результати здобуті за використанням двох підходів. В першому рядку таблиці

представлені результати розрахунків на стійкість за пропонованою методикою (ТСаО). Другими приведені критичні значення, отримані за методикою чисельного розрахунку, для якої характерним є використання геометричних співвідношень, представлених в [20] (ТСаК). При цьому знаходились мінімальні значення  $T_{11}^{cr}$  і  $q_{cr}$ , а також відповідне колове хвилеутворення  $n$  (їхні величини вказані поряд з критичними навантаженнями). Окрім цього, в таблиці дано похибку у відсотках знаходження величин критичних значень стискаючих зусиль відносно до пропонованої (ТСаО) методики розрахунку на стійкість анізотропних циліндричних оболонок.

Згідно табл. 3.13 і 3.14 на рис. 3.19 і 3.20 в осях представлені графіки, що ілюструють вплив кута  $\psi$  на величини критичних значень осьових зусиль  $T_{11}^{cr}$  і критичних значень рівномірного тиску  $q_{cr}$ . Крива 1 – це критичні значення здобуті за основною методикою (ТСаО). Графік 2 отриманий за розрахунковою методикою (ТСаК), що ґрунтується на гіпотезах Кірхгофа-Лява.

Таблиця 3.13

Величини критичних значень осевого тиску  
для тришарової оболонки в кН

Кут $\psi$ , град	h/R								
	0.1			0.15			0.2		
	ТСАО	ТСАК	$\Delta$ , %	ТСАО	ТСАК	$\Delta$ , %	ТСАО	ТСАК	$\Delta$ , %
0	-394.8	-399.0	1.1	-762.5	-777.0	1.9	-1250.0	-1364.0	9.1
	[3]	[3]		[2]	[2]		[2]	[2]	
10	-357	-401.0	12.3	-683.1	-775.0	13.5	-1174.0	-1350.0	15
	[3]	[3]		[2]	[2]		[2]	[2]	
20	-348.7	-402.0	15.3	-652.5	-769.0	17.9	-1091.0	-1322.0	21.2
	[3]	[3]		[2]	[2]		[2]	[2]	
30	-351.1	-410.0	16.8	-628.8	-769.0	22.3	-1003.0	-1292.0	28.8
	[3]	[3]		[2]	[2]		[2]	[2]	
40	-341.1	-405.0	18.7	-577.7	-777.0	34.5	-851.0	-1282.0	50.6
	[3]	[3]		[2]	[2]		[3]	[3]	
50	-330.1	-378.0	14.5	-519.9	-812.0	56.2	-733.6.0	-1296.0	76.7
	[3]	[3]		[3]	[3]		[3]	[3]	
60	-322.5	-361.0	11.9	-564.3	-866.0	53.5	-773.9	-1350.0	74.4
	[3]	[3]		[3]	[3]		[3]	[3]	
70	-321.1	-353.0	9.9	-582.6	-927.0	59.1	-787.1	-1422.0	80.7
	[3]	[3]		[3]	[3]		[3]	[3]	
80	-323.6	-350.0	8.2	-717.6	-954.0	32.9	-1148.0	-1486.0	29.4
	[3]	[3]		[3]	[3]		[3]	[3]	
90	-325.7	-349.0	7.2	-725.5	-945.0	30.3	-1277.0	-1558.0	22
	[3]	[3]		[3]	[3]		[3]	[3]	

Таблиця 3.14

Величини критичних навантажень зовнішнього тиску  
тришарової оболонки в кН/м<sup>2</sup>

Кут $\psi$ , град	h/R								
	0.1			0.15			0.2		
	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %
0	-427.8	-491.5	14.9	-1450.0	-2349.0	62	-2070.0	-3413.0	64.9
	[5]	[4]		[7]	[6]		[6]	[6]	
10	-418.7	-475.7	13.6	-1475.0	-2380.0	61.4	-2112.0	-3452.0	63.4
	[5]	[5]		[7]	[6]		[6]	[6]	
20	-404.6	-445.7	10.2	-1526.0	-2471.0	61,8	-2188.0	-3586.0	63.9
	[5]	[5]		[7]	[5]		[6]	[5]	
30	-390.1	-428.2	9.8	-1600.0	-2595.0	61.9	-2289.0	-3811.0	66.5
	[5]	[5]		[7]	[5]		[6]	[5]	
40	-378.7	-410.3	8.3	-1533.0	-2746.0	62.2	-2453.0	-4119.0	67.9
	[5]	[5]		[7]	[5]		[6]	[5]	
50	-374.8	-378.4	1	-1343.0	-2460.0	79.1	-2646.0	-4506.0	70.3
	[4]	[4]		[6]	[5]		[6]	[5]	
60	-365.7	-364	0.5	-1190.0	-1826.0	83.2	-2721.0	-4801.0	76.4
	[4]	[4]		[4]	[4]		[6]	[4]	
70	-357.8	-357.3	0.1	-1088.0	-1394.0	53.4	-2497.0	-4894.0	96
	[4]	[4]		[4]	[4]		[5]	[4]	
80	-350.7	-361.6	3.1	-1060.0	-1304.0	28.1	-2334.0	-4743.0	103.2
	[4]	[4]		[4]	[4]		[4]	[4]	
90	-355.7	-360.2	1.3	-1036.0	-1280.0	23	-2274.0	-4600.0	102.3
	[4]	[4]		[4]	[4]		[4]	[4]	

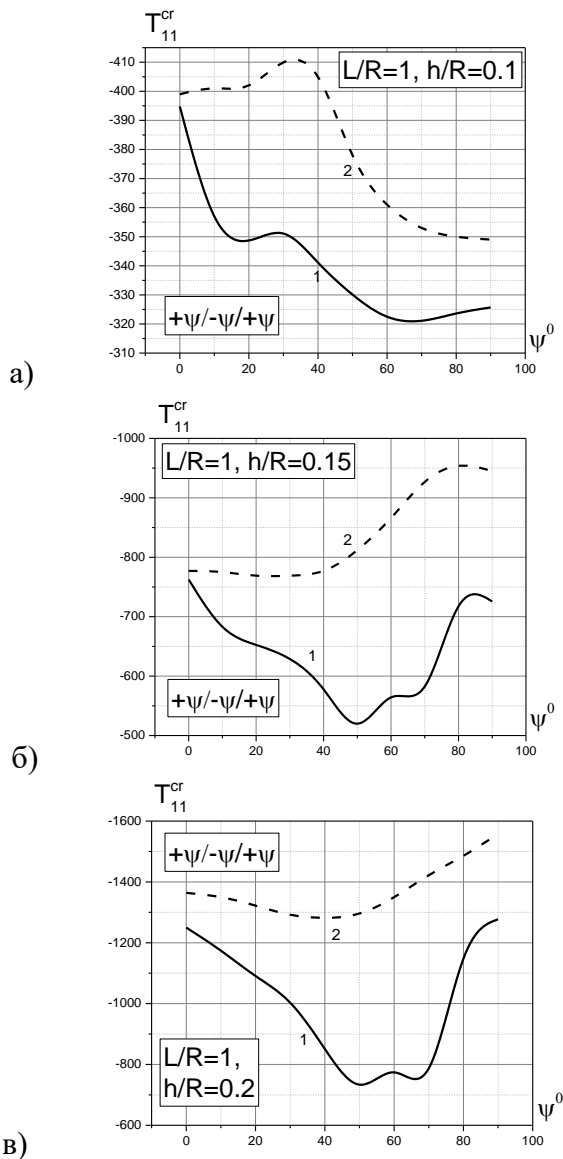


Рис. 3.19. Критичні значення осьових стискаючих зусиль для тришарової циліндричної оболонки при  $L/R=1$   
 а) –  $h/R=0,1$ ; б) –  $h/R=0,15$ ; в) –  $h/R=0,2$

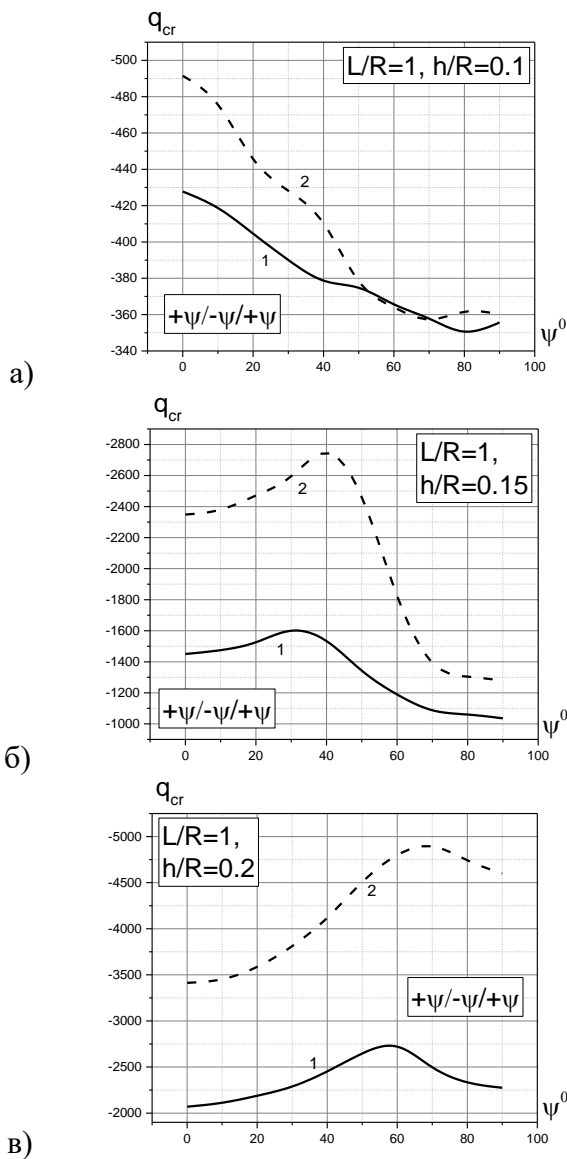


Рис. 3.20. Величини критичних навантажень зовнішнього тиску для тришарової циліндричної оболонки при  $L/R=1$   
 а) –  $h/R=0,1$ ; б) –  $h/R=0,15$ ; в) –  $h/R=0,2$

У порівнянні з одношаровими оболонками, пропонований підхід до розрахунку на стійкість тришарових циліндричних анізотропних оболонок призводить до отримання менших величин критичних навантажень порівняно із методикою, що спирається на гіпотези Кірхгофа-Лява. Суттєва відмінність в значеннях критичних навантажень проявляється при менших товщинах композитних оболонок. Якщо для одношарової оболонки товщиною  $h/R = 0,1$  розбіжність між критичними зусиллями, які отримані різними методами, не перевищує 8,5% при дії зовнішнього тиску і 8,1% при дії осьового тиску, то для тришарового варіанту розбіжність в теоріях відповідно складає 59,1% та 83,2%.

### **3.5.5. Стійкість анізотропних конічних оболонок**

У підрозділі, на основі вище запропонованих методик досліджено вплив кута конусності  $\alpha$  та кута  $\psi$  укладання волокнистого композиту на стійкість анізотропних конічних оболонок колового поперечного перерізу, що можуть бути виготовлені однозаходним чи косоперехресним укладанням шарів. Геометрія таких оболонок описана такими співвідношеннями:

$$R_0 = r_0 / \sin \alpha ; R_n = r_n / \sin \alpha ; L = (r_n - r_0) / \cos \alpha ,$$

де  $\alpha$  – кут нахилу твірної оболонки до основи більшого радіуса,  $r_0$  – радіус меншої основи конуса,  $r_n$  – радіус більшої основи конуса. Для досліджуваних оболонок прийнято, що  $r_0 = 1,0$  м. Довжина конічних оболонок, для всіх розглянутих значень кута  $\alpha$ , була сталою та рівною  $L = 1,0$  м. Проведено розрахунки на стійкість анізотропних оболонок для кутів  $\alpha = 80^\circ, 70^\circ$  та  $60^\circ$ .

Дослідження стійкості проводились для конуса з відношенням товщини оболонки до радіуса  $h/r_0 = 0,1$  від дії зовнішнього тиску та осьового тиску.

Закріплення торців оболонки такі: один край – шарнірно нерухомий, а інший – шарнірно-рухомий. Оболонка виготовлена із боропластику, механічні характеристики якої наведені в п.3.4.1

В табл. 3.15 та 3.16 представлені розрахунки на стійкість анізотропних конічних оболонок із боропластика від дії осьового тиску (табл. 3.15) та зовнішнього рівномірного тиску (табл. 3.16). Результати приведені для анізотропних оболонок із кутами конусності рівними  $\alpha = 80^\circ; 70^\circ; 60^\circ$ .

В першому рядку таблиці представлені розрахунки на стійкість за основною методикою (ТСаО). Другими



приведені критичні значення, отримані за методикою чисельного розрахунку, що представлена в [20] (ТСАК). Мінімальні значення  $T_{11}^{cr}$  і  $q^{cr}$  знаходились при урахуванні відповідного колового хвилеутворення  $n$  (їхні величини вказані поряд з критичними навантаженнями).

У відповідності до табл. 3.15, 3.16 на рис. 3.21 представлені графіки, що ілюструють вплив кута вкладання композиту на величини критичних значень осьових зусиль  $T_{11}^{cr}$  (а) та критичних навантажень зовнішнього тиску  $q^{cr}$  (б) відповідно. Крива 1 – це критичні значення, здобуті за розробленим підходом (ТСаО). Графічна залежність 2 являє собою критичні осьові стискаючі навантаження  $T_{11}^{cr}$ , знайдені за підходом, що спирається на гіпотези Кірхгофа-Лява (ТСАК).

Таблиця 3.15

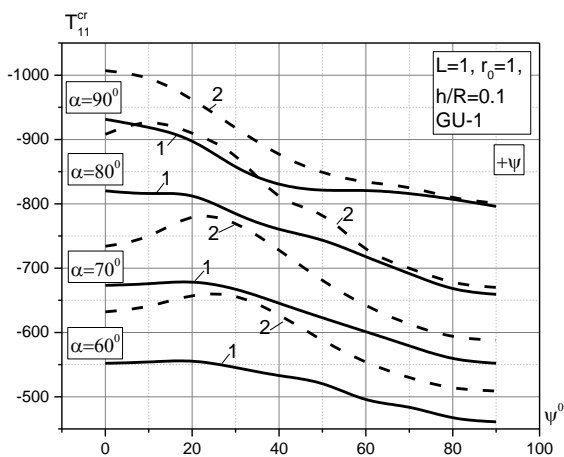
Величини критичних значень осевого тиску для одношарової конічної оболонки в кН

Кут $\psi$ , град	$\alpha$								
	80°			70°			60°		
	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %	ТСаО	ТСаК	$\Delta$ , %
0	-820.1	-908.0	10.7	-673.2	-734.0	9	-552.1	-632.0	14.5
	[3]	[3]		[3]	[3]		[3]	[3]	
10	-816.1	-926.0	13.5	-675.8	-750.0	11	-554.0	-641.0	15.7
	[3]	[3]		[3]	[3]		[3]	[3]	
20	-812.2	-910.0	12	-678.1	-779.0	14.9	-555.3	-657.0	18.3
	[3]	[3]		[3]	[3]		[3]	[3]	
30	-784.6	-874.0	11.4	-667.1	-769.0	15.3	-545.4	-656.0	20.3
	[3]	[2]		[3]	[3]		[3]	[3]	
40	-760.5	-812.0	6.8	-645.4	-728.0	12.8	-533.0	-627.0	17.6
	[3]	[3]		[3]	[3]		[3]	[3]	
50	-743.4	-782.0	5.2	-622.9	-681.0	9.3	-520.3	-588.0	13
	[3]	[2]		[3]	[3]		[3]	[3]	
60	-717.8	-730.0	1.7	-601.1	-642.0	6.8	-495.8	-554.0	11.7
	[3]	[3]		[3]	[3]		[3]	[3]	
70	-691.6	-700.0	1.2	-579.2	-613.0	5.8	-483.7	-530.0	9.6
	[3]	[3]		[3]	[3]		[3]	[3]	
80	-668.4	-678.0	1.4	-559.7	-594.0	6.1	-467.5	-514.0	9.9
	[3]	[3]		[3]	[3]		[3]	[3]	
90	-659.2	-670.0	1.6	-552.0	-588.0	6.5	-461.0	-509.0	10.4
	[3]	[3]		[3]	[3]		[3]	[3]	

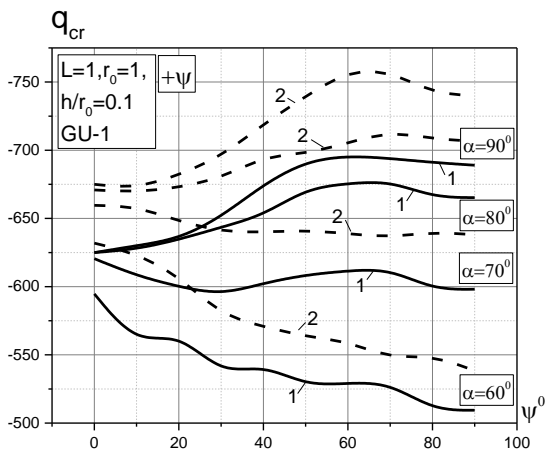
Таблиця 3.16

Величини критичних навантажень зовнішнього тиску для одношарової конічної оболонки

Кут $\psi$ , град	$\alpha$								
	80°			70°			60°		
	ТСАО	ТСАК	$\Delta$ , %	ТСАО	ТСАК	$\Delta$ , %	ТСАО	ТСАК	$\Delta$ , %
0	-625.0	-670,9	-6,8	-620,5	-659,6	-5,9	-594,7	-631,9	5,9
	[5]	[5]		[5]	[5]		[6]	[6]	
10	-627,5	-669,4	-6,3	-608.0	-658,8	-7,7	-557,3	-624,3	10,7
	[5]	[5]		[5]	[5]		[6]	[5]	
20	-634,5	-672,6	-5,7	-600.0	-648.0	-7,4	-566,9	-607,8	6,7
	[5]	[5]		[5]	[5]		[5]	[5]	
30	-643,6	-679,5	-5,3	-593,9	-640,3	-7,2	-535,3	-579	7,5
	[5]	[5]		[5]	[5]		[5]	[5]	
40	-652,2	-695,5	-6,2	-602,6	-639,8	-5,8	-543,2	-570,8	4,8
	[5]	[5]		[5]	[5]		[5]	[5]	
50	-671,9	-697,5	-3,7	-608,6	-641,4	-5,1	-527,4	-563,4	6,4
	[5]	[5]		[5]	[5]		[5]	[5]	
60	-675,6	-705,3	-4,2	-611,7	-638,8	-4,2	-529,3	-559,9	5,5
	[5]	[5]		[5]	[5]		[5]	[4]	
70	-677,6	-714,0	-5,1	-613,1	-636,2	-3,6	-529,6	-547,4	3,3
	[5]	[5]		[5]	[5]		[5]	[4]	
80	-665,5	-708,3	-6,0	-597,9	-640.0	-6,6	-509,4	-549,8	7,3
	[5]	[5]		[5]	[5]		[5]	[4]	
90	-665,3	-706,6	-5,8	-598,1	-638,1	-6,3	-509,4	-538,4	5,4
	[5]	[4]		[5]	[4]		[4]	[4]	



а)



б)

Рис. 3.21. Величини критичних навантажень осьового тиску (а) та зовнішнього тиску (б) для одношарової анізотропної конічної оболонки

Аналіз графіків, представлених на рис. 3.21 і даних табл. 3.15, 3.16 дозволяє зробити такі висновки. Основний пропонуваній підхід розрахунку на стійкість конічних анізотропних оболонок, що знаходяться під дією осьового стискаючого навантаження та зовнішнього рівномірного тиску, призводять до отримання менших величин критичних навантажень порівняно із методикою, що базується на гіпотезах Кірхгофа-Лява. Із зменшенням кута конусності  $\alpha$  зменшується і величина критичного навантаження. Для оболонок, товщина яких становить  $h = 0,1R$ , максимальна відмінність між значеннями критичного навантаження, знайдена за двома підходами складає при дії осьового тиску 13,5% для конічної оболонки з  $\alpha = 80^\circ$ , 15,3% – з  $\alpha = 70^\circ$  та 20,3% – з  $\alpha = 60^\circ$ . При зовнішньому тиску відповідно – 6,8%, 7,7% та 10,7%.

### **3.6. Висновки до розділу 3**

Побудована розв'язувальна система рівнянь стійкості нетонких анізотропних оболонок обертання у нормальному вигляді Коші. Для цього використана отримана у другому розділі, нелінійна система неоднорідних диференціальних рівнянь. Для приведення двовимірної задачі до одновимірної використано

представлення розв'язувальних функцій у вигляді комплексних рядів Фур'є за коловою координатою. Проведені потрібні видозміни у методі ортогоналізації для можливості застосування його до розв'язку диференціальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами.

Приведені результати розрахунку на стійкість циліндричних і конічних оболонок з композитів, що утворені косоперехресним укладанням шарів армованого матеріалу. Проаналізовано стійкість циліндричних і конічних оболонок, виготовлених з волокнистих композитів з різноманітними схемами армування та конфігураціями пакету шарів при нелінійному докритичному стані. Розглянуті такі навантаження: осьовий тиск і поверхневий рівномірний тиск. Досліджено вплив анізотропії матеріалу на критичні значення вказаних навантажень при декількох типах граничних умов.

Пропонований підхід до розрахунку на стійкість циліндричних і конічних анізотропних оболонок призводить до отримання менших величин критичних навантажень порівняно із методикою, що спирається на гіпотези Кірхгофа-Лява. При товщині оболонки  $h/R = 0,01$  ця розбіжність не перевищує 9,3% при дії зовнішнього тиску і 7,3% при дії осьового тиску

відповідно. При збільшенні товщини оболонки, різниця між величинами критичних навантажень, що отримані за різними підходами, починає зростати. Для зовнішнього тиску і осевого тиску розбіжність в результатах відповідно складає: при  $h/R = 0,1$  до 13%, а при  $h/R = 0,2$  до 103%.

Суттєва відмінність в значеннях критичних навантажень, що отримані за різними методиками, проявляється для тришарового варіанту структурного пакету. Так, якщо для одношарової оболонки товщиною  $h/R = 0,1$  розбіжність між критичними зусиллями, які отримані різними методами, не перевищує 8,5% при дії зовнішнього тиску і 8,1% при дії осевого тиску, то для тришарового варіанту розбіжність в теоріях відповідно складає 59,1% та 83,2%.

## **РОЗДІЛ 4. НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОВСТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК В ТРИВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ**

Товсті оболонки використовуються в якості конструктивних елементів у автомобільній, авіаційно-космічній, кораблебудівній промисловості та будівництві. Загально прийнято, що найважливішим параметром при оцінці несної здатності таких конструкцій є їх міцність. Це особливо важливо в умовах застосування сучасних композитних матеріалів, коли необхідно поєднати міцність зі зменшенням матеріаломісткості конструктивних елементів. Зазначене призводить до необхідності встановлення реального напруженого стану товстих оболонок.

Розв'язанню задач про напружений стан композитних оболонок в просторовій постановці присвячені роботи [62, 66, 69, 94, 102]. Їх аналіз вказує, що навіть для ізотропних й ортотропних матеріалів розв'язання задач про напружено-деформований стан пов'язане зі значними труднощами. В значній мірі, це обумовлено складністю системи вихідних диференціальних рівнянь в частинних похідних і необхідністю виконання крайових умов на обмежуючих пружне тіло поверхнях. Математичні



складнощі істотно зростають в разі використання в оболонках матеріалу, що має одну площину пружної симетрії. Наявність зазначеного типу анізотропії зумовлює появу ефектів в розподілі напружень і переміщень, які не мають місця в розрахунках, наприклад, ортотропних оболонок.

Дослідженню таких ефектів присвячена робота [94], де приведені загальні рівняння теорії пружної рівноваги, що встановлюють параметри напружених станів відповідного виду анізотропії матеріалу. Приводиться математичне формулювання задач про напружений стан пружного анізотропного циліндра нескінченної довжини при дії осьового тиску, кручення, згину. У дослідженнях [62] викладені основні залежності і відповідні методики знаходження параметрів, що описують напружено-деформований стан оболонок в просторовій постановці. Детальний аналіз розрахунку оболонкових конструкцій з ортотропних матеріалів в тривимірній постановці приведений в роботі [66].

У цьому розділі представлено підхід до розв'язання задачі напруженого стану товстих циліндричних анізотропних оболонок в просторовій постановці на основі співвідношень теорії пружності, представлених в роботі

[102]. Розв'язок задачі про напружений стан таких конструкцій, що знаходяться під дією під дією розподіленого бокового тиску, спирається на використання методів Бубнова-Гальоркіна та дискретної ортогоналізації, що дозволяє отримувати необхідні його характеристики влюбій точці за товщиною й довжиною оболонки. При цьому моделюванні, матеріал, з якого виготовляється циліндрична анізотропна оболонка, описується як такий, що має одну площину пружної симетрії.

#### **4.1. Система рівнянь, що описує вісесиметричну деформацію анізотропної циліндричної оболонки в тривимірній постановці**

Розглядається задача про напружений стан неоднорідного за товщиною анізотропного товстого циліндра, матеріал кожного шару якого має одну площину пружної симетрії. На його поверхні та торці можуть бути накладені певні види граничних умов.

В якості вихідних, приймаються співвідношення теорії пружності анізотропного неоднорідного тіла в циліндричній системі координат  $r, z, \theta$ . Вісі  $r$  та  $\theta$  яких є полярними координатами колового поперечного перерізу,  $z$  – нормальна до цього перерізу вісь, початок

якої збігається з центром ваги одного з торців оболонки. Матеріал шарів конструкції має одну площину пружної симетрії, що обумовлено поворотом головних напрямків пружності вихідного ортотропного матеріалу щодо осі  $z$  розглядуваної системи координат, рис.4.1. Геометрія циліндра визначається довжиною його твірної  $L$ , а також радіусами внутрішньої  $r_1$  і зовнішньої  $r_2$  поверхонь. Оболонка знаходиться в полі дії розподіленого бокового тиску.

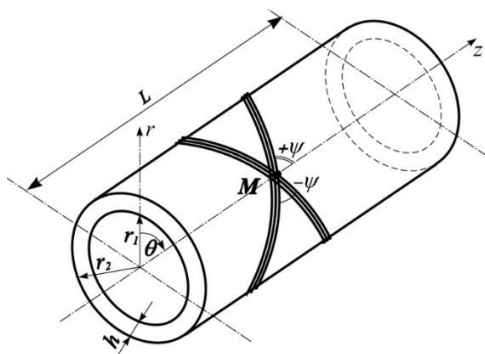


Рис. 4.1. Циліндрична товстостінна анізотропна оболонка.

Лінеаризовані рівняння рівноваги, в разі невісесиметричного напруженого стану, для кожного  $i$ -го шару запишемо у вигляді [102]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} = -\frac{1}{r} \left[ \sigma_{rr}^i + r \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zr}^i) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r}^i) - \sigma_{\theta\theta}^i + r F_r^i \right];$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \tau_{rz}^i + r \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zz}^i) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^i) + r F_z^i \right]; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \tau_{r\theta}^i + \tau_{\theta r}^i + r \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{z\theta}^i) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{\theta\theta}^i) + r F_\theta^i \right], \end{aligned} \quad (4.1)$$

де  $r_i$  ( $i=1, 2$ ) – радіус циліндра, який не залежить від координат  $z$  та  $\theta$ ;  $\sigma_{zz}^i$ ,  $\sigma_{rr}^i$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^i$ ,  $\tau_{rz}^i$ ,  $\tau_{r\theta}^i$ ,  $\tau_{z\theta}^i$  – компоненти тензора напружень,  $F_r^i, F_z^i, F_\theta^i$  – проекції вектора питомих об'ємних сил на напрямки дотичних до координатних ліній  $r$ ,  $z$ ,  $\theta$ .

Зв'язок між складовими деформацій та переміщеннями приймемо у вигляді:

$$\begin{aligned} e_{zz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; e_{\theta\theta}^i = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r^i; e_{rr}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \\ e_{z\theta}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}; e_{rz}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; \\ e_{r\theta}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta^i + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Тут  $u_z^i$ ,  $u_\theta^i$ ,  $u_r^i$  – переміщення в напрямку осей  $z$ ,  $\theta$ ,  $r$  відповідно.

Співвідношення узагальненого закону Гука, що пов'язують компоненти деформацій і напружень в разі збігу осей ортотропії з координатними запишемо:

$$\begin{aligned}
 e_{zz}^i &= a_{11}^{i'}\sigma_{zz}^i + a_{12}^{i'}\sigma_{\theta\theta}^i + a_{13}^{i'}\sigma_{rr}^i; \\
 e_{\theta\theta}^i &= a_{12}^{i'}\sigma_{zz}^i + a_{22}^{i'}\sigma_{\theta\theta}^i + a_{23}^{i'}\sigma_{rr}^i; \\
 e_{rr}^i &= a_{13}^{i'}\sigma_{zz}^i + a_{23}^{i'}\sigma_{\theta\theta}^i + a_{33}^{i'}\sigma_{rr}^i; \\
 e_{r\theta}^i &= a_{44}^{i'}\tau_{r\theta}^i; \quad e_{rz}^i = a_{55}^{i'}\tau_{rz}^i; \quad e_{z\theta}^i = a_{66}^{i'}\tau_{z\theta}^i.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

При повороті осей ортотропії навколо осі  $r$  ці залежності переписуться:

$$\begin{aligned}
 e_{zz}^i &= a_{11}^i\sigma_{zz}^i + a_{12}^i\sigma_{\theta\theta}^i + a_{13}^i\sigma_{rr}^i + a_{16}^i\tau_{z\theta}^i; \\
 e_{\theta\theta}^i &= a_{12}^i\sigma_{zz}^i + a_{22}^i\sigma_{\theta\theta}^i + a_{23}^i\sigma_{rr}^i + a_{26}^i\tau_{z\theta}^i; \\
 e_{rr}^i &= a_{13}^i\sigma_{zz}^i + a_{23}^i\sigma_{\theta\theta}^i + a_{33}^i\sigma_{rr}^i + a_{36}^i\tau_{z\theta}^i; \\
 e_{r\theta}^i &= a_{44}^i\tau_{r\theta}^i + a_{45}^i\tau_{rz}^i; \quad e_{rz}^i = a_{45}^i\tau_{r\theta}^i + a_{55}^i\tau_{rz}^i; \\
 e_{z\theta}^i &= a_{16}^i\sigma_{zz}^i + a_{26}^i\sigma_{\theta\theta}^i + a_{36}^i\sigma_{rr}^i + a_{66}^i\tau_{z\theta}^i.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

В (4.3), (4.4)  $a_{kl}^{i'}$  та  $a_{kl}^i$  – механічні константи  $i$ -го шару, відповідно, ортотропного і матеріалу з однією площиною пружної симетрії, зв'язок між якими встановлено згідно [94]:

$$\begin{aligned}
 a_{11}^i &= a_{11}^{i'} \cos^4 \psi^i + (2a_{12}^{i'} + a_{66}^{i'}) \cos^2 \psi^i \sin^2 \psi^i + a_{22}^{i'} \sin^4 \psi^i; \\
 a_{22}^i &= a_{22}^{i'} \cos^4 \psi^i + (2a_{12}^{i'} + a_{66}^{i'}) \cos^2 \psi^i \sin^2 \psi^i + a_{11}^{i'} \sin^4 \psi^i; \\
 a_{12}^i &= a_{12}^{i'} + (a_{11}^{i'} + a_{22}^{i'} - 2a_{12}^{i'} - a_{66}^{i'}) \sin^2 \psi^i \cos^2 \psi^i; \\
 a_{66}^i &= a_{66}^{i'} + 4(a_{11}^{i'} + a_{22}^{i'} - 2a_{12}^{i'} - a_{66}^{i'}) \cos^2 \psi^i \sin^2 \psi^i;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{16}^i &= \left[ 2a_{22}^{i'} \sin^2 \psi^i - 2a_{11}^{i'} \cos^2 \psi^i + \right. \\
 &+ \left. (2a_{12}^{i'} + a_{66}^{i'}) (\cos^2 \psi^i - \sin^2 \psi^i) \right] \cos \psi^i \sin \psi^i; \\
 a_{26}^i &= \left[ 2a_{22}^{i'} \cos^2 \psi^i - 2a_{11}^{i'} \sin^2 \psi^i - \right. \\
 &- \left. (2a_{12}^{i'} + a_{66}^{i'}) (\cos^2 \psi^i - \sin^2 \psi^i) \right] \cos \psi^i \sin \psi^i; \\
 a_{13}^i &= a_{13}^{i'} \cos^2 \psi^i + a_{23}^{i'} \sin^2 \psi^i; \\
 a_{23}^i &= a_{23}^{i'} \cos^2 \psi^i + a_{13}^{i'} \sin^2 \psi^i; \\
 a_{36}^i &= 2(a_{23}^{i'} - a_{13}^{i'}) \cos \psi^i \sin \psi^i; \\
 a_{33}^i &= a_{33}^{i'}; \\
 a_{44}^i &= a_{44}^{i'} \cos^2 \psi^i + a_{55}^{i'} \sin^2 \psi^i; \\
 a_{55}^i &= a_{55}^{i'} \cos^2 \psi^i + a_{44}^{i'} \sin^2 \psi^i; \\
 a_{45}^i &= (a_{44}^{i'} - a_{55}^{i'}) \cos \psi^i \sin \psi^i.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Співвідношення узагальненого закону Гука, для матеріалу з однією площиною пружної симетрії (4.4), приведемо до виду [62], який використаємо при розв'язку системи (4.1):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}^i &= b_{11}^i e_{zz}^i + b_{12}^i e_{\theta\theta}^i + b_{16}^i e_{z\theta}^i + c_1^i \sigma_{rr}^i; \\
 \sigma_{\theta\theta}^i &= b_{12}^i e_{zz}^i + b_{22}^i e_{\theta\theta}^i + b_{26}^i e_{z\theta}^i + c_2^i \sigma_{rr}^i; \\
 \tau_{z\theta}^i &= b_{16}^i e_{zz}^i + b_{26}^i e_{\theta\theta}^i + b_{66}^i e_{z\theta}^i + c_3^i \sigma_{rr}^i; \\
 e_{rr}^i &= -c_1^i e_{zz}^i - c_2^i e_{\theta\theta}^i - c_3^i e_{z\theta}^i + c_4^i \sigma_{rr}^i; \\
 e_{rz}^i &= a_{45}^i \tau_{r\theta}^i + a_{55}^i \tau_{rz}^i; \quad e_{r\theta}^i = a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + a_{45}^i \tau_{rz}^i,
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

де  $b_{kl}^i$  ( $k, l = 1, 2, 6$ ),  $c_k^i$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) – характеристики, що визначаються за допомогою механічних констант  $a_{kl}^i$  матеріалу оболонки.

При розв'язку задачі про докритичний напружено-деформований стан припустимо, що до моменту втрати стійкості оболонка деформується зі збереженням осової симетрії. З урахуванням цього рівняння рівноваги (4.1), для розв'язку лінійної задачі, запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \sigma_{rr}^i + r \frac{\partial (\tau_{rz}^i)}{\partial z} - \sigma_{\theta\theta}^i + r F_r^i \right]; \\ \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \tau_{rz}^i + r \frac{\partial (\sigma_{zz}^i)}{\partial z} + r F_z^i \right]; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ 2\tau_{r\theta}^i + r \frac{\partial (\tau_{z\theta}^i)}{\partial z} + r F_\theta^i \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Зв'язок між складовими лінійних деформацій та переміщеннями (4.2) перепишемо:

$$\begin{aligned} e_{zz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; \quad e_{\theta\theta}^i = \frac{1}{r} u_r^i; \quad e_{rr}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \\ e_{z\theta}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z}; \quad e_{rz}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; \quad e_{r\theta}^i = \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta^i. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Замінюючи в (4.6) деформації  $e_{zz}^i$ ,  $e_{\theta\theta}^i$ ,  $e_{z\theta}^i$  їх виразами з (4.8) і підставляючи отримані залежності для  $\sigma_{zz}^i$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^i$ ,

$\tau_{z\theta}^i$  в (4.7), а для  $e_{rz}^i$ ,  $e_{r\theta}^i$ ,  $e_{rr}^i$  в (4.8) отримаємо для кожного  $i$ -го шару повну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} &= \frac{c_2 - 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} + \frac{b_{22}}{r^2} u_r^i + \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \\
 &+ \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z}; \\
 \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} &= -c_1 \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - b_{11} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \\
 &- b_{16} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2}; \\
 \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} &= -\frac{c_2}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - b_{66} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - c_3 \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \\
 &- \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - b_{16} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2}; \\
 \frac{\partial u_r^i}{\partial r} &= c_4 \sigma_{rr}^i - \frac{c_2}{r} u_r^i - c_1 \frac{\partial u_z^i}{\partial z} - c_3 \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z}; \\
 \frac{\partial u_z^i}{\partial r} &= a_{55} \tau_{rz}^i + a_{45} \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \\
 \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} &= a_{45} \tau_{rz}^i + a_{44} \tau_{r\theta}^i + \frac{1}{r} u_\theta^i.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$



Розв'язок системи (4.9) має відповідати умовам на бічних поверхнях при  $r = r_1$ ,  $r = r_2$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^1(r_1, z) &= \pm q_r^1(z); \quad \sigma_{rr}^1(r_1, z) = f_1^1(z); \quad \tau_{r\theta}^1(r_1, z) = 0; \\ \sigma_{rr}^2(r_2, z) &= \pm q_r^2(z); \quad \tau_{rz}^2(r_2, z) = 0; \quad \tau_{r\theta}^2(r_2, z) = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

умовам жорсткого контакту шарів:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i(r_i) &= \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); \quad \tau_{rz}^i(r_i) = \tau_{rz}^{i+1}(r_i); \quad \tau_{r\theta}^i(r_i) = \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i); \\ u_r^i(r_i) &= u_r^{i+1}(r_i); \quad u_z^i(r_i) = u_z^{i+1}(r_i); \quad u_\theta^i(r_i) = u_\theta^{i+1}(r_i) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\text{і умовам на торцях } z = 0, z = L; \quad \sigma_{zz}^i = u_r^i = u_\theta^i = 0. \quad (4.12)$$

Умови (4.12) відповідають наявності на краях циліндра діафрагми абсолютно жорсткої в своїй площині і гнучкої з неї. В (4.10)  $q_r^1(z)$ ,  $q_r^2(z)$  – розподілений по поверхнях оболонки внутрішній і зовнішній тиск відповідно.

Для розв'язку тривимірної задачі скористаємося процедурою методу Бубнова-Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі функції в тригонометричні ряди за координатою вздовж твірної циліндра  $z$  так, що б вони задовольняли крайовим умовам (4.12):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{1,pk}(r) \cos k\theta + y'_{1,mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\ \tau_{rz}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{2,pk}(r) \cos k\theta + y'_{2,mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{r\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{3,pk}(r) \sin k\theta + y'_{3,mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z; \\
 u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{4,pk}(r) \cos k\theta + y'_{4,mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\
 u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{5,pk}(r) \cos k\theta + y'_{5,mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \\
 u_{\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{6,pk}(r) \sin k\theta + y'_{6,mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z.
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

де  $y_{i,pk}$ ,  $y'_{i,mk}$  ( $i = \overline{1,6}$ ) – компоненти розкладання в тригонометричні ряди Фур'є складових напружено-деформованого стану оболонки,  $p$ ,  $m$  – хвильові числа в рядах.

Після деяких математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (4.9) за допомогою співвідношень (4.13), отримаємо для кожного  $i$ -го шару систему звичайних диференціальних рівнянь дванадцятого порядку в нормальній формі Коші

$$\frac{dy^i}{dr} = T^i(r)y^i, T^i(r) = t_{n,l}^i(r); (n, l = \overline{1,12}), \tag{4.14}$$

де

$$y^i = \{y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i;$$

$$\{y_1^{i/}, y_2^{i/}, y_3^{i/}, y_4^{i/}, y_5^{i/}, y_6^{i/}, m\}$$

розв'язуюча вектор-функція. Ненульові елементи якої записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} t_{1,1} &= \frac{c_2 - 1}{r}, t_{1,2} = l_p, t_{1,4} = \frac{b_{22}}{r^2}, t_{1,5} = -l_p \frac{b_{12}}{r}, \\ t_{1,12} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{b_{26}}{r} l_m, \\ t_{2,1} &= -c_1 l_p, t_{2,2} = -\frac{1}{r}, t_{2,4} = -\frac{b_{12}}{r} l_p, t_{2,5} = b_{11} l_p^2, \\ t_{2,12} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) b_{16} l_m^2, \\ t_{3,3} &= -\frac{2}{r}, t_{3,6} = b_{66} l_p^2, t_{3,7} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_3 l_m, \\ t_{3,10} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{b_{26}}{r} l_m, t_{3,11} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) b_{16} l_m^2, \\ t_{4,1} &= c_4, t_{4,4} = -\frac{c_2}{r}, t_{4,5} = c_1 l_p, t_{4,12} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_3 l_m, \\ t_{5,2} &= a_{55}, t_{5,4} = -l_p, t_{5,9} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_{45}, \\ t_{6,3} &= a_{44}, t_{6,6} = \frac{1}{r}, t_{6,8} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_{45}, \\ t_{7,6} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{b_{26}}{r} l_m, t_{7,7} = \frac{c_2 - 1}{r}, t_{7,8} = l_p, t_{7,10} = \frac{b_{22}}{r^2}, \\ t_{7,11} &= -l_p \frac{b_{12}}{r}, \\ t_{8,6} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) \frac{b_{26}}{r} l_m, t_{8,7} = -c_1 l_p, t_{8,8} = -\frac{1}{r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{8,10} &= -\frac{b_{12}}{r} l_p, \quad t_{8,11} = b_{11} l_p^2, \\
 t_{9,1} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_3 l_m, \quad t_{9,4} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{b_{26}}{r} l_m, \\
 t_{9,5} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) b_{16} l_m^2, \quad t_{9,9} = -\frac{2}{r}, \quad t_{9,12} = b_{66} l_p^2, \\
 t_{10,6} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_3 l_m, \quad t_{10,7} = c_4, \quad t_{10,10} = -\frac{c_2}{r}, \quad t_{10,11} = c_1 l_p, \\
 t_{11,3} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_{45}, \quad t_{11,8} = a_{55}, \quad t_{11,10} = -l_p, \\
 t_{12,2} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_{45}, \quad t_{12,9} = a_{44}, \quad t_{12,12} = \frac{1}{r}. \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

Тут  $l_m = \frac{m\pi}{L}$ ;  $l_p = \frac{p\pi}{L}$ ;  $L$  – довжина твірної;  $p, m$  –

хвильові числа в рядах Фур'є (4.13).

Функції  $\varphi(p, m)$  та  $\varphi(m, p)$  залежать від цілих числових параметрів  $p$  та  $m$  та визначаються формулами:

$$\varphi(p, m) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } p + m \text{ – парне число,} \\ \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{p - m} + \frac{1}{p + m} \right) & \text{якщо } p + m \text{ – непарне} \\ & \text{число.} \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\varphi(m, p) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } p + m \text{ – парне число,} \\ \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{m - p} + \frac{1}{m + p} \right) & \text{якщо } p + m \text{ – непарне} \\ & \text{число.} \end{cases}$$

Після розв'язку системи (4.14) визначення

компонентів напружено-деформованого стану проведемо з використанням співвідношень, що відповідають граничним умовам (4.12):

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}(r, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} [y_{\sigma_{zz}, p}(r) + y'_{\sigma_{zz}, m}(r)] \sin l_m z; \\ \sigma_{\theta\theta}(r, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} [y_{\sigma_{\theta\theta}, p}(r) + y'_{\sigma_{\theta\theta}, m}(r)] \sin l_m z; \\ \tau_{z\theta}(r, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} [y_{\tau_{z\theta}, p}(r) + y'_{\tau_{z\theta}, m}(r)] \cos l_m z.\end{aligned}\quad (4.17)$$

Реалізація отриманої одновимірної задачі про напружений стан товстого циліндра система рівнянь (4.14) при граничних умовах (4.10) проводиться при використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації [58].

Алгоритм розв'язку задачі про напружений стан товстих анізотропних циліндричних оболонок, що знаходяться під дією розподілених по боковій поверхні навантажень, реалізований у вигляді пакетів прикладних програм для персонального комп'ютера.

## 4.2. Дослідження напружено-деформованого стану анізотропних товстих циліндричних оболонок

За допомогою розробленої методики визначимо параметри напружено-деформованого стану анізотропних циліндричних оболонок під дією зовнішнього бокового розподіленого тиску.

При проведенні розрахунків розглядатимуться оболонки, що виготовлені із склопластику. У власних осях цей матеріал ортотропний. Механічні характеристики композиту такі:  $E_{11}=445E_0$ ,  $E_{22}=107E_0$ ,  $E_{33}=107E_0$ ,  $G_{12}=G_{13}=41.8E_0$ ,  $G_{23}=84.8E_0$ ,  $\nu_{21}=0.26$ ,  $\nu_{12}=0.0628$ ,  $\nu_{32}=0.2$ ,  $\nu_{31}=0.26$ ,  $E_0=1,0 \cdot 10^2$  МПа.

Покажемо розподіл напружень  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{rr}$ ,  $\tau_{z\theta}$ ,  $\tau_{rz}$  та  $\tau_{r\theta}$  за товщиною оболонки для координати уздовж твірної  $z=0.5L$  при повороті головних напрямків пружності ортотропного матеріалу на кут  $\psi$  навколо осі  $z$ . Оболонка навантажена розподіленим тиском  $q = -q_0 \sin \frac{\pi}{L}z$  на зовнішній поверхні.

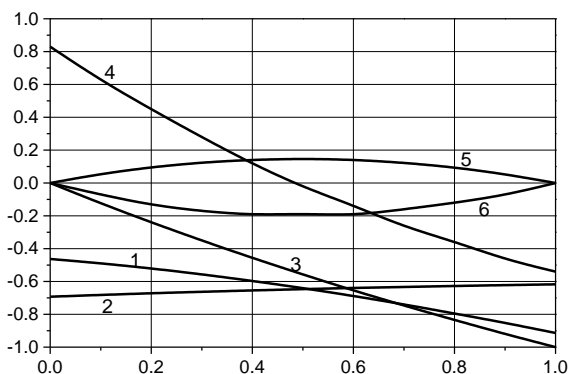
Результати розрахунків представлені в таблиці 4.1 і рис. 4.2 для кута  $\psi = 40^\circ$  і таблиці 4.2 і рис. 4.3 для кута  $\psi = 70^\circ$ . Причому на малюнках 4.2 і 4.3 прийняті такі позначення: крива 1 відповідає напруженню  $\sigma_{zz}$ , 2 –  $\sigma_{\theta\theta} \cdot 10^{-1}$ , 3 –  $\sigma_{rr}$ , 4 –  $\tau_{z\theta} \cdot 10^1$ , 5 –  $\tau_{rz}$ , 6 –  $\tau_{r\theta} \cdot 10^1$ .

Таблиця 4.1.

Напруження в одношаровому циліндрі при куті повороту головних напрямків пружності  $\psi=40^\circ$

$\frac{r-r_0}{r_N-r_0}$	$\frac{\sigma_{zz}}{q_0}$	$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q_0}$	$\frac{\sigma_{rr}}{q_0}$	$\frac{\tau_{z\theta}}{q_0}$	$\frac{\tau_{rz}}{q_0}$	$\frac{\tau_{r\theta}}{q_0}$
0.0	-0.463	-6.930	0.0	0.083	0.0	0.0
0.1	-0.490	-6.822	-0.123	0.063	0.053	-0.007
0.2	-0.521	-6.722	-0.239	0.045	0.094	-0.013
0.3	-0.557	-6.630	-0.350	0.028	0.123	-0.017
0.4	-0.597	-6.546	-0.456	0.012	0.140	-0.019
0.5	-0.641	-6.469	-0.557	-0.002	0.146	-0.019
0.6	-0.689	-6.399	-0.654	-0.014	0.140	-0.019
0.7	-0.740	-6.335	-0.746	-0.026	0.122	-0.016
0.8	-0.795	-6.277	-0.834	-0.036	0.093	-0.012
0.9	-0.853	-6.224	-0.919	-0.046	0.052	-0.007
1.0	-0.914	-6.177	-1.0	-0.054	0.0	0.0

$\frac{\sigma}{q_0}$



$\frac{r-r_0}{r_N-r_0}$

Рис. 4.2. Розподіл напружень за товщиною одношарового циліндра при  $\psi=40^\circ$

Таблиця 4.2.

Напруження в одношаровому циліндрі при куті повороту головних  
напрямоків пружності  $\psi=70^\circ$

$\frac{r-r_0}{r_N-r_0}$	$\frac{\sigma_{zz}}{q_0}$	$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q_0}$	$\frac{\sigma_{rr}}{q_0}$	$\frac{\tau_{z\theta}}{q_0}$	$\frac{\tau_{rz}}{q_0}$	$\frac{\tau_{r\theta}}{q_0}$
0.0	-0.044	-6.967	0.0	0.126	0.0	0.0
0.1	-0.066	-6.845	-0.123	0.099	0.013	0.003
0.2	-0.090	-6.735	-0.240	0.073	0.023	0.005
0.3	-0.113	-6.635	-0.351	0.048	0.030	0.007
0.4	-0.139	-6.545	-0.457	0.025	0.035	0.008
0.5	-0.164	-6.464	-0.558	0.002	0.036	0.008
0.6	-0.190	-6.391	-0.654	-0.019	0.034	0.007
0.7	-0.216	-6.325	-0.746	-0.040	0.030	0.006
0.8	-0.243	-6.266	-0.834	-0.060	0.023	0.005
0.9	-0.271	-6.214	-0.919	-0.079	0.013	0.003
1.0	-0.298	-6.167	-1.0	-0.098	0.0	0.0

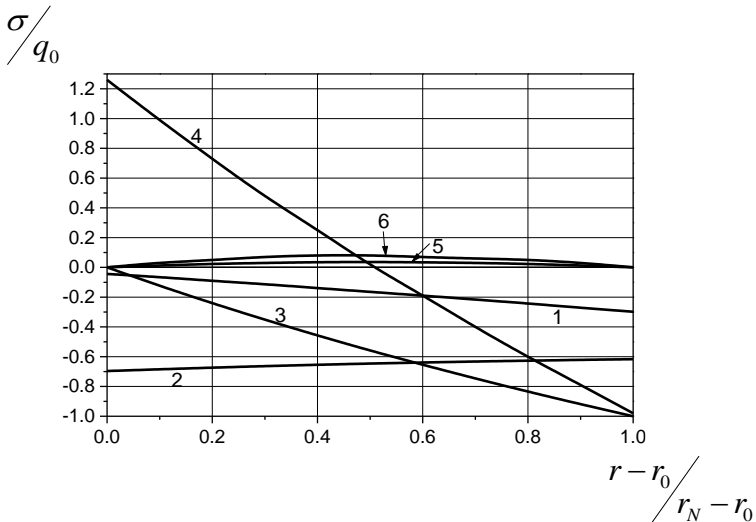


Рис. 4.3. Розподіл напружень за товщиною  
одношарового циліндра при  $\psi=70^\circ$



З таблиць 4.1, 4.2 і рис. 4.2, 4.3 видно, що величини найбільш значущих напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  не суттєво змінюються уздовж товщини оболонки для обох розглянутих кутів повороту головних напрямків пружності матеріалу, зміни становлять близько 11% – 12%. При цьому значення напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  практично не відрізняються для представлених кутів  $\psi$  і розходження не перевищують 0.3%. У той же час напруження  $\sigma_{zz}$  і  $\tau_{z\theta}$  характеризуються значним варіюванням своїх величин за товщиною, при цьому характер розподілу залишається незмінним як для  $\sigma_{zz}$ , так і для  $\tau_{z\theta}$  розглянутих кутів повороту головних напрямків пружності матеріалу. Дотичні напруження  $\tau_{rz}$  і  $\tau_{r\theta}$  розподіляються за товщиною циліндра згідно параболічного закону істотно змінюючи свої значення при зміні кута  $\psi$ , а  $\tau_{r\theta}$  також змінює свій знак.

Розглянемо двохшаровий циліндр утворений перехресним укладанням  $\pm\psi$  шарів рівної товщини під зовнішнім тиском  $q = -q_0 \sin \frac{\pi}{L} z$ . Геометричні і механічні характеристики оболонки такі ж, як в попередній задачі. Результати розрахунку напружень  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{rr}$ ,  $\tau_{z\theta}$ ,  $\tau_{rz}$  та

$\tau_{r\theta}$  за товщиною оболонки для координати уздовж твірної  $z=0.5L$  при куті  $\psi = +70^0$  внутрішнього шару і  $\psi = -70^0$  – зовнішнього представлені в таблиці 4.3 і рис. 4.4. На рис. 4.4 прийняті такі позначення: крива 1 відповідає напруженню  $\sigma_{zz}$ , 2 –  $\sigma_{\theta\theta} \cdot 10^{-1}$ , 3 –  $\tau_{z\theta}$ .

Порівнюючи результати напруженого стану одношарового і двошарового, отриманих перехресним укладанням матеріалу, циліндрів при куті  $\psi = 70^0$  вкажемо на таке. Розподіл значень напружень уздовж товщини для цих двох випадків практично ідентичний. У той же час напруження  $\sigma_{zz}$ , в разі двошарової оболонки, у зовнішньому шарі залишаючись від’ємними отримують додатні значення у внутрішньому. Також необхідно відзначити істотне, практично на порядок, збільшення дотичних напружень  $\tau_{z\theta}$  та  $\tau_{r\theta}$  у двошаровому циліндрі. На величини  $\tau_{rz}$ , що розподіляються уздовж товщини за законом параболи, зміна кількості шарів з одного до двох при куті  $\psi = 70^0$  істотно не вплинула.

Таблиця 4.3.

Напруження у двошаровому циліндрі утвореному перехресним  $\psi=\pm 70^\circ$  укладанням матеріалу

$\frac{r-r_0}{r_N-r_0}$	$\frac{\sigma_{zz}}{q_0}$	$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q_0}$	$\frac{\sigma_{rr}}{q_0}$	$\frac{\tau_{z\theta}}{q_0}$	$\frac{\tau_{rz}}{q_0}$	$\frac{\tau_{r\theta}}{q_0}$
0.0	0.129	-6.911	0.0	0.786	0.0	0.0
0.1	0.105	-6.805	-0.122	0.772	0.011	0.020
0.2	0.079	-6.711	-0.239	0.761	0.019	0.039
0.3	0.053	-6.627	-0.350	0.752	0.025	0.057
0.4	0.027	-6.553	-0.456	0.745	0.028	0.075
0.5	-0.0004	-6.489	-0.557	0.740	0.029	0.091
0.5	0.005	-6.451	-0.577	-0.670	0.029	0.091
0.6	-0.021	-6.389	-0.653	-0.657	0.028	0.072
0.7	-0.049	-6.335	-0.745	-0.646	0.025	0.053
0.8	-0.076	-6.288	-0.833	-0.636	0.019	0.034
0.9	-0.105	-6.247	-0.918	-0.628	0.011	0.017

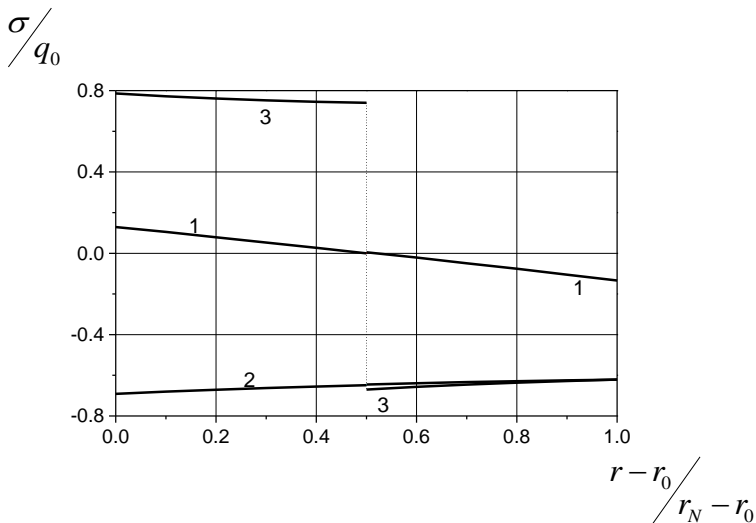


Рис. 4.4. Розподіл напружень за товщиною двошарового циліндра при  $\psi=\pm 70^\circ$

Розглянемо тришаровий циліндр під дією розподіленого зовнішнього тиску  $q = -q_0 \sin \frac{\pi}{L} z$ , у якого зі склопластику  $E_{11} = 445 \cdot 10^2$  МПа виготовлені лише несучі зовнішній і внутрішній шари, а в якості заповнювача використовується ізотропний матеріал з  $E = 0.1E_{11}$ . Довжина оболонки  $L = 2.4$  м, радіуси внутрішньої  $r_1 = 0.55$  м і зовнішньої  $r_2 = 0.65$  м поверхонь. Головні напрямки пружності несучих шарів  $h_1 = h_3 = 0.01$  м повернуті в одному напрямку на кут  $\psi$ . У таблиці 4.4 і на рис. 4.5 представлений випадок повороту головних напрямків несучих шарів на кут  $\psi = 60^\circ$ . На рис 4.5 прийняті такі позначення: крива 1 відповідає напруженню  $\sigma_{zz}$ , 2 –  $\sigma_{\theta\theta} \cdot 10^{-1}$ , 3 –  $\tau_{z\theta}$ .

Таблиця 4.4.

Напруження в тришаровому циліндрі з несучими шарами,  
поверненими на кут  $\psi_1 = \psi_3 = 60^\circ$

$\frac{r - r_0}{r_N - r_0}$	$\frac{\sigma_{zz}}{q_0}$	$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q_0}$	$\frac{\sigma_{rr}}{q_0}$	$\frac{\tau_{z\theta}}{q_0}$	$\frac{\tau_{rz}}{q_0}$	$\frac{\tau_{r\theta}}{q_0}$
0.0	-2.291	-20.689	0.0	1.607	0.0	0.0
0.1	-2.323	-20.341	-0.366	1.518	-0.017	0.038
0.1	0.504	-3.518	-0.366	-0.273	-0.017	0.038
0.2	0.469	-3.473	-0.421	-0.277	0.012	0.029
0.3	0.434	-3.431	-0.473	-0.281	0.036	0.021
0.4	0.399	-3.391	-0.523	-0.286	0.056	0.012
0.5	0.364	-3.354	-0.570	-0.290	0.071	0.004
0.6	0.330	-3.319	-0.616	-0.295	0.082	-0.005
0.7	0.295	-3.286	-0.659	-0.300	0.089	-0.013
0.8	0.260	-3.254	-0.701	-0.305	0.092	-0.021
0.9	0.225	-3.225	-0.741	-0.310	0.091	-0.029
0.9	-2.217	-17.705	-0.741	0.898	0.091	-0.029
1.0	-2.270	-17.489	-1.0	0.831	0.0	0.0

$\sigma/q_0$

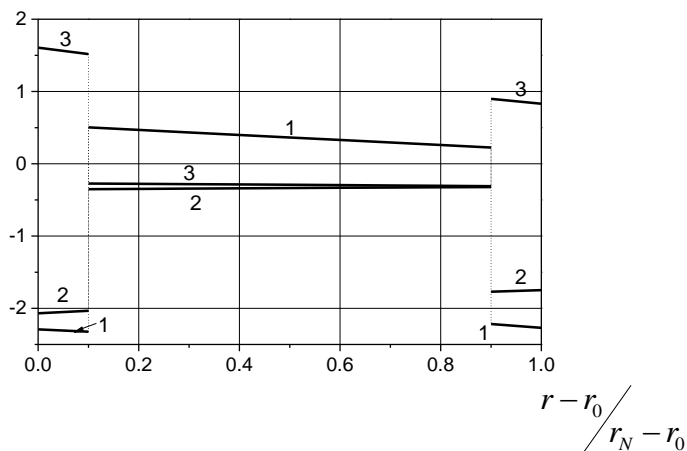


Рис. 4.5. Розподіл напружень за товщиною тришарового циліндра при повороті головних напрямків пружності несучих шарів на кут  $\psi = 60^\circ$ .

Характерною особливістю представлених в таблиці 4.4 і на рис. 4.5 результатів є значна різниця між величинами компонентів напруженого стану  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{z\theta}$  в несучих шарах і в заповнювачі, що змінюється на порядок. Причому в разі напружень  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{z\theta}$  спостерігається зміна знаку при переході від шару до шару. Також можна помітити, що порівняно з попередніми типами пакетів змінився характер розподілу напружень  $\tau_{rz}$  та  $\tau_{r\theta}$ , які тепер змінюють знаки своїх величин при русі за товщиною оболонки.

### 4.3. Висновки до розділу 4

В розділі розв'язана лінійна задача про напружено-деформований стан анізотропних циліндричних оболонок обертання при осесиметричному розподіленому зовнішньому тиску в тривимірній постановці.

Для приведення тривимірної задачі до одновимірної використовується метод Бубнова-Гальоркіна. Розв'язок отриманої задачі проводиться з використанням методу дискретної ортогоналізації.

За допомогою розробленої методики визначено параметри напружено-деформованого стану анізотропних

циліндричних оболонок, що знаходяться під дією зовнішнього розподіленого тиску.

Аналіз анізотропних циліндричних оболонок, що знаходяться під дією зовнішнього розподіленого тиску, виявив наявність в циліндрі всіх можливих нормальних та дотичних напружень.

В таблицях і на рисунках представлений характер зміни напруженого стану шаруватих анізотропних оболонок за товщиною з урахуванням жорсткого контакту між шарами. Видно, що визначальними напруженнями з точки зору подальшого розрахунку задачі стійкості є  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{z\theta}$ . При цьому можна помітити, що при зміні кута повороту голвних напрямків пружності одношарової оболонки наприклад від  $\psi=40^\circ$  до  $\psi=70^\circ$  розходження між значеннями напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  не перевищують 0.3%. В той же час розходження між значеннями напружень  $\tau_{z\theta}$  досягає 81%, а у випадку  $\sigma_{zz}$  перевищує 100%. Видно що для розглянутих типів циліндрів величини напружень  $\tau_{rz}$  та  $\tau_{r\theta}$  є незначними і складають менше 1.0% та 0.2% відповідно від значень  $\sigma_{\theta\theta}$ . Подібна ситуація спостерігається і у випадку дво- та тришарових циліндричних оболонок.

## РОЗДІЛ 5. РОЗРАХУНОК НА СТІЙКІСТЬ ПРУЖНИХ ТОВСТИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК В ТРИВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ

### 5.1. Система рівнянь, що описує стійкість анізотропних циліндричних оболонок в тривимірній постановці

В нелінійній теорії пружності [102] умови рівноваги елемента при використанні циліндричної системи координат зводяться до трьох рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}_{rr}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \hat{\sigma}_{rr} + r \frac{\partial}{\partial z} (\hat{t}_{zr}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{t}_{\theta r}) - \hat{\sigma}_{\theta\theta} + r F_r \right]; \\ \frac{\partial \hat{t}_{rz}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \hat{t}_{rz} + r \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\sigma}_{zz}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{t}_{\theta z}) + r F_z \right]; \\ \frac{\partial \hat{t}_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \hat{t}_{r\theta} + \hat{t}_{\theta r} + r \frac{\partial}{\partial z} (\hat{t}_{z\theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\sigma}_{\theta\theta}) + r F_\theta \right], \end{aligned} \quad (5.1)$$

де  $F_r, F_z, F_\theta$  – проекції вектора питомих об'ємних сил на напрямки дотичних до координатних ліній  $r, z, \theta$ . А напруження  $\hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{z\theta}, \hat{\sigma}_{zr}, \hat{\sigma}_{\theta z}, \hat{\sigma}_{\theta\theta}, \hat{\sigma}_{\theta r}, \hat{\sigma}_{r z}, \hat{\sigma}_{r\theta}, \hat{\sigma}_{rr}$  – суть їх проекції на вісі прийнятої криволінійної системи координат до деформування [102]:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{zz} &= (1 + e_{zz}) \sigma_{zz} + \left( \frac{1}{2} e_{z\theta} - \omega_r \right) \tau_{z\theta} + \left( \frac{1}{2} e_{zr} + \omega_\theta \right) \tau_{zr}; \\ \hat{\sigma}_{z\theta} &= \left( \frac{1}{2} e_{z\theta} + \omega_3 \right) \sigma_{zz} + (1 + e_{\theta\theta}) \tau_{z\theta} + \left( \frac{1}{2} e_{\theta r} - \omega_z \right) \tau_{zr}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \sigma_{zr} &= \left( \frac{1}{2} e_{zr} - \omega_\theta \right) \sigma_{zz} + \left( \frac{1}{2} e_{\theta r} + \omega_z \right) \tau_{z\theta} + (1 + e_{rr}) \tau_{zr}; \\
 \sigma_{\theta z} &= (1 + e_{zz}) \tau_{z\theta} + \left( \frac{1}{2} e_{z\theta} - \omega_r \right) \sigma_{\theta\theta} + \left( \frac{1}{2} e_{zr} + \omega_\theta \right) \tau_{\theta r}; \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \left( \frac{1}{2} e_{z\theta} + \omega_3 \right) \tau_{z\theta} + (1 + e_{\theta\theta}) \sigma_{\theta\theta} + \left( \frac{1}{2} e_{\theta r} - \omega_z \right) \tau_{\theta r}; \\
 \sigma_{\theta r} &= \left( \frac{1}{2} e_{zr} - \omega_\theta \right) \tau_{z\theta} + \left( \frac{1}{2} e_{\theta r} + \omega_z \right) \sigma_{\theta\theta} + (1 + e_{rr}) \tau_{\theta r}; \quad (5.2) \\
 \sigma_{rz} &= (1 + e_{zz}) \tau_{zr} + \left( \frac{1}{2} e_{z\theta} - \omega_r \right) \tau_{\theta r} + \left( \frac{1}{2} e_{zr} + \omega_\theta \right) \sigma_{rr}; \\
 \sigma_{r\theta} &= \left( \frac{1}{2} e_{z\theta} + \omega_3 \right) \tau_{zr} + (1 + e_{\theta\theta}) \tau_{\theta r} + \left( \frac{1}{2} e_{\theta r} - \omega_z \right) \sigma_{rr}; \\
 \sigma_{rr} &= \left( \frac{1}{2} e_{zr} - \omega_\theta \right) \tau_{zr} + \left( \frac{1}{2} e_{\theta r} + \omega_z \right) \tau_{\theta r} + (1 + e_{rr}) \sigma_{rr}.
 \end{aligned}$$

Компоненти деформації і кути повороту нескінченно малого об'ємного елемента оболонки виражаються через переміщення за допомогою залежностей [102]:

$$\begin{aligned}
 e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r; e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\
 e_{z\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \\
 e_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_z &= \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{2r} u_\theta - \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}; \quad \omega_\theta = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial z}; \\ \omega_r &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{1}{2r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (5.3)$$

Тут  $u_z$ ,  $u_\theta$ ,  $u_r$  – переміщення точок циліндра в напрямках осей  $z$ ,  $\theta$ ,  $r$  відповідно.

Линеаризовану систему (5.1) з урахуванням (5.2) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \sigma_{rr} + r \frac{\partial}{\partial z} \left( \tau_{rz} + \sigma_{zz}^0 \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \tau_{z\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta \right) \right) + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tau_{r\theta} + \tau_{z\theta}^0 \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \sigma_{\theta\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} u_\theta \right) \right) - \\ &\left. - \left( \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} u_r \right) + \tau_{z\theta}^0 \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \right) \right]; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \tau_{rz} + r \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma_{zz} + \sigma_{zz}^0 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tau_{z\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tau_{z\theta} + \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \right) \right]; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \tau_{r\theta} + \left( \tau_{r\theta} + \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \right. \\ &\left. + r \frac{\partial}{\partial z} \left( \tau_{z\theta} + \tau_{z\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right) + \sigma_{zz}^0 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) + \right.\end{aligned}\quad (5.4)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} u_r \right) + \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \Bigg],$$

де  $\sigma_{zz}^0$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^0$  та  $\tau_{z\theta}^0$  докритичні значення напружень, що визначаються залежностями (4.17).

Замінюючи в (5.4) напруження  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{z\theta}$  їх виразами (4.6) з урахуванням (5.3) і використовуючи співвідношення для деформації  $e_{rz}$ ,  $e_{r\theta}$ ,  $e_{rr}$  (5.3), отримуємо систему рівнянь стійкості для анізотропних циліндричних оболонок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{c_2 - 1}{r} \sigma_{rr} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{b_{22}}{r^2} u_r + \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \\ &+ \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \\ &- \sigma_{zz}^0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_\theta}{\partial z}; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= -c_1 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz} - \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - b_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{b_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \\ &- \frac{b_{12} + b_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_3}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2b_{16}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - \\ &- b_{16} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \sigma_{zz}^0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta}; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{c_2}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta} - \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{b_{12} + b_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -b_{66} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - c_3 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - b_{16} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \\
 & - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{2b_{26}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} - \sigma_{zz}^0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta}; \\
 & \frac{\partial u_r}{\partial r} = c_4 \sigma_{rr} - \frac{c_2}{r} u_r - c_1 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_3}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - c_3 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{c_2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}; \\
 & \frac{\partial u_z}{\partial r} = a_{55} \tau_{rz} + a_{45} \tau_{r\theta} - \frac{\partial u_r}{\partial z}; \\
 & \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = a_{45} \tau_{rz} + a_{44} \tau_{r\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta. \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

Розв'язок системи (5.5) здійснимо при використанні граничних умов (4.10, 4.12). З їх урахуванням для перетворення тривимірної задачі до одновимірної використовуємо процедуру Бубнова-Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі функції в тригонометричні ряди за координатою вздовж твірної  $z$  так, що б вони задовольняли граничним умовам (4.12), а також врахуємо їх періодичність за коловою координатою  $\theta$ :

$$\sigma_{rr}(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{1,pk}(r) \cos k\theta + y'_{1,mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z;$$

$$\tau_{rz}(r, z, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{2,pk}(r) \cos k\theta + y'_{2,mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z;$$

$$\tau_{r\theta}(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{3,pk}(r) \sin k\theta + y'_{3,mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z;$$

$$\begin{aligned}
 u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{4, pk}(r) \cos k\theta + y'_{4, mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\
 u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{5, pk}(r) \cos k\theta + y'_{5, mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \\
 u_{\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{6, pk}(r) \sin k\theta + y'_{6, mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z.
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

Після деяких математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (5.5) за допомогою співвідношень (5.6), отримуємо нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь стійкості в нормальній формі Коші. При цьому враховано, що, відповідно до граничних умов (4.12), докритичний напруження  $\sigma_{zz}^0$  та  $\sigma_{\theta\theta}^0$  за довжиною твірної оболонки змінюються згідно із законом синуса, а  $\tau_{z\theta}^0$  за законом косинуса.

$$\frac{dy}{dr} = T(r)y, \quad T(r) = t_{i,j}(r), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad j = \overline{1, \infty}, \tag{5.7}$$

де  $y = \{y_{1, pk}; y_{2, pk}; y_{3, pk}; y_{4, pk}; y_{5, pk}; y_{6, pk}; y'_{1, mk}; y'_{2, mk}; y'_{3, mk}; y'_{4, mk}; y'_{5, mk}; y'_{6, mk}\}$  – розв’язуюча вектор-функція.

Ненульові елементи матриці  $T(r)$  мають вигляд:

$$t_{1,1} = \frac{c_2 - 1}{r}, \quad t_{1,2} = l_p, \quad t_{1,3} = -\frac{k}{r},$$

$$t_{1,4} = \frac{b_{22}}{r^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{zz}^0 l_{m_2}^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{k^2}{r^2} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{1}{r^2},$$

$$t_{1,5} = -l_p \frac{b_{12}}{r}, t_{1,6} = k \frac{b_{22}}{r^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{2k}{r^2},$$

$$t_{1,10} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) 2 \frac{k}{r} \tau_{z\theta}^0 l_{m_2}, t_{1,11} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{b_{26}}{r^2},$$

$$t_{1,12} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{b_{26}}{r} l_{m_2} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 l_{m_2},$$

$$t_{2,1} = -c_1 l_p, t_{2,2} = -\frac{1}{r}, t_{2,4} = -\frac{b_{12}}{r} l_p,$$

$$t_{2,5} = b_{11} l_p^2 + k^2 \frac{b_{66}}{r^2} + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_3(p, m_1, m) \sigma_{zz}^0 l_{m_2}^2 +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_3(p, m_1, m) \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{k^2}{r^2},$$

$$t_{2,6} = -k \frac{b_{12} + b_{66}}{r} l_p, t_{2,7} = -\sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{c_3}{r},$$

$$t_{2,10} = -\sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{b_{26}}{r^2},$$

$$t_{2,11} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) 2 \frac{k b_{16}}{r} l_{m_2} + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_4(p, m_1, m) 2 \frac{k}{r} \tau_{z\theta}^0 l_{m_2},$$

$$t_{2,12} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) b_{16} l_{m_2}^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k^2 \frac{b_{26}}{r^2},$$

$$t_{3,1} = k \frac{c_2}{r}, \quad t_{3,3} = -\frac{2}{r},$$

$$t_{3,4} = k \frac{b_{22}}{r^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_4(p, m_1, m) \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{2k}{r^2}, \quad t_{3,5} = -k \frac{b_{12} + b_{66}}{r} l_p,$$

$$t_{3,6} = b_{66} l_p^2 + k^2 \frac{b_{22}}{r^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{zz}^0 l_{m_2}^2 + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{k^2}{r^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{1}{r^2},$$

$$t_{3,7} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_3 l_{m_2},$$

$$t_{3,10} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{b_{26}}{r} l_{m_2} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 l_{m_2},$$

$$t_{3,11} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \left( b_{16} l_{m_2}^2 + k^2 \frac{b_{26}}{r^2} \right),$$

$$t_{3,12} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) 2 \frac{k b_{26}}{r} l_{m_2} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) 2 \frac{k}{r} \tau_{z\theta}^0 l_{m_2},$$

$$t_{4,1} = c_4, \quad t_{4,4} = -\frac{c_2}{r}, \quad t_{4,5} = c_1 l_p, \quad t_{4,6} = -k \frac{c_2}{r},$$

$$t_{4,11} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{c_3}{r}, \quad t_{4,12} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_3 l_{m_2},$$

$$t_{5,2} = a_{55}, \quad t_{5,4} = -l_p, \quad t_{5,9} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_{45},$$

$$t_{6,3} = a_{44}, \quad t_{6,4} = \frac{k}{r}, \quad t_{6,6} = \frac{1}{r}, \quad t_{6,8} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_{45},$$

$$t_{7,4} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) 2 \frac{k}{r} \tau_{z\theta}^0 l_{m_2}, \quad t_{7,5} = - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{b_{26}}{r^2},$$

$$t_{7,6} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{b_{26}}{r} l_{m_2} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 l_{m_2},$$

$$t_{7,7} = \frac{c_2 - 1}{r}, \quad t_{7,8} = l_p, \quad t_{7,9} = \frac{k}{r},$$

$$t_{7,10} = \frac{b_{22}}{r^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{zz}^0 l_{m_2}^2 + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{k^2}{r^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{1}{r^2},$$

$$t_{7,11} = -l_p \frac{b_{12}}{r}, \quad t_{7,12} = -k \frac{b_{22}}{r^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{2k}{r^2},$$

$$t_{8,1} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_1(m, p) k \frac{c_3}{r}, \quad t_{8,4} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_1(m, p) k \frac{b_{26}}{r^2},$$

$$t_{8,5} = - \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_1(m, p) 2 \frac{k b_{16}}{r} l_{m_2} - \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_4(p, m_1, m) 2 \frac{k}{r} \tau_{z\theta}^0 l_{m_2},$$

$$t_{8,6} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_1(m, p) b_{16} l_{m_2}^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_1(m, p) k^2 \frac{b_{26}}{r^2},$$

$$t_{8,7} = -c_1 l_p, \quad t_{8,8} = -\frac{1}{r}, \quad t_{8,10} = -\frac{b_{12}}{r} l_p,$$

$$t_{8,11} = b_{11} l_p^2 + k^2 \frac{b_{66}}{r^2} + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_3(p, m_1, m) \sigma_{zz}^0 l_{m_2}^2 + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_3(p, m_1, m) \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{k^2}{r^2},$$



$$\begin{aligned}
 t_{8,12} &= k \frac{b_{12} + b_{66}}{r} l_p, \quad t_{9,1} = - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_3 l_{m_2}, \\
 t_{9,4} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{b_{26}}{r} l_{m_2} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 l_{m_2}, \\
 t_{9,5} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \left( b_{16} l_{m_2}^2 + k^2 \frac{b_{26}}{r^2} \right), \\
 t_{9,6} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) 2 \frac{k b_{26}}{r} l_{m_2} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) 2 \frac{k}{r} \tau_{z\theta}^0 l_{m_2}, \\
 t_{9,7} &= -k \frac{c_2}{r}, \quad t_{9,9} = -\frac{2}{r}, \\
 t_{9,10} &= -k \frac{b_{22}}{r^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_4(p, m_1, m) \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{2k}{r^2}, \quad t_{9,11} = k \frac{b_{12} + b_{66}}{r} l_p, \\
 t_{9,12} &= b_{66} l_p^2 + k^2 \frac{b_{22}}{r^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{zz}^0 l_{m_2}^2 + \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{k^2}{r^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{\theta\theta}^0 \frac{1}{r^2}, \\
 t_{10,5} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{c_3}{r}, \quad t_{10,6} = - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_3 l_{m_2}, \quad (5.8) \\
 t_{10,7} &= c_4, \quad t_{10,10} = -\frac{c_2}{r}, \quad t_{10,11} = c_1 l_p, \quad t_{10,12} = k \frac{c_2}{r}, \\
 t_{11,3} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_{45}, \quad t_{11,8} = a_{55}, \quad t_{11,10} = -l_p, \\
 t_{12,2} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_{45}, \quad t_{12,9} = a_{44}, \quad t_{12,10} = -\frac{k}{r}, \quad t_{12,12} = \frac{1}{r}.
 \end{aligned}$$

Тут  $l_m = \frac{m\pi}{L}$ ;  $l_p = \frac{p\pi}{L}$ ;  $L$  – довжина твірної  $p$ ,  $m$ ,  $m_1$

– хвильові числа в рядах Фур'є (5.6).

Функції  $\varphi(p, m)$  та  $\varphi(m, p)$  залежать від цілих числових параметрів і визначаються формулами (4.16).

Функції  $\varphi_2(p, m_1, m)$ ,  $\varphi_3(p, m_1, m)$ ,  $\varphi_4(p, m_1, m)$  і  $\varphi_5(p, m_1, m)$  залежать від цілих чисельних параметрів  $p$ ,  $m_1$  та  $m$  та визначаються формулами:

$$\varphi_2(p, m_1, m) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{m + m_1 - p} + \frac{1}{m - m_1 + p} + \frac{1}{-m + m_1 + p} - \frac{1}{m + m_1 + p} \right);$$

$$\varphi_3(p, m_1, m) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{m + m_1 - p} - \frac{1}{m - m_1 + p} + \frac{1}{-m + m_1 + p} - \frac{1}{m + m_1 + p} \right);$$

якщо  $p$  – непарне,  $m_1 = 1$ ,  $m$  – непарне,

якщо  $p$  – парне,  $m_1 = 1$ ,  $m$  – парне;

$$\varphi_4(p, m_1, m) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{m + m_1 - p} + \frac{1}{m - m_1 + p} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{-m+m_1+p} - \frac{1}{m+m_1+p} \right);$$
$$\varphi_5(p, m_1, m) = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{m+m_1-p} + \frac{1}{m-m_1+p} + \right.$$
$$\left. \frac{1}{-m+m_1+p} - \frac{1}{m+m_1+p} \right);$$

якщо  $p$  – непарне,  $m_1 = 2$ ,  $m$  – парне,

якщо  $p$  – парне,  $m_1 = 2$ ,  $m$  – непарне. (5.9)

Алгоритм розв'язку задачі про стійкість оболонок обертання під дією розподіленого по бокових поверхнях, зовнішнього або внутрішнього тиску, здійснюється за допомогою методу дискретної ортогоналізації й реалізований у вигляді пакетів прикладних програм для ПК.

## **5.2. Дослідження стійкості анізотропних товстих циліндричних оболонок**

Результати розв'язку задач за запропонованим підходом представлені на прикладі задач стійкості циліндричних одно- і двошарових оболонок з анізотропних матеріалів при розподіленому бічному тиску. Розглядалися оболонки: радіусом  $R=0,6\text{м}$ , довжиною  $L=1,2\text{м}$ , фізико-механічними характеристиками матеріалу:  $E_{11}=1900\text{МПа}$ ,

$E_{22} = 1200 \text{ МПа}$ ,  $E_{33} = 450 \text{ МПа}$ ,  $G_{12} = 300 \text{ МПа}$ ,  $G_{13} = G_{23} = 230 \text{ МПа}$ ,  $\nu_{12} = 0,15$ ,  $\nu_{32} = 0,3$ ,  $\nu_{31} = 0,07$ , під розподіленим навантаженням  $q = -q \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ . Результати для критичних напружень представлені в табл. 5.1 і на рис. 5.1 для оболонки з товщиною стінки  $h = 0,01 \text{ м}$ , в табл. 5.2 і на рис. 5.2 для  $h = 0,02 \text{ м}$ , в табл. 5.3 і на рис. 5.3 для  $h = 0,03 \text{ м}$ . Позначення на рис. 5.1–5.3 такі: 1, 2 – відповідно одношарова та двошарова оболонки розраховані з використанням просторової теорії (ПТС); 3, 4 – відповідно одношарова та двошарова оболонки розраховані з використанням підходу ТСАО, описаного в розділах 1-3 представленої монографії.

Таблиця 5.1  
 Стійкість циліндричної оболонки товщиною  $h=0,01m$  під розподіленим зовнішнім тиском

Одношарова оболонка $h=0,01m$				Двошарова утворена перехресним укладанням шарів оболонка $h_1 = h_2 = h/2 = 0,005m$				
$\psi$ , град	ПТС		ТСаО		ПТС		ТСаО	
	n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}$ , МПа	n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}$ , МПа	n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}$ , МПа	n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}$ , МПа
0	6	2.570	6	2.590	6	2.570	6	2.590
10	6	2.557	6	2.605	6	2.563	6	2.609
20	6	2.539	6	2.637	6	2.547	6	2.654
30	5	2.542	6	2.686	6	2.547	6	2.686
40	5	2.546	6	2.771	5	2.553	6	2.728
50	5	2.624	6	2.925	5	2.603	6	2.810
60	5	2.770	6	3.132	5	2.748	6	2.959
70	5	2.936	5	3.233	5	2.926	5	3.157
80	5	3.072	5	3.278	5	3.069	5	3.245
90	5	3.128	5	3.292	5	3.128	5	3.292

$q_{cr} \cdot 10^{-4}$ , МПа

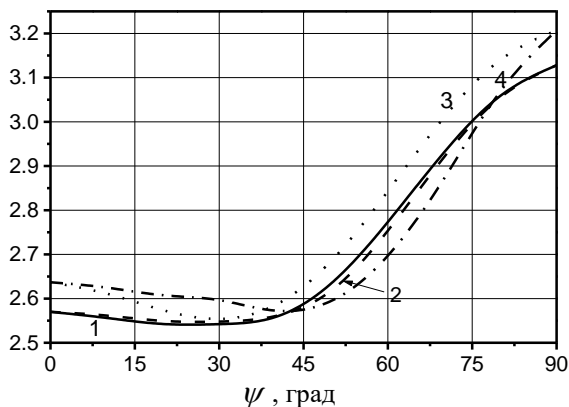


Рис. 5.1. Графік залежності критичних значень розподіленого навантаження від кута повороту головних напрямків пружності матеріалу, товщина стінки  $h=0,01m$

Таблиця 5.2

Стійкість циліндричної оболонки товщиною  $h=0,02\text{м}$  під розподіленим зовнішнім тиском

Одношарова оболонка $h=0,02\text{м}$				Двошарова утворена перехресним укладанням шарів оболонка $h_1 = h_2 = h/2 = 0,01\text{м}$				
$\psi$ , град	ПТС		ТСаО		ПТС		ТСаО	
	n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}$ , МПа	n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}$ , МПа	n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}$ , МПа	n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}$ , МПа
0	5	14.64	5	14.49	5	14.64	5	14.49
10	5	14.71	5	14.63	5	14.70	5	14.68
20	5	14.88	5	15.05	5	14.83	5	15.10
30	5	15.16	5	15.54	5	15.05	5	15.50
40	5	15.60	5	16.13	5	15.52	5	15.87
50	5	16.35	5	17.01	5	16.32	5	16.37
60	4	16.92	5	18.05	4	16.81	5	17.13
70	4	17.37	4	18.91	4	17.35	5	18.11
80	4	17.69	4	18.66	4	17.69	4	18.60
90	4	17.80	4	18.62	4	17.80	4	18.64

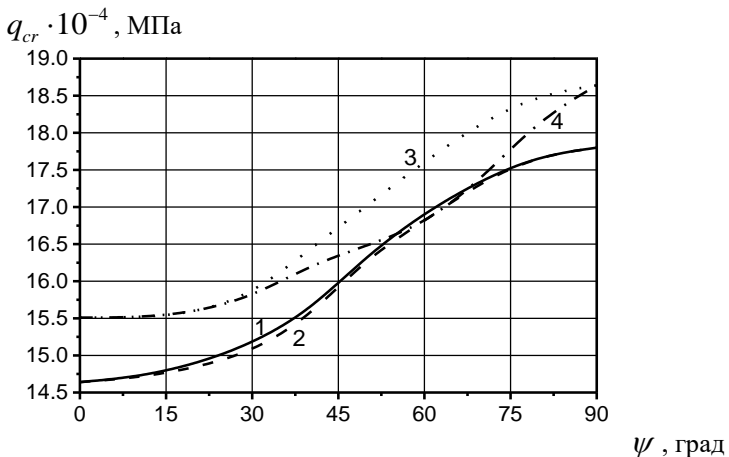
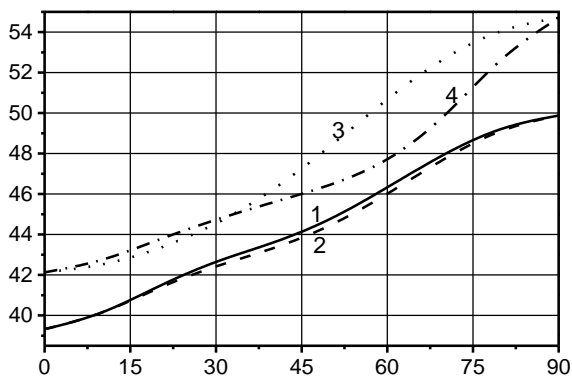


Рис. 5.1. Графік залежності критичних значень розподіленого навантаження від кута повороту головних напрямків пружності матеріалу, товщина стінки  $h=0.02\text{м}$

Таблиця 5.3  
 Стійкість циліндричної оболонки товщиною  $h=0,03\text{м}$  під розподіленим зовнішнім тиском

Одношарова оболонка $h=0,03\text{м}$			Двошарова утворена перехресним укладанням шарів оболонка $h_1 = h_2 = h/2 = 0,015\text{м}$					
$\psi$ , град	ПТС		ТСаО		ПТС		ТСаО	
	n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}$ , МПа	n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}$ , МПа	n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}$ , МПа	n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}$ , МПа
0	4	39.32	4	39.04	4	39.32	4	39.04
10	4	40.02	4	39.98	4	40.03	4	39.97
20	4	41.48	4	42.23	4	41.40	4	42.23
30	4	42.71	4	44.37	4	42.46	4	44.34
40	4	43.55	4	46.21	4	43.27	4	45.47
50	4	44.69	4	47.46	4	44.37	4	46.30
60	4	46.32	4	48.59	4	45.98	4	46.90
70	4	48.02	4	49.34	4	47.79	4	47.93
80	4	49.35	4	49.83	4	49.26	4	49.32
90	4	49.88	4	49.94	4	49.88	4	49.94

$q_{cr} \cdot 10^{-4}$ , МПа



$\psi$ , град

Рис. 5.1. Графік залежності критичних значень розподіленого навантаження від кута повороту головних напрямків пружності матеріалу, товщина стінки  $h=0,03\text{м}$

З аналізу результатів представлених в таблицях 5.1–5.3

видно, що критичні значення, отримані за запропонованою методикою, менші розрахованих за уточненою теорією представленою у розділах 1-3, навіть при відношенні товщини оболонки до радіусу  $h/R = 1/60$ , хоча для більш тонких оболонок відзначається деяке неспівпадіння кількості хвиль, в окружному напрямку, що відповідають втраті стійкості. Так само видно, що зі збільшенням товщини від  $h/R = 1/60$  до  $h/R = 1/20$  розбіжність між критичними навантаженнями, отриманими за представленими двома методиками, збільшується. Причому описані властивості проявляються як для одношарових так і для двошарових оболонок утворених перехресним укладанням шарів.

### **5.3. Висновки до розділу 5**

Побудована розв'язувальна система рівнянь стійкості анізотропних оболонок обертання у тривимірній постановці. Для цього використовується нелінійна система рівнянь рівноваги [102]. Для приведення тривимірної задачі до одномірної використано метод Бубнова-Гальоркіна та представлення розв'язувальних функцій у вигляді тригонометричних рядів Фур'є за коловою



координатою. Для розв'язку системи диференціальних рівнянь використаний метод дискретної ортогоналізації.

Приведені результати розрахунку на стійкість циліндричних оболонок з композитів, що утворені косоперехресним укладанням шарів армованого волокнами матеріалу. Проаналізовано стійкість циліндричних оболонок, виготовлених з волокнистих композитів з різноманітними схемами армування та конфігураціями пакету шарів. Розглядалось навантаження поверхневий розподілений тиск. Досліджено вплив анізотропії матеріалу на критичні величини вказаних навантажень.

Пропонований підхід до розрахунку на стійкість циліндричних анізотропних оболонок призводить до отримання менших величин критичних навантажень порівняно із уточненою методикою. При товщині одношарової або двошарової оболонки утвореної перехресним укладанням шарів з  $h/R = 1/60$  ця розбіжність не перевищує 3% при дії зовнішнього тиску. Але при збільшенні товщини оболонки, різниця між величинами критичних навантажень, що отримані за різними підходами, починає зростати. Для зовнішнього тиску розбіжність в результатах відповідно складає: при  $h/R = 1/30$  до 5%, а при  $h/R = 1/20$  до 10%.

## **ВИСНОВКИ**

1. У монографії вирішена важлива науково-технічна проблема суть якої у створенні на основі уточненої теорії типу Тимошенка підходу до встановлення параметрів напружено-деформованого стану та стійкості нетонких анізотропних оболонок обертання нульової гауссової кривини із матеріалу з однією площиною пружної симетрії під дією осьового тиску чи рівномірного зовнішнього тиску.

2. Розв'язана лінійна задача про напружено-деформований стан та побудована розв'язувальна система рівнянь стійкості анізотропних циліндричних оболонок обертання при вісесиметричному розподіленому зовнішньому тиску в тривимірній постановці на основі співвідношень теорії пружності.

3. При виконанні роботи проведені теоретичні дослідження, результатом яких є отримання нових важливих результатів:

- Виведено, при використанні модифікованого змішаного варіаційного принципу, нелінійну систему неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку кожне, що описує напружено-деформований стан нетонких анізотропних композитних оболонок обертання в рамках

нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка.

- Проведені необхідні перетворення для приведення її до системи неоднорідних диференціальних рівнянь нормального виду до розв'язання вісесиметричних нелінійних задач напружено-деформованого стану анізотропних оболонок обертання нульової гауссової кривини з матеріалу із однією площиною пружної симетрії.

- За використання методу дискретної ортогоналізації створений програмний продукт стосовно встановлення параметрів нелінійного напружено-деформованого стану нетонких композитних анізотропних оболонок обертання з матеріалу, що має одну площину пружної симетрії.

- Побудована розв'язувальна система однорідних диференціальних рівнянь, що описує стійкість анізотропних оболонок обертання нульової гауссової кривини у нормальному вигляді Коші.

- Розроблені алгоритм і методика чисельного розрахунку на стійкість, що дозволяє проводити оптимізацію структурних параметрів анізотропних композитних оболонок і отримувати дані, що не викликають сумнівів стосовно їх достовірності.

- Розроблений алгоритм і створений комп'ютерний

програмний продукт для персонального комп'ютера, який дозволяє об'єднати в єдиному обчислювальному процесі знаходження докритичного напружено-деформованого стану і розв'язок на цій основі задач стійкості.

- Проведений аналіз напружено-деформованого стану анізотропних циліндричних і конічних оболонок, показав наявність в напруженому стані також поперечних зусиль  $T_{13}$ . Із збільшенням товщини пакету поперечні зусилля  $T_{13}$  мають тенденцію до зростання. Це особливо помітно для тришарового варіанту структурного пакету із крайніми шарами більш високої жорсткості, ніж середній. Так, під дією зовнішнього тиску в тришарових циліндричних оболонках поперечні зусилля  $T_{13}$  зростають від 3,8% при відношенні  $h/R = 0,01$  до 18,7% при  $h/R = 0,1$ . При осьовому тиску поперечні зусилля змінюються від 2,4% при  $h/R = 0,01$  до 108,4% при відносній товщині оболонки  $h/R = 0,1$ .

- Пропонований підхід до розрахунку на стійкість циліндричних анізотропних оболонок призводить до отримання менших величин критичних навантажень порівняно із методикою, що спирається на гіпотези Кірхгофа-Лява. При товщині оболонки  $h/R = 0,01$  ця

розбіжність не перевищує 9,3% при дії зовнішнього тиску і 7,3% при дії осевого тиску відповідно. При збільшенні товщини оболонки, різниця між величинами критичних навантажень, що отримані за різними підходами, починає зростати. Для зовнішнього тиску та осевого тиску розбіжність в результатах відповідно складає: при  $h/R=0,1$  до 13%, а при  $h/R=0,2$  до 103%. Суттєва відмінність в значеннях критичних навантажень, що отримані за різними методиками, проявляється для тришарового варіанту структурного пакету.

- На основі рівнянь теорії пружності отримана тривимірна система для розв'язку напружено-деформованого стан анізотропних циліндричних оболонок обертання при вісесиметричному розподіленому зовнішньому або внутрішньому тиску в тривимірній постановці.

- Для зменшення розмірності системи рівнянь до одновимірної використано метод Бубнова-Гальоркіна у відповідності з яким, розкладено всі функції у тригонометричні ряди за координатою уздовж твірної циліндра так, щоб вони задовольняли крайовим умовам на торцях оболонки.

- Використовуючи метод дискретної ортогоналізації

для задоволення граничним умовам на зовнішній та внутрішній поверхнях оболонки, створений програмний продукт стосовно встановлення параметрів напружено-деформованого стану товстих композитних анізотропних оболонок обертання з матеріалу, що має одну площину пружної симетрії.

- Проведений аналіз напружено-деформованого стану анізотропних циліндричних оболонок під розподіленим зовнішнім тиском, показав наявність в її напруженому стані всіх напружень. При цьому визначальними за величиною є  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  та  $\tau_{z\theta}$ , значення яких суттєво перевищують величини напружень  $\tau_{rz}$  та  $\tau_{r\theta}$ .

- Запропонований підхід до розв'язку задачі стійкості товстих анізотропних оболонок обертання у тривимірній постановці. Для цього використовується нелінійна система рівнянь теорії пружності. Для приведення тривимірної задачі до одновимірної використано метод Бубнова-Гальоркіна та представлення розв'язувальних функцій, за коловою координатою, у вигляді тригонометричних рядів Фур'є. Для розв'язку системи диференціальних рівнянь використаний метод дискретної ортогоналізації;

- Згідно до аналізу результатів викладеного підходу

до розрахунку на стійкість товстих циліндричних анізотропних оболонок видно, що його використання призводить до отримання менших величин критичних навантажень порівняно із уточненою методикою представленою в розділах 1-3 (ТСаО). При відносній товщині одношарової або двошарової оболонки утвореної перехресним укладанням шарів з  $h/R=1/60$  ця розбіжність не перевищує 3% при дії зовнішнього тиску. Але при збільшенні товщини оболонки, різниця між величинами критичних навантажень, що отримані за різними підходами, починає зростати. Для зовнішнього тиску розбіжність в результатах відповідно складає: при  $h/R=1/30$  до 5%, а при  $h/R=1/20$  до 10%.

## **СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов.– М: Машиностроение, 1978. – 312 с.
2. Алфутов Н.А. Устойчивость металлокомпозитных оболочек при температурно-силовых воздействиях/ Н.А. Алфутов, И.А. Дымников, Ю.Г. Черепанов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1994. – № 1. – С. 131–141.
3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М: Наука, 1974. – 446 с.
4. Амиро И.Я. Влияние расположения слоев и их механических характеристик на устойчивость двухслойной цилиндрической оболочки / И.Я. Амиро, Н.Я. Прокопенко // Прикладная механика. – 1970. – 6, № 3. – С. 9–15.
5. Андреев А.Н. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания / А.Н. Андреев, Ю.В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
6. Арбоч Й. Исследование устойчивости оболочек: теория и практика // Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика / Й. Арбоч // Под ред. Дж. Томпсона и Дж. Ханта: Пер. с англ. / Под ред. Э.И. Григолока. – М.: Наука, Физматгиз, 1991. – 424 с.
7. Бабешко М.Е. О методе последовательных приближений решения краевых задач пластичности с учетом вида напряженного состояния / М.Е. Бабешко, Ю.Н. Шевченко // Приклад. механика. – 2010. – 46, № 7. – С. 11–22.
8. Бабешко М.Е. Исследование процессов осесимметричного термовязкоупругопластического деформирования слоистых оболочек с учетом третьего инварианта девиатора напряжений / М.Е. Бабешко, Ю.Н. Шевченко // Приклад. механика. – 2014. – 50, № 6. – С. 14–26.
9. Бабич Д.В. Об устойчивости перекрестно армированных идеальных и слабо-искривленных цилиндрических оболочек / Д.В. Бабич, И.К. Кошевой // Прикладная механика. – 1988. – 24, №1. – С. 114–118.
10. Бабич Д.В. О рациональном армировании работающих на сжатие оболочек / Д.В. Бабич // Механика композитных материалов. – 1991. – №1. – С. 157–160.
11. Бабич И.Ю. О расчетных моделях в задачах устойчивости оболочек из



- композиционных материалов / И.Ю. Бабич, Н.П. Семенюк // Приклад. механика. – 1998. – 34, № 10. – С. 24–31.
12. Бабич И.Ю. Об устойчивости и рациональном проектировании цилиндрических оболочек из металлокомпозитов при комбинированном нагружении / И.Ю. Бабич, Н.П. Семенюк, А.В. Борисейко // Приклад. механика. – 1999. – 35, № 6. – С. 67–73.
  13. Бабич И.Ю. Устойчивость цилиндрических и конических оболочек из композиционных материалов с упругопластической матрицей / И.Ю. Бабич, Н.П. Семенюк // Приклад. механика. – 2000. – 36, № 6. – С. 3–36.
  14. Бабич И.Ю. О применимости соотношений кубического варианта теории оболочек типа Тимошенко к исследованию закритического поведения стержней / И.Ю. Бабич, Н.Б. Жукова, Н.П. Семенюк // Приклад. механика. – 2001. – 37, № 1. – С. 106–112.
  15. Бабич И.Ю. Механика композитов: В 12 т. Т. 10 / И.Ю. Бабич, Д.В. Бабич, А.Н. Гузь, В.А. Заруцкий, Н.П. Семенюк; ред.: А.Н. Гузь; НАН Украины. Ин-т механики. – К.: Наук. думка: А.С.К., 2001. – 375 с.
  16. Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости волокнистых и слоистых материалов / И.Ю. Бабич, А.Н. Гузь, Вик. Н. Чехов // Приклад. механика. – 2001. – 37, № 9. – С. 3–43.
  17. Бабич И.Ю. Устойчивость элементов конструкций из композитных материалов (трехмерная постановка) / И.Ю. Бабич, А.Н. Гузь // Приклад. механика. – 2002. – 38, № 9. – С. 28–58.
  18. Баженов В.А. Расчет трехслойных композитных оболочек сложной формы с расслоениями / В.А.Баженов, А.И.Оглобля, О.В.Герашенко // Сопротивление материалов и теория сооружения. – 1991. – № 58. – С. 27–34.
  19. Баженов В.А. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури : монографія / В.А. Баженов, О.П. Кривенко, М.О. Соловей. – К.: Віпол, 2010. – 315 с.
  20. Баженов В.А. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок / В.А. Баженов, М.П. Семенюк, В. М.Трач. – Київ: Каравела, 2010. – 352 с.
  21. Баженов В.А. Стійкість і власні коливання неоднорідних оболонок з урахуванням напруженого стану / В.А. Баженов, О.П. Кривенко,

- А.Д. Легостаев // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – Вип. 95. – С. 96–113.
22. Беспалова Е.И. Исследование стационарной динамики анизотропных оболочек вращения на основе моделей разного уровня / Е.И. Беспалова, Г.П. Урусова // Пробл. обчисл. механіки і міцності конструкцій. – 2010. – Вип. 14. – С. 56–63.
23. Беспалова Е.И. Колебания статически нагруженных оболочек вращения с учетом поперечных сдвигов и обжатия / Е.И. Беспалова, Г.П. Урусова // Приклад. механика. – 2010. – 46, № 3. – С. 41–50.
24. Беспалова Е.И. Определение областей динамической неустойчивости неоднородных оболочечных систем при периодических воздействиях / Е.И. Беспалова, Г.П. Урусова // Приклад. механика. – 2011. – 47, № 2. – С. 96–106.
25. Беспалова Е.И. Напряженное состояние разветвленных оболочек вращения с учетом поперечных сдвигов и обжатия / Е.И. Беспалова, Г.П. Урусова // Приклад. механика. – 2015. – 51, № 4. – С. 54–65
26. Болотин В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – Москва: Машиностроение, 1981. – 376 с.
27. Борисейко А.В. О канонических уравнениях геометрически нелинейной теории тонких анизотропных оболочек / А.В. Борисейко, Н.П. Семенюк, В.М. Трач // Приклад. механика. – 2010. – 46, № 2. – С. 53–63.
28. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов / Г.А. Ванин. – К.: Наук. думка, 1971. – 304 с.
29. Ванин Г. А. Устойчивость оболочек из армированных материалов / Г.А. Ванин, Н.П. Семенюк, Р.Ф. Емельянов. – Київ: Наукова думка, 1978. – 212 с.
30. Ванин Г.А. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами / Г.А. Ванин, М.П. Семенюк. – Київ: Наукова думка, 1987. – 200 с.
31. Ванин Г.А. Концентрация напряжений в моментной теории упругости / Г.А. Ванин // Приклад. механика. – 2007. – 43, № 1. – С. 66–76.
32. Ван Фо Фы Г.А. Теория армированных материалов / Г.А. Ван Фо Фы. – Київ: Наукова думка, 1971. – 232 с.
33. Ван Фо Фы Г.А. Устойчивость моментного состояния трехслойной

- цилиндрической оболочки при равномерном и неравномерном внешнем давлении / Г.А.Ван Фо Фы, Н.П. Семенюк // Механика полимеров. – 1972. – № 5. – С. 874–879.
34. Василенко А.Т. Исследование напряженного состояния анизотропных оболочек в различных постановках / А.Т. Василенко, Я.М. Григоренко // Прикладная механика. – 1985. – 21, №4. – С. 4–7.
  35. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев. – Москва: Машиностроение, 1988. – 272 с
  36. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – Москва: Наука, 1967. – 984 с.
  37. Гавриленко Г.Д. Устойчивость гладких и ребристых оболочек вращения при неоднородном напряженно-деформированном состоянии (обзор) / Г.Д. Гавриленко // Прикладная механика. – 1995. – №7. – С. 3–25.
  38. Гавриленко Г.Д. Об оценке нижних пределов критических нагрузок цилиндрических оболочек / Г.Д. Гавриленко, А.С. Ситник, В.И. Мацнер // Приклад. механика. – 2006. – 42, № 10. – С. 78–85.
  39. Гавриленко Г.Д. Об оценке несущей способности оболочек / Г.Д. Гавриленко // Доп. НАН України. – 2006. – № 6. – С. 33–38.
  40. Гайдайчук В.В. Механіка конструкцій вітроенергетичних установок / В.В. Гайдайчук, В.П. Носенко, С.М. Худолій. – Київ: Аграр Медіа Груп, 2013. – 263 с.
  41. Галимов К.З. Нелинейная теория тонких оболочек типа Тимошенко / К.З. Галимов // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1975. – С. 92–126.
  42. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // Успехи математических наук. – 1961. – 16, №3. – С. 171–174.
  43. Гондляр А.В. Итерационно-аналитическая теория деформирования многослойных оболочек / А.В. Гондляр // Сопротивление материалов и теория сооружения. – Київ: Будівельник, 1988. – С. 33–37.
  44. Гондляр А.В. Уточненная модель деформирования многослойных конструкций для исследования процессов прогрессирующего разрушения / А.В. Гондляр // Вост.-Европ. журн. передовых

- технологий. – 2012. – № 2/7. – С. 52–57.
45. Городецкий А.С. Компьютерные модели конструкций / А.С. Городецкий, И.Д. Евзеров. – 2-е изд., доп. – К. : Факт, 2007. – 394 с.
  46. Гоцуляк Е.А. Об одном подходе к численному решению задач о напряженно-деформированном состоянии нетонких пластин и оболочек / Е.А. Гоцуляк, Д.И. Чернопиский // Пробл. прочности. – 2008. – № 2. – С. 41–54.
  47. Григолюк Э.И. Критические нагрузки трехслойных цилиндрических и конических оболочек / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков, 1966. – 223 с.
  48. Григолюк Э.И. Современное состояние теории многослойных оболочек / Э.И. Григолюк, Ф.А. Коган // Прикладная механика. – 1972. – 8, № 5. – С. 5–17.
  49. Григолюк Э.И. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков. – Москва: Машиностроение, 1973. – 172 с.
  50. Григолюк Э.И. Устойчивость оболочек / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. – Москва: Наука, 1978. – 360 с.
  51. Григолюк Э.И. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – Москва: Машиностроение, 1988. – 288 с.
  52. Григолюк Э.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела / Э.И. Григолюк, В.И. Шалашилин. – Москва: Наука, 1988. – 232 с.
  53. Григолюк Э.И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций / Э.И. Григолюк, В.И. Мамай. – Москва: Наука, 1997. – 272 с.
  54. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости / Я.М. Григоренко – Київ: Наукова думка, 1973. – 288 с.
  55. Григоренко Я.М. Об учете неоднородных деформаций поперечного сдвига по толщине в слоистых оболочках / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко // Прикладная механика. – 1977. – 13, №10. – С. 36–42.
  56. Григоренко Я.М. Теория оболочек переменной жесткости / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко. – Київ: Наукова думка, 1981. – 544 с.

57. Григоренко Я.М. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Я.М.Григоренко, А.Т. Василенко, Г. П.Голуб – Київ: Наукова думка, 1987. – 216 с.
58. Григоренко Я.М. Численные решения задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами / Я.М. Григоренко, Н.Н. Крюков. – Київ: Наукова думка, 1988. – 264 с.
59. Григоренко Я.М. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко. – Москва: Наука, 1992. – 336 с.
60. Григоренко Я.М. Исследование напряженного состояния гибких многослойных оболочек вращения с ортотропными слоями переменной толщины в уточненной постановке / Я.М. Григоренко, Э.А. Абрамидзе. // Прикладная механика. – 2001. – 37, №11. – С. 68–74.
61. Григоренко Я.М. Некоторые подходы к решению задач теории тонких оболочек с переменными геометрическими и механическими параметрами / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко // Прикладная механика. – 2002. – 38, №11. – С. 32–68.
62. Григоренко Я.М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я.М. Григоренко, Г.Г. Влайков, А.Я. Григоренко. – Київ: Академперіодика, 2006. – 472 с.
63. Григоренко Я.М. Исследование напряженно-деформированного состояния замкнутых нетонких ортотропных конических оболочек переменной толщины / Я.М. Григоренко, О.А. Авраменко. // Прикладная механика. – 2008. – 44, №6. – С. 46–58.
64. Грищак В.З. Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування = A hybrid asymptotic methods and technique of application: монографія / В.З. Грищак. – Запоріжжя : Запорізь. нац. ун-т, 2009. – 226 с. – Бібліогр.: С. 207–222.
65. Гудрамович В.С. Устойчивость упругопластических оболочек / В.С. Гудрамович.– Київ: Наукова думка, 1987. – 216 с.
66. Гузь А.Н. Основы трехмерной устойчивости деформируемых тел / А.Н. Гузь. – Київ: Вища школа, 1986. – 511 с.
67. Гузь А.Н. Механика разрушения при сжатии композитных материалов / А.Н. Гузь. – Київ: Наукова думка, 1990. – 630 с.

68. Гузь А.Н. К теории устойчивости слоистых композитов / А.Н. Гузь, И.А. Гузь // Приклад. механика. – 1999. – 35, № 4. – С. 3–10.
69. Гузь А.Н. Численное решение задач трехмерной устойчивости упругих тел / А.Н. Гузь, Ю.В. Коханенко // Приклад. механика. – 2001. – 37, № 11. – С. 3–32.
70. Гузь А.Н. Численное исследование напряженно-деформированного состояния оболочек с учетом нелинейных и сдвиговых свойств композитных материалов / А.Н. Гузь, В.А. Максимюк, И.С. Чернышенко // Приклад. механика. – 2002. – 38, № 10. – С. 73–81.
71. Гузь А.Н. Физически и геометрически нелинейные задачи статики тонкостенных многосвязных оболочек / А.Н. Гузь, Е.А. Сторожук, И.С. Чернышенко // Приклад. механика. – 2003. – 39, № 6. – С. 63–73.
72. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2 т. Т. 1. Разрушение в структуре материала / А.Н. Гузь; Ин-т механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины. – К.: Литера ЛТД, 2008. – 592 с.
73. Гузь А.Н. О двух моделях в трехмерной теории устойчивости композитных материалов / А.Н. Гузь, В.А. Декрет // Приклад. механика. – 2008. – 44, № 8. – С. 3–31.
74. Гузь А.Н. О построении теории устойчивости волокнистых и слоистых композитных материалов / А.Н. Гузь // Приклад. механика. – 2009. – 45, № 6. – С. 4–41.
75. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии: (обзор) / А.Н. Гузь // Приклад. механика. – 2012. – 48, № 3. – С. 3–78.
76. Гузь А.Н. Модель волокон конечных размеров в трехмерной теории устойчивости композитных материалов (обзор) / А.Н. Гузь, В.А. Декрет // Приклад. механика. – 2016. – 52, № 1. – С. 3–77.
77. Гуляев В.И. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач / В.И. Гуляев, В.А. Баженов, П.П. Лизунов. – Львов: Вища школа, 1978. – 192 с.
78. Гуляев В.И. Устойчивость нелинейных механических систем / В.И. Гуляев, В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк – Львов: Вища школа, 1982. – 255 с.
79. Жукова Н.Б. Теория типа Тимошенко в кубическом приближении с приложением к задаче о начальном закритическом поведении оболочек из композитов / Н.Б. Жукова, Н.П. Семенюк // Прикладная

- механика. – 1992. – 28, №10. – С. 41–46.
80. Заруцкий В.А. О комплексных экспериментальных исследованиях устойчивости и колебаний конструктивно-неоднородных оболочек / В.А. Заруцкий // Приклад. механика. – 2001. – 37, № 8. – С. 38–67.
  81. Заруцкий В.А. Динамические задачи и напряженно-деформируемое состояние неоднородных оболочечных структур при стационарных и нестационарных нагрузках / В.А. Заруцкий, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Приклад. механика. – 2009. – 45, № 3. – С. 23–58.
  82. Кабанов В.В. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек / В.В. Кабанов. – Москва: Машиностроение, 1982. – 256 с.
  83. Кабанов В.В. Нелинейное деформирование круговых цилиндрических оболочек при неосесимметричном сжатии // Расчет элементов конструкций летательных аппаратов / В.В. Кабанов, Л.П. Железнов. – Москва: Машиностроение, 1982. – С. 77–83
  84. Кантор Б.Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек / Б.Я. Кантор. – Київ: Наукова думка, 1971. – 136 с.
  85. Кантор Б.Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Б.Я. Кантор. – Київ: Наукова думка, 1990. – 136 с.
  86. Кармишин А.В. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А.В. Кармишин, В.А. Ласковец, В.И. Мяченков, А.Н. Фролов. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.
  87. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек / Н.А. Кильчевский. – Київ: АН Укр. ССР. Ин-т механики, 1963. – 354 с.
  88. Кильчевский Н.А. Аналитическая механика континуальных систем / Н.А. Кильчевский, Г.А. Кильчевская, Н.Е. Ткаченко – Київ: Наукова думка, 1979. – 188 с.
  89. Киричук О.А. Несуча спроможність паливного резервуара в системі з захисною ємністю / О.А. Киричук, О.О. Лук'янченко, О.В. Кузько // Опір матеріалів та теорія споруд. – 2013. – Вип. 91. – С. 79–86.
  90. Кобелев В.Н. Расчет трехслойных конструкций / В.Н. Кобелев, Л.М. Коварский, С.И. Тимофеев. – Москва: Машиностроение, 1984. – 304 с.
  91. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек / Н.В. Колкунов. – Москва: Высшая школа, 1972. – 296 с.

92. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс / В.И. Королев. – Москва: Машиностроение, 1965. – 272 с.
93. Королев В.И. Упруго-пластические деформации оболочек / В.И. Королев. – Москва: Машиностроение, 1971. – 303 с.
94. Лехницкий А.К. Теория упругости анизотропного тела / А.К. Лехницкий – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
95. Малмейстер А.К. Сопротивление полимерных и композитных материалов / А.К. Малмейстер, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
96. Механика композитов / Под общ. ред. А.Н. Гузя: В 12 т. Т1–Т10. – Киев: Наукова думка, 1993 – 2000.
97. Микишева В.М. Оптимальная намотка оболочек из стеклопластика работающих на устойчивость под внешним давлением или осевым сжатием / В.М. Микишева // Механика полимеров. – 1968. – №5. – С. 864–875.
98. Муштари Х.М. Нелинейная теория упругих оболочек / Х.М. Муштари, К.З. Галимов. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 431 с.
99. Муштари Х.М. К теории оболочек средней толщины / Х.М. Муштари, И.Г. Терегулов // Доклад АН СССР. – 1959. – С. 1144–1148.
100. Немиш Ю.Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел / Ю.Н. Немиш // Прикладная механика. – 2000. – 36, №2. – С. 3–38.
101. Баженов В.А. Нелинейные задачи механики многослойных оболочек / В.А. Баженов, А.С. Сахаров, А.В. Гондляр, С.Л. Мельников. – Киев: НИИ строймеханики, 1994. – 224 с.
102. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. / В.В. Новожилов. – Москва: Гостехиздат, 1948. – 212 с.
103. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек / В.В. Новожилов. – Ленинград: Судпромгиз, 1962. – 408 с.
104. Семенюк Н.П. Об учете кубической нелинейности в уравнениях теории анизотропных оболочек / Н.П. Семенюк, Н.Б. Жукова, В.М. Трач, М.М. Хоружий // Приклад. механика. – 2012. – 48, № 6. – С. 124–134.



105. Образцов И.Ф. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов / И.Ф. Образцов, В.В. Васильев, В.А. Бунаков. – Москва: Машиностроение, 1977. – 144 с.
106. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Б.Л. Пелех. – Киев: Наукова думка, 1973. – 248 с.
107. Пискунов В.Г. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций / В.Г. Пискунов, В.Е. Вериженко. – Киев: Будівельник, 1986. – 176 с.
108. Пискунов В.Г. Уточненные теории многослойных композитных оболочек и пластин / В.Г. Пискунов, А.О. Рассказов // Шести национален конгрес по теоретична и прилежна механика. Болгария, Варна. – 1989. – Кн. 4. – VI. – С. 245–254.
109. Пискунов В.Г. Современное развитие теории и технологий композитов / В.Г. Пискунов, А.В. Горик // Бетон и железобетон в Украине. – 2000. – № 2. – С. 22.
110. Пискунов В.Г. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / В.Г. Пискунов, А. О. Рассказов // Приклад. механика. – 2002. – 38, № 2. – С. 22–57.
111. Плеханов А.В. Исследование сходимости и точности решений на основе итерационной теории слоистых оболочек и пластин / А.В. Плеханов // Вісн. Придніпр. держ. акад. буд-ва та архіт. – 2009. – № 3. – С. 20–24.
112. Подворний А.В. До питання стійкості шаруватих оболонок із анізотропних матеріалів / А.В. Подворний // Вісник Українського державного університету водного господарства та природокористування. – Рівне, 2004. – Випуск 1 (25). – С. 94–100.
113. Семенюк Н.П. Применение теории Тимошенко-Миндлина к расчету нелинейного деформирования и устойчивости анизотропных оболочек / Н.П. Семенюк, Н.Б. Жукова, В.М. Трач, Д.С. Власюк // Механика композитных материалов. – 2015. – 51, №2. – С. 223–240.
114. Прусаков А.П. О функциях перемещений в задачах теории упругости / А.П. Прусаков // Приклад. механика. – 1999. – 35, № 5. – С. 64–68.
115. Рассказов А.О. Теория и расчёт слоистых ортотропных пластин и оболочек. / А.О. Рассказов, И.И. Соколовская, Н.А. Шульга. – Київ: Вища школа, 1986. – 191 с.

116. Рассказов А.О. Устойчивость многослойных оболочек вращения с учетом геометрической нелинейности докритического состояния / А.О. Рассказов, В.М. Трач, В.Н. Гупалюк // Приклад. механика. – 1999. – 35, № 6. – С. 60–66.
117. Рассказов А.О. Геометрически нелинейное напряженно-деформированное состояние многослойных оболочек вращения с переменными геометрическими параметрами / А.О. Рассказов, В.М. Трач, В.Н. Гупалюк // Пробл. прочности. – 2000. – № 1. – С. 128–135.
118. Баженов В. А. Расчет композитных конструкций с учетом расслоений / В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк, А.И. Оглобля та ін. – Київ: Будівельник, 1992. – 136 с.
119. Рейсснер Э. О некоторых вариационных теоремах теории упругости / Э. Рейсснер // Проблемы механики сплошной среды. – Москва: АН СССР, 1961. – С. 228–239.
120. Рикардс Р.Б. Устойчивость оболочек из композитных материалов / Р.Б. Рикардс, Г.А. Тетерс.– Рига: Зинатне, 1974. – 310 с.
121. Рябов О.Ф. Розрахунок багатопарових оболонок / О.Ф. Рябов.– Київ: Будівельник, 1968. – 96 с.
122. Саркисян В.С. Об одном подходе к изучению напряженно-деформированного состояния нелинейных вязкоупругих оболочек и пластин с учетом поперечного сдвига / В.С. Саркисян, Э.К. Безоян // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 2. – С. 171–174.
123. Семенюк Н.П. Об уравнениях нелинейной теории пластин типа Тимошенко при больших перемещениях / Н.П. Семенюк, Н.Б. Жукова // Доп. НАН України. – 2002. – № 10. – С. 48–55.
124. Семенюк Н.П. К вопросу об учете поворотов вокруг нормали в нелинейных теориях оболочек / Н.П. Семенюк, В.М. Трач // Приклад. механика. – 2004. – 40, № 6. – С. 117–126.
125. Семенюк Н.П. Об устойчивости цилиндрических оболочек из волокнистых композитов с одной плоскостью симметрии / Н.П. Семенюк, В.М. Трач, А.В. Подворный // Приклад. механика. – 2005. – 41, № 6. – С. 113–120.
126. Семенюк Н.П. Начальное закритическое поведение цилиндрических оболочек из композитов при осесимметричном деформировании / Н.П. Семенюк, Н.Б. Жукова // Приклад. механика. – 2006. – 42, № 4. –

С. 108–118

127. Семенюк Н.П. Устойчивость цилиндрических оболочек из армированных материалов при осевом сжатии с учетом особенностей послышной ориентации волокон / Н.П. Семенюк, В.М. Трач // Приклад. механика. – 2006. – 42, № 3. – С. 80–88.
128. Семенюк Н.П. Смешанный вариационный принцип теории упругости и канонические системы уравнений / Н.П. Семенюк, В.М. Трач, Н.Б. Жукова // Приклад. механика. – 2007. – 43, № 5. – С. 55–62.
129. Семенюк Н.П. Устойчивость и начальное закритическое поведение анизотропных цилиндрических оболочек при внешнем давлении / Н.П. Семенюк, В.М. Трач // Приклад. механика. – 2007. – 43, № 3. – С. 86–103.
130. Семенюк Н.П. Об исследовании нелинейного поведения тонких оболочек шаговым методом / Н.П. Семенюк, В.М. Трач, Н.Б. Жукова // Приклад. механика. – 2008. – 44, № 9. – С. 85–93.
131. Семенюк М.П. Про врахування нелінійності в рівняннях теорії анізотропних оболонок типу Тимошенко / М.П. Семенюк, В.М. Трач, М.М. Хоружий, Д.С. Власюк // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: збірник наукових праць. – 2013. – С. 583–606.
132. Семенюк Н.П. О нелинейном деформировании оболочек при конечных углах поворота и малых упругопластических деформациях / Н.П. Семенюк // Приклад. механика. – 2015. – 51, № 2. – С. 34–44.
133. Семенюк Н.П. К теории устойчивости композитных цилиндрических оболочек / Н.П. Семенюк, В.М. Трач, Н.Б. Жукова // Приклад. механика. – 2015. – 51, № 4. – С. 98–111.
134. Семенюк Н.П. Устойчивость и закритическое поведение композитных цилиндрических оболочек с локальными несовершенствами при внешнем давлении / Н.П. Семенюк, В.М. Трач // Приклад. механика. – 2016. – 52, № 6. – С. 79–92.
135. Сулим Г. Поздовжній зсув анізотропних тіл із тонкими відшарованими включеннями / Г. Сулим, Я. Пастернак, Н. Оліярник // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2013. – Вип. 17. – С. 186–194.
136. Сухинин С.Н. Математическое моделирование при исследовании устойчивости трёхслойных композитных оболочек и критерии

- применимости математических моделей / С.Н. Сухинин // Вестник ХНТУ. – 2006, – №2 (25). – С. 473–478.
137. Сухинин С.Н. Устойчивость трёхслойных и многослойных композитных оболочек / С.Н. Сухинин. – М.: МГТУ «МАМИ». – 2008. – 285 с.
138. Теннисон Р.К. Оптимальное проектирование устойчивых слоистых цилиндрических оболочек / Р.К.Теннисон, Дж. С.Хансен // Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика / Под. ред. Дж. Томпсона и Дж. Ханга: Пер. с англ. / Под. ред. Э. И. Григolloка / Теннисон Р. К., Хансен Дж. С.. – Москва: Наука, 1991. – С. 322–336.
139. Тетерс Г.А. Устойчивость пластин и оболочек из полимерных материалов / Г.А. Тетерс // Механика полимеров. – 1969. – №1. – С. 150–156.
140. Тетерс Г.А. Пластины и оболочки из полимерных и композитных материалов (Обзор) / Г.А. Тетерс // Механика полимеров. – 1977. – №3. – С. 486–493.
141. Тетерс Г.А. Оптимизация оболочек из слоистых композитов / Г.А. Тетерс, Р.Б. Рикардс, В.Л. Нарусберг. – Рига: Зинатне, 1978. – 240 с.
142. Тимошенко С.П. К вопросу о деформации и устойчивости цилиндрической оболочки / С.П. Тимошенко. – Київ: Наукова думка, 1972. – С. 785–792.
143. Трошина Л.А. Устойчивость трехслойных цилиндрических оболочек несимметричного строения с маложестким наполнителем при осевом сжатии / Л.А. Трошина // Механика композитных материалов. – 1983. – №3. – С. 729–731.
144. Трач В. М. До стійкості шаруватих оболонок із матеріалів з однією площиною пружної симетрії при класичній моделі деформування / В.М. Трач, А.В. Подворний // Систем. технології. – 2004. – № 3. – С. 50–55.
145. Трач В.М. Об устойчивости слоистых оболочек из материалов с одной плоскостью упругой симметрии / В.М. Трач, А.В. Подворный // Приклад. механика. – 2004. – 40, № 5. – С. 114–121.
146. Трач В.М. Устойчивость цилиндрических оболочек из материала с одной плоскостью упругой симметрии при осевом сжатии и кручении

- / В.М. Трач // Приклад. механіка. – 2006. – 42, № 8. – С. 115–121.
147. Трач В.М. Об устойчивости конических оболочек из композитов с одной плоскостью упругой симметрии / В.М. Трач // Приклад. механіка. – 2007. – 43, № 6. – С. 93-101.
148. Трач В.М. Об устойчивости оболочек вращения из композитных материалов / В.М. Трач // Приклад. механіка. – 2008. – 44, № 3. – С. 109–124.
149. Трач В.М. Потенціальна енергія пружних анізотропних оболонок середнього згину / В.М. Трач, М.М. Хоружий // Вісник НУВГП. Збірник наукових праць: технічні науки. – 2009. – №3 (46). – С. 130–136.
150. Трач В.М. Стійкість анізотропних циліндричних оболонок із шаруватих волокнистих композитів при крученні / В.М. Трач, М.М. Хоружий // Комунальне господарство міст. Науково-технічний збірник: Архітектура і технічні науки. – 2010. – №90. – С. 203–209.
151. Трач В.М. Потенціальна енергія пружних анізотропних нетонких оболонок / В.М. Трач, А.В. Подворний, М.М. Хоружий// Наукові нотатки. – 2011. – С. 272–276.
152. Трач В.М. Про однорідний напружено-деформований стан стан сферичної анізотропної оболонки / В.М. Трач, М.М. Хоружий // Вісник НУВГП. Збірник наукових праць: технічні науки. – 2011. – №2 (54). – 136–142.
153. Трач В.М. Вплив граничних умов на напружений стан сферичних анізотропних оболонок / В.М. Трач, М.М. Хоружий // Вісник НУВГП. Збірник наукових праць : технічні науки. – 2012. – №2 (58). – С. 134–140.
154. Трач В.М. До напруженого стану анізотропних оболонок додатної гауссової кривини / В.М. Трач, М.М. Хоружий // Наукові нотатки. – 2013. – №40. – С. 246–251.
155. Трач В.М. До питання про напружено-деформований стан анізотропних оболонок середнього згину / В.М. Трач, М.М. Хоружий // Наукові нотатки. – 2013. – №40. – С. 252–257.
156. Трач В.М. Стійкість анізотропних оболонок обертання середньої товщини / В.М. Трач, М.М. Хоружий // Комунальне господарство міст. Науково-технічний збірник: Архітектура і технічні науки. – 2013. – №112. – С. 23–27.

157. Трач В.М. Використання уточненої теорії типу Тимошенко до побудови системи рівнянь стійкості анізотропних оболонок обертання / В.М. Трач, О.Г. Бондарський, М.М. Хоружий // Ресурсоеконом. матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. пр. – 2013. – Вип. 27. – С. 382–392.
158. Трач В.М. Стійкість анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового стиску / В.М. Трач, М.М. Хоружий // Ресурсоекономні матеріали, будівельні конструкції, будівлі та споруди: Збірник наукових праць. – 2014. – №28. – С. 421–428.
159. Флюгге В. Статика и динамика оболочек / В. Флюгге. – Москва: Госстройиздат, 1961. – 303 с.
160. Хорошун Л.П. Устойчивость слоистых оболочек вращения при длительной повреждаемости слоев / Л.П. Хорошун, Д.В. Бабич // Приклад. механика. – 2011. – 47, № 4. – С. 99–110.
161. Хорошун Л.П. Деформирование и повреждаемость композитных материалов с анизотропными компонентами / Л.П. Хорошун, Л.В. Назаренко // Приклад. механика. – 2013. – 49, № 4. – С. 14–92.
162. Хорошун Л.П. Связанные процессы деформирования и долговременной повреждаемости физически нелинейных слоистых материалов / Л.П. Хорошун, Е.Н. Шидула // Приклад. механика. – 2013. – 49, № 6. – С. 26–36.
163. Хорошун Л.П. Деформирование и долговременная повреждаемость физически нелинейных волокнистых материалов / Л.П. Хорошун, Е.Н. Шидула // Приклад. механика. – 2014. – 50, № 1. – С. 89–100.
164. Шваб'юк В.І. Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини / В.І. Шваб'юк, С.В. Ротко // Монографія. – Луцьк: РВВ Луцького НТУ, 2015. – 264 с.
165. Шевченко Ю.М. Розробка математичних моделей і комп'ютерних технологій для проведення віртуальних руйнівних випробувань оболонкових конструкцій / Ю.М. Шевченко, Н.Ф. Андрушко, М.О. Бабешко, М.В. Баня, О.З. Галішин, П.Г. Дегтяренко, В.Г. Савченко, А.М. Тонконоженко, М.М. Тормахов // Наука та інновації. – 2013. – № 6. – С. 23–30.
166. Arbocz J. De Vries J., Rebel G. Koiter's stability theory extended to the bucking of anisotropic shell with (nearly) simultaneous bucking modes. 18th Inter. congr. of theor. and appl. Mech. Abstracts. Technion. Israel institute of

- technology, pp. 14–15, 1992.
167. Bisagni C. Numerical analysis and experimental correlation of composite shell buckling and post-buckling. *Composite, Part B* 31, 2000.
  168. Byskov E, Hutchinson J. W. Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells. *AIAA J*, №15, pp. 941–948, 1977.
  169. Catellani G., Pellicano F., Dall'Asta D., Amabili M. Parametric instability of a circular cylindrical shell with geometric imperfections. *Computers and Structures*, № 82, 2004.
  170. Castro S. G. P., Arbelo M. A., Zimmermann R., Degenhardt R. Exploring the constancy of the global buckling load after a critical geometric imperfection level in thin-walled cylindrical shells for less conservative knock-down factors. *Thin-Walled Structures*, Vol. 72, pp. 76–87, 2013.
  171. Castro S. G. P., R. Zimmermann, M. A. Arbelo, R. Khakimova, M. W. Hilburger, R. Degenhardt. Geometric imperfections and lower-bound methods used to calculate knock-down factors for axially compressed composite cylindrical shells. *Thin-Walled Structures*, Vol. 74, pp. 118–132, 2014.
  172. Castro S. G., Mittelstedt C., Monteiro F., Arbelo M., Degenhardt R., Ziegmann G. Evaluation of non-linear buckling loads of geometrically imperfect composite cylinder and cones with the Ritz method. *Composite Structures*, Vol. 122, pp. 284–299, 2015.
  173. Donnell L. H. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. *ASME Transactions*, Vol. 56, pp. 795–806, 1934.
  174. Donnell L. H., C. Wan. Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 17, №1, 1950.
  175. Flügge W. Die Stabilität der Kreiszyllinderschale. *Ingenieure Architektur*, Vol. 3, 1932.
  176. Geier B., Meyer-Piening H., Zimmermann R. On the influence of laminate stacking on buckling of composite cylindrical shells subjected to axial compression. *Composite Structures*, Vol. 55, pp. 467–474, 2002.
  177. Hühne C. Robuster Entwurf beulgefährdeter, unversteifter Kreiszyllinderschalen aus Faserverbundwerkstoff. Braunschweig: PhD vom Fachbereich Maschinenbau der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina, 2005.

178. Hühne C., Rolfes R., Tessmer J. A new approach for robust design of composite cylindrical shells under axial compression. Proceedings of the international ESA conference, Nordwijk, 2005.
179. Hühne C., Rolfes R., Breitbach E., Teßmer J. Robust design of composite cylindrical shells under axial compression - simulation and validation. Thin-Walled Structures, Vol. 46, pp. 947–962, 2008.
180. Jones R. M. Mechanics of composite materials. United States of America: Taylor & Francis, 1999.
181. Karman Th. Von, Tsien H. S. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. J. Aero' Sci, № 8, 1941.
182. Koiter W. T. Elastic stability and post-buckling behavior. Proc. Symp. Nonlinear Problems. Madison: Univ. Of Wisconsin Press. pp. 257 – 275, 1963.
183. Koiter W. T. General theory of mode interaction plate and shell structures. Report WTHD 91. Holland: Delft University of Technology, 1976.
184. Kolakowski Z., Teter A. Statycznie wyboczenie funkcjonalnie interaktywno stopniowanych kolumn z przekrojów zamkniętych poddanych ścisnaniu osiowym. Composite Structures, Vol. 123, pp. 257–262, 2015.
185. Muc A., Pastuszak P.D. Remarks on buckling analysis plates and shells. 3 int. Conference on Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Laminated Shell Structures with DESICOS Workshop, Braunschweig, Germany, 2015.
186. Onoda J. Optimal laminate configuration of cylindrical shells for axial buckling. AIAA Journal, № 23 (7), 1985.
187. Priyadarsini R. S., Kalyanaraman V., Srinivasan S. M. Numerical and experimental study of buckling of advanced fiber composite cylinders under axial compression. International Journal of Structural Stability and Dynamics, № 12 (04), 2012.
188. Reddy J. N. Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics. Second Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, 2002.
189. Reddy J. N. Refined theories and finite element models for the analysis of laminated composite structures: An overview. 3 int. Conference on Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Laminated Shell Structures with DESICOS Workshop, Braunschweig, Germany, 2015.
190. Sanders J. L. Nonlinear theories of thin shells. Quarterly of Applied



Mathematics, Vol. 21, pp. 21–36, 1936.

191. Singer J., Arbocz J., Weller T. Buckling Experiments, Experimental Methods In Buckling Of Thin-Walled Structures. Shells, Built-Up Structures, Composites And Additional Topics, Vol. 2, John-Wiley, Hoboken, NJ, USA, 2002.
192. Shadmehri F., Hoa S. V., Hojjati M. Buckling of conical composite shells. Composite Structures, Vol. 94, pp. 787–792, 2012.
193. Shadmehri F. Buckling of laminated composite conical shells; theory and experiment. Montreal, Quebec, Canada: PhD thesis, Concordia University, 2012.
194. Soldatos K. P. On the buckling and vibration of antisymmetric angle – ply laminated circular cylindrical shells. Int. J. Enq. Sci, № 3, pp. 217–222, 1983.
195. Southwell R. V. On the general theory of elastic stability. Philosophical Transactions of the Royal Society, London, Vol. 213, pp. 187–244, 1914.
196. Timoshenko S. P. and Gere J. M. Theory of elastic stability. Second edition, New York: McGraw-Hill, 1985.
197. Tennyson R. C. Buckling of laminated composite cylinders: a review. Composites, Vol. 6, 1975.
198. Trach W., Chorużyj M. Stateczność osiowo ściskanych cylindrycznych, anizotropowych powłok o średniej grubości. Acta Scientiarum Polonorum – Architectura (Budownictwo), nr 14 (3), str. 21–34, 2015.
199. Trach V.M., Semenyuk N.P., Podvorny A.V., Zhukova N.B. On the method of calculation of buckling and postbuckling behavior of laminated shells with small arbitrary imperfections. 3 int. Conference on Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Laminated Shell Structures with DESICOS Workshop, Braunschweig, Germany, pp. 1–4, 2015.
200. Weaver P. M., Drisen I. R., Roberts P. Anisotropic effect in the compression buckling of laminated composite cylindrical shells. Composites Science and Technology, Vol. 62, issue 1, pp. 91–105, 2002.
201. Weaver P. Imperfection-insensitive shells using variable stiffness composites. 3 int. Conference on Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Laminated Shell Structures with DESICOS Workshop, Braunschweig, Germany, 2015.
202. Weaver P. M. The effect of extension / twist anisotropy on compression

- buckling in cylindrical shells. *Composites, Part B* 34, pp. 251–260, 2003.
203. Wong K. F. W., Weaver P. M. Approximate Solution for the Compression Buckling of Fully Anisotropic Cylindrical Shells. *AIAA Journal*, Vol. 43, № 12, pp. 2639–2645, 2005.
204. Wullschleger L. and Meyer-Piening H. R. Buckling of geometrically imperfect cylindrical shells-definition of a buckling load. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, № 37, 2002.

**Навчальне видання**

**Володимир Мирославович Трач  
Андрій Володимирович Подворний  
Микола Миколайович Хоружий**

**Деформування  
та стійкість нетонких  
анізотропних оболонок**

*Монографія*

Керівник видавничих проєктів Ю.В. Піча

Підписано до друку 25.05.2019  
Формат 60x84/16. Папір офсетний. Гарнітура Таймс  
Ум. друк. арк. 14,5. Обл.-вид. арк. 14,9  
Зам. № 25/05-2019. Тираж 300 прим.

Видавництво “Каравела”

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до  
Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів  
видавничої продукції: ДК № 2035 від 16 грудня 2004 року

Тел. (044) 592-39-36, (050) 355-77-75  
E-mail: caravela@ukr.net  
www.caravela.kiev.ua

Виготовлено у видавництві “Каравела”  
проспект М. Рокоссовського, 8а, м. Київ, 04201