Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут агроекології та землеустрою
Кафедра геодезії та картографії

05-04-123М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних та самостійних робіт
з навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій»
спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»
денної та заочної форм навчання

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Рекомендовано науково-методичною
радою з якості ННІАЗ
Протокол № 10 від 25.04.2023 р.

Рівне – 2023

Методичні вказівки до виконання практичних та самостійних робіт з навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій» спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» денної та заочної форм навчання. Елементи теорії ймовірностей [Електронне видання] / Тадєєв О. А. – Рівне : НУВГП, 2023. – 41 с.

Укладач: Тадєєв О. А., доцент кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Відповідальний за випуск: Янчук Р. М., завідувач кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Керівник групи забезпечення спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»: доктор сільськогосподарських наук, професор Мошинський В. С.

Зміст

ВСТУП

Теорія ймовірностей – математична наука, яка вивчає кількісні закономірності перебігу випадкових явищ. Всякі природні явища слід вважати випадковими лише з огляду на їх не повторюваність при багаторазовому відтворенні. Класична теорія ймовірностей оперує такими базовими поняттями як подія, ймовірність, відносна частота і на їх основі кількісно описує об'єктивні можливості перебігу природних випадкових явищ. Сучасна теорія ймовірностей при розв'язуванні тих же завдань опирається, крім вже названих, ще й на поняття випадкової величини, законів розподілу випадкової величини, їх числових характеристик. Випадкова величина – одна із складових частин, якими описується випадкове явище.

Математичні закони теорії ймовірностей не є абстрактними і не позбавлені фізичного змісту. Вони є математичним відображенням реальних закономірностей, які об'єктивно існують у масових явищах природи. До вивчення цих явищ теорія ймовірностей застосовує математичний підхід, тому за своїм змістом і методами вона є одним з розділів математики, який так само логічно точний і строгий, як і інші математичні науки.

1. РОЗРАХУНОК ЙМОВІРНОСТЕЙ ПРОСТИХ І СКЛАДНИХ ПОДІЙ

Для вивчення явищ природи проводять багаторазові спостереження, досліди та виміри. Здійснення кожного окремого спостереження, досліду чи виміру називається **випробування**. Сукупність умов, при яких виконуються випробування, називають **комплекс умов**. Результат кожного окремого випробування (спостереження, досліду, виміру) називається **подія** – це всякий факт, який в результаті випробування може статись чи не статись. На схемі рис. 1 показано систематизацію різних видів подій.

Елементарна (або проста) подія – це такий результат випробування, який повністю описується однією і тільки однією подією.

Складна подія – це подія, яка утворюється двома і більше елементарними подіями. Складні події розрізняють двох видів: сума подій і добуток подій.

Сума кількох елементарних подій A_i $(i = 1,2,...,n)$ – це складна подія B, яка включає появу хоча б однієї з подій A_i. Це означає, що B = або A_1, або A_2, ..., або A_n, або A_1 та A_2, ... , або A_1 та A_n, і т.д. Умовно пишуть:

$$B = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i .$$

Добуток кількох елементарних подій A_i ($i = 1,2,\ldots,n$) – це складна подія C, яка включає сумісну появу всіх подій A_i. Умовно пишуть:

$$C = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i .$$

Достовірна подія U – це подія, яка в результаті випробування неодмінно відбувається.

Неможлива подія V – це подія, яка при випробуванні не може відбутись за жодних умов.

Випадкова подія – це подія, яка при відтворенні одного і того ж випробування може відбутись, а може і не відбутись.

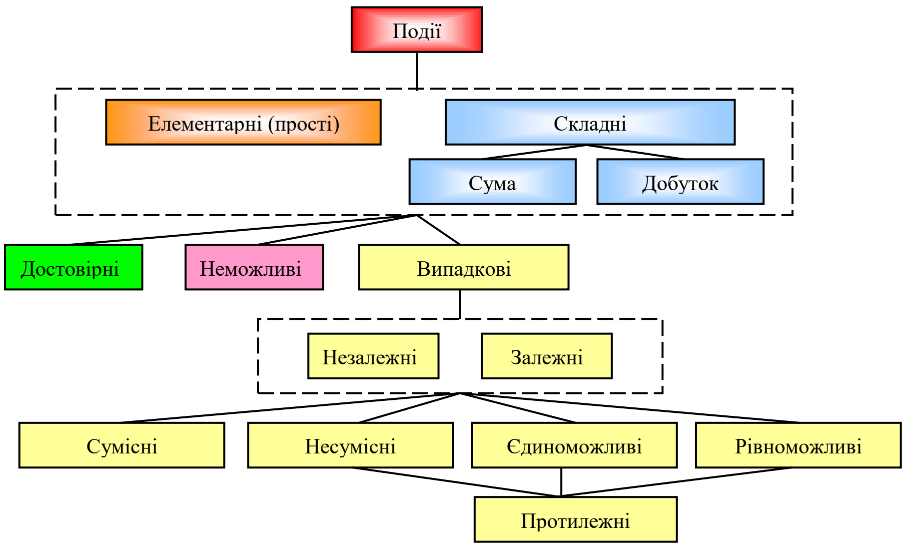


Рис. 1. Види подій

Дві події **незалежні**, якщо можливість появи однієї з них не залежить від того, з'явилась чи ні друга подія. Кілька подій **попарно незалежні**, якщо кожні дві з них незалежні. Кілька подій **незалежні в сукупності**, якщо кожна з них і будь-яка складна подія, яка утворена всіма іншими або їх частиною, є незалежні. Дві чи кілька подій **залежні**, якщо можливість появи хоча б однієї з них залежить від появи інших подій.

Випадкові події **сумісні**, якщо при випробуванні вони можуть наступити одночасно. Випадкові події **несумісні**, якщо при одному випробуванні вони не можуть наступити одночасно, якщо поява однієї з них виключає можливість появи інших.

Випадкові події **єдиноможливі**, якщо в результаті випробування поява однієї і тільки однієї з них є подією достовірною. Ці події є попарно несумісні.

Випадкові події **рівноможливі**, якщо ні одна з них не є об'єктивно можливою більше, ніж будь-яка інша.

Повна група подій – це сукупність подій, серед яких при випробуванні одна обов'язково відбудеться.

Дві несумісні події, які складають повну групу подій, є **протилежні**. Подія, протилежна події A, позначається $\overline{A}$.

Випадки – це кілька подій, які утворюють повну групу і несумісні. Якщо несумісні події утворюють повну групу, то результати випробувань зводяться до **схеми випадків**.

Ймовірність $p(A)$ – це числова характеристика ступеню об'єктивної можливості появи події A. Якщо випробування зводяться до схеми випадків, то ймовірності подій можна визначити з умов випробувань, не проводячи їх безпосередньо, за формулою

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

де n – загальна кількість усіх можливих випадків; m – кількість випадків, сприятливих появі події A. Випадок називають сприятливим появі події A, якщо поява даної події є наслідком цього випадку.

Наслідки, що випливають з визначення ймовірності:

1. Ймовірність всякої події завжди правильний раціональний дріб $0 \le p(A) \le 1$, оскільки завжди $0 \le m \le n$.
2. Ймовірність достовірної події $p(U)=1$.
3. Ймовірність неможливої події $p(V)=0$.
4. Ймовірності випадкових подій завжди задовольняють умові $0< p(A)<1$. Чим більше ймовірність наближається до одиниці, тим частіше відбувається подія (практично достовірна подія). Чим більше ймовірність наближається до нуля, тим рідше відбувається подія (практично неможлива подія).
5. Сума ймовірностей подій повної групи дорівнює одиниці, оскільки одна з них повинна відбутись.
6. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці: $p(A) + p(\overline{A}) = 1$.

Наведене визначення ймовірності називають класичним, а обчислення ймовірностей за відповідною формулою – безпосереднім підрахунком ймовірностей подій.

Не всякі випробування зводяться до схеми випадків. У цих випадках ймовірність визначають за результатами безпосередньо проведених випробувань, а ступінь можливості появи події характеризують відносною частотою. **Відносна частота** Q (або статистична ймовірність) появи події – це відношення кількості M появи події до кількості N всіх проведених випробувань при виконанні певного комплексу умов:

$$Q = \frac{M}{N}.$$

Оскільки $0 \le M \le N$, то $0 \le Q \le 1$. Тому з визначення відносної частоти слідують ті ж наслідки, що й із визначення ймовірності.

Відносну частоту Q використовують при емпіричному визначенні ступеню можливості появи події. За умови достатньо великої кількості випробувань відносну частоту приймають приблизно рівною ймовірності і називають статистичною ймовірністю.

Ймовірність суми подій. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій: ймовірність суми кількох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i).$$

Наслідки теореми додавання ймовірностей несумісних подій:

1. Ймовірність суми кількох несумісних подій, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці, оскільки поява хоча б однієї з них є подія достовірна:

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) = p(U) = 1.$$

2. Ймовірність суми двох протилежних подій дорівнює одиниці:

$$p(A + \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A}) = 1.$$

Теорема додавання ймовірностей сумісних подій: ймовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій мінус ймовірність їх сумісної появи:

$$p(A_1 + A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 A_2).$$

Узагальнення теореми додавання ймовірностей на випадок розрахунку ймовірності суми будь-якої кількості n сумісних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - p(A_1 A_2) - \ldots - p(A_1 A_n) - \ldots p(A_2 A_n) - \ldots - p(A_{n-1} A_n).$$

Умовна ймовірність події A – це ймовірність її появи за умови, що відбулась інша подія B. Умовну ймовірність позначають $p(A/B)$. Подія A залежна від події B, якщо виконується нерівність $p(A) \neq p(A/B)$. Подія A незалежна від події B, якщо виконується рівність $p(A) = p(A/B)$.

Ймовірність добутку подій. Теорема множення ймовірностей: ймовірність добутку двох подій A і B дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, розраховану за умови, що перша подія відбулась :

$$p(AB) = p(A)\,p(B/A) \quad \text{або} \quad p(AB) = p(B)\,p(A/B).$$

Наслідки теореми множення ймовірностей:

1. Якщо подія A не залежить від події B, то і подія B не залежить від події A, а події A і B називають взаємно незалежними:
$$p(A) = p(A/B);\; p(B) = p(B/A).$$
2. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:
$$p(AB) = p(A)\,p(B).$$

Узагальнення теореми множення ймовірностей на випадок довільної кількості подій: ймовірність добутку кількох подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, причому ймовірність кожної наступної за порядком події розраховується за умови, що всі попередні події відбулись:

$$p(A_1A_2...A_n) = p(A_1)\,p(A_2/A_1)\,p(A_3/A_1A_2)...p(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

Для випадку довільної кількості незалежних подій узагальнена теорема спрощується: ймовірність добутку незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$p(A_1A_2...A_n) = p(A_1)\,p(A_2)...p(A_n),$$

Нехай деяка подія A може появитись тільки сумісно з однією із подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, які є несумісні і складають повну групу подій. Події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ назвемо гіпотезами. Тоді подія A – це складна подія, яка проявляється у вигляді комбінації таких складних подій, як добутки подій H_iA $(\overrightarrow{i=1,n})$ та сума цих добутків: $A = H_1A + H_2A + \ldots + H_nA$. Оскільки гіпотези $H_1, H_2, \ldots, H_n$ несумісні, то й комбінації $H_1A, H_2A, \ldots, H_nA$ також несумісні. Тому на основі теореми додавання ймовірностей несумісних подій для ймовірності події A одержимо: $p(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} p(H_iA)$. На основі теореми множення ймовірностей складних подій H_iA для ймовірності події A остаточно одержимо:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)\,p(A/H_i).$$

Отже, ймовірність події A обчислюється як сума добутків ймовірності кожної гіпотези на ймовірність події A при цій гіпотезі. Одержана формула називається **формула повної ймовірності**. Вона є наслідком узагальнення теорем додавання та множення ймовірностей.

Хід роботи

Під час виконання роботи розв'язуються завдання з розрахунку ймовірностей елементарних та складних подій. Нижче наведено приклади розв'язування типових завдань.

Розрахунок ймовірностей елементарних (простих) подій.

Завдання 1. При двох киданнях монети можуть відбутись такі події: A_1 – поява герба при першому киданні; A_2 – поява герба при другому киданні; A_3 – поява цифри при першому киданні; A_4 – - поява цифри при другому киданні. Які з цих подій будуть достовірними, неможливими, випадковими, сумісними, несумісними, рівно можливими та протилежними, які утворюють повну групу подій, схему випадків?

Розв'язування завдання.

1. Серед перерахованих подій достовірні відсутні, оскільки $p(U)=1$.
2. Серед перерахованих подій неможливі відсутні, оскільки $p(V)=0$.
3. Всі перераховані події є випадковими, оскільки для них $0< p <1$.
4. Сумісними будуть події A_1 та A_2, A_3 та A_4, A_1 та A_4, A_2 та A_3, оскільки при двох киданнях монети вони можуть відбутись одночасно.
5. Несумісними будуть події A_1 та A_3, A_2 та A_4, оскільки при випробуванні вони не можуть відбутись одночасно.
6. Рівноможливими є події A_1 та A_3, A_2 та A_4.
7. Події A_1 та A_3, A_2 та A_4 є протилежними.
8. Події A_1 та A_3, A_2 та A_4 попарно утворюють повну групу подій.
9. Події A_1 та A_3 (а також A_2 та A_4) є випадками. Вони попарно несумісні, рівноможливі, протилежні і утворюють повну групу подій.

Завдання 2. Яка ймовірність того, що при двох вимірах величини буде допущена одна додатна похибка?

Розв'язування завдання.

Події появи додатних чи від'ємних похибок в процесі вимірів зводяться до схеми випадків. За даних умов кількість можливих випадків n=3: 1) дві додатні похибки; 2) додатна і від'ємна похибка; 3) дві від'ємні похибки. Серед них кількість сприятливих випадків m=2. Тому ймовірність того, що при двох вимірах буде допущена одна додатна похибка p=2/3.

Завдання 3. Слово „геодезія“ складено з окремих букв, написаних на окремих картках, які перевернуті і перемішані. Яка ймовірність того, що, взявши одну з карток, на ній буде написано: 1) буква „е”; 2) голосна буква?

Розв'язування завдання.

У цьому завданні також маємо схему випадків. Кількість всіх можливих випадків n=8 – це кількість карток з написаними буквами. Кількість сприятливих випадків появі букви „е” m=2, оскільки в слові „геодезія” дві букви „е” і дві відповідних картки. Тому ймовірність появи букви „е”

p=2/8=1/4. Кількість випадків, сприятливих появі голосної букви, m=5, оскільки в слові „геодезія" п'ять голосних букв і п'ять відповідних карток. Тому ймовірність появи голосної букви p=5/8.

Завдання 4. Цифри 1,2,3 написані на окремих картках, які перевернуті і перемішані. Яка ймовірність того, що, беручи послідовно картки і складаючи їх в порядку виймання, буде отримано число 123?

Розв'язування завдання.

При послідовному вийманні та складанні карток можуть мати місце n=6 можливих випадків – це різні варіанти отримання чисел, зокрема, 123; 132; 213; 231; 312; 321. Серед них кількість сприятливих випадків m=1. Тому ймовірність отримання числа 123 складає p=1/6.

Завдання 5. Серед 5000 виготовлених деталей виявилось 32 бракованих. Яка ймовірність появи бракованих деталей в даній партії?

Розв'язування завдання.

За такої умови безпосередньо проводяться випробування, тому для характеристики можливості появи події необхідно використовувати відносну частоту (статистичну ймовірність). Нехай A – подія появи бракованої деталі. Серед N=5000 випробувань подія A відбулась M=32 рази. Відносна частота появи бракованих деталей в партії Q = 32/5000 = 0.0064.

Завдання 6. Серед 1000 новонароджених дітей виявилось 517 хлопчиків. Яка ймовірності народження хлопчиків та дівчаток?

Розв'язування завдання.

Розглянемо дві події: подія A – народження хлопчика; подія B – народження дівчинки. Подія A відбулась M =517 разів із загальної кількості новонароджених дітей N=1000 разів. Тому відносна частота народження хлопчиків Q (A) =517/1000=0.517. Події A та B несумісні та утворюють повну групу подій. Сума відносних частот подій повної групи завжди дорівнює одиниці, оскільки одна з подій повної групи обов'язково повинна відбутись. Тому $Q(A)+Q(B)$ = 1. Звідси $Q(B)$ = 1–$Q(A)$ = 0.483.

Завдання 7. Серед 5000 проведених вимірів кількість додатних похибок виявилась рівною 1000. Чи можна за таких умов зробити висновок про наявність у вимірах систематичних похибок ?

Розв'язування завдання.

Розглянемо дві події: подія C – поява додатної похибки при одному вимірі; подія $D=\overline{C}$ – поява від'ємної похибки. Беручи до уваги, що при загальній кількості вимірів n = 5000 подія C відбулась m = 1000 разів, відносна частота $p(C)$ = Q = 1000/5000 = 0.2. Події C і D при одному вимірі несумісні, протилежні і утворюють повну групу подій. Сума ймовірностей появи подій повної групи завжди дорівнює одиниці, тому $p(C)$ + $p(D)$ = 1. Звідси відносна частота $p(D)$ = Q = 1– $p(C)$ = 0.8. Ймовірності обох подій задовольняють наступним умовам:

$$\left.\begin{array}{r}0 < p(C) < 1\\ 0 < p(D) < 1\end{array}\right\}.$$

Виходячи з цього, обидві події є випадковими. На такій основі, незважаючи на те, що кількість і відносна частота появи від'ємних похибок більші у порівнянні з додатними, немає підстав робити висновок про наявність у вимірах систематичних похибок. Допущені при за цих умов похибки носять випадковий характер. Для того, щоб похибки мали систематичне походження, ймовірність їх появи повинна дорівнювати одиниці, а подія мусить бути достовірною.

Розрахунок ймовірностей складних подій.

Завдання 8. Яка ймовірність випадання грані з парною цифрою при одному киданні грального кубика ?

Розв'язування завдання.

При одному киданні грального кубика кількість усіх можливих випадків n=6. Серед них кількість випадків, сприятливих випаданню грані з довільною цифрою від 1 до 6, m=1. Ймовірність простої події A випадання довільної грані $p(A)$=1/6. Складна подія B випадання грані з парною цифрою наступає тоді, коли відбувається хоча б одна з простих подій, що полягають у випаданні граней з цифрами або 2, або 4, або 6. При одному киданні кубика такі події несумісні. Ймовірність появи події B, згідно з теоремою додавання ймовірностей несумісних подій, може бути розрахована як сума ймовірностей випадання граней з цифрами або 2, або 4, або 6, тобто $p(B)$=1/6+1/6+1/6 = 1/2.

Завдання 9. В урні знаходиться 4 білих і 6 чорних куль. Яка ймовірність того, що дві послідовно вийняті кулі будуть білими?

Розв'язування завдання.

Розглянемо дві події: A_1 – поява білої кулі при першому вийманні; A_2 – поява білої кулі при другому вийманні. Ймовірність першої події можна розрахувати як відношення кількості білих куль M=4 до загальної кількості куль N=10: $p(A_1) = M/N$ = 2/5. Подія A_2 залежна від події A_1, тому що після першого виймання в урні залишилось лише M–1=3 білих із загальної кількості N–1=9 куль. Умовна ймовірність другої події $p(A_2/A_1)$=3/9=1/3. Подія B появи двох куль одночасно при послідовному їх вийманні виразиться як добуток подій A_1 та A_2: $B = A_1 \times A_2$. Звідси ймовірність $p(B)=p(A_1)\times p(A_2/A_1)$=2/5×1/3=0.13.

Завдання 10. Є дві урни. До першої поміщено 5 білих і 10 чорних куль, до другої – 5 білих і 15 чорних куль. Яка ймовірність виймання по одній білій кулі з кожної урни?

Розв'язування завдання.

Розглянемо події: A_1 – виймання білої кулі з першої урни; A_2 – виймання білої кулі з другої урни; B – виймання двох білих куль з обох урн одночасно. Події A_1 та A_2 – це прості незалежні події. Тому $p(A_1)=m/n$=5/15=1/3; $p(A_2)=m/n$=5/20=1/4. Складна подія B відбудеться за умови сумісної появи подій A_1 та A_2, тобто $B=A_1 \times A_2$. За умовою теореми множення незалежних подій A_1 та A_2, $p(B)=p(A_1)\times p(A_2)$=0.08.

Завдання 11. Знайти ймовірність того, що довільно обране двозначне число буде кратним 2; кратним 5; кратним 2 і 5 одночасно. Яка ймовірність того, що довільно обране двозначне число буде кратним або 2, або 5; буде кратним або 2, або 5, або 2 і 5 одночасно?

Розв'язування завдання.

Розглянемо події: A_1 – поява числа, кратного 2; A_2 – поява числа, кратного 5; A_3 – поява числа, кратного 2 і 5 одночасно.

Двозначні числа – це 10,11,...,98,99. Всіх їх 90. З них 45 кратні 2. Кількість випадків, сприятливих появі події A_1, m = 45 і ймовірність події A_1 $p(A_1)$=45/90=0.5. 18 чисел кратні 5, тому ймовірність події A_2 $p(A_2)$=18/90=0.2. Із всіх двозначних чисел кратними 2 і 5 одночасно є 9, тому ймовірність події A_3 $p(A_3)$=9/90=0.1. З іншого боку, подія A_3 – це складна подія, яка відбудеться лише при сумісній появі простих незалежних подій A_1 та A_2, зокрема, це добуток $A_3 = A_1 \times A_2$. На такій основі, для ймовірності події A_3 одержимо: $p(A_3)=p(A_1)\times p(A_2)$=0.5×0.2=0.1.

Ймовірність того, що довільно взяте двозначне число буде кратним або 2, або 5, виразиться сумою ймовірностей простих несумісних подіїї A_1 та A_2: $p(A_1 + A_2)=p(A_1)+p(A_2)$=0.7. Ймовірність того, що довільно взяте двозначне число буде кратним або 2, або 5, або 2 і 5 одночасно, виразиться сумою ймовірностей простих подіїї A_1 та A_2 з урахуванням їх сумісної появи A_3: $p(A_1)+p(A_2)-p(A_3)$=0.6.

Завдання 12. Є три однакових урни з різнокольоровими кулями. До першої урни поміщено 6 червоних і 2 білих кулі, до другої – 4 червоних і 4 білих кулі, до третьої – 2 червоних і 6 білих. Навмання вибирається урна і з неї виймається куля. Яка ймовірність виймання білої кулі?

Розв'язування завдання.

Розглянемо три гіпотези: H_1 – вибір першої урни, H_2 – вибір другої урни, H_3 – вибір третьої урни, а також подію A – виймання білої кулі.

Вибір урни здійснюється навмання, тому гіпотези H_1, H_2, H_3 рівноможливі, несумісні і складають повну групу подій, а їх ймовірності рівні поміж собою: $p(H_1)=p(H_2)=p(H_3)=1/3$. Умовні ймовірності появи події A при кожній з гіпотез відповідно дорівнюють $p(A/H_1)=2/8=1/4$, $p(A/H_2)=4/8=1/2$, $p(A/H_3)=6/8=3/4$. Подія A може появитись тільки сумісно з однією з гіпотез H_1, H_2, H_3. На такій основі, застосовуючи формулу повної ймовірності, для ймовірності появи події A одержимо: $P(A)=p(H_1)\times p(A/H_1)+p(H_2)\times p(A/H_2)+p(H_3)\times p(A/H_3)=1/3\times1/4+1/3\times1/2+$ $+1/3\times3/4=1/2$.

Питання для самоконтролю

1. Що називається подією? Які події називають простими (елементарними)?
2. Які події називаються достовірними, неможливими, випадковими?
3. Які події називаються сумісними, несумісними?
4. Які події називаються рівноможливими та протилежними?
5. Які події утворюють повну групу?
6. Що таке ймовірність події? Як визначити ймовірність події?
7. Що називають відносною частотою (або статистичною ймовірністю) події? Як її визначити?
8. В якому випадку і на яких підставах відносну частоту можна прийняти рівною ймовірності?
9. Яка подія називається складною?
10. Що називається сумою подій?
11. Що називається добутком подій?
12. Розкрити теорему додавання ймовірностей подій і наслідки, які випливають з неї.
13. Які події називаються залежними; незалежними?
14. Що називається умовною ймовірністю події?
15. Розкрити теорему множення ймовірностей подій і наслідки, які випливають з неї.
16. Пояснити зміст і навести приклад застосування формули повної ймовірності.

2. ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Величина, яка в результаті випробування може набувати того чи іншого невідомого наперед значення, називається **випадкова величина**. Випадкова величина, яка в результаті випробування може набувати окремих ізольованих значень, котрі можна наперед назвати й перелічити, називається **перервна (дискретна) випадкова величина**. Випадкова величина, яка в результаті випробування може набувати незчисленну кількість значень і назвати та перелічити всі ці значення неможливо, називається **неперервна випадкова величина**. Можливі значення неперервної величини не відокремлені одне від одного. Вони безперервно заповнюють деякий числовий проміжок, який може мати як чітко виражені, так і невиразні межі.

Якщо в результаті випробування деяка, наприклад, перервна, випадкова величина X може набути одного із n значень $x_1, x_2, ..., x_n$ і кожне з них можливе, але не достовірне, то величина може набути кожного із значень з тією чи іншою ймовірністю. Отже, може відбутись одна із повної групи несумісних подій $X = x_i$ $(i = \overrightarrow{1, n})$ з відповідними ймовірностями $p(X = x_i) = p_i$. Несумісні події $X = x_i$ утворюють повну групу, тому сума ймовірностей p_i дорівнює одиниці: $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Ця сумарна ймовірність певним чином розподілена між окремими значеннями x_i. Отже, має місце **розподіл ймовірностей** p_i значень x_i випадкової величини X між собою.

В практичному застосуванні теорії ймовірностей розв'язують задачі, в яких випробування повторюються багато разів. В результаті кожного випробування з певною ймовірністю відбувається деяка подія. В таких задачах важливо знати не стільки результат кожного випробування, як кількість появи події в серії повторних випробувань. Якщо потрібно визначити ймовірності чисел появи події в серії незалежних випробувань, які проводяться в однакових умовах, то така ймовірність обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m},$$

тобто, якщо проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких подія відбувається з ймовірністю p, то ймовірність P_n^m того, що подія з'явиться m разів дорівнює добутку числа комбінацій C_n^m із n елементів по m на ймовірність p появи події m разів і на ймовірність q=1–p не появи події n–m разів. Число комбінацій:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}; \qquad C_n^0 = C_n^n = 1; \qquad C_n^1 = n.$$

$\sum\limits_{m=0}^{n} P_n^m$ є ймовірність того, що подія з'явиться або 0, або 1, або 2, ... , або n разів. Числа появи події m=0,1,2,…,n – це один з прикладів перервної випадкової величини. Якщо враховуються всі можливі значення m, то має місце повна група подій. Їх сума, як складна подія, дорівнює одиниці: $\sum\limits_{m=0}^{n} P_n^m$ = 1. Ймовірності P_n^m по формі являють собою члени розкладу бінома

$(q+p)^n$, тому розподіл ймовірностей P_n^m між собою називається **біноміальний розподіл**.

Випадкова величина X буде повністю описана з імовірнісної точки зору, якщо буде визначено і описано закон розподілу ймовірностей p_i значень x_i. **Закон розподілу випадкової величини** – це будь-яким чином описане співвідношення, яке виражає зв'язок між можливими значеннями x_i величини та відповідними їм ймовірностями p_i. Описати закони розподілу перервних та неперервних випадкових величин можна різновидами числової, графічної та аналітичної форм, як це ілюструє схема на рис. 2.

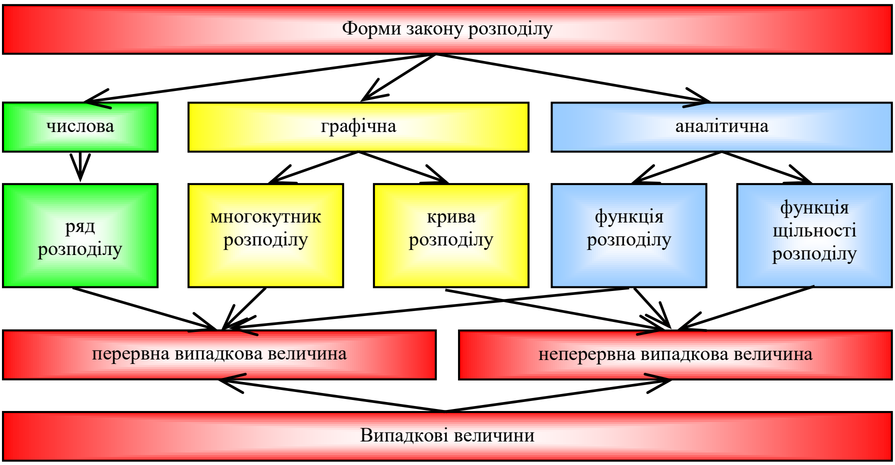


Рис. 2. Форми закону розподілу випадкових величин

Ряд розподілу відноситься до різновиду числової форми представлення закону розподілу випадкової величини. Це найпростіша форма, яку використовують для представлення закону розподілу тільки перервних випадкових величин. **Ряд розподілу** – це таблиця, до якої вписано всі можливі значення перервної випадкової величини та відповідні цим значенням ймовірності. Сума ймовірностей значень випадкової величини, які поміщено до ряду розподілу, дорівнює одиниці: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Многокутник розподілу відноситься до різновиду графічних форм представлення закону розподілу перервних випадкових величин. Це графік, який використовують для наочності представлення ряду розподілу. Відповідно до обраного масштабу вздовж осі абсцис позначують можливі значення x_i перервної випадкової величини, по осі ординат – відповідні ймовірності p_i, а точки перетину з'єднують відрізками прямих. Утворена фігура називається **многокутник розподілу** (див. рис. 3).

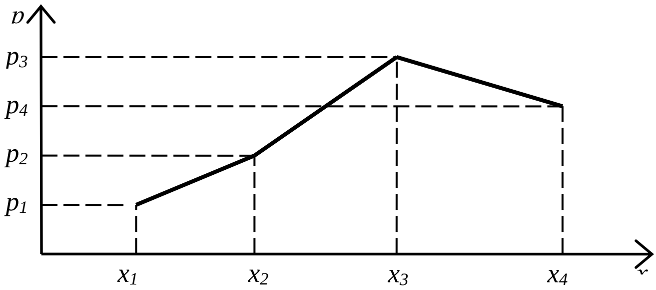


Рис. 3. Многокутник розподілу перервної випадкової величини

Функція розподілу відноситься до різновиду аналітичних форм і є універсальною характеристикою, яка використовується для представлення законів розподілу як перервних, так і неперервних випадкових величин.

Функція розподілу – це ймовірність того, що випадкова величина X набуде значень, які менші від деякого окремого її значення x :

$$F(x) = p(X < x).$$

Значення функції розподілу перервної випадкової величини можна визначити, використовуючи ряд розподілу, за формулою

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p(X = x_i).$$

Позначення $x_i < x$ вказує, що до суми потрібно залучити ймовірності всіх тих значень x_i, які менші від зафіксованого x.

Властивості функції розподілу $F(x)$:

1. Функція розподілу є не спадаючою функцією свого аргументу, тобто при $x_2 > x_1$ завжди $F(x_2) \geq F(x_1)$.
2. На мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю: $F(-\infty) = 0$.
3. На плюс нескінченності функція розподілу дорівнює одиниці: $F(+\infty) = 1$.

Графік функції розподілу *F(x)* в загальному являє собою графік не спадаючої функції, значення якої лежать у межах від 0 до 1. Графік функції для перервної величини при проходженні змінної x через те чи інше значення x_i має розриви, величини яких дорівнюють ймовірностям цих значень (див. рис. 4). Для неперервної випадкової величини графік функції розподілу являє собою плавну не спадаючу криву (див. рис. 5).

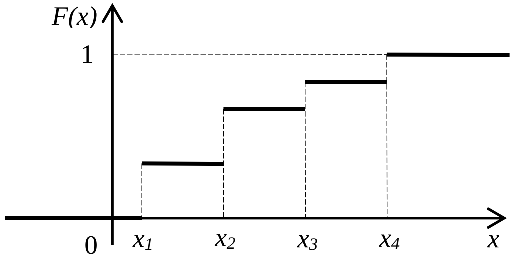


Рис. 4. Графік функції розподілу перервної випадкової величини

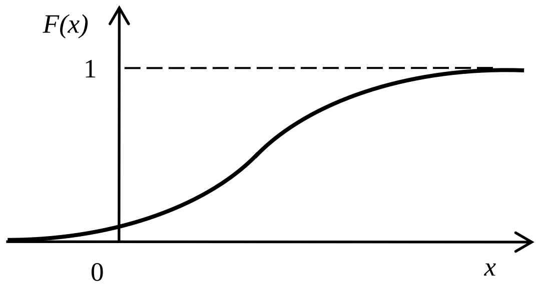


Рис. 5. Графік функції розподілу неперервної випадкової величини

При розв'язуванні практичних задач часто виникає потреба обчислення ймовірності того, що випадкова величина набуде певних значень, які знаходяться у межах заданого інтервалу, наприклад, $[\alpha;\beta)$. Попадання випадкової величини X в такий інтервал рівносильне виконанню нерівності $\alpha \le X < \beta$. Потрібна ймовірність дорівнює різниці значень функції розподілу $F(\beta)$ та $F(\alpha)$ на границях цього інтервалу:

$$p(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Таку різницю називають приростом функції розподілу на відрізку $\alpha \le X < \beta$. Якщо необмежено зменшувати довжину інтервалу, то гранично за умови $\beta \to \alpha$ замість ймовірності попадання величини в інтервал одержимо ймовірність того, що вона набуде сталого ізольованого значення α:

$p(X=\alpha)=\lim\limits_{\beta\to\alpha} p(\alpha\le X<\beta)=\lim\limits_{\beta\to\alpha}\left[F(\beta)-F(\alpha)\right]=0$. Отже, ймовірність попадання випадкової величини в окрему точку дорівнює нулю, тобто така подія є практично неможливою.

Якщо розглядати ймовірність попадання неперервної випадкової величини X на відрізок від x до $x+\Delta x$ $p(x<X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x)$ і виразити відношення цієї ймовірності до довжини відрізка Δx, тобто середню ймовірність на одиницю довжини, то гранично за умови, що Δx буде необмежено наближатись до нуля, одержимо похідну $F'(x)$ від функції розподілу *F(x)*:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x)=f(x).$$

Функція $f(x)$ характеризує щільність, з якою розподіляються значення величини в точці і називається **функція щільності розподілу** величини X. Функція щільності розподілу відноситься до різновиду аналітичних форм представлення закону розподілу тільки неперервних випадкових величин.

Графік функції щільності розподілу називається **крива розподілу** (рис. 6). Крива розподілу відноситься до різновиду графічних форм представлення закону розподілу неперервних випадкових величин.

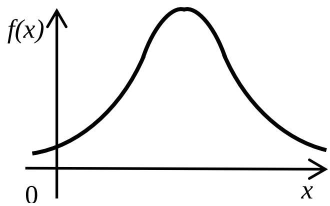


Рис. 6. Крива розподілу неперервної випадкової величини

Величина $f(x)dx=dF$ називається **елемент ймовірності**. З графічної точки зору – це площа елементарного прямокутника, який опирається на відрізок dx і окреслений зверху кривою розподілу (рис. 7). Ймовірність попадання неперервної величини у межі заданого інтервалу $(\alpha;\beta)$ дорівнює сумі елементів ймовірності на цьому інтервалі, тобто інтегралу

$$p(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

З графічної точки зору, така ймовірність – це площа фігури, яка опирається на відрізок $(\alpha;\beta)$ і окреслена зверху кривою розподілу (рис. 7).

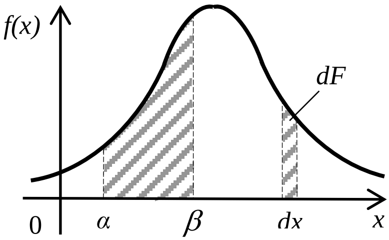


Рис. 7. Графічна інтерпретація елемента ймовірності та ймовірності попадання неперервної випадкової величини у межі заданого інтервалу

Беручи до уваги зв'язок $F'(x) = f(x)$, можна виразити функцію розподілу неперервної випадкової величини через її функцію щільності:

$$F(x) = p(X < x) = p(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx .$$

З графічної точки зору, функція розподілу $F(x)$ є не що інше, як площа фігури, яка окреслена кривою розподілу, опирається на вісь абсцис x і знаходиться лівіше зафіксованого значення x випадкової величини X (рис. 8).

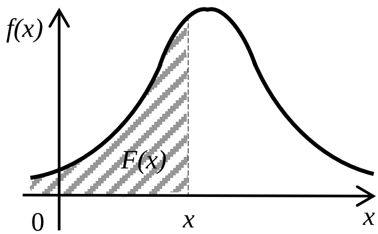


Рис. 8. Графічна інтерпретація функції розподілу неперервної випадкової величини

Властивості функції щільності розподілу $f(x)$:

1. Функція щільності розподілу – невід’ємна функція, тобто $f(x) \geq 0$.
2. Інтеграл в нескінченних границях від функції щільності розподілу дорівнює одиниці: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. З графічної точки зору це означає, що площа фігури, яка окреслена кривою розподілу та опирається на вісь абсцис x, завжди дорівнює одиниці.

Випадкова величина повністю описана з імовірнісної точки зору, якщо у всіх можливих формах схарактеризовано її закон розподілу. При вирішенні практичних задач взамін повного описування величини часто виникає потреба числового представлення лише окремих особливостей розподілу, які виражають ті чи інші його ознаки. Числові характеристики, які виражають типові ознаки розподілу випадкової величини, поділяють на дві групи:

1. Числові характеристики, які оцінюють положення випадкової величини на числовій осі (у стислій формі їх називають **характеристики положення**). У цій групі виокремлюють наступні різновиди числових характеристик: **математичне сподівання, мода, медіана**.
2. Числові характеристики, які виражають розсіювання випадкової величини довкола центра розподілу (**характеристики розсіювання**). У цій групі виокремлюють наступні різновиди числових характеристик: **дисперсія, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт асиметрії, ексцес**.

Математичне сподівання позначують m_x або $M[X]$. Математичне сподівання перервної випадкової величини – це сума добутків можливих значень величини x_i на ймовірності p_i цих значень:

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Математичне сподівання m_x **оцінює положення центра розподілу випадкової величини** *X* на числовій осі. З фізичної точки зору – це абсциса центра тяжіння системи випадкових матеріальних точок з відповідними їм масами. Вираження математичного сподівання для неперервної випадкової величини можна одержати, якщо зробити заміну окремих значень x_i на перемінну величину *x*, ймовірності окремих значень p_i – на елемент ймовірності $f(x)dx$, а суму – на інтеграл в нескінченних границях:

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx .$$

Мода M – **це найбільш ймовірне значення випадкової величини**, тобто таке значення, якому відповідає найбільша ймовірність: $M=x$, якщо $p(x)=\max$. Таке формулювання даного параметра строго слід застосовувати лише для перервних випадкових величин. Для неперервних величин модою називають значення, якому відповідає найбільша щільність ймовірностей, тобто $M=x$, якщо $f(x)=\max$ (рис. 9).

Розподіл випадкової величини, який має моду, називається **модальний**. Якщо розподіл має більше одного максимуму, то він називається **полімодальний**. Розподіл називається **антимодальний**, якщо посередині замість максимуму він має мінімум (рис. 10).

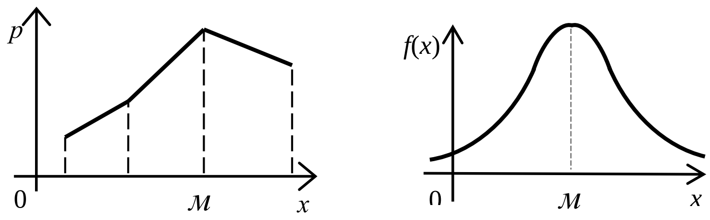


Рис. 9. Графічна інтерпретація моди перервної та неперервної випадкової величини

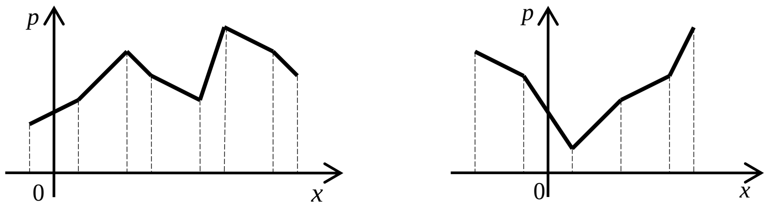


Рис. 10. Полімодальний та антимодальний розподіли перервної випадкової величини

Медіана $\mathcal{M}_e$ – це таке значення випадкової величини X, для якого однаково ймовірно, чи виявиться величина меншою чи більшою відносно $\mathcal{M}_e$:

$$p(X<\mathcal{M}_e) = p(X>\mathcal{M}_e).$$

З геометричної точки зору, медіана $\mathcal{M}_e$ – це абсциса точки, в якій площа фігури, яка окреслена кривою розподілу і опирається на вісь абсцис, поділяється порівну (рис. 11). Цією характеристикою користуються, здебільшого, для описування неперервних випадкових величин.

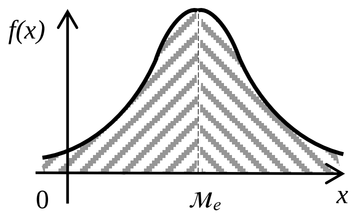


Рис. 11. Графічна інтерпретація медіани неперервної випадкової величини

Якщо розподіл модальний і симетричний, то значення математичного сподівання, моди та медіани співпадають: $m_X = \mathcal{M} = \mathcal{M}_e$.

Числові характеристики групи розсіювання випадкової величини виражаються через початкові моменти α_s або центральні моменти μ_s .

Початковий момент *s*-го порядку α_s перервної випадкової величини X – це сума добутків окремих значень величини x_i в s-ій степені на відповідні цим значенням ймовірності p_i :

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i .$$

Для неперервної випадкової величини – це інтеграл

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x) dx .$$

У порівнянні з виразенням початкового момента перервної величини тут зроблено заміну окремих значень x_i на перемінну величину x, ймовірності окремих значень p_i – на елемент ймовірності $f(x)dx$, а суми – на інтеграл в нескінченних границях. Математичне сподівання m_x (або $M[X]$) – це перший початковий момент випадкової величини:

$$m_x = \alpha_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i .$$

На цій підставі можна дати загальне визначення цього параметра: початковий момент s-го порядку випадкової величини X – це математичне сподівання s-ої степені цієї величини:

$$\alpha_s = M[X^s] .$$

Визначення центральних моментів ґрунтуються на понятті центрованої випадкової величини. **Центрована випадкова величина** $\overset{\circ}{X}$ – це відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання:

$$\overset{\circ}{X} = X - m_x .$$

Центральний момент s-го порядку μ_s перервної випадкової величини X – це сума добутків окремих значень центрованої випадкової величини в s-ій степені на відповідні цим значенням ймовірності p_i :

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_x\right)^s p_i .$$

Для неперервної випадкової величини X – це інтеграл

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^s f(x) dx .$$

Загалом для перервних і неперервних випадкових величин: центральний момент s-го порядку випадкової величини X – це математичне сподівання s-ої степені відповідної центрованої величини:

$$\mu_s = M[\overset{\circ}{X}{}^s] = M[(X - m_x)^s] .$$

Наслідки визначення центрального моменту:

1. Центральний момент нульового порядку будь-якої випадкової величини завжди дорівнює одиниці. Наприклад, для перервної величини:

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^0 p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 .$$

2. Центральний момент першого порядку будь-якої випадкової величини завжди дорівнює нулю:

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x) p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - m_x \sum_{i=1}^{n} p_i = m_x - m_x = 0 .$$

У розв'язуванні практичних задач використовують співвідношення, які виражають зв'язки між центральними та початковими моментами різних порядків. Наприклад, для перервних випадкових величин

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 .$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 .$$

Зазначені зв'язки рівною мірою справедливі також і для неперервних випадкових величин. Їх можна використовувати для контролю правильності обчислення потрібних центральних моментів.

Початкові моменти розглядають положення випадкової величини на числовій осі відносно початку координат, тоді як центральні моменти – відносно математичного сподівання, яке вказує положення на числовій осі центра розподілу значень величини з врахуванням ймовірностей цих значень. З цієї точки зору математичне сподівання є початком координат при описуванні розсіювання значень випадкової величини. Саме тому вважають, що центральні моменти розкривають числові характеристики розсіювання значень випадкової величини відносно центра розподілу. Для визначення таких характеристик найчастіше використовують центральні моменти другого, третього та четвертого порядків.

Центральний момент другого порядку (або математичне сподівання квадрата центрованої величини) визначає дисперсію випадкової величини. **Дисперсія** D_x (або $D[X]$) – **це числова характеристика, яка оцінює ступінь розсіювання значень випадкової величини X відносно центра розподілу**. З фізичної точки зору D_x – це момент інерції заданого розподілу мас відносно центра тяжіння. Для перервної випадкової величини

$$D_x = \mu_2 = M[\overset{\circ}{X}{}^2] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 p_i .$$

Для неперервної випадкової величини

$$D_x = \mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx .$$

Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини. Для практичних потреб зручніше використовувати характеристику розсіювання, розмірність якої співпадає з розмірністю випадкової величини. Така характеристика називається **середнє квадратичне відхилення (або стандарт)** σ **– це числова характеристика, яка оцінює ступінь розсіювання значень випадкової величини** X **відносно центра розподілу і виражається розмірністю випадкової величини**:

$$\sigma = \sigma[X] = \sqrt{D_x} .$$

Центральний момент третього порядку (або математичне сподівання куба центрованої величини) визначає асиметрію розподілу випадкової величини. Якщо розподіл симетричний відносно математичного сподівання, то всі центральні моменти непарного порядку дорівнюють нулю. Дійсно, в сумі $\mu_s = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^s p_i$ при симетричному відносно m_x розподілі та непарному s кожній додатній складовій відповідає рівна їй за абсолютною величиною від'ємна складова, а вся сума дорівнює нулю. Таке твердження справедливе і для неперервних величин, оскільки інтеграл в симетричних границях від непарної функції дорівнює нулю. Саме тому третій центральний момент μ_3, як найпростіший момент непарного порядку, використовується для описування асиметрії розташування значень випадкової величини відносно центра розподілу. Він має розмірність куба випадкової величини. Якщо μ_3 розділити на куб середнього квадратичного відхилення σ, то одержимо числову характеристику, яка іменується **коефіцієнт асиметрії** S_k **– це безрозмірна числова характеристика, яка оцінює ступінь асиметрії розподілу випадкової величини відносно математичного сподівання**:

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3} .$$

Отже, якщо розподіл симетричний відносно m_x, то $S_k = 0$.

З геометричної точки зору коефіцієнт асиметрії виражає скошеність кривої або многокутника розподілу випадкової величини. На рис. 12 показано криві двох асиметричних розподілів неперервної випадкової величини X з додатнім та від’ємним коефіцієнтами асиметрії.

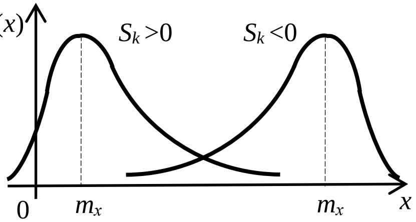


Рис. 12. Криві асиметричних розподілів випадкової величини з додатнім та від’ємним коефіцієнтами асиметрії

Центральний момент четвертого порядку (або математичне сподівання четвертої степені центрованої величини) визначає характеристику випадкової величини, яку називають **ексцес** E_X – **це безрозмірна характеристика розсіювання випадкової величини *X*, яка виражає ступінь щільності розташування значень величини поблизу математичного сподівання**. Розрахунок ексцесу забезпечує формула

$$E_X = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 .$$

Число 3 віднімається тому, що для найбільш розповсюдженого у природі нормального закону розподілу відношення μ_4 / σ^4 =3. Таким чином, для нормального закону розподілу $E_X = 0$, а досліджувані закони розподілу порівнюються з цим теоретичним законом. З геометричної точки зору цей параметр відображує крутизну (гостровершинність або плосковершинність) кривої чи многокутника розподілу, як це показано на рис. 13.

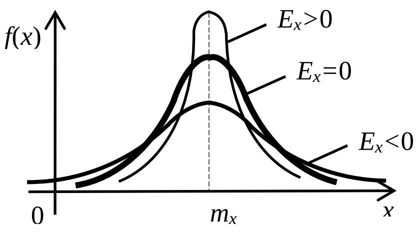


Рис. 13. Графічна інтерпретація ексцесу випадкової величини

Розподіли з більш гостроверхою кривою порівняно з кривою нормального закону мають додатній ексцес ($E_X > 0$). В таких розподілів дисперсія невелика, а значення випадкової величини зосереджуються поблизу центра розподілу і тим більше, чим більшого значення набуває ексцес. Розподіли з більш плоско вершинною кривою порівняно з кривою нормального закону мають від'ємний ексцес ($E_x < 0$). Їм властиве велике розсіювання значень величини відносно центра розподілу із значною за величиною дисперсією. Чим більший в цьому випадку за абсолютною величиною ексцес, тим більше розсіювання значень величини.

Хід роботи

Завдання. В однакових умовах проводиться серія *n*=5 незалежних повторних випробувань. У кожному випробуванні з ймовірністю *p* відбувається деяка подія (ймовірність того, що в окремому випробуванні подія не відбудеться, *q*=1–*p*). Загалом у серії даних випробувань подія може відбутись *m* разів. Числа *m* можуть набувати значень *m*=0,1,2,3,4,5 і утворюють повну групу. Числа $x_i = m_i \quad (i = \overrightarrow{1, n+1})$ – це можливі значення перервної випадкової величини *X*, яка підпорядковується біноміальному законові розподілу їх ймовірностей p_i. Беручи за основу усі можливі значення $x_i = m_i$, необхідно: 1) за формулою Бернуллі обчислити відповідні ймовірності $p_i = P_n^m$ і скласти ряд розподілу; 2) побудувати многокутник розподілу; 3) обчислити значення функції розподілу та побудувати її графік; 4) обчислити ймовірність того, що величина набуде значень в інтервалі [$\alpha; \beta$); 5) обчислити числові характеристики розподілу випадкової величини.

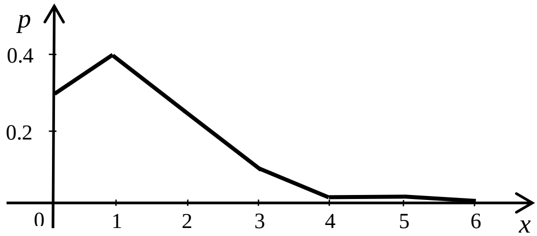
Вхідні дані для виконання завдання зведено до таблиці додатку 1.

Приклад розв'язування завдання. Нехай *n* = 6, *p* = 0.2, α = 3, β = 5.

1.Оскільки розподіл ймовірностей чисел появи події *m* разів в серії повторних випробувань підпорядковується біноміальному законові, то ймовірності $p_i = P_n^m$ значень $x_i = m_i$ обчислюємо за формулою Бернуллі $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$. За умови, що *n*=6, *p*=0.2, *q*=0.8, одержимо: $p_1 = P_6^0 = 0.2621$; $p_2 = P_6^1 = 0.3932$; $p_3 = P_6^2 = 0.2458$; $p_4 = P_6^3 = 0.0819$; $p_5 = P_6^4 = 0.0154$; $p_6 = P_6^5 = 0.0015$; $p_7 = P_6^6 = 0.0001$. Контроль обчислень: $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = \sum_{m=0}^{6} P_6^m = 1.0000$. Ряд розподілу перервної випадкової величини *X*:

$x_i = m_i$	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0.2621	0.3932	0.2458	0.0819	0.0154	0.0015	0.0001

2. У плоскій прямокутній системі координат на осі абсцис розміщуємо можливі значення випадкової величини *X*, а на осі ординат – відповідні їм ймовірності з ряду розподілу. Точки перетину з'єднуємо відрізками прямих і одержимо многокутник розподілу наступного вигляду:



3. Значення функції розподілу $F(x)$ обчислюємо за формулою $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p(X = x_i)$. Аргумент x функції розподілу $F(x)$ почергово набуває значень випадкової величини X від 0 до 6:

$F(0) = \sum\limits_{x_i < 0} p(X = x_i) = 0$;

$F(1) = \sum\limits_{x_i < 1} p(X = x_i) = p_1 = 0.2621$;

$F(2) = \sum\limits_{x_i < 2} p(X = x_i) = p_1 + p_2 = 0.6553$;

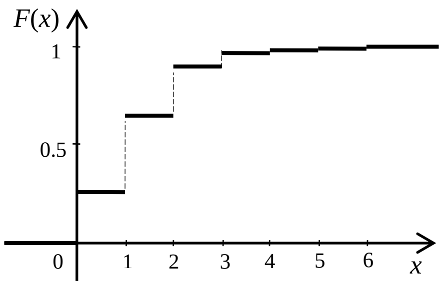
$F(3) = \sum\limits_{x_i < 3} p(X = x_i) = p_1 + p_2 + p_3 = 0.9011$;

$F(4) = \sum\limits_{x_i < 4} p(X = x_i) = p_1 + \ldots + p_4 = 0.9830$;

$F(5) = \sum\limits_{x_i < 5} p(X = x_i) = p_1 + \ldots + p_5 = 0.9984$;

$F(6) = \sum\limits_{x_i < 6} p(X = x_i) = p_1 + \ldots + p_6 = 0.9999$;

для всіх значень x>6 $F(x) = \sum\limits_{x < +\infty} p(X = x_i) = p_1 + \ldots + p_7 = 1.0000$. Графік функції розподілу $F(x)$ має наступний вигляд:



4. Ймовірність того, що перервна випадкова величина X набуває значень в інтервалі $\alpha \le X < \beta$, обчислюємо як приріст функції розподілу $F(x)$ на заданому відрізку [3;5) за формулою $p(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$: $p(3 \le x < 5) = F(5) - F(3) = 0.9984–0.9011=0.0973$. Одержаний результат розв'язку рівносильний сумі ймовірностей значень величини, які знаходяться в цьому інтервалі, тобто $p(X = 3) + p(X = 4)$=0.0819+0.0154=0.0973.

5. Користуючись рядом розподілу, обчислюємо основні числові характеристики розподілу перервної випадкової величини X.

5.1. Характеристики положення випадкової величини на числовій осі:

– математичне сподівання $m_x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i p_i = 1.2$;

– мода $M = 1$, оскільки $p(X = 1) = 0.3932 = \max$.

5.2. Характеристики розсіювання випадкової величини довкола центра розподілу (математичного сподівання):

– дисперсія $D_x = \sum_{i=1}^{n+1} (x_i - m_x)^2 p_i$ =0.96. Контроль за формулою

$$D_x = \alpha_2 - \alpha_1^2 = (\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 p_i) - m_x^2 = 0.96;$$

– середнє квадратичне відхилення (стандарт): $\sigma = \sqrt{D_x}$ =0.98;

– коефіцієнт асиметрії $S_k = \mu_3 / \sigma^3 = (\sum_{i=1}^{n+1} (x_i - m_x)^3 p_i)/\sigma^3 = 0.62$. Контроль за

формулою $S_k = (\alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3)/\sigma^3 = (\sum_{i=1}^{n+1} x_i^3 p_i - 3\alpha_2 m_x + 2m_x^3)/\sigma^3 = 0.62$;

– ексцес $E_x = \mu_4 / \sigma^4 - 3 = (\sum_{i=1}^{n+1} (x_i - m_x)^4 p_i)/\sigma^4 - 3 = 0.06$.

Аналіз одержаних значень числових характеристик дає підстави зробити наступні висновки. Розподіл перервної випадкової величини X – це модальний розподіл з центром в точці 1.2 на числовій осі. Мода M = 1 не співпадає з центром розподілу, адже розподіл асиметричний. Асиметричність розподілу додатна, хоча й невелика за абсолютною величиною. Це свідчить про незначне зміщення значень величини (з врахуванням їх ймовірностей) вправо відносно центра розподілу. Додатне значення ексцесу вказує на гостровершинність форми многокутника у порівнянні з кривою нормального закону розподілу. Проте мале абсолютне значення ексцесу посвідчує, що досліджуваний розподіл практично не відрізняється від нормального.

Питання для самоконтролю

1. Які величини називають випадковими?
2. Які випадкові величини називають перервними, неперервними?
3. Що називають законом розподілу випадкової величини?
4. В яких формах можна описувати закони розподілу перервних і неперервних випадкових величин?
5. Що називають рядом розподілу?
6. Що називають многокутником розподілу?
7. Що називають функцією розподілу випадкової величини? Які вона має властивості?
8. Як обчислити значення функції розподілу та побудувати її графік?
9. Як визначити ймовірність того, що випадкова величина набуває значень у межах заданого інтервалу?
10. Що називають функцією щільності розподілу неперервної випадкової величини? Які вона має властивості?
11. Що називають кривою розподілу?
12. Які є числові характеристики розподілу випадкової величини?
13. Як обчислюється і що характеризує математичне сподівання?
14. Як визначається і що характеризує мода випадкової величини?
15. Що називають початковим та центральним моментами?
16. Як обчислюються і що характеризують дисперсія і стандарт?
17. Як обчислюється і що характеризує коефіцієнт асиметрії?
18. Як обчислюється і що характеризує ексцес?

3. НОРМАЛЬНИЙ ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Нормальний закон розподілу випадкових величин відіграє важливу роль в теорії ймовірностей і посідає серед інших законів розподілу особливе місце. Він має фундаментальне значення в теорії ймовірностей загалом і в теорії математичної обробки геодезичних вимірів зокрема. Таку винятковість нормального закону розподілу засвідчують наступні аргументації:

- більшість величин, які є в природі, підпорядковуються нормальному законові, тому він найчастіше трапляється на практиці;
- випадкові похибки вимірів підпорядковуються саме цьому законові;
- нормальний закон є граничним для закону розподілу випадкової величини, яка є результатом сумісного прояву інших випадкових незалежних величин, кожна з яких підпорядковується яким завгодно іншим законам розподілу;
- нормальний закон є граничним законом, до якого за певних умов наближаються інші закони розподілу випадкових величин.

Нормальний закон розподілу оцінює неперервні випадкові величини. З імовірнісної точки зору, абсолютне представлення закону розподілу неперервної випадкової величини передбачає вираження його аналітичних та графічної форм. Аналітичними формами закону розподілу неперервної величини є функція розподілу $F(x)$ та функція щільності розподілу $f(x)$, графічною – крива розподілу (графік функції щільності розподілу).

Нормальний закон розподілу випадкової величини X **– це закон розподілу з функцією щільності ймовірностей** $f(x)$ **вигляду**

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}.$$

m_x та σ – математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення величини X. Щільність нормального розподілу для змінної x можна визначити безпосередньо за її аналітичною формою або з використанням спеціально призначених стандартних таблиць (див. додаток 2).

Крива розподілу має симетричний вершиноподібний вигляд. Максимальна ордината кривої відповідає точці $x = m_x$ та дорівнює $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ (рис. 14). В цій точці щільність розподілу найбільша. По мірі віддалення від точки m_x щільність спадає і при $x \to \pm\infty$ крива розподілу асимптотично наближається до осі абсцис.

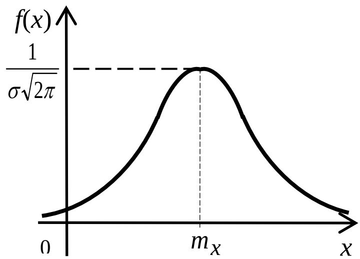


Рис. 14. Крива нормального закону розподілу випадкових величин

Математичне сподівання m_x оцінює розташування центра нормального розподілу випадкової величини X на осі абсцис. Разом з тим, m_x є центром симетрії розподілу, оскільки при зміні знаку різниці $(x-m_x)$ на протилежний значення функції щільності $f(x)$ не змінюється. Зміна значення m_x зумовлює зміщення кривої розподілу вздовж осі абсцис без зміни її форми. Беручи до уваги властивість симетричності кривої нормального закону розподілу, такі числові характеристики як **мода** M і **медіана** M_e прирівнюються математичному сподіванню: $M = M_e = m_x$.

Середнє квадратичне відхилення σ є характеристикою розсіювання випадкової величини відносно математичного сподівання m_x і описує форму кривої розподілу. Максимальна ордината кривої обернено пропорційна σ (рис. 14). За властивістю функції щільності розподілу, площа під кривою завжди дорівнює одиниці. При збільшенні розсіювання значень величини та відповідному зростанні σ крива буде набувати більш пологої форми, наближаючись до плоско вершинної і розтягуючись вздовж осі абсцис. Навпаки, при зменшенні розсіювання σ крива розподілу витягується доверху, одночасно стискаючись з боків, і стає більш гостроверхою.

Нормальному законові розподілу випадкової величини властиве рекурентне співвідношення вигляду $\mu_s = (s-1)\sigma^2 \mu_{s-2}$, яке забезпечує розрахунок центральних моментів вищих порядків через відповідні моменти нижчих порядків. Практична значущість цього співвідношення очевидна, якщо взяти до уваги обґрунтовані раніше оцінки центральних моментів нульового і першого порядків, яких вони набувають для будь-яких розподілів випадкових величин. Зокрема, завжди $\mu_0 = 1$, а також для центрованої випадкової величини $\mu_1 = 0$. Отже, на основі рекурентного співвідношення для центральних моментів вище першого порядку одержимо: $\mu_2 = \sigma^2$; $\mu_3 = 0$; $\mu_4 = 3\sigma^4$; $\mu_5 = 0$; $\mu_6 = 15\sigma^6$; $\mu_7 = 0$, … . Здобуті результати дають підстави сформулювати такі висновки:

1. Усі центральні моменти непарних порядків дорівнюють нулю. На цій основі, **коефіцієнт асиметрії** нормального розподілу $S_k = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$.

   Нарівні з властивістю кривої розподілу це є ще одним доказом симетричності нормального закону.

2. **Ексцес** нормального розподілу $E_x = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \dfrac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0$. Це очевидно також з точки зору призначення ексцесу як числової характеристики розподілу випадкової величини – оцінювати розсіювання досліджуваних розподілів порівняно з нормальним.

Функція розподілу $F(x)$ через функцію щільності розподілу нормального закону $f(x)$ виражається формулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}} dx \, .$$

Формула такого вигляду непридатна для практичного користування і підлягає перетворенню.

З цією метою зробимо заміну змінної $\frac{x-m_x}{\sigma}=t$. Змінна t називається **нормоване значення випадкової величини** – це відстань від змінної x до центра розподілу m_x, яка виражена в середніх квадратичних відхиленнях.

Тепер $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Навіть так, прямий розв’язок завдання вираження функції $F(x)$ неможливий, оскільки підінтегральний вираз не розкладається на елементарні функції. Однак потрібного результату можна досягнути за посередництва спеціальної функції, яка називається нормальна функція розподілу, вигляду

$$\Phi^*(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}dt .$$

Нормальна функція розподілу $\Phi^*(t)$ (або інтеграл ймовірностей) – це функція розподілу випадкової величини для найпростішого нормального закону з параметрами $m_x=0$ та $\sigma=1$. За таких умов $x=t$ і

$$F(x) = \Phi^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{8}-\frac{t^6}{48}+\ldots)\ dt .$$

Такий математичний прийом дає змогу виконати інтегрування по частинах і за умови $m_x=0$ та $\sigma=1$ сформувати уніфіковану таблицю значень нормальної функції розподілу (див. додаток 3). Значення функції розподілу $F(x)$ з довільними параметрами m_x та σ визначаються за сформованою таблицею, враховуючи, що

$$F(x)=\Phi^*(t)=\Phi^*(\frac{x-m_x}{\sigma}).$$

Властивості нормальної функції розподілу:

1. $\Phi^*(t)$ **–** це не спадаюча функція свого аргументу: при $x_2>x_1$ завжди $\Phi^*(x_2)\geq\Phi^*(x_1)$.
2. На мінус нескінченності $\Phi^*(t)$ дорівнює нулю: $\Phi^*(-\infty)=0$.
3. На плюс нескінченності $\Phi^*(t)$ дорівнює одиниці: $\Phi^*(+\infty)=1$.
4. $\Phi^*(-x)=1-\Phi^*(x)$, що є наслідком симетричності нормального розподілу з параметрами $m_x=0$ та $\sigma=1$ відносно початку координат.

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X з довільними параметрами m_x та σ набуде значень, які знаходяться у межах заданого інтервалу $(\alpha;\beta)$, виражає загальна формула вигляду $p(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$. Беручи до уваги залежність $F(x) = \Phi^*(\frac{x - m_x}{\sigma})$, потрібну ймовірність виражають через стандартну нормальну функцію розподілу, яка відповідає найпростішому законові з параметрами $m_x = 0$ та $\sigma = 1$:

$$p(\alpha < X < \beta) = \Phi^*(\frac{\beta - m_x}{\sigma}) - \Phi^*(\frac{\alpha - m_x}{\sigma}) .$$

Значення нормальної функції розподілу $\Phi^*(\frac{\beta - m_x}{\sigma}), \Phi^*(\frac{\alpha - m_x}{\sigma})$ вибирають з таблиці за аргументами $\frac{\beta - m_x}{\sigma}, \frac{\alpha - m_x}{\sigma}$.

На практиці часто виникає потреба визначення ймовірності попадання нормально розподіленої випадкової величини на відрізок заданої довжини, який симетричний відносно центра розподілу m_x . Допустимо, такий відрізок має довжину $2l$ (рис. 15). Беручи до уваги загальну формулу, для ймовірності попадання величини у його межі одержимо:

$$p(m_x - l < X < m_x + l) = \Phi^*(\frac{l}{\sigma}) - \Phi^*(-\frac{l}{\sigma}) = 2\Phi^*(\frac{l}{\sigma}) - 1 .$$

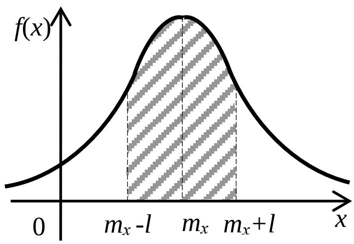


Рис. 15. Графічна інтерпретація ймовірності попадання величини на відрізок довжини $2l$, який симетричний відносно центра розподілу

Виражена таким чином ймовірність дорівнює площі фігури, яка окреслена кривою розподілу і опирається на відрізок довжиною $2l$. Якщо ймовірність $p(m_x - l < X < m_x + l) = 1/2$, то величина $l=E$ називається **ймовірне відхилення** (див. рис. 16). E **–** це половина довжини відрізка, який симетричний відносно центра розподілу m_x, ймовірність попадання в який дорівнює $1/2$: $p(m_x - E < X < m_x + E) = 2\Phi^*(\frac{E}{\sigma}) - 1 = 1/2$. Звідси $\Phi^*(\frac{E}{\sigma}) = 0.75$ і

$\arg\Phi^*(\frac{E}{\sigma}) = 0.674$. Позначення $\arg\Phi^*(\frac{E}{\sigma})$ вказує на виконання зворотної, щодо попередньої, дії під час користування таблицею нормальної функції розподілу, коли за значенням функції визначають відповідне значення аргументу. Тож значення аргументу $\frac{E}{\sigma}$, при якому функція дорівнює 0.75, дорівнює 0.674. Тому $E = 0.674\sigma$, тобто ймовірне відхилення E – це характеристика розсіювання, яка знаходиться у прямій залежності від середнього квадратичного відхилення σ.

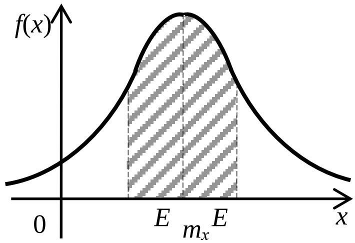


Рис. 16. Ймовірне відхилення нормально розподіленої випадкової величини

Відкладемо від центра розподілу m_x послідовно відрізки довжиною σ і обчислимо ймовірність попадання випадкової величини X на кожний з них. Оскільки нормальний розподіл симетричний, то достатньо відкласти такі відрізки по один бік від центра розподілу (див. рис. 17). Згідно із загальною формулою ймовірності попадання величини в інтервал та з використанням таблиць нормальної функції розподілу, одержимо:

$$p(m_x < X < m_x + \sigma) = \Phi^*(1) - \Phi^*(0) \approx 0.34;$$

$$p(m_x + \sigma < X < m_x + 2\sigma) = \Phi^*(2) - \Phi^*(1) \approx 0.14;$$

$$p(m_x + 2\sigma < X < m_x + 3\sigma) = \Phi^*(3) - \Phi^*(2) \approx 0.02.$$

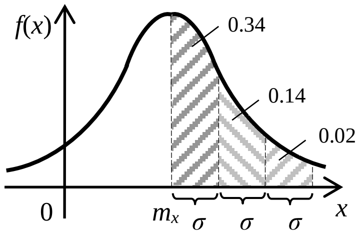


Рис. 17. Графічна інтерпретація ”правила трьох сигма”

Одержаний результат показує, що сума ймовірностей попадання величини у перші три відрізки по один бік від центра розподілу наближено (з точністю другого утримуваного десяткового знака) дорівнює 0.5. Ймовірності попадання величини у наступні відрізки, наприклад $(m_x + 3\sigma; m_x + 4\sigma)$ і т.д., якщо їх виразити з такою ж точністю, дорівнюватимуть нулю. Беручи до уваги властивість симетричності нормального закону розподілу, такий же результат буде досягнуто, якщо обчислювати ймовірності попадання величини на відрізки по інший, протилежний, бік відносно центра розподілу. Ймовірність попадання на всі відрізки (по три в обидві сторони відносно m_x) разом наближено дорівнюватиме одиниці. Це є підставою сформулювати властивість нормального закону розподілу, яку називають "**правило трьох сигма**": для нормально розподіленої випадкової величини розсіювання всіх її практично можливих значень наближено вкладається в інтервалі $m_x \pm 3\sigma$.

Хід роботи

Завдання. Задана нормально розподілена неперервна випадкова величина X з математичним сподіванням m_x та середнім квадратичним відхиленням σ . Необхідно: 1) з урахуванням "правила трьох сигма" вибрати десять можливих значень величини; 2) за відібраними значеннями величини визначити значення функції розподілу $F(x)$ і побудувати її графік; 3) за відібраними значеннями величини обчислити значення функції щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік; 4) обчислити ймовірність попадання величини в інтервал $[\alpha, \beta]$; 5) обчислити довжину відрізка, симетричного відносно m_x, ймовірність попадання на який дорівнює p; 6) обчислити ймовірне відхилення заданого розподілу.

Вхідні дані для виконання завдання зведено до таблиці додатку 4.

Приклад розв'язування завдання. Допустимо, $m_x = -209.0$; $\sigma = 24.2$; $\alpha = -230.0$; $\beta = -209.1$; p=0.58.

1. Для розв'язування завдання із незчисленно великої кількості можливих значень неперервної нормально розподіленої величини, які зосереджуються в діапазоні від $m_x - 3\sigma$ до $m_x + 3\sigma$, достатньо відібрати десять довільних значень, наприклад, наступні:

$x_1 = m_x - 3\sigma = -281.6$; $\quad x_2 = m_x - 2\sigma = -257.4$;

$x_3 = m_x - \sigma = -233.2$; $\quad x_4 = m_x - 0.7\sigma = -225.9$;

$x_5 = m_x - 0.5\sigma = -221.1$; $\quad x_6 = m_x + 0.5\sigma = -196.9$;

$x_7 = m_x + 0.7\sigma = -192.1$; $\quad x_8 = m_x + \sigma = -184.8$;

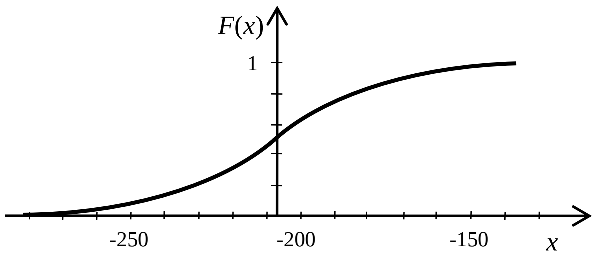
$x_9 = m_x + 2\sigma = -160.6$; $\quad x_{10} = m_x + 3\sigma = -136.4$,

а також $m_x = -209.0$, яке також є можливим значенням величини.

2. Для визначення значень функції розподілу $F(x)$ скористаємось таблицею значень інтеграла ймовірностей $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{8}-\frac{t^6}{48}+\ldots)\,dt$, сформованої для нормальної функції розподілу $\Phi^*(t)$ з параметрами $m_x = 0$ та $\sigma = 1$, яка розміщена у додатку 3. Значення функції $F(x)$ нормально розподіленої випадкової величини X з параметрами $m_x = -209.0$ та $\sigma = 24.2$ виразимо за посередництва нормованого аргументу $t=(x-m_x)/\sigma$ для кожного відібраного значення x випадкової величини та значення m_x. Тоді $F(x) = \Phi^*(t)$. Одержані результати помістимо до таблиці:

x	-281.6	-257.4	-233.2	-225.9	-221.1	-209.0	-196.9	-192.1	-184.8	-160.6	-136.4
t	-3	-2	-1	-0.7	-0.5	0	0.5	0.7	1	2	3
$F(x)$	0.0014	0.0288	0.1587	0.2420	0.3085	0.5000	0.6915	0.7580	0.8413	0.9772	0.9986

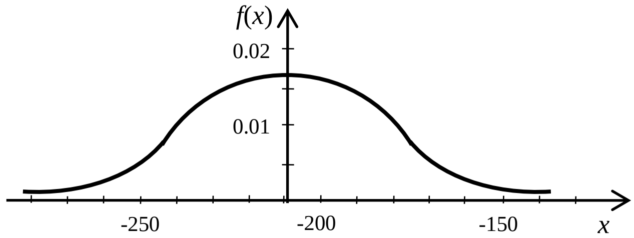
Графік функції розподілу нормально розподіленої неперервної випадкової величини X будуємо позначенням вздовж осі абсцис відібраних значень величини, а вздовж осі ординат – відповідних їм значень $F(x)$. Точки перетину з'єднуємо плавною кривою:



3. Значення функції щільності розподілу $f(x)$ нормально розподіленої випадкової величини X можна визначити за таблицею функції $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$, яка розміщена у додатку 2. Для кожного відібраного значення x випадкової величини та значення m_x за їх нормованими аргументами $t=(x-m_x)/\sigma$ з таблиці вибираємо відповідне значення функції $f(t)$. Остаточні значення щільності $f(x) = f(t)/\sigma$. Одержані результати помістимо до таблиці:

x	-281.6	-257.4	-233.2	-225.9	-221.1	-209.0	-196.9	-192.1	-184.8	-160.6	-136.4
t	-3	-2	-1	-0.7	-0.5	0	0.5	0.7	1	2	3
$f(t)$	0.0044	0.0540	0.2420	0.3123	0.3521	0.3989	0.3521	0.3123	0.2420	0.0540	0.0044
$f(x)$	0.0002	0.0022	0.0100	0.0129	0.0145	0.0165	0.0145	0.0129	0.0100	0.0022	0.0002

За одержаними результатами будуємо графік функції щільності $f(x)$ нормально розподіленої випадкової величини X:



4. Ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини в інтервал [–230.0; –209.1] визначаємо з використанням таблиць нормальної функції розподілу (додаток 3), беручи до уваги властивість 4 функції вигляду $\Phi^*(-x) = 1 - \Phi^*(x)$: $p(\alpha \le X \le \beta) = \Phi^*\left(\dfrac{\beta - m_x}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\dfrac{\alpha - m_x}{\sigma}\right) =$

$= \Phi^*(-0.004) - \Phi^*(-0.868) = 0.4984 - 0.1927 = 0.3057$.

5. Довжина відрізка, симетричного відносно m_x, ймовірність попадання на який p=0.58, виражається розв'язуванням оберненої задачі за формулою $p(m_x - l < X < m_x + l) = 2\Phi^*\left(\dfrac{l}{\sigma}\right) - 1 = p = 0.58$. З формули слідує наступне: $\Phi^*\left(\dfrac{l}{\sigma}\right) = 0.79$. Значення аргументу $\dfrac{l}{\sigma}$, при якому функція розподілу $\Phi^*\left(\dfrac{l}{\sigma}\right) = 0.79$, відповідно до даних таблиці додатку 3, дорівнює 0.806. Тому $\dfrac{l}{\sigma} = 0.806$ і l =0.806σ =19.505. Остаточно довжина відрізка $2l$ = 39.01 (див. схему на рис. 15).

6. Значення ймовірного відхилення E заданого розподілу випадкової величини X з параметрами m_x = –209.0 та σ = 24.2 обчислюємо за формулою $E = 0.674\sigma$ = 16.3108.

Питання для самоконтролю

1. Що називають нормальним законом розподілу випадкової величини?
2. Поясніть властивості кривої нормального закону розподілу.
3. Що характеризують математичне сподівання та стандарт нормально розподіленої випадкової величини?
4. Що називають модою та медіаною неперервної випадкової величини? Як вони зв'язані з математичним сподіванням при нормальному розподілі величини?
5. Як обчислюються центральні моменти неперервної нормально розподіленої випадкової величини?
6. Яких значень набувають коефіцієнт асиметрії та ексцес нормального закону розподілу?
7. Як обчислити значення функції розподілу неперервної випадкової величини?
8. Які властивості має нормальна функція розподілу?
9. Як обчислити ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини в заданий інтервал?
10. Як обчислити ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини на відрізок заданої довжини, який симетричний відносно математичного сподівання?
11. Що називають ймовірним відхиленням? Як його обчислити?
12. Що називають нормованою випадковою величиною?
13. Як визначити значення функції щільності нормального розподілу випадкової величини?
14. Поясніть зміст "правила трьох сигма".

Література

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей : підручник. Москва : Наука, 1969. 576 с.
2. Видуев Н. Г., Григоренко А. Г. Математическая обработка геодезических измерений : навчальний посібник. Київ : Вища школа, 1978. 376 с.
3. Войтенко С. П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів : навчальний посібник. Київ : КНУБА, 2003. 216 с.
4. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірів : підручник / Зазуляк П. М., Гавриш В. І., Євсєєва Е. М., Йосипчук М. Д. Львів : Растр-7, 2007. 408 с.

Додаток 1

Вхідні дані для виконання завдання теми 2

№ варіанта	p	α	β	№ варіанта	p	α	β	№ варіанта	p	α	β
1	0.10	0	1	18	0.44	1	2	35	0.80	2	3
2	0.12	0	2	19	0.46	1	3	36	0.82	2	4
3	0.14	0	3	20	0.48	1	4	37	0.84	2	5
4	0.16	0	4	21	0.52	1	5	38	0.86	3	4
5	0.18	1	2	22	0.54	2	3	39	0.88	3	5
6	0.20	1	3	23	0.56	2	4	40	0.90	0	1
7	0.22	1	4	24	0.58	2	5	41	0.92	0	2
8	0.24	1	5	25	0.60	3	4	42	0.94	0	3
9	0.26	2	3	26	0.62	3	5	43	0.96	0	4
10	0.28	2	4	27	0.64	0	1	44	0.98	1	2
11	0.30	2	5	28	0.66	0	2	45	0.02	1	3
12	0.32	3	4	29	0.68	0	3	46	0.04	1	4
13	0.34	3	5	30	0.70	0	4	47	0.06	1	5
14	0.36	0	1	31	0.72	1	2	48	0.08	2	3
15	0.38	0	2	32	0.74	1	3	49	0.49	2	4
16	0.40	0	3	33	0.76	1	4	50	0.50	2	5
17	0.42	0	4	34	0.78	1	5	51	0.51	3	4

Значення функції $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ Додаток 2

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	t
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973	0.0
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918	0.1
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825	0.2
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697	0.3
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538	0.4
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352	0.5
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144	0.6
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920	0.7
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685	0.8
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444	0.9
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203	1.0
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965	1.1
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736	1.2
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518	1.3
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315	1.4
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127	1.5
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957	1.6
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804	1.7
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669	1.8
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551	1.9
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449	2.0
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0388	0379	0371	0363	2.1
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290	2.2
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229	2.3
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180	2.4
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139	2.5
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107	2.6
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081	2.7
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061	2.8
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046	2.9
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034	3.0
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025	3.1
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018	3.2
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013	3.3
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009	3.4
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006	3.5
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004	3.6
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	3.7
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	3.8
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	3.9
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	t

Значення нормальної функції розподілу $\Phi^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ Додаток 3

t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$
0.00	0.5000	0.40	0.6554	0.80	0.7881	1.20	0.8849	1.60	0.9452	2.00	0.9772
0.01	5040	0.41	6591	0.81	7910	1.21	8869	1.61	9463	2.10	9821
0.02	5080	0.42	6628	0.82	7939	1.22	8888	1.62	9474	2.20	9861
0.03	5120	0.43	6664	0.83	7967	1.23	8907	1.63	9484	2.30	9893
0.04	5160	0.44	6700	0.84	7995	1.24	8925	1.64	9495	2.40	9918
0.05	5199	0.45	6736	0.85	8023	1.25	8944	1.65	9505	2.50	9938
0.06	5239	0.46	6772	0.86	8051	1.26	8962	1.66	9515	2.60	9953
0.07	5279	0.47	6808	0.87	8078	1.27	8980	1.67	9525	2.70	9965
0.08	5319	0.48	6844	0.88	8106	1.28	8997	1.68	9535	2.80	9974
0.09	5359	0.49	6879	0.89	8133	1.29	9015	1.69	9545	2.90	9981
0.10	0.5398	0.50	0.6915	0.90	0.8159	1.30	0.9032	1.70	0.9554	3.00	0.9986
0.11	5438	0.51	6950	0.91	8186	1.31	9049	1.71	9564	3.10	9990
0.12	5478	0.52	6985	0.92	8212	1.32	9066	1.72	9573	3.20	9993
0.13	5517	0.53	7019	0.93	8238	1.33	9082	1.73	9582	3.30	9995
0.14	5557	0.54	7054	0.94	8264	1.34	9099	1.74	9591	3.40	9997
0.15	5596	0.55	7088	0.95	8289	1.35	9115	1.75	9599	3.50	9998
0.16	5636	0.56	7123	0.96	8315	1.36	9131	1.76	9608	3.60	9998
0.17	5675	0.57	7157	0.97	8340	1.37	9147	1.77	9616	3.70	9999
0.18	5714	0.58	7190	0.98	8365	1.38	9162	1.78	9625	3.80	0.9999
0.19	5753	0.59	7224	0.99	8389	1.39	9177	1.79	9633	3.90	1.0000
0.20	0.5793	0.60	0.7257	1.00	0.8413	1.40	0.9192	1.80	0.9641		
0.21	5832	0.61	7291	1.01	8437	1.41	9207	1.81	9649		
0.22	5871	0.62	7324	1.02	8461	1.42	9222	1.82	9656		
0.23	5910	0.63	7357	1.03	8485	1.43	9236	1.83	9664		
0.24	5948	0.64	7389	1.04	8508	1.44	9251	1.84	9671		
0.25	5987	0.65	7422	1.05	8531	1.45	9265	1.85	9678		
0.26	6026	0.66	7454	1.06	8554	1.46	9279	1.86	9686		
0.27	6064	0.67	7486	1.07	8577	1.47	9292	1.87	9693		
0.28	6103	0.68	7517	1.08	8599	1.48	9306	1.88	9699		
0.29	6141	0.69	7549	1.09	8621	1.49	9319	1.89	9706		
0.30	0.6179	0.70	0.7580	1.10	0.8643	1.50	0.9332	1.90	0.9713		
0.31	6217	0.71	7611	1.11	8665	1.51	9345	1.91	9719		
0.32	6255	0.72	7642	1.12	8686	1.52	9357	1.92	9726		
0.33	6293	0.73	7673	1.13	8708	1.53	9370	1.93	9732		
0.34	6331	0.74	7703	1.14	8729	1.54	9382	1.94	9738		
0.35	6368	0.75	7734	1.15	8749	1.55	9394	1.95	9744		
0.36	6406	0.76	7764	1.16	8770	1.56	9406	1.96	9750		
0.37	6443	0.77	7794	1.17	8790	1.57	9418	1.97	9756		
0.38	6480	0.78	7823	1.18	8810	1.58	9429	1.98	9761		
0.39	0.6517	0.79	0.7852	1.19	0.8830	1.59	0.9441	1.99	0.9767		

Додаток 4

Вхідні дані для виконання завдання теми 3

№ варіанта	m_x	σ	α	β	p	№ варіанта	m_x	σ	α	β	p
1	2.6	4.7	-2.8	2.8	0.15	26	-4.4	3.2	-2.1	3.8	0.72
2	1.8	2.9	1.4	2.6	0.25	27	-5.8	6.7	0	6.4	0.78
3	1.6	6.4	0	6.4	0.35	28	-0.3	8.4	6.3	8.2	0.84
4	2.2	3.1	-3.1	0	0.45	29	3.3	2.1	3.8	5.6	0.90
5	3.8	4.6	-5.8	0.6	0.55	30	5.5	4.2	-1.2	2.0	0.96
6	0.5	3.2	-6.4	1.3	0.65	31	0.5	2.2	-0.5	0.6	0.05
7	-1.4	2.8	-2.8	3.2	0.75	32	1.6	2.1	-1.8	0.9	0.13
8	-2.2	6.5	-9.4	0.2	0.85	33	2.3	3.6	-2.3	-0.4	0.21
9	-1.8	4.1	-2.1	1.6	0.05	34	4.8	5.4	1.5	4.3	0.27
10	-6.7	7.2	3.8	9.7	0.90	35	5.6	3.6	-0.1	4.8	0.34
11	-0.5	8.7	-8.1	-0.2	0.20	36	6.8	4.3	3.3	6.7	0.41
12	-1.1	4.3	0.5	1.3	0.30	37	7.9	6.5	-3.8	4.6	0.48
13	-4.6	1.2	-5.5	-4.0	0.40	38	-3.1	3.4	-3.2	-0.8	0.55
14	3.8	4.5	-3.3	0.6	0.60	39	-5.7	3.2	-6.9	-5.8	0.62
15	8.3	5.8	8.6	9.9	0.80	40	-8.5	4.8	-8.4	3.1	0.69
16	0.9	7.1	-3.2	6.3	0.12	41	-7.4	5.1	-4.3	0.6	0.76
17	8.4	4.2	-0.5	9.6	0.18	42	-6.3	8.4	0	6.8	0.83
18	-3.2	2.6	0.2	2.1	0.24	43	-4.8	0.8	-6.9	-5.1	0.90
19	-6.8	2.7	-8.4	-7.0	0.30	44	-2.8	7.6	1.6	6.8	0.04
20	-9.6	4.2	-6.3	0.2	0.36	45	-1.6	3.2	0	4.2	0.07
21	2.3	6.1	3.1	7.8	0.42	46	0.6	2.8	0.1	0.7	0.10
22	0.7	9.8	-7.3	0.2	0.48	47	2.5	3.9	0.4	2.6	0.13
23	-1.6	8.7	-9.3	3.6	0.54	48	3.2	2.8	-1.6	0	0.16
24	7.8	3.2	0.2	5.4	0.60	49	4.1	4.8	-3.1	-0.6	0.19
25	9.0	4.2	1.4	3.2	0.66	50	5.8	6.9	-5.4	3.2	0.22