Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут агроекології та землеустрою
Кафедра геодезії та картографії

**05-04-125М**

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних та самостійних робіт
з навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій»
спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»
денної та заочної форм навчання

# ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ

Рекомендовано науково-методичною
радою з якості ННІАЗ
Протокол № 10 від 25.04.2023 р.

Рівне – 2023

Методичні вказівки до виконання практичних та самостійних робіт з навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій» спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» денної та заочної форм навчання. Елементи теорії похибок вимірів [ Електронне видання ] / Тадєєв О. А. – Рівне : НУВГП, 2023. – 48 с.

Укладач: Тадєєв О. А., доцент кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Відповідальний за випуск: Янчук Р. М., завідувач кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Керівник групи забезпечення спеціальності 193 „Геодезія та землеустрій”: доктор сільськогосподарських наук, професор Мошинський В. С.

Зміст



## ВСТУП

Теорія похибок вимірів – розділ математичної обробки геодезичних вимірів, який вивчає методи кількісного та якісного оцінювання результатів вимірів та їх функцій. Основні завдання теорії похибок вимірів:

1. Систематизація вимірів та їх похибок.
2. Вивчення законів виникнення та розподілу похибок вимірів.
3. Встановлення критеріїв і методів оцінювання точності вимірів.
4. Визначення найбільш надійних значень результатів вимірів окремих величин та оцінка їх точності.
5. Оцінювання точності функцій результатів вимірів.

Вимір величини – це процес її порівняння з однорідною фізичною величиною, яку прийнято одиницею міри. Результат виміру величини – це підсумок виконання усіх вимірювальних операцій.

Для визначення надійного значення величини за результатами вимірів принципово важливим є кількість проведених вимірів. Відтак, у практику запроваджено чітку класифікацію вимірів за їх кількістю, як це показано на схемі рис. 1. Загальну кількість $n$ проведених вимірів величини завжди розділяють на необхідні $k$ і надлишкові $r$. Необхідною називають найменшу кількість вимірів, які потрібно виконати для визначення величини. Зокрема, при вимірах окремої величини кількість необхідних вимірів дорівнює одиниці. Але тільки один необхідний вимір не забезпечує контроль одержаного результату, що зумовлює невпевненість у його достовірності. Тому загальна кількість вимірів $n$ повинна перевищувати кількість необхідних $k$. Різниця $r = n - k$ називається кількість надлишкових вимірів. Наявність надлишкових вимірів величини є обов’язковою умовою проведення будь-яких вимірювальних дій. Надлишкові виміри забезпечують контроль одержаних результатів і дають змогу підвищувати їх якість.

Внаслідок впливу на виміри різноманітних факторів їх результати є неточними, вони завжди обтяжені похибками. Одержати абсолютно безпомилково результати вимірів неможливо. Вдосконалюючи прилади і методи, можна лише наближати результати вимірів величини до її істинного значення. Тому всякий результат виміру розглядають з двох точок зору:

– кількісна, яка виражає одержане числове значення величини;
– якісна, яка виражає допущену похибку виміру і представляє точність одержаного результату.

Залежно від точності і умов проведення виміри величини розділяють на рівноточні та нерівноточні (див. схему на рис. 1). Рівноточними називають виміри, які проведені в абсолютно однакових умовах (наприклад, використання приладів і методів однакової точності, однаковий вплив навколишнього середовища тощо). Рівноточним вимірам властиве однакове числове значення похибки. Якщо хоча б одна з умов рівноточності у ході проведення вимірів порушується, то такі виміри називають нерівноточними. Нерівноточним вимірам властиві різні числові значення похибок.

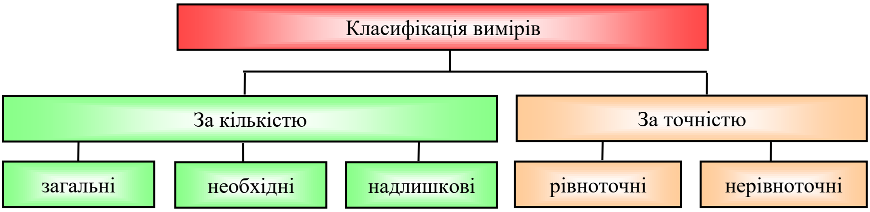


Рис. 1. Класифікація вимірів

Залежно від джерела виникнення розрізняють наступні види похибок вимірів (див. схему на рис. 2):

1) інструментальні, які зумовлені точністю відлікових систем вимірювальних приладів і недотриманням умов їх конструктивного виконання;
2) методичні, які зумовлені точністю методів вимірів, а також виникають внаслідок неповного врахування умов вимірів, порушення інструкцій проведення вимірювальних операцій чи вимог методу виміру;
3) зовнішні, які зумовлені зміною впливу навколишнього середовища, наприклад, температури, вологості, тиску тощо;
4) особисті похибки спостерігача.

За закономірностями виникнення похибки вимірів розділяють на такі види (рис. 2):

1) грубі, які зумовлені прорахунками чи неуважністю спостерігача, серйозними несправностями приладів. Результат виміру з грубою похибкою помітно вирізняється поміж інших результатів і вибраковується;
2) систематичні, якими результати вимірів обтяжені з тими чи іншими закономірностями. Залежно від характеру закономірностей систематичні похибки можуть бути постійними або односторонніми. Постійні систематичні похибки в процесі вимірів зберігають свій знак і абсолютну величину. Односторонні систематичні похибки зберігають знак, але

змінюють абсолютну величину. Систематичні похибки враховують в процесі вимірів шляхом введення до результатів необхідних поправок;

3) випадкові, під якими розуміють різниці між виміряними та істинним значеннями величини після вилучення результатів вимірів з грубими похибками і врахування систематичних похибок. Випадкові похибки завжди присутні в результатах вимірів. Вони виникають здебільшого внаслідок незначної зміни впливу джерела виникнення похибки та неспроможності сповна врахувати її систематичну частину.

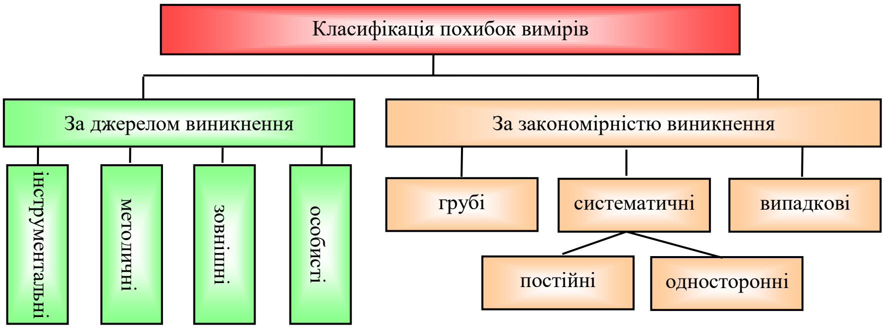


Рис. 2. Класифікація похибок вимірів

Випадкові похибки є типовим прикладом неперервних випадкових величин. Їх конкретні значення неможливо передбачити наперед; можна визначити лише границі їх можливих значень. Властивості випадкових похибок вимірів проявляються при масових вимірах і є наслідком їх підпорядкованості нормальному законові розподілу:

1. Додатні та від'ємні похибки рівноможливі: $p(\theta > 0) = p(\theta < 0) = \frac{1}{2}$.
2. Середнє арифметичне значень похибок при необмеженому зростанні кількості вимірів гранично прямує до нуля: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \theta_i}{n} = 0$.
3. Малі за абсолютною величиною похибки трапляються частіше, ніж великі – це слідує з властивості функції щільності нормального закону розподілу.
4. Абсолютні значення похибок із заданою ймовірністю не перевищують границю, яку задає “правило трьох сигма” нормального закону: $m_x \pm 3\sigma$ .

Визначення і числове вираження похибок вимірів величин та їх функцій – одне з основних завдань теорії похибок, яке називають оцінювання точності. Точність виміру величини – це числовий критерій, який є імовірнісною характеристикою відхилень результатів вимірів величини від її істинного значення. Різновиди найбільш вживаних на практиці абсолютних та відносних критеріїв оцінювання точності відображені на схемі рис. 3.

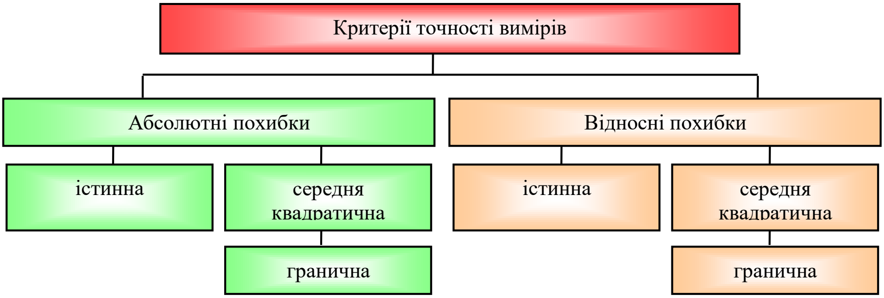


Рис. 3. Критерії точності вимірів

Найкращим критерієм точності виміру величини є істинна похибка $\theta$ – це відхилення результату виміру $x_i$ від істинного значення величини $X$ :

$$\theta_i = x_i - X \ .$$

Для оцінювання точності результатів вимірів з використанням істинної похибки необхідно знати істинне значення величини. У випадку безпосередніх вимірів величини істинне значення невідоме і цей критерій не застосовується. Істинна похибка має практичне застосування при оцінюванні точності функцій результатів вимірів.

Наявність у результатах вимірів похибок – основна причина, яка робить нездійснимим визначення істинних значень величин. Тому істинні значення замінюють тими чи іншими наближеними значеннями величин, які повинні бути близькими за ймовірністю до істинних. Такі наближені значення величин називають найбільш надійними значеннями. Їх визначають як математичні сподівання одержаних результатів вимірів з врахуванням кількості та умов проведення вимірів.

У разі невідомого істинного значення величини $X$ використовують посередні методи оцінювання точності, які ґрунтуються на законах розподілу результатів вимірів. Для оцінювання точності вимірів в таких випадках користуються критерієм, який називають середня квадратична похибка $m$. Середня квадратична похибка $m$ за змістом ототожнюється характеристиці розсіювання значень випадкової величини відносно центра їх розподілу (математичного сподівання), яка в теорії ймовірностей іменується середнє квадратичне відхилення (стандарт) $\sigma$ . У числовому вираженні середня квадратична похибка дорівнює середньому квадратичному відхиленню:

$$m = \sigma = \sqrt{D_x} \ .$$

$D_x$ – дисперсія результатів вимірів величини. Середня квадратична похибка оцінює точність вимірів, виходячи із сукупності одержаних результатів за їх відхиленнями від найбільш надійного значення величини, яке асоціюється з математичним сподіванням. Середня квадратична похибка є основним критерієм оцінювання точності геодезичних вимірів та їх функцій.

За умови врахування в процесі вимірів систематичних похибок і беручи до уваги властивість випадкових похибок щодо підпорядкованості нормальному законові розподілу в частині правила трьох сигма, можна оцінити діапазон допустимості похибок вимірів з використанням абсолютного критерію, який називають гранична середня квадратична похибка – це потроєне значення середньої квадратичної похибки виміру: $m_{гран} = 3m$. Такий критерій окреслює діапазон практично можливих значень похибок і вказує найбільше допустиме значення похибки виміру.

Всі абсолютні критерії точності виражають розмірністю величини, яка підлягає вимірам.

Відносною похибкою називають відношення абсолютної похибки до результату виміру величини. Це безрозмірний критерій точності, виражений у вигляді дробу з чисельником, який дорівнює одиниці. Знаменник відносної похибки заокруглюють до цілого числа. В ньому здебільшого значимі цифри зберігають тільки в перших двох розрядах, а в інших записують нулі.

Відношення істинної похибки $\theta$ до результату виміру величини $x$ називають відносною істинною похибкою $\frac{\theta}{x} = \frac{1}{N_1}$, де $N_1 = \frac{x}{\theta}$. Відношення середньої квадратичної похибки $m$ до $x$ називають відносною середньою квадратичною похибкою $\frac{m}{x} = \frac{1}{N_2}$; $N_2 = \frac{x}{m}$. Відношення граничної середньої квадратичної похибки $m_{гран}$ до $x$ називають відносною граничною середньою квадратичною похибкою $\frac{m_{гран}}{x} = \frac{1}{N_3}$; $N_3 = \frac{x}{m_{гран}}$.

Критеріями відносної похибки зручно користуватись при оцінюванні точності лінійних вимірів. Тоді вони виражають точність виміру довжини у розрахунку на одиницю міри довжини, наприклад, на один метр.

## 1. ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ВИМІРІВ ВЕЛИЧИН ТА ЇХ ФУНКЦІЙ

Всі величини, якими оперують в геодезії, розділяють на два види:

1) виміряні, наближені значення яких одержують безпосередніми вимірами;
2) обчислені (або посередні), які визначають як функції виміряних величин.

Якщо значення величини одержують безпосередніми вимірами, то точність результатів вимірів можна оцінити двома способами:

1) емпіричним способом, суть якого зводиться до вираження точності окремого результату виміру шляхом оцінювання всіх джерел виникнення похибки з урахуванням методів та чинних інструкцій проведення вимірів. Такий спосіб використовують здебільшого при розв’язуванні дослідницьких завдань. Він потребує великих витрат часу та праці, а визначена таким чином похибка не завжди адекватно відображує точність результату виміру;

2) способом оцінювання похибок за сукупністю результатів багатократних повторних вимірів на основі їх відхилень від найбільш надійного значення величини. Зміст і алгоритми реалізації цього способу будуть розкриті далі в методах обробки різних за походженням вимірів.

У геодезичній практиці використовують багато фізичних величин, які не можуть бути визначені безпосередніми вимірами. Мотивами цьому можуть бути, зокрема, відсутність необхідних вимірювальних приладів, недостатня точність наявних приладів, необґрунтовані матеріальні витрати на придбання потрібних приладів та обладнання, висока собівартість робіт тощо. Значення таких величин визначають посередніми способами за тими чи іншими формулами як функції інших величин, які одержані безпосередніми вимірами. Оскільки результати вимірів величин завжди обтяжені похибками, то і функції цих величин будуть містити похибки. Загалом похибка функції залежить від аналітичної форми функції, похибок виміряних величин, які є аргументами функції, а також ймовірної залежності аргументів між собою. Завдання визначення похибок обчислених величин називають оцінювання точності функцій результатів вимірів.

Допустимо, деяка величина $F$ визначається з функції загального вигляду $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, де $x_1, x_2, ..., x_n$ – результати безпосередніх вимірів величин (аргументи функції); $n$ – кількість аргументів функції.

Істинна похибка $\theta_F$ функції виражається різницею значення функції, яке обчислене за результатами вимірів аргументів, та істинного значення функції $f(X_1, X_2, ..., X_n)$:

$$\theta_F = f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Істинну похибку $\theta_F$ називають нев’язка. $\theta_F$ можна обчислити також за істинними похибками аргументів $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$, якщо такі похибки відомі:

$$\theta_F = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \cdot \theta_i ,$$

де $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0$ – значення частинних похідних функції по аргументах $x_i$.

Середня квадратична похибка $m_F$ функції виражається формулою

$$m_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_i^2 + 2\sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 \cdot r_{ij} m_i m_j} ,$$

де $m_i$ – середні квадратичні похибки аргументів; позначення $i < j$ вказує, що до суми потрібно залучити всі попарно взяті комбінації аргументів функції; $r_{ij}$ – коефіцієнт кореляції величин $X_i$ та $X_j$, який дає змогу врахувати їх ймовірну залежність. Величини називаються залежними, якщо значення однієї величини залежить від того, якого значення набула друга величина. Залежність визначається шляхом кореляційного аналізу в системі цих величин. При організації геодезичних вимірів висувається вимога забезпечити такі умови вимірів, щоб їх результати були незалежними. Тоді результат виміру величини не залежить від результатів вимірів інших величин, а коефіцієнти кореляції $r_{ij}$ таких величин дорівнюють нулю. За таких умов формула спрощується і набуває вигляду

$$m_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_0^2 m_i^2} .$$

Деякі приклади вираження середніх квадратичних похибок функцій:

1. Для функції $y = kx + c$, де $k$ та $c$ – сталі величини, $m_y = \sqrt{(\frac{\partial y}{\partial x})_0^2 m_x^2}$ .

$(\frac{\partial y}{\partial x})_0 = k$ і остаточно $m_y = km_x$ .

2. Для лінійної функції загального вигляду $y = k_1 x_1 \pm \ldots \pm k_n x_n + k_0$ , де $x_1,\ldots,x_n$ – незалежні аргументи із середніми квадратичними похибками $m_1,\ldots,m_n$ , $k_0, k_1,\ldots,k_n$ – сталі величини, $m_y = \sqrt{k_1^2 m_1^2 + \ldots + k_n^2 m_n^2}$ . Якщо $k_1 = \ldots = k_n = 1$ , то $m_y = \sqrt{m_1^2 + \ldots + m_n^2}$ . Якщо $m_1 = \ldots = m_n = m$ , то $m_y = m\sqrt{n}$ .

3. Для середнього арифметичного $y = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ з результатів незалежних вимірів $x_1,\ldots,x_n$, які мають рівні середні квадратичні похибки $m_1 = \ldots = m_n = m$ , всі частинні похідні $(\frac{\partial y}{\partial x_i})_0 = \frac{1}{n}$ і $m_y = \sqrt{n \frac{m^2}{n^2}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$ .

4. Якщо функція має вигляд $y = x_1 x_2$ або $y = \frac{x_1}{x_2}$, то можна записати: $\ln y = \ln x_1 \pm \ln x_2$ . Середня квадратична похибка логарифма функції $m_{\ln y} = \sqrt{\frac{m_1^2}{x_1^2} + \frac{m_2^2}{x_2^2}}$ , де $m_1$ та $m_2$ – середні квадратичні похибки аргументів $x_1$ та $x_2$ . Але $m_{\ln y} = \frac{m_y}{y}$, тому середня квадратична похибка функції $m_y = y\sqrt{\frac{m_1^2}{x_1^2} + \frac{m_2^2}{x_2^2}}$ , тобто вона виражається однаково і для добутку, і для ділення аргументів.

На основі формули розрахунку середньої квадратичної похибки функції для випадку незалежних аргументів можна розв'язати обернену задачу – розрахувати точність вимірів аргументів за похибкою $m_F$ функції. Така задача строго розв'язується тільки для функцій з одним аргументом. Якщо кількість аргументів функції $n>1$, то практично така задача може бути розв'язана тільки моделюванням умов вимірів аргументів. При цьому похибка функції розподіляється між похибками аргументів за тим чи іншим принципом залежно від очікуваних умов проведення вимірів.

Наприклад, можна скористатися принципом рівного впливу. За такого підходу на розв'язок накладається умова, що вплив похибок аргументів на точність функції є рівним, тобто

$$\frac{m_F^2}{n} = m_0^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_1^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_2^2 = \ldots = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_n^2 .$$

Тут $m_0$ наближено оцінює середній вплив кожного аргументу на точність функції. Середні квадратичні похибки вимірів окремих аргументів з врахуванням вигляду функції виражає формула

$$m_i = \frac{m_0}{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0\right|} = \frac{m_F}{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0\right|\sqrt{n}} .$$

Можна змоделювати умови вимірів таким чином, що похибка функції буде розподілятись між аргументами нерівномірно. Відтак аргументи функції можна вимірювати з більшими чи меншими похибками залежно від точності наявних приладів, доступних методів чи у відповідності до тих чи інших нормативних інструкцій. За такого підходу кожному аргументу $x_i$ потрібно встановити відповідний коефіцієнт $K_i$ пропорційно його впливу на точність функції. Тоді $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 m_i = K_i m_0$ і $m_F = m_0\sqrt{\sum_{i=1}^{n} K_i^2}$, а середня квадратична похибка виміру окремого аргументу виразиться формулою

$$m_i = \frac{K_i m_0}{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0\right|} .$$

Такий спосіб розрахунку точності виміру аргументів опирається на принцип пропорційного впливу. Він забезпечує оптимальне обґрунтоване вирішення задачі, опираючись на співвідношення точності приладів та методів вимірів.

## Хід роботи

Під час виконання роботи розв'язуються типові завдання оцінювання точності функцій незалежних виміряних величин та розрахунку точності вимірів величин за середньою квадратичною похибкою функції.

**Завдання 1**. В трикутнику проведено незалежні виміри двох внутрішніх кутів. Яка середня квадратична похибка обчислення третього кута, якщо середні квадратичні похибки двох виміряних кутів: а) нерівноточні і складають $m_1 = 3''$ та $m_2 = 4''$; б) рівноточні і складають $m_1 = m_2 = m = 3''$?

Розв'язування завдання.

Третій кут $\beta_3$ трикутника виражається через інші два кути $\beta_1$ і $\beta_2$ функцією $F$ вигляду $F = \beta_3 = 180^\circ - \beta_1 - \beta_2$. Знаходимо частинні похідні функції за обома її аргументами: $(\frac{\partial F}{\partial \beta_1})_0 = (\frac{\partial F}{\partial \beta_2})_0 = -1$. Виражаємо середню квадратичну похибку обчислення третього кута: $m_3 = \sqrt{(\frac{\partial F}{\partial \beta_1})_0^2 m_1^2 + (\frac{\partial F}{\partial \beta_2})_0^2 m_2^2} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$. Якщо $m_1 = 3''$ та $m_2 = 4''$, то $m_3 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5''$. Якщо $m_1 = m_2 = m = 3''$, то $m_3 = m\sqrt{2} = 4.2''$.

**Завдання 2**. Яка середня квадратична похибка середнього арифметичного значення кута, яке обчислили за результатами його рівноточних вимірів чотирма прийомами із похибкою $m = 2''$?

Розв'язування завдання.

Середнє арифметичне кута є функцією вигляду $\beta_c = F = \frac{\sum_{i=1}^{4} \beta_i}{4}$. Значення частинних похідних такої функції за всіма аргументами $\beta_i$ рівні поміж собою: $(\frac{\partial F}{\partial \beta_i})_0 = \frac{1}{4}$. Середня квадратична похибка $m_{\beta_c} = \sqrt{4(\frac{\partial F}{\partial \beta_i})_0^2 m^2} = 1''$.

**Завдання 3**. Замкнений полігон включає 9 ходів. Яка середня квадратична похибка обчислення периметра $P$ полігону, якщо похибка рівноточних вимірів довжин $S$ кожного ходу $m = 5$ см?

Розв'язування завдання.

Периметр полігону виражається сумою довжин його ходів: $P = F = \sum_{i=1}^{9} S_i$. Значення всіх частинних похідних такої функції рівні поміж собою: $(\frac{\partial F}{\partial S_i})_0 = 1$. За умови рівноточних вимірів довжин одержимо: $m_P = \sqrt{9(\frac{\partial F}{\partial S_i})_0^2 m_i^2} = 15$ (см). Так само, з формули середньої квадратичної похибки суми величин, які виміряні з рівною точністю, $m_P = m\sqrt{n} = 5\sqrt{9} = 15$ (см).

**Завдання 4**. Які середні квадратичні похибки суми і різниці довжин двох ліній, якщо першу виміряли з похибкою $m_1 = 8.9$ см, другу – з похибкою $m_2 = 8.1$ см ?

Розв'язування завдання.

Сума довжин ліній $S_1$ і $S_2$ – це функція $F = \Sigma = S_1 + S_2$. Для такої функції значення частинних похідних $(\frac{\partial F}{\partial S_1})_0 = (\frac{\partial F}{\partial S_2})_0 = 1$. Середня квадратична похибка $m_\Sigma = \sqrt{(\frac{\partial F}{\partial S_1})_0^2 m_1^2 + (\frac{\partial F}{\partial S_2})_0^2 m_2^2} = \sqrt{8.9^2 + 8.1^2} = 12$ (см).

Різниця довжин ліній $S_1$ і $S_2$ – це функція $F = \Delta = S_1 - S_2$. Частинні похідні такої функції: $(\frac{\partial F}{\partial S_1})_0 = 1$; $(\frac{\partial F}{\partial S_2})_0 = -1$. Середня квадратична похибка $m_\Delta = \sqrt{(\frac{\partial F}{\partial S_1})_0^2 m_1^2 + (\frac{\partial F}{\partial S_2})_0^2 m_2^2} = \sqrt{8.9^2 + 8.1^2} = 12$ (см).

Отже, значення суми і різниці довжин двох величин мають однакову середню квадратичну похибку.

**Завдання 5**. Прямокутні координати $x, y$ точки обчислили полярним способом відносно пункту геодезичної основи за виміряною довжиною лінії $s = 127.00$ м та дирекційним кутом $\alpha = 32°00'$. Які середні квадратичні похибки $m_x, m_y$ координат, якщо похибки $m_s = 0.03$ м та $m_\alpha = 1.5'$ ?

Розв'язування завдання.

Прямокутні координати $x, y$ виражаються функціями $x = x_{осн} + s \cdot \cos\alpha$, $y = y_{осн} + s \cdot \sin\alpha$, де $x_{осн}, y_{осн}$ – сталі координати пункту геодезичної основи. Координати є функціями незалежних величин $s$ та $\alpha$. Виражаємо середні квадратичні похибки функцій $x$ та $y$: $m_x = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial s})_0^2 m_s^2 + (\frac{\partial x}{\partial \alpha})_0^2 (\frac{m_\alpha}{\rho})^2}$ ; $m_y = \sqrt{(\frac{\partial y}{\partial s})_0^2 m_s^2 + (\frac{\partial y}{\partial \alpha})_0^2 (\frac{m_\alpha}{\rho})^2}$ . $m_\alpha$ має кутову міру, а $m_S$ та невідомі $m_x$ та $m_y$ лінійну. Тому кутову міру зводимо до лінійної діленням похибки $m_\alpha$ на сталу величину, яка виражає кількість кутових одиниць в одному радіані $\rho' = 3437.7'$ (або $\rho'' = 206264.8''$, якщо похибка виражена секундами). Виражаємо значення частинних похідних функцій: $(\frac{\partial x}{\partial s})_0 = \cos\alpha = 0.8480$; $(\frac{\partial x}{\partial \alpha})_0 = -s \cdot \sin\alpha = -67.2997$; $(\frac{\partial y}{\partial s})_0 = \sin\alpha = 0.5299$; $(\frac{\partial y}{\partial \alpha})_0 = s \cdot \cos\alpha = 107.7021$.

Обчислюємо похибки: $m_x = \sqrt{0.8480^2 0.03^2 + (-67.2997)^2 (\frac{1.5}{3437.7})^2} = 0.04$ (м);

$m_y = \sqrt{0.5299^2 0.03^2 + 107.7021^2 (\frac{1.5}{3437.7})^2} = 0.05$ (м).

**Завдання 6**. Обчислити середню квадратичну похибку збільшення зорової труби з фокусною відстанню об'єктива $f_{об} = 40.0$ см і фокусною відстанню окуляра $f_{ок} = 1.5$ см, якщо середні квадратичні похибки $m_{f_{об}} = 0.2$ см і $m_{f_{ок}} = 0.01$ см.

Розв'язування завдання.

Збільшення зорової труби виражає функція $V = \frac{f_{об}}{f_{ок}}$; $V = 26.7$. Виражаємо середню квадратичну похибку функції $m_V = \sqrt{(\frac{\partial V}{\partial f_{об}})_0^2 m_{f_{об}}^2 + (\frac{\partial V}{\partial f_{ок}})_0^2 m_{f_{ок}}^2}$ і частинні похідні $\frac{\partial V}{\partial f_{об}} = \frac{1}{f_{ок}}$ та $\frac{\partial V}{\partial f_{ок}} = -\frac{f_{об}}{f_{ок}^2}$. Середня квадратична похибка збільшення зорової труби $m_V = \sqrt{\frac{m_{f_{об}}^2}{f_{ок}^2} + \frac{f_{об}^2}{f_{ок}^4} m_{f_{ок}}^2} = 0.23$. Отже, $V = 26.7 \pm 0.23$.

**Завдання 7**. Яка середня квадратична похибка перевищення, яке обчислили методом тригонометричного нівелювання за виміряними відстанню $D = 172.0$ м, кутом нахилу $\vartheta = 2°30'$, висотою приладу $i = 1.67$ м і висотою наведення $v = 1.0$ м, якщо середні квадратичні похибки вимірів відповідно складають $m_D = 0.5$ м, $m_\vartheta = 1'$, $m_i = 0.01$ м, $m_v = 1$ мм?

Розв'язування завдання.

В тригонометричному методі нівелювання перевищення обчислюють за функцією $h = \frac{1}{2} D \sin 2\vartheta + i - v$. Виражаємо середню квадратичну похибку перевищення: $m_h = \sqrt{(\frac{\partial h}{\partial D})_0^2 m_D^2 + (\frac{\partial h}{\partial \vartheta})_0^2 (\frac{m_\vartheta}{\rho'})^2 + (\frac{\partial h}{\partial i})_0^2 m_i^2 + (\frac{\partial h}{\partial v})_0^2 m_v^2}$.

Враховуючи частинні похідні функції, похибки аргументів і сталу $\rho' = 3437.7'$, $m_h = \sqrt{\frac{\sin^2 2\vartheta}{4} m_D^2 + D^2 \cos^2 2\vartheta (\frac{m_\vartheta}{\rho'})^2 + m_i^2 + m_v^2} = 0.055$ (м).

**Завдання 8**. Гранична відносна середня квадратична похибка довжин ліній теодолітного ходу $\frac{m}{s}=\frac{1}{2000}$. З якою похибкою потрібно вимірювати лінію довжиною $s\approx 200$ м в одному напрямі?

Розв'язування завдання.

За граничною відносною похибкою $\frac{m}{s}$ обчислюємо відповідну граничну середню квадратичну похибку $m$ для лінії довжиною $s\approx 200$ м із співвідношення $\frac{m}{200}=\frac{1}{2000}$: $m=0.1$ м. Обидві похибки характеризують точність кінцевого значення довжини, яке виражається функцією результатів вимірів у прямому $s_{пр}$ і зворотному $s_{зв}$ напрямах як середнє арифметичне $s=\frac{1}{2}(s_{пр}+s_{зв})$. Виражаємо граничну середню квадратичну похибку такої функції: $m^2=(\frac{\partial s}{\partial s_{пр}})_0^2 m_{s_{пр}}^2+(\frac{\partial s}{\partial s_{зв}})_0^2 m_{s_{зв}}^2$. Допустимо, що виміри в обох напрямах буде виконано з однаковою точністю. Тоді $m_{s_{пр}}=m_{s_{зв}}=m_s$, $s_{пр}\approx s_{зв}=s_{вим}$ і $m^2=2(\frac{\partial s}{\partial s_{вим}})_0^2 m_s^2$. Граничну похибку виміру в одному напрямі $m_s$ можна визначити за принципом рівного впливу похибки $m$ на похибки $m_s$: $m_s=\frac{m}{\left|(\frac{\partial s}{\partial s_{вим}})_0\right|\sqrt{2}}$. Враховуючи значення $(\frac{\partial s}{\partial s_{вим}})_0=\frac{1}{2}$, одержимо $m_s=0.14$ м або $\frac{m_s}{s}=\frac{0.14}{200}\approx\frac{1}{1400}$. Отже, щоб при вимірах лінії довжиною $s\approx 200$ м забезпечити граничну відносну середню квадратичну похибку $\frac{1}{2000}$, потрібно виконувати виміри в одному напрямі з граничною середньою квадратичною похибкою $m_s=\pm 0.14$ м або відповідною граничною відносною похибкою $\frac{m_s}{s}\approx\frac{1}{1400}$.

**Завдання 9**. З якими граничними похибками потрібно вимірювати довжину похилої лінії $D\approx 200$ м та кут її ухилу $\vartheta\approx 10^\circ$, щоб забезпечити граничну середню квадратичну похибку $m_s=0.1$ м для горизонтального прокладання цієї лінії ?

Розв'язування завдання.

Горизонтальне прокладання лінії обчислюють з використанням функції $s=D\cos\vartheta$. Виражаємо середню квадратичну похибку горизонтального прокладання: $m_s^2 = (\frac{\partial s}{\partial D})_0^2 m_D^2 + (\frac{\partial s}{\partial \vartheta})_0^2 (\frac{m_\vartheta}{\rho'})^2$. Значення частинних похідних $(\frac{\partial s}{\partial D})_0 = \cos\vartheta = 0.9848$, $(\frac{\partial s}{\partial \vartheta})_0 = -D\sin\vartheta = -34.7296$.

Якщо змоделювати умови вимірів величин $D$ та $\vartheta$ згідно принципу рівного впливу похибки $m_s$ на похибки $m_D$ і $m_\vartheta$, то одержимо наступні результати: 1) гранична середня квадратична похибка виміру довжини $m_D = \frac{m_s}{\left|(\frac{\partial s}{\partial D})_0\right|\sqrt{2}} = 0.072$ (м) і відповідна гранична відносна похибка $\frac{m_D}{D} \approx \frac{1}{2800}$; 2) з врахуванням сталої $\rho' = 3437.7'$ гранична середня квадратична похибка виміру кута ухилу $m_\vartheta = \frac{m_s \rho'}{\left|(\frac{\partial s}{\partial \vartheta})_0\right|\sqrt{2}} = 7'$. Результати обчислень показують явне порушення співвідношення точності вимірів величин $D$ та $\vartheta$: похибка виміру кута задовольняє умовам технічної точності вимірів кутів і за абсолютною величиною достатньо велика, тоді як гранична похибка виміру довжини лінії мала і досягнути її приладами технічної точності складно. Отже, принцип рівного впливу для вирішення завдання неприйнятний.

Для досягнення оптимального вирішення завдання доцільно змоделювати умови вимірів згідно принципу пропорційного впливу з такого розрахунку, щоб граничну похибку виміру кута зменшити, а похибку виміру довжини лінії збільшити. Для цього потрібно встановити відповідні коефіцієнти пропорційності. Наприклад, поставимо умову, щоб гранична відносна похибка виміру довжини дорівнювала $\frac{m_D}{D} = \frac{1}{2000}$. За такої умови середня квадратична похибка $m_D = m_s = 0.1$ м. У відповідності до принципу пропорційного розподілу похибки функції на похибки вимірів аргументів $m_D = \frac{K_D m_0}{\left|(\frac{\partial s}{\partial D})_0\right|}$, де $K_D -$ коефіцієнт впливу виміру довжини лінії на точність функції; $m_0 = \frac{m_s}{\sqrt{2}} = 0.0707$ (м) – середній вплив похибок вимірів величин $D$ та $\vartheta$ на точність функції. На такій основі $K_D = \frac{\left|(\frac{\partial s}{\partial D})_0\right| m_D}{m_0} = 1.4$. За обраного підходу до вирішення завдання необхідно дотримуватись вимоги

$m_s = m_0\sqrt{K_D^2 + K_\vartheta^2}$. З цієї рівності виражаємо коефіцієнт $K_\vartheta$ впливу виміру кута ухилу на точність функції: $K_\vartheta = \sqrt{\dfrac{m_s^2 - m_0^2 K_D^2}{m_0^2}} = \sqrt{2 - K_D^2} = 0.2$. Тепер гранична середня квадратична похибка виміру кута ухилу лінії $m_\vartheta = \dfrac{K_\vartheta m_0 \rho'}{\left|(\dfrac{\partial s}{\partial \vartheta})_0\right|} = 1.4'$. Одержані за таким принципом граничні похибки вимірів довжини похилої лінії і кута ухилу лінії задовольняють умовам технічної точності вимірів величин.

**Питання для самоконтролю**

1. Якими критеріями користуються для оцінки точності величин?
2. Що називають істинною похибкою виміру?
3. Що називають середньою квадратичною похибкою виміру?
4. Що називають граничною похибкою виміру?
5. Що називають відносною похибкою виміру?
6. Як обчислити середню квадратичну похибку функції залежних і незалежних виміряних величин ?
7. Як розрахувати точність виміру величин при заданій точності їх функції за принципом рівного впливу?
8. Як розрахувати точність виміру величин при заданій точності їх функції за принципом пропорційного впливу?

## 2. МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА РІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ВЕЛИЧИНИ

Рівноточними вимірами окремої фізичної величини називають однорідні виміри, які проведено в абсолютно однакових умовах: одним і тим же приладом або приладами рівної точності, одним чи рівнозначними методами вимірів, однаковим числом прийомів чи станцій і за будь-яких інших рівних умов. Результати рівноточних вимірів, як правило, відрізняються поміж собою. Тому з точки зору числових оцінок точності вони мають різні істинні похибки, проте завжди характеризуються однією, однаковою для всіх, середньою квадратичною похибкою.

Допустимо, проведено $n$ рівноточних вимірів величини $X$ і одержано результати $x_1,...,x_n$ з середніми квадратичними похибками $m_1 = ... = m_n = m$. У ході математичної обробки результатів вимірів потрібно визначити найбільш надійне значення величини таке, яке було б найбільш близьким до істинного, а також обчислити середні квадратичні похибки вимірів і найбільш надійного значення.

Після вибраковування результатів вимірів з грубими похибками точність вимірюваної величини залежатиме від впливу систематичних та випадкових похибок. Випадкові похибки зумовлюють відхилення результатів вимірів від їх математичного сподівання. Систематичні похибки зумовлюють відхилення математичного сподівання від істинного значення величини. Відхилення математичного сподівання від істинного значення у ході обробки результатів вимірів зменшити неможливо. З цієї причини систематичні похибки вилучають з результатів у ході виконання вимірів шляхом введення необхідних поправок. Звільнені від грубих та систематичних похибок результати вимірів дають змогу визначити математичне сподівання. Беручи до уваги закон великих чисел теорії ймовірностей (теорема Чебишева), найкращим наближенням до математичного сподівання за результатами рівноточних вимірів величини є середнє арифметичне цих результатів. Отже, за умови відсутності в результатах вимірів систематичних похибок, математичне сподівання є найкращим наближенням до істинного значення величини. Його називають найбільш надійне значення $\tilde{x}$ і обчислюють за принципом простої арифметичної середини як середнє арифметичне результатів вимірів:

$$\tilde{x} = \frac{[x]}{n}.$$

Принцип простої арифметичної середини полягає в тому, що гранично за умови необмежено великої кількості вимірів і за умови відсутності в результатах систематичних похибок проста арифметична середина $\tilde{x}$ прямує за ймовірністю до істинного значення $X$ величини: $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x} = X$. В деяких практичних задачах $\tilde{x}$ обчислюють за еквівалентною формулою

$$\tilde{x} = x_{\min} + \frac{[\varepsilon]}{n},$$

де $x_{\min}$ – найменший з результатів вимірів $x_i$; $\varepsilon_i = x_i - x_{\min}$.

Основним критерієм точності вимірів за умови відомого істинного значення $X$ величини є істинні похибки $\theta_i = x_i - X$. Істинні похибки – це центровані результати вимірів величини. Відтак, виходячи з сукупності результатів вимірів, за їх істинними похибками можна розрахувати середню квадратичну похибку $m$ рівноточних вимірів за формулою

$$m = \sqrt{\frac{[\theta^2]}{n}}.$$

Дана формула тотожна формулі характеристики середнього квадратичного відхилення (стандарту) $\sigma$ розподілу випадкової величини, якою оперують у теорії ймовірностей і математичній статистиці. Її називають формула Гаусса.

За умови невідомого істинного значення величини оцінити точність результатів вимірів зазначеними формулами неможливо. Тоді істинне значення замінюють найбільш надійним $\tilde{x}$ і в основу оцінки точності покладають відхилення $v_i = x_i - \tilde{x}$, а середню квадратичну похибку $m$ вимірів наближено оцінюють за формулою

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$

Її називають формулою Бесселя для обчислення середньої квадратичної похибки рівноточних вимірів за відхиленнями результатів вимірів від простої арифметичної середини.

Відхилення $v_i$ мають наступні властивості, якими можна скористатись для контролю виконання проміжних розрахунків:

1. Алгебраїчна сума відхилень $v_i$ за будь-якої кількості вимірів дорівнює нулю: $[v]=0$. Здебільшого обчислене значення $\tilde{x}$ доводиться заокруглювати. Якщо при обчисленні $v_i$ користувались заокругленим значенням $\tilde{x}_{окр}$ і має місце абсолютна похибка заокруглення $\Delta = \tilde{x} - \tilde{x}_{окр}$, то $[v] = n\Delta$.
2. Сума квадратів відхилень $v_i$ мінімальна і завжди менша від суми квадратів відхилень тих же результатів вимірів від будь-якої іншої величини $x'$, яка не дорівнює $\tilde{x}$: $[v^2] = \min < [\varepsilon^2]$, де $\varepsilon_i = x_i - x'$; $x' \neq \tilde{x}$. Ця властивість посвідчує, що проста арифметична середина у порівнянні з будь-якою іншою величиною є найбільш надійним значенням рівноточних результатів вимірів. З властивості слідує рівняння, яке використовують для контролю обчислення $[v^2]$: $[v^2] = [\varepsilon^2] - \dfrac{[\varepsilon]^2}{n}$.

Проста арифметична середина – це функція незалежних результатів вимірів $x_1,...,x_n$: $\tilde{x} = F(x_1,...,x_n)$. Беручи до уваги формулу оцінки точності функцій виміряних величин $m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial x_i})_0^2 \cdot m_i^2$ і умову рівності похибок вимірів $m_1 = ... = m_n = m$, для середньої квадратичної похибки $m_{\tilde{x}} = m_F = M$ простої арифметичної середини одержимо формулу

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Середня квадратична похибка $M$ є істинною похибкою простої арифметичної середини $\tilde{x}$ як найбільш надійного значення величини. Значення $\tilde{x}$ лише наближено виражає істинне значення величини $X$. Похибку заміни невідомого істинного значення простою арифметичною серединою можна оцінити шляхом побудови довірчого інтервалу $I_\beta$ при заданій довірчій імовірності $\beta \to 1$, використовуючи $\tilde{x}$ та $M$:

$$I_\beta = (\tilde{x} - t_\beta M; \tilde{x} + t_\beta M) .$$

Коефіцієнт $t_\beta$ визначають з таблиць розподілу Стьюдента за ймовірністю $\beta$ і числом ступенів свободи $r = n - 1$ (див. таблицю додатку 1). При кількості вимірів $n \ge 20$ розподіл Стьюдента мало відрізняється від нормального закону розподілу і $t_\beta$ визначають як аргумент нормальної функції розподілу на основі формули $t_\beta = \arg \Phi^*(\frac{1+\beta}{2})$ (див. таблицю додатку 2). Довірчий інтервал $I_\beta$ визначає границі, в яких з ймовірністю $\beta$ знаходиться невідоме істинне значення величини $X$: $\tilde{x} - t_\beta M \le X \le \tilde{x} + t_\beta M$ .

При великій кількості вимірів $n$ середні квадратичні похибки вимірів $m$ та найбільш надійного значення $M$ обчислюються достатньо надійно. На практиці здебільшого кількість вимірів обмежена порядком $n = 10 \div 20$ . В таких випадках похибки $m$ та $M$ є ненадійними і в достатній мірі неточними. Тому при математичній обробці результатів за кількістю вимірів $n < 20$ рекомендується виконувати оцінку точності середніх квадратичних похибок $m$ та $M$ . Для цього обчислюють середні квадратичні похибки $m_m$ та $m_M$ значень середніх квадратичних похибок $m$ та $M$:

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} ; \qquad m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}} .$$

**Хід роботи**

Під час виконання роботи виконується математична обробка результатів багаторазових рівноточних вимірів величини.

**Завдання**. В результаті рівноточних вимірів одержано ряд значень величини. Необхідно виконати математичну обробку результатів: 1)визначити найбільш надійне значення величини; 2)розрахувати середню квадратичну похибку результатів вимірів; 3)розрахувати середню квадратичну похибку найбільш надійного значення; 4)побудувати довірчий інтервал для істинного значення величини при довірчій імовірності $\beta = 0.95$; 5)оцінити точність обчислення середніх квадратичних похибок.

**Вхідні дані** для виконання завдання зведено до таблиці додатку 3. З таблиці за номером групи U потрібно вибрати підряд $n$=12 результатів вимірів величини, розпочинаючи з номера варіанта $N$. Для різних груп у таблиці задано результати вимірів наступних величин: U=1 – відмітка точки земної поверхні; U=2 – горизонтальний кут; U=3 – довжина лінії; U=4 – вертикальний кут; U=5 – перевищення.

**Приклад розв'язування завдання**. Допустимо, задано *n*=12 результатів рівноточних вимірів кута. Вхідні дані та результати проміжних розрахунків поміщено у таблиці:

| № вимірів | Результати вимірів | $\varepsilon_i$ | $\varepsilon_i^2$ | $v_i$ | $v_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $34^\circ 43'$ | 3 | 9 | - 0.2 | 0.04 |
| 2 | 46 | 6 | 36 | 2.8 | 7.84 |
| 3 | 43 | 3 | 9 | -0.2 | 0.04 |
| 4 | 45 | 5 | 25 | 1.8 | 3.24 |
| 5 | 40 | 0 | 0 | -3.2 | 10.24 |
| 6 | 42 | 2 | 4 | -1.2 | 1.44 |
| 7 | 45 | 5 | 25 | 1.8 | 3.24 |
| 8 | 44 | 4 | 16 | 0.8 | 0.64 |
| 9 | 41 | 1 | 1 | -2.2 | 4.84 |
| 10 | 44 | 4 | 16 | 0.8 | 0.64 |
| 11 | 43 | 3 | 9 | -0.2 | 0.04 |
| 12 | 42 | 2 | 4 | -1.2 | 1.44 |
| $\sum$ | – | 38 | 154 | -0.4 | 33.68 |

1. Найбільш надійне значення кута обчислюємо за формулою простої арифметичної середини $\tilde{x} = x_{\min} + \frac{[\varepsilon]}{n}$: $x_{\min} = 34^\circ 40'$; $\varepsilon_i = x_i - x_{\min}$; $\tilde{x} = 34^\circ 43.16667'$; $\tilde{x}_{окр} = 34^\circ 43.2'$; абсолютна похибка заокруглення $\Delta = \tilde{x} - \tilde{x}_{окр} = -0.03333$.

2. Середню квадратичну похибку *m* рівноточних результатів вимірів кута обчислюємо за формулою Бесселя $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$, де $v_i = x_i - \tilde{x}_{окр}$. Виконуємо контроль проміжних розрахунків: 1) $n\Delta = -0.4 = [v]$; 2) $[\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} = 33.68 = [v^2]$. Остаточно одержимо середню квадратичну похибку $m = \pm 1.7'$.

3. Середню квадратичну похибку *M* простої арифметичної середини обчислюємо за формулою $M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm 0.49'$. Отже, найбільш надійне значення вимірюваного кута $\tilde{x} = 34^\circ 43.2' \pm 0.49'$.

4. Довірчий інтервал для істинного значення кута виражається формулою $I_\beta = (\tilde{x} - t_\beta M; \tilde{x} + t_\beta M)$. За умови, що *n*=12, значення коефіцієнта $t_\beta$ вибираємо з таблиці розподілу Стьюдента (додаток 1) за довірчою ймовірністю $\beta = 0.95$ та числом ступенів свободи $r = n - 1 = 11$: $t_\beta = 2.20$.

Одержимо довірчий інтервал $I_\beta = (34^\circ 42.1'; 34^\circ 44.3')$. Отже, з ймовірністю $\beta = 0.95$ можна стверджувати, що істинне значення $X$ вимірюваного кута задовольняє нерівності $34^\circ 42.1' \le X \le 34^\circ 44.3'$.

5. Оцінку точності середніх квадратичних похибок $m$ і $M$ виконуємо за формулами $m_m \approx \dfrac{m}{\sqrt{2(n-1)}}$ і $m_M \approx \dfrac{M}{\sqrt{2(n-1)}}$: $m_m = \pm 0.36'$; $m_M = \pm 0.10'$. Отже, середня квадратична похибка результатів вимірів кута $m = 1.7' \pm 0.36'$, середня квадратична похибка найбільш надійного значення кута $M = 0.49' \pm 0.10'$.

**Питання для самоконтролю**

1. Які результати вимірів називають рівно точними ?
2. Як виражають найбільш надійне значення рівноточних вимірів величини?
3. В чому полягає принцип простої арифметичної середини?
4. Які властивості мають відхилення результатів вимірів від простої арифметичної середини? Яке практичне застосування цих властивостей?
5. Як обчислити середню квадратичну похибку результатів рівноточних вимірів величини?
6. Як обчислити середню квадратичну похибку найбільш надійного значення рівноточних вимірів величини?
7. Як побудувати довірчий інтервал для істинного значення величини?
8. Як оцінити точність середніх квадратичних похибок, обчислених за сукупністю результатів вимірів величини? Коли така оцінка точності виконується?
9. Яка черговість і зміст математичної обробки рівноточних вимірів величини?

## 2. МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ВЕЛИЧИНИ

Нерівноточними називають однорідні результати багатократних вимірів величини приладами різної точності, різними методами, різною кількістю прийомів чи станцій і за будь-яких інших різних умов. З точки зору числових оцінок точності нерівноточними є результати вимірів, які мають різні як істинні, так і середні квадратичні похибки. Якщо з $n$ проведених вимірів одержано результати $x_i$ $(i = \overline{1, n})$, то з точки зору числових оцінок точності їх називають нерівноточними, якщо відповідні результатам середні квадратичні похибки $m_i$ різняться поміж собою: $m_1 \ne m_2 \ne \ldots \ne m_n$. У ході математичної обробки результатів нерівноточних вимірів величини потрібно визначити її найбільш надійне значення таке, яке було б найбільш близьким до істинного, і обчислити похибки вимірів та похибку найбільш надійного значення.

За умови відсутності в результатах вимірів $x_i$ систематичних похибок їх точність визначається лише випадковими похибками, які підпорядковуються нормальному законові розподілу. За такої умови істинне значення величини $X$ замінюють найбільш надійним значенням $\tilde{x}$, яке за ймовірністю є найбільш близьким до істинного і ототожнюється з математичним сподіванням $M[X]$. $M[X]$ відповідає найбільшому значенню ймовірності сукупності результатів вимірів цієї величини. Це слідує з функції щільності нормального закону $f(x_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - M[X])^2}{2\sigma_i^2}}$; $\sigma_i$ – середні квадратичні відхилення вимірів. Максимум $\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}$ функції $f(x_i)$ досягається при найменшому значенні показника степені $\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - M[X])^2}{2\sigma_i^2}$. Максимум функції $f(x_i)$ відповідає центру нормального розподілу, яким є математичне сподівання $M[X]$, як це графічно відображено на рис. 4.

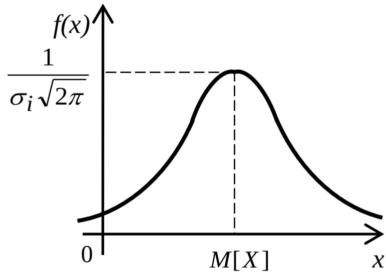


Рис. 4. Графік функції щільності нормального закону розподілу

Таким чином, найбільшу ймовірність сукупності результатів вимірів $x_i$ можна одержати лише за умови мінімуму функції $F = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - M[X])^2}{2\sigma_i^2} = \min$. Беручи до уваги, що $\sigma_i = m_i$, а $M[X]$ ототожнюється з $\tilde{x}$, $F = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \tilde{x})^2}{2m_i^2} = \min$. Розв’язок задачі можливий, якщо частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial x_i} = [2\frac{x - \tilde{x}}{m^2}] = [x\frac{c}{m^2}] - \tilde{x}[\frac{c}{m^2}] = 0$, де $c = const$ – довільний додатній коефіцієнт пропорційності. Отже,

$$\tilde{x} = \frac{[x\frac{c}{m^2}]}{[\frac{c}{m^2}]}, \qquad \tilde{x} = \frac{[xp]}{[p]}.$$

Величина $\tilde{x}$ – це найбільш надійне значення нерівноточних вимірів величини, яке виражається за принципом загальної арифметичної середини і обчислюється як середнє вагове. В деяких практичних задачах $\tilde{x}$ зручно обчислювати за еквівалентною формулою

$$\tilde{x} = x_{\min} + \frac{[p\varepsilon]}{[p]},$$

де $x_{\min}$ – найменший з результатів вимірів $x_i$; $\varepsilon_i = x_i - x_{\min}$. Відношення $p_i = \frac{c}{m_i^2}$ називаються ваги нерівноточних результатів вимірів.

Ваги вимірів – це безрозмірні показники ступеню довіри до результатів нерівноточних вимірів величини. З такого визначення слідує, що більшим за числовим значенням вагам вимірів відповідає вища точність вимірів (або менша середня квадратична похибка). Тому ваги і середні квадратичні похибки пов'язані оберненою пропорційною залежністю. На практиці часто середні квадратичні похибки вимірів невідомі, але аналіз умов вимірів дає підстави вважати одержані результати нерівноточними. Тоді ваги вимірів встановлюють за існуючими підставами і в кожному конкретному випадку при обчисленні ваг враховують, як саме зміна тих чи інших умов впливає на точність результатів вимірів.

Деякі типові приклади обчислення ваг нерівноточних вимірів:

– кут виміряли різною кількістю прийомів $k_i$ .Збільшення $k_i$ зумовлює підвищення точності одержаних результатів, тому ваги вимірів потрібно обчислювати з прямої залежності до кількості прийомів: $p_i = \frac{k_i}{c}$;
– перевищення виміряли різною кількістю станцій $K_i$. Збільшення $K_i$ зумовлює зниження точності результатів вимірів перевищення, тому ваги вимірів потрібно обчислювати з оберненої залежності до кількості станцій: $p_i = \frac{c}{K_i}$;
– перевищення виміряли за ходами різної довжини $s_i$. Збільшення довжини ходу зумовлює зниження точності результатів вимірів, тому ваги потрібно обчислювати з оберненої залежності до довжин ходів: $p_i = \frac{c}{s_i}$.

Вибір коефіцієнта $c$ не змінює кінцевих результатів обробки вимірів. Він відіграє роль коефіцієнта пропорційності. Принципово важливим є не порядок ваг, а їх взаємні співвідношення поміж собою. Коефіцієнт $c$

рекомендують обирати з такого розрахунку, щоб ваги були близькими до одиниці – це спрощує виконання подальших розрахунків.

Допустимо, деяка величина $F$ обчислена за результатами нерівноточних вимірів $x_i$ з використанням функції загального вигляду $F = f(x_1,...,x_n)$. Якщо аргументи функції залежні між собою і така залежність виражається коефіцієнтом кореляції $r_{ij}$, то середня квадратична похибка функції $m_F$ з урахуванням похибок аргументів $m_i$ виражається формулою $m_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_i})_0^2 m_i^2 + 2\sum_{i<j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})_0(\frac{\partial f}{\partial x_j})_0 \cdot r_{ij} m_i m_j}$; $(\frac{\partial f}{\partial x_i})_0$ – значення частинних похідних функції. Беручи до уваги вираження ваг аргументів $p_i = \frac{1}{m_i^2}$, для оберненої ваги функції одержимо формулу

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_i})_0^2 \frac{1}{p_i} + 2\sum_{i<j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})_0(\frac{\partial f}{\partial x_j})_0 \frac{r_{ij}}{\sqrt{p_i p_j}}.$$

За умови незалежних аргументів $\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_i})_0^2 \frac{1}{p_i}$.

Загальна арифметична середина $\tilde{x}$ є функція результатів незалежних нерівноточних вимірів $x_i$: $\tilde{x} = \frac{[xp]}{[p]} = \frac{x_1 p_1 + ... + x_n p_n}{[p]} = F$. Застосовуючи до неї формулу обчислення оберненої ваги функції незалежних результатів вимірів, одержимо: $\frac{1}{P_F} = \frac{1}{P_{\tilde{x}}} = \frac{p_1^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_1} + ... + \frac{p_n^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_n} = \frac{1}{[p]^2}(p_1 + ... + p_n) = \frac{1}{[p]}$.

Звідси $P_{\tilde{x}} = [p]$: вага загальної арифметичної середини як найбільш надійного значення нерівноточних вимірів дорівнює сумі ваг вимірів.

Якщо за формулою загальної арифметичної середини обчислювати найбільш надійне значення результатів рівноточних вимірів, то $\tilde{x} = \frac{[x]}{n}$. Це зумовлено тим, що середні квадратичні похибки і ваги рівноточних вимірів рівні поміж собою і при вагах $p_1 = p_2 = ... = p_n = 1$ одержимо $[p] = n$. Отже, проста арифметична середина є частковим випадком загальної арифметичної середини. Вагу простої арифметичної середини можна обчислити за її середньою квадратичною похибкою *M*: $P = \frac{c}{M^2}$. Беручи до уваги, що $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$, $P = \frac{cn}{m^2}$. Вагу рівноточного виміру виражає формула $p = \frac{c}{m^2}$, тому $P = np$, тобто вага простої арифметичної середини в *n* разів більша від ваги одного рівноточного результату виміру. З цього слідує, що вага загальної арифметичної середини $P_{\tilde{x}}$ дорівнює сумі ваг нерівноточних вимірів: $P_{\tilde{x}} = [p]$.

Виділимо посеред результатів нерівноточних вимірів $x_i$ деяке значення $x_k$, в якого вага дорівнює одиниці: $p_k = 1$. Середню квадратичну похибку $m_k$ такого результату позначують $\mu$. Якщо при виборі коефіцієнта пропорційності $c$ накласти умову $c = \mu^2$, то $p_k = \dfrac{\mu^2}{m_k^2} = 1$ і $\mu = m_k = \sqrt{c}$. Величину $\mu$ називають середня квадратична похибка одиниці ваги – це похибка результатів нерівноточних вимірів, в яких вага дорівнює одиниці. Беручи до уваги, що загалом $p_i = \dfrac{c}{m_i^2}$, одержимо $\mu = m_i \sqrt{p_i}$, звідки

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}},$$

тобто середня квадратична похибка $m_i$ результату виміру $x_i$ виражається через середню квадратичну похибку одиниці ваги $\mu$ і вагу $p_i$ відповідного результату. Для середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини

$$m_{\tilde{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{P_{\tilde{x}}}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}.$$

Останні визначення посвідчують наступне: середню квадратичну похибку одиниці ваги при оцінюванні точності нерівноточних вимірів потрібно обчислювати завжди незалежно від того, чи є серед вимірів результати з вагою, яка дорівнює одиниці, чи такі результати відсутні.

За умови відомого істинного значення $X$ вимірюваної величини можна оцінити істинні похибки нерівноточних результатів вимірів $\theta_i = x_i - X$ і на їх основі середню квадратичну похибку одиниці ваги

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\theta^2]}{n}}.$$

Ця формула називається формула Гаусса. Вона є узагальненням формули Гаусса для оцінювання похибок результатів рівноточних вимірів і еквівалентна формулі характеристики середнього квадратичного відхилення (стандарту) $\sigma$ розподілу випадкової величини, якою оперують у теорії ймовірностей і математичній статистиці.

За умови невідомого істинного значення величини його замінюють найбільш надійним $\tilde{x}$ і в основу оцінки точності покладають відхилення

$v_i = x_i - \tilde{x}$, а середню квадратичну похибку одиниці ваги $\mu$ наближено оцінюють з врахуванням ваг вимірів $p_i$ за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}\ .$$

Її називають формула Бесселя для обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за відхиленнями результатів вимірів від загальної арифметичної середини. Вона є узагальненням формули Бесселя для оцінювання похибок результатів рівноточних вимірів.

Відхилення $v_i$ мають наступні властивості, якими можна скористатись для контролю виконання проміжних розрахунків:

1. За будь-якої кількості вимірів алгебраїчна сума добутків відхилень $v_i$ на відповідні ваги $p_i$ дорівнює нулю: $[pv] = 0$. Якщо при обчисленні $v_i$ користувались заокругленим значенням загальної арифметичної середини $\tilde{x}_{окр}$ і абсолютна похибка заокруглення $\Delta = \tilde{x} - \tilde{x}_{окр}$, то $[pv] = \Delta[p]$.
2. Сума добутків квадратів відхилень $v_i$ на відповідні ваги $p_i$ мінімальна і завжди менша від суми добутків квадратів відхилень тих же результатів вимірів від будь-якої іншої величини $x'$, яка не дорівнює $\tilde{x}$, на ваги відповідних вимірів $p_i$: $[pv^2] = \min < [p\varepsilon^2]$, де $\varepsilon_i = x_i - x'$; $x' \neq \tilde{x}$. Ця властивість посвідчує, що загальна арифметична середина у порівнянні з будь-якою іншою величиною є найбільш надійним значенням нерівноточних результатів вимірів. З властивості слідує рівняння, яке використовують для контролю обчислення $[pv^2]$: $[pv^2] = [p\varepsilon^2] - \dfrac{[p\varepsilon]^2}{[p]}$.

Середня квадратична похибка *M* є істинною похибкою загальної арифметичної середини $\tilde{x}$ як найбільш надійного значення величини. Значення $\tilde{x}$ лише наближено виражає істинне значення величини *X*. Використовуючи $\tilde{x}$ та *M*, можна визначити похибку заміни *X* на $\tilde{x}$ шляхом побудови довірчого інтервалу $I_\beta = (\tilde{x} - t_\beta M; \tilde{x} + t_\beta M)$ при заданій довірчій імовірності $\beta \to 1$, як це розкрито у завданні 2. Довірчий інтервал $I_\beta$ виражає точність істинного значення величини і з довірчою ймовірністю $\beta$ окреслює діапазон його можливих значень.

При великій кількості вимірів *n* середні квадратичні похибки одиниці ваги $\mu$, вимірів $m_i$ та найбільш надійного значення *M* обчислюються достатньо надійно. Якщо кількість вимірів обмежена порядком $n = 10 \div 20$, то зазначені середні квадратичні похибки є ненадійними і в достатній мірі неточними. В такому випадку рекомендується виконувати оцінку точності обчислених середніх квадратичних похибок $\mu$, $m_i$ та $M$. Для цього обчислюють відповідні середні квадратичні похибки $m_\mu$, $m_{m_i}$ та $m_M$ аналогічно тому, як це розкрито у завданні 2, наприклад, $m_\mu \approx \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}$.

### Хід роботи

Під час виконання роботи виконується математична обробка результатів багаторазових нерівноточних вимірів величини.

**Завдання**. В результаті нерівноточних вимірів одержано ряд значень величини. Необхідно виконати математичну обробку результатів, зокрема визначити найбільш надійне значення величини, розрахувати середні квадратичні похибки результатів вимірів, розрахувати середню квадратичну похибку найбільш надійного значення, побудувати довірчий інтервал для істинного значення величини при довірчій імовірності $\beta = 0.9$, оцінити точність обчислення середніх квадратичних похибок.

**Вхідні дані** для виконання завдання зведено до таблиці додатку 4. З таблиці за номером групи U потрібно вибрати підряд $n$=12 результатів вимірів величини, розпочинаючи з номера варіанта $N$. Для різних груп у таблиці задано результати вимірів наступних величин: U=1 – горизонтальний кут $\beta$ і середні квадратичні похибки вимірів $m_i$; U=2 – відмітка точки земної поверхні $H$ та середні квадратичні похибки вимірів $m_i$; U=3 – горизонтальний кут $\beta$ і кількість прийомів вимірів $k_i$; U=4 – перевищення $h$ та кількість станцій вимірів $K_i$; U=5 – горизонтальний кут $\beta$ і середні квадратичні похибки вимірів $m_i$.

**Приклад розв'язування завдання**. Допустимо, задано $n$=6 результатів нерівноточних вимірів кута $\beta$ і кількість прийомів вимірів $k_i$. Вхідні дані та результати проміжних розрахунків поміщено у таблиці:

| Результати вимірів | | | Результати розрахунків | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № | $x_i$ | $k_i$ | $p_i$ | $\varepsilon_i$ | $p_i\varepsilon_i$ | $p_i\varepsilon_i^2$ | $v_i$ | $p_iv_i$ | $p_iv_i^2$ |
| 1 | $89^\circ 47' 16''$ | 12 | 4 | 0 | 0 | 0 | -4.6 | -18.4 | 84.64 |
| 2 | 19 | 18 | 6 | 3 | 18 | 54 | -1.6 | - 9.6 | 15.36 |
| 3 | 26 | 6 | 2 | 10 | 20 | 200 | +5.4 | +10.8 | 58.32 |
| 4 | 21 | 15 | 5 | 5 | 25 | 125 | +0.4 | + 2.0 | 0.80 |
| 5 | 23 | 9 | 3 | 7 | 21 | 147 | +2.4 | + 7.2 | 17.28 |
| 6 | 28 | 3 | 1 | 12 | 12 | 144 | +7.4 | + 7.4 | 54.76 |
| Σ | - | - | 21 | - | 96 | 670 | - | -0.6 | 231.16 |

1. Обчислення ваг вимірів. Нерівноточність результатів вимірів кута виражається різною кількістю прийомів $k_i$. За таких умов вимірів ваги обчислюються з прямо пропорційної залежності до кількості прийомів: $p_i = \frac{k_i}{c}$. Коефіцієнт пропорційності $c$ приймаємо, наприклад, рівним найменшому значенню $k_i$. За такого вибору коефіцієнта, вага $p_6 = 1$.

2. Обчислення найбільш надійного значення кута виконуємо за формулою загальної арифметичної середини $\tilde{x} = x_{\min} + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}$: $x_{\min} = 89^\circ 47' 16''$; $\varepsilon_i = x_i - x_{\min}$; $\tilde{x} = 89^\circ 47' 20.5714285''$; $\tilde{x}_{окр} = 89^\circ 47' 20.6''$; абсолютна похибка заокруглення найбільш надійного значення $\Delta = \tilde{x} - \tilde{x}_{окр} = -0.0285715''$.

3. Обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги виконуємо за формулою Бесселя $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$, де $v_i = x_i - \tilde{x}_{окр}$. Контроль проміжних розрахунків: 1) $\Delta[p] = -0.6 = [pv]$; 2) $[p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]} = 231.15 \approx [pv^2]$. Остаточно $\mu = \sqrt{\frac{231.16}{6-1}} = \pm 6.8''$. Середня квадратична похибка одиниці ваги характеризує точність результату виміру кута, в якого вага дорівнює одиниці. Оскільки $p_6 = 1$, то $x_6 = 89^\circ 47' 28'' \pm 6.8''$.

4. Розрахунок середніх квадратичних похибок вимірів кута виконуємо за формулою $m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}$. У підсумку одержуємо: $x_1 = 89^\circ 47' 16'' \pm 3.4''$; $x_2 = 89^\circ 47' 19'' \pm 2.8''$; $x_3 = 89^\circ 47' 26'' \pm 4.8''$; $x_4 = 89^\circ 47' 21'' \pm 3.0''$; $x_5 = 89^\circ 47' 23'' \pm 3.9''$; $x_6 = 89^\circ 47' 28'' \pm 6.8''$.

5. Обчислення середньої квадратичної похибки найбільш надійного значення кута: $M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm 1.48''$. Отже, $\tilde{x} = 89^\circ 47' 20.6'' \pm 1.48''$.

6. Побудова довірчого інтервалу $I_\beta = (\tilde{x} - t_\beta M; \tilde{x} + t_\beta M)$ для істинного значення кута. При $n < 20$ значення параметра $t_\beta$ вибираємо з таблиці розподілу Стьюдента (додаток 1) за довірчою ймовірністю $\beta = 0.9$ та числом ступенів свободи $r = n - 1 = 5$: $t_\beta = 2.02$. Отже, $I_\beta = (89^\circ 47' 17.6''; 89^\circ 47' 23.6'')$.

7. Розрахунок точності середніх квадратичних похибок одиниці ваги $\mu$ та найбільш надійного значення $M$: $m_{\mu} \approx \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \pm 2.15''$; $m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}} = \pm 0.47''$. Отже, $\mu = 6.8'' \pm 2.15''$, $M = 1.48'' \pm 0.47''$.

**Питання для самоконтролю**

1. Які результати вимірів називають нерівноточними ?
2. Як визначити найбільш надійне значення нерівноточних вимірів величини?
3. В чому полягає принцип загальної арифметичної середини ?
4. Що таке вага виміру величини? Як визначити ваги вимірів ?
5. Як визначити вагу функції результатів вимірів? Які ваги мають проста і загальна арифметична середина ?
6. Який зміст терміну середня квадратична похибка одиниці ваги? Як обчислити середню квадратичну похибку одиниці ваги ?
7. Які властивості мають відхилення результатів вимірів від загальної арифметичної середини? Яке практичне застосування мають ці властивості ?
8. Як обчислити середні квадратичні похибки нерівноточних вимірів величини?
9. Як обчислити середню квадратичну похибку найбільш надійного значення нерівноточних вимірів величини ?
10. Як побудувати довірчий інтервал для істинного значення величини ?
11. Як оцінити точність середніх квадратичних похибок, обчислених за сукупністю результатів вимірів величини ?

## 4. ОБРОБКА ПОДВІЙНИХ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ОДНОРІДНИХ ВЕЛИЧИН

Подвійними вимірами $n$ однорідних фізичних величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ називають виміри, які виконано двічі для кожної з цих величин:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перший вимір величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$;

$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ – другий вимір величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

У практиці виконання подвійних вимірів мають місце наступні випадки:

1) усі виміри $x_i$ та $x'_i$ в сукупності рівноточні;
2) виміри в парах $x_i$ та $x'_i$ для кожної величини $X_i$ рівноточні, але пари вимірів величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ між собою нерівноточні;
3) усі виміри $x_i$ та $x'_i$ в сукупності нерівноточні.

За результатами математичної обробки результатів вимірів цих величин необхідно визначити найбільш надійні значення величин і оцінити точність вимірів та найбільш надійних значень.

Результати подвійних вимірів $x_i$ та $x_i'$ називаються рівноточними в сукупності, якщо середні квадратичні похибки $m_{x_i}$ та $m_{x_i'}$ всіх вимірів рівні поміж собою: $m_{x_i} = m_{x_i'} = m$.

Найбільш надійні значення $\tilde{x}_i$ кожної з рівноточно виміряних величин виражає проста арифметична середина: їх обчислюють як середні арифметичні значення за парами подвійних вимірів величини $x_i$ та $x_i'$:

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i + x_i'}{2}.$$

Кожне із значень $\tilde{x}_i$ є функцією результатів вимірів $x_i$ та $x_i'$: $\tilde{x}_i = F(x, x')$. Використовуючи формулу оцінювання точності функцій незалежних результатів вимірів $m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial x_i})_0^2 m_i^2$, для середньої квадратичної похибки $m_{\tilde{x}} = m_F$ одержимо:

$$m_{\tilde{x}} = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Оцінювання точності вимірів кожної однорідної величини окремо за двома одержаними результатами формально можна виконати за правилами, як це розкрито у темі 2. Проте показники точності, розраховані лише за двома вимірами, будуть суб'єктивними і ненадійними, позаяк за такого підходу порушуються засади закону великих чисел. Тому ця частина математичної обробки виконується за сукупністю усіх результатів, виходячи з різниць подвійних вимірів кожної величини

$$d_i = x_i - x_i'.$$

Якби було б можливо виконати виміри безпомилково, то результати вимірів кожної величини були б рівними і різниці $d_i$ дорівнювали б нулю. Фактично $d_i$ завжди набувають певних числових значень, що є наслідком впливу на виміри похибок різного походження. Тому кожне значення $d_i$ є істинною похибкою самої різниці. На цій основі середню квадратичну похибку $m_d$ різниць $d_i$ виражає формула Гаусса:

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}.$$

Формулою Гаусса можна користуватись для обчислення $m_d$ тільки за умови відсутності в результатах подвійних вимірів систематичних похибок. Практично вона може бути використана і в тих випадках, коли їх вплив на результати вимірів є допустимим.

Основна частина систематичних похибок вимірів компенсується при обчисленні різниць $d_i$. Проте це не забезпечує їх повного видалення. Середнє значення залишкового впливу систематичних похибок рівноточних вимірів можна оцінити за величиною $\frac{[d]}{n} = \delta$. Якщо результати подвійних вимірів обтяжені залишковим впливом систематичних похибок, то $\delta \neq 0$. Істотність такого впливу дає змогу оцінити нерівність $|\delta| \leq \frac{1}{5} m_d$ або рівносильна щодо неї $|[d]| \leq 0.25[|d|]$. Якщо умова однієї чи іншої нерівності виконується, то залишковий вплив систематичних похибок несуттєвий і ним можна нехтувати. Лише за такої умови подальше оцінювання точності ґрунтується на формулі Гаусса.

В протилежному випадку формулою Гаусса користуватись неприпустимо, позаяк це спричинює обчислення завищених значень числових оцінок точності. Тому насамперед систематичні похибки потрібно видалити з результатів подвійних вимірів.

Загалом систематичним похибкам властивий постійний або односторонній характер. За умови подвійних рівноточних вимірів однорідних величин систематичні похибки спричинюють на виміри постійний вплив, не змінюючи свій знак і абсолютну величину. Тому їх можна видалити за принципом рівномірного розподілу шляхом відніманням від різниць $d_i$ середнього значення залишкового систематичного впливу $\delta$:

$$d_i' = d_i - \delta .$$

$d_i'$ – це різниці подвійних рівноточних вимірів, які позбавлені впливу постійних систематичних похибок. При будь-якій кількості вимірів $[d'] = 0$.

Обчислені на таких умовах значення різниць $d_i'$ – це відхилення результатів рівноточних вимірів від простої арифметичної середини $\delta$. Тому після видалення систематичних похибок середня квадратична похибка різниць $m_d$ підлягає обчисленню за формулою Бесселя

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}} .$$

Якщо при обчисленні різниць $d_i'$ користувались заокругленим значенням $\delta_{окр}$ і $d_i' = d_i - \delta_{окр}$, то має місце похибка заокруглення $\Delta = \delta - \delta_{окр}$ і тоді $[d'] = n\Delta$. Різниці $d_i'$, як відхилення результатів подвійних рівноточних вимірів від простої арифметичної середини, мають властивість $[d'^2] = \min$. Тому $[d'^2] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n}$. Останніми рівностями можна користуватись для контролю проміжних розрахунків при визначенні середньої квадратичної похибки різниць подвійних вимірів за формулою Бесселя.

Різниці $d_i = x_i - x_i'$ обчислюються за результатами вимірів $x_i$ та $x_i'$. Отже, $d_i$ є функціями результатів вимірів: $d_i = F(x_i, x_i')$. На такій основі середню квадратичну похибку $m_d$ можна виразити, ґрунтуючись на формулі оцінювання точності функцій незалежних результатів вимірів $m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial x_i})_0^2 m_i^2$ : $m_F^2 = m_d^2 = m_x^2 + m_{x'}^2$. Беручи до уваги, що $m_{x_i} = m_{x_i'} = m$, $m_d = m\sqrt{2}$. Звідси для середньої квадратичної похибки подвійних рівноточних незалежних вимірів одержимо:

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}}; \qquad m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}.$$

Середня квадратична похибка різниць $m_d$ обчислюється за формулами Гаусса або Бесселя, що визначається фактом відсутності чи наявності в результатах подвійних вимірів систематичних похибок.

Якщо різниці $d_i = x_i - x_i'$ є функціями $d_i = F(x_i, x_i')$ залежних результатів вимірів $x_i$ та $x_i'$ і цю залежність виражає коефіцієнт кореляції $r_{i,j} = r_{x,x'}$, то середню квадратичну похибку різниць $m_d$ потрібно виражати, ґрунтуючись на формулі оцінювання точності функцій залежних результатів вимірів $m_F^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial x_i})_0^2 m_i^2 + 2\sum_{i<j} (\frac{\partial F}{\partial x_i})_0 (\frac{\partial F}{\partial x_j})_0 r_{i,j} m_i m_j$. Тоді $m_F^2 = m_d^2 = m_x^2 + m_{x'}^2 - 2 m_x m_{x'} r_{x,x'}$ і, беручи до уваги, що $m_{x_i} = m_{x_i'} = m$, $m_d^2 = 2m^2 - 2m^2 r_{x,x'} = 2m^2(1 - r_{x,x'})$. Звідси для середньої квадратичної похибки подвійних рівноточних залежних вимірів одержимо:

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2(1 - r_{x,x'})}}; \qquad m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n(1 - r_{x,x'})}}.$$

Отже, середню квадратичну похибку подвійних рівноточних вимірів $m$ і середню квадратичну похибку найбільш надійних значень $m_{\tilde{x}}$ однорідних величин розраховують за похибкою різниць подвійних вимірів $m_d$. Для вираження $m_d$ попередньо потрібно перевірити допустимість впливу на результати вимірів систематичних похибок. За умови відсутності у вимірах систематичних похибок значення $m_d$ розраховують за формулою Гаусса; у протилежному випадку систематичні похибки видаляють з різниць подвійних вимірів і значення $m_d$ розраховують за формулою Бесселя.

Черговість дій при виконанні математичної обробки результатів подвійних вимірів однорідних величин, які рівноточні в сукупності, розкриває схема на рис. 5.

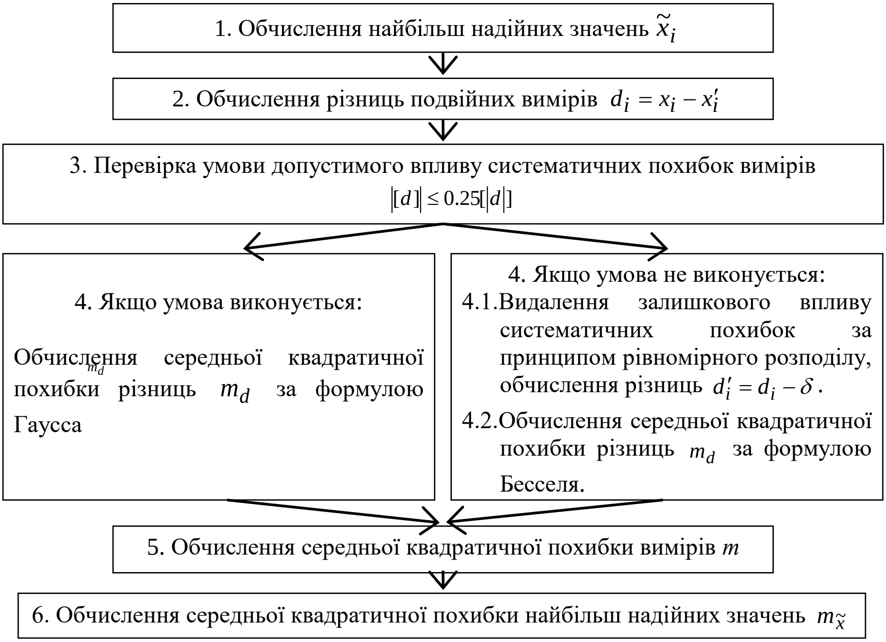


Рис. 5. Черговість дій при виконанні математичної обробки результатів подвійних вимірів однорідних величин, які рівноточні в сукупності

## Хід роботи

Під час виконання роботи виконується математична обробка результатів подвійних вимірів однорідних величин, які рівноточні в сукупності.

**Завдання**. Перевищення вздовж нівелірного полігону вимірювали в $n$ секціях однакової довжини при двох горизонтах приладу в кожній секції. За результатами подвійних рівноточних вимірів перевищень в секціях потрібно визначити найбільш надійні значення перевищень і середні квадратичні похибки вимірів та найбільш надійних значень перевищень.

**Вхідні дані** для виконання завдання зведено до таблиці додатку 5. З таблиці за номером групи U потрібно вибрати підряд $n$=12 результатів подвійних вимірів перевищень, розпочинаючи з номера варіанта $N$.

**Приклад розв'язування завдання**. Допустимо, задано результати подвійних вимірів перевищень в $n$=6 секціях нівелірного полігону. Вхідні дані та результати проміжних розрахунків поміщено у таблиці:

| Результати вимірів | | | Результати розрахунків | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № | $h_i$ (мм) | $h'_i$ (мм) | $\tilde{h}_i$ (мм) | $d_i$ | $\lvert d_i \rvert$ | $d_i^2$ | $d'_i$ | $d_i'^2$ |
| 1 | - 1370 | - 1373 | - 1371.5 | +3 | 3 | 9 | +1.7 | 2.89 |
| 2 | + 102 | + 101 | + 101.5 | +1 | 1 | 1 | -0.3 | 0.09 |
| 3 | +2184 | + 2180 | +2182.0 | +4 | 4 | 16 | +2.7 | 7.29 |
| 4 | +1219 | + 1219 | +1219.0 | 0 | 0 | 0 | -1.3 | 1.69 |
| 5 | - 153 | - 154 | - 153.5 | +1 | 1 | 1 | -0.3 | 0.09 |
| 6 | - 864 | - 863 | - 863.5 | - 1 | 1 | 1 | -2.3 | 5.29 |
| Σ | - | - | - | +8 | 10 | 28 | +0.2 | 17.34 |

1. Найбільш надійні значення подвійних рівноточних вимірів перевищень в секціях розраховуємо як середні арифметичні одержаних результатів у кожній парі вимірів за формулою $\tilde{h}_i = \dfrac{h_i + h'_i}{2}$ .

2. Обчислюємо різниці $d_i = h_i - h'_i$ результатів подвійних вимірів перевищень у кожній секції.

3. Перевіряємо допустимість впливу на виміри систематичних похибок за умовою нерівності $\lvert[d]\rvert \le 0.25[\lvert d \rvert]$: $\lvert[d]\rvert = 8$ мм; $[\lvert d \rvert] = 10$ мм; $\lvert[d]\rvert > 0.25[\lvert d \rvert]$. Умова нерівності не виконується. Отже, подвійні виміри перевищень надміру обтяжені систематичними похибками, які потрібно видаляти з одержаних результатів.

4. Оскільки перевищення вимірювались у секціях однакової довжини, то виявлені систематичні похибки мають постійний характер. Для їх видалення з результатів вимірів виражаємо середнє значення залишкового систематичного впливу $\delta = \dfrac{[d]}{n}$ : $\delta = 1.33333$ мм; $\delta_{окр} = 1.3$ мм.; абсолютна похибка заокруглення $\Delta = \delta - \delta_{окр} = 0.03333$ мм. Обчислюємо різниці подвійних вимірів $d'_i = d_i - \delta_{окр}$ і суму $[d'^2]$. Результати контролюємо наступними умовами: 1) $n\Delta = 0.2 = [d']$; 2) $[d^2] - \dfrac{[d]^2}{n} = 17.34 = [d'^2]$. Умови контролів виконуються. Насамкінець обчислюємо середню квадратичну похибку різниць $m_d$ за формулою Бесселя: $m_d = \sqrt{\dfrac{[d'^2]}{n-1}} = \pm 1.9$ мм.

5. Обчислюємо середню квадратичну похибку $m$ подвійних рівноточних вимірів перевищень в кожній секції нівелірного полігону: $m = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \pm 1.3$ мм.

6. Обчислюємо середню квадратичну похибку $m_{\tilde{h}}$ найбільш надійних значень подвійних рівноточних вимірів перевищень в секціях нівелірного полігону: $m_{\tilde{h}} = \frac{m}{\sqrt{2}} = \pm 0.95$ мм.

**Питання для самоконтролю**

1. Які виміри називають подвійними ?
2. Які результати подвійних вимірів називають рівноточними в сукупності ?
3. Як обчислити найбільш надійні значення подвійних рівноточних вимірів однорідних величин ?
4. Чому оцінку точності виконують тільки за сукупністю різниць подвійних вимірів всіх однорідних величин ?
5. Як і в яких випадках середню квадратичну похибку різниць подвійних вимірів обчислюють за формулами Гаусса та Бесселя ?
6. Як визначити допустимість впливу на подвійні рівноточні виміри систематичних похибок ?
7. Як видалити з результатів подвійних рівноточних вимірів систематичні похибки ?
8. Як обчислити середню квадратичну похибку подвійних рівноточних вимірів однорідних величин ?
9. Як обчислити середню квадратичну похибку найбільш надійних значень подвійних рівноточних вимірів однорідних величин ?
10. Яка мета і черговість математичної обробки подвійних рівноточних вимірів однорідних величин ?

## 5. ОБРОБКА ПОДВІЙНИХ НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ОДНОРІДНИХ ВЕЛИЧИН

Допустимо, результати $x_1, x_2, ..., x_n$ та $x'_1, x'_2, ..., x'_n$ подвійних вимірів $n$ однорідних фізичних величин $X_1, X_2, ..., X_n$ в парах $x_i$ та $x'_i$ для кожної величини $X_i$ рівноточні, але пари вимірів величин між собою нерівноточні. За таких умов, з точки зору точності, в кожній парі вимірів середні квадратичні похибки рівні: $m_{x_i} = m_{x'_i} = m_i$. Але між парами вимірів $m_1 \neq m_2 \neq ... \neq m_n$. Якщо $p_{x_i} = p_{x'_i} = p_i -$ вага кожного з подвійних вимірів окремої величини $X_i$, то ваги пар вимірів різняться поміж собою: $p_1 \neq p_2 \neq ... \neq p_n$. Ваги $p_i$ подвійних нерівноточних вимірів однорідних величин виражають за тими чи іншими ознаками залежно від зміни умов проведення вимірів.

Мета виконання математичної обробки одержаних на таких умовах результатів незмінна – необхідно визначити найбільш надійні значення величин і оцінити точність вимірів та найбільш надійних значень.

В основу оцінювання точності покладено різниці $d_i = x_i - x_i'$ подвійних вимірів кожної величини, які є функціями результатів вимірів: $d_i = F(x_i, x_i')$. На такій основі ваги $p_{d_i}$ різниць можна виразити за формулою оцінювання точності функцій виміряних величин $\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial x_i})_0^2 \frac{1}{p_i}$: $\frac{1}{P_F} = \frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} + \frac{1}{p_{x_i'}} = \frac{2}{p_i}$, звідки $p_{d_i} = \frac{p_i}{2}$.

Найбільш надійні значення $\tilde{x}_i$ величин $X_i$, кожна з яких виміряна двічі на умовах рівноточності, обчислюють за принципом простої арифметичної середини як середнє арифметичне з результатів вимірів $x_i$ та $x_i'$:

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i + x_i'}{2} .$$

Беручи до уваги, що значення $\tilde{x}_i$ є функціями результатів вимірів $\tilde{x}_i = F(x_i, x_i')$, на основі тієї ж формули оцінювання точності функцій виміряних величин $\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial x_i})_0^2 \frac{1}{p_i}$ для ваг $p_{\tilde{x}_i}$ одержимо наступне: $\frac{1}{P_F} = \frac{1}{p_{\tilde{x}_i}} = \frac{1}{4p_{x_i}} + \frac{1}{4p_{x_i'}} = \frac{1}{2p_i}$. Звідси $p_{\tilde{x}_i} = 2p_i$ або $p_{\tilde{x}_i} = 4p_{d_i}$. Одержаний результат дає змогу оцінити середні квадратичні похибки найбільш надійних значень формулами

$$m_{\tilde{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{\tilde{x}_i}}}, \quad \text{або} \quad m_{\tilde{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}, \quad \text{або} \quad m_{\tilde{x}_i} = \frac{\mu}{2\sqrt{p_{d_i}}},$$

де $\mu$ – середня квадратична похибка одиниці ваги.

Раніше було обґрунтовано, що в умовах подвійних вимірів $x_i$ та $x_i'$ кожна різниця $d_i = x_i - x_i'$ – це істинна похибка самої різниці. На цій основі середня квадратична похибка одиниці ваги $\mu$ може бути виражена формулою Гаусса

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d^2]}{n}} \qquad \text{або} \qquad \mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}} .$$

Якщо різниці $d_i$ є функціями залежних результатів подвійних вимірів $x_i$ та $x_i'$ і цю залежність виражає коефіцієнт кореляції $r_{x,x'}$, то

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n(1-r_{x,x'})}} .$$

Формулою Гаусса у будь-якому з її поданих тут різновидів можна користуватись для обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за умови відсутності в результатах подвійних вимірів систематичних похибок або якщо їх вплив на результати вимірів є допустимим.

Загалом, основна частина систематичних похибок вимірів компенсується при обчисленні різниць $d_i$. Проте це не забезпечує їх повного видалення. Середнє значення залишкового впливу систематичних похибок нерівноточних вимірів за умов $p_{x_i} = p_{x_i'} = p_i$ і $p_1 \neq p_2 \neq \ldots \neq p_n$ можна оцінити за величиною загальної арифметичної середини $\delta = \frac{[p_d d]}{[p_d]}$. Якщо результати подвійних вимірів обтяжені залишковим впливом систематичних похибок, то $\delta \neq 0$. Істотність такого впливу дає змогу оцінити нерівність $|\delta| \leq \frac{1}{5}\mu$ або рівносильна щодо неї $\left|[d\sqrt{p_d}]\right| \leq 0.25[|d\sqrt{p_d}|]$. Якщо умова однієї чи іншої нерівності виконується, то залишковий вплив систематичних похибок несуттєвий і ним можна нехтувати. Лише за такої умови подальше оцінювання точності ґрунтується на формулі Гаусса. В протилежному випадку формула Гаусса спричинює обчислення завищених значень числових оцінок точності. Тому насамперед систематичні похибки потрібно видалити з результатів подвійних вимірів.

При нерівноточних подвійних вимірах однорідних величин систематичні похибки спричинюють на виміри односторонній вплив, не змінюючи свій знак, але змінюючи абсолютну величину при зміні умов вимірів. Тому в цьому випадку систематичні похибки потрібно видаляти за принципом пропорційного розподілу шляхом відніманням від різниць $d_i$ поправок $\delta_i$:

$$d_i - \delta_i = d_i' .$$

При обчисленні поправок $\delta_i$ потрібно проводити ретельний аналіз умов вимірів з метою встановлення факторів, які спричинюють односторонній вплив систематичних похибок. Залежно від таких факторів систематична похибка розподіляється у виміри диференційовано. Наприклад, при подвійних вимірах довжин ліній $s_i$ різного порядку $\delta_i = \frac{[d]}{[\tilde{s}]}\tilde{s}_i$, де $\tilde{s}_i$ – найбільш надійні значення подвійних вимірів довжин ліній. При подвійних вимірах перевищень в нівелірних ходах різної довжини $\delta_i = \frac{[d]}{[S]}S_i$, де $S_i$ – довжини нівелірних ходів. При подвійних вимірах перевищень в ходах з різним числом штативів (станцій) $\delta_i = \dfrac{[d]}{[k]} k_i$, де $k_i$ – число штативів відповідного ходу. На практиці залежно від умов проведення подвійних вимірів мають місце й інші фактори, які зумовлюють односторонній вплив систематичних похибок. В поданих формулах відношення $\dfrac{[d]}{[\tilde{s}]} = \delta_\circ$, $\dfrac{[d]}{[S]} = \delta_\circ$ або $\dfrac{[d]}{[k]} = \delta_\circ$ є сталою величиною для одержаного ряду подвійних вимірів. Величину $\delta_\circ$ називають коефіцієнтом залишкового систематичного впливу. З врахування поправок $\delta_i$ обчислені значення $d'_i$ – це різниці подвійних вимірів, які позбавлені залишкового впливу односторонніх систематичних похибок. При будь-якій кількості вимірів $[p_d d'] = 0$.

З іншого боку, обчислені на таких умовах значення різниць $d'_i$ – це відхилення результатів нерівноточних вимірів від загальної арифметичної середини $\delta$. Тому після видалення з результатів подвійних нерівноточних вимірів систематичних похибок середню квадратичну похибку одиниці ваги $\mu$ обчислюють за формулою Бесселя

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d'^2]}{n-1}} \qquad \text{або} \qquad \mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}}.$$

Якщо при обчисленні різниць $d'_i$ користувались заокругленим значенням $\delta_{окр}$ і $d'_i = d_i - \delta_{окр}$, то має місце абсолютна похибка заокруглення $\Delta = \delta - \delta_{окр}$ і тоді $[p_d d'] = \Delta[p_d]$. Різниці $d'_i$, як відхилення результатів подвійних нерівноточних вимірів від загальної арифметичної середини, мають властивість $[p_d d'^2] = \min$. Тому $[p_d d'^2] = [p_d d^2] - \dfrac{[p_d d]^2}{[p_d]}$. Останні рівності використовують для проміжних контролів при обчисленні середньої квадратичної похибки одиниці ваги $\mu$ за формулою Бесселя.

Після визначення середньої квадратичної похибки одиниці ваги, використовуючи формули Гаусса або Бесселя, розраховують похибки $m_i$ відповідних результатів подвійних вимірів $x_i$ та $x'_i$:

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}} \qquad \text{або} \qquad m_i = \frac{\mu}{\sqrt{2p_{d_i}}}.$$

Черговість дій при виконанні математичної обробки результатів подвійних вимірів однорідних величин, які в парах $x_i$ та $x'_i$ для кожної величини $X_i$ рівноточні, але пари вимірів величин $X_1, X_2, ..., X_n$ між собою нерівноточні, розкриває схема на рис. 6.

1. Обчислення найбільш надійних значень $\widetilde{x}_i$

2. Обчислення різниць подвійних вимірів $d_i = x_i - x_i'$

3. Обчислення ваг вимірів $p_i$ і ваг різниць $p_{d_i}$

4. Перевірка умови допустимого впливу систематичних похибок вимірів
$$\left|[d\sqrt{p_d}]\right| \le 0.25[\left|d\sqrt{p_d}\right|]$$

5. Якщо умова виконується:

Обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги $\mu$ за формулою Гаусса

5. Якщо умова не виконується:

5.1. Видалення залишкового впливу систематичних похибок за принципом пропорційного розподілу, обчислення різниць $d_i' = d_i - \delta_i$.

5.2. Обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги $\mu$ за формулою Бесселя.

6. Обчислення середніх квадратичних похибок вимірів $m_i$

7. Обчислення середніх квадратичних похибок найбільш надійних значень $m_{\widetilde{x}_i}$

Рис. 6. Черговість дій при виконанні математичної обробки результатів подвійних вимірів однорідних величин, які в парах для кожної величини рівноточні, але пари вимірів величин між собою нерівноточні

Допустимо, усі результати $x_1, x_2, ..., x_n$ та $x_1', x_2', ..., x_n'$ подвійних вимірів *n* однорідних фізичних величин $X_1, X_2, ..., X_n$ нерівноточні в сукупності. Хоча у практиці проведення польових геодезичних робіт такі виміри зустрічаються рідко, проте можуть бути одержані, якщо виконані в неоднакових умовах і мають різні середні квадратичні похибки $m_{x_i}$ та $m_{x_i'}$, тобто $m_{x_i} \ne m_{x_i'}$. Ваги таких вимірів також різні: $p_{x_i} \ne p_{x_i'}$.

Оцінку точності вимірів теж виконують за сукупністю різниць $d_i = x_i - x_i'$. Вага $p_{d_i}$ кожної різниці виражається як вага функції $d_i = F(x_i, x_i')$ результатів незалежних нерівноточних вимірів $x_i$ та $x_i'$ за формулою оцінювання точності функцій виміряних величин $\frac{1}{P_F}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial F}{\partial x_i})_0^2\frac{1}{p_i}$:

$\frac{1}{p_{d_i}}=\frac{1}{p_{x_i}}+\frac{1}{p_{x'_i}}=\frac{p_{x_i}+p_{x'_i}}{p_{x_i}p_{x'_i}}$, звідки $p_{d_i}=\frac{p_{x_i}p_{x'_i}}{p_{x_i}+p_{x'_i}}$.

Якщо подвійні виміри обтяжені лише допустимими систематичними похибками, то середню квадратичну похибку одиниці ваги розраховують за формулою Гаусса:

$$\mu=\sqrt{\frac{[p_d d^2]}{n}}.$$

Якщо подвійні виміри містять значні односторонні систематичні похибки і вони попередньо видалені з різниць $d_i$ за принципом пропорційного розподілу, то середню квадратичну похибку одиниці ваги розраховують за формулою Бесселя:

$$\mu=\sqrt{\frac{[p_d d'^2]}{n-1}}.$$

Тут $d'_i=d_i-\delta_i$ – це різниці подвійних вимірів, які позбавлені залишкового впливу односторонніх систематичних похибок. Допустимість впливу систематичних похибок перевіряють нерівністю $\left|[d\sqrt{p_d}]\right|\le 0.25[\left|d\sqrt{p_d}\right|]$.

Середні квадратичні похибки кожного з подвійних вимірів $x_i$ чи $x'_i$ виражають з урахуванням відповідних їм ваг $p_{x_i}$ чи $p_{x'_i}$:

$$m_{x_i}=\frac{\mu}{\sqrt{p_{x_i}}};\qquad m_{x'_i}=\frac{\mu}{\sqrt{p_{x'_i}}}.$$

Найбільш надійні значення $\tilde{x}_i$ кожної з однорідних величин $X_i$ виражають за принципом загальної арифметичної середини (середнє вагове) як функції результатів нерівноточних вимірів $x_i$ та $x'_i$:

$$\tilde{x}_i=\frac{[xp]}{[p]}=\frac{x_i p_{x_i}+x'_i p_{x'_i}}{p_{x_i}+p_{x'_i}}.$$

Вага загальної арифметичної середини для кожної з однорідних величин $X_i$ дорівнює сумі ваг результатів нерівноточних вимірів цієї величини: $p_{\tilde{x}_i}=p_{x_i}+p_{x'_i}$. На цій основі, середні квадратичні похибки $m_{\tilde{x}_i}$ найбільш надійних значень $\tilde{x}_i$ виражають, враховуючи відповідні ваги $p_{\tilde{x}_i}$:

$$m_{\tilde{x}_i}=\frac{\mu}{\sqrt{p_{x_i}+p_{x'_i}}}.$$

## Хід роботи

Під час виконання роботи виконується математична обробка результатів подвійних вимірів однорідних величин, які в парах для кожної величини рівноточні, але пари вимірів величин між собою нерівноточні.

**Завдання**. Нівелірний полігон об'єднує *n* ходів. Для кожного ходу числом станцій (штативів) $k_i$ виміряли у прямому та зворотному напрямах перевищення $h_i$ та $h'_i$. За результатами подвійних рівноточних вимірів в ходах потрібно визначити найбільш надійні значення перевищень, середні квадратичні похибки вимірів та найбільш надійних значень перевищень.

**Вхідні дані** для виконання завдання зведено до таблиці додатку 6. З таблиці за номером групи U потрібно вибрати підряд *n*=12 результатів подвійних вимірів перевищень $h_i$ та $h'_i$ і число станцій $k_i$, розпочинаючи з номера варіанта *N*.

**Приклад розв'язування завдання**. Допустимо, задано результати подвійних вимірів перевищень в *n*=6 ходах нівелірного полігону. Вхідні дані та результати проміжних розрахунків поміщено у таблиці:

| Результати вимірів | | | | Результати розрахунків | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № | $h$ (мм) | $h'$ (мм) | $k$ | $\tilde{h}$ | $d$ | $p_d$ | $d\sqrt{p_d}$ | $\left\|d\sqrt{p_d}\right\|$ | $p_d d$ | $p_d d^2$ | $d'$ | $p_d d'$ | $p_d d'^2$ |
| 1 | - 1370 | - 1373 | 26 | - 1371.5 | +3 | 0.6 | +2.3 | 2.3 | +1.8 | 5.4 | +2.1 | +1.26 | 2.646 |
| 2 | + 102 | + 101 | 20 | + 101.5 | +1 | 0.8 | +0.9 | 0.9 | +0.8 | 0.8 | +0.1 | +0.08 | 0.008 |
| 3 | +2184 | + 2180 | 22 | +2182.0 | +4 | 0.7 | +3.3 | 3.3 | +2.8 | 11.2 | +3.1 | +2.17 | 6.727 |
| 4 | +1219 | + 1219 | 8 | +1219.0 | 0 | 2.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.9 | -1.80 | 1.620 |
| 5 | - 153 | - 154 | 12 | - 153.5 | +1 | 1.3 | +1.1 | 1.1 | +1.3 | 1.3 | +0.1 | +0.13 | 0.013 |
| 6 | - 864 | - 863 | 16 | - 863.5 | - 1 | 1.0 | -1.0 | 1.0 | -1.0 | 1.0 | -1.9 | -1.90 | 3.610 |
| Σ | - | - | - | - | - | 6.4 | +6.6 | 8.6 | +5.7 | 19.7 | - | -0.06 | 14.624 |

1. Найбільш надійні значення подвійних рівноточних вимірів перевищень кожного ходу розраховуємо як середні арифметичні одержаних результатів у кожній парі вимірів за формулою $\tilde{h}_i = \dfrac{h_i + h'_i}{2}$.

2. Обчислюємо різниці $d_i = h_i - h'_i$ результатів подвійних вимірів перевищень кожного ходу.

3. Обчислюємо ваги вимірів $p_i$ і ваги різниць $p_{d_i}$. За умовою завдання подвійні виміри перевищення кожного ходу рівноточні. Нівелювання ходів виконані різним числом станцій, отже виміри перевищень поміж ходами

нерівноточні. Позаяк збільшення числа станцій спричинює зниження точності результатів вимірів, то вага результату виміру перевищення кожного ходу виражається оберненою залежністю щодо числа станцій: $p_i = \frac{c}{k_i}$. $c$ – коефіцієнт пропорційності. Обчислюємо ваги різниць подвійних вимірів: $p_{d_i} = \frac{p_i}{2} = \frac{c}{k_i}$, де коефіцієнт пропорційності, наприклад, $c = 16$.

4. Перевіряємо допустимість впливу на виміри систематичних похибок за умовою нерівності $\left|[d\sqrt{p_d}]\right| \le 0.25[\left|d\sqrt{p_d}\right|]$: $\left|[d\sqrt{p_d}]\right| = 6.6$ мм; $[\left|d\sqrt{p_d}\right|] = 8.6$ мм; $\left|[d\sqrt{p_d}]\right| > 0.25[\left|d\sqrt{p_d}\right|]$. Умова нерівності не виконується. Отже, подвійні виміри перевищень надміру обтяжені систематичними похибками.

5. З метою видалення з результатів вимірів виявлених систематичних похибок виражаємо середнє значення залишкового систематичного впливу $\delta = \frac{[p_d d]}{[p_d]}$: $\delta = 0.890625$ мм; $\delta_{окр} = 0.9$ мм; абсолютна похибка заокруглення $\Delta = \delta - \delta_{окр} = -0.009375$ мм. Обчислюємо наближені значення різниць $d_i' = d_i - \delta_{окр}$ і суму $[p_d d'^2]$. Результати контролюємо наступними умовами: 1) $\Delta[p_d] = -0.06 = [p_d d']$; 2) $[p_d d^2] - \frac{[p_d d]^2}{[p_d]} = 14.623 \approx [p_d d'^2]$. Умови контролів виконуються. Насамкінець обчислюємо середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою Бесселя: $\mu = \sqrt{\frac{[p_d d'^2]}{n-1}} = \pm 1.7$ мм. $\mu$ – це середня квадратична похибка різниць, у яких вага дорівнює одиниці. Тому, оскільки $p_{d_6} = 1$, середня квадратична похибка $m_{d_6} = \pm 1.7$ мм.

6. Обчислюємо середні квадратичні похибки $m_i$ результатів вимірів перевищень кожного ходу за формулою $m_i = \frac{\mu}{\sqrt{2p_{d_i}}}$: $m_1 = \pm 1.6$ мм, … , $m_4 = \pm 0.8$ мм, … , $m_6 = \pm 1.2$ мм. Отже, перевищення у ходах виміряні з наступними середніми квадратичними похибками: $h_1 = -1370 \pm 1.6$ (мм); $h_1' = -1373 \pm 1.6$ (мм); … , $h_6 = -864 \pm 1.2$ (мм); $h_6' = -863 \pm 1.2$ (мм).

7. Обчислюємо середні квадратичні похибки найбільш надійних значень перевищень $\tilde{h}_i$ за формулою $m_{\tilde{h}_i} = \frac{\mu}{2\sqrt{p_{d_i}}}$: $m_{\tilde{h}_1} = \pm 1.1$ мм; … ,

$m_{\tilde{h}_4} = \pm 0.6$ мм; … , $m_{\tilde{h}_6} = \pm 0.8$ мм. Отже, $\tilde{h}_1 = -1371.5 \pm 1.1$ (мм); … , $\tilde{h}_4 = 1219.0 \pm 0.6$ (мм); … , $\tilde{h}_6 = -863.5 \pm 0.8$ (мм).

**Питання для самоконтролю**

1. Які результати подвійних вимірів однорідних величин називають нерівноточними ?
2. Як обчислюють найбільш надійні значення подвійних нерівноточних вимірів однорідних величин ?
3. Як і в яких випадках середню квадратичну похибку одиниці ваги обчислюють за формулами Гаусса та Бесселя ?
4. Як виявити вплив на подвійні нерівноточні виміри систематичних похибок ?
5. Як видалити з результатів подвійних нерівноточних вимірів систематичні похибки ?
6. Який зміст принципу пропорційного розподілу залишкового впливу систематичних похибок між результатами подвійних вимірів ?
7. Як розрахувати середні квадратичні похибки результатів подвійних нерівноточних вимірів однорідних величин ?
8. Як розрахувати середні квадратичні похибки найбільш надійних значень подвійних нерівноточних вимірів однорідних величин ?
9. Який зміст і черговість математичної обробки подвійних нерівноточних вимірів однорідних величин ?

**Література**


1. Видуев Н .Г., Григоренко А. Г. Математическая обработка геодезических измерений : навчальний посібник. Київ : Вища школа, 1978. 376 с.
2. Войтенко С. . Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів : навчальний посібник. Київ : КНУБА, 2003. 216 с.
3. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірів : підручник / Зазуляк П. М., Гавриш В. І., Євсєєва Е. М., Йосипчук М. Д. Львів: Растр-7, 2007. 408 с.

Додаток 1

Значення параметра розподілу Стьюдента $t_\beta$ залежно від $\beta$ та $n$-1

| $n$-1 \ $\beta$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 0.95 | 0.98 | 0.99 | 0.999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.158 | 0.325 | 0.510 | 0.727 | 1.000 | 1.376 | 1.963 | 3.08 | 6.31 | 12.71 | 31.8 | 63.7 | 636.6 |
| 2 | 142 | 289 | 445 | 617 | 0.816 | 1.061 | 336 | 1.886 | 2.92 | 4.30 | 6.96 | 9.92 | 31.6 |
| 3 | 137 | 277 | 424 | 584 | 765 | 0.978 | 250 | 638 | 2.35 | 3.18 | 4.54 | 5.84 | 12.94 |
| 4 | 134 | 271 | 414 | 569 | 741 | 941 | 190 | 533 | 2.13 | 2.77 | 3.75 | 4.60 | 8.61 |
| 5 | 132 | 267 | 408 | 559 | 727 | 920 | 156 | 476 | 2.02 | 57 | 3.36 | 4.03 | 6.86 |
| 6 | 132 | 265 | 404 | 553 | 718 | 906 | 134 | 440 | 1.943 | 45 | 3.14 | 3.71 | 5.96 |
| 7 | 130 | 263 | 402 | 549 | 711 | 896 | 119 | 415 | 895 | 36 | 3.00 | 50 | 5.40 |
| 8 | 130 | 262 | 399 | 546 | 706 | 889 | 108 | 397 | 860 | 31 | 2.90 | 36 | 5.04 |
| 9 | 129 | 261 | 398 | 543 | 703 | 883 | 100 | 383 | 833 | 26 | 82 | 25 | 4.78 |
| 10 | 129 | 260 | 397 | 542 | 700 | 879 | 093 | 372 | 812 | 23 | 76 | 17 | 4.59 |
| 11 | 0.129 | 0.260 | 0.396 | 0.540 | 0.697 | 0.876 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.20 | 2.72 | 3.11 | 4.49 |
| 12 | 128 | 259 | 395 | 539 | 695 | 873 | 083 | 356 | 782 | 18 | 68 | 3.06 | 32 |
| 13 | 128 | 259 | 394 | 538 | 694 | 870 | 079 | 350 | 771 | 16 | 65 | 3.01 | 22 |
| 14 | 128 | 258 | 393 | 537 | 692 | 868 | 076 | 345 | 761 | 14 | 62 | 2.98 | 14 |
| 15 | 128 | 258 | 393 | 536 | 691 | 866 | 074 | 341 | 753 | 13 | 60 | 95 | 07 |
| 16 | 128 | 258 | 392 | 535 | 690 | 865 | 071 | 337 | 746 | 12 | 58 | 92 | 4.02 |
| 17 | 128 | 257 | 392 | 534 | 689 | 863 | 069 | 333 | 740 | 11 | 57 | 90 | 3.96 |
| 18 | 127 | 257 | 392 | 534 | 688 | 862 | 067 | 330 | 734 | 10 | 55 | 88 | 92 |
| 19 | 127 | 257 | 391 | 533 | 688 | 861 | 066 | 328 | 729 | 09 | 54 | 86 | 88 |
| 20 | 127 | 257 | 391 | 533 | 687 | 860 | 064 | 325 | 725 | 09 | 53 | 84 | 85 |
| 21 | 0.127 | 0.257 | 0.391 | 0.532 | 0.686 | 0.859 | 1.063 | 1.323 | 1.721 | 2.08 | 2.52 | 2.83 | 3.82 |
| 22 | 127 | 256 | 390 | 532 | 686 | 858 | 061 | 321 | 717 | 07 | 51 | 82 | 79 |
| 23 | 127 | 256 | 390 | 532 | 685 | 858 | 060 | 319 | 714 | 07 | 50 | 81 | 77 |
| 24 | 127 | 256 | 390 | 531 | 685 | 857 | 059 | 318 | 711 | 06 | 49 | 80 | 74 |
| 25 | 127 | 256 | 390 | 531 | 684 | 856 | 058 | 316 | 708 | 06 | 48 | 79 | 72 |
| 26 | 127 | 256 | 390 | 531 | 684 | 856 | 058 | 315 | 706 | 06 | 48 | 78 | 71 |
| 27 | 127 | 256 | 389 | 531 | 684 | 855 | 057 | 314 | 703 | 05 | 47 | 77 | 69 |
| 28 | 127 | 256 | 389 | 530 | 683 | 855 | 056 | 313 | 701 | 05 | 47 | 76 | 67 |
| 29 | 127 | 256 | 389 | 530 | 683 | 854 | 055 | 311 | 699 | 04 | 46 | 76 | 66 |
| 30 | 127 | 256 | 389 | 530 | 683 | 854 | 055 | 310 | 697 | 04 | 46 | 75 | 65 |
| 40 | 0.126 | 0.255 | 0.388 | 0.529 | 0.681 | 0.851 | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.02 | 2.42 | 2.70 | 3.55 |
| 60 | 126 | 254 | 387 | 527 | 679 | 848 | 046 | 296 | 671 | 2.00 | 39 | 66 | 46 |
| 120 | 126 | 254 | 386 | 526 | 677 | 845 | 041 | 289 | 658 | 1.98 | 36 | 62 | 37 |
| $\infty$ | 0.126 | 0.253 | 0.385 | 0.524 | 0.674 | 0.842 | 1.036 | 1.282 | 1.645 | 1.96 | 2.33 | 2.58 | 3.29 |

Додаток 2

Значення нормальної функції розподілу $\Phi^*(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

| $t$ | $\Phi^*(t)$ | $t$ | $\Phi^*(t)$ | $t$ | $\Phi^*(t)$ | $t$ | $\Phi^*(t)$ | $t$ | $\Phi^*(t)$ | $t$ | $\Phi^*(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.5000 | 0.40 | 0.6554 | 0.80 | 0.7881 | 1.20 | 0.8849 | 1.60 | 0.9452 | 2.00 | 0.9772 |
| 0.01 | 5040 | 0.41 | 6591 | 0.81 | 7910 | 1.21 | 8869 | 1.61 | 9463 | 2.10 | 9821 |
| 0.02 | 5080 | 0.42 | 6628 | 0.82 | 7939 | 1.22 | 8888 | 1.62 | 9474 | 2.20 | 9861 |
| 0.03 | 5120 | 0.43 | 6664 | 0.83 | 7967 | 1.23 | 8907 | 1.63 | 9484 | 2.30 | 9893 |
| 0.04 | 5160 | 0.44 | 6700 | 0.84 | 7995 | 1.24 | 8925 | 1.64 | 9495 | 2.40 | 9918 |
| 0.05 | 5199 | 0.45 | 6736 | 0.85 | 8023 | 1.25 | 8944 | 1.65 | 9505 | 2.50 | 9938 |
| 0.06 | 5239 | 0.46 | 6772 | 0.86 | 8051 | 1.26 | 8962 | 1.66 | 9515 | 2.60 | 9953 |
| 0.07 | 5279 | 0.47 | 6808 | 0.87 | 8078 | 1.27 | 8980 | 1.67 | 9525 | 2.70 | 9965 |
| 0.08 | 5319 | 0.48 | 6844 | 0.88 | 8106 | 1.28 | 8997 | 1.68 | 9535 | 2.80 | 9974 |
| 0.09 | 5359 | 0.49 | 6879 | 0.89 | 8133 | 1.29 | 9015 | 1.69 | 9545 | 2.90 | 9981 |
| 0.10 | 0.5398 | 0.50 | 0.6915 | 0.90 | 0.8159 | 1.30 | 0.9032 | 1.70 | 0.9554 | 3.00 | 0.9986 |
| 0.11 | 5438 | 0.51 | 6950 | 0.91 | 8186 | 1.31 | 9049 | 1.71 | 9564 | 3.10 | 9990 |
| 0.12 | 5478 | 0.52 | 6985 | 0.92 | 8212 | 1.32 | 9066 | 1.72 | 9573 | 3.20 | 9993 |
| 0.13 | 5517 | 0.53 | 7019 | 0.93 | 8238 | 1.33 | 9082 | 1.73 | 9582 | 3.30 | 9995 |
| 0.14 | 5557 | 0.54 | 7054 | 0.94 | 8264 | 1.34 | 9099 | 1.74 | 9591 | 3.40 | 9997 |
| 0.15 | 5596 | 0.55 | 7088 | 0.95 | 8289 | 1.35 | 9115 | 1.75 | 9599 | 3.50 | 9998 |
| 0.16 | 5636 | 0.56 | 7123 | 0.96 | 8315 | 1.36 | 9131 | 1.76 | 9608 | 3.60 | 9998 |
| 0.17 | 5675 | 0.57 | 7157 | 0.97 | 8340 | 1.37 | 9147 | 1.77 | 9616 | 3.70 | 9999 |
| 0.18 | 5714 | 0.58 | 7190 | 0.98 | 8365 | 1.38 | 9162 | 1.78 | 9625 | 3.80 | 0.9999 |
| 0.19 | 5753 | 0.59 | 7224 | 0.99 | 8389 | 1.39 | 9177 | 1.79 | 9633 | 3.90 | 1.0000 |
| 0.20 | 0.5793 | 0.60 | 0.7257 | 1.00 | 0.8413 | 1.40 | 0.9192 | 1.80 | 0.9641 | | |
| 0.21 | 5832 | 0.61 | 7291 | 1.01 | 8437 | 1.41 | 9207 | 1.81 | 9649 | | |
| 0.22 | 5871 | 0.62 | 7324 | 1.02 | 8461 | 1.42 | 9222 | 1.82 | 9656 | | |
| 0.23 | 5910 | 0.63 | 7357 | 1.03 | 8485 | 1.43 | 9236 | 1.83 | 9664 | | |
| 0.24 | 5948 | 0.64 | 7389 | 1.04 | 8508 | 1.44 | 9251 | 1.84 | 9671 | | |
| 0.25 | 5987 | 0.65 | 7422 | 1.05 | 8531 | 1.45 | 9265 | 1.85 | 9678 | | |
| 0.26 | 6026 | 0.66 | 7454 | 1.06 | 8554 | 1.46 | 9279 | 1.86 | 9686 | | |
| 0.27 | 6064 | 0.67 | 7486 | 1.07 | 8577 | 1.47 | 9292 | 1.87 | 9693 | | |
| 0.28 | 6103 | 0.68 | 7517 | 1.08 | 8599 | 1.48 | 9306 | 1.88 | 9699 | | |
| 0.29 | 6141 | 0.69 | 7549 | 1.09 | 8621 | 1.49 | 9319 | 1.89 | 9706 | | |
| 0.30 | 0.6179 | 0.70 | 0.7580 | 1.10 | 0.8643 | 1.50 | 0.9332 | 1.90 | 0.9713 | | |
| 0.31 | 6217 | 0.71 | 7611 | 1.11 | 8665 | 1.51 | 9345 | 1.91 | 9719 | | |
| 0.32 | 6255 | 0.72 | 7642 | 1.12 | 8686 | 1.52 | 9357 | 1.92 | 9726 | | |
| 0.33 | 6293 | 0.73 | 7673 | 1.13 | 8708 | 1.53 | 9370 | 1.93 | 9732 | | |
| 0.34 | 6331 | 0.74 | 7703 | 1.14 | 8729 | 1.54 | 9382 | 1.94 | 9738 | | |
| 0.35 | 6368 | 0.75 | 7734 | 1.15 | 8749 | 1.55 | 9394 | 1.95 | 9744 | | |
| 0.36 | 6406 | 0.76 | 7764 | 1.16 | 8770 | 1.56 | 9406 | 1.96 | 9750 | | |
| 0.37 | 6443 | 0.77 | 7794 | 1.17 | 8790 | 1.57 | 9418 | 1.97 | 9756 | | |
| 0.38 | 6480 | 0.78 | 7823 | 1.18 | 8810 | 1.58 | 9429 | 1.98 | 9761 | | |
| 0.39 | 0.6517 | 0.79 | 0.7852 | 1.19 | 0.8830 | 1.59 | 0.9441 | 1.99 | 0.9767 | | |

Додаток 3

Вхідні дані для виконання завдання теми 2

| № | Результати вимірів величин | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | U=1 | U=2 | U=3 | U=4 | U=5 |
| | $H_i$ | $\beta_i$ | $D_i$ | $\vartheta_i$ | $h_i$ |
| | 205,…м | 57°23′…″ | 193,…м | 2°…′ | 1,…м |
| 1 | 302 | 44 | 22 | 38 | 234 |
| 2 | 321 | 40 | 28 | 33 | 236 |
| 3 | 308 | 43 | 24 | 36 | 238 |
| 4 | 304 | 45 | 20 | 30 | 237 |
| 5 | 309 | 46 | 23 | 32 | 234 |
| 6 | 316 | 43 | 29 | 35 | 235 |
| 7 | 303 | 48 | 25 | 36 | 233 |
| 8 | 318 | 45 | 24 | 39 | 236 |
| 9 | 305 | 48 | 31 | 34 | 238 |
| 10 | 309 | 46 | 28 | 33 | 232 |
| 11 | 304 | 47 | 24 | 37 | 234 |
| 12 | 311 | 41 | 20 | 35 | 239 |
| 13 | 306 | 49 | 24 | 38 | 237 |
| 14 | 301 | 42 | 27 | 31 | 240 |
| 15 | 312 | 46 | 25 | 36 | 241 |
| 16 | 314 | 41 | 21 | 40 | 235 |
| 17 | 307 | 44 | 29 | 42 | 233 |
| 18 | 304 | 43 | 23 | 36 | 236 |
| 19 | 310 | 47 | 30 | 33 | 231 |
| 20 | 313 | 40 | 24 | 35 | 234 |
| 21 | 315 | 49 | 28 | 38 | 237 |
| 22 | 317 | 45 | 26 | 40 | 238 |
| 23 | 302 | 48 | 21 | 31 | 232 |
| 24 | 303 | 42 | 25 | 37 | 240 |
| 25 | 319 | 46 | 22 | 32 | 234 |
| 26 | 306 | 47 | 29 | 38 | 233 |
| 27 | 309 | 41 | 27 | 39 | 236 |
| 28 | 314 | 48 | 20 | 34 | 235 |
| 29 | 308 | 48 | 31 | 36 | 241 |
| 30 | 301 | 44 | 26 | 40 | 239 |

Додаток 4

Вхідні дані для виконання завдання теми 3

| № | Результати вимірів величин | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | U=1 | | U=2 | | U=3 | | U=4 | | U=5 | |
| | $\beta_i$ | $m_i$ | $H_i$ | $m_i$ | $\beta_i$ | $k_i$ | $h_i$ | $K_i$ | $\beta_i$ | $m_i$ |
| | 32°11′…″ | ″ | 106,…м | мм | 61°40′…″ | | 1,…м | | 44°08′…″ | ″ |
| 1 | 22 | 2,5 | 316 | 6,3 | 32 | 4 | 387 | 14 | 52 | 3,5 |
| 2 | 25 | 4,0 | 318 | 5,3 | 33 | 6 | 385 | 12 | 48 | 2,5 |
| 3 | 27 | 4,8 | 319 | 5,0 | 33 | 6 | 386 | 11 | 49 | 3,0 |
| 4 | 23 | 3,1 | 317 | 5,7 | 34 | 7 | 384 | 10 | 50 | 2,4 |
| 5 | 28 | 5,2 | 319 | 4,9 | 32 | 5 | 381 | 11 | 48 | 3,1 |
| 6 | 30 | 6,0 | 321 | 4,6 | 34 | 5 | 383 | 12 | 51 | 3,5 |
| 7 | 21 | 2,3 | 323 | 4,1 | 34 | 6 | 382 | 12 | 52 | 4,1 |
| 8 | 25 | 2,9 | 322 | 4,3 | 35 | 8 | 380 | 10 | 52 | 3,6 |
| 9 | 22 | 3,4 | 324 | 4,2 | 36 | 12 | 380 | 9 | 50 | 3,0 |
| 10 | 24 | 2,1 | 325 | 4,6 | 36 | 8 | 379 | 10 | 53 | 4,4 |
| 11 | 29 | 5,0 | 326 | 4,9 | 35 | 9 | 378 | 8 | 54 | 4,1 |
| 12 | 28 | 5,3 | 325 | 4,8 | 37 | 9 | 376 | 6 | 53 | 4,3 |
| 13 | 26 | 4,3 | 327 | 5,2 | 38 | 10 | 377 | 5 | 55 | 5,5 |
| 14 | 27 | 5,1 | 328 | 5,6 | 39 | 11 | 375 | 4 | 56 | 5,3 |
| 15 | 26 | 5,0 | 329 | 5,7 | 37 | 9 | 375 | 3 | 55 | 5,0 |
| 16 | 24 | 3,6 | 331 | 6,5 | 40 | 10 | 374 | 3 | 57 | 6,1 |
| 17 | 23 | 3,0 | 330 | 5,9 | 41 | 12 | 373 | 2 | 56 | 6,0 |
| 18 | 22 | 2,5 | 320 | 4,4 | 32 | 6 | 381 | 9 | 58 | 6,3 |
| 19 | 24 | 2,2 | 319 | 4,5 | 33 | 7 | 383 | 7 | 48 | 6,2 |
| 20 | 29 | 3,7 | 321 | 5,1 | 40 | 5 | 376 | 6 | 51 | 2,5 |
| 21 | 28 | 2,8 | 323 | 6,4 | 35 | 8 | 382 | 8 | 52 | 4,4 |
| 22 | 25 | 5,2 | 322 | 5,4 | 34 | 6 | 384 | 10 | 52 | 5,4 |
| 23 | 27 | 3,4 | 324 | 6,1 | 37 | 12 | 375 | 13 | 50 | 5,1 |
| 24 | 23 | 4,6 | 316 | 6,3 | 39 | 9 | 387 | 11 | 53 | 6,2 |
| 25 | 28 | 4,1 | 318 | 5,5 | 39 | 10 | 383 | 14 | 52 | 6,1 |
| 26 | 26 | 3,3 | 319 | 5,3 | 36 | 8 | 374 | 12 | 48 | 6,3 |
| 27 | 27 | 5,0 | 317 | 4,1 | 34 | 11 | 378 | 5 | 49 | 5,9 |
| 28 | 26 | 4,5 | 328 | 6,6 | 32 | 6 | 376 | 8 | 56 | 3,8 |
| 29 | 24 | 4,7 | 329 | 5,2 | 40 | 7 | 381 | 4 | 55 | 2,9 |
| 30 | 23 | 2,6 | 331 | 4,7 | 41 | 5 | 385 | 6 | 57 | 3,1 |

Додаток 5

Вхідні дані для виконання завдання теми 4

| № | Результати подвійних вимірів | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $h_i$ (мм) | $h_i'$ (мм) | | | | |
| | | U=1 | U=2 | U=3 | U=4 | U=5 |
| 1 | -1561 | -1565 | -1564 | -1558 | -1555 | -1560 |
| 2 | -1484 | -1487 | -1486 | -1480 | -1482 | -1478 |
| 3 | -1370 | -1375 | -1373 | -1367 | -1369 | -1368 |
| 4 | 102 | 101 | 101 | 102 | 103 | 104 |
| 5 | 2184 | 2184 | 2180 | 2188 | 2187 | 2186 |
| 6 | 1219 | 1218 | 1219 | 1220 | 1220 | 1221 |
| 7 | -153 | -152 | -154 | -152 | -153 | -151 |
| 8 | -864 | -866 | -863 | -860 | -863 | -862 |
| 9 | 2101 | 2103 | 2100 | 2102 | 2104 | 2105 |
| 10 | 1234 | 1230 | 1230 | 1232 | 1233 | 1231 |
| 11 | 1906 | 1903 | 1906 | 1909 | 1908 | 1910 |
| 12 | -1313 | -1319 | -1318 | -1312 | -1309 | -1308 |
| 13 | -2202 | -2203 | -2201 | -2203 | -2204 | -2205 |
| 14 | 930 | 926 | 927 | 932 | 936 | 938 |
| 15 | 1532 | 1526 | 1530 | 1535 | 1538 | 1540 |
| 16 | 128 | 130 | 123 | 130 | 129 | 128 |
| 17 | -1075 | -1079 | -1074 | -1070 | -1071 | -1073 |
| 18 | 732 | 736 | 730 | 734 | 733 | 731 |
| 19 | 632 | 634 | 630 | 633 | 635 | 631 |
| 20 | 2101 | 2103 | 2105 | 2102 | 2106 | 2102 |
| 21 | -955 | -956 | -953 | -951 | -956 | -954 |
| 22 | 1012 | 1010 | 1014 | 1015 | 1012 | 1013 |
| 23 | -2020 | -2025 | -2019 | -2018 | -2016 | -2023 |
| 24 | -884 | -880 | -881 | -885 | -886 | -882 |
| 25 | 935 | 936 | 933 | 933 | 932 | 930 |
| 26 | 1154 | 1150 | 1156 | 1151 | 1156 | 1155 |
| 27 | -788 | -785 | -780 | -789 | -784 | -785 |
| 28 | -1555 | -1550 | -1556 | -1554 | -1559 | -1560 |
| 29 | 2219 | 2219 | 2225 | 2217 | 2215 | 2216 |
| 30 | -1010 | -1005 | -1015 | -1009 | -1013 | -1014 |

Додаток 6

Вхідні дані для виконання завдання теми 5

| № | Результати подвійних вимірів | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $h_i$ | $k_i$ | | | | |
| | $h_i'$ | U=1 | U=2 | U=3 | U=4 | U=5 |
| 1 | Результати вимірів перевищень подано в додатку 5 | 6 | 10 | 10 | 11 | 4 |
| 2 | | 8 | 12 | 14 | 14 | 9 |
| 3 | | 7 | 14 | 18 | 15 | 11 |
| 4 | | 9 | 16 | 22 | 18 | 16 |
| 5 | | 10 | 18 | 26 | 19 | 17 |
| 6 | | 12 | 20 | 30 | 22 | 22 |
| 7 | | 10 | 22 | 34 | 23 | 23 |
| 8 | | 11 | 24 | 38 | 26 | 28 |
| 9 | | 15 | 26 | 42 | 27 | 29 |
| 10 | | 14 | 25 | 41 | 30 | 34 |
| 11 | | 12 | 23 | 37 | 31 | 35 |
| 12 | | 13 | 21 | 33 | 34 | 33 |
| 13 | | 17 | 19 | 29 | 37 | 31 |
| 14 | | 18 | 17 | 25 | 38 | 30 |
| 15 | | 16 | 15 | 21 | 41 | 28 |
| 16 | | 20 | 13 | 17 | 42 | 26 |
| 17 | | 19 | 11 | 13 | 45 | 23 |
| 18 | | 20 | 9 | 9 | 46 | 20 |
| 19 | | 23 | 7 | 7 | 40 | 17 |
| 20 | | 25 | 5 | 5 | 35 | 15 |
| 21 | | 21 | 8 | 8 | 31 | 14 |
| 22 | | 18 | 11 | 10 | 26 | 13 |
| 23 | | 16 | 13 | 12 | 24 | 12 |
| 24 | | 16 | 16 | 14 | 22 | 16 |
| 25 | | 15 | 18 | 17 | 21 | 18 |
| 26 | | 16 | 20 | 20 | 18 | 20 |
| 27 | | 12 | 19 | 23 | 15 | 25 |
| 28 | | 11 | 17 | 25 | 17 | 30 |
| 29 | | 6 | 14 | 28 | 20 | 31 |
| 30 | | 8 | 11 | 32 | 25 | 34 |