

Т.-б

Труды

КАИ

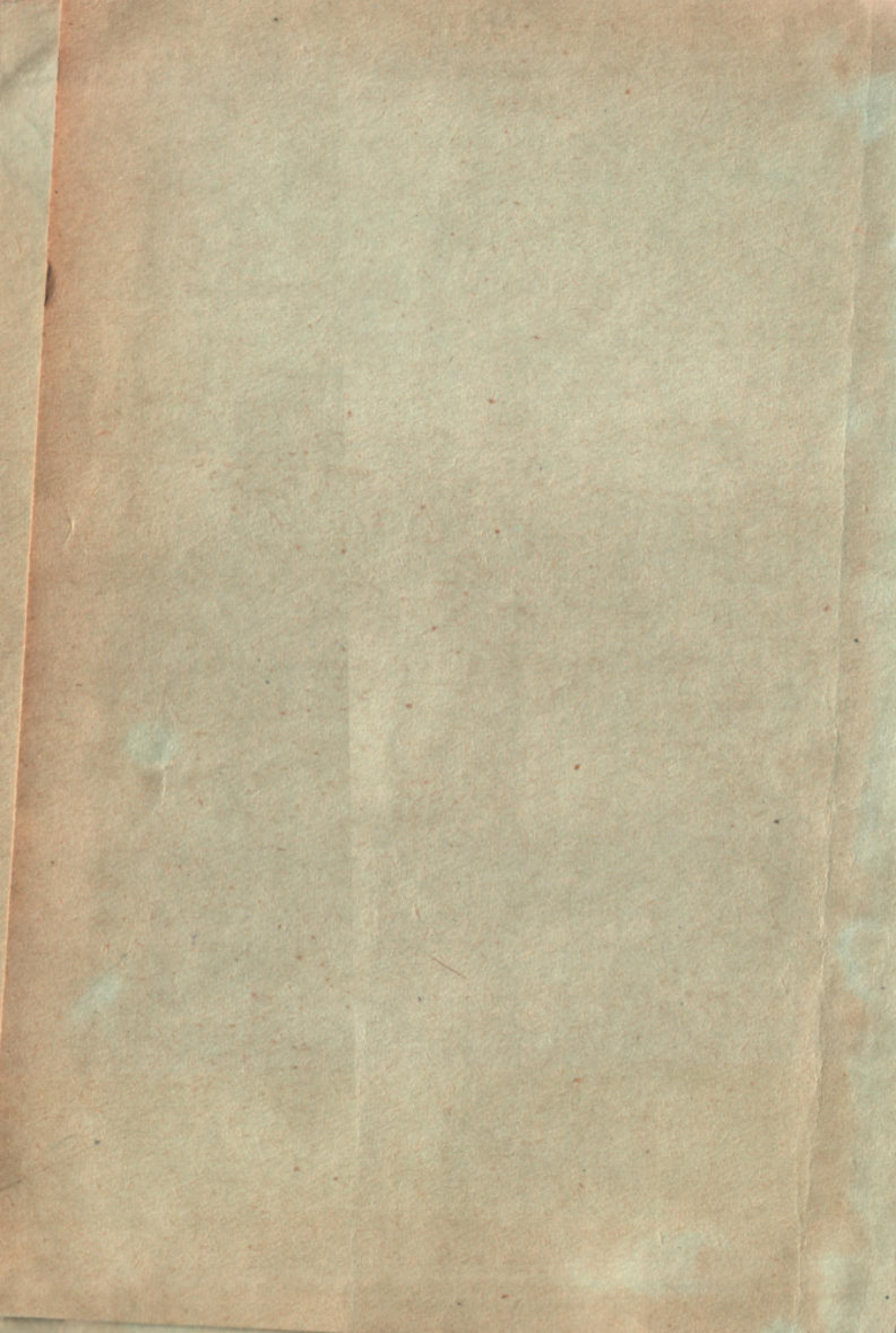
Вып. VIII

5451

✓



Thygesen KAW, 1927, Gen. 8.





СНК СССР  
ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГРАЖДАНСКОГО ВОЗДУШНОГО ФЛОТА

КИЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
ИМ. К. Е. ВОРОШИЛОВА

624.083

T-78

# ТРУДЫ КАИ

ВЫПУСК VIII

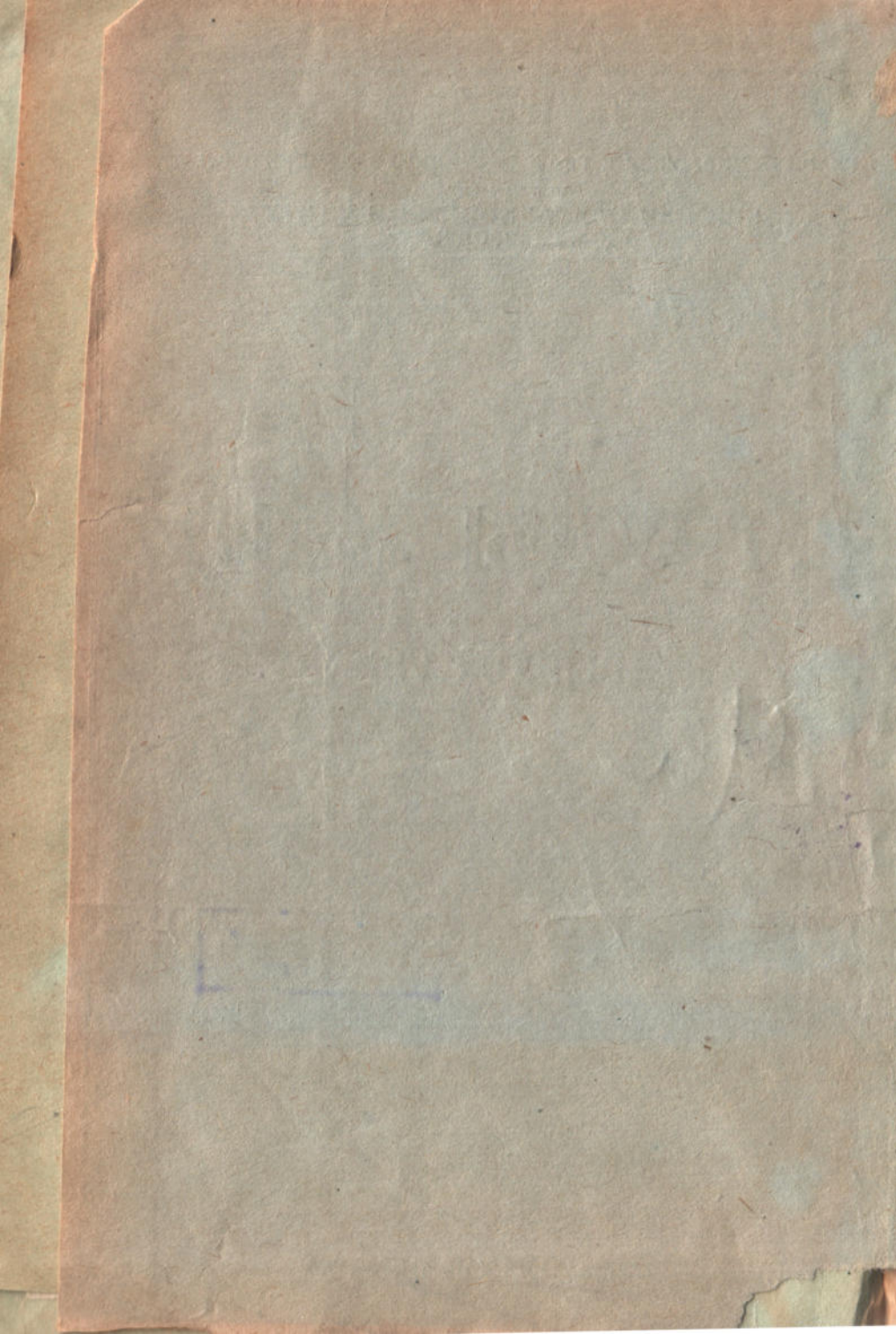
да

проверено  
1966 г.

Исторический отдел  
1966 г. 2. 4588

ПО

ИЗДАНИЕ НИС КАИ, КИЕВ — 1938





624.0.83

Т-78

У

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
1. Проф. <i>Штаерман И. Я.</i> Связь эллиптических функций с тригонометрией	5
2. <i>Раппопорт И. М.</i> О приближенном вычислении эллиптических интегралов и функций	21
3. Проф. <i>Рабцевич П. В.</i> Приближенные формулы для расчета на кручение цилиндрической оболочки, усиленной ребрами жесткости	36
Проф. <i>Рабцевич П. В.</i> Приближенный способ расчета многолонжеронного крыла без несущей обшивки	43
Доц. <i>Кильчевский Н. А.</i> Применение формулы Шварца-Кристоффеля к задаче Сен-Венана	52
Доц. <i>Кильчевский Н. А.</i> Новый метод решения вопроса об устойчивости тонких оболочек	67
<i>Челомей В. Н.</i> К вопросу о границах прочности движения	103
<i>Челомей В. Н.</i> Теория пружин	107
<i>Челомей В. Н.</i> О колебаниях стержней, подверженных действию периодически меняющихся продольных сил	163
<i>Челомей В. Н.</i> О расчете шатунов быстроходных двигателей	176
<i>Челомей В. Н.</i> К вопросу о колебаниях и устойчивости упругих стержней	181
<i>Челомей В. Н.</i> Устойчивость стержней, нагруженных произвольно распределенными продольными нагрузками	186
<i>Челомей В. Н.</i> Об упругих поперечных колебаниях балок переменной жесткости	196
<i>Челомей В. Н.</i> Итеративный процесс последовательных приближений в применении к задачам колебаний и устойчивости упругих систем	204
<i>Шмуцкий Ш. И.</i> О построении внешней характеристики проектируемого авиационного двигателя	216
16. <i>Вульф А. Г.</i> Характеристика расположения винтомоторных групп на самолетах	225
17. Доц. <i>Афанасьев Н. Н.</i> , ассист. <i>Бахарев В. М.</i> К вопросу об усталости сварных швов	255

П И

## CONTENTS

	Pages
1. <i>Prof. Shtaerman I. V.</i> The Connection of Elliptic Functions with Trigonometry . . . . .	5
2. <i>Rappoport I. M.</i> The Approximate Computation of Elliptic Integrals and Functions . . . . .	21
3. <i>Prof. Rabtsevitch P. V.</i> Approximate Formulae for Calculating the Torque of a Cylindrical Covering Strengthened by Rigid Ribs . . . . .	36
4. <i>Prof. Rabtsevitch P. V.</i> Approximate Method for Calculating Multisparred Wings without Covering . . . . .	43
5. <i>Doc. Kilchevsky N. A.</i> Application of Shwarts-Kristoffel Formula to the S. Vetan's Problem . . . . .	52
6. <i>Doc. Kilchevsky N. A.</i> A New Method for Solving the Problem of the Stability of Thin Casiogs . . . . .	67
7. <i>Chelomey V. N.</i> On the Limits of the Motion Strength . . . . .	103
8. <i>Chelomey V. N.</i> The Theory of Springs . . . . .	107
9. <i>Chelomey V. N.</i> On the Vibration of Rods Subjected to the Action of Periodically Changing Longitudinal Forces . . . . .	163
10. <i>Chelomey V. N.</i> On Calculating Connecting-Rods of Speed-Motors . . . . .	176
11. <i>Chelomey V. N.</i> On the Vibrations and Stability of Elastic Rods . . . . .	181
12. <i>Chelomey V. N.</i> Stability of Rods with Arbitrarily Distributed Longitudinal Loads . . . . .	186
13. <i>Chelomey V. N.</i> On Elastic Cross Vibrations of Beams with Variable Rigidity . . . . .	196
14. <i>Chelomey V. N.</i> The Iterative Process of Successive Approximations Applied to Problems of Vibration and Rigidity of Elastic Systems . . . . .	204
15. <i>Shmushkin S. I.</i> On the Construction of the External Characteristics of a Designed Aviation Motor . . . . .	216
16. <i>Wolf, A. G.</i> Characteristics of the Disposition of Screw-Motor Groups on Planes . . . . .	225
17. <i>Doc. Afanasyev N. N., assist. Baharev V. M.</i> On the Weariness of the Welding Seams . . . . .	255



## СВЯЗЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ТРИГОНОМЕТРИЕЙ

Эллиптические интегралы и функции встречаются в большом числе вопросов прикладного знания (теория конформных отображений, теория движения твердого тела, маятник, задача об изгибе стержня, некоторые задачи геодезии, геометрии, теория потенциала, небесная механика, электродинамика и т. д.

В настоящее время имеется достаточное количество соответствующих таблиц и применение эллиптических функций во многих случаях почти так же просто и удобно, как и тригонометрических и все же большинство специалистов, применяющих прикладную математику (инженеры, физики и др.) эллиптическими функциями пользуются мало, избегают их, отказываясь иной раз от необходимых точных решений. Между тем очень часто дело идет не только о вводимых в расчет погрешностях; эллиптические функции совсем по новому, гораздо шире и правильнее освещают изучаемый вопрос. Результаты, получаемые посредством этих функций или без них, качественно различны, приближенное решение исключает ряд принципиально важных моментов, дает упрощенческий подход. Так, например, при изучении изгиба кривого стержня, приходится отказываться от рассмотрения больших прогибов и ограничиваться малыми деформациями, хотя это приводит к искаженной картине явления, приходится дополнять приближенные формулы другими, приближенными же, так что получается неуклюжий и, пожалуй, более сложный метод, чем точный. Таких примеров можно указать много. Несообразности этого рода возникают вследствие того, что специалистам, использующим прикладную математику, изучение эллиптических функций представляется громоздким делом. Отметим еще, что теория эллиптических функций исключена из курса математики ВТУЗ'ов.

Вследствие этих обстоятельств создалось впечатление, что теория эллиптических функций отличается большой сложностью. Это мнение неверно. Теория эллиптических интегралов и функций в том виде, как она нужна для инженерных вычислений, может быть изложена весьма просто, как мы убедились на опыте.

Не исчерпывая этой темы в целом, мы остановимся здесь на двух основных вопросах теории эллиптических функций, а



именно, на теореме сложения эллиптических интегралов, найденной Эйлером и развитой последующими учеными<sup>1)</sup>, и на преобразовании модуля эллиптических интегралов, причем мы останавливаемся на имеющем наибольшее практическое значение — преобразовании Ландена.

Замечательно то обстоятельство, что теорему сложения эллиптических интегралов можно получить из некоторых формул тригонометрии, точнее говоря, эти формулы уже содержат в себе теорему сложения эллиптических функций — надо это только выявить, поэтому мы в заглавии нашей статьи и подчеркнули то обстоятельство, что мы выведем фундаментальные теоремы теории эллиптических функций из формул тригонометрических. Преобразование Ландена тоже не трудно получить из тригонометрических формул, но еще проще оказался вывод, приведенный нами ниже.

### § 1. Интеграл

$$\int_a^b R[x, \sqrt{P(x)}] dx \quad (1)$$

где  $R$  — рациональная функция от  $x$  и от радикала  $\sqrt{P(x)}$ , и  $P(x)$  — полином третьей или четвертой степени от  $x$ , носит название эллиптического интеграла. Эллиптический интеграл в общем случае не может быть выражен посредством функций алгебраических, тригонометрических, показательных и др. простейших трансцендентных. Вычисление его может быть всегда сведено к вычислению следующих интегралов, которым Лежандр дал название эллиптических интегралов первого, второго и третьего рода:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx, \int_0^x \frac{dx}{(1+\lambda x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (2)$$

Мы не будем в настоящей статье останавливаться на методах приведения интеграла (1) к интегралам (2)<sup>2)</sup>. Покажем это приведение лишь на примере. Пусть требуется вычислить интеграл:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}}$$

<sup>1)</sup> Эта теорема была найдена Эйлером в 1752 г.

Впервые теорему сложения эллиптических функций, исходя из формул сферической тригонометрии, получил Лагранж. Интересно отметить, что с аналитической точки зрения, использование формул сферической тригонометрии дает более сложные преобразования, чем обычный прием, но так как формулы тригонометрии нам хорошо знакомы, то практически этот прием очень удобен.

<sup>2)</sup> См., напр., Э. Гурса „Курс математического анализа“, том I, гл. V.



Если  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — корни подрадикального полинома, интеграл может быть представлен в виде:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a_3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}}$$

Заменой переменной:

$$t = \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}},$$

приводим интеграл к виду:

$$\frac{2}{\sqrt{a_3(\gamma-\alpha)}} \left\{ \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}t^2)}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}t^2)}} \right\}$$

В настоящей статье мы ограничимся рассмотрением интегралов первого и второго рода при действительных значениях аргументов  $x$  и  $k$ . Кроме того, мы будем предполагать, что  $0 \leq k \leq 1$ . Если  $k > 1$ , можно всегда свести интеграл к интегралам первого и второго рода с аргументом  $k < 1$  заменой переменной:  $y = kx$ .

Положив в первых двух из равенств (2)  $x = \sin \varphi$ , получим интегралы:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (3)$$

Параметр  $k$  называют модулем интеграла. Будем рассматривать в интеграле первого рода:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = u \quad (4)$$

верхний предел  $\varphi$  (называемый амплитудой), как функцию самого интеграла  $u$  и модуля  $k$ :

$$\varphi = am(u, k). \quad (5)$$

Функции:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \sin am(u, k) = sn(u, k) \\ \cos \varphi &= \cos am(u, k) = cn(u, k) \\ \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} &= \Delta \varphi = \Delta am(u, k) = dn(u, k) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

носят название эллиптических функций Якоби.

Из обозначений (6) очевидны тождества:

$$\left. \begin{aligned} sn^2u + cn^2u &= 1 \\ 1 - k^2 sn^2u &= dn^2u \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

посредством которых каждая из эллиптических функций может быть выражена через другую.

$$\left. \begin{aligned} snu &= \sqrt{1 - cn^2u} = \frac{1}{k} \sqrt{1 - dn^2u} \\ cnu &= \sqrt{1 - sn^2u} = \frac{1}{k} \sqrt{k^2 - 1 + dn^2u} \\ dnu &= \sqrt{1 - k^2 sn^2u} = \sqrt{1 - k^2 + k^2 cn^2u} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из уравнения (4) следует:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = du,$$

а, следовательно,

$$\frac{d\varphi}{du} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = dnu \quad (9)$$

Пользуясь равенством (9), легко находим формулы для дифференцирования эллиптических функций:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{du}(snu) &= \cos \varphi \frac{d\varphi}{du} = cnu dnu \\ \frac{d}{du}(cnu) &= -\sin \varphi \frac{d\varphi}{du} = -snu dnu \\ \frac{d}{du}(dnu) &= \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \frac{d\varphi}{du} = -k^2 snucnu \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Отсюда не трудно уже найти производные высших порядков от эллиптических функций и применить их, например, для составления рядов Тэйлора.

Не останавливаясь больше на свойствах эллиптических интегралов и функций, перейдем к выводу теорем их сложения.

§ 2. Начнем с теоремы сложения тригонометрических функций. Известно, что

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v.$$

Рассмотрим, с какими формулами интегрального исчисления связано это тождество. Проинтегрировав почленно дифференциальное уравнение



$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0, \quad (11)$$

получим:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = c,$$

$$\text{или} \quad \arcsin x + \arcsin y = c. \quad (12)$$

Обозначая:  $x = \sin u$ ,  $y = \sin v$ , можем придать интегралу (12) вид:

$$u + v = c \quad (13)$$

С другой стороны дифференциальное уравнение (11) допускает алгебраический интеграл:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \gamma \quad (14)$$

Действительно, дифференцируя (14), получаем:

$$\sqrt{1-y^2} dx + \sqrt{1-x^2} dy - \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}} dy - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0;$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \left\{ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \right\} - \\ & - xy \left\{ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

(15) тождественно обращается в нуль, если имеет место зависимость между дифференциалами (11). Следовательно, (14) действительно является интегралом этого дифференциального уравнения. Согласно принятым нами обозначениям:  $x = \sin u$ ,  $y = \sin v$ , мы можем придать интегралу (14) вид:

$$\sin u \cos v + \cos u \sin v = \gamma \quad (16)$$

Вследствие произвольности постоянной интегрирования  $\gamma$ , мы можем выбрать ее так, чтобы

$$\gamma = \sin c, \quad (17)$$

Подставляя вместо  $c$  его значение из (13), мы можем придать интегралу (16) вид:

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v \quad (18)$$

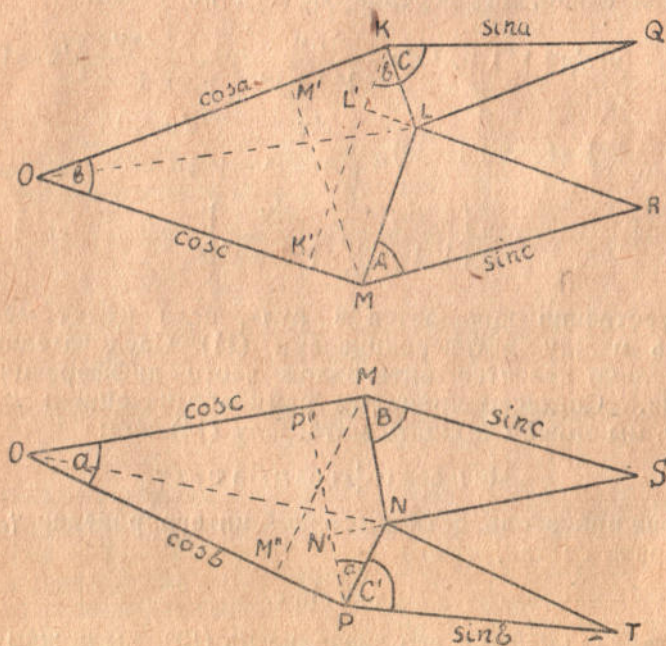
Таким образом, мы убедились в том, что, отыскав алгебраический интеграл дифференциального уравнения (11), можно

доказать теорему сложения тригонометрических функций. Ниже мы убедимся в том, что для того, чтобы отыскать теорему сложения для функций эллиптических, достаточно найти алгебраический интеграл уравнения:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0 \quad (19)$$

Однако, для отыскания этого интеграла мы не будем пользоваться аналитическими методами, а наоборот, будем искать такие тригонометрические тождества, дифференцируя которые, мы сумеем получить дифференциальное уравнение, тождественное уравнению (19). Для этого обратимся к изложенному ниже геометрическому построению.

§ 3. На сторонах угла  $b$  отложим отрезки  $\cos a$  и  $\cos c$ . Из концов отрезков —  $K$  и  $M$  восстановим перпендикуляры к сторонам угла  $b$  —  $KL$  и  $ML$ . Построим далее прямоугольные треугольники  $KLQ$  и  $MLR$  с гипотенузами  $\sin a$  и  $\sin c$ .



Фиг. 1.

Аналогичное построение для угла  $a$  очевидно из рисунка. Выразим далее углы  $A, B, C$  и  $C'$ , как функции углов  $a, b$  и  $c$ . Опустим перпендикуляр  $PP'$  на прямую  $OM$ .



$$OM = OP' + P'M,$$

$$\text{или } \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C'. \quad (20)$$

Опуская перпендикуляры из точки  $M$  на прямые  $OK$  и  $OP$  и из  $K$  на прямую  $OM$ , аналогичным путем находим:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Из уравнения (20) и третьего из уравнений (21) находим:

$$C' = C \quad (22)$$

Уравнения (21) определяют углы  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Покажем далее, что отрезки  $QL$   $RL$  равны. Действительно:

$$QL^2 = Q^2 - KL^2 = \sin^2 a + \cos^2 a - OL^2 = 1 - OL^2,$$

$$RL^2 = MR^2 - ML^2 = \sin^2 c + \cos^2 c - OL^2 = 1 - OL^2.$$

Равны также отрезки  $SN$  и  $TN$ . Но, так как

$$QL = \sin a \sin C, \quad RL = \sin c \sin A, \quad SN = \sin c \sin B, \quad TN = \sin b \sin C$$

получаем:

$$\sin a \sin C = \sin c \sin A, \quad \sin c \sin B = \sin b \sin C,$$

или

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = k, \quad (23)$$

Ниже мы увидим, что коэффициент  $k$  в нашем выводе является модулем эллиптических функций.

Покажем, что для того, чтобы коэффициент  $k$  был меньше единицы, величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  должны быть связаны неравенством:

$$\cos c < \frac{\cos a \cos b}{1 + \sin a \sin b}. \quad (24)$$

Из (24) находим:

$$\cos c (1 + \sin a \sin b) < \cos a \cos b;$$

$$\cos c \sin a \sin b < \cos a \cos b - \cos c;$$

$$\cos c < \frac{\cos a \cos b - \cos c}{\sin a \sin b} \quad (25)$$

Из (21) отыскиваем значение  $C$ :

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \quad (26)$$

Из (25) и (26) получаем:

$$\cos c < -\cos C,$$

откуда 
$$\sin c > \sin C; \frac{\sin C}{\sin c} = k < 1 \quad (27)$$

Опустим теперь из точек  $L$  и  $N$  перпендикуляры на прямые  $KK'$  и  $PP'$ .

$$KK' = K'L' + KL', \quad PP' = P'N' + PN', \quad \text{или}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos a \sin b &= \sin c \cos A + \sin a \cos b \cos C \\ \sin a \cos b &= \sin c \cos B + \cos a \sin b \cos C \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Подставляя в (21) значения  $A$ ,  $B$  и  $C$  из (23), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \sqrt{1 - k^2 \sin^2 a} \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \sqrt{1 - k^2 \sin^2 b} \\ \cos c &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \sqrt{1 - k^2 \sin^2 c} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Отрицательный знак у корня в третьем из уравнений (28) нами выбран из тех соображений, что  $\cos C$ , представляемый этим корнем, должен быть отрицательным, если имеет место неравенство (24).

Придадим, далее, приращения  $da$  и  $db$  углам  $a$  и  $b$ , оставляя угол  $c$  неизменным с таким расчетом, чтобы угол  $C$  остался также неизменным. Тогда приращения  $da$  и  $db$  будут связаны зависимостью, которую мы найдем, дифференцируя третье из уравнений (21) и полагая после дифференцирования:  $dc = dC = 0$ . Получаем:

$$0 = (-\sin a \cos b + \cos a \sin b \cos C) da + (-\cos a \sin b + \sin a \cos b \cos C) db. \quad (30)$$

Посредством (28) можем придать (30) вид:

$$-\sin c \cos B da - \sin c \cos A db = 0,$$

или

$$\frac{da}{\cos A} + \frac{db}{\cos B} = 0 \quad (31)$$

Подставляя в (31) значения  $A$  и  $B$  из (23), получаем дифференциальное уравнение:



$$\frac{da}{\sqrt{1-k^2\sin^2 a}} + \frac{db}{\sqrt{1-k^2\sin^2 b}} = 0 \quad (32)$$

Интегрируя (32) получаем:

$$\int_0^a \frac{da}{\sqrt{1-k^2\sin^2 a}} + \int_0^b \frac{db}{\sqrt{1-k^2\sin^2 b}} = \gamma \quad (33)$$

Постоянную  $\gamma$  определяем из условия: когда  $b=0$ , то  $a=c$  (на основании первого из уравнений (29)). Получаем:

$$\int_0^a \frac{da}{\sqrt{1-k^2\sin^2 a}} + \int_0^b \frac{db}{\sqrt{1-k^2\sin^2 b}} = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-k^2\sin^2 c}} \quad (34)$$

Вводя обозначения:

$$\int_0^a \frac{da}{\sqrt{1-k^2\sin^2 a}} = u, \quad \int_0^b \frac{db}{\sqrt{1-k^2\sin^2 b}} = v,$$

находим:

$$a = amu, \quad b = amv, \quad c = am(u+v) \quad (35)$$

Подставляя (35) в (29), получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} cnu &= cnvsn(u+v) + snvsn(u+v) dnu \\ cnv &= cnu sn(u+v) + snu sn(u+v) dnv \\ cn(u+v) &= cnu cnv - snu snv dn(u+v) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Решаем ее относительно  $sn(u+v)$ ,  $cn(u+v)$  и  $dn(u+v)$  и получаем формулы сложения для Якобиевых функций.

Из первого и второго уравнений (36) находим:

$$sn(u+v) = \frac{cn^2u - cn^2v}{snv cnu dnu - snu cnv dnv}$$

Умножаем и делим правую часть полученного равенства на  $(snv cnu dnu + snu cnv dnv)$  и получаем:

$$sn(u+v) = \frac{(cn^2u - cn^2v)(snv cnu dnu + snu cnv dnv)}{sn^2v cn^2u dn^2u - sn^2u cn^2v dn^2v}$$

Далее:

$$\begin{aligned} sn^2v cn^2u dn^2u - sn^2u cn^2v dn^2v &= cn^2u(1 - cn^2v)(1 - k^2sn^2u) - \\ &- cn^2v(1 - cn^2u)(1 - k^2sn^2v) = cn^2u(1 - k^2sn^2u + k^2sn^2ucn^2v) - \\ &- cn^2v(1 - k^2sn^2v + k^2sn^2vcn^2u) = (cn^2u - cn^2v)(1 - k^2sn^2usn^2v); \end{aligned}$$

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn}v \operatorname{cn}u \operatorname{dn}u + \operatorname{sn}u \operatorname{cn}v \operatorname{dn}v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \quad (37)$$

Подставляя (37) в первое из уравнений (36) получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(u+v) \operatorname{cn}v &= \operatorname{cn}u - \frac{\operatorname{sn}v \operatorname{dn}v (\operatorname{sn}v \operatorname{cn}u \operatorname{dn}u + \operatorname{sn}u \operatorname{cn}v \operatorname{dn}v)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = \\ &= \frac{\operatorname{cn}u - k^2 \operatorname{cn}u \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v - \operatorname{cn}u \operatorname{sn}^2 v (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) - \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{cn}v \operatorname{dn}u \operatorname{dn}v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = \\ &= \frac{\operatorname{cn}u \operatorname{cn}^2 v - \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{cn}v \operatorname{dn}u \operatorname{dn}v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \end{aligned}$$

Из этого уравнения находим:

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn}u \operatorname{cn}v - \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{dn}u \operatorname{dn}v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \quad (38)$$

Подставляя (38) в третье из уравнений (36) получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}(u+v) \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v &= \operatorname{cn}u \operatorname{cn}v - \frac{\operatorname{cn}u \operatorname{cn}v - \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{dn}u \operatorname{dn}v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = \\ &= \frac{\operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{dn}u \operatorname{dn}v - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}u \operatorname{cn}v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \end{aligned}$$

Откуда:

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn}u \operatorname{dn}v - k^2 \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{cn}u \operatorname{cn}v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \quad (39)$$

Полагая в (37), (38) и (39)  $v = u$ , получаем формулы для эллиптических функций удвоенного аргумента:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn} 2u &= \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u} \\ \operatorname{cn} 2u &= \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u} \\ \operatorname{dn} 2u &= \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

При  $k = 0$  из определения эллиптических функций следует:  $\operatorname{sn} u = \sin u$ ,  $\operatorname{cn} u = \cos u$ ,  $\operatorname{dn} u = 1$ .

Формулы (37), (38) и (39) обращаются для этого случая в формулы сложения тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \sin(u+v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v, \\ \cos(u+v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v. \end{aligned}$$



Посредством формул (37), (38) и (39) легко могут быть построены формулы для вычисления эллиптических функций разности двух аргументов. Из тождества

$$\int_0^a \frac{da}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 a}} = - \int_0^{-a} \frac{da}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 a}} = u,$$

находим

$$a = am u = -am(-u) \quad (41)$$

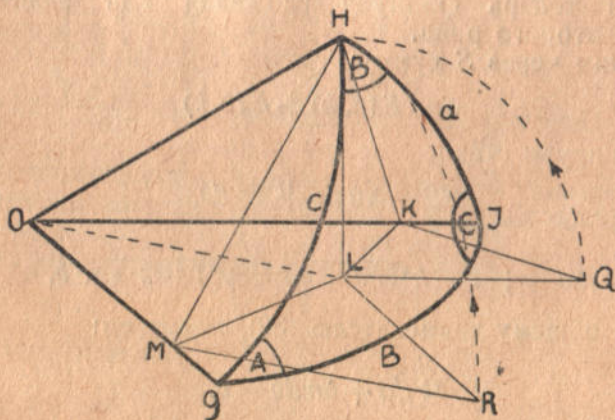
Откуда:

$$sn(-u) = -snu, \quad cn(-u) = cnu, \quad dn(-u) = dnu \quad (42)$$

Полагая в (37), (38) и (39) вместо  $v$  —  $(-v)$ , получаем формулы:

$$\left. \begin{aligned} sn(u-v) &= \frac{snu \, cnv \, dnv - snv \, cnu \, dnu}{1 - k^2 sn^2 usn^2 v} \\ cn(u-v) &= \frac{cnu \, cnv + snu \, snv \, dnu \, dnv}{1 - k^2 sn^2 usn^2 v} \\ dn(u-v) &= \frac{dnu \, dnv + k^2 snu \, snv \, cnu \, cnv}{1 - k^2 sn^2 usn^2 v} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Покажем еще, что изложенное нами в начале настоящего параграфа геометрическое построение приводит к некоторым основным и полезным во многих случаях формулам сферической тригонометрии. Для этого повернем треугольник  $KQL$  (см. фиг. 1) относительно оси  $KL$  и треугольник  $LRM$  относительно оси  $LM$  так, чтобы вершины треугольников  $Q$  и  $R$  совпали (см. фиг. 2). Вычислим длину отрезка  $OH$ .



Фиг. 2.

$$OH^2 = OK^2 + KH^2 = OK^2 + KQ^2 = \cos^2 a + \sin^2 a = 1. \quad OH = 1 \quad (44)$$



Проведем из точки  $O$ , как из центра, сферу единичного радиуса. В силу (44) точка  $H$  окажется на поверхности сферы. Продолжим далее прямые  $OK$  и  $OM$  до пересечения с поверхностью сферы. Если мы теперь соединим точки  $H$ ,  $I$  и  $G$  дугами больших кругов, мы получим сферический треугольник  $HIG$ . Из построения очевидно, что стороны этого треугольника соответственно равны:  $a$ ,  $b$  и  $c$ , углы треугольника равны:  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Но, выше нами был установлен ряд тождеств, связывающих величины:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$  (см. формулы (21), (23), (28)). Тождества эти таким образом дают основные зависимости между углами и сторонами сферического треугольника, так что вывод этих тождеств посредством приведенного геометрического построения дает в то же время вывод формул сферической тригонометрии.

Если один из углов сферического треугольника равен  $180^\circ$ , формулы сферической тригонометрии дают формулы сложения для тригонометрических функций. Пусть, например,  $C = 180^\circ$ . Из рис. 2 очевидно, что в этом случае  $c = a + b$ . Третье из уравнений (21) дает:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

§ 4. В § 3 мы вывели формулу сложения эллиптических интегралов первого рода. Если имеет место соотношение:

$$\cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b \sqrt{1 - k^2 \sin^2 c} \quad (45)$$

то

$$F(c, k) = F(a, k) + F(b, k) \quad (46)$$

Выведем теперь формулу сложения для эллиптических интегралов второго рода.

Обозначим через  $S$  сумму:

$$S = E(a, k) + E(b, k) \quad (47)$$

Дифференцируем (47).

$$dS = \Delta a da + \Delta b db, \quad (48)$$

где

$$\Delta a = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 a}, \quad \Delta b = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 b}.$$

Приводя к общему знаменателю (32), получаем:

$$\Delta b da + \Delta a db = 0. \quad (49)$$

Складывая (48) и (49), находим:

$$(\Delta a + \Delta b)(da + db) = dS. \quad (50)$$



Решаем первое из уравнений (29) относительно  $\Delta a$  и второе уравнений (29) относительно  $\Delta b$ . Получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta a &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \\ \Delta b &= \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Подставляем в (51) вместо  $\cos c$  его значение из третьего из уравнений (29):

$$\left. \begin{aligned} \Delta a &= \frac{\cos a - \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \Delta c}{\sin b \sin c} = \\ &= \frac{\cos a \sin b + \sin a \cos b \Delta c}{\sin c} \\ \Delta b &= \frac{\cos b - \cos^2 a \cos b + \sin a \sin b \cos a \Delta c}{\sin a \sin c} = \\ &= \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b \Delta c}{\sin c} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Подставляем (52) в (50) и находим:

$$\frac{1 + \Delta c}{\sin c} \sin(a + b) d(a + b) = dS.$$

Интегрируя, получаем:

$$\frac{1 + \Delta c}{\sin c} \left[ \gamma - \cos(a + b) \right] = S = E(a, k) + E(b, k) \quad (53)$$

Выражение  $\frac{1 + \Delta c}{\sin c}$  мы вынесли за знак интеграла на том

основании, что при выводе дифференциального уравнения (32), преобразованиями которого мы получили (50), мы дифференцировали величины  $a$  и  $b$ , полагая  $c$  неизменным.

Постоянную интегрирования  $\gamma$  определяем из условия: при  $b = 0$ ,  $a = c$ .

$$\frac{1 + \Delta c}{\sin c} (\gamma - \cos c) = E(c, k) \quad (54)$$

Отнимая (54) от (53), получаем:

$$\frac{1 + \Delta c}{\sin c} [\cos c - \cos(a + b)] = E(a, k) + E(b, k) - E(c, k) \quad (55)$$

Подставляем в (55) вместо  $\cos c$  его значение из (29).

$$E(a, k) + E(b, k) - E(c, k) = \frac{1 + \Delta c}{\sin c} (\cos a \cos b - \sin a \sin b \Delta c - \\ - \cos a \cos b + \sin a \sin b) = \frac{\sin a \sin b}{\sin c} (1 - \Delta^2 c) = k^2 \sin a \sin b \sin c.$$

Отсюда находим теорему сложения для эллиптических интегралов второго рода:

$$E(c, k) = E(a, k) + E(b, k) - k^2 \sin a \sin b \sin c. \quad (56)$$

§ 5. В предыдущих параграфах мы рассмотрели важнейшие теоремы, относящиеся к сложению эллиптических функций. Перейдем теперь к практическим методам вычисления эллиптических интегралов и функций. Одним из наиболее удобных методов является непосредственное использование готовых числовых данных, имеющих в таблицах. Их у нас в последнее время издано довольно много.

Необходимо, однако, уметь вычислять эллиптические интегралы и функции и без таблиц. Это надо, например, для составления приближенных формул, для проверки таблиц, если есть опасение, что в них вкрались опечатки, наконец, понимание того, как вычисляются эллиптические интегралы и функции, дает большую уверенность в обращении с ними. Не исчерпывая в целом вопрос о методах приближенного вычисления, приведем здесь некоторые существенные приемы.

Начнем с вычисления

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (57)$$

Всего проще разложить интеграл (57) в ряд:

$$F(\varphi, k) = \varphi + \frac{k^2}{3!} \varphi^3 + \frac{9k^4 - 4k^2}{5!} \varphi^5 + \dots^1) \quad (58)$$

Этот прием может дать недостаточно благоприятные результаты, если модуль  $k$  близок к единице, т. к. сходимость ряда будет довольно слабая<sup>2)</sup>.

1) Мы не останавливаемся на выводах и исследованиях рядов для эллиптических интегралов и функций, так как вопрос этот подробно рассмотрен в работах указанных в примечании<sup>2)</sup>.

2) Этот недостаток стремились устранить разными приемами. См., например, интересное исследование проф. В. П. Ветчинкина: „Новые формулы и таблицы эллиптических интегралов и функций“, изд. Военно-Воздушной Академии Р.К. К.А., 1935 г. Другой метод, основанный на интерполировании, составлен И. М. Рапопортом (см. статью: „О приближенном вычислении эллиптических интегралов и функций“ в настоящем сборнике).



Ценный прием для увеличения сходимости разложения дает так. называемое преобразование Ландена, которое имеет, кроме того, важное значение во многих других вопросах теории эллиптических функций.

Рассмотрим сперва в чем заключается это преобразование, а потом покажем очень простой вывод его.

Преобразование Ландена связывает эллиптические интегралы с разными модулями и выражается таким тождеством:

$$\int_0^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_2^2 \sin^2 \varphi}} = (1+k_1) \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2 \sin^2 \varphi}} \quad (59)$$

где  $k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}$  (60)

$$\sin \varphi_2 = \frac{(1+k_1) \sin \varphi_1}{1+k_1 \sin^2 \varphi_1} \quad (61)$$

Чтобы доказать (59), дифференцируем (61).

$$\begin{aligned} \cos \varphi_2 d\varphi_2 &= \frac{(1+k_1)(1+k_1 \sin^2 \varphi_1) \cos \varphi_1 - 2k_1(1+k_1) \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1}{(1+k_1 \sin^2 \varphi_1)^2} d\varphi_1 = \\ &= (1+k_1) \cos \varphi_1 \frac{1-k_1 \sin^2 \varphi_1}{(1+k_1 \sin^2 \varphi_1)^2} d\varphi_1. \end{aligned} \quad (62)$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_2 &= \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_2} = \\ &= \frac{\sqrt{1 + 2k_1 \sin^2 \varphi_1 + k_1^2 \sin^4 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1 - 2k_1 \sin^2 \varphi_1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1}}{1 + k_1 \sin^2 \varphi_1} = \\ &= \frac{\sqrt{(1 - \sin^2 \varphi_1)(1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1)}}{1 + k_1 \sin^2 \varphi_1} = \frac{\cos \varphi_1 \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1}}{1 + k_1 \sin^2 \varphi_1} \end{aligned} \quad (63)$$

Разделив (62) на (63), находим:

$$d\varphi_2 = \frac{(1+k_1)(1-k_1 \sin^2 \varphi_1) d\varphi_1}{(1+k_1 \sin^2 \varphi_1) \sqrt{1-k_1^2 \sin^2 \varphi_1}} \quad (64)$$

Вычисляем далее выражение:

$$\sqrt{1-k_2^2 \sin^2 \varphi_2} = \frac{\sqrt{1 + 2k_1 \sin^2 \varphi_1 + k_1^2 \sin^4 \varphi_1 - 4k_1 \sin^2 \varphi_1}}{1 + k_1 \sin^2 \varphi_1} =$$

$$= \frac{1 - k_1 \sin^2 \varphi_1}{1 + k_1 \sin^2 \varphi_1} \quad (65)$$

Разделив (64) на (65), получаем:

$$\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \varphi_2}} = (1 + k_1) \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1}} \quad (66)$$

Интегрируя (66), находим:

$$F(\varphi_2, k_2) = (1 + k_1) F(\varphi_1, k_1) + \gamma \quad (67)$$

Для определения постоянной интегрирования  $\gamma$ , положим в (67)  $\varphi_1 = 0$ . Тогда  $\varphi_2 = 0$ , согласно (61) и, следовательно,  $\gamma = 0$ .

Таким образом, тождество (59) доказано.

Покажем применение преобразования Ландена на примере. Пусть требуется вычислить интеграл:  $F(0,730, 0,943)$ .

Вычисляем по формуле (58):

$$F(0,730, 0,943) = 0,730 + 0,058 + 0,006 + \dots$$

Покажем, что вычисление интеграла может быть сведено к вычислению ряда с еще лучшей сходимостью.

Преобразовываем вычисляемый интеграл по формуле Ландена.

$$F(0,730, 0,943) = 1,5000 F(0,5236, 0,5000).$$

$$F(0,5236, 0,5000) = 0,5236 + 0,0060 - 0,0002 + \dots = 0,5294.$$

$$F(0,730, 0,943) = 0,7941.$$

Как видно из примера, после применения преобразования Ландена, сходимость ряда резко возросла. Когда при вычислении интеграла требуется большая точность, имеет смысл применить преобразование Ландена несколько раз, до тех пор, пока аргументы интеграла не уменьшатся настолько, что при пользовании рядом можно будет ограничиться небольшим числом членов ряда.



# О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ И ФУНКЦИЙ

## Предисловие

Вопрос о вычислении эллиптических интегралов и функций привлек внимание инженеров. Сошлемся здесь на брошюру проф. В. П. Ветчинкина: „Новые формулы и таблицы эллиптических интегралов и функций“, издание Военно-Воздушной Академии РККА, Москва, 1935. В статье И. М. Рапопорта даются новые приемы вычисления эллиптических интегралов и функций, которые имеют существенный интерес. В виду этого я считаю, что опубликование статьи И. М. Рапопорта в авиационном журнале, имеющем примерно тот же круг читателей, что и брошюра проф. В. П. Ветчинкина, весьма полезно.

Проф. И. Штаерман

Вопрос об эффективных методах вычисления эллиптических интегралов и функций имеет настолько актуальное значение в инженерной практике, что ему уделяется в технической литературе серьезное внимание. Укажем здесь только на исследования проф. В. П. Ветчинкина.

В нашем исследовании мы находим полиномы, посредством которых эллиптические интегралы и функции с желаемым приближением могут быть выражены через элементарные функции. Вывод этих формул основан на интерполировании по модулю. Попутно мы указываем разложения эллиптических функций и интегралов в ряды по степеням модуля и дополнительного модуля. Разложения эти совместно с преобразованием Ландена дают прекрасный аппарат для отыскания приближенных числовых значений эллиптических функций и интегралов.

§ 1. Эллиптические интегралы первого и второго рода:

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \Delta\varphi d\varphi,$$

где  $\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ , являются функциями своего верхнего предела  $\varphi$  и параметра  $k$ , именуемого модулем. В поисках удобных формул для вычисления эллиптических интегралов можно идти тремя путями:

1) фиксируя параметр  $k$ , рассматривать интегралы, как функции аргумента  $\varphi$ ,

2) фиксируя верхний предел  $\varphi$ , рассматривать интегралы, как функции аргумента  $k$ ,

3) рассматривать эллиптические интегралы, как функции двух переменных. Настоящее исследование мы посвящаем второму из указанных методов.

Следуя принятому обозначению:  $k^2 = m$ , находим выражения для производных от эллиптических интегралов по  $m$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^n F}{\partial m^n} &= \frac{2n!}{2^{2n}n!} \int_0^\varphi \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\Delta^{2n+1}\varphi} \\ \frac{\partial^n E}{\partial m^n} &= -\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!} \int_0^\varphi \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\Delta^{2n-1}\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При граничных значениях модуля:  $k=0$  и  $k=1$ , найденные производные легко могут быть выражены посредством элементарных функций.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^n F}{\partial m^n}\right)_{m=0} &= \frac{2n!}{2^{2n}n!} \int_0^\varphi \sin^{2n}\varphi d\varphi = \frac{2n!}{2^{2n}n!} \int_0^\varphi \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)^{2n} d\varphi = \\ &= (-1)^n \frac{2n!}{2^{4n}n!} \int_0^\varphi \sum_{\lambda=0}^{2n} \frac{2n!}{(2n-\lambda)! \lambda!} (-1)^\lambda e^{2i(n-\lambda)\varphi} d\varphi = \\ &= (-1)^n \frac{2n!}{2^{4n}n!} \left\{ \frac{2n!}{(n!)^2} (-1)^n \varphi + \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{2n!}{(2n-\lambda)! \lambda! 2i(n-\lambda)} (-1)^\lambda e^{2i(n-\lambda)\varphi} + \right. \\ &+ \left. \sum_{\lambda=n+1}^{2n} \frac{2n!}{(2n-\lambda)! \lambda! 2i(n-\lambda)} (-1)^\lambda e^{2i(n-\lambda)\varphi} \right\}_0^\varphi = \frac{(2n!)^2}{2^{4n}(n!)^3} \varphi + \\ &+ (-1)^n \frac{2n!}{2^{4n}n!} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{2n!}{(n+j)!(n-j)! 2ij} (-1)^{n-j} e^{2ij\varphi} - \right. \\ &- \left. \sum_{j=1}^n \frac{2n!}{(n+j)!(n-j)! 2ij} (-1)^{n+j} e^{-2ij\varphi} \right\}_0^\varphi = \frac{(2n!)^2}{2^{4n}(n!)^3} \varphi + \\ &+ \frac{(2n!)^2}{2^{4n}n!} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j \sin 2j\varphi}{j(n+j)!(n-j)!} \end{aligned}$$



Или окончательно:

$$\left(\frac{\partial^n F}{\partial m^n}\right)_{m=0} = \frac{(2n!)^2}{2^{4n}n!} \left\{ \frac{\varphi}{(n!)^2} + \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j \sin 2j\varphi}{j(n+j)!(n-j)!} \right\} \quad (2)$$

Аналогично:

$$\left(\frac{\partial^n E}{\partial m^n}\right)_{m=0} = -\frac{(2n-2)!2n!}{2^{4n-1}(n-1)!} \left\{ \frac{\varphi}{(n!)^2} + \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j \sin 2j\varphi}{j(n+j)!(n-j)!} \right\} \quad (3)$$

Далее:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^n F}{\partial m^n}\right)_{m=1} &= \frac{2n!}{2^{2n}n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\cos^{2n+1}\varphi} = \frac{2n!}{2^{2n}n!} \left\{ \frac{\sin^{2n-1}\varphi}{2n \cos^{2n}\varphi} - \right. \\ &- \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n-2}\varphi d\varphi}{\cos^{2n-1}\varphi} \left. \right\} = \frac{2n!}{2^{2n}n!} \left\{ \frac{\sin^{2n-1}\varphi}{2n \cos^{2n}\varphi} - \frac{(2n-1) \sin^{2n-3}\varphi}{2n(2n-2) \cos^{2n-2}\varphi} + \right. \\ &+ \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n-4}\varphi d\varphi}{\cos^{2n-3}\varphi} \left. \right\} = \\ &= \frac{2n!}{2^{2n}n!} \left\{ \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{2n! [(n-j)!]^2 \sin^{2n-2j+1}\varphi}{2^{2j} (2n-2j+1)! (n!)^2 \cos^{2n-2j+2}\varphi} + \right. \\ &+ (-1)^n \frac{2n!}{2^{2n} (n!)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \left. \right\} = \frac{(2n!)^2}{2^{2n} (n!)^3} \left\{ \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \operatorname{Intg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{n-j} [(j-1)!]^2 \sin^{2j-1}\varphi}{2^{2n-2j+2} (2j-1)! \cos^{2j}\varphi} \left. \right\}. \end{aligned}$$

Или окончательно:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^n F}{\partial m^n}\right)_{m=1} &= \frac{(-1)^n (2n!)^2}{2^{4n} (n!)^3} \left\{ \operatorname{Intg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j 2^{2j-2} [(j-1)!]^2 \operatorname{tg}^{2j-1}\varphi}{(2j-1)! \cos \varphi} \left. \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\left(\frac{\partial^n E}{\partial m^n}\right)_{m=1} = \frac{(-1)^n (2n-1)! (2n-2)!}{2^{4n-3} [(n-1)!]^3} \left\{ \operatorname{Intg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \varphi + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^j 2^{2j-1} (j!)^2 \sin \varphi \operatorname{tg}^{2j} \varphi}{j(2j+1)!} \right\} \quad (5)$$

Полученные формулы: (2), (3), (4) и (5), дают возможность построить разложения эллиптических интегралов по степеням модуля в окрестности граничных значений модуля:

$$k=0 \text{ и } k=1.$$

Получаем ряды:

$$F(\varphi, k) = \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2n! k^n}{2^{2n} n!} \right\}^2 \left\{ \frac{\varphi}{(n!)^2} + \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j \sin 2j\varphi}{j(n+j)!(n-j)!} \right\} \quad (6a)$$

$$E(\varphi, k) = \varphi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n! (2n-2)! k^{2n}}{2^{4n-1} n! (n-1)!} \left\{ \frac{\varphi}{(n!)^2} + \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j \sin 2j\varphi}{j(n+j)!(n-j)!} \right\} \quad (6b)$$

$$F(\varphi, k) = \operatorname{Intg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2n! k^n}{2^{2n} (n!)^2} \right\}^2 \left\{ \operatorname{Intg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j 2^{2j-2} [(j-1)!]^2 \operatorname{tg}^{2j-1} \varphi}{(2j-1)! \cos \varphi} \right\} \quad (6c)$$

$$E(\varphi, k) = \sin \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)! (2n-2)! k^{2n}}{2^{4n-3} n! [(n-1)!]^3} \left\{ \operatorname{Intg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \varphi + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^j 2^{2j-1} (j!)^2 \sin \varphi \operatorname{tg}^{2j} \varphi}{j(2j+1)!} \right\} \quad (6d)$$

где  $k'^2 = 1 - k^2$ .



Или в развернутом виде:

$$F(\varphi, k) = \varphi + \frac{1}{4} \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) k^2 + \frac{9}{16} \left( \frac{1}{4} \varphi - \frac{1}{6} \sin 2\varphi + \frac{1}{48} \sin 4\varphi \right) k^4 + \frac{225}{64} \left( \frac{1}{36} \varphi - \frac{1}{48} \sin 2\varphi + \frac{1}{240} \sin 4\varphi - \frac{1}{2160} \sin 6\varphi \right) k^6 + \dots \quad (7a)$$

$$E(\varphi, k) = \varphi - \frac{1}{4} \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) k^2 - \frac{3}{16} \left( \frac{1}{4} \varphi - \frac{1}{6} \sin 2\varphi + \frac{1}{48} \sin 4\varphi \right) k^4 - \frac{45}{64} \left( \frac{1}{36} \varphi - \frac{1}{48} \sin 2\varphi + \frac{1}{240} \sin 4\varphi - \frac{1}{2160} \sin 6\varphi \right) k^6 - \dots \quad (7b)$$

$$F(\varphi, k) = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \left[ \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \right] k'^2 + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \left[ \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} + \frac{2 \operatorname{tg}^3 \varphi}{1 \cdot 3 \cos \varphi} \right] k'^4 + \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \left[ \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} + \frac{2 \operatorname{tg}^3 \varphi}{1 \cdot 3 \cos \varphi} - \frac{2 \cdot 4 \operatorname{tg}^5 \varphi}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cos \varphi} \right] k'^6 + \dots \quad (7c)$$

$$E(\varphi, k) = \sin \varphi + \frac{1}{2} \left[ \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \varphi \right] k'^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \frac{3}{4} \left[ \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \varphi - \frac{1}{3} \sin \varphi \operatorname{tg}^2 \varphi \right] k'^4 + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{5}{6} \left[ \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \varphi - \frac{1}{3} \sin \varphi \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} \sin \varphi \operatorname{tg}^4 \varphi \right] k'^6 + \dots \quad (7d)$$

Ряды (7с) и (7d) представляют особый интерес, т. к. при пользовании прочими формулами наиболее затруднительным является вычисление эллиптических интегралов с модулем  $k$ , близким к единице. Формулы (7с) и (7d) прекрасно устраняют это затруднение, т. к. их сходимость тем лучшая, чем ближе к единице модуль  $k$ . Кроме того, ряды (7с) и (7d) весьма удобны для вычислений, т. к. они допускают рекуррентное вычисление коэффициентов посредством следующих простых формул.

При обозначениях:

$$F(\varphi, k) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n k'^{2n}, \quad E(\varphi, k) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n k'^{2n},$$

$$a_{n+1} = \frac{2n+1}{4(n+1)^2} \left[ (2n+1)a_n + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{\operatorname{tg}^{2n+1} \varphi}{\cos \varphi} \right] \quad (8a)$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{4n(n+1)} \left[ (2n-1)(2n+1)b_n + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \sin \varphi \operatorname{tg}^{2n} \varphi \right] \quad (8b)$$

при  $n = 1, 2, 3, \dots$

Однако ряды (7с) и (7d), как мы увидим ниже, нуждаются в оговорке.

Чтобы оценить полученные нами ряды, представим их в виде:

$$F(\varphi, k) = \varphi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\varphi} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \int_0^{\varphi} \sin^4 \varphi d\varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \int_0^{\varphi} \sin^6 \varphi d\varphi + \dots \quad (9a)$$

$$E(\varphi, k) = \varphi - \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\varphi} \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} k^4 \int_0^{\varphi} \sin^4 \varphi d\varphi - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \int_0^{\varphi} \sin^6 \varphi d\varphi - \dots \quad (9b)$$



$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \frac{1}{2} k'^2 \int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi d\varphi}{\cos \varphi} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k'^4 \int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tg}^4 \varphi d\varphi}{\cos \varphi} - \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k'^6 \int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tg}^6 \varphi d\varphi}{\cos \varphi} + \dots \quad (9c)$$

$$E(\varphi, k) = \sin \varphi + \frac{1}{2} k'^2 \int_0^{\varphi} \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi d\varphi - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} k'^4 \int_0^{\varphi} \sin \varphi \operatorname{tg}^3 \varphi d\varphi + \\ + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} k'^6 \int_0^{\varphi} \sin \varphi \operatorname{tg}^5 \varphi d\varphi - \dots \quad (9d)$$

Отсюда очевидна сходимость рядов (9a) и (9b) во всем интервале  $0 \leq k \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  и рядов (9c) и (9d) в интервале  $0 \leq k' \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  к тому же весьма быстрая, т. к., при возрастании  $n$ , выражения:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}, \quad \int_0^{\varphi} \sin^{2n} \varphi d\varphi,$$

а при  $\varphi \leq \frac{\pi}{4}$ , также и

$$\int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tg}^{2n} \varphi d\varphi}{\cos \varphi} \quad \text{и} \quad \int_0^{\varphi} \sin \varphi \operatorname{tg}^{2n-1} \varphi d\varphi$$

стремятся к нулю.

Однако в интервале  $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$  ряды (9c) и (9d) могут расходиться и при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  расходятся при любом  $k'$ , отличном от нуля. Докажем, что ряды (9c) и (9d) абсолютно сходятся при  $k' < c \operatorname{tg} \varphi$ .

Рассматривая  $k'^2$ , как аргумент ряда (9c), и, обозначая через  $R$  радиус сходимости этого ряда, находим:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(2n+2) \int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tg}^{2n} \varphi d\varphi}{\cos \varphi}}{(2n+1) \int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tg}^{2n+2} \varphi d\varphi}{\cos \varphi}} \right\} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tg}^{2n} \varphi d\varphi}{\cos \varphi}}{\operatorname{tg}^2 \eta_n \int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tg}^{2n} \varphi d\varphi}{\cos \varphi}} \right\} = \operatorname{ctg}^2 \eta, \text{ где } 0 \leq \eta \leq \varphi.$$

Откуда  $R \geq \operatorname{ctg}^2 \varphi$ , что и требовалось доказать. Аналогичный результат получаем и для ряда (9d). Таким образом, ряды (9c) и (9d) сходятся в области  $k' < \operatorname{ctg} \varphi$ .

Исследование сходимости этих рядов за пределами указанной области не представляет особого интереса, т. к. уже на границе этой области безусловное предпочтение следует отдать рядам (9a) и (9в).

Приведенные нами ряды дают прекрасные результаты при вычислении эллиптических интегралов, однако в тех случаях, когда появляется необходимость не в отыскании приближенного числового значения эллиптического интеграла, а в приближенной замене интеграла элементарными функциями, пользование этими формулами является не совсем удобным. Действительно, если мы, например, заменим эллиптический интеграл  $F(\varphi, k)$  суммой первых  $n$  членов ряда (6a), нам придется взять значительное число членов ряда, для того чтобы удержать погрешность в достаточно малых пределах при всех значениях модуля, т. к. при значениях модуля, близких к единице, сходимость ряда (6a) значительно ослабевает. Если же мы заменим интеграл  $F(\varphi, k)$  суммой первых  $n$  членов ряда (6c), нам также придется брать значительное число членов ряда, ибо сходимость ряда (6c) значительно ослабевает при модуле, близком к нулю.

Чтобы избежать этого затруднения, мы предлагаем помещенные ниже формулы, вывод которых основан на интерполировании. Зная значение функции и ее  $p$  производных в данных  $n$  точках, мы можем построить полином, имеющий в данных точках общие значения и общие  $p$  производных с функцией. По-



лучаемые при этом формулы обобщают как ряд Тэйлора, так и интерполяционную формулу Лагранжа. Мы будем называть в настоящей статье „ $n$ -м приближением“ интерполяционный полином, имеющий с данной функцией  $f(m)$  общие значения и общие производные до  $(n-1)$ -ой включительно при значениях аргумента:  $m=0$  и  $m=1$ . Для первых приближений получаем формулы:

$$\left. \begin{aligned} y_1(m) &= f(0)m' + f(1)m; \\ y_2(m) &= f(0)(1 - 3m^2 + 2m^3) + f(1)m^2(3 - 2m) + f'(0)mm'^2 - \\ &\quad - f'(1)m^2m'; \text{ и т. д., где } m' = 1 - m \end{aligned} \right\} (10)$$

Для интеграла  $F(\varphi, k)$  имеем:

$$\begin{aligned} F(\varphi, 0) = \varphi, \quad F(\varphi, 1) = \text{Intg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad \left( \frac{\partial F}{\partial m} \right)_{m=0} = \frac{1}{4} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi), \\ \left( \frac{\partial F}{\partial m} \right)_{m=1} = -\frac{1}{4} \left[ \text{Intg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \right], \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Получаем:

$$\left. \begin{aligned} \text{1-е приближение: } F(\varphi, k) &\approx m' \varphi + m \ln \text{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right); \\ \text{2-е приближение: } F(\varphi, k) &\approx \frac{1}{4} [(4 + m - 14m^2 + 9m^3) \varphi + \\ &+ m^2 (13 - 9m) \ln \text{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - mm'^2 \sin \varphi \cos \varphi - \\ &- m^2 m' \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}]; \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} (11a)$$

Для интеграла  $E(\varphi, k)$  имеем:

$$\begin{aligned} E(\varphi, 0) = \varphi, \quad E(\varphi, 1) = \sin \varphi, \quad \left( \frac{\partial E}{\partial m} \right)_{m=0} = -\frac{1}{4} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi), \\ \left( \frac{\partial E}{\partial m} \right)_{m=1} = -\frac{1}{2} \left[ \text{Intg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \varphi \right], \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

1-е приближение:  $E(\varphi, k) \approx m'\varphi + m \sin \varphi$ ;

$$\left. \begin{aligned} 2\text{-е приближение: } E(\varphi, k) &\approx \frac{1}{4} [(4 - m - 10m^2 + 7m^3)\varphi + \\ &+ 2m^2 m' \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + 2m^2 (5 - 3m) \sin \varphi + \\ &+ mm'^2 \sin \varphi \cos \varphi]; \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} (11\text{в})$$

Приведенные формулы теряют смысл при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  и требуют дополнительных обоснований при значениях  $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ . Однако, в интервале  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  сходимость формул (11) очевидна. Чтобы получить представление о максимальной погрешности, даваемой формулами (11) в интервале  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ , вычислим по этим формулам интегралы 1-го и 2-го рода при наиболее неблагоприятных значениях их аргументов:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad m = 0,5.$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{0,5}\right) = 0,8260.$$

1-е приближение: 0,8334,  $|\Delta| = 0,0074$ .

2-е приближение: 0,8257,  $|\Delta| = 0,0003$ .

$$E\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{0,5}\right) = 0,74819.$$

1-е приближение: 0,7463,  $|\Delta| = 0,0019$ .

2-е приближение: 0,74824,  $|\Delta| = 0,00005$ .

Недостатком формул (11) является их сложность по сравнению с рядами Тэйлора. Однако, исключительно быстрая их сходимость с излишком компенсирует этот недостаток.

§ 2. В настоящем параграфе мы прилагаем методы, примененные нами в § 1 для аппроксимирования эллиптических интегралов, к эллиптическим функциям Якоби. Разложения эллиптических функций  $sn(u, k)$ ,  $cn(u, k)$  и  $dn(u, k)$  в ряды по степеням аргумента  $u$  обладают слабой сходимостью при значениях модуля  $k$ , близких к единице. Тем-же недостатком обладают и прочие формулы для вычисления эллиптических функций (тригонометрические ряды, бесконечные произведения и проч.). Приводимые нами формулы прекрасно устраняют затруднения, возникающие при вычислении эллиптических функций в этой области.



Для вывода формул вводим неявную функцию:

$$\Phi(\varphi, m, u) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}} - u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} - u = 0. \quad (12)$$

Тогда для определения производных амплитуды  $\varphi$  по  $m$  будем иметь ряд тождеств:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial m} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial m^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial m \partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial m} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial m} \right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial m^2} = 0, \text{ и т. д.}$$

Для частных производных функции  $\Phi$  находим выражения:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m} = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\Delta^3 \varphi}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial m^2} = \frac{1.3}{2.2} \int_0^{\varphi} \frac{\sin^4 \varphi d\varphi}{\Delta^5 \varphi}, \text{ и т. д.};$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{1}{\Delta \varphi}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \frac{m \sin \varphi \cos \varphi}{\Delta^3 \varphi}, \text{ и т. д.};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial m \partial \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi}{2 \Delta^3 \varphi}, \text{ и т. д.}$$

Через квадратуры выражаются лишь частные производные вида

$\frac{\partial^n \Phi}{\partial m^n}$ , причем

$$\frac{\partial^n \Phi}{\partial m^n} = \frac{2n!}{2^{2n} n!} \int_0^{\varphi} \frac{\sin^{2n} \varphi d\varphi}{\Delta^{2n+1} \varphi}. \quad (13)$$

Квадратуры (13) могут быть выполнены при значениях модуля  $k=0$  и  $k=1$ .

При  $k=0$  находим:

$$\varphi = u; \quad \Delta \varphi = 1; \quad \int_0^{\varphi} \frac{\sin^{2n} \varphi d\varphi}{\Delta^{2n+1} \varphi} = \int_0^u \sin^{2n} u du.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m} = \frac{1}{4}(u - \sin u \cos u), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial m^2} = \frac{3}{32}[3u - \sin u \cos u (3 + 2 \sin^2 u)], \text{ и т. д.}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0, \text{ и т. д.}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial m \partial \varphi} = \frac{1}{2} \sin^2 u, \text{ и т. д.};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m} = -\frac{1}{4}(u - \sin u \cos u);$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial m^2} = -\frac{1}{32}[u(9 - 8\sin^2 u) - \sin u \cos u(9 - 2\sin^2 u)]; \text{ и т. д.}$$

При  $k=1$  находим:

$$\sin \varphi = thu^2; \quad \cos \varphi = \Delta \varphi = \frac{1}{chu}; \quad d\varphi = \Delta \varphi du = \frac{du}{chu};$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{\sin^{2n} \varphi d\varphi}{\Delta^{2n+1} \varphi} = \int_0^u sh^{2n} u du$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m} = -\frac{1}{4}(u - shuchu), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial m^2} = \frac{3}{32}[3u - shuchu(3 - 2sh^2u)], \text{ и т. д.};$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = chu, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = shuchu \text{ и т. д.}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial m \partial \varphi} = \frac{1}{2}sh^2uchu, \text{ и т. д.}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m} = \frac{1}{4chu}(u - shuchu);$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial m^2} = -\frac{1}{32ch^2u}[2u^2shu + uchu(9 + 4sh^2u) - 9shuch^2u]; \text{ и т. д.}$$

Ищем далее производные по  $m$  от функций:  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\Delta \varphi$ .

$$\frac{\partial}{\partial m} \sin \varphi = \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial m}, \quad \frac{\partial}{\partial m} \cos \varphi = -\sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial m}, \quad \frac{\partial}{\partial m} \Delta \varphi = -\frac{\sin \varphi}{2 \Delta \varphi} (\sin \varphi +$$

$$+ 2m \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial m});$$

$$\frac{\partial^2}{\partial m^2} \sin \varphi = -\sin \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial m} \right)^2 + \cos \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial m^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial m^2} \cos \varphi = -\cos \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial m} \right)^2 - \sin \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial m^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial m^2} \Delta \varphi = -\frac{1}{4\Delta^3 \varphi} \left[ \sin^4 \varphi + 4 \sin \varphi \cos \varphi (1 + \Delta^2 \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial m} + \right.$$

$$\left. + 4m (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \Delta^2 \varphi) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial m} \right)^2 + 4m \sin \varphi \cos \varphi \Delta^2 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial m^2} \right]; \text{ и т. д.} \quad (14)$$

$$) shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad chu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad thu = \frac{shu}{chu} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$



При  $k=0$ , (14) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial snu}{\partial m}\right)_{m=0} &= -\frac{\cos u}{4}(u - \sin u \cos u), \left(\frac{\partial cnu}{\partial m}\right)_{m=0} = \\ &= \frac{\sin u}{4}(u - \sin u \cos u), \\ \left(\frac{\partial dnu}{\partial m}\right)_{m=0} &= -\frac{\sin^2 u}{2}; \\ \left(\frac{\partial^2 snu}{\partial m^2}\right)_{m=0} &= -\frac{1}{32}[2u^2 \sin u + 3u \cos u (3 - 4\sin^2 u) - \\ &\quad - \sin u \cos^3 u (9 - 4\sin^2 u)], \\ \left(\frac{\partial^2 cnu}{\partial m^2}\right)_{m=0} &= -\frac{1}{32}[2u^2 \cos u - u \sin u (13 - 12\sin^2 u) + \\ &\quad + \sin^2 u \cos u (11 - 4\sin^2 u)], \\ \left(\frac{\partial^2 dnu}{\partial m^2}\right)_{m=0} &= \frac{\sin u}{4}[2u \cos u - \sin u (2 - \sin^2 u)]; \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} (15)$$

При  $k=1$ , (14) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial snu}{\partial m}\right)_{m=1} &= \frac{1}{4ch^2u}(u - shuchu), \left(\frac{\partial cnu}{\partial m}\right)_{m=1} = \\ &\quad - \frac{shu}{4ch^2u}(u - shuchu), \\ \left(\frac{\partial dnu}{\partial m}\right)_{m=1} &= -\frac{shu}{4ch^2u}(u + shuchu); \\ \left(\frac{\partial^2 snu}{\partial m^2}\right)_{m=1} &= -\frac{1}{32ch^3u}[4u^2shu + 9uchu - shuch^2u(9 - 2sh^2u)], \\ \left(\frac{\partial^2 cnu}{\partial m^2}\right)_{m=1} &= -\frac{1}{32ch^3u}[2u^2(1 - sh^2u) - \\ &\quad - ushuchu(13 + 4sh^2u) + 11sh^2uch^2u], \\ \left(\frac{\partial^2 dnu}{\partial m^2}\right)_{m=1} &= -\frac{1}{32ch^3u}[2u^2(1 - sh^2u) + \\ &\quad + ushuchu(3 + 4sh^2u) - 5sh^2uch^2u]; \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} (16)$$

Пользуясь (15), находим разложения в ряды по степеням модуля в окрестности точки  $k=0$ :

$$sn(u, k) = \sin u - \frac{\cos u}{4}(u - \sin u \cos u)k^2 - \frac{1}{64}[2u^2 \sin u + 3u \cos u (3 - 4\sin^2 u) - \sin u \cos^3 u (9 - 4\sin^2 u)] k^4 + \dots \quad (17a)$$

$$cn(u, k) = \cos u + \frac{\sin u}{4} (u - \sin u \cos u) k^2 - \frac{1}{64} [2u^2 \cos u - u \sin u (13 - 12 \sin^2 u) + \sin^2 u \cos u (11 - 4 \sin^2 u)] k^4 + \dots \quad (17b)$$

$$dn(u, k) = 1 - \frac{\sin^2 u}{2} k^2 + \frac{\sin u}{8} [2u \cos u - \sin u (2 - \sin^2 u)] k^4 + \dots \quad (17c)$$

Сходимость приведенных рядов непосредственно вытекает из абсолютной сходимости разложений эллиптических функций по степеням аргумента  $u$ . Разложения по степеням  $u$  имеют коэффициентами знакопостоянные полиномы от  $k$ . Перестановкой слагаемых этих рядов можно получить разложения эллиптических функций в ряды по степеням модуля. А изменение порядка членов абсолютно сходящегося ряда, как известно, не нарушает его сходимости.

Пользуясь (16), находим разложения в ряды по степеням модуля в окрестности точки  $k=1$ :

$$sn(u, k) = thu - \frac{1}{4ch^2u} (u - shuchu) k'^2 - \frac{1}{64ch^3u} [4u^2shu + 9uchu - shuch^2u (9 - 2sh^2u)] k'^4 + \dots \quad (18a)$$

$$cn(u, k) = \frac{1}{chu} + \frac{shu}{4ch^2u} (u - shuchu) k'^2 - \frac{1}{64ch^3u} [2u^2 (1 - sh^2u) - ushuchu (13 + 4sh^2u) + 11sh^2uch^2u] k'^4 + \dots \quad (18b)$$

$$dn(u, k) = \frac{1}{chu} + \frac{shu}{4ch^2u} (u + shuchu) k'^2 - \frac{1}{64ch^3u} [2u^2 (1 - sh^2u) + ushuchu (3 + 4sh^2u) - 5sh^2uch^2u] k'^4 + \dots \quad (18c)$$

Подставляя (15) и (16) в (10), находим интерполяционные формулы для эллиптических функций:

1-ое приближение:

$$sn(u, k) \approx m' \sin u + mthu; \quad cn(u, k) \approx m' \cos u + \frac{m}{chu};$$

$$dn(u, k) \approx m' + \frac{m}{chu}. \quad (19a)$$

2-ое приближение:

$$sn(u, k) \approx \sin u + m^2 (3 - 2m) (thu - \sin u) - \frac{mm'}{4ch^2u} [m' \cos uch^2u (u - \sin u \cos u) + m (u - shuchu)];$$

$$cn(u, k) \approx \cos u + \frac{m^2 (3 - 2m)}{chu} (1 - \cos uch) + \frac{mm'}{4ch^2u} [m' \sin uch^2u (u -$$



$$- \sin u \cos u) + mshu (u - shuchu)];$$

$$dn(u, k) \approx 1 + \frac{m^2(3-2m)}{chu}(1-chu) - \frac{mm'}{4ch^2u} [2m' \sin^2 uch^2u - mshu (u + shuchu)]. \quad (19b)$$

Чтобы оценить полученные нами формулы, сопоставим сходимость разложений эллиптических функций по степеням аргумента  $u$  со сходимостью полученных нами формул на следующем примере, в котором мы выбираем наиболее неблагоприятное для наших формул значение параметра:  $m = \frac{1}{2}$ .

Таблица абсолютных значений погрешностей, получаемых при вычислении функции  $sn(1, \sqrt{0,5})$ .

$n$	1	2	3	4	5	6
Для суммы $n$ членов разложения по степеням $u$ . . . . .	0,19700	0,05300	0,01575	0,00456	0,00133	0,00038
Для суммы $n$ членов разложения по степеням модуля $k$ .	0,03847	0,00164	0,00013			
Для суммы $n$ членов разложения по степеням дополнительного модуля $k'$ . .	0,04141	0,00129	0,00012			
Для $n$ -го интерполяционного приближения . . . . .	0,00147	0,00001				

Из приведенной таблицы видно, что изложенный нами метод вычисления эллиптических функций, даже при самых неблагоприятных для него значениях модуля, является весьма эффективным. Особый интерес представляет интерполяция по модулю. Так, например, для эллиптического синуса уже второе приближение заменяет пятизначные таблицы для значений аргумента  $u$ , не превышающих единицы. Особый эффект изложенный метод дает при вычислении эллиптических функций с модулем, близким к единице.

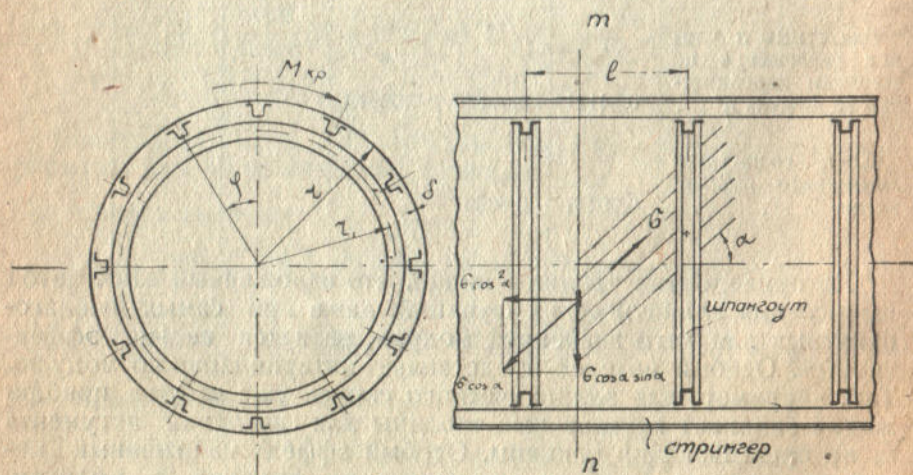


## ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА НА КРУЧЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, УСИЛЕННОЙ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

Вывод приближенных формул может представить интерес для конструктора фюзеляжа монокок, т. к. знакомит его с работой отдельных элементов фюзеляжа.

Фюзеляж монокок за последние годы получил широкое распространение. Конструкция такого фюзеляжа состоит из поперечного набора шпангоутов и продольных стрингеров. Весь набор указанных элементов обшит тонкой металлической обшивкой; при дюралевых листах толщина обшивки доходит до 0,5 мм, а при стальных листах даже до 0,25 мм.

Фюзеляж типа монокок обладает целым рядом преимуществ перед другими типами. Внутри фюзеляжа монокок нет никаких поперечных расчалок. Особенно ценным в фюзеляже монокок является его способность сохранять свою прочность



Фиг. 1.

даже в том случае, если он будет пробит пулями, так как имеется огромное количество путей, по которым могут перераспределяться усилия.



## Роль обшивки

Металлическая обшивка, с одной стороны, связывает в одно целое все элементы конструкции и обеспечивает каркасу дополнительную жесткость, а с другой стороны, обшивка участвует в работе.

В настоящей заметке дается вывод приближенных формул для расчета на скручивание цилиндрической оболочки, усиленной поперечными и продольными ребрами; эти формулы опубликованы в журнале *Luftfahrtforschung* за 1935 год № 8 без вывода.

Рассматриваемая нами конструкция показана на фиг. 1. На поперечных кольцах (шпангоутах) размещены равномерно по окружности продольные ребра (стрингера); сверху к стрингерам приклепана тонкая металлическая обшивка.

### Образование волн

Опыты показывают, что тонкие листы обшивки фюзеляжа монокок легко теряют устойчивость и выпучиваются уже при небольшой нагрузке; при скручивании фюзеляжа на обшивке появляются волны, идущие по винтовой линии и составляющие с осью цилиндра угол  $\alpha$ . В опытах П. Знаменского с фюзеляжем монокок волны на обшивке располагались под углом около  $35^\circ$  (см. журнал *Тех. Воз. Флота* 1934 г., № 4).

Приближенно угол  $\alpha$  может быть рассчитан по формуле проф. Wagner'a.

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \frac{\sigma_x}{\sigma}}{1 - \frac{\sigma_y}{\sigma} + \frac{E \varphi^2}{\sigma 24}}, \quad (1)$$

где:

$\sigma$  — растягивающее напряжение в обшивке, направленное вдоль диагоналей растяжения.

$\sigma_x$  — нормальное напряжение в стрингере.

$\sigma_y$  — нормальное напряжение в шпангоуте.

$\varphi$  — центральный угол, определяемый двумя рядом расположенными стрингерами.

Приведенная формула показывает, что для определения угла  $\alpha$  необходимо знать напряжения:  $\sigma$ ,  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ ; но эти напряжения в свою очередь зависят от угла  $\alpha$ . В практике задача решается методом последовательных приближений. Принимают для угла  $\alpha$  приближенное значение, а потом, по нижеуказанным формулам (2), (4) и (8) рассчитывают напряжения:  $\sigma$ ,  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ ; найденные значения напряжений позволяют вычислить более точное значение для угла  $\alpha$ . После 2-х, 3-х повторных расчетов получают решение задачи с достаточной для практики точностью.



## Напряжение в обшивке

После потери устойчивости на обшивке появляются волны и обшивка начинает работать на растяжение вдоль волн. Растягивающее напряжение в обшивке обозначим через  $\sigma$ . Разрежем цилиндр сечением  $m-n$  и составим уравнение равновесия между скручивающим моментом  $M_{кр}$  и внутренними силами, распределенными по сечению  $m-n$ . Напряжение по вертикальной площадке сечения  $m-n$  равно

$$\sigma \cos \alpha,$$

его составляющие по вертикальному и горизонтальному направлениям:

$$\sigma \cos \alpha \sin \alpha \text{ и } \sigma \cos^2 \alpha.$$

Момент внешних сил относительно оси цилиндра уравнивает момент внутренних сил, а потому получаем уравнение:

$$2\pi r \delta \sigma r \cos \alpha \sin \alpha = M_{кр},$$

откуда имеем искомое напряжение в обшивке:

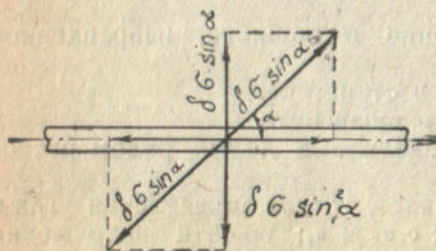
$$\sigma = \frac{M_{кр}}{\pi r^2 \delta \sin 2\alpha}, \quad (2),$$

причем  $r$  радиус кривизны обшивки, а  $\delta$  толщина обшивки.

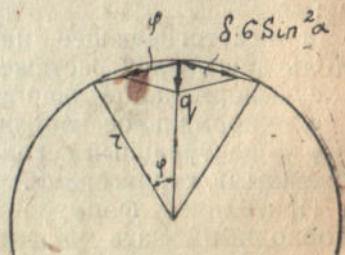
Обозначим через  $F$  площадь контура, тогда напряжение по волне выразится так:

$$\sigma = \frac{M_{кр}}{\delta F \cdot \sin 2\alpha}. \quad (3).$$

Полученная формула показывает, что растягивающее напря-



Фиг. 2.



Фиг. 3.

жение в обшивке приблизительно в два раза больше напряжения сдвига  $\tau$ , вычисленного по формуле Бретта:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\delta F}$$



## Стрингера

Горизонтальная составляющая напряжения по сечению  $m-n$  равна  $\sigma \cos^2 \alpha$ . По всему сечению кольца напряжения одинаковы, а потому сила, воспринимаемая стрингерами, равна:

$$2 \pi r \delta \sigma \cos^2 \alpha.$$

Обозначим через

$n$  — число стрингеров,

$F_x$  — площадь сечения одного стрингера,

$\sigma_x$  — нормальное напряжение в стрингере,

тогда, исходя из условия равновесия выделенной части цилиндра, получим уравнение:

$$2 \pi r \delta \sigma \cos^2 \alpha = n F_x \sigma_x,$$

откуда находим напряжение в стрингере:

$$\sigma_x = \frac{2 \pi r \delta \sigma \cos^2 \alpha}{n F_x};$$

после замены  $\sigma$  его значением, получаем:

$$\sigma_x = \frac{M_{кр} \operatorname{ctg} \alpha}{n r F_x} \quad (\text{сжатие}). \quad (4)$$

Растянутые диагонали обшивки, будучи закрепленными на стрингерах, создают давления на них, направленные по радиусам внутрь цилиндра.

Обозначим давление, приходящееся на единицу длины стрингера, через  $q$  и примем, что  $q$  вдоль стрингера не изменяется.

Выделим стрингер и силы  $\delta \sigma \sin \alpha$ , действующие на единицу его длины, разложим на две составляющие (фиг. 2).

Составляющие  $\delta \sigma \sin^2 \alpha$ , направленные перпендикулярно к оси стрингера, складываются в равнодействующую  $q$  (фиг. 3), величину которой находим с приближением из параллелограмма:

$$q = 1 \delta \sigma \sin^2 \alpha;$$

при  $n$  стрингерах, размещенных равномерно по сечению,

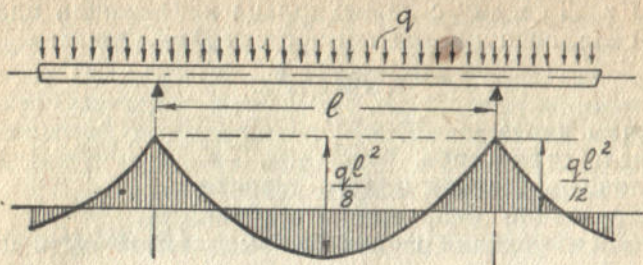
$$q = \frac{2 \pi}{n},$$

а потому

$$q = \frac{M_{кр} \operatorname{tg} \alpha}{n r^2} \quad (5)$$

Обыкновенно стрингера выполняются как неразрезные ребра. При большом числе опор и равномерной нагрузке каждый пролет стрингера можно рассматривать как балку с заделанными

концами. Изменение изгибающего момента по длине пролета  $l$  представится заштрихованной площадью (фиг. 4).



Фиг. 4.

Наибольший изгибающий момент соответствует опорам, т. е. местам примыкания стрингера к шпангоутам.

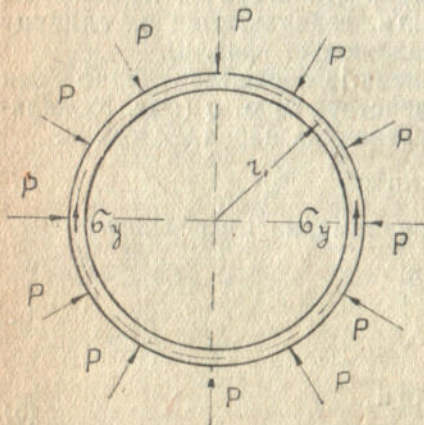
$$M_{\max} = \frac{ql^2}{12} = \frac{M_{кр} l^2}{n r^2 12} \operatorname{tg} \alpha, \quad (6)$$

где  $l$  — расстояние между двумя смежными шпангоутами.

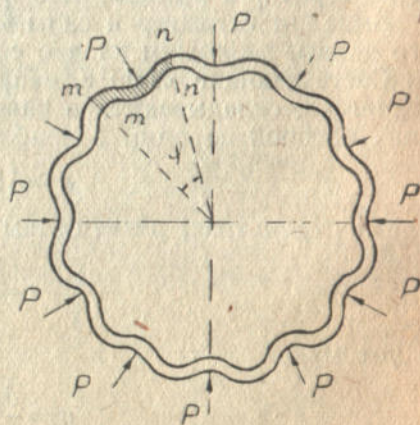
Итак, стрингера работают на сжатие и на изгиб, причем изгиб происходит в радиальной плоскости, проходящей через ось цилиндра.

### Шпангоуты

Шпангоуты мы рассматриваем как кольца, нагруженные сосредоточенными силами в местах примыкания к ним стрингера.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

ров (фиг. 5). Величина каждой из этих сил равна давлению стрингера и может быть принята равной



$$P = ql = \frac{M_{кр} l}{nr^2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (7)$$

Радиус среднего волокна шпангоута обозначим через  $r_1$ . Приложенные к шпангоуту сосредоточенные силы  $P$  вызывают в нем сжимающие напряжения  $\sigma_y$  и изгибают его, вызывая деформацию по фиг. 6.

При определении сжимающего напряжения мы сосредоточенную силу  $P$  заменяем равномерно-распределенной нагрузкой:

$$q_0 = \frac{P}{r_1 \varphi},$$

тогда искомое сжимающее напряжение:

$$\sigma_y = \frac{q_0 r_1}{F_y} = \frac{P}{\varphi F_y} = \frac{M_{кр} l \operatorname{tg} \alpha}{\varphi n F_y r^2},$$

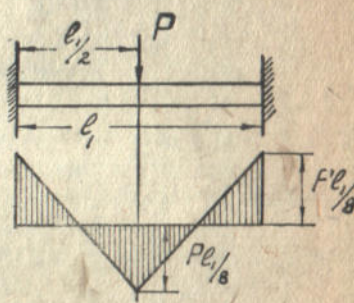
где

$F_y$  — площадь поперечного сечения шпангоута.

Величину  $n\varphi$  заменяем через  $2\pi$  и окончательно находим:

$$\sigma_y = \frac{M_{кр} l \operatorname{tg} \alpha}{2\pi r^2 F_y} \quad (\text{сжатие}). \quad (8)$$

Для расчета шпангоута на изгиб, отсекаем участок длиной  $l_1 = r_1 \varphi$ ; этот участок на фиг. 6 заштрихован. Так как поперечные сечения  $m-m$  и  $n-n$  не поворачиваются, выделенный участок мы можем рассматривать как балку с заделанными концами (фиг. 7). При нагрузке сосредоточенной силой  $P$  по середине пролета, изменение изгибающего момента по длине пролета представится заштрихованной площадью (фиг. 7).



Фиг. 7.

Наибольшие моменты возникают под грузом  $P$  и на опорах:

$$M_{\max} = \frac{Pl_1}{8}$$

или

$$M_{\max} = \frac{\pi M_{кр} l r_1}{4 n^2 r^2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (9)$$

Если через  $W$  обозначим момент сопротивления поперечного сечения шпангоута, то наибольшее напряжение, вызываемое изгибом, выразится так:

$$\sigma_b = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{\pi M_{кр} l r_1}{4 n^2 r^2 W} \operatorname{tg} \alpha. \quad (10)$$

Найдем еще соотношение между напряжением  $\sigma_b$  и  $\sigma_y$ .

Выражение (10) делим на выражение (8), получаем:

$$\sigma_b : \sigma_y = \frac{\pi^2 r_1 F_y}{2 n^2 W}. \quad (11)$$

В некоторых конструкциях обшивка приклепывается не только к стрингерам, но и к шпангоутам. В этом случае часть радиальных давлений, возбуждаемых обшивкой и направленных внутрь цилиндра, передается непосредственно шпангоутам и, следовательно, производя расчет по выведенным выше формулам, мы будем иметь запас прочности.

---



## ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ РАСЧЕТА МНОГОЛОНЖЕРОННОГО КРЫЛА БЕЗ НЕСУЩЕЙ ОБШИВКИ

Многолонжеронное крыло представляет из себя сложную, статически неопределимую пространственную систему затруднительную для расчета.

В практике пользуются приближенным методом Бургесса, дающим довольно правильное распределение расчетной нагрузки по отдельным лонжеронам. В своем методе Бургесс учитывает только сопротивление лонжеронов изгибу и не принимает во внимание сопротивление лонжеронов скручиванию.

В настоящей заметке задача разрешается более точно; учтено сопротивление лонжеронов изгибу и скручиванию.

### Основные допущения

В основу расчета положены следующие допущения:

1. Нервюры крыла принимаем абсолютно жесткими.
2. Крыло рассматриваем состоящим из отсеков, принимая за таковые участки между усиленными нервюрами.
3. Работой расчалок, расположенных в плоскости крыла, пренебрегаем.

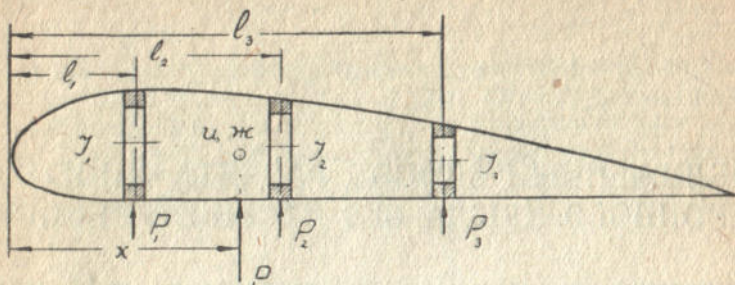
При сделанных допущениях, поперечное сечение крыла не деформируется.

В расчете крыла большую роль играет центр жесткости, от положения которого зависит величина скручивающего момента.

### Центр жесткости и его положение

При произвольной нагрузке на крыло, его поперечные сечения получают поступательные перемещения и повороты. В частном случае нагрузки сечения крыла поворота не получают; это имеет место в тех случаях, когда равнодействующая действующих на крыло нагрузок приложена к центру жесткости. Положение центра жесткости может быть найдено из условия равенства прогибов лонжеронов крыла. Пусть равнодействующую

щая давлений воздушного потока проходит через центр жесткости поперечного сечения крыла (фиг. 1).



Фиг. 1.

Приравнивая между собой прогибы отдельных лонжеронов, получим уравнения:

$$\frac{P_1 l^3}{3EI_1} = \frac{P_2 l^3}{3EI_2} = \frac{P_3 l^3}{3EI_3}, \quad (a),$$

кроме того, мы имеем:

$$P = P_1 + P_2 + P_3. \quad (b)$$

Решение написанных уравнений дает величины нагрузок по отдельным лонжеронам:

$$P_1 = P \frac{I_1}{\Sigma I}; \quad P_2 = P \frac{I_2}{\Sigma I}; \quad P_3 = P \frac{I_3}{\Sigma I}. \quad (c)$$

Следовательно, сила  $P$ , проходящая через центр жесткости, распределяется между лонжеронами прямо пропорционально их моментам инерции. Чтобы определить положение центра жесткости, приравниваем момент равнодействующей силы  $P$  сумме моментов ее составляющих:

$$Px = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3;$$

после замены  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  их значениями, получим:

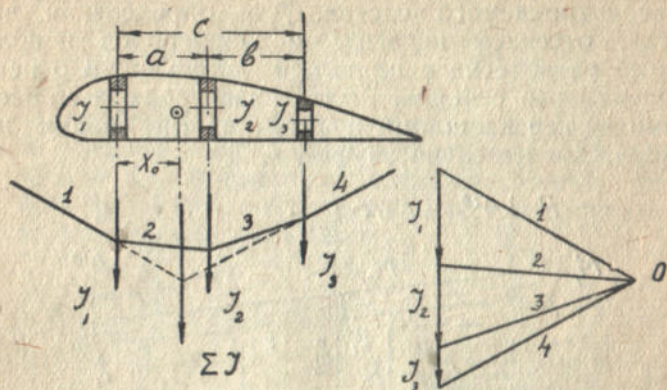
$$x = \frac{I_1 l_1 + I_2 l_2 + I_3 l_3}{I_1 + I_2 + I_3} = \frac{\Sigma \Pi}{\Sigma I} \quad (d)$$

Выражение (d) для  $x$  показывает, что центр жесткости поперечного сечения крыла совпадает с центром параллельных сил,



по величине равных моментам инерции лонжеронов, и может быть легко найден путем графического построения (фиг. 2).

Формула (d) определяет расстояние центра жесткости от передней кромки дужки.



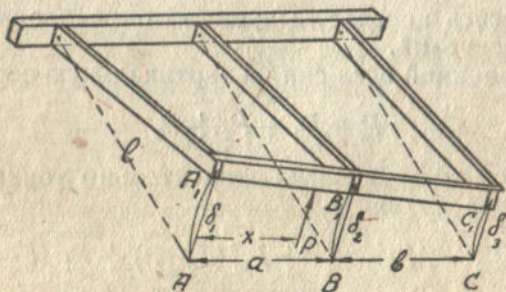
Фиг. 2.

При принятых обозначениях, вписанных на фиг. 2, расстояние центра жесткости от переднего лонжерона выразится так:

$$x_0 = \frac{I_2 a + I_3 c}{I_1 + I_2 + I_3} \quad (e).$$

### Угол закручивания отсека крыла

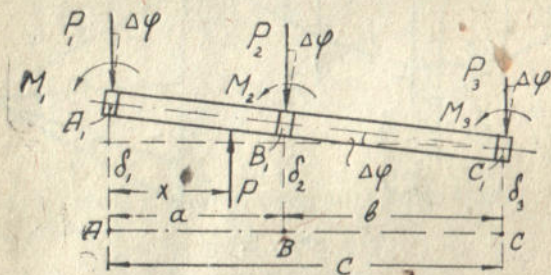
Рассмотрим один отсек крыла (фиг. 3) и определим угол закручивания  $\Delta\varphi$ . Предполагаем, что при деформации задняя нервюра сохраняет свое положение, а передняя из положения  $AC$



Фиг. 3.

переходит в новое положение  $A_1C_1$ .

Нагрузка  $P$  приложена произвольно на расстоянии  $x$  от переднего лонжерона; точка приложения силы  $P$  не совпадает с центром жесткости поперечного сечения, следовательно, прогибы отдельных лонжеронов  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\delta_3$  между собою не равны. Угол  $\Delta\varphi$  между  $A_1C_1$  и  $AC$  представляет искомый угол закручивания рассматриваемого отсека. Для определения величины этого угла, отсекаем нервюру от лонжеронов и пользуемся условием ее равновесия и принятым допущением о неизменяемости поперечного сечения. Выделенная нервюра со всеми действующими на нее внешними и реактивными силами и моментами изображена отдельно на фиг. 4.



Фиг. 4.

Концы лонжеронов  $A$ ,  $B$  и  $C$  прогибаются на  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\delta_3$  и закручиваются. По нашему предположению нервюры не изгибается, следовательно, углы закручивания всех лонжеронов одинаковы и равны  $\Delta\varphi$ . Концы лонжеронов, желая занять свое первоначальное положение, будут надавливать на нервюру с силами  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  и создавать моменты  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  (фиг. 4).

За неизвестные принимаем следующие величины:

$$P_1, P_2, P_3, M_1, M_2, M_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \text{ и } \Delta\varphi;$$

всего имеем десять неизвестных; для их определения составляем столько же уравнений.

1. Сумма проекций всех сил на вертикальную ось равна нулю:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \quad (1)$$

2. Сумма моментов всех сил относительно точки приложения нагрузки  $P$  равна нулю:

$$-M_1 - M_2 - M_3 - P_1 x + P_2 (a - x) + P_3 (c - x) = 0 \quad (2)$$

3, 4, 5. Прогибы лонжеронов выражаем в зависимости от нагрузок:

$$\delta_1 = \frac{P_1 l^3}{3EI_1}; \quad \delta_2 = \frac{P_2 l^3}{3EI_2}; \quad \delta_3 = \frac{P_3 l^3}{3EI_3} \quad (3), (4), \text{ и } (5),$$

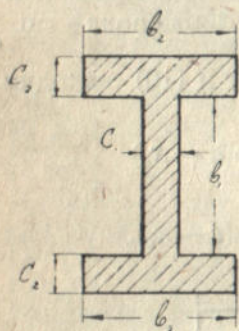


где  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  — моменты инерции поперечных сечений лонжеронов относительно горизонтальной оси, проходящей через их центры тяжести.

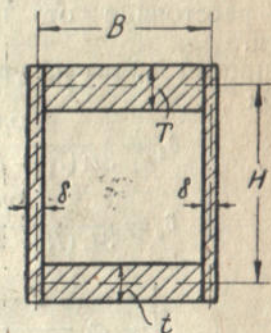
6, 7 и 8. Углы закручивания лонжеронов выражаем через скручивающие моменты:

$$\Delta\varphi = \frac{M_1 l}{GK_1}; \quad \Delta\varphi = \frac{M_2 l}{GK_2}; \quad \Delta\varphi = \frac{M_3 l}{GK_3}, \quad (6), (7) \text{ и } (8),$$

где  $G$  — модуль упругости при сдвиге для материала лонжеронов,  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  — коэффициенты жесткости на кручение; эти коэффициенты зависят от формы поперечного сечения лонжеронов и могут быть рассчитаны с достаточным для практики приближением по следующим формулам:



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Для двутаврового сечения (фиг 5)

$$K = \frac{b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3}{3}$$

Для коробчатого сечения (фиг. 6)

$$K = \frac{4B^2 H^2}{\frac{B}{T} + \frac{B}{t} + 2\frac{H}{\delta}}$$

9 и 10. Условие неизменяемости нервюры позволяет написать еще два уравнения, связывающие прогибы  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\delta_3$  с углом закручивания  $\Delta\varphi$ :

$$\Delta\varphi = \frac{\delta_1 - \delta_3}{c}; \quad \Delta\varphi = \frac{\delta_1 - \delta_2}{a}. \quad (9) \text{ и } (10)$$

Решение полученных уравнений ведем в таком порядке. Из уравнений (3), (4) и (5), находим силы  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  и их значения подставляем в уравнение (1); получаем:

$$P = \frac{3E}{l^3} (I_1 \delta_1 + I_2 \delta_2 + I_3 \delta_3). \quad (11).$$

Из уравнений (9) и (10) находим  $\delta_2$  и  $\delta_3$  и их значения вставляем в уравнение (11); имеем:

$$P = \frac{3E}{l^3} [I_1 \delta_1 + I_2 \delta_1 + I_3 \delta_1 - a I_2 \Delta\varphi - c I_3 \Delta\varphi],$$

откуда

$$\delta_1 = \frac{Pl^3}{3E(I_1 + I_2 + I_3)} + \Delta\varphi \frac{(aI_2 + cI_3)}{(I_1 + I_2 + I_3)},$$

или

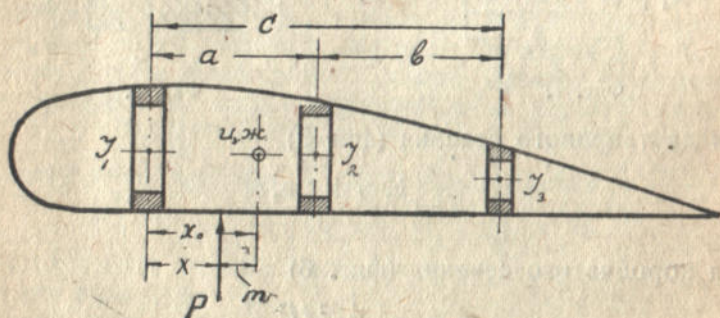
$$\delta_1 = \frac{Pl^3}{3E(I_1 + I_2 + I_3)} + \Delta\varphi x_0, \quad (12),$$

где  $x_0$  — расстояние от переднего лонжерона до центра жесткости.

Зная прогиб  $\delta_1$ , мы из уравнений (9) и (10) находим [прогибы  $\delta_2$  и  $\delta_3$ ]:

$$\delta_2 = \frac{Pl^3}{3E(I_1 + I_2 + I_3)} - \Delta\varphi(a - x_0) \quad (13),$$

$$\delta_3 = \frac{Pl^3}{3E(I_1 + I_2 + I_3)} - \Delta\varphi(c - x_0). \quad (14)$$



Фиг. 7.

Найденные значения прогибов подставляем в уравнения (3), (4) и (5); находим:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P \frac{I_1}{I_1 + I_2 + I_3} + \frac{3EI_1}{l^3} \Delta\varphi x_0 \\ P_2 &= P \frac{I_2}{I_1 + I_2 + I_3} + \frac{3EI_2}{l^3} \Delta\varphi (a - x_0) \\ P_3 &= P \frac{I_3}{I_1 + I_2 + I_3} - \frac{3EI_3}{l^3} \Delta\varphi (c - x_0) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$



Следовательно, определение давлений на концы лонжеронов может быть сделано после вычисления угла закручивания  $\Delta\varphi$ . Чтобы вычислить величину этого угла, воспользуемся уравнением (2), причем моменты  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  выразим через  $\Delta\varphi$  по уравнениям (6), (7) и (8), а силы  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  заменим найденными значениями (15). После указанных подстановок и соответствующих преобразований, мы получаем:

$$\Delta\varphi = \frac{P(x_0 - x)l}{G(K_1 + K_2 + K_3) + \frac{3E}{l^2}[I_2 a^2 + I_3 c^2 - x_0^2(I_1 + I_2 + I_3)]}$$

Выражение, входящее в знаменатель и зависящее от моментов инерции, может быть представлено в форме:

$$I_1 x_0^2 + I_2 (a - x_0)^2 + I_3 (c - x_0)^2,$$

а потому для угла закручивания  $\Delta\varphi$  мы окончательно получим следующее выражение:

$$\Delta\varphi = \frac{Pml}{G(K_1 + K_2 + K_3) + \frac{3E}{l^2}[I_1 x_0^2 + I_2 (a - x_0)^2 + I_3 (c - x_0)^2]} \quad (16)$$

где  $m$  — расстояние от точки приложения нагрузки  $P$  до центра жесткости (фиг. 7).

Полученные формулы: (6), (7), (8), (15) разрешают вопрос о распределении нагрузки между лонжеронами, а формулы: (3), (4), (5), (16) дают возможность вычислить прогибы и угол закручивания.

Формула (16) показывает, что угол  $\Delta\varphi$  обращается в нуль, если  $m = x_0 - x = 0$ , т. е., когда сила  $P$ , действующая на крыло, проходит через центр жесткости. При  $m > 0$  угол закручивания  $\Delta\varphi$  положителен; крыло закручивается по часовой стрелке; при  $m < 0$  угол закручивания  $\Delta\varphi$  отрицателен, т. е. крыло закручивается против часовой стрелки.

Вывод выполнен для крыла с тремя лонжеронами; структура формул позволяет распространить выводы на многолонжеронное крыло.

Знаменатель формулы (16) складывается из двух частей: первый член  $G(K_1 + K_2 + K_3)$  зависит от сопротивления лонжеронов скручиванию, а второй член — учитывает сопротивление лонжеронов изгибу. Так как модуль  $G$  меньше модуля упругости  $E$ , а коэффициенты жесткости  $K$  на кручение меньше моментов инерции  $I$ , то при небольших длинах  $l$  первый член знаменателя оказывается меньше второго и величина угла  $\Delta\varphi$  зависит преимущественно от прогибов. Если пренебречь сопро-

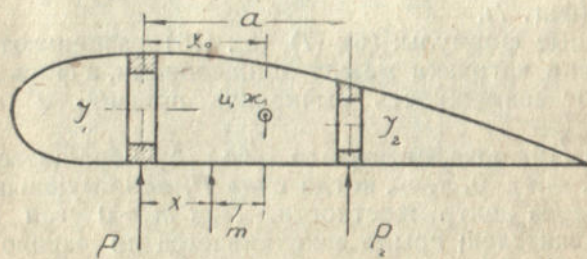
тивлением лонжеронов скручиванию, мы получим следующие формулы для крыла с тремя лонжеронами:

$$\Delta\varphi = \frac{Pml^3}{3E [I_1 x_0^2 + I_2 (a - x_0)^2 + I_3 (c - x_0)^2]} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P \frac{I_1}{I_1 + I_2 + I_3} + Pm \frac{I_1 x_0}{I_1 x_0^2 + I_2 (a - x_0)^2 + I_3 (c - x_0)^2} \\ P_2 &= P \frac{I_2}{I_1 + I_2 + I_3} - Pm \frac{I_2 (a - x_0)}{I_1 x_0^2 + I_2 (a - x_0)^2 + I_3 (c - x_0)^2} \\ P_3 &= P \frac{I_3}{I_1 + I_2 + I_3} - Pm \frac{I_3 (c - x_0)}{I_1 x_0^2 + I_2 (a - x_0)^2 + I_3 (c - x_0)^2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Частный случай. Крыло с двумя лонжеронами (фиг. 8). Угол  $\Delta\varphi$  получим по формуле (16), если примем в ней  $K_3 = 0$  и  $I_3 = 0$ :

$$\Delta\varphi = \frac{Pml}{G(K_1 + K_2) + \frac{3E}{l^2} [I_1 x_0^2 + I_2 (a - x_0)^2]} \quad (19)$$



Фиг. 8.

Расстояние от переднего лонжерона до центра жесткости по формуле (e), при  $I_3 = 0$ :

$$x_0 = \frac{I_2 a}{I_1 + I_2} \quad (20)$$

Легко показать, что выражение, зависящее от моментов инерции, может быть упрощено

$$I_1 x_0^2 + I_2 (a - x_0)^2 = I_1 a x_0,$$



а потому формула (19) принимает более простой вид:

$$\Delta\varphi = \frac{Pml}{G(K_1 + K_2) + \frac{3E}{l^2} ax_0 I_1} \quad (21)$$

Нагрузка  $P$  распределяется между лонжеронами неравномерно. Давление  $P_1$  и  $P_2$  по формулам (15):

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P \frac{I_1}{I_1 + I_2} + \frac{3EI_1}{l^3} \Delta\varphi \cdot x_0 \\ P_2 &= P \frac{I_2}{I_1 + I_2} - \frac{3EI_2}{l^3} \Delta\varphi (a - x_0) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Если при расчете угла закручивания  $\Delta\varphi$  пренебречь скручиванием лонжеронов, т. е. принять  $K_1 = K_2 = 0$ , то получим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{Pml^3}{3E ax_0 I_1} \\ P_1 &= P \frac{I_1}{I_1 + I_2} + \frac{Pm}{a} = P \frac{(a - x)}{a} \\ P_2 &= P \frac{I_2}{I_1 + I_2} - \frac{Pm}{a} = P \frac{x}{a} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Следовательно, пренебрегая скручиванием лонжеронов, мы можем давление  $P$  распределить между лонжеронами по закону рычага.

## ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ШВАРЦА-КРИСТОФФЕЛЯ К ЗАДАЧЕ СЕН-ВЕНАНА

§ 1. Введение. Задача Сен-Венана относится к тем проблемам математической теории упругости, которые приводятся к основным задачам теории потенциала—к задачам Дирихле и Неймана на плоскости.

Возможность применения к этим вопросам метода конформных отображений общеизвестна, но количество частных видов контуров, для которых фактически были найдены соответственные конформные отображения, сравнительно невелико и во всяком случае не может удовлетворить практических требований. Особенно недостаточно разработан в связи с этим вопрос об изгибе стержней, имеющих форму технических профилей прокатной стали.

Я хочу показать применение формулы Шварца-Кристоффеля к определению напряжений, которые возникают при изгибе таких стержней поперечной силой. Формула Шварца-Кристоффеля уже была применена для подобной цели Треффтцем<sup>1</sup>, который рассматривал кручение стержней с сечениями полигонально-прямолинейного очертания. Настоящая работа является распространением метода Треффтца на задачу об изгибе.

§ 2. Основные уравнения. Известно, что компоненты тензора напряжений в упругом изотропном теле при отсутствии объемных сил удовлетворяют такой системе дифференциальных уравнений:

а) условиям равновесия —

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0;$$

<sup>1</sup> См. Frank — Mises „Differentialgleichungen der mathem. Physik“, II, 1927, стр. 645.



в) шести условиям Бельтрами —

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0$$

.....

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0.$$

В этих уравнениях  $\sigma_x, \dots, \tau_{yz}$  — компоненты тензора напряжений,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ ,  $\mu$  — коэффициент Пуассона ( $0 < \mu < 0,5$ ). Напряжения  $\sigma_x, \dots, \tau_{yz}$  должны на поверхности удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \cos(ny) + \tau_{xz} \cos(nz) &= X \\ \tau_{yx} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny) + \tau_{yz} \cos(nz) &= Y \\ \tau_{zx} \cos(nx) + \tau_{zy} \cos(ny) + \sigma_z \cos(nz) &= Z. \end{aligned}$$

Тут  $\cos(nx), \cos(ny), \cos(nz)$  — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности,  $X, Y, Z$  — компоненты поверхностных сил на осях координат.

### § 3. Приведение задачи о изгибе к основным задачам теории потенциала на плоскости

Рассмотрим изгиб призматического стержня поперечной силой  $P$  (рис. 1). Поверхность стержня свободна от нагрузок. На-

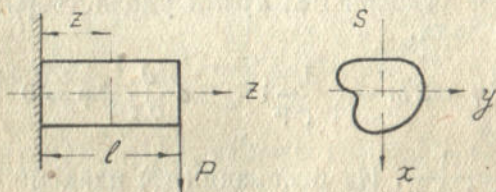


Рис. 1.

чало координат выберем в центре инерции одного из поперечных сечений, оси  $Ox$  и  $Oy$  направим по главным осям инерции сечения, ось  $Oz$  — параллельно образующим стержня. Пользуясь полуобратным методом Сен-Венана, положим (на основании результатов элементарной теории изгиба, которая базируется на гипотезе плоских сечений Бернулли):

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0; \sigma_z = -\frac{P(l-z)x}{I},$$

( $I$  — момент инерции поперечного сечения  $S$  относительно оси  $OY$ ).

Остается определить  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ .

Два первых уравнения равновесия дают:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0;$$

отсюда видно, что  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  не зависят от  $z$

Третье уравнение равновесия дает:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{Px}{I} = 0. \quad (1)$$

Перепишем уравнение (1) так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_{xz} + \frac{Pmx^2}{I} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_{yz} + \frac{Pnxy}{I} \right) = 0; \quad (2)$$

$m$  и  $n$  — постоянные величины, удовлетворяющие соотношению

$$2m + n = 1 \quad (3)$$

На основании уравнения (2) положим

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{P}{I} \left( c \frac{\partial \varphi}{\partial y} - mx^2 \right) \\ \tau_{yz} &= -\frac{P}{I} \left( c \frac{\partial \varphi}{\partial x} + nxy \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $c$  — произвольное постоянное число.

Первые четыре условия Бельтрами удовлетворяются.

Пятое и шестое дают:

$$c \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \varphi = 2m - \frac{1}{1+\mu}; \quad c \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \varphi = 0 \quad (5)$$

Положим:  $2m = \frac{1}{1+\mu}$ . На основании (3) найдем:

$$n = \frac{\mu}{1+\mu}. \quad (6)$$

Положим еще

$$c = \frac{1}{2(1+\mu)},$$

тогда

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2I(1+\mu)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - x^2 \right) \quad (7)$$



$$\tau_{yz} = -\frac{P}{2I(1+\mu)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\mu xy \right).$$

Функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \varphi = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \varphi = 0.$$

Тут

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

так как  $\varphi$  не зависит от  $z$ .

Следовательно:

$$\nabla^2 \varphi = -2G\kappa \quad (8)$$

( $G$  — модуль сдвига,  $\kappa = \frac{2I(1+\mu)\alpha}{P}$ ,  $\alpha$  — постоянное число). Положим теперь:

$$\varphi = \varphi_0 + \Phi, \quad \text{где } \varphi_0 = -\frac{G\kappa(x^2 + y^2)}{2},$$

тогда функция  $\Phi$  удовлетворяет уравнению:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (9)$$

Следовательно,  $\Phi$  — функция гармоническая в области  $S$ .

Пусть  $\Phi = \Phi_1 + \kappa G \Phi_2$ , где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — гармонические в области  $S$  функции.

Получим

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{P}{2I(1+\mu)} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - x^2 \right) + G\alpha \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - y \right) \\ \tau_{yz} &= -\frac{P}{2I(1+\mu)} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + 2\mu xy \right) + G\alpha \left( -\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + x \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим теперь условия на поверхности (см. основные уравнения). Первые два условия тождественно удовлетворяются ( $\cos(nz) = 0$ ).

Третье условие дает:

$$\tau_{zx} \cos(nx) + \tau_{zy} \cos(ny) = 0.$$

Подставляя в это условие выражения (10) для  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , получим:

$$\frac{P}{2I(1+\mu)} \left\{ \frac{d\Phi_1}{ds} - x^2 \cos(nx) - 2\mu xy \cos(ny) \right\} +$$

$$+ G\alpha \left\{ \frac{d\Phi_2}{ds} - y \cos(nx) + x \cos(ny) \right\} = 0 \quad (11)$$

$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial y} \cos(nx) - \frac{\partial}{\partial x} \cos(ny)$  — производная по касательной к дуге контура  $s$ .

Функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  будут определены однозначно, и условие (11) будет выполнено, если положить:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{ds} &= x^2 \cos(nx) + 2\mu xy \cos(ny) \\ \frac{d\Phi_2}{ds} &= y \cos(nx) - x \cos(ny) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Вводя функции  $\Phi^{(1)}$  и  $\Phi^{(2)}$ , сопряженные с  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{ds} = \frac{d\Phi^{(1)}}{dn} &= x^2 \cos(nx) + 2\mu xy \cos(ny) \\ \frac{d\Phi_2}{ds} = \frac{d\Phi^{(2)}}{dn} &= y \cos(nx) - x \cos(ny), \end{aligned} \right\} \quad (12^a)$$

где  $\frac{d}{dn}$  — производная по нормали к дуге контура.

Задача сводится к задаче Неймана (если искать функции  $\Phi^{(1)}$  и  $\Phi^{(2)}$ ) или к задаче Дирихле (если искать  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ ).

Условие существования решения задачи Неймана —

$$\int \frac{d\Phi^{(1)}}{dn} ds = 0 \quad \text{и} \quad \int \frac{d\Phi^{(2)}}{dn} ds = 0$$

выполняется. Действительно, преобразовав криволинейные интегралы по формуле Грина, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Phi^{(1)}}{dn} ds &= \int \left\{ x^2 \cos(nx) + 2\mu xy \cos(ny) \right\} ds = \\ &= 2(1 + \mu) \iint_S x dx dy = 0, \end{aligned}$$

так как начало координат находится в центре инерции сечения  $S$ .

Подобно этому получим  $\int \frac{d\Phi^{(2)}}{dn} ds = 0$ . Подставляя в последние

равенства вместо  $\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n}$  и  $\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial s}$  и  $\frac{\partial \Phi_2}{\partial s}$  [см. (12<sup>a</sup>)], мы нахо-

дим, что  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  определены на контуре однозначно. Выясним



теперь механическое значение постоянной  $\alpha$ . Для этого рассмотрим момент сил упругости относительно оси  $OZ$ . Получим:

$$M_z = \iint (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy = G\alpha \iint \left[ \left( -x \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + x^2 + y^2 \right) dx dy + \frac{P}{2l(1+\mu)} \iint \left[ -x \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + (1-2\mu)x^2 y \right] dx dy \right] \quad (13)$$

Если сила  $P$  лежит в плоскости  $XOZ$ , то  $M_z = 0$ . В остальных случаях изгиб сопровождается закручиванием стержня. Постоянная  $\alpha$  определяется из условия (13). Теперь делается ясным механическое значение  $\alpha$ ;  $\alpha$  — это известный из теории кручения угол закручивания стержня. Следовательно, общая задача о деформациях и напряжениях в призматическом стержне, возникающих в результате действия поперечной силы  $P$ , распадается на две простейших задачи, решения которых налагаются друг на друга. Первой является задача кручения, которой соответствует угол закручивания  $\alpha$ ; второй соответствуют члены, содержащие перерезывающую силу  $P$ .

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}^{(1)} &= \frac{P}{2J(1+\mu)} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - x^2 \right) \\ \tau_{yz}^{(1)} &= -\frac{P}{2J(1+\mu)} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + 2\mu xy \right) \\ \tau_{xz}^{(2)} &= G\alpha \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - y \right) \\ \tau_{yz}^{(2)} &= G\alpha \left( -\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + x \right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Тогда:

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^{(1)} + \tau_{xz}^{(2)}; \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^{(1)} + \tau_{yz}^{(2)}.$$

Мы остановимся на определении функции  $\Phi_1$  (которую можно назвать функцией изгиба) для случая стержней с полигонально-прямолинейной формой поперечного сечения.

Функцию  $\Phi_2$  в этом случае определяем по методу Трефца

#### § 4. Приведение задачи определения функции $\Phi_1$ к конформному отображению

Пусть плоскость  $XOY$ , в которой расположена область  $S$ , будет плоскостью, комплексной переменной  $z = x + iy$ .

Введем комплексную функцию изгиба:

$$F(z) = \Phi^{(1)}(x, y) + i\Phi_1(x, y)$$

Функция  $F(z)$  регулярна в области  $S$ . Обозначим ее три первые последовательные производные соответственно через:

$$F'(z) = p + iq; \quad F''(z) = s + it; \quad F'''(z) = u + iv. \quad (16)$$

Рассмотрим  $\nu$ -ую сторону полигона (рис. 2), которая соединяет  $(\nu - 1)$ -ый угол с  $\nu$ -ым.

Угол, образованный  $\nu$ -ой стороной с осью  $OX$ , обозначим через  $\lambda_\nu$ . На  $\nu$ -ой стороне контура полигона имеем:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \lambda_\nu, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \lambda_\nu; \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d^2y}{ds^2} = 0; \quad \frac{dz}{ds} = e^{i\lambda_\nu} \quad (17)$$

$$\frac{d\Phi_1}{ds} = x^2 \frac{dy}{ds} - 2\mu xy \frac{dx}{ds}. \quad (18)$$

Дифференцируя дважды это условие по дуге контура  $S$  и принимая во внимание соотношения (17), получим:

$$\frac{d^3\Phi_1}{ds^3} = 2(1 - 2\mu) \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \frac{dy}{ds} = 2(1 - 2\mu) \cos^2 \lambda_\nu \sin \lambda_\nu.$$

С другой стороны (обозначая через  $I$ -мнимую часть) мы имеем:

$$\frac{d\Phi_1}{ds} = \frac{d}{ds} (IF(z)) = I \left[ \frac{dF(z)}{ds} \right] = I \left[ \frac{dz}{ds} F'(z) \right] = I [e^{i\lambda_\nu} F'(z)],$$

дифференцируя это равенство два раза по  $S$  мы находим, что

$$\frac{d^3\Phi_1}{ds^3} = I [e^{3i\lambda_\nu} F'''(z)]$$

и условие на контуре, для  $\nu$ -ой стороны полигона может быть написано так:

$$I [e^{3i\lambda_\nu} F'''(z)] = 2(1 - 2\mu) \cos^2 \lambda_\nu \sin \lambda_\nu, \quad (19)$$

или иначе (см. (16)):

$$v \cos 3\lambda_\nu + u \sin 3\lambda_\nu = 2(1 - 2\mu) \cos^2 \lambda_\nu \sin \lambda_\nu = \text{const}. \quad (20)$$

Это соотношение — уравнение прямой линии, которая образует с осью  $u$  в плоскости комплексной переменной  $u + iv$  угол  $= -3\lambda_\nu$ . Отсюда вытекает, что  $\nu$ -ая сторона сечения  $S$  в плоскости комплексной переменной  $z = x + iy$ , отображается

при помощи регулярной в  $S$  функции  $F'''(z)$  на прямую в плоскости  $(u, v)$ . Весь полигон в плоскости  $z$  отображается на некоторый полигон в плоскости  $(u, v)$ .

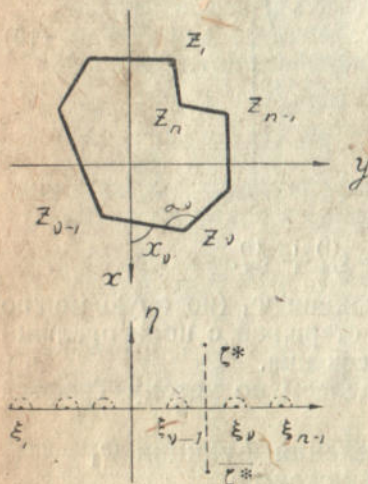


Рис. 2.



Обозначим  $\nu$ -ый внутренний угол полигона в плоскости  $z$  через  $\alpha_\nu$ . Из элементарных геометрических соотношений, получим:

$$\alpha_\nu = \pi - \gamma_{\nu+1} + \gamma_\nu. \quad (21)$$

Замечая, что направление  $\nu$ -ой стороны отображенного полигона в плоскости  $(u, v)$  не изменяется от прибавления к углу  $-3\gamma_\nu$  угла  $k\pi$ , где  $k$  — целое число, найдем  $\nu$ -ый угол полигона в плоскости  $(u, v)$ :

$$\beta_\nu = (n_\nu + 1) \pi + 3(\gamma_{\nu+1} - \gamma_\nu).$$

На основании (21) имеем:

$$\beta_\nu = (m_\nu + 1) \pi - 3\alpha_\nu. \quad (22)$$

Таким образом задача сводится к отображению области, ограниченной прямыми в плоскости  $(u, v)$ , с углами  $\beta_\nu$  между сторонами (эта область будет, вообще говоря, многолистной с точкой разветвления в  $\infty$ ), на полигон в плоскости  $z$  с углами  $\alpha_\nu$ .

Эта задача может быть решена лишь в том случае, когда количество и расположение точек разветвления в плоскости  $(u, v)$  являются произвольными.

Условия нашей задачи позволяют использовать эту возможность, так как они не требуют конформности отображения во всех точках полигона плоскости  $(u, v)$ .

Чтобы осуществить нужное нам отображение, введем вспомогательную плоскость комплексной переменной  $\zeta$  (рис. 2). Отобразим верхнюю полуплоскость  $\zeta$  на полигон в плоскости  $z$  так, чтобы вершинам углов  $z_\nu$  взаимно соответствовали точки  $\zeta_\nu$  действительной оси  $O\xi$  в плоскости  $\zeta$ . Предположим, что вершине  $z_n$  соответствует бесконечно удаленная точка в  $\zeta$ -плоскости. Тогда, пользуясь известной формулой Шварца-Кристоффеля, получим:

$$z = \int_{\nu=1}^{n-1} \prod (\zeta - \zeta_\nu)^{\gamma_\nu - 1} d\zeta + k, \quad (23)$$

где  $\gamma_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\pi}$ .

Внутри полигона плоскости  $z$  нет точек разветвления. Отобразим теперь верхнюю полуплоскость  $\zeta$  на область в плоскости  $(u, v)$  так, чтобы отрезкам  $\xi_{\nu-1} \rightarrow \xi_\nu$  соответствовали стороны этой области. Искомое отображение осуществляется при помощи интеграла типа (23), несколько более общего вида.

Вместо степеней  $\gamma_{\nu-1}$  будут показатели:

$$\frac{\beta_\nu}{\pi} - 1 = m_\nu - 3\gamma_\nu.$$

Если ввести эти показатели в формулу (23), то получим



отображение верхней полуплоскости на некоторый полигон в плоскости  $(u, v)$  с углами, равными по величине углам нужного нам полигона, но с иным расположением сторон. Для получения искомого отображения надо ввести в состав подынтегральной функции целую рациональную функцию  $R(\zeta)$ . Введение такой функции не изменит величину углов, изменяя одновременно расположение сторон области. Нули функции  $R(\zeta)$  соответствуют точкам разветвления в плоскости  $(u, v)$ . Функция  $R(\zeta)$  имеет действительные коэффициенты. Действительно, отобразим зеркально верхнюю полуплоскость  $\zeta$  в отрезке  $\xi_{v-1} \rightarrow \xi_v$  действительной оси и соответственно область в плоскости  $(u, v)$  в  $\zeta$ -ой стороне. Пусть точка  $\zeta^*$  плоскости  $\zeta$  соответствует точке разветвления плоскости  $(u, v)$ , т. е.  $R(\zeta^*) = 0$ . При зеркальном отображении получим точку  $\bar{\zeta}^*$ , сопряженную с  $\zeta^*$ , которой опять соответствует точка разветвления в плоскости  $(u, v)$  и которая будет нулем функции  $R(\zeta)$ , то-есть  $R(\bar{\zeta}^*) = 0$ . Следовательно, нули функции  $R(\zeta)$  попарно сопряжены, и эта функция имеет действительные коэффициенты. Искомая функция, отображающая верхнюю полуплоскость  $\zeta$  на область в плоскости  $(u, v)$ , имеет вид:

$$u + iv = C_1 \int R(\zeta) \prod_{v=1}^{n-1} (\zeta - \xi_v)^{m_v - 3\gamma_v} d\zeta + C. \quad (24)$$

$C_1$  — комплексная константа, которая подлежит определению. Покажем, что выражение (24) действительно дает для производной от  $u + iv$  нужные значения аргумента. Для этого рассмотрим  $v$ -ую сторону области в плоскости  $(u, v)$ . Уравнение  $v$ -ой стороны области имеет вид:

$$I \left\{ e^{3i\gamma_v} (u + iv) \right\} = \text{const.}$$

Дифференцируя по  $\zeta$ , получим

$$I \left\{ e^{3i\gamma_v} \frac{d(u + iv)}{d\zeta} \right\} = 0. \quad (25)$$

Этому условию должна удовлетворять производная выражения (24) при  $\zeta = 1, 2, \dots, n$ . То-есть на отрезке  $\xi_{v-1} \rightarrow \xi_v$  аргумент этой производной должен быть равен  $-3\gamma_v$  (с точностью до знака).

На основании (24) мы имеем:

$$\frac{d(u + iv)}{d\zeta} = C_1 R(\zeta) \prod_{v=1}^{n-1} (\zeta - \xi_v)^{m_v - 3\gamma_v} \quad (26)$$

При  $\zeta > \xi_{n-1}$ , то-есть на части вещественной оси плоскости  $\zeta$ , соответствующей стороне  $z_{n-1} \rightarrow z_n$  полигона  $S$ ,  $R(\zeta)$  и произве-



дение в правой части равенства (26) вещественны, следовательно, аргумент правой части (26) совпадает с  $\arg c_1$ , но, на основании равенства (25), этот аргумент должен быть равен  $-3\gamma_n$ , то-есть

$$\arg c_1 = -3\gamma_n.$$

Чтобы определить аргумент правой части (26) на отрезке  $\xi_{n-2} \rightarrow \xi_{n-1}$ , обойдем вокруг точки  $\xi_{n-1}$  в положительном направлении по полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости (см. рис. 2), при этом аргумент  $\zeta - \xi_{n-1}$  возрастет на  $\pi$ , аргумент  $(\zeta - \xi_{n-1})^{m_{n-1} - 3\gamma_{n-1}}$  возрастет на

$$\pi (m_{n-1} - 3\gamma_{n-1}) = \pi m_{n-1} - 3\alpha_{n-1} = (m_{n-1} - 3) \pi + 3\gamma_n - 3\gamma_{n-1},$$

то-есть (с точностью до знака) на

$$3 - 3\gamma_{n-1},$$

аргумент остальных множителей не изменится. Следовательно, на отрезке  $\xi_{n-2} \rightarrow \xi_{n-1}$  аргумент правой части равенства (26) равен

$$-3\gamma_n + 3\gamma_n - 3\gamma_{n-1} = -3\gamma_{n-1}$$

и условие (25) удовлетворено.

Повторяя это рассуждение при обходе  $\xi_{n-2}, \dots, \xi_1$ , мы убедимся, что выражение (26) удовлетворяет условию (25) на всей оси  $\xi$ .

Вводя в выражении (24)  $(c_1)$  в полном  $R(z)$ , мы получаем окончательное выражение

$$u + iv = e^{-3\gamma_n} \int R(\zeta) \prod_{v=1}^{n-1} (\zeta - \xi_v)^{m_v - 3\gamma_v} dz + c.$$

## § 5. Исследование решения

Из формул (23) и (24), на основании принципа симметрии, следует, что функцию  $u + iv = F'''(z)$ , регулярную в области  $S$  плоскости  $z$ , можно аналитически продолжить через стороны полигона на всю плоскость  $z$ . Действительно, отображим полигоны плоскостей  $\zeta$  и  $(u, v)$  в их взаимносоответственных  $v$ -ых сторонах. Этому будет соответствовать отображение верхней полуплоскости  $\zeta$  в отрезке  $\xi_{v-1} \rightarrow \xi_v$ . Получим формулы, которые устанавливают отображение плоскости  $\zeta$ , разрезанной вдоль действительной оси от  $-\infty$  до  $\xi_{v-1}$  и от  $\xi_v$  до  $\infty$  на новые расширенные полигоны. Одновременно устанавливается взаимное соответствие между последними\*. Чтобы получить взаимнооднозначное соответствие между плоскостями  $z$  и  $\zeta$ , и  $(u, v)$  и  $\zeta$ , надо вместо плоскости  $\zeta$  взять многолиственную риманову поверхность с точками разветвления, которые соответствуют

\* Плоскости  $z$  и  $u + iv$  могут быть многолиственными.



вершинам полигонов. Таким образом можно установить соответствие между точками многолистных плоскостей  $z$  и  $(u, v)$ . Следовательно, функцию  $F'''(z)$  можно аналитически продолжать на такую плоскость  $z$ . Функция  $F'''(z)$  регулярна в области и на контуре за возможным исключением угловых точек. Ее аналитическое продолжение будет также регулярной функцией во всей плоскости  $z$  (которая может быть многолистной) за исключением множества точек, которые соответствуют углам зеркально-отраженного полигона.

Интегрируя три раза, получим функцию  $F(z)$ , регулярную в области  $S$  и аналитическую на плоскости  $z$ .

После этих общих соображений перейдем к исследованию свойств функции  $u + iv$  в окрестностях угловых точек. Это даст нам впоследствии возможность сделать некоторые заключения о целых числах  $m_\nu$  и степени целой рациональной функции  $R(\zeta)$ .

На основании (23) и (24) получим:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \prod_{\nu=1}^{n-1} (\zeta - \xi_\nu)^{\gamma_\nu - 1}; \quad \frac{d(u + iv)}{d\zeta} = e^{-3i\gamma n} R(\zeta) \prod_{\nu=1}^{n-1} (\zeta - \xi_\nu)^{m_\nu - 3\gamma_\nu}$$

Разложив эти функции в степенные ряды в окрестности  $h$ -ой угловой точки, получим:

$$\frac{dz}{d\zeta} = c_1 (\zeta - \xi_h)^{\gamma_h - 1} [1 + a_1 (\zeta - \xi_h) + \dots] \quad (27)$$

$$\frac{d(u + iv)}{d\zeta} = c_2 (\zeta - \xi_h)^{m_h - 3\gamma_h} [1 + b_1 (\zeta - \xi_h) + \dots]$$

Из этих разложений видно, что в точке  $\xi_h$  функция  $\frac{d(u + iv)}{d\zeta}$  может обращаться в нуль или в бесконечность.

Ряды (27) сходятся абсолютно и равномерно в некоторой кольцевой окрестности точки  $\xi_h$ .

Интегрируя эти разложения получим:

$$z - z_h = c_{11} (\zeta - \xi_h)^{\gamma_h} [1 + a_{11} (\zeta - \xi_h) + \dots] \quad (28)$$

$$u + iv = c_{22} (\zeta - \xi_h)^{m_h - 3\gamma_h + 1} [1 + b_{11} (\zeta - \xi_h) + \dots] + c \quad (29)$$

функция  $z - z_h$  обращается в точке  $\xi_h$  в нуль, тогда как  $u + iv$  в этой точке может обращаться в бесконечность.

Обращая ряд (28), получим:

$$\zeta - \xi_h = c' (z - z_h)^{\frac{1}{\gamma_h}} + \dots \text{ степенной ряд.}$$

Ряд (29) дает разложение  $F'''(z) = u + iv$  в окрестности точки  $z_h$ :



$$u + iv = c''(z - z_h)^{\frac{m_h + i}{\gamma_h} - 3} \left\{ 1 + b_1''(z - z_h)^{\frac{1}{\gamma_h}} + \dots \right\} \quad (30)$$

В точке  $z = z_h$  функция  $F'''(z)$  обращается в нуль или в бесконечность.

Интегрируя дважды (30), найдем:

$$F'(z) = p + iq = c''(z - z_h)^{\frac{m_h + 1}{\gamma_h} - 1} + \dots \quad (31)$$

Функция  $p + iq$  в точке  $z = z_h$  обращается в нуль или в бесконечность. Следовательно, напряжения  $\tau_{xz}^{(x)}$  и  $\tau_{yz}^{(1)}$ , в состав которых входят  $p$  и  $q$ , могут весьма возрасть в окрестностях углов, но потенциальная энергия деформации должна оставаться ограниченной. Воспользуемся этим условием чтобы показать, что числа  $m_h$  не отрицательны.

Известно, что удельная потенциальная энергия деформации  $e$  определяется как квадратичная форма от составляющих тензора напряжений. В состав ее входит сумма квадратов:

$$\tau_{xz}^{(1)^2} + \tau_{yz}^{(1)^2}; \quad \tau_{xz}^{(1)} = \frac{P}{2I(1+\mu)}(p - x^2); \quad \tau_{yz} = -\frac{P}{2I(1+\mu)}(q + 2\mu xy).$$

Энергия деформации единицы длины стержня:

$$E = \iint_{(s)} e \, dx \, dy$$

Энергия  $E$  должна быть ограниченной, следовательно, все интегралы, входящие в ее состав, должны сходиться. Сосредоточим внимание на интеграле  $\iint (p^2 + q^2) \, dx \, dy$ , который входит в состав  $E$  и, следовательно, сходится.

Для сходимости указанного интеграла достаточно, чтобы подынтегральная функция удовлетворяла неравенству:

$$p^2 + q^2 < \frac{A}{|z - z_h|^\delta}, \quad (a)$$

где  $A > 0$  и  $\delta < 2$ .

Но из (31) видно, что

$$p + iq = c'''(z - z_h)^r \psi(z).$$

Тут  $r$  — наименьший показатель в ряде (31) для  $p + iq$ ,  $\psi(z)$  — функция, ограниченная по модулю в окрестности точки  $z_h$ , причем

$$\psi(z_h) = 1.$$

Отсюда и из неравенства (a) видно, что при соответственным образом подобранном положительном числе  $M$ , будет иметь место неравенство:

$$|z - z_h|^{2r + \delta} < M,$$

что возможно при

$$2r > -\delta > -2,$$

или

$$r \geq -1^* \quad (32)$$

Отсюда следует:

$$\frac{m_h + 1}{\gamma_h} - 1 > -1,$$

или

$$m_h > -1,$$

где  $m_h$  — целое число. Следовательно,

$$m_h \geq 0, \quad (33)$$

Ограничим теперь степень  $R(\zeta)$ . Множители  $(\zeta - \xi_v)^{m_v}$  можно ввести в состав  $R(\zeta)$ , так как  $m_v$  — целые положительные числа. Рассмотрим разложение  $z$  и  $u + iv$  в окрестности бесконечно удаленной точки  $\zeta$  — плоскости. В этой окрестности для  $|\zeta| > \rho$ , имеем:

$$R(\zeta) = \zeta^N \left( a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \dots + \frac{a_N}{\zeta^N} \right)$$

и

$$\prod_1^{n-1} (\zeta - \xi_v)^{\gamma_{v-1}} = \zeta \sum_1^{n-1} \gamma_v^{-n+1} \prod_1^{n-1} \left( 1 - \frac{\xi_v}{\zeta} \right)^{\gamma_{v-1}}$$

$$\prod_1^{n-1} (\zeta - \xi_v)^{-3\gamma_v} = \zeta \sum_1^{n-1} \gamma_v^{-n-1} \prod_1^{n-1} \left( 1 - \frac{\xi_v}{\zeta} \right)^{-3\gamma_v}.$$

На основании зависимости между количеством сторон и суммой углов многоугольника получим:

$$\sum_1^{n-1} \gamma_v = n - 2 - \gamma_n;$$

поэтому:

$$\sum_1^{n-1} \gamma_v - n + 1 = -1 - \gamma_n; \quad -3 \sum_1^{n-1} \gamma_v = 6 + 3\gamma_n - 3n.$$

Как и выше, найдем:

$$z - z_n = k_1 \zeta^{-\gamma_n} \left( 1 + \frac{a_1}{\zeta} + \dots \right), \quad (34)$$

\* ) Этот результат можно получить, исключительно базируясь на аналитических свойствах функции  $v + iq$ , не прибегая к физической интерпретации.



$$u + iv = k_2 \zeta^{N+3\gamma_n-3n+7} \left( 1 + \frac{b_1}{\zeta} + \dots \right). \quad (35)$$

Выполняя обращение ряда (34), получим:

$$u + iv = k_3 (z - z_n)^{-\frac{N-3n+7}{\gamma_n}-3} + \dots \text{ ряд по возраст. степен } (z - z_n),$$

Как и раньше, видим, что в точке  $z = z_n$  функция  $u + iv$  может обращаться в нуль или бесконечность.  
Интегрируя дважды, получим:

$$p + iq = k_3'' (z - z_n)^{-\frac{N-3n+7}{\gamma_n}-1} + \dots$$

Как и выше:

$$-\frac{N-3n+7}{\gamma_n}-1 > -1,$$

отсюда:

$$N < 3n - 7,$$

но  $N$  — целое число, следовательно:

$$N \leq 3n - 8.$$

Таким образом, окончательно получаем решение задачи о изгибе в форме:

$$\left. \begin{aligned} z &= \int \prod_1^{n-1} (\zeta - \xi_v)^{\gamma_v-1} d\zeta + k \\ u + iv &= e^{-3i\chi_n} \int R(\zeta) \prod_1^{n-1} (\zeta - \xi_v)^{-3\gamma_v} d\zeta + c \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где  $R(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \dots + a_N\zeta^N$ ;  $a_k$  — действительные числа; и  $N \leq 3n - 8$ ;  $c$  — постоянная интегрирования. Покажем теперь, что найденное решение содержит в себе такое количество произвольных постоянных величин, которое соответствует количеству условий на контуре. Одну комплексную постоянную принимаем за две.

Количество произвольных: постоянных  $3n - 7$ , коэффициент функции  $R(\zeta)$

2 постоянных интегрирования  $u + iv$

2 . . . . .  $s + it$

2 . . . . .  $p + iq$

Всего  $3n - 1$  произвольных постоянных.

Определим количество условий на контуре: на каждой стороне полигона мы имеем:

$$\frac{d\Phi_1}{ds} = x^2 \cos(nx) + 2\mu xy \cos(ny), \quad (37)$$

но для  $\nu$ -ой стороны

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{\nu-1} + s \cos \chi_\nu \\ y &= y_{\nu-1} + s \sin \chi_\nu \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} \cos(nx) &= \sin \chi_\nu \\ \cos(ny) &= -\cos \chi_\nu \end{aligned} \right\},$$

где  $s$  — длина периметра, отсчитываемая от  $z_{\nu-1}$ . Таким образом,  $\frac{d\Phi_1}{ds}$  равно полиному 2-ой степени от  $s$ . Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$  в левой и правой частях равенства (37), мы получаем 3 условия для каждой стороны, а всего  $3n$  условий. Но, в силу однозначности  $\Phi_1$  на контуре, интеграл от правой части равенства (37), взятый по всему контуру, равен нулю и, следовательно, одно из условий является следствием остальных.

Окончательно имеем всего  $3n - 1$  условий, которые соответствуют  $3n - 1$  произвольным постоянным решения. На полученное таким образом решение надо наложить, как указывалось выше, решение некоторой задачи кручения, которая соответствует определенному из (13) углу закручивания  $\alpha$ .





## НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ВОПРОСА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК.

Вопрос об устойчивости напряженного и деформированного состояния оболочек, неоднократно обсуждался в технической и математической литературе, посвященной теории упругости. Известно, что впервые доказанная Кирхгоффом теорема об однозначности решений эластостатической системы уравнений теории упругости, допускает исключения в том случае, когда одно измерение тела значительно отличается по величине от остальных двух. Основными видами таких тел являются стержни и оболочки. Настоящая работа посвящена изучению вопроса эластостатической устойчивости оболочек.

В нижеследующих пунктах мы получим основную систему уравнений теории оболочек в наиболее общей инвариантной форме и затем, ограничившись первым приближением применим эту систему к исследованию вопросов устойчивости, исходя из основного, принадлежащего А. Пуанкаре, определения состояния неустойчивости, как точки бифуркации (разветвления) решений основной системы уравнений.

Вопрос сведется к интегрированию системы линейных уравнений, однородных относительно неизвестных функций. Интегралы этой системы должны удовлетворять также однородным условиям на контурных поверхностях оболочки.

### ГЛАВА I

#### § 1. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. МЕТРИКА ПРОСТРАНСТВА В НЕДЕФОРМИРОВАННОЙ ОБОЛОЧКЕ.

Как известно „оболочкой“ в теории упругости называют тело, ограниченное двумя параллельными поверхностями (в случае оболочки постоянной толщины) и контурной поверхностью. Последняя может иметь особые точки и линии. Ограничивающие поверхности предполагаются, аналитическими т. е. не содержащими особых точек.

Расстояние между ограничивающими поверхностями предполагается настолько малым по сравнению с остальными размерами оболочки, что членами, содержащими его степени выше 2-ой или третьей, можно пренебрегать.



Если кривизна оболочки равна нулю, то оболочка называется пластинкой.

Средней поверхностью оболочки, называют поверхность, расположенную между ограничивающими поверхностями, на равных от них расстояниях. Эта поверхность, как будет видно из дальнейшего, играет основную роль в теории оболочек.

Для дальнейших исследований необходимо рассмотреть метрический тензор вблизи средней поверхности. Предположим, что средняя поверхность арифметизирована при помощи координатной сетки, которая совпадает с ее линиями кривизны. Две оси местного координатного триедра будут направлены по касательным к линиям кривизны, третья ось — по нормали к средней поверхности, Масштаб по третьей оси недеформированной оболочки, будем предполагать равным единице.

Пусть векторное уравнение средней поверхности будет:

$$\bar{r} = \bar{r}(x_1, x_2). \quad (1)$$

В этом случае тангенциальная часть метрического тензора, на средней поверхности определяется так:

$$g_{11} = (\bar{r}_{x_1}, \bar{r}_{x_1}) = \bar{r}_{x_1}^2; \quad g_{22} = (\bar{r}_{x_2}, \bar{r}_{x_2}) = \bar{r}_{x_2}^2; \quad g_{12} = (\bar{r}_{x_1}, \bar{r}_{x_2}) = 0$$

где:

$$\bar{r}_{xi} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i}.$$

Вычислим компоненты метрического тензора на расстоянии  $z$  от средней поверхности.

Обозначая через  $\bar{r}^z$  — радиус вектор точки, находящейся на расстоянии  $z$  от средней поверхности, найдем:

$$\bar{r}^z = \bar{r} + z\bar{q}$$

( $\bar{q}$  — единичный вектор нормали к средней поверхности).

Далее:

$$\bar{r}_{xi}^z = \bar{r}_{xi} + z \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_i}. \quad (2)$$

На основании формул Родрига, имеем:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial x_i} = -\frac{\bar{r}_{xi}}{R_i},$$

где  $R_i$  — один из главных радиусов кривизны. Следовательно:

$$g_{ii}^z = (\bar{r}_{xi}^z)^2 = (\bar{r}_{xi})^2 \left(1 - \frac{z}{R_i}\right)^2$$



или окончательно:

$$g_{ii}^z = g_{ii} \left(1 - \frac{z}{R_i}\right)^2. \quad (3)$$

На основании формулы (3) имеем:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial g_{ii}^z}{\partial z} = -\frac{2g_{ii}}{R_i} \quad (4)$$

## § 2.

### О параллельном переносе векторов и его роли в теории оболочек

Основной чертой теории оболочек является приведение общей задачи теории упругости к изучению напряженного и деформированного состояния их средних поверхностей.

Приведение это в классической теории упругости основано на неявно выраженном допущении о том, что все векторные величины, с которыми приходится оперировать, определены в декартовых системах координат, в то время, как при исследовании всех основных вопросов исходят из криволинейных координат, связанных со средней поверхностью.

В дальнейшей работе мы будем встречаться с тензорными величинами, определенными в криволинейных системах координат, связанных с деформированной оболочкой, т. е. вообще говоря, определенными в неевклидовом пространстве. Поэтому, мы широко применяем в дальнейшем операцию параллельного переноса векторов, принадлежащую Леви Чивита (Levi Civita).

Как известно<sup>1)</sup>, при бесконечно малом переносе, компоненты контравариантного вектора получают приращения:

$$\delta A^i = \Gamma_{\lambda h}^i A^\lambda dx^h, \quad (5)$$

где  $\Gamma_{\lambda h}^i$  — известные из дифференциальной геометрии трехзначковые символы Кристоффеля второго рода.

Приращение вектора на конечном перемещении зависит от пути переноса.

Поэтому условимся далее, переносить все векторные величины в среднюю поверхность, передвигая их вдоль координатных линий  $z$ .

<sup>1)</sup> Levi — Civita „Der absolute Differentialcalculus“

См. также Кочин „Векторное исчисление и начала тензорного исчисления“.

Тогда вопрос сводится к интегрированию системы уравнений:

$$\delta A^i = \Gamma_{\lambda 3}^i A^\lambda dz. \quad (5a)$$

где величины  $A^\lambda$  заданы в точке с координатой  $z$ .

Интегрируя систему уравнений вдоль линии  $z$  в направлении отрицательных дифференциалов, получим после некоторых перестановок индексов:

$$\begin{aligned} (A^i)_{z=0} = & A^i + A^\lambda \left[ \int_z^0 \Gamma_{\lambda 3}^i(\xi) d\xi + \int_z^0 \int_{\xi}^0 \Gamma_{\lambda_1 3}^i(\xi_1) \Gamma_{\lambda_3}^{\lambda_1}(\xi) d\xi_1 d\xi + \right. \\ & \left. + \int_z^0 \int_{\xi}^0 \int_{\xi_1}^0 \Gamma_{\lambda_2 3}^i(\xi_2) \Gamma_{\lambda_1 3}^{\lambda_2}(\xi_1) \Gamma_{\lambda_3}^{\lambda_1}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 d\xi + \dots \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначая выражение в скобках через  $\Phi_{\lambda}^{\bar{i}}$ , перепишем формулу (6) так:

$$(A^i)_{z=0} = A^i + A^\lambda \Phi_{\lambda}^{\bar{i}}. \quad (6a)$$

Совершенно аналогично можно рассмотреть параллельное перенесение ковариантного вектора в среднюю поверхность из точки с координатой  $z$ . Найдем:

$$\begin{aligned} (A_i)_{z=0} = & A_i - A_\lambda \left[ \int_z^0 \Gamma_{i3}^\lambda(\xi) d\xi - \int_z^0 \int_{\xi}^0 \Gamma_{i3}^{\lambda_1}(\xi_1) \Gamma_{\lambda_1 3}^\lambda(\xi) d\xi_1 d\xi + \right. \\ & \left. + \int_z^0 \int_{\xi}^0 \int_{\xi_1}^0 \Gamma_{i3}^{\lambda_2}(\xi_2) \Gamma_{\lambda_1 3}^{\lambda_2}(\xi_1) \Gamma_{\lambda_3}^\lambda(\xi) d\xi_2 d\xi_1 d\xi + \dots \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначая выражения в квадратных скобках через  $\Phi_{\bar{i}}^\lambda$ , перепишем формулу (7) так:

$$(A_i)_{z=0} = A_i - A_\lambda \Phi_{\bar{i}}^\lambda. \quad (7a)$$

Величины  $\Phi_{\lambda}^{\bar{i}}$  и  $\Phi_{\bar{i}}^\lambda$  не являются компонентами смешанного тензора, так как при их помощи устанавливается зависимость между векторными величинами, определенными в различных точках пространства.

Что касается сходимости рядов, через которые мы определили  $\Phi_{\lambda}^{\bar{i}}$  и  $\Phi_{\bar{i}}^\lambda$ , то эти ряды равномерно и абсолютно сходятся, если  $|M| \leq 1$ , где  $M$  — верхний предел модулей  $|\Gamma_{hk}^i|$ .



Действительно, рассмотрим например  $\Phi_i^\lambda$ . Получим:

$$\left| \Phi_i^\lambda \right| \leq \left| Mz \right| + \frac{1}{2!} \left| M^2 z^2 \right| + \frac{1}{3!} \left| M^3 z^3 \right| + \dots$$

В тех незначительных по абсолютной величине пределах для  $z$ , с которыми встречаются в теории оболочек, можно быть уверенным в сходимости рядов, через которые определяются  $\Phi_i^\lambda$  и  $\Phi_T^\lambda$ .

## ГЛАВА II

# ОСНОВНАЯ ЭЛАСТОСТАТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

### § 1

#### Вычисление приведенных к средней поверхности оболочки усилий и моментов

Основной особенностью теории оболочек является замена тензора напряжений общей теории упругости, системой, ему статически эквивалентных векторов сил, действующих на контурные поверхности элемента оболочки, сведенных к средней поверхности и соответствующих присоединенных моментов.

К вычислению этих величин мы и приступаем.

Арифметизируем пространство недеформированной оболочки при помощи системы координат, которую определим так: средняя поверхность и параллельные к ней поверхности являются координатными поверхностями, содержащими координатные линии  $x_1$  и  $x_2$ , которые совпадают с линиями кривизны. Координатную линию  $z = x_3$  направим по нормали к средней поверхности оболочки.

Объектом нашего изучения будет являться элемент оболочки, ограниченный двумя граничными (параллельными к средней поверхности) поверхностями и двумя парами координатных поверхностей  $x_1 z$  и  $x_2 z$ , находящимися бесконечно близко друг от друга. Элемент имеет конечный размер в направлении линии  $z$ , равный  $2h$  ( $2h$  — толщина оболочки).

При этих условиях элемент длины пространства внутри недеформированной оболочки, имеет форму:

$$d\sigma^2 = g_{11} dx_1^2 + g_{22} dx_2^2 + dz^2. \quad (8)$$

После деформации он приобретет общий вид:

$$ds^2 = \bar{g}_{ik} dx_i dx_k. \quad (9)$$

Условимся теперь обозначать все величины, относящиеся к контурной площадке, перпендикулярной до деформации к координатной линии  $x_i$ , соответствующим индексом  $(i)$  в скобках.



Вектор элементной площадки в координатной поверхности  $(\nu, 3)$  определяется своими ковариантными компонентами.

Обозначим через  $F_{\nu 3} dx_\nu dz$  скалярную величину элементарной площадки, где

$$F_{\nu 3} = \sqrt{\bar{g}_{\nu\nu}^z \bar{g}_{33}^z - (\bar{g}_{\nu 3}^z)^2}.$$

На основании известных формул векторного исчисления, получим:

$$(F_{\nu 3} dx_\nu dz)^2 = \bar{g}^{ik} a_i a_k,$$

где  $a_j$  — ковариантные компоненты вектора площадки. Среди них от нуля отлична только одна —  $a_i$ , которая соответствует оси, перпендикулярной до деформации к рассматриваемой площадке. Итак, окончательно имеем:

$$a_i = \frac{F_{\nu 3}}{\sqrt{\bar{g}_z^{ii}}} dx_\nu dz. \quad (10)$$

(Само собой разумеется, что все величины определены на расстоянии  $z$  от средней поверхности<sup>1)</sup>).

Образуя контравариантные компоненты вектора напряжений, получим:

$$df_{(i)}^{\mu} = \tau^{i\mu} a_i = \frac{\tau^{i\mu} F_{\nu 3} dx_\nu dz}{\sqrt{\bar{g}_z^{ii}}}$$

( $\tau^{i\mu}$  — контравариантные компоненты тензора напряжений).

Перенося вектор  $df_{(i)}^{\mu}$  к средней поверхности, получим согласно формуле (6а)

$$\left( df_{(i)}^{\mu} \right)_{z=0} = \left( \tau^{i\mu} + \tau^{i\lambda} \Phi_{\lambda}^{\mu} \right) \frac{F_{\nu 3}}{\sqrt{\bar{g}_z^{ii}}} dx_\nu dz \quad (11)$$

Введем теперь усилия, т. е. силы внутренних напряжений, отнесенные к единице длины координатной линии, соответствующей контурной поверхности оболочки, лежащей в средней поверхности.

Найдем, обозначая векторы усилий через  $\bar{S}_{(i)}$ :

$$S_{(i)}^{\mu} = \frac{\int_{-h}^{+h} (df_{(i)}^{\mu})_{z=0}}{\sqrt{\bar{g}_{\nu\nu}}} dx_\nu$$

<sup>1)</sup> Это обстоятельство отмечено индексом  $z$  внизу контравариантной компоненты метрического тензора.



или окончательно:

$$S_{(i)}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{g_{\nu\nu}}} \int_{-h}^{+h} (\tau^{i\mu} + \tau^{i\lambda} \Phi_{\lambda}^{\mu}) \frac{F_{\nu 3}}{\sqrt{g_z^{ii}}} dz. \quad (12)$$

Числа  $i, \nu$  — образуют перестановку чисел 1, 2.  $\bar{g}_z^{ii}$  — контравариантная компонента метрического тензора на расстоянии  $z$  от средней поверхности.

Переходим к вычислению составляющих главного момента присоединенных пар.

При вычислении необходимо иметь в виду, что векторы напряжения определены в криволинейной системе координат. При этом обстоятельстве образование присоединенного момента состоит из двух этапов:

1) при всяком бесконечно малом переносе вектора силы является элементарная присоединенная пара;

2) вектор момента этой пары переносится параллельно самому себе (в смысле Леви-Чивита) в центр приведения на средней поверхности.

Главный момент присоединенных пар образуется, как геометрическая сумма моментов элементарных приведенных пар.

Если мы переносим вектор из точки с координатой  $z$  в точку с координатой  $\zeta$ , то интегралы в формулах (6) и (7), распространяются соответственно на отрезок от  $z$  до  $\zeta$ .

Соответствующие выражения мы будем обозначать  $\Phi_{(\zeta)\bar{i}}^{\lambda}$  и  $\Phi_{(\zeta)\bar{i}}^{\bar{i}}$ .

Ковариантные компоненты элементарной силы, определяются так:

$$df_{(i)\mu} = \tau_{\mu}^i a_i = \frac{1}{\sqrt{g_z^{ii}}} \tau_{\mu}^i F_{k3} dx_k dz$$

После параллельного переноса из точки  $z$  в точку  $\zeta$ :

$$(df_{(i)\mu})_{z=\zeta} = (\tau_{\mu}^i - \tau_{\mu}^{\lambda} \Phi_{(\zeta)\bar{i}}^{\lambda}) \frac{F_{k3}}{\sqrt{g_z^{ii}}} dx_k dz$$

( $\tau_{\mu}^i$  — смешанные компоненты тензора напряжений.

Вычислим теперь контравариантные компоненты присоединенного момента, который соответствует перемещению вектора  $(df_{(i)\mu})_{z=\zeta}$  на расстояние  $d\zeta$ .

Компоненты радиуса-вектора, соответствующего указанному перемещению, определяются из следующих приближенных формул:

$$r_i = \bar{g}_{i3}^{\zeta} d\zeta$$



(величинами второго порядка пренебрегаем). Тогда на основании известных формул векторного исчисления, контравариантные компоненты присоединенного момента определяются так:

$$dM_{(i)}^{\nu} = \frac{1}{v} \left[ \bar{g}_{\alpha\beta}^{\zeta} (\tau_{\beta}^i - \tau_{\lambda}^i \Phi_{(\zeta)\beta}^{\lambda}) - \bar{g}_{\beta\beta}^{\zeta} (\tau_{\alpha}^i - \tau_{\lambda}^i \Phi_{(\zeta)\alpha}^{\lambda}) \right] \frac{F_{k3}}{\sqrt{\bar{g}_{ii}^{\zeta}}} dx_k dz d\zeta.$$

(Числа  $\nu, \alpha, \beta$ , образуют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3, числа  $i, k$  — перестановку чисел 1, 2).

$v$  — объем параллелепипеда, построенного на координатных векторах.

Теперь перенесем вектор  $d\bar{M}_{(i)}$  по правилам параллельного переноса вдоль линии  $z$  из точки  $\zeta$  в среднюю поверхность. Будем обозначать через  $\bar{\Phi}_{\lambda}^i$  величины, соответствующие  $\Phi_{\lambda}^i$ , необходимые для указанного переноса контравариантного вектора  $dM_{(i)}$ . На основании формулы (6), получим:

$$\begin{aligned} (dM_i^{\nu})_{z=0} = & \frac{1}{v} \left\{ \left[ \bar{g}_{\nu+1,3}^{\zeta} (\tau_{\nu+2}^i - \tau_{\lambda}^i \Phi_{(\zeta)\nu+2}^{\lambda}) - \bar{g}_{\nu+2,3}^{\zeta} (\tau_{\nu+1}^i - \tau_{\lambda}^i \Phi_{(\zeta)\nu+1}^{\lambda}) \right] + \right. \\ & \left. + \left[ \bar{g}_{\mu+1,3}^{\zeta} (\tau_{\mu+2}^i - \tau_{\lambda}^i \Phi_{(\zeta)\mu+2}^{\lambda}) - \bar{g}_{\mu+2,3}^{\zeta} (\tau_{\mu+1}^i - \tau_{\lambda}^i \Phi_{(\zeta)\mu+1}^{\lambda}) \right] \bar{\Phi}_{\mu}^{\nu} \right\} \times \\ & \times \frac{F_{k3}}{\sqrt{\bar{g}_{ii}^{\zeta}}} dx_k dz d\zeta. \end{aligned}$$

Аналогично введенным нами выше усилиям, введем моменты внутренних сил, приведенных к срединной поверхности и отнесенных к единице длины координатной линии, которая принадлежит одновременно средней поверхности и соответствующей контурной поверхности:

$$L_{(i)}^{\nu} = \frac{\int_{-h}^{+h} \int_0^z (dM_i^{\nu})_{z=0}}{\sqrt{\bar{g}_{kk}} dx_k},$$

или после некоторых сокращений:

$$\begin{aligned} L_{(i)}^{\nu} = & \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{kk}}} \int_{-h}^{+h} \int_0^z \frac{1}{v(\zeta)} \left\{ \left[ \bar{g}_{\nu+1,3}^{\zeta} (\tau_{\nu+2}^i - \tau_{\lambda}^i \Phi_{(\zeta)\nu+2}^{\lambda}) - \bar{g}_{\nu+2,3}^{\zeta} (\tau_{\nu+1}^i - \right. \right. \\ & \left. \left. - \tau_{\lambda}^i \Phi_{(\zeta)\nu+1}^{\lambda}) \right] + \left[ \bar{g}_{\mu+1,3}^{\zeta} (\tau_{\mu+2}^i - \tau_{\lambda}^i \Phi_{(\zeta)\mu+2}^{\lambda}) - \bar{g}_{\mu+2,3}^{\zeta} (\tau_{\mu+1}^i - \right. \right. \\ & \left. \left. - \tau_{\lambda}^i \Phi_{(\zeta)\mu+1}^{\lambda}) \right] \bar{\Phi}_{\mu}^{\nu} \right\} \frac{F_{k3}}{\sqrt{\bar{g}_{ii}^{\zeta}}} d\zeta dz. \end{aligned} \quad (13)$$



Формулы (12) и (13), являются непосредственным обобщением формул классической теории, принадлежащей главным образом Ляву. В первом приближении эти формулы совпадают с формулами классической теории.

## § 2

### ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТОВ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИИ ЧЕРЕЗ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК СРЕДНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Как мы уже указывали выше, основная цель теории оболочек заключается в определении деформированного и напряженного состояния средней поверхности, которая как-бы заменяет собой трехмерную оболочку. Для решения этой задачи необходимо, во-первых, связать напряжения в различных точках оболочки с силами, условно приложенными к средней поверхности и им статически эквивалентными и, во-вторых, выразить тензор деформации в различных точках оболочки через перемещения средней поверхности. Первая задача была рассмотрена нами в предыдущем параграфе. Приступим к решению второй.

Искомые выражения для компонентов тензора деформации мы получим, разлагая тензор деформации, относящейся к точке оболочки с координатой  $z$ , в ряд Тейлора. Необходимо особо подчеркнуть, что для получения, разложения выражающего тензор деформаций в метрике пространства, относящейся к средней поверхности, мы должны в обычной строке Тейлора заменить частные производные абсолютными (ковариантными), т. к. указанное действие связано с параллельным переносом тензора в смысле Леви-Чивита.

Обозначая через  $\Delta r$  — вектор расстояния <sup>1)</sup> между точкой  $z$  и средней поверхностью, получим искомое разложение.

Оно имеет вид:

$$D_{ik}^z = D_{ik} + \nabla_{\nu} D_{ik} \Delta r^{\nu} + \frac{1}{2} \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} D_{ik} \Delta r^{\nu} \Delta r^{\mu} + \dots \quad (14)$$

( $\nabla$  — символ ковариантной производной,  $D_{ik}^z$  и  $D_{ik}$  — компоненты тензора деформации в точке с координатой  $z$  и на средней поверхности).

Напомним, что тензор деформации является симметричной частью удвоенной ковариантной производной от вектора перемещения <sup>2)</sup>. Составляя ковариантную производную для вектора перемещения, вычисляем затем компоненты тензора деформации через перемещения:

<sup>1)</sup> Термин „вектор“ следует понимать условно. Величина  $\overline{\Delta r}$ , определяющаяся, тремя приращениями координат, является вектором в плоском пространстве, касательном к рассматриваемому в той точке средней поверхности, в которой мы производим указанное разложение. (Речь идет конечно о трехмерных пространствах).

<sup>2)</sup> См. Тр е ф ф ц „Математическая теория упругости“, а также Я. Фр ен к е л ь „Векторное исчисление с приложениями к механике“.



$$D_{ik}^z = \frac{\partial u_k^z}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i^z}{\partial x_i} + 2\Gamma_{ik}^h u_h^z \quad (15)$$

Тут

$$\Gamma_{ik}^h = g_z^{h\mu} \Gamma_{\mu, ik}^z = -\frac{1}{2} g_z^{h\mu} \left( \frac{\partial g_{\mu i}^z}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{\mu k}^z}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}^z}{\partial x_\mu} \right) \quad (15a)$$

—трехзначковые символы Кристоффеля второго рода  $D_i$ , равно  $2\varepsilon_i$ , если  $i=k$  и равно  $\gamma_{ik}$ , если  $i \neq k$ .

Формулу (15) можно записать сокращенно:

$$D_{ik}^z = \nabla_i u_k^z + \nabla_k u_i^z \quad (15b)$$

Подставляя (15b) в формулу (14), получим искомое разложение тензора деформации:

$$D_{ik}^z = \nabla_i u_k + \nabla_k u_i + \nabla_\mu (\nabla_i u_k + \nabla_k u_i) \Delta r^\mu + \\ + \nabla_\lambda \nabla_\mu (\Delta_i u_k + \Delta_k u_i) \Delta r^\mu \Delta r^\lambda + \dots \quad (16)$$

Имея ввиду, что

$$\nabla_\lambda u_x = \frac{\partial u_x}{\partial x_\lambda} + \Gamma_{\lambda x}^h u_h \quad (17)$$

получим далее разложение тензора деформаций в развернутом виде. Необходимо иметь ввиду, что тензор деформации определяется через перемещения в метрике недеформированной оболочки.

До деформации линейный элемент имеет форму:

$$d\sigma^2 = g_{11} dx_1^2 + g_{22} dx_2^2 + dz^2.$$

Контравариантные компоненты  $\Delta r^\lambda$  будут следующие:

$$\Delta r^1 = \Delta r^2 = 0 \quad \Delta r^3 = z.$$

Символы Кристоффеля определяются так:

$$\Gamma_{ii}^h = \frac{1}{2g_{hh}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_h}; \quad \Gamma_{hi}^h = -\frac{1}{2g_{hh}} \frac{\partial g_{hh}}{\partial x_i}, \quad \Gamma_{hh}^h = -\frac{1}{2g_{hh}} \frac{\partial g_{hh}}{\partial x_h}.$$

Заметим кроме того, что трехзначковые символы Кристоффеля  $(\Gamma_{\nu 3}^\nu)_{z=0}$  равны на основании формулы (4) и формулы (15a), кривизне соответствующей координатной линии.

$$(\Gamma_{\nu 3}^\nu)_{z=0} = \frac{1}{R_\nu} \quad (18)$$



На основании этих замечаний и формул (16) — (17), вычисляем последовательно компоненты тензора деформации.

Получаем, переходя к обычным обозначениям:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^z &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \Gamma_{11}^1 u_1 + \Gamma_{11}^2 u_2 - \frac{g_{11}}{R_1} u_3 + z \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{u_1}{R_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{11}^1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{u_1}{R_1} \right) + \Gamma_{11}^2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{u_2}{R_2} \right) - \frac{g_{11}}{R_1} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right] + \dots \\ \varepsilon_2^z &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \Gamma_{22}^1 u_1 + \Gamma_{22}^2 u_2 - \frac{g_{22}}{R_2} u_3 + z \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{u_2}{R_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{22}^1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{u_1}{R_1} \right) + \Gamma_{22}^2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{u_2}{R_2} \right) - \frac{g_{22}}{R_2} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right] + \dots \quad (19) \\ \varepsilon_3^z &= \frac{\partial u_3}{\partial z} + z \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12}^z &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + 2\Gamma_{12}^1 u_1 + 2\Gamma_{12}^2 u_2 + z \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{u_2}{R_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{u_1}{R_1} \right) + 2\Gamma_{12}^1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{u_1}{R_1} \right) + 2\Gamma_{12}^2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{u_2}{R_2} \right) \right] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{13}^z &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{2u_1}{R_1} + z \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{u_1}{R_1} \right) + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial z} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{u_1}{R_1} \right) \right] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{23}^z &= \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{2u_2}{R_2} + z \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{u_2}{R_2} \right) + \frac{\partial u_3}{\partial x_2 \partial z} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R_2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{u_2}{R_2} \right) \right] + \dots \end{aligned}$$

Формулы (19) дают первые два члена в разложении компонентов тензора деформаций по степеням  $z$ . Однако, они не дают еще выражений, позволяющих свести общую трехмерную задачу теории упругости к двумерной, так как содержат производные от перемещений по третьей координате  $z$ . Дальнейшая задача заключается в замене этих производных функциями от самих перемещений и их производных по  $x_1$  и  $x_2$ .

Этот вопрос рассматривается в следующем параграфе.

## Общие формулы приведения. Гипотеза Кирхгоффа

Наиболее общими формулами приведения будут следующие:

$$\nabla_3 u_i = I_{i\lambda} (u_\rho, \nabla_j u_k, \dots \nabla_j \dots \nabla_\lambda u_k \dots) \quad (20)$$

$I_i$  — некоторая тензорная функция  $j, \lambda, \dots = 1, 2$ .

Однако число физических условий не дает возможности найти функцию  $I_{i\lambda}$  однозначно в явной форме. Поэтому прежде всего ограничивают число аргументов этой функции, вводя в рассмотрение лишь первые производные от перемещений, так что формула (20) приобретает вид:

$$\nabla_3 u_i = I_{i\lambda} (u_\rho, \nabla_j u_k). \quad (20a)$$

Для определения функции  $I$  наиболее широко распространен прием Кирхгоффа. Исходным пунктом Кирхгофф избрал рассмотрение трех компонентов тензора деформации, зависящих от третьей координаты:  $\gamma_{13}, \gamma_{23}, \varepsilon_3$ .

Для тонких оболочек эти три функции можно принять равными нулю, что дает:

$$\gamma_{13} = \nabla_1 u_3 + \nabla_3 u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{2u_1}{R_1} = 0$$

$$\gamma_{23} = \nabla_2 u_3 + \nabla_3 u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{2u_2}{R_2} = 0$$

$$\varepsilon_3 = \nabla_3 u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0.$$

Отсюда имеем необходимые выражения:

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{2u_1}{R_1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{2u_2}{R_2} \quad (21)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial z} = 0.$$

Геометрически гипотеза Кирхгоффа эквивалентна предположению о том, что нормаль к первоначально не деформированной средней поверхности, остается нормалью к деформированной средней поверхности, не искривляясь при деформации и не изменяя своей длины.



Первая группа эластостатических уравнений теории тонких оболочек

Формулы (19) можно представить в ином виде, введя два тензора, характеризующие деформацию средней поверхности. Один из них представляет из себя тензор двухмерной деформации средней поверхности, другой представляет из себя величину, характеризующую изменение кривизны средней поверхности. Обозначая компоненты первого тензора  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\gamma_{12}$ , второго  $\kappa_{11}$ ,  $\kappa_{22}$  и  $\kappa_{12}$ , получим:

$$\begin{aligned}\epsilon_1^z &= \epsilon_1 - z\kappa_{11} + \dots \\ \epsilon_2^z &= \epsilon_2 - z\kappa_{22} + \dots \\ \gamma_{12}^z &= \gamma_{12} - z\kappa_{12} + \dots\end{aligned}\quad (22)$$

Ковариантные компоненты двух указанных тензоров на основании формул (19) — (21), имеют вид:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} u_1 + \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} u_2 - \frac{g_{11}}{R_1} u_3 \\ \epsilon_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} u_1 - \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} u_2 - \frac{g_{22}}{R_2} u_3\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} u_2 - \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} u_1 \\ \kappa_{11} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{u_1}{R_1} \right) - \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{u_1}{R_1} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{u_2}{R_2} \right)\end{aligned}\quad (24)$$

$$\begin{aligned}\kappa_{22} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{u_2}{R_2} \right) + \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{u_1}{R_1} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{u_2}{R_2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{12} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{u_2}{R_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{u_1}{R_1} \right) - \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{u_1}{R_1} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{u_2}{R_2} \right)\end{aligned}$$

Геометрическое значение величин  $x_{ik}$  легко раскрыть, рассмотрев частный случай пластинки:  $g_{11} = g_{22} = 1$ ;  $R_1 = R_2 = \infty$ .

$$\text{Тогда найдем: } x_{11} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}; \quad x_{22} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}; \quad x_{12} = 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Эти выражения как известно измеряют изменение кривизны пластинки после деформации. Подобную роль в случае кривых оболочек играют величины  $x_{ik}$ , которые и называются компонентами тензора изменений кривизны. Тензорный характер этих величин вытекает из самого способа получения формул (19).

Уравнения (23) и (24) составляют первую группу эластостатических уравнений теории тонких оболочек.

## § 5

### Вторая группа эластостатических уравнений

Вторая группа эластостатических уравнений состоит из зависимостей между усилиями и приведенными моментами с одной стороны, и компонентами, рассмотренными нами двух основных тензоров деформаций средней поверхности — с другой. Эта зависимость устанавливается на основании закона Гука и формул (12), — (13). Предварительно вычислим компоненты метрического тензора в точке с координатой  $z$  деформированной оболочки.

$$\text{Будем обозначать } \frac{1}{R_i} = k_i.$$

Напомним, что компоненты тензора деформации являются приращениями компонентов метрического тензора, возникшими в результате деформации<sup>1</sup>. На основании формул (3) — (19), получим, обозначая компоненты метрического тензора после деформации через  $\bar{g}_{ik}^z$ ,

$$\bar{g}_{ih}^z = \bar{g}_{ih} - 2K_{ih}z + \dots \quad (25)$$

Через  $\bar{g}_{ih}$  нами обозначен метрический тензор деформированной средней поверхности.

$$K_{ik} = \left. \begin{array}{ll} g_{ii}k_i + x_{ii} & \text{если } i = k \\ \frac{1}{2} x_{ih} & \text{если } i \neq k \end{array} \right\}$$

$$\bar{g}_{ih} = g_{ih} + \gamma_{ih}$$

Формулы (25) — (26) дают искомые выражения для ковариантных компонентов метрического тензора деформированной оболочки.

<sup>1</sup> См. Т р е ф ф ц „Математическая теория упругости“.



Переходим к вычислению контравариантных компонентов. Как известно<sup>1</sup>, контравариантные компоненты метрического тензора определяются по следующим формулам:

$$g^{ih} = \frac{G_{ih}}{v^2}$$

где

$$v^2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix},$$

а  $G_{ih}$  — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу  $g_{ih}$  детерминанта  $v^2$ . Производя необходимые вычисления [пользуясь при этом формулами (25)], получим следующие выражения для контравариантных компонентов метрического тензора на расстоянии  $z$  от средней поверхности:

$$\bar{g}_z^{ih} = \bar{g}^{ih} - 2z\alpha^{ih} + \dots; \quad \bar{g}_z^{13} = \bar{g}_z^{23} = 0; \quad \bar{g}_z^{33} = 1. \quad (27)$$

$\bar{g}^{ih}$  — контравариантные компоненты метрического тензора деформированной средней поверхности. Они определяются из формул:

$$\begin{aligned} \bar{g}^{11} &= \frac{g_{22} + 2\varepsilon_2}{(g_{11} + 2\varepsilon_1)(g_{22} + 2\varepsilon_2) - \gamma_{12}^2}; \\ \bar{g}^{22} &= \frac{g_{11} + 2\varepsilon_1}{(g_{11} + 2\varepsilon_1)(g_{22} + 2\varepsilon_2) - \gamma_{12}^2}; \\ \bar{g}^{12} &= -\frac{\gamma_{12}}{(g_{11} + 2\varepsilon_1)(g_{22} + 2\varepsilon_2) - \gamma_{12}^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Величины  $\alpha^{ih}$  в свою очередь определяются из таких формул:

$$\begin{aligned} \alpha^{11} &= \frac{K_{22}}{(g_{11} + 2\varepsilon_1)(g_{22} + 2\varepsilon_2) - \gamma_{12}^2} - \\ &= \frac{(g_{22} + 2\varepsilon_2)[K_{22}(g_{11} + 2\varepsilon_1) + K_{11}(g_{22} + 2\varepsilon_2) + 2K_{12}\gamma_{12}]}{[(g_{11} + 2\varepsilon_1)(g_{22} + 2\varepsilon_2) - \gamma_{12}^2]^2} \\ \alpha^{22} &= \frac{K_{11}}{(g_{11} + 2\varepsilon_1)(g_{22} + 2\varepsilon_2) - \gamma_{12}^2} - \\ &= \frac{(g_{11} + 2\varepsilon_1)[K_{22}(g_{11} + 2\varepsilon_1) + K_{11}(g_{22} + 2\varepsilon_2) + 2K_{12}\gamma_{12}]}{[(g_{11} + 2\varepsilon_1)(g_{22} + 2\varepsilon_2) - \gamma_{12}^2]^2} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> См. напр. Кочин, «Векторное исчисление».

$$\alpha^{12} = -\frac{K_{12}}{(g_{11} + 2\varepsilon_1)(g_{22} + 2\varepsilon_2) - \gamma_{12}^2} - \frac{\gamma_{12} [K_{22}(g_{11} + 2\varepsilon_1) + K_{11}(g_{22} + 2\varepsilon_2) + 2\gamma_{12}K_{12}]}{[(g_{11} + 2\varepsilon_1)(g_{22} + 2\varepsilon_2) - \gamma_{12}^2]^2}.$$

Далее вычисляем символы Кристоффеля  $\Gamma_{m3}^i$ . На основании формул (25) имеем:

$$\frac{\partial \bar{g}_{ih}^z}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{g}_{ih}}{\partial x_j} - 2z \frac{\partial K_{ih}}{\partial x_j};$$

$$i = 1, 2 \quad (29)$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{ih}^z}{\partial z} = -2K_{ih}.$$

Как известно:

$$\bar{\Gamma}_{\lambda 3}^i = g_z^{i\mu} \Gamma_{\mu, \lambda 3}^z = -\frac{1}{2} g_z^{i\mu} \left\{ \frac{\partial g_{\rho\lambda}^z}{\partial z} + \frac{\partial g_{\mu 3}^z}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda 3}^z}{\partial x_\mu} \right\}.$$

Принимая во внимание формулы (27) — (29), находим окончательно:

$$\Gamma_{\lambda 3}^i = K_{\mu\lambda} \{ \bar{g}^{i\mu} - 2z\alpha^{i\mu} + \dots \} \quad (30)$$

Теперь вычисляем по формулам (6) — (7) функции  $\Phi_\lambda^{\bar{i}}$  и  $\Phi_{\bar{i}}^\lambda$ . Ограничиваясь первым членом разложения, находим:

$$\Phi_\lambda^{\bar{i}} = -K_{\mu\lambda} \bar{g}^{i\mu} z + \dots \quad (31)$$

$$\Phi_{\bar{i}}^\lambda = -K_{\mu i} \bar{g}^{\lambda\mu} z + \dots$$

Переходим к вычислению компонентов тензора напряжений. Закон Гука можно записать в следующей инвариантной форме:

$$\tau_z^{ih} = G \gamma_z^{ih} + \lambda g_z^{ih} \Theta_z; \quad \gamma_z^{ii} = 2\varepsilon_z^i \quad (32)$$

(не суммировать по  $i$  и  $k$ !)

$\tau_z^{ih}$  — контравариантные компоненты тензора напряжений в точке,

находящейся на расстоянии  $z$  от средней поверхности,  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

— модуль сдвига,  $\lambda = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ ;  $\Theta_i = \text{div} \bar{u}_z$ .



$$g_z^{ih} = \begin{cases} \frac{1}{g_{ii}^z} & \text{если } i = h \\ 0 & \text{если } i \neq h \end{cases}$$

Вычисляя контравариантные компоненты тензора деформаций, найдем:

$$\gamma_z^{ih} = g_z^{i\mu} g_z^{h\nu} \gamma_{\mu\nu}^z = \frac{1}{g_{ii}^z g_{hh}^z} \left\{ \gamma_{ih} + z[2(k_i + k_h)\gamma_{ih} - x_{ih}] + \dots \right\} \quad (38)$$

Если  $i = h$ , то имеем:

$$\varepsilon_z^i = \frac{1}{g_{ii}^z} \left\{ \varepsilon_i + z[4k_i \varepsilon_i - x_{ii}] + \dots \right\}$$

Вычисляя затем из формулы

$$\Theta_z = g_{\mu\nu}^z \varepsilon_z^{\mu\nu}$$

$div \bar{u}^i$  и подставляя найденные величины в формулу (32), получим следующие выражения для компонентов тензора напряжений:

$$\tau_z^{11} = \frac{2G}{g_{11}^z} \varepsilon_1 + \lambda \left( \frac{\varepsilon_1}{g_{11}^z} + \frac{\varepsilon_2}{g_{11}g_{22}^z} \right) + z \left\{ \frac{2G}{g_{11}^z} (4k_1 \varepsilon_1 - x_{11}) + \lambda \left[ \frac{4k_1 \varepsilon_1 - x_{11}}{g_{11}^z} + \frac{4k_2 \varepsilon_2 - x_{22}}{g_{11}g_{22}^z} + \frac{2(k_1 - k_2) \varepsilon_2}{g_{11}g_{22}^z} \right] \right\} + \dots \quad (34)$$

$$\tau_z^{22} = \frac{2G}{g_{22}^z} \varepsilon_2 + \lambda \left( \frac{\varepsilon_1}{g_{11}g_{22}^z} + \frac{\varepsilon_2}{g_{22}^z} \right) + z \left\{ \frac{2G}{g_{22}^z} (4k_2 \varepsilon_2 - x_{22}) + \lambda \left[ \frac{4k_1 \varepsilon_1 - x_{11}}{g_{11}g_{22}^z} + \frac{4k_2 \varepsilon_2 - x_{22}}{g_{22}^z} + \frac{2(k_2 - k_1) \varepsilon_1}{g_{11}g_{22}^z} \right] \right\} + \dots$$

$$\tau_z^{12} = \frac{G}{g_{11}g_{22}^z} \left\{ \gamma_{12} + z[2(k_1 + k_2)\gamma_{12} - x_{12}] + \dots \right\}$$

Теперь, пользуясь формулами (12) — (13) вычисляем компоненты приведенных к средней поверхности усилий и моментов.

Заметим прежде всего, что моменты являются величинами третьего порядка относительно  $z$ . Так как выше мы не принимали во внимание величины старших порядков, начиная со второго, мы пока не станем вычислять моментов. Рассматривая формулу (12), мы сразу замечаем, что члены, содержащие  $z$  в первой степени, дадут после интегрирования нуль.

В результате получим:

$$S_{(1)}^1 = \frac{2h}{\sqrt{g_{11}^z}} \tau^{11}; \quad S_{(1)}^2 = \frac{2h}{\sqrt{g_{11}^z}} \tau^{12}; \quad (35)$$

$$S_{(2)}^1 = \frac{2h}{\sqrt{g^{22}}} \tau^{12} \quad \text{и} \quad S_{(2)}^2 = \frac{2h}{\sqrt{g^{22}}} \tau^{22}$$

(с точностью до величины порядка  $h^3$ ):

Подставляя в формулы (35) значения компонентов тензора напряжений в средней поверхности, получим вторую группу эластостатических уравнений (первые члены бесконечных рядов, через которые выражаются усилия)

$$\begin{aligned} S_{(1)}^1 &= \frac{2h}{\sqrt{g^{11}}} \left[ \frac{2G}{g_{11}^2} \varepsilon_1 + \lambda \left( \frac{\varepsilon_1}{g_{11}^2} + \frac{\varepsilon_2}{g_{11}g_{22}} \right) \right] + \dots \\ S_{(1)}^2 &= \frac{2h}{\sqrt{g^{11}}} \frac{G}{g_{11}g_{22}} \gamma_{12} + \dots \\ S_{(2)}^1 &= \frac{2h}{\sqrt{g^{22}}} \frac{G}{g_{11}g_{22}} \gamma_{12} + \dots \\ S_{(2)}^2 &= \frac{2h}{\sqrt{g^{22}}} \left[ \frac{2G}{g_{22}^2} \varepsilon_2 + \lambda \left( \frac{\varepsilon_1}{g_{11}g_{22}} + \frac{\varepsilon_2}{g_{22}^2} \right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

## § 6

### Третья группа эластостатических уравнений (уравнения равновесия)

Механическими условиями равновесия элемента оболочки является, как известно, равенство нулю главного вектора и главного момента системы сил, которая действует на рассматриваемый элемент оболочки.

Перенося все силы, действующие на края элемента средней поверхности и на ограничивающие контур элемента поверхности оболочки, а также объемные силы в некоторую точку элемента по правилам параллельного переноса векторов Леви—Чивита, получим следующие уравнения, выражающие равенство нулю главного вектора указанных сил:

$$\frac{\partial(S_{(h)}^i \sqrt{g_{h+1, h+1}})}{\partial x_h} \Gamma_{\lambda h}^i S_{(h)}^\lambda \sqrt{g_{h+1, h+1}} + X^i = 0. \quad (37)$$

Числа  $h$  и  $h+1$  принимают соответственно значения, составляющие перестановки чисел 1, 2;  $i, \lambda = 1, 2, 3$ .

$X^i$  — компонента сил, действующих на ограничивающие поверхности, перенесенная в среднюю поверхность.

Аналогично составляется уравнение, выражающее равенство нулю главного момента всех сил, приложенных к средней поверхности. Это уравнение имеет вид:



$$\frac{\partial (L_{(k)}^i \sqrt{g_{k+1, k+1}})}{\partial x_k} - \Gamma_{\lambda k}^i L_{(k)}^\lambda \sqrt{g_{k+1, k+1}} + \frac{1}{\nu} \left\{ \bar{g}_{i+1, k} S_{(k)i+2} \sqrt{g_{k+1, k+1}} - \bar{g}_{i+2, k} S_{(k)i+1} \sqrt{g_{k+1, k+1}} \right\} + M^i = 0 \quad (38)$$

Тут  $L_{(k)}^i$  — компоненты присоединенных моментов, определяющиеся формулами (13),

$S_{(k)j}$  — ковариантные компоненты усилий,

$M^i$  — момент внешних сил, перенесенный в среднюю поверхность.

Шесть уравнений (37) — (38) — составляют третью группу эластостатических уравнений.

## § 7

**Замечание относительно третьего уравнения системы (38)**

Еще в классических работах Лява мы находим указания на то, что третье уравнение системы (38) в некоторых случаях обращается в тождество (при соответствующей степени приближения), иногда же противоречит остальным уравнениям. Краус<sup>1</sup> доказал, что это уравнение всегда обращается в тождество, что можно доказать, основываясь на формулах (12) — (13), имеющих более общий характер, чем соответствующие формулы Крауса.

Учитывая, что уравнения (38) имеют инвариантный характер, достаточно доказать превращение третьего уравнения в тождество в какой-либо одной, специально выбранной координатной системе. В качестве таковой изберем систему координат с координатными линиями  $x_1$  и  $x_2$ , совпадающими с линиями кривизны деформированной средней поверхности. Третью ось направим по нормали к средней поверхности.

Тогда среди символов Кристоффеля  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  будет отличаться от нуля лишь

$$\Gamma_{13}^1 = -\frac{\partial}{\partial z} \ln(1 - zk_1),$$

как это видно из формул (3) и (15а).

Вычисляя затем по формулам (6) и (7) величины  $\Phi_\lambda^{\bar{i}}$  и  $\Phi_{\bar{i}}^\lambda$ , а также  $\Phi_{(\zeta)\bar{i}}^\lambda$  и  $\Phi_{(\zeta)\lambda}^{\bar{i}}$  и т. д., найдем после суммирования бесконечных рядов:

$$\Phi_{\bar{1}}^1 = -k_1 \zeta,; \quad \Phi_{\bar{2}}^2 = -k_2 \zeta,; \quad \Phi_{(\zeta)\bar{1}}^1 = 1 - \frac{1 - k_1 \zeta}{1 - k_1 \zeta},$$

<sup>1</sup> Math. Annalen, März, 1929.



$$\Phi_{(5)}^2 = 1 - \frac{1 - k_2^2}{1 - k_2 z}.$$

Третье уравнение системы (38) в избранной нами системе координат, после некоторых преобразований, приобретает вид:

$$\sqrt{g_{22}} (\sqrt{g_{11} g_{22}} S_{(1)}^2 - \Gamma_{11}^3 L_{(1)}^1) - \sqrt{g_{11}} (\sqrt{g_{11} g_{22}} S_{(2)}^1 + \Gamma_{22}^3 L_{(2)}^2) + M^3 = 0.$$

Замечая, что второе слагаемое отличается от первого лишь порядком индексов (знаки  $L_{(2)}^2$  и  $L_{(1)}^1$ , как видно из (13), противоположны), преобразуем первое слагаемое. После несложных вычислений получим:

$$I = \sqrt{g_{11} g_{22}} \int_{-h}^h \tau^{12} (1 - zk_1) (1 - zk_2) \sqrt{g_{11}^z g_{22}^z} dz$$

Полученное выражение совершенно симметрично относительно индексов 1,2. Следовательно, рассматриваемое уравнение сводится к равенству  $M^3 = 0$ . Это равенство является необходимым условием равновесия оболочки. Равновесие возможно лишь при отсутствии внешних моментов в касательных к средней поверхности плоскостях.

В других координатных системах рассмотренное уравнение в тождество не обращается. Однако, на основании инвариантных свойств всей системы в целом, мы имеем право утверждать, что из трех уравнений системы (38) независимых есть лишь два.

## ГЛАВА III

### § 1. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

Если заменить в уравнениях (37) — (38) предыдущей главы усилия и моменты через перемещение при помощи второй и первой групп уравнений (формулы (22), (23), (24) и (36)), то каждое из уравнений будет представлять из себя равенство нулю некоторого ряда, расположенного по степеням  $h$ . Рассмотрим подробно коэффициенты этих рядов.

Заметим прежде всего, что уравнения (37) будут содержать члены, начиная с  $h$ , а уравнения (38), начиная с  $h^3$ .

Рассмотрим уравнения (37).

Если в формулах (12) — (13) производить интегрирование в пределах от  $-z$  до  $+z$ , то уравнения (37) будут являться условиями равновесия соответственной части элемента оболочки. Ряды в этих уравнениях начнутся с членов первой степени относительно  $z$ . Компоненты внешних сил  $X^i$ , предполагая отсутствующими объемные силы, при этом надо заменить величинами



$$\begin{aligned} & \frac{\tau^{i3}}{+z} \sqrt{g_{11}^z g_{22}^z - (g_{12}^z)^2} + \frac{\tau^{j3}}{+z} \sqrt{g_{11}^z g_{22}^z - (g_{12}^z)^2} \Phi_{\lambda}^i - \\ & - \frac{\tau^{i3}}{-z} \sqrt{g_{11}^z g_{22}^z - (g_{12}^z)^2} - \frac{\tau^{j3}}{-z} \sqrt{g_{11}^z g_{22}^z - (g_{12}^z)^2} \Phi_{(-z)\lambda}^i \end{aligned}$$

Так как  $\tau^{13} = \tau^{23} = 0$  (гипотеза Кирхгоффа), остается определить  $\tau^{33} = \sigma^3$ .

Вычисляя  $\sigma^3$  по формуле (32), найдем:

$$\sigma_z^3 = \lambda \Theta_z = \lambda \left\{ \frac{\varepsilon_1}{g_{11}} + \frac{\varepsilon_2}{g_{22}} + z \left( \frac{4k_1 \varepsilon_1 - \chi_{11}}{g_{11}} + \frac{4k_2 \varepsilon_2 - \chi_{22}}{g_{22}} \right) + \dots \right\} \quad (38)$$

Далее, по формулам (31), находим:

$$(\Phi_{\lambda}^i)_{\pm z} = \mp K_{\mu\lambda} g^{i\mu} z + \dots; \quad (\Phi_3^i)_z = 0.$$

$$\lambda = 1, 2.$$

Формулы (25) дают возможность написать:

$$\sqrt{g_{11}^z g_{22}^z - (g_{12}^z)^2} = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \left\{ 1 - z \frac{g_{22} K_{11} + g_{11} K_{22} - 2g_{12} K_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}} + \dots \right\}$$

и окончательно:

$$\begin{aligned} \sigma_z^3 Fz = \lambda F \left\{ \frac{\varepsilon_1}{g_{11}} + \frac{\varepsilon_2}{g_{22}} + z \left[ \frac{4k_1 \varepsilon_1 - \chi_{11}}{g_{11}} + \frac{4k_2 \varepsilon_2 - \chi_{22}}{g_{22}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{\varepsilon_1}{g_{11}} + \frac{\varepsilon_2}{g_{22}} \right) \frac{g_{22} K_{11} + g_{11} K_{22} - 2g_{12} K_{12}}{F} \right] + \dots \right\} \quad (39) \end{aligned}$$

$$\text{Тут} \quad Fz = \sqrt{g_{11}^z g_{22}^z - (g_{12}^z)^2}; \quad F = F^0$$

Переноса соответствующие контравариантные компоненты силы в среднюю поверхность, найдем:

$$\begin{aligned} X^3 = 2\lambda Fz \left[ \frac{4k_1 \varepsilon_1 - \chi_{11}}{g_{11}} + \frac{4k_2 \varepsilon_2 - \chi_{22}}{g_{22}} - \right. \\ \left. - \left( \frac{\varepsilon_1}{g_{11}} + \frac{\varepsilon_2}{g_{22}} \right) \frac{g_{22} K_{11} + g_{11} K_{22} - 2g_{12} K_{12}}{F} \right] + \dots \quad (40) \end{aligned}$$

Примечание: Система уравнений (38) дает возможность сделать заключение, что порядок малости величин  $g_{i3}$  не ниже третьего.

Приравнявая нулю коэффициенты при  $z$  в уравнениях (37), мы получим систему трех уравнений с неизвестными функциями  $u_1, u_2, u_3$ .

Так как при вычислениях мы приняли во внимание только линейную часть тензора деформаций, то в дальнейшем отбра-

сываем все нелинейные, относительно неизвестных функций члены.

Следовательно, полученные из этих уравнений результаты справедливы только при малых значениях перемещений.

Если принять во внимание формулы (35), заменив в них  $h$  произвольным значением  $z$ , то из уравнений равновесия (37)–(38) можно получить уравнения, соответствующие первому приближению (выражающие равенство нулю коэффициента при  $z$  в соответствующих разложениях). Эти уравнения будут иметь вид (пренебрегая нелинейными членами):

$$\frac{\partial (S_{(1)}^i \sqrt{g_{22}})}{\partial x_1} + \frac{\partial (S_{(2)}^i \sqrt{g_{11}})}{\partial x_2} - \Gamma_{\lambda k}^i S_{(k)}^\lambda \sqrt{g_{k+1, k+1}} = 0 \quad (91)$$

$$i, \lambda, k = 1, 2.$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями равновесия плоской задачи.

Третье уравнение найдем, приняв во внимание формулы (29):

$$(\Gamma_{\mu\nu}^3)_{z=0} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}^z}{\partial z} \right)_{z=0} = +K_{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{g_{\mu\mu}}{R_\mu} + \chi_{\mu\mu} & \text{если } \mu = \nu \\ \frac{1}{2} \chi_{12} & \text{если } \mu \neq \nu \end{cases}$$

(см. формулы 26).

Отсюда, на основании (37) и (40):

$$K_{11} S_{(1)}^1 \sqrt{g_{22}} + K_{12} (S_{(1)}^2 \sqrt{g_{22}} + S_{(2)}^1 \sqrt{g_{11}}) + K_{22} S_{(2)}^2 \sqrt{g_{11}} + \\ + 2\lambda Fz \left[ \frac{4k_1 \epsilon_1 - \chi_{11}}{g_{11}} + \frac{4k_2 \epsilon_2 - \chi_{22}}{g_{22}} - \right. \\ \left. - \left( \frac{\epsilon_1}{g_{11}} + \frac{\epsilon_2}{g_{22}} \right) \frac{g_{22} K_{11} + g_{11} K_{22} - 2K_{12} g_{12}}{F} \right] = 0$$

Пренебрегая нелинейными членами, получим:

$$k_1 S_{(1)}^1 \sqrt{g_{22}} + k_2 S_{(2)}^2 \sqrt{g_{11}} + 2\lambda Fz \left[ \frac{4k_1 \epsilon_1 - \chi_{11}}{g_{11}} + \right. \\ \left. + \frac{4k_2 \epsilon_2 - \chi_{22}}{g_{22}} - \left( \frac{\epsilon_1}{g_{11}} + \frac{\epsilon_2}{g_{22}} \right) \frac{k_1 g_{22} + k_2 g_{11}}{F} \right] = 0 \quad (42)$$

( $F = \sqrt{g_{11} g_{22}}$ ) Величины  $S_{(i)}^k$  — определяются приближенными формулами (36) после замены  $h$  на  $z$ .

Уравнения (41)–(42) в основном совпадают с уравнениями „безмоментных“ оболочек.

На основании предыдущего мы имеем право утверждать, что, при предположении малости перемещений и справедливости



гипотезы Кирхгоффа, перемещения должны всегда удовлетворять в первую очередь системе уравнений (41) — (42).

Этим наша точка зрения отличается от взглядов ряда авторов, которые, в случае значительных по величине моментов, рассматривают уравнения, представляющие из себя уравнения, получающиеся в результате дополнения уравнений безмоментных оболочек членами, из второго приближения.

Способ этих авторов совершенно не дает возможности утверждать, что интегралы, полученные из дополненной системы уравнений, всегда точнее интегралов уравнений первого приближения.

В дальнейшем мы рассмотрим приближенную теорию устойчивости, исходя из уравнений (40) — (41) первого приближения.

## § 2

### Уравнения, определяющие состояние неустойчивости

В 1888 г. Брайан указал, что теорема об однозначности решений условий равновесия, доказанная впервые Кирхгофом, допускает исключения, если одно из измерений тела сильно отличается от остальных по размерам.

Мизес уточнил указания Брайана, введя понятие (для случая устойчивости стержней) о системе характеристических чисел, при совпадении с которыми по величине внешних нагрузок, происходит разветвление решений основной системы дифференциальных уравнений равновесия.

Вообще говоря, состояние неустойчивости упругого равновесия можно определить, следуя А. Пуанкаре, как такое состояние упругого тела, при котором существует две различные друг от друга системы интегралов основных уравнений, удовлетворяющие одинаковым условиям на границах. Если считать величины внешних нагрузок функциями одного параметра  $p$ , то существует система значений параметра  $p_i$ , при которых уравнения теории оболочек допускают две системы интегралов, не совпадающие друг с другом и удовлетворяющие каждая в отдельности одинаковым условиям на границах. Так как интегралы уравнений являются функциями параметра  $p$ , то соответствующие появлению неустойчивости характеристические числа (значения параметра)  $p_i$ , определяют так называемые точки разветвления решений уравнений или точки бифуркации.

Общий метод составления дифференциальных уравнений, из которых определяется соответствующая состоянию неустойчивости система интегралов (характеристических функций), заключается в следующем: предположим, что состоянию устойчивого равновесия, непосредственно предшествующему состоянию неустойчивости, соответствует система интегралов основных уравнений (например уравнений (41) — (42), которую обозначим  $u_{10}$ ,

$u_{20}$ ,  $u_{30}$ .



Соответствующие этим перемещениям усилия будем обозначать  $S_{(i)0}^k$ .

Дадим величинам  $u_{i0}$ ,  $S_{(i)0}^k$  бесконечно малые приращения  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  и т. д. и исследуем при каких условиях функции  $u_{10} + u_1$  будут удовлетворять той же системе уравнений, что и функции  $u_{i0}$ . При этом, очевидно, для определения функций  $u_i$ , получится система однородных линейных уравнений. Если условия на контуре имеют общий вид  $F_k \left( u_{i0}, \frac{\partial u_{i0}}{\partial x_j} \dots \frac{\partial^m u_{i0}}{\partial x_1^p \dots \partial x_2^q} \right) = \Phi_k$ , то для

характеристических функций условия на границах будут однородными, т. е. тождественно удовлетворяющимися при  $u_i = 0$ .

Если существует система интегралов  $u_i$ , удовлетворяющая, как указано выше, однородной системе уравнений, однородным условиям на границе и отличная от тривиального решения —  $u_i = 0$ , то состояние оболочки неустойчиво. Это состояние возможно лишь при некоторых значениях нагрузок, которые называются критическими.

Переходим к составлению основной системы уравнений, для определения системы характеристических функций  $u_i$ .

Обозначим величины  $S_{(k)0}^i \sqrt{g_{k+1, k+1}}$  через  $T_{(k)0}^i$ . Тогда уравнения (41) дадут:

$$\frac{\partial (T_{(k)0}^i + T_{(k)}^i)}{\partial x_k} - \left[ (\Gamma_{\lambda k}^i)_{(k)0} + (\Gamma_{\lambda k}^i) \right] (T_{(k)0}^\lambda + T_{(k)}^\lambda) = 0, \quad (43)$$

Вычитая уравнение (41) получим:

$$\frac{\partial T_{(k)}^i}{\partial x_k} - \left[ (\Gamma_{\lambda k}^i)_{(k)0} T_{(k)}^\lambda + \Gamma_{\lambda k}^i T_{(k)0}^\lambda \right] = 0 \quad (44)$$

$i, \lambda, k = 1, 2,$

Мы пренебрегли тут произведением  $\Gamma_{\lambda k}^i T_{(k)}^\lambda$ , как величиной второго порядка малости, но сохранили член  $\Gamma_{\lambda k}^i T_{(k)0}^\lambda$ , в который входят через функции  $T_{(k)0}^\lambda$  величины нагрузок, критические значения которых мы желаем найти.

Аналогично уравнение (42) даст:

$$\begin{aligned} & (k_1 + x_{11}) (T_{(1)}^1 + T_{(1)0}^1) + (k_2 + x_{22}) (T_{(2)0}^2 + T_{(2)}^2) + \\ & + \frac{1}{2} x_{12} (T_{(2)0}^2 + T_{(1)0}^2) + \\ & + 2\lambda z (F_0 + F) \left[ \frac{4(k_1 + x_{11})(\epsilon_{10} + \epsilon_1) - (x_{110} + x_{11})}{g_{11}} + \right. \end{aligned}$$



$$+ \frac{4(k_2 + x_{22})(\varepsilon_{20} + \varepsilon_2) - (x_{220} + x_{22})}{g_{22}} -$$

$$- \left( \frac{\varepsilon_{10} + \varepsilon_1}{g_{11}} + \frac{\varepsilon_{20} + \varepsilon_2}{g_{22}} \right) \frac{(k_1 + x_{11})g_{22} + (k_2 + x_{22})g_{11}}{F_0 + F} = 0. \quad (45)$$

Вычитая из уравнения (45) уравнение (42), получим:

$$k_1 T_{(1)}^1 + k_2 T_{(2)}^2 + x_{11} T_{(1)0}^1 + x_{22} T_{(2)0}^2 + \frac{1}{2} x_{12} (T_{(2)0}^1 + T_{(1)0}^2) +$$

$$+ 2\lambda z \left\{ F_0 \left[ \frac{4(k_1 \varepsilon_1 + x_{11} \varepsilon_{10}) - x_{11}}{g_{11}} + \frac{4(k_2 \varepsilon_2 + x_{22} \varepsilon_{20}) - x_{22}}{g_{22}} \right] - \right.$$

$$- \left( \frac{\varepsilon_{10} + \varepsilon_1}{g_{11}} + \frac{\varepsilon_{20} + \varepsilon_2}{g_{22}} \right) (x_{11} g_{22} + x_{22} g_{11}) - \left( \frac{\varepsilon_1}{g_{11}} + \frac{\varepsilon_2}{g_{22}} \right) (k_1 g_{22} + k_2 g_{11}) +$$

$$\left. + F \left[ \frac{4k_1 \varepsilon_{10} - x_{110}}{g_{11}} + \frac{4k_2 \varepsilon_{20} - x_{220}}{g_{22}} \right] \right\} = 0. \quad (46)$$

Уравнения (44) — (46) являются основными уравнениями теории устойчивости, опирающейся на первое приближение, рассмотренное нами выше.

Общий ход решения задачи очевидно такой: сперва определяем из основных уравнений (41) — (42) величины уравнений  $T_{(k)0}^i$  и соответствующие им  $u_{j0}$ ,  $\varepsilon_{j0}$ ,  $x_{j0}$  и т. д.

Затем из уравнений (44) — (46) определяем систему характеристических чисел и функций.

Замечание: Мы оставляем в стороне второй общий метод решения задачи, основанный на рассмотрении потенциальной энергии системы.

### § 3

#### Устойчивость цилиндрических и развертывающихся поверхностей

Цилиндрические поверхности принадлежат к классу развертывающихся поверхностей.

Для таких поверхностей Гауссова кривизна  $k_1 k_2 = 0$ . Отсюда следует, что если координатные линии совпадают с линиями кривизны, то соответственным выбором координатных масштабов можно всегда добиться равенства единице величин  $g_{11}$  и  $g_{22}$ . Положим далее, что  $k_2 = 0$ ,  $k_1 = k$ .

<sup>1</sup>) Член, содержащий  $x_{12}$  мы ввели, имея ввиду отброшенный член  $K_{12}$  в уравнении (42).

Тогда основная система уравнений приобретает вид:

$$\frac{\partial T_{(1)0}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{(2)0}^1}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial T_{(1)1}^2}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{(2)0}^2}{\partial x_2} = 0 \quad (46)$$

$$kT_{(1)0}^1 + 2\lambda z \{4k\varepsilon_{10} - x_{110} - x_{220} - (\varepsilon_{10} + \varepsilon_{20})k\} = 0.$$

Приводя эти уравнения к уравнениям в перемещениях, мы получим систему трех уравнений с переменными коэффициентами, зависящими от одной функции  $k$ .

Уравнения для определения характеристических функций нетрудно получить из уравнений (44) — (46), заметив, что, при вычислении  $\Gamma_{\lambda k}^i$ , надо положить:  $g_{11} = 1 + 2\varepsilon_1$ ,  $g_{22} = 1 + 2\varepsilon_2$ ,  $g_{33} = 1$ ,  $g_{12} = \gamma_{12}$ ,  $g_{23} = g_{13} = 0$  и отбросить нелинейные члены.

Вычисляя, получим:

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_1}; \quad \Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_2}; \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_1} \right); \quad (47)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_2} \right); \quad \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_1}; \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_2}.$$

Тогда уравнения (44) можно написать так:

$$\frac{\partial T_{(1)}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{(2)}^1}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_1} T_{(1)0}^1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_2} (T_{(2)0}^1 + T_{(1)0}^2) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_1} \right) T_{(2)0}^2 = 0 \quad (48)$$

$$\frac{\partial T_{(1)}^2}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{(2)}^2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_2} \right) T_{(1)0}^1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_1} (T_{(2)0}^1 + T_{(1)0}^2) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_2} T_{(2)0}^2 = 0.$$

Уравнение (46) приобретает форму:

$$k_1 T_{(1)}^1 + x_{11} T_{(1)0}^1 + x_{22} T_{(2)0}^2 + 2\lambda z \{4(k_1 \varepsilon_1 + x_{11} \varepsilon_{10}) - x_{11} +$$

$$+ 4x_{22} \varepsilon_{20} - x_{22} - (\varepsilon_{10} + \varepsilon_{20})(x_{11} + x_{22}) - k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) +$$

$$+ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(4k\varepsilon_{10} - x_{110} - x_{220})\} + \frac{1}{2} x_{12} (T_{(1)0}^2 + T_{(2)0}^1) = 0. \quad (49)$$

Задача приводится к интегрированию уравнений (48) — (49) с соблюдением условий на границах.



## Устойчивость при кручении эллиптического цилиндра

В качестве примера применения изложенной нами<sup>1</sup> теории, рассмотрим устойчивость при кручении бесконечно длинного эллиптического цилиндра. Уравнение средней поверхности до деформации можно написать так:

$$\begin{aligned}x &= a \cos \varphi \\y &= b \sin \varphi \\z &= x_2.\end{aligned}\quad (50)$$

Тут  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — декартовы координаты точек средней поверхности,  $\varphi$  и  $x_2$  — независимые параметры.

Элемент длины недеформированной средней поверхности будет иметь следующий вид:

$$d\sigma^2 = (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) d\varphi^2 + dx_2^2.$$

Введем вместо  $\varphi$  новый параметр путем подстановки:

$$x_1 = \int_a^\varphi \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (51)$$

Тогда элемент длины будет иметь форму, общую для всех развертывающихся на плоскость поверхностей:

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2. \quad (52)$$

Предположим теперь, что поверхность цилиндра свободна от внешних нагрузок, а по линиям  $x_2 = C$  (линии сечений, перпендикулярные к оси цилиндра), приложены усилия  $T_{(2)0}^1$ . Так как цилиндр по нашему предположению неограничен в направлении координаты  $x_2$ , то вопрос о граничных условиях значительно упрощается. Неизвестные функции при возрастании  $x_2$  должны стремиться к определенным пределам или должны быть периодическими функциями от  $x_2$ . Этим требованиям и основной системе уравнений удовлетворяют следующие начальные<sup>1)</sup> значения неизвестных функций:

$$T_{(1)0}^1 = T_{(2)0}^2 = 0; \quad T_{(2)0}^1 = T_{(1)0}^2 = S_0 z \quad (S_0 = \text{const})$$

$$\varepsilon_{10} = \varepsilon_{20} = x_{110} = x_{220} = 0.$$

На определении соответствующих перемещений  $u_{i0}$  мы не останавливаемся, так как они не входят в уравнения (48) — (49).

<sup>1)</sup> Т. е. их значения до появления неустойчивости.

При сделанных нами предположениях, система уравнений (48) — (49) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{(1)}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{(2)}^1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{(1)}}{\partial x_2} S_0 z &= 0; \\ \frac{\partial T_{(1)}^2}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{(1)}^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_1} S_0 z &= 0; \end{aligned} \quad (53)$$

$$kT_{(1)}^1 + x_{12} S_0 z + 2\lambda z \{ k(3\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - x_{11} - x_{22} \} = 0,$$

На основании предположения о неограниченности цилиндра в направлении оси  $x_2$ , предположим, что перемещения  $u_i$  имеют следующий вид:

$$u_i = \sum_{m=0}^{\infty} \left( A_{im} \cos \frac{m\pi x_2}{l} + B_{im} \sin \frac{m\pi x_2}{l} \right), \quad (54)$$

где  $A_{im}$  и  $B_{im}$  — функции только от  $x_1$ , число  $m$  — целое,  $l$  — длина полуволны, возникающей при неустойчивости.

Вычисляя по формулам (24)<sup>1)</sup> компоненты основных тензоров деформированной средней поверхности, найдем (полагая  $k_1 = k$ )<sup>2)</sup>

$$\varepsilon_1 = \sum \left[ \left( A'_{1m} - kA_{3m} \right) \cos \frac{m\pi x_2}{l} + \left( B'_{1m} - kB_{3m} \right) \sin \frac{m\pi x_2}{l} \right]$$

$$\varepsilon_2 = \sum \frac{m\pi}{l} \left[ B_{2m} \cos \frac{m\pi x_2}{l} - A_2 \sin \frac{m\pi x_2}{l} \right]$$

$$\gamma_{12} = \sum \left[ \left( B_{1m} \frac{m\pi}{l} + A'_{2m} \right) \cos \frac{m\pi x_2}{l} + \left( B'_{2m} - A_{1m} \frac{m\pi}{l} \right) \sin \frac{m\pi x_2}{l} \right] \quad (55)$$

$$x_{11} = \sum \left\{ \left[ A''_{3m} - (kA_{1m})' \right] \cos \frac{m\pi x_2}{l} + \left[ B''_{3m} - (kB_{1m})' \right] \sin \frac{m\pi x_2}{l} \right\}$$

$$x_{22} = - \sum \left( A_{3m} \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \cos \frac{m\pi x_2}{l} + B_{3m} \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{m\pi x_2}{l} \right)$$

$$x_{12} = \sum \frac{m\pi}{l} \left[ \left( 2B'_{3m} + kB_{1m} \right) \cos \frac{m\pi x_2}{l} - \left( 2A'_{3m} + kA_{1m} \right) \sin \frac{m\pi x_2}{l} \right]$$

Вычисляя далее по формулам (36) усилия, подставляя их в уравнения (53) и приравнявая коэффициенты при  $\cos \frac{m\pi x_2}{l}$  и  $\sin$

1) Заменяя  $h$  на  $z$ .

2) Штрихом обозначим производные по  $x_1$ .



$\frac{m\pi x_1}{l}$  нулю, получим систему из 6 обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций  $A_{im}$  и  $B_{im}$ :

$$2(2G + \lambda) A''_{1m} - 2(2G + \lambda) (kA_{3m})' + \frac{m\pi}{l} S_0 B'_{1m} + 2 \frac{m\pi}{l} (G + \lambda) B'_{2m} - \\ - kS_0 \frac{m\pi}{l} B_{3m} - 2G \frac{m^2 \pi^2}{l^2} A_{1m} = 0$$

$$2(2G + \lambda) B''_{1m} - 2(2G + \lambda) (kB_{3m})' - \frac{m\pi}{l} S_0 A'_{1m} - 2 \frac{m\pi}{l} (G + \lambda) A'_{2m} + \\ + kS_0 \frac{m\pi}{l} A_{3m} - 2G \frac{m^2 \pi^2}{l^2} B_{1m} = 0.$$

$$2G A''_{2m} + 2\lambda \frac{m\pi}{l} B'_{1m} + \frac{m\pi}{l} S_0 B'_{2m} - 2k\lambda \frac{m\pi}{l} B_{3m} + 2G \frac{m\pi}{l} B_{1m} - \\ - 2(2G + \lambda) \frac{m^2 \pi^2}{l^2} A_{2m} = 0$$

$$2GB''_{2m} - 2\lambda \frac{m\pi}{l} A'_{1m} - \frac{m\pi}{l} S_0 A'_{2m} + 2k\lambda \frac{m\pi}{l} A_{3m} - \\ - 2G \frac{m\pi}{l} A_{1m} - 2(2G + \lambda) \frac{m^2 \pi^2}{l^2} B_{2m} = 0.$$

$$2\lambda A''_{3m} + 2k(2G + 3\lambda) A'_{1m} - 2S_0 \frac{m\pi}{l} B'_{3m} - 2\lambda k' A_{1m} + \\ + 2 \left[ 2k^2 (G + 2\lambda) - \lambda \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \right] A_{3m} - \frac{m\pi}{l} kS_0 B_{1m} = 0 \quad (56)$$

$$2\lambda B''_{3m} + 2k(2G + 3\lambda) B'_{1m} + 2 \frac{m\pi}{l} S_0 A'_{3m} - 2\lambda k' B_{1m} + \\ + 2 \left[ 2k^2 (G + 2\lambda) - \lambda \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \right] B_{3m} + \frac{m\pi}{l} kS_0 A_{1m} = 0.$$

Так как интегрирование системы (56) в замкнутом виде невозможно, прибегнем к разложению неизвестных функций в ряды по степеням  $x_1$ .

Последовательно найдем:

$$k = k_0 + k_1 x_1 + k_2 x_1^2 + \dots \\ k^2 = k_0^2 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots \quad (57)$$

Тут мы положили для сокращения:

$$k_0 = -ab(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{-\frac{3}{2}}$$

$$k_1 = \frac{3}{2} ab(a^2 - b^2) \sin 2\alpha (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{-\frac{5}{2}}$$

$$k_2 = \frac{3}{4} ab(a^2 - b^2)(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{-\frac{5}{2}} \left[ 2 \cos 2\alpha - \right. \\ \left. - \frac{5}{2} (a^2 - b^2) \sin^2 2\alpha (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{-1} \right] \text{ и т. д.}$$

Аналогично:

$$a_1 = 3a^2 b^2 (a^2 - b^2) \sin 2\alpha (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{-4}$$

$$a_2 = -\frac{3}{2} a^2 b^2 (a^2 - b^2)(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{-4} [2 \cos 2\alpha - \\ - 4(a^2 - b^2) \sin^2 2\alpha (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{-1}] \text{ и т. д.}$$

Обозначая по порядку  $A_{1m}, B_{1m}, A_{2m}, B_{2m}, A_{3m}, B_{3m}$  через  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ , станем искать решения уравнений (56) в форме бесконечных рядов следующего вида:

$$\varphi_m = \sum_q C_q^m x^q \quad (58)$$

$q$  — числа положительные, целые.

Покажем теперь, что определение наименьшего значения  $S_0$  при отсутствии дополнительных условий на краях (цилиндр бесконечной длины), сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Подставляя выражения (57) — (58) в уравнения (56) и решая их относительно  $S_0$ , найдем:

$$S_0 = \frac{-2(2G + \lambda) C_2^1 - 2(2G + \lambda)(k_1 C_0^5 + k_0 C_1^5) - 2 \frac{m\pi}{l} (G + \lambda) C_1^2 +}{\frac{m\pi}{l} (C_1^2 - k_0 C_0^6)} \\ + \frac{2G \frac{m^2 \pi^2}{l^2} C_0^1}{\frac{m\pi}{l} (C_1^2 - k_0 C_0^6)} + \sum_1^{\infty} \alpha_{1k} x^k$$



$$S_0 = \frac{-2(2G+\lambda)C_2^2 + 2(2G+\lambda)(k_1C_0^5 + k_0C_1^6) + 2\frac{m\pi}{l}(G+\lambda)C_1^3 + \frac{m\pi}{l}(k_0C_0^5 - C_1^4)}{}$$

$$\frac{+2G\frac{m^2\pi^2}{l^2}C_0^2}{\frac{m\pi}{l}(k_0C_0^5 - C_1^4)} + \sum_1^{\infty} \alpha_{2k} \chi^k.$$

$$S_0 = \frac{-2GC_2^3 - 2\lambda\frac{m\pi}{l}C_1^2 + 2k_0\lambda\frac{m\pi}{l}C_0^6 - 2G\frac{m\pi}{l}C_0^2 + \frac{m\pi}{l}C_1^4}{}$$

$$\frac{+2(2G+\lambda)\frac{m^2\pi^2}{l^2}C_0^3}{\frac{m\pi}{l}C_1^4} + \sum_1^{\infty} \alpha_{3k} \chi^k.$$

(59)

$$S_0 = \frac{-2GC_2^4 + 2\lambda\frac{m\pi}{l}C_1 - 2k_0\lambda\frac{m\pi}{l}C_0^5 + 2G\frac{m\pi}{l}C_0 + \frac{m\pi}{l}C_1^3}{}$$

$$\frac{+2(2G+\lambda)\frac{m^2\pi^2}{l^2}C_0^2}{\frac{m\pi}{l}C_1^3} + \sum_1^{\infty} \alpha_{4k} \chi^k$$

$$S_0 = \frac{-2\lambda C_2^5 + 2k_0(2G+3\lambda)C_1 + 2\lambda k_1 C_0^1 - 2\left[2k_0^2(G+2\lambda) - \frac{m\pi}{l}(2G_1^6 + k_0C_0^2)\right]}{}$$

$$\frac{-\lambda\frac{m^2\pi^2}{l^2}C_0^5}{-\frac{m\pi}{l}(2C_1^6 + k_0C_0^2)} + \sum \alpha_{5k} \chi^k$$

$$S_0 = \frac{-2\lambda C_2^5 - 2k_0(2G+3\lambda)C_1^2 + 2\lambda k_1 C_0^2 - 2 \left[ 2k_0^2(G+2\lambda) - \lambda \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \right] C_0^5}{\frac{m\pi}{l} (2C_1^5 + k_0 C_0^1)} + \sum \alpha_{6k} x^k$$

Как известно из аналитической теории дифференциальных уравнений, система уравнений (56) имеет основную систему интегралов, состоящую из 12 линейно-независимых функций.

Эту систему интегралов мы можем получить из уравнений (59), приравняв нулю коэффициенты при различных степенях  $x^k$ . Из полученной таким образом системы уравнений можно вычислить при заданном значении  $S_0$  коэффициенты  $C_q^m$ . Из них 12 останутся неопределенными и будут играть роль постоянных интегрирования. Обратное  $S_0$  можно рассматривать, как функцию 18-ти параметров — (коэффициентов  $C_0^m, C_1^m, C_2^m$ ) — как это видно из уравнений (59). Между этими коэффициентами существует 5 соотношений. Остальные уравнения между коэффициентами  $C_q^m$  не налагают новых зависимостей на первые 18 коэффициентов, так как они служат для вычисления остальных неопределенных коэффициентов. Дополнительные соотношения могут зависеть только от дополнительных краевых условий. Следовательно, в рассматриваемом случае результат определения наименьшего значения  $S_0$  из уравнений (56) должен совпасть с наименьшим значением  $S_0$ , определенными из следующей системы уравнений с постоянными коэффициентами:

$$2(2G+\lambda)A_{1m}'' - 2(2G+\lambda)k_0 A_{3m}' + \frac{m\pi}{l} S_0 B_{1m}' + 2\frac{m\pi}{l}(G+\lambda)B_{2m}' - 2(2G+\lambda)k_1 A_{3m} - k_0 S_0 \frac{m\pi}{l} B_{3m} - 2G \frac{m^2 \pi^2}{l^2} A_{1m} = 0$$

$$2(2G+\lambda)B_{1m}'' - \frac{m\pi}{l} S_0 A_{1m}' - 2\frac{m\pi}{l}(G+\lambda)A_{2m}' - 2 + k_0 S_0 \frac{m\pi}{l} A_{3m} - 2G \frac{m^2 \pi^2}{l^2} B_{1m} - 2(2G+\lambda)k_1 B_{3m} = 0;$$

$$2GA_{2m}'' + 2\lambda \frac{m\pi}{l} B_{1m}' + \frac{m\pi}{l} S_0 B_{2m}' - 2k_0 \lambda \frac{m\pi}{l} B_{3m} + 2G \frac{m\pi}{l} B_{1m}' - 2(2G+\lambda) \frac{m^2 \pi^2}{l^2} A_{2m} = 0.$$



$$2GB''_{2m} - 2\lambda \frac{m\pi}{l} A'_{1m} - \frac{m\pi}{l} S_0 A'_{2m} + 2k_0 \lambda \frac{m\pi}{l} A_{3m} - \\ - 2G \frac{m\pi}{l} A_1 - 2(2G + \lambda) \frac{m^2 \pi^2}{l^2} B_{2m} = 0$$

$$2\lambda A''_{3m} - 2k_0 (2G + 3\lambda) A'_{1m} - 2S_0 \frac{m\pi}{l} B'_{3m} - 2\lambda k_1 A_{1m} + \\ + 2 \left[ 2k_0^2 (G + 2\lambda) - \lambda \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \right] A_{3m} - \frac{m\pi}{l} k_0 S_0 B_{1m} = 0$$

$$2\lambda B''_{3m} + 2k_0 (2G + 3\lambda) B'_{1m} + 2 \frac{m\pi}{l} S_0 A'_{3m} - 2\lambda k_1 B_{1m} + \\ + 2 \left[ 2k_0^2 (G + 2\lambda) - \lambda \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \right] B_{3m} + \frac{m\pi}{l} k_0 S_0 A_{1m} = 0.$$

Положим теперь

$$\varphi_i = C_i e^{n x_i}.$$

Для определения коэффициентов  $C_i$ , получим систему линейных однородных уравнений, которую мы записываем в виде следующей таблицы:

В клетках этой таблицы записаны коэффициенты при неизвестных  $C_m$  в соответствующих уравнениях.

Так как все неизвестные  $C_m$  одновременно равны нулю быть не могут, должен быть равен нулю определитель этой системы,

Определитель представляет из себя уравнение 12-ой степени относительно  $n$  (характеристическое уравнение). 12 корней характеристического уравнения дают возможность построить систему фундаментальных решений.

С другой стороны, определяющее уравнение является уравнением четвертой степени относительно  $S_0$ . Предполагая  $S_0$  неизвестным, мы можем рассматривать его как функцию параметров  $n$  и  $\frac{m}{l}$ .

Для определения критического значения  $S_0$  нужно по правилам дифференциального исчисления определить те значения  $n$  и  $\frac{m}{l}$ , при которых имеет место  $S_{0 \text{ min}}$ . Это минимальное значение  $S_0$  и будет искомым критическим значением для цилиндра бесконечной длины. Зная  $S_0$ , из уравнений (59) находим  $C_m$ , а затем по формулам (54) вид искривленной поверхности.

Проведение конкретных вычислений, а также исследование устойчивости цилиндра конечной длины, мы приведем в следующих работах.

№№ ур. нр	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$
1	$2(2G+\lambda)n^2 - 2G \frac{m^2\pi^2}{l^2}$	$\frac{\pi}{l} mnS_0$		$\frac{2\pi}{l} (C+\lambda)mn$	$-2(2G + \lambda)nk_0 - 2(2G+\lambda)k_1$	$-\frac{m\pi}{l} k_0S_0$
2	$-\frac{\pi}{l} mnS_0$	$2(2G+\lambda)n^2 - 2G \frac{m^2\pi^2}{l^2}$	$-\frac{2\pi}{l} (G + \lambda)mn$		$\frac{m\pi}{l} k_0S_0$	$-2(2G + \lambda)nk_0 - 2(2G+\lambda)k_1$
3		$2\lambda \frac{\pi}{l} mn + 2G \frac{m\pi}{l}$	$2Gn^2 - 2(2G + \lambda) \frac{m^2\pi^2}{l^2}$	$\frac{\pi}{l} mnS_0$		$-2k_0\lambda \frac{m\pi}{l}$
4	$-2\lambda \frac{\pi}{l} mn - 2G \frac{m\pi}{l}$		$-\frac{\pi}{l} mnS_0$	$2Gn^2 - 2(2G + \lambda) \frac{m^2\pi^2}{l^2}$	$+2k_0\lambda \frac{m\pi}{l}$	
5	$-2k_0(2G + 3\lambda)n - 2\lambda k_1$	$-\frac{m\pi}{l} k_0S_0$			$2\lambda n^2 + 2[2k_0^2(G + 2\lambda) - \lambda \frac{m^2\pi^2}{l^2}]$	$-\frac{2\pi}{l} mnS_0$
	$\frac{m\pi}{l} k_0S_0$	$2k_0(2G + 3\lambda)n - 2\lambda k_1$			$\frac{2\pi}{l} mnS_0$	$2\lambda n^2 + 2[2k_0^2(G + 2\lambda) - \lambda \frac{m^2\pi^2}{l^2}]$

## § 5

### Механическое значение рассмотренной теории

В предыдущих параграфах нами была изучена устойчивость оболочек при следующих основных предположениях:



1. Оболочка весьма тонка, так что все члены, содержащие  $z$  и  $h$  в степенях выше первой, можно отбросить.

2. Деформации до появления неустойчивости малы.

3. Нормаль к средней поверхности недеформированной оболочки, остается нормальной к деформированной средней поверхности, и при деформациях оболочки сама не деформируется (гипотеза Кирхгоффа).

Второе предположение позволило привести проблему нелинейной механики, к проблеме линейной. Первое предположение являлось основанием, которое позволило нам ограничиться уравнениями, выражающими первое приближение. В результате этого главную роль в уравнениях играли растяжения средней поверхности. Это является отличительной особенностью растянутой теории.

Ясно, что в случае оболочки значительной толщины, решающую роль будут иметь члены, выражающие второе приближение, т. е. члены, связанные с изменениями кривизны. Основные уравнения общей теории дают возможность без труда получить нужные выражения для усилий и моментов.

При этом необходимо рассматривать отдельно уравнения для второго приближения, не включая в них члены из первого.

Эти уравнения дадут возможность найти новое значение критической системы нагрузок. Если эти критические значения меньше, чем критические значения, полученные из первого приближения, то потеря устойчивости произойдет главным образом вследствие изменений кривизны. В противоположном случае, основная роль будет принадлежать растяжениям средней поверхности.

Гипотеза Кирхгоффа привела к необходимости ввести дополнительный член в третье уравнение первого приближения. Этот член соответствует некоторой силе нормальных давлений между параллельными поверхностями оболочки и представляет из себя второй член в разложении  $\sigma^2$  по степеням  $z$ . Член этот связан с нагрузкой на поверхностях оболочки через остальные, отброшенные члены разложения. Вообще говоря, как известно, гипотеза Кирхгоффа находится в противоречии с точными условиями равновесия между внутренними напряжениями и внешними силами, приложенными к поверхности оболочки. Однако практика показывает, что, несмотря на это, теория, построенная на гипотезе Кирхгоффа, сравнительно удовлетворительно оправдывается опытными данными в случае отсутствия поверхностных сил.

Очевидно, дальнейшая задача теории оболочек будет заключаться в обобщении гипотезы Кирхгоффа с целью лучшего согласования ее с условиями равновесия элемента оболочки. Это вопрос будет разобран в следующих работах.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Этот вопрос рассматривался также Ф. Краусом (см. Math Annalen, März, 1929).



## Заключение

В настоящей работе были рассмотрены общие методы решения задачи об устойчивости тонких оболочек. Во второй главе была выведена наиболее общая система уравнений, выражающая условия упругого равновесия оболочки.

Было показано, что уравнение (6) системы, принадлежащей Ляву, является по существу тождеством, если пренебрегать теми ограничениями, которые накладываются на деформации оболочки условием, что и после деформации существует система координат, связанная со средней поверхностью, в которой компонента метрического тензора  $g_{33} = 1$ .

Обращение ур-ни (6) в тождество было замечено еще Краусом (Math. Annalen, März, 1929), хотя его вывод уравнений отличался от приведенного нами.

Третья глава была посвящена изучению устойчивости оболочки. В качестве примера был в общем виде рассмотрен вопрос об устойчивости эллиптического цилиндра бесконечной длины.

---



## К ВОПРОСУ О ГРАНИЦАХ ПРОЧНОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Многие вопросы исследования устойчивости движения динамической системы с двумя степенями свободы, при достаточно общих условиях, сводятся к установлению и исследованию периодических и непериодических решений уравнений типа Hill'я

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \Phi(t)y = 0, \quad (1)$$

где  $\Phi(t)$  — некоторая периодическая функция  $t$  с периодом  $\frac{\pi}{\omega}$

$$\Phi(t) = \theta_0 \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cos 2i\omega t \right) \quad (2)$$

Для примера напомним, что многие весьма важные и интересные в инженерной практике вопросы квазигармонических колебаний, динамической устойчивости упругих систем, а также многие проблемы механики, гидромеханики, электричества, волновой механики, теории упругости сводятся к изучению указанных уравнений.

Таким образом, вопрос сводится к установлению областей устойчивого и неустойчивого движений, определяемых обычно путем исследования соответствующих решений уравнения (1).

В каждой конкретной задаче установление областей неустойчивого движения обычно бывает сопряжено с некоторыми трудностями (большой частью вычислительного порядка).

Получаемые же результаты практически могут быть учтены только в весьма приближенных пределах.

В настоящей заметке мы укажем на одно элементарное свойство уравнения (1), позволяющее, не производя указанных исследований, с достаточной обычно практически точностью определить области неустойчивого движения (резонанса).

### I

Введем в уравнение (1) новую переменную

$$\varphi = \omega t,$$

где  $\omega$  — некоторый параметр.

Таким образом

$$\omega^2 \frac{d^2 y}{d\varphi^2} + \Phi(\varphi)y = 0. \quad (3)$$

$$\Phi(\varphi) = \theta_0^2 \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cos 2i\varphi \right). \quad (3')$$

Пусть области неустойчивости определены следующими значениями параметра  $\omega^2$ :

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &\leq \omega^2 \leq \omega_1^2 \\ \omega_1^2 &< \omega^2 \leq \omega_2^2 \\ &\dots \dots \dots \\ \omega_{n-1}^2 &< \omega^2 \leq \omega_n^2. \end{aligned}$$

Известные критерии устойчивости движения (Ляпунова — Пуанкаре — Жуковского), представляемого уравнением (1), могут быть формулированы так: интегралы уравнения (1) ограничены, если функция  $\Phi(\varphi)$  удовлетворяет следующим двум условиям:

$$(a) \quad a^2 \leq \Phi(\varphi) \leq b^2,$$

где  $a$  и  $b$  — положительные константы, и

$$(b) \quad \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\Phi(\varphi_{i+1})}{\omega_{k+1}^2} - \frac{\Phi(\varphi_i)}{\omega_k^2} \right| < M,$$

$$k = 1, 2, \dots, n,$$

где  $M$  — некоторая положительная константа,

$$a \quad 0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n$$

произвольная система значений  $\varphi$ ,  $\omega_k$  — значения параметра  $\omega$ , соответствующие областям устойчивости.

Для „неустойчивых“ значений параметра  $\omega^2$  условие (b) приводит к расходящемуся ряду:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\Phi(\varphi_{i+1})}{\omega_{k+1}^2} - \frac{\Phi(\varphi_i)}{\omega_k^2} \right| > M.$$

Из условий (a), (b) и в силу известных свойств однородных линейных уравнений второго порядка, значения функции

$$y(\varphi)$$



будут ограничены нулем и значениями интеграла уравнения

$$\frac{d^2 y_1}{d\varphi^2} + \frac{b^2}{\omega_k^2} y_1 = 0. \quad (4)$$

Точно поэтому же, значения интеграла уравнения

$$\frac{d^2 y_2}{d\varphi^2} + \frac{a^2}{\omega_k^2} y_2 = 0 \quad (5)$$

будут ограничены значениями функции

$$y(\varphi)$$

и нулем.

Но из уравнений (4) и (5) „устойчивый“ параметр приобретает значения

$$\omega_k^2 = \frac{b^2}{k^2}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots \infty$$

и

$$\omega_k^2 = \frac{a^2}{k^2},$$

$$k = 1, 2, 3, \dots \infty$$

Выбирая

$$\left. \begin{aligned} \min(b^2) &= \max |\Phi(\varphi)| \\ \max(a^2) &= \min |\Phi(\varphi)| \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

определяем крайние значения „устойчивого“ параметра по наименьшему из наибольших и наибольшему из наименьших граничных значений для функции  $\Phi(\varphi)$  в условии (а).

Таким образом найденные крайние значения параметра  $\omega_k^2$  будут включать все значения  $\omega_k$  — в точности соответствующие граничным точкам различных областей неустойчивости.

Следовательно

$$\left. \begin{aligned} \omega_k^2 &> \frac{\max |\Phi(\varphi)|}{k^2} \\ \omega_k^2 &< \frac{\min |\Phi(\varphi)|}{k^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots n \dots$$

Таким образом низшая область неустойчивости (резонанса) будет лежать по крайней мере в интервале

$$\sqrt{\min |\Phi(\varphi)|} < \omega_1 < \sqrt{\max |\Phi(\varphi)|} \quad (8)$$

и соответственно для областей  $k$ -го порядка

$$\frac{1}{k} \sqrt{\min |\Phi(\varphi)|} < \omega_k < \frac{1}{k} \sqrt{\max |\Phi(\varphi)|} \quad (9)$$
$$k = 2, 3, \dots$$

Для уравнения, например, Mathieu

$$\omega^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda^2 (1 - 2h^2 \cos 2t) y = 0 \quad (10)$$

для первой, наиболее широкой области неустойчивости, получим:

$$\lambda \sqrt{1 - 2h^2} < \omega_1 < \lambda \sqrt{1 + 2h^2}. \quad (11)$$

Или, считая параметр  $h$  достаточно малым

$$\lambda(1 - h^2 + \dots) \leq \omega \leq \lambda(1 + h^2 + \dots). \quad (12)$$

В заключение заметим, что указанное свойство может быть обобщено на случай вообще уравнений с периодическими коэффициентами, что представляет особый интерес.

Февраль 1937 г.

Dans la présente note on envisage une propriété des équations du type Hill présentant comme on le sait le mouvement du système dynamique deux puissances libres à l'aide des quelles il y a possibilité de définir approximativement les domaines de l'instabilité du mouvement dans le sens de Liapounov.



## ТЕОРИЯ ПРУЖИН <sup>1)</sup>

### В В Е Д Е Н И Е

Теория (статика) пружин, как упругих первоначально криволинейных тонких стержней, была впервые разработана Kirchhoff'ом затем Clebsch'ем, Lamor'ом, Volterra, Schleicher'ом и Mises'ом.

Однако приближенная теория винтовых цилиндрических пружин была рассмотрена еще J. Bernulli, затем Binet, Poisson'ом, Massotti, а позже Giulio и St. Venant'ом. Еще позже, более строгое исследование вопроса дали Thomson и Tait, Castigliano, Resal, Boussinesq, Michell, Röver, Grammel, Phillips, Caspari, Boch и др.

Задача о пружине отличается от обычных задач теории упругости тем, что взаимные перемещения элементов пружины, вообще говоря, не будут малы и, следовательно, исчезает как будто бы возможность применения известных общих уравнений математической теории упругости. Однако, Kirchhoff первый, как мы уже указали, показал, исходя из малости деформаций одновременно во всех частях пружины и применив оригинальное по существу кинематическое исследование деформаций, что все общие уравнения применимы со всей строгостью к малому элементу проволоки пружины, все линейные размеры которого того же порядка малости, что и размеры поперечного сечения.

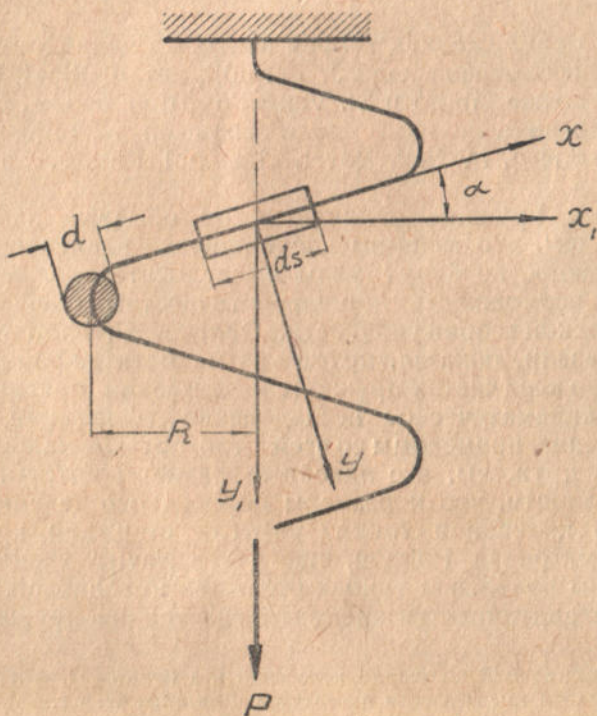
Теорию колебаний тонких упругих стержней, кроме Kirchhoff'a рассматривал Poisson, еще ранее Navier. Наиболее полно исследованы колебания тонких стержней Pochhammer'ом. В дальнейшем рассматривается элементарная теория пружин.

<sup>1)</sup> Из цикла лекций по теории колебаний в авиамоторах, читанных автором инженерам завода им. Баранова в сентябре — октябре 1936 г.

Г Л А В А I  
СТАТИКА ПРУЖИН

1. Деформации малого элемента

Рассмотрим деформации малого элемента проволоки пружины при нагружении ее различными внешними силами.



Фиг. 1.

Для простоты рассмотрим нагружение цилиндрической винтовой пружины осевой силой (черт. 1). Введем обозначения:  
 $R$  — радиус пружины,  
 $d$  — диаметр проволоки,



$i$  — число витков,

$\alpha$  — угол подъема витка.

Выберем систему осей координат, причем ось  $OX$  направим по касательной к центральной линии витка у элемента  $ds$ , а ось  $OY$  в плоскости параллельной оси пружины.

Таким образом, система  $OXY$  связана с элементом  $ds$ . Выберем также неподвижную систему осей  $O X_1 Y_1$ , причем ось  $O Y_1$  направим вдоль оси пружины. Момент силы  $P$ , растягивающей пружину, относительно элемента  $ds$  представится вектором  $\vec{M}$ , численно равным

$$P \cdot R$$

и направленным по оси  $X_1$ .

Составляющие вектора  $\vec{M}$  по осям  $X$  и  $Y$  будут

$$M_x = P \cdot R \cos \alpha$$

и

$$M_y = P \cdot R \sin \alpha$$

Момент  $M_x$  вызывает поворот элемента  $ds$  относительно оси  $X$  на угол

$$d\varphi_x = \frac{P \cdot R \cdot \cos \alpha}{G \cdot I_p} ds,$$

где  $G$  — модуль сдвига

$$G = \frac{1}{2(1 + \mu)} \cdot E,$$

$E$  — модуль Юнга,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,

$I_p$  — полярный момент инерции проволоки пружины.

Момент  $M_y$  вызывает изгиб элемента, который выразится в повороте соответствующего сечения проволоки у элемента  $ds$  относительно оси  $Y$  на угол

$$d\varphi_y = \frac{P \cdot R \cdot \sin \alpha}{E \cdot I_s} ds,$$

где  $I_s$  — экваториальный момент инерции сечения проволоки.

Проектируя независимые вращения  $d\varphi_x$ ,  $d\varphi_y$  на неподвижные оси  $O X_1 Y_1$  получим вращения  $d\varphi_{x1}$  и  $d\varphi_{y1}$

$$d\varphi_{x1} = d\varphi_x \cdot \cos \alpha + d\varphi_y \cdot \sin \alpha$$

$$d\varphi_{y1} = d\varphi_y \cdot \cos \alpha - d\varphi_x \cdot \sin \alpha$$

или

$$d\varphi_{x1} = \left( \frac{\cos^2 \alpha}{G I_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{E I_s} \right) P \cdot R \cdot ds$$

и

$$d\varphi_{y1} = \left( \frac{1}{E I_s} - \frac{1}{G I_p} \right) \frac{P \cdot R}{2} \sin 2\alpha \cdot ds$$

Вращение  $d\varphi_{x1}$  — вызывает элементарное перемещение

$$d\delta = R \cdot d\varphi_{x1},$$

точки, связанной с центром витка.

Вращение  $d\varphi_{y1}$  — вызывает поворот элемента пружины относительно ее оси.

Сам же рассматриваемый элемент  $ds$  имеет еще конечные переносные перемещения от деформаций элементов пружины находящихся между рассматриваемым элементом и закрепленным концом пружины.

Не трудно теперь определить общее конечное перемещение и поворот, испытываемые свободным концом пружины.

Очевидно

$$\delta = R \int_{(i)} d\varphi_{x1} = PR^2 \left( \frac{\cos^2 \alpha}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI_s} \right) \int_0^l ds$$

$$\delta = \frac{2\pi i PR^3}{\cos \alpha} \left( \frac{\cos^2 \alpha}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI_s} \right) \quad (1)$$

и

$$\varphi_{y1} = \int_{(i)} d\varphi_{y1} = 2\pi i PR^2 \left( \frac{1}{EI_s} - \frac{1}{GI_p} \right) \sin \alpha \quad (2)$$

Для пружины с проволокой круглого сечения, очевидно получим:

$$\delta = \frac{128 i PR^3}{Ed^4} \cdot \frac{1 + \mu \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} \quad (1')$$

и

$$\varphi_{y1} = \frac{128 i PR^2}{Ed^4} \mu \sin \alpha \quad (2')$$

Для пружин с достаточно малым углом подъема витков

$$\delta \approx (1 + \mu) \cdot \frac{128 i PR^3}{E \cdot d^4} \quad (1'')$$

$$\varphi_{y1} \approx 0 \quad (2'')$$

Рассмотрим случай нагружения пружины моментом  $\vec{M}$ , направленным вдоль оси пружины (фиг. 2).

Выбирая те же, что и раньше, оси координат и проектируя вектор  $\vec{M}$ , получим

$$M_x = -M \sin \alpha$$

$$M_y = M \cos \alpha$$



Или, соответствующие элементарные вращения

$$d\varphi_x = -\frac{M \cdot \sin \alpha}{GI_p} ds$$

$$d\varphi_y = \frac{M \cdot \cos \alpha}{EI_s} ds,$$

и следовательно

$$\varphi_{y1} = M \left( \frac{\cos^2 \alpha}{EI} + \frac{\sin^2 \alpha}{GI_p} \right) ds$$

$$d\varphi_{x1} = -\frac{M \left( \frac{1}{EI_s} - \frac{1}{GI_p} \right) \sin 2\alpha ds.}$$

Таким образом, перемещение свободного конца пружины будет

$$\delta = R \int_{(i)} d\varphi_{x1} =$$

$$= -2\pi i R^2 \cdot M \left( \frac{1}{EI_s} - \frac{1}{GI_p} \right) \sin \alpha \quad (3)$$

и поворот

$$\varphi_{y1} = \frac{2\pi i R M}{\cos \alpha} \left( \frac{\cos^2 \alpha}{EI_s} + \frac{\sin^2 \alpha}{GI_p} \right) \quad (4)$$

Для пружины, например, из круглой проволоки, получим

$$\delta = -\frac{128 i R^2 M}{Ed^4} \mu \sin \alpha \quad (3')$$

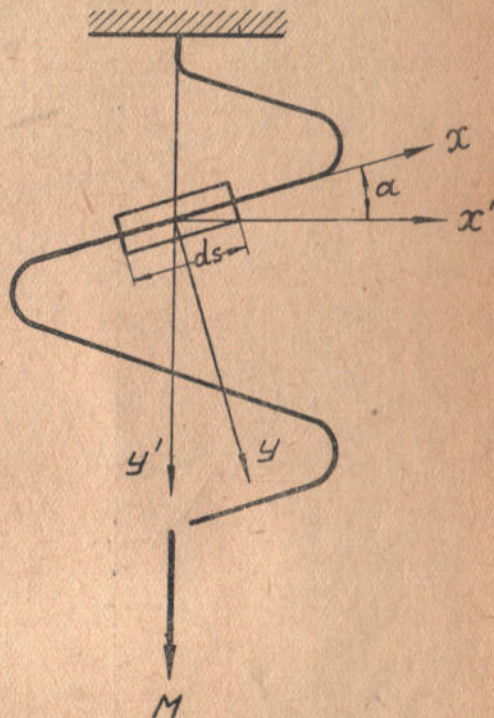
и

$$\varphi_{y1} = \frac{128 i R M}{Ed^4} \cdot \frac{1 + \mu \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \quad (4')$$

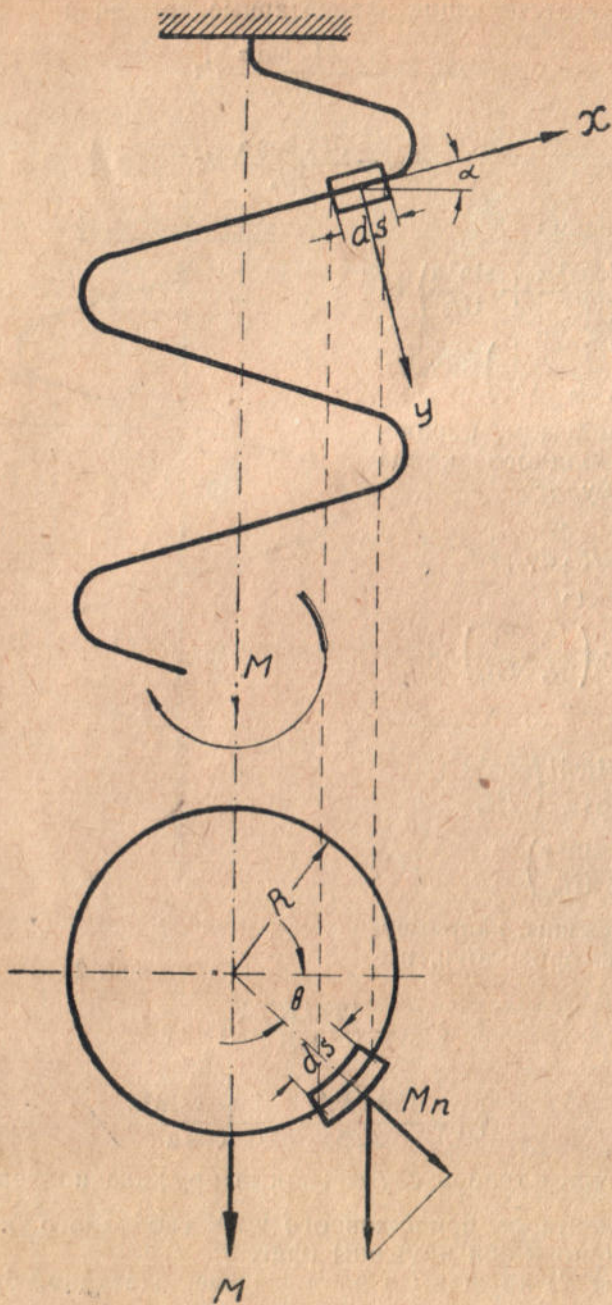
Рассмотрим теперь случай, когда пружина подвержена действию момента  $\vec{M}$ , приложенного у ее свободного конца, перпендикулярно к оси пружины (фиг. 3).

Элемент  $ds$  пружины в этом случае, очевидно, будет изгибаться моментом

$$M_u = \sqrt{M_n^2 + M_y^2}$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.



и скручиваться моментом

$$M_x = -M_t \cdot \cos \alpha$$

В этих выражениях

$$M_n = M \cdot \sin \theta$$

$$M_y = -M_t \cdot \sin \alpha$$

и

$$M_t = M \cdot \cos \theta$$

Таким образом

$$M_u = M \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \alpha}$$

и

$$M_x = -M \cdot \cos \theta \cdot \cos \alpha$$

Для определения деформаций пружины воспользуемся теоремой Кастильяно.

Обозначая через  $\varphi$  угловую деформацию свободного конца пружины, можем записать

$$\varphi = \frac{\partial V}{\partial M},$$

где  $V = V(M)$  — потенциальная энергия деформированной пружины.

Воспользовавшись выражением для  $V$ , получим очевидно

$$\varphi = \int_{(1)} \left( \frac{M_u}{EJ_s} \frac{\partial M_u}{\partial M} + \frac{M_x}{GJ_p} \frac{\partial M_x}{\partial M} \right) ds,$$

$$\varphi = \frac{MR}{\cos \alpha} \int_0^{2\pi i} \left( \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \alpha}{EJ_s} + \frac{\cos^2 \theta \cdot \cos^2 \alpha}{GJ_p} \right) d\theta$$

Полагая

$$i = \frac{m}{4},$$

где  $m$  — произвольное целое число, будем иметь

$$\varphi = \frac{32 MR i}{d^4 \cdot \cos \alpha} \left[ \frac{2(1 + \sin^2 \alpha)}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right] \quad (5)$$

Считая, что осевая линия пружины после деформации остается перпендикулярной к сечениям, которые до деформации были перпендикулярны к ней, можем записать

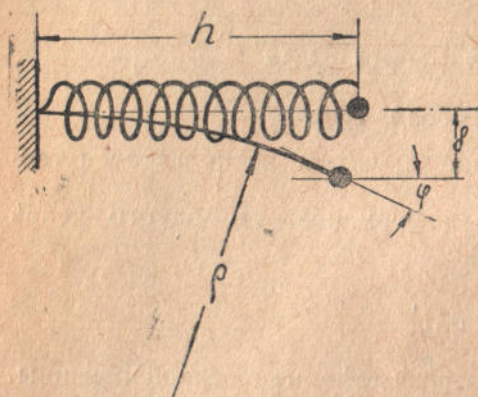
$$\rho = \frac{h}{\varphi},$$

где  $\rho$  — радиус кривизны осевой линии пружины, постоянный по длине, а  $h$  — высота пружины.

Отсюда не трудно определить прогиб свободного конца пружины (фиг. 4)

$$\delta = \rho(1 - \cos \varphi) = 2\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\rho \varphi^2}{2} = \frac{h\varphi}{2}$$

$$\delta \approx \frac{8 \cdot Mh^2}{\pi d^4 \cdot \sin \alpha} \left[ \frac{2(1 + \sin^2 \alpha)}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right] \quad (6)$$



Фиг. 4.

Если угол подъема витков достаточно мал, то из выражений (5) и (6) получим следующие приближенные формулы

$$\varphi \approx (2 + \mu) \frac{64 i M \cdot R}{d^4 E} \quad (5')$$

$$\delta \approx (2 + \mu) \frac{32 i M \cdot Rh}{d^4 E} \quad (6')$$

Из рассмотрения этих простейших случаев нагружения пружины не трудно заключить, что точно таким же путем можно определить деформации пружины и для сколь угодно сложной системы нагружающих внешних сил.

## 2. Дифференциальное уравнение изогнутой оси пружины

Предположим, что при нагружении пружины системой сил имеет место плоская форма изгиба.

Положим затем, что деформации, претерпеваемые элементами пружины достаточно малы, так что осевая линия пружины после деформации остается перпендикулярной к сечениям, которые до деформации были перпендикулярны к ней.

В таком случае, воспользовавшись теоремой Кастильяно, не трудно написать уравнение изогнутой оси пружины.

В самом деле, пусть пружина нагружена произвольной системой сил. Обозначая через  $\varphi$  угол образуемый касательной к упругой оси в точке  $x$ , можно, при принятой системе осей координат (фиг. 5), записать очевидное равенство

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{d\varphi}{dx} \cos \varphi$$



Полагая в силу малости деформаций,

$$\frac{dy}{dx} \approx \varphi + \dots$$

и

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots,$$

получим

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx (1 + \varphi^2 + \dots) \frac{d\varphi}{dx} \quad (7)$$

Угловая деформация  $\varphi$  в точке  $x$ , очевидно, определится следующим образом

$$\varphi = \left( \frac{\partial V}{\partial M_0} \right)_{M_0=0}$$

и соответственно

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial M_0 \partial x} \right)_{M_0=0}$$

где  $V$  — потенциальная энергия деформированной пружины.

Таким образом, уравнение упругой оси пружины окончательно примет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \left[ 1 + \left( \frac{\partial V}{\partial M_0} \right)_{M_0=0}^2 + \dots \right] \frac{\partial^2 V}{\partial M_0 \partial x} \Big|_{M_0=0} \quad (8)$$

Если деформации достаточно малы, то пренебрегая членом

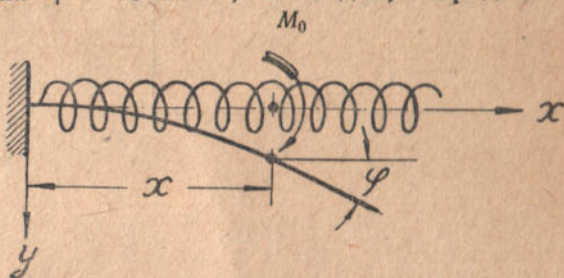
$$\left( \frac{\partial V}{\partial M_0} \right)_{M_0=0}^2$$

и высшими степенями  $\left( \frac{\partial V}{\partial M_0} \right)_{M_0=0}$ , получим

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \left( \frac{\partial^2 V}{\partial M_0 \partial x} \right)_{M_0=0} \quad (9)$$

Для цилиндрической винтовой пружины, нагруженной на свободном конце моментом  $\vec{M}_1$ , перпендикулярным к ее оси (фиг. 6), очевидно, получим

$$V = (M_1 + M_0)^2 x N(\alpha, d, i, R) + M_1^2 (h - x) N(\alpha, d, i, R),$$



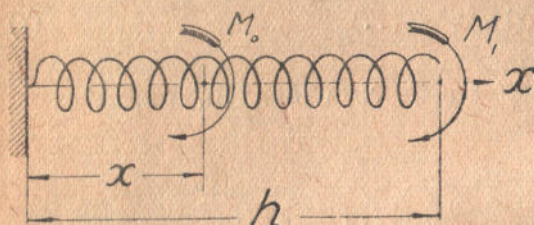
Фиг. 5.

где  $N(\alpha, d, i, R)$  согласно ранее изложенному

$$N = \frac{16 i R}{h d^4 \cos \alpha} \left[ \frac{2(1 + \sin^2 \alpha)}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right]$$

Следовательно

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \approx 2 M_1 N = \frac{M_1}{E h d^4 \cos \alpha} \cdot \frac{1}{64 i R (2 + \mu \cos^2 \alpha)}, \quad (10)$$



Фиг. 6.

где  $\mu$  — как и раньше коэффициент Пуассона. Замечая, что

$$\frac{\pi d^4}{64} = J$$

— экваториальный момент инерции проволоки пружины, можем записать

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \approx \frac{M_1}{E J_s w}, \quad (11)$$

где  $w$  — некоторый коэффициент, зависящий только от геометрических элементов пружины и коэффициента Пуассона.

Назовем этот коэффициент „формфактором“ данной пружины. В рассматриваемом случае, очевидно

$$w = \frac{h \cdot \cos \alpha}{\pi i R (2 + \mu \cos^2 \alpha)}. \quad (12)$$

Таким образом из рассмотрения уравнения (10) и уравнения упругой линии прямого тонкого стержня

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \approx \frac{M}{EJ},$$

можем заключить, что поперечные деформации пружины могут быть определены как деформации прямого тонкого стержня, одинаково с ней нагруженного, с моментом инерции поперечного сечения равным

$$J = J_s w \quad (13)$$

Иными словами, поперечные деформации пружины пропорциональны деформациям прямого тонкого стержня с сечением, одинаковым с сечением проволоки пружины, причем коэффициент пропорциональности равен

$$\lambda = \frac{1}{w} \quad (14)$$

$$y_{np} = \lambda y_{cm} \quad (15)$$



Если проволока пружины квадратного сечения, то

$$J_s = \frac{a^4}{12} \text{ и } J_p = 0,14a^4,$$

и следовательно

$$V = (M_1 + M_0)^2 \cdot x \cdot N_1 + M_1^2 (h - x) N_1,$$

где  $N_1$  для случая пружины с малым углом подъема витков

$$N_1 = \frac{\pi Ri}{2h} \left( \frac{1}{EJ_s} + \frac{1}{GJ_p} \right)$$

или

$$N_1 = \frac{2,19 \pi \cdot R \cdot i}{h \cdot E \cdot J_s} \left[ 1 + 0,0544 \mu \right]$$

и следовательно, в этом случае

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \approx 2M_1 N_1 = \frac{M_1}{EJ_s \cdot w'}$$

где

$$w' = \frac{1}{2,19 \pi (1 + 0,544 \mu)} \cdot \frac{h}{i R} \quad (16)$$

Таким образом, как видим, не трудно найти выражения для формфакторов для произвольных сечений проволоки пружины. Для малых углов подъема винтовой линии пружины,

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad (\alpha \approx 0)$$

$$\cos \alpha \approx 1,$$

из выражений (12) и (16) получим следующие приближенные формулы для формфакторов для пружин из стальной проволоки:

$$\text{круглая проволока} \quad w = 0,138 \frac{h}{i R}, \quad (17)$$

$$\text{квадратная проволока} \quad w = 0,125 \frac{h}{i R}. \quad (18)$$


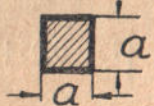
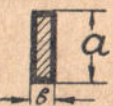
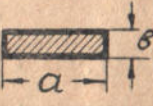
Этими приближенными формулами и следует пользоваться в практических расчетах.

Из рассмотрения выражений (12) и (16) можем заключить, что общее выражение для формфакторов цилиндрической винтовой пружины, навитой из произвольного сечения проволоки, имеет вид

$$W = \psi \frac{h}{i R}, \quad (19)$$

где  $\psi$  — некоторый коэффициент, зависящий, вообще говоря, только от угла подъема винтовой линии, геометрических элементов поперечного сечения проволоки и коэффициента Пуассона.

Приближенное выражение коэффициентов  $\psi$  (при  $\alpha \approx 0$ ) дано в приводимой таблице.

Сечение	$\psi$
	0,138
	0,125
	1 $\pi \left[ 1 + 0,218 \lambda \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right]$
	1 $\pi \left[ 1 + 0,218 \lambda \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right]$

Коэффициент  $\lambda > 1$  и зависит от отношения  $\frac{a}{b}$ ; именно:

$\frac{a}{b}$	1	1,5	2	3	4	6	8	10	$\infty$
$\lambda$	7,14	5,10	4,37	3,90	3,55	3,34	3,26	3,19	3,00

### 3. Деформации конической пружины

Рассмотрим теперь деформации конической пружины, нагруженной осевой сжимающей силой (фиг. 7). В отличие от цилиндрической винтовой пружины, в этом случае необходимо учесть замыкание первых витков пружины, обладающих минимальной жесткостью. Очевидно, при сжатии конической пружины, в результате указанного замыкания витков, пропорциональность между силой и прогибами нарушается.

Таким образом, жесткость конической пружины — переменная, увеличивающаяся с увеличением прогиба. Если обозначить изменение угла подъема винтовой линии в точке  $r$  пружины через  $\sin \alpha - \sin \bar{\alpha}$ , то можно записать

$$\sin \alpha - \sin \bar{\alpha} = \frac{d\delta}{ds}$$



или, согласно ранее изложенному

$$\sin \alpha - \sin \bar{\alpha} \approx P \left( \frac{\cos^2 \alpha}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI_s} \right) r^2$$

Если угол подъема осевой линии проволоки пружины одинаков для всех ее элементов,

$$\alpha = \text{const} = \alpha_0,$$

то зависимость между силой  $P$  и прогибом пружины найти не трудно.

В самом деле, из условия замыкания первых витков пружины следует

$$\alpha_0 - \bar{\alpha} = \alpha_0$$

$$\bar{\alpha} = 0$$

или

$$P = \frac{N}{r^2}, \quad (20)$$

где

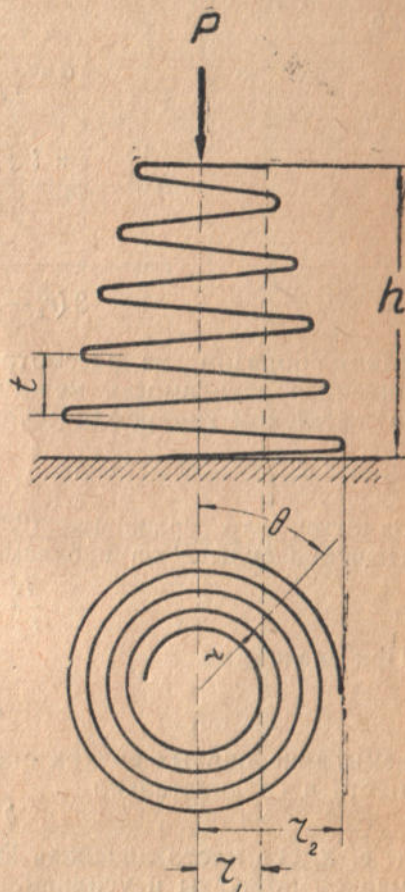
$$N = \frac{\sin \alpha_0}{\frac{\cos^2 \alpha_0}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha_0}{E \cdot I_s}} \quad (21)$$

Таким образом, выражение (20) дает зависимость между силой и радиусом  $r$ , до которого в пружине произошло замыкание. Очевидно суммарный прогиб, претерпеваемый свободным концом пружины, будет

$$\begin{aligned} \delta &= s_0 \cdot \sin \alpha_0 + \int_{r_1}^r p d\varphi_x = \\ &= \text{tg } \alpha_0 \int_0^{2\pi i} \left( r_1 + \frac{r_2 - r_1}{2\pi i} \theta \right) d\theta + \end{aligned}$$

$$+ \frac{P}{\cos \alpha_0} \left( \frac{\cos^2 \alpha_0}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha_0}{EI_s} \right) \int_0^{2\pi i} \left( r_1 + \frac{r_2 - r_1}{2\pi i} \theta \right)^2 d\theta,$$

где первый член правой части полученного равенства представляет осадку пружин с замыканием, второй же член упругую осадку части пружины, лежащей над замкнувшимися витками.



Фиг. 7.

Выполняя интегрирование получим

$$\delta = \operatorname{tg} \alpha_0 \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2 - r_1} \pi i + \frac{\pi i P}{2 \cos \alpha_0} \left( \frac{\cos^2 \alpha_0}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha_0}{EI_s} \right) \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_2 - r_1} \quad (22)$$

Или

$$\delta = a + bP + \frac{c}{P} \quad (23)$$

где

$$a = \frac{r_2^2}{r_2 - r_1} \pi i \operatorname{tg} \alpha_0 \quad (24)$$

$$b = - \frac{\pi i r_1^4 \left( \frac{\cos^2 \alpha_0}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha_0}{EI_s} \right)}{2(r_2 - r_1) \cos \alpha_0} \quad (25)$$

$$c = - \frac{\pi i \operatorname{tg} \alpha_0 \sin \alpha_0}{2(r_2 - r_1) \left( \frac{\cos^2 \alpha_0}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha_0}{EI_s} \right)} \quad (26)$$

Таким образом, из рассмотрения уравнения (23) следует, что линейная зависимость между силой  $P$  и деформацией  $\delta$  нарушена членом гиперболического вида

$$\frac{c}{P}$$

Заметим, что уравнение (23) справедливо, согласно (26), для значений силы  $P$  определяемых границами

$$\frac{N}{r_2^2} \leq P \leq \frac{N}{r_1^2}$$

При значениях

$$P \leq \frac{N}{r_2^2}$$

замыкание первых витков с минимальной жесткостью не имеет места и следовательно

$$\delta = bP, \quad (27)$$

т. е. имеет место линейная зависимость между упругой деформацией пружины и усилием.

При значениях

$$P \geq \frac{N}{r_1^2}$$

пружина сжата в одну плоскость.

На фиг. 8 представлена кривая деформации пружины, соответствующая уравнениям (23) и (27).

Несколько меньший интерес представляет для таких пружин рассмотрение поворотной деформации свободного ее конца относительно оси пружины.

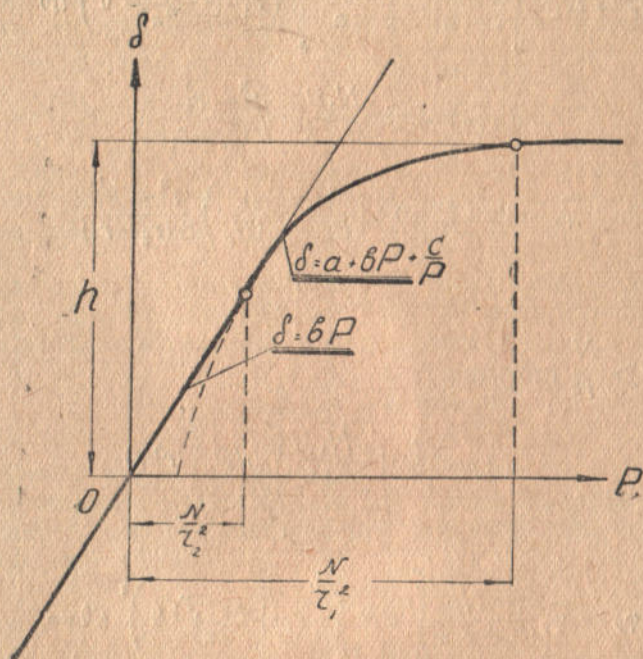


Если считать, что замкнувшиеся витки пружины не вызывают поворотной деформации, очевидно, согласно (2), будем иметь

$$\bar{\varphi}_y = \frac{P}{2} \left( \frac{1}{EI_s} - \frac{1}{GI_p} \right) \sin 2\alpha \int_{(s)} r ds \quad (28)$$

для значений

$$P \leq \frac{N}{r_2^2}$$



Фиг. 8.

и

$$\varphi_y = \bar{\varphi}_y + \frac{\sin 2\alpha}{2} \left( \frac{1}{EI_s} - \frac{1}{GI_p} \right) \int_{\left(\frac{N}{r_2^2}\right)}^P dP \int_0^{s'} r ds \quad (29)$$

для

$$P > \frac{N}{r_2^2}$$

Причем  $s'$  в выражении (29) представляет длину незамкнувшихся витков пружины

Очевидно

$$s' = f(P)$$

1) В первом приближении (предполагая изменение  $\alpha$  незначительным).

Вводя обозначение

$$\frac{\sin 2\alpha}{2} \left( \frac{1}{EI_s} - \frac{1}{GI_p} \right) = N_1, \quad (30)$$

из (28) и (29) будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_y &= N_1 P \int_0^{2\pi i} \frac{r^2 d\theta}{\cos \alpha} = \frac{N_1 P}{\cos \alpha} \int_0^{2\pi i} \left( r_1 + \frac{r_2 - r_1}{2\pi i} \theta \right)^2 d\theta \\ \bar{\varphi}_y &= 2\pi i \frac{N_1 P}{\cos \alpha} \frac{r_2^3 - r_1^3}{3(r_2 - r_1)} \end{aligned} \quad (31)$$

Или

$$\bar{\varphi}_y = 2\pi i P \sin \alpha \left( \frac{1}{EI_s} - \frac{1}{GI_p} \right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{3(r_2 - r_1)} \quad (31')$$

$$P \leq \frac{N}{r_2^2}$$

При  $P > \frac{N}{r_2^2}$  получим

$$\begin{aligned} \varphi_y &= \bar{\varphi}_y + \frac{N_1}{\cos \alpha} \int_{\frac{N}{r_2^2}}^P dP \int_0^{\theta'} r^2 d\theta \\ \varphi_y &= \bar{\varphi}_y + \frac{N_1}{\cos \alpha} \int_{\frac{N}{r_2^2}}^P dP \int_0^{\theta'} \left( r_1 + \frac{r_2 - r_1}{2\pi i} \theta \right)^2 d\theta = \\ &= \bar{\varphi}_y + \frac{N_1}{\cos \alpha} \int_{\frac{N}{r_2^2}}^P \frac{(r')^3 - r_1^3}{3 \cdot \frac{r_2 - r_1}{2\pi i}} dP \\ \varphi_y &= \bar{\varphi}_y + \frac{2\pi i N_1}{3(r_2 - r_1) \cos \alpha} \int_{\frac{N}{r_2^2}}^P \left[ \left( \frac{N}{P} \right)^3 - r_1^3 \right] dP \end{aligned} \quad (32)$$

или

$$\varphi_y = \bar{\varphi}_y + \frac{2\pi i N_1 N}{3(r_2 - r_1) \cos \alpha} \left( \frac{r_1^3 + r_2^3}{r_2^2} - 2\sqrt{\frac{N}{P}} - r_1^3 \frac{P}{N} \right) \quad (32')$$



Таким же точно путем не трудно найти прогибы и повороты в самом общем случае, если заданы

$$\alpha = f(\theta)$$

и

$$r = \varphi(\theta)$$

Мы рассмотрели случай, когда угол подъема витков конической пружины одинаков. Некоторый практический интерес представляют также конические пружины, у которых одинаковый шаг витков.

#### 4. Устойчивость пружин

Устойчивость цилиндрической винтовой пружины, подобно обыкновенному ее изгибу, может быть определена из рассмотрения продольного изгиба соответствующего прямого упругого стержня.

В самом деле, дифференциальное уравнение упругой линии пружины при продольном ее изгибе, подобно изложенному в [2], может быть записано в таком виде

$$w E I_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + P y = 0, \quad (33)$$

т. е. уравнение (33) отличается от уравнения упругой линии прямого стержня с жесткостью  $E I_0$  только фактором  $w$ .

Однако граничные условия для уравнения (33) должны быть записаны из условий

$$(y)_{x=0}$$

и

$$(y)_{x=h_k},$$

где  $h_k$  — высота пружины в момент потери устойчивости. Таким образом критическая Эйлера сила приобретает вид

$$P_k = m \frac{E I w}{h_k^2}, \quad (34)$$

где  $m$  — коэффициент, зависящий от способа закрепления концов пружины.

Однако

$$P_k = c(h - h_k), \quad (35)$$

где  $c$  — жесткость пружины,

$h$  — высота несжатой пружины, а также

$$w = \psi \frac{h_k}{i R}$$

и следовательно, для определения  $h_k$  получим следующее квадратное уравнение

$$h_k^2 - hh_k + \frac{m E I_s \psi}{i c R} = 0 \quad (36)$$

откуда находим

$$h_k = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{m E I_s \psi}{i c R}}$$

или

$$(h_k)_{\max} = \frac{h}{2} + \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{m E I_s \psi}{i c R}} \quad (37)$$

и следовательно

$$P_k = c \left[ \frac{h}{2} - \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{m E I_s \psi}{i c R}} \right] \quad (38)$$

Для цилиндрической винтовой пружины с круглым сечением проволоки

$$\psi = 0,138$$

$$c \approx \frac{G d^4}{64 i R^3},$$

принимая

$$\nu = 0,33 \left( E \approx \frac{8}{3} G \right),$$

получим

$$P_k \approx \frac{G d^4}{128 i R^3} \left( 1 - \sqrt{1 - 4,62 m \frac{R^2}{h^2}} \right) \quad (39)$$

Обозначая „гибкость“ пружины

$$\frac{h}{R} = \frac{1}{\lambda}$$

Будем иметь окончательно

$$P_k \approx \frac{G d^4 h}{128 i R^2 \lambda} \left( 1 - \sqrt{1 - 4,62 m \lambda^2} \right) \quad (40)$$

Для пружины с опертыми концами

$$m = \pi^2$$

и следовательно

$$P_k \approx \left( 1 - \sqrt{1 - 45,5 \lambda^2} \right) \frac{G d^4}{128 i R^2 \lambda} \quad (41)$$

При достаточно малых  $\lambda$ , пренебрегая членами, содержащими  $\lambda^2$  и высшие степени  $\lambda$ , получим

$$P_k \approx 0,178 \frac{G d^4}{i \cdot R^2} \quad (42)$$



Не останавливаясь на строгом определении критической силы, укажем, что более точное выражение, получаемое однако более сложным путем чем (42), для пружин с заделанными и опертыми концами дают С. Biezeno и I. Koch. Так, для пружин с опертыми концами по Biezeno — Koch'у

$$P_{кр} = \frac{\pi^2}{h \cdot h_k} \frac{a_0}{1 + \frac{\pi^2}{h_k^2} a_0 n}, \quad (43)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{d^4 h}{2i R} \frac{EG}{E + 2G} \\ n &= \frac{4i R^3}{Ed^4 h} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

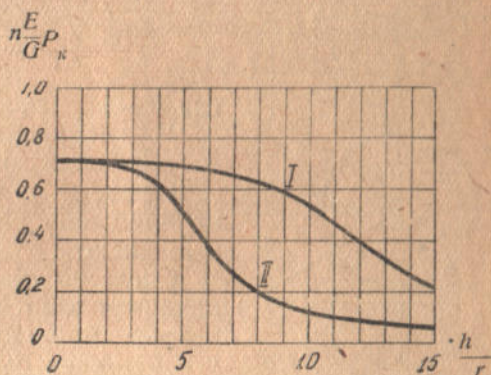
$h$  — высота несжатой пружины,

$h_k$  — высота сжатой пружины.

На фиг. 9 представлены кривые изменения  $P_k$  в зависимости от „гибкости“ пружины.

Кривая *I* для пружины с защемленными концами.

Кривая *II* для пружины с опертыми концами.



Фиг. 9.

## ГЛАВА II

### ДИНАМИКА ПРУЖИН

#### 1. Колебания тел, подвешенных к пружинам

Предположим, что к цилиндрической винтовой пружине подвешен диск  $AB$  массы  $m$  с моментом инерции  $I$  (фиг. 10). Как было выше выяснено, при перемещениях вдоль оси  $y$ , диск будет также проворачиваться вокруг этой оси. Обозначим этот поворот через  $\varphi$ .

Составим уравнение движения диска под действием сил упругости пружины в предположении, что масса пружины не велика по сравнению с массой диска и, следовательно, может быть приближенно учтена, согласно Рейлею, прибавлением к массе диска трети массы пружины — при перемещениях диска

вдоль оси  $y$  и соответственным изменением момента инерции  $J$  при вращении диска:

$$J' = \alpha J$$

$$\alpha > 1$$

$$m' = m + \frac{m_0}{3}$$

( $m_0$  — масса пружины).

Воспользуемся уравнением Лагранжа в обобщенных координатах

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad (45)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы,  $V$  — потенциальная энергия,  $q_i$  — обобщенные координаты.

Примем за обобщенные координаты перемещения  $y$  и повороты  $\varphi$ , испытываемые диском.

Согласно ранее изложенному, потенциальная энергия как однородная функция второго порядка относительно координат  $y$  и  $\varphi$  может быть представлена так

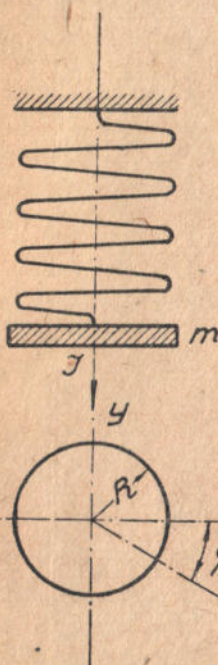
$$V = A\varphi^2 - 2B y \varphi + Cy^2, \quad (46)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{GI_p \cos \alpha}{4\pi i R} (1 + \mu \cos^2 \alpha) \\ B &= \frac{GI_p \mu \cos^2 \alpha \sin \alpha}{4\pi i R} \\ C &= \frac{GI_p \cos \alpha}{4\pi i R^3} (1 + \mu \sin^2 \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Кинетическая энергия системы, очевидно, будет

$$T = \frac{J' \dot{y}^2}{2} + \frac{m' \dot{\varphi}^2}{2}$$



Фиг. 10.



Дифференцируя и подставляя в (45), получим следующую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{A}{I'}\varphi - 2\frac{B}{I'}y &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{C}{m'}y - 2\frac{B}{m'}\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \frac{2A}{I'} &= \alpha_1 \\ \frac{2B}{I'} &= \beta_1 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2C}{m'} &= \alpha_2 \\ \frac{2B}{m'} &= \beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

и полагая, в виду наличия гармонических колебаний

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \gamma_1 \cos(kt + \psi) \\ y &= \gamma_2 \cos(kt + \psi) \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

где  $k$  — частота совместных колебаний, из (49) получим

$$\gamma_1(\alpha_1 - k^2) - \gamma_2\beta_1 = 0$$

$$\gamma_1\beta_2 - \gamma_2(\alpha_2 - k^2) = 0$$

Исключая постоянные  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  получим

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1 - k^2), & -\beta_1 \\ \beta_2, & -(\alpha_2 - k^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$k^4 - (\alpha_1 + \alpha_2)k^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) = 0 \quad (53)$$

Откуда находим обе искомые частоты

$$\kappa_{1,2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - 4\beta_1\beta_2} \quad (54)$$

Если подвешенное тело имеет форму, при которой вращательным его движением можно пренебречь (материальная точка), то уравнение движения, очевидно, имеет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{c}{m'}y = 0, \quad (55)$$

где  $m' = m + \frac{m_0}{3}$  ( $m$  — масса подвешенного тела,  $m_0$  — масса пружины), а

$$c \approx \frac{GR^4}{64iR^3}$$

и, следовательно, искомая частота собственных колебаний будет

$$k = \frac{d^2}{8R^2} \sqrt{\frac{GR}{i \left( m + \frac{m_0}{3} \right)}} \quad (56)$$

Колебания тела, подвешенного к конической пружине или к пружине какой либо другой навивки, определяются таким же путем. В этих случаях только изменятся выражения для коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\beta_1, \beta_2$ . Несколько сложнее колебания тела прикрепленного к верхнему концу конической пружины. В этом случае необходимо учитывать изменение восстанавливающей упругой силы при колебаниях в результате замыкания витков с минимальной жесткостью. Очевидно, пока сила упругости пружины

$$P < \frac{N}{r_2^2}$$

тело будет совершать движение, соответствующее простым гармоническим колебаниям.

При значениях восстанавливающей силы

$$P > \frac{N}{r_2^2},$$

линейность между деформациями и усилиями нарушается и тело будет совершать движение, соответствующее некоторым псевдогармоническим колебаниям, определяемым уравнением

$$\frac{d^2y}{dt^2} + f(y)y = 0.$$



Не останавливаясь подробно на этом вопросе<sup>1</sup>, укажем, однако, что, обычно, при малых колебаниях можно рассматривать движение, при значениях восстанавливающей силы

$$P > \frac{N}{r_2^2},$$

как гармоническое, заменяя нелинейный участок (фиг. 11) прямой. В этом случае, если обозначить жесткость пружины до замыкания витков через

$$\frac{dP}{dy} = c_1,$$

соответствующую прогибам до  $y_1$ , жесткость после замыкания через

$$\frac{dP_2}{dy} \approx c_2 = \text{const},$$

$$y > y_1$$

1) Следует заметить, что точное решение уравнения псевдогармонических колебаний привело бы к решению в виде весьма сложных интегралов.

В самом деле, уравнение движения подвешенного тела с учетом замыкания витков имеет вид

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dP}{dy} y = 0$$

Заменяя  $\frac{dy}{dt} = \varphi$  найдем

$$m\varphi d\varphi + ydP = 0$$

или

$$m \frac{\varphi^2}{2} = C - \int ydP,$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Таким образом

$$\varphi = \sqrt{C_1 - \frac{2}{m} \int ydP}$$

откуда

$$t = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 - \frac{2}{m} \int ydP}} + C_2$$

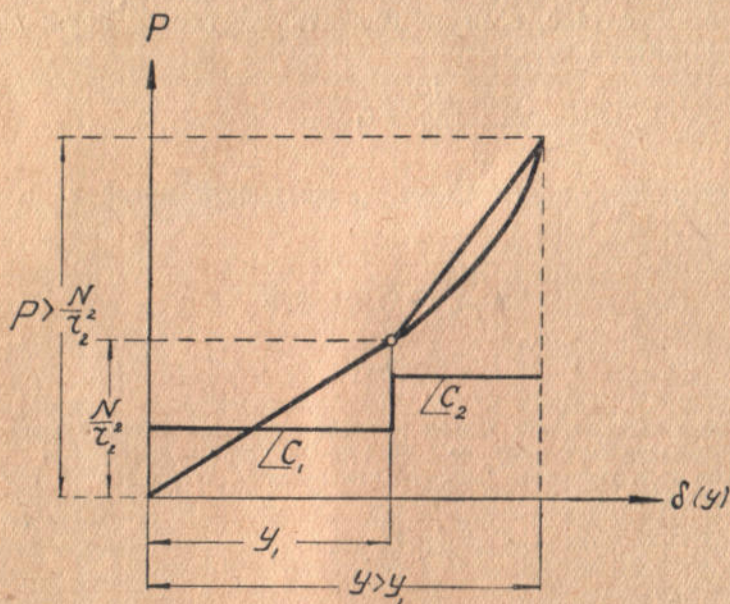
или

$$t = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 + aP + \beta P^2 + \gamma \ln P}} + C_2$$

найдем период полного колебания в таком виде

$$T \approx \pi \sqrt{m'} \left( \frac{1}{\sqrt{c_1}} + \frac{1}{\sqrt{c_2}} \right) + 2 \sqrt{\frac{m'}{c_1}} \arcsin \frac{y_1}{v_0} \sqrt{\frac{c_1}{m'}}, \quad (57)$$

где  $v_0$  — начальная скорость.



Фиг. 11.

Если к пружине подвешена точечная масса, совершающая колебания нормальные к оси пружины (фиг. 12), то, рассматривая пружину как соответствующий упругий прямой стержень, найдем период колебания, очевидно, в таком виде:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(m_0 + \frac{33}{140} m_1\right) h^3}{3E I_0 \omega}}, \quad (58)$$

где  $m_0$  — масса подвешенного тела,  
 $m_1$  — масса пружины,  
 $h$  — высота пружины,  
 $I_0$  — экваториальный момент инерции проволоки пружины,  
 $\omega$  — соответствующий формфактор.

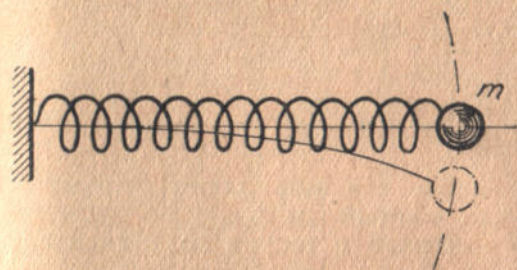


Для пружины с круглым сечением очевидно получим

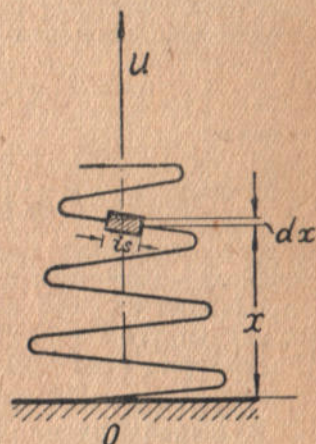
$$\left( \psi = 0,138, I_0 = \frac{\pi d^4}{64} \right)$$

$$T \approx \frac{14\pi h}{d^2} \sqrt{\frac{\left( m_0 + \frac{33}{140} m' \right) iR}{E}} \quad (59)$$

Точно также решается вопрос, когда к пружине подвешено какое угодно количество масс.



Фиг. 12.



Фиг. 13.

## 2. Колебания пружин

Рассмотрим теперь свободные колебания пружины, как упругого тела.

Для общности рассуждений предположим, что рассматриваемая пружина произвольной навивки и формы.

Пусть через  $u(x, t)$  обозначены перемещения, испытываемые элементом пружины, находящимся на расстоянии  $x$  от закрепленного конца (фиг. 13) в момент времени  $t$ .

Рассмотрим движение элемента  $ds$  пружины. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e_x,$$

представляет относительное удлинение пружины в точке  $x$ , то сила упругости, действующая в этой точке на элемент  $ds$  очевидно будет

$$P_{(x)} = \frac{\partial u}{\partial x} c(x),$$

где  $c(x)$  линейная жесткость (жесткость единицы длины) пружины в точке  $x$ , — представляющая известную функцию координаты  $(x)$ .

Сила упругости, действующая на элемент  $ds$  в точке  $x + dx$ , очевидно, будет

$$P_{(x+dx)} = \frac{\partial u}{\partial x} c(x) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx.$$

Таким образом, элемент подвержен действию результирующей силы упругости

$$dP_{(x)} = P_{(x+dx)} - P_{(x)} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx.$$

Уравновешивая эту силу по d'Alembert'у силой инерции рассматриваемого элемента

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx,$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (60)$$

где  $\rho(x)$  — линейная масса (масса единицы длины) пружины в точке  $x$ , — известная функция координаты  $x$ .

Уравнение (60) является основным в теории колебаний пружин, как упругих тел.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

### 3. Колебания цилиндрической винтовой пружины

В этом случае очевидно

$$c(x) = c_0 = \text{const},$$

$$\rho(x) = \rho_0 = \text{const},$$

и следовательно уравнение (60) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (61)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{c_0}{\rho_0}}. \quad (62)$$

Решение этого элементарного волнового уравнения может быть представлено в форме Bernoulli или в форме d'Alembert'a

В первом случае перемещения в пружине представляются путем наложения друг на друга нормальных колебаний, что приводит к так называемым „стоячим волнам“. Полагая

$$u = \sum_{(n)} \chi(x) T(t), \quad (63)$$



где  $\chi(x)$  — функция только координаты ( $x$ ),  
 $T(t)$  — функция только времени  $t$ ,  
из уравнения (61) найдем

$$u = \sum_{(n)} \left( A_n \sin \frac{n\pi\alpha}{h} t + B_n \cos \frac{n\pi\alpha}{h} t \right) \left( \overline{A}_n \sin \frac{n\pi x}{h} + \overline{B}_n \cos \frac{n\pi x}{h} \right), \quad (64)$$

где

$$\overline{A}_n \sin \frac{n\pi x}{h} + \overline{B}_n \cos \frac{n\pi x}{h}$$

нормальная функция  $n$ -ой формы колебаний.

Во втором случае, по d'Alembert'у, полагая

$$t = \frac{\xi - \tau}{2}$$

и

$$x = \frac{\xi + \tau}{2},$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} = 0,$$

решение которого приводит к так называемым „распространяющимся волнам“

$$u(x, t) = \Phi(x + \alpha t) + \Psi(x - \alpha t), \quad (66)$$

где  $\Phi$  и  $\Psi$  две произвольные функции.

В этом случае перемещения в пружине представляются в виде наложения друг на друга двух волновых движений.

В самом деле, функция

$$\Phi(x + \alpha t)$$

не изменится при изменении  $x$  на  $(x + dx)$  и  $t$  на  $(t + dt)$ , если положить

$$\alpha = - \frac{dx}{dt}.$$

Точно также функция

$$\Psi(x - \alpha t)$$

не изменится при таком же изменении  $x$  и  $t$ , если положить

$$\alpha = \frac{dx}{dt}.$$

Таким образом первый член правой части равенства (66) дает волновое движение с поступательной скоростью

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha,$$

направленное в сторону отрицательной оси  $x$ , второй же член— волновое движение с той же поступательной скоростью, но в направлении положительной оси  $x$ . Следовательно, перемещения элемента пружины представятся суммой этих двух волновых движений.

Итак, в рассматриваемом случае скорость распространения перемещений вдоль пружины будет

$$\frac{dx}{dt} = \alpha = \sqrt{\frac{C_0}{\rho_0}} \quad (67)$$

или

$$\alpha = \sqrt{\frac{C_0 h^2 g}{g \rho_0 h^2}} = h \sqrt{\frac{Cg}{Q}}, \quad (68)$$

где  $C$ — жесткость пружины,

$Q$ — вес активно работающих витков.

Таким образом деформации, а следовательно и напряжения, распространяются вдоль оси пружины со скоростью  $\alpha$ .

Не трудно заметить, что размерность

$$\alpha = \left[ \frac{\text{см}}{\text{сек}} \right].$$

Заменяя в (68)

$$C \approx \frac{Gd^4}{64R^3 i}$$

$$Q = \frac{\pi^2 d^2 R i \gamma}{2},$$

получим

$$\alpha = \frac{dh}{\pi i R^2} \sqrt{\frac{gG}{32\gamma}}. \quad (69)$$

Если считать, что концы пружины упираются в абсолютно жесткие стенки, то периодическая упругая волна, пройдя по пружине, отражается у такой стенки обратно, причем закон отражения весьма прост: отраженная волна представляет собой зеркальное отображение основной упругой волны, как бы продолжающей беспрепятственно двигаться в том же направлении и с той же скоростью дальше. Таким образом, плоскостью отображения является поверхность жесткой стенки. Отраженная волна, пройдя в свою очередь пружину в обратном направлении снова отражается у другой жесткой стенки и т. д.

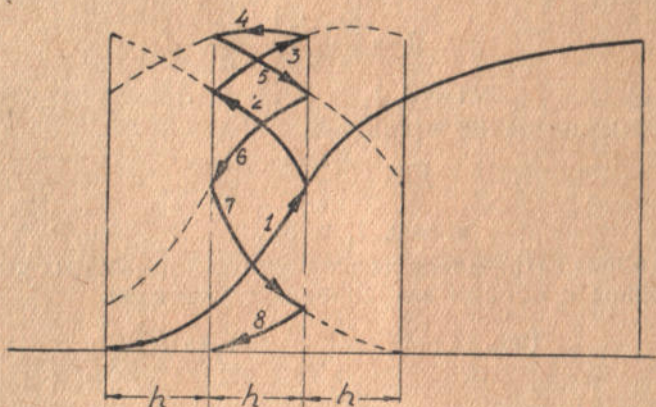


Таким образом, волна будет пробегать по пружине до тех пор пока не заглухнет под действием внутренних и внешних заглушающих сил.

Для примера на фиг. 14 нанесены пунктиром многократно отраженные волны.

Уже сейчас не трудно определить низшую частоту нормальных колебаний. Действительно, полное колебание какой либо точки пружины, очевидно, происходит в течение времени, соответствующего прохождению упругой волной удвоенной длины пружины

$$T = \frac{2h_0}{\alpha} \quad (70)$$



Фиг. 14.

Таким образом низшая круговая частота собственных колебаний будет

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gC}{Q}} \quad (71)$$

Рассмотрим теперь несколько подробнее уравнение (61). Предположим, что

$$u = w(x) \cos(kt + \beta) \quad (72)$$

где  $k$  — искомая круговая частота собственных колебаний, а  $w(x)$  — форма колебаний, определяемая по (61) уравнением

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{k^2}{\alpha^2} w = 0 \quad (73)$$

Отсюда следует

$$w(x) = A \sin\left(\frac{k}{\alpha} x + \gamma\right), \quad (74)$$

где  $A$  и  $\gamma$  — постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями.

В случае пружины с одним закрепленным, а другим свободным концами, отсутствие перемещений в первом и относительных деформаций во втором, приводят к следующим граничным условиям:

$$w(x)_{x=0} = 0; \quad \left( \frac{dw}{dx} \right)_{x=h} = 0. \quad (75)$$

Поэтому из уравнения (74) получаем

$$\gamma = 0$$

и

$$\cos \frac{k}{\alpha} h = 0, \quad (76)$$

откуда следует

$$k = \frac{2m+1}{2} \frac{\alpha\pi}{h} \quad (77)$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

или частоты колебаний в секунду

$$\bar{k} = \frac{2m+1}{4} \frac{\alpha}{h} \quad (78)$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом определены все частоты нормальных колебаний. Для пружины с обоими закрепленными концами

$$(w)_{x=0} = 0; \quad (w)_{x=h} = 0 \quad (79)$$

или

$$\gamma = 0$$

$$\sin \frac{kh}{\alpha} = 0, \quad (80)$$

откуда

$$k = \frac{m\pi\alpha}{h} \quad (81)$$

или

$$\bar{k} = \frac{m\alpha}{2h} \quad (82)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, суммарные перемещения, испытываемые точками пружины с одним, например, свободным концом будут

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \sin \frac{2m+1}{2} \frac{\pi x}{h} \cdot \cos \left( \frac{2m+1}{2} \frac{\alpha\pi}{h} t + \beta \right) \quad (72')$$

#### 4. Колебания нецилиндрических пружин, произвольной навивки

В этом случае интегрирование уравнения (60) значительно усложняется.



Весьма часто точно проинтегрировать это уравнение вовсе не представляется возможным.

Покажем теперь один весьма эффективный прием, основанный на применении итеративного процесса последовательных приближений, при помощи которого возможно приближенное интегрирование уравнения (60) для любых пружин, т. е. при любом задании функций  $c(x)$  и  $\rho(x)$  — линейной жесткости и линейной массы, как непрерывных, так и прерывных. Последнее весьма важно, так как дает возможность распространить уравнение (60) и предлагаемое решение на случай присоединенных сосредоточенных масс, рассматривая последние как распространенные на малом участке. Пусть, как и раньше, в виду наличия гармонических колебаний

$$u = w(x) \cos kt, \quad (83)$$

где  $k$  — круговая частота собственных колебаний, а  $w(x)$  — форма колебаний, определяемая согласно (60) уравнением

$$\frac{d}{dx} \left[ c(x) \frac{dw}{dx} \right] + \rho(x)w = 0. \quad (84)$$

Предположим, что форма колебаний может быть представлена рядом

$$w(x) = w_0 + k^2 w_1 + (k^2)^2 w_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} k^{2i} w_i, \quad (85)$$

где  $w_0, w_1, w_2, \dots$  — искомые функции координаты  $x$ , определяемые соответственно уравнению (84), следующей бесконечной системой дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ c(x) \frac{dw_0}{dx} \right] &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left[ c(x) \frac{dw_1}{dx} \right] + \rho(x)w_0 &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left[ c(x) \frac{dw_2}{dx} \right] + \rho(x)w_1 &= 0 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{d}{dx} \left[ c(x) \frac{dw_n}{dx} \right] + \rho(x)w_{n-1} &= 0 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Из первого уравнения системы (86) следует

$$w_0 = A \int \frac{1}{c(x)} dx + B, \quad (87)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями.

Остальные уравнения системы дают

$$w_1(x) = - \left\{ A \int \int \int \frac{1}{c(x)} dx \rho(x) dx \frac{1}{c(x)} dx + B \int x \frac{1}{c(x)} dx \right\} \quad (88)$$

.....

$$w_n(x) = (-1)^n \left\{ A \int \int \dots \int \frac{1}{c(x)} dx \rho(x) dx \frac{1}{c(x)} dx \dots \frac{1}{c(x)} dx + \right. \\ \left. + B \int \int \dots \int \frac{x}{c(x)} dx \rho(x) \frac{1}{c(x)} dx \dots \frac{1}{c(x)} dx \right\} \quad (89)$$

.....

Таким образом форма колебаний представится рядом

$$w(x) = A \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i k^{2i} \underbrace{\int \int \dots \int}_{2i+1} \frac{1}{c(x)} dx \rho(x) dx \frac{1}{c(x)} dx \dots \frac{1}{c(x)} dx + \\ + B \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i k^{2i} \underbrace{\int \int \dots \int}_{2i-1} \frac{x}{c(x)} dx \rho(x) dx \frac{1}{c(x)} dx \dots \frac{1}{c(x)} dx \right] \quad (90)$$

В силу весьма широких допущений относительно задания функций  $c(x)$  и  $\rho(x)$  следует рассмотреть условия существования формы колебаний, представленной разложением (90). Для этого достаточно подчинить линейную жесткость  $c(x)$  и линейную массу  $\rho(x)$  следующим условиям

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} c(x) &\geq c_0 \\ \rho(x) &\leq \rho_0 \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

$$(0 \leq x \leq h),$$

где  $c_0$  и  $\rho_0$  — некоторые константы.



В самом деле, в этом случае из разложения (90) следует

$$w(x) \leq A \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{\rho_0}{c_0}\right)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + \\ + B \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{\rho_0}{c_0}\right)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \right]. \quad (92)$$

Но

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{\rho_0}{c_0}\right)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = C \sin \sqrt{\frac{\rho_0}{c_0}} x$$

и

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{\rho_0}{c_0}\right)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} = \cos \sqrt{\frac{\rho_0}{c_0}} x,$$

где  $C$  — соответствующий коэффициент.

Таким образом

$$w(x) \leq \bar{A} \sin \sqrt{\frac{\rho_0}{c_0}} x + B \cos \sqrt{\frac{\rho_0}{c_0}} x. \quad (93)$$

Этим и доказывается достаточно быстрая абсолютная и равномерная сходимость разложения (90) при любом задании функций  $c(x)$  и  $\rho(x)$  как непрерывных, так и прерывных. Уравнение (90) является основным в теории свободных колебаний пружин произвольной навивки и формы. После введения в рассмотрение граничных условий, соответствующих способу закрепления концов, уравнение (90) упрощается и приобретает весьма простой вид, удобный для практических применений.

Так, для пружин с одним закрепленным, а другим опертым концами (тип наиболее подверженный вибрациям), уравнение (90) согласно граничным условиям (75) приобретает вид

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i k^{2i} \underbrace{\int \int \dots \int}_{2i} \frac{1}{c(x)} dx \rho(x) dx = 0 \quad (94)$$

$(x = h)$

или

$$1 - k^2 \int \int \frac{1}{c(x)} dx \rho(x) dx + (k^2)^2 \int \int \int \frac{1}{c(x)} dx \rho(x) dx \frac{1}{c(x)} dx \rho(x) dx \dots = 0$$

( $x = h$ ).

Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{dx}{c(x)} &= \varphi(x); \\ a_1(x) &= \int \varphi(x) \rho(x) dx; \\ a_2(x) &= \int \int \frac{a_1(x)}{c(x)} dx \rho(x) dx; \\ a_3(x) &= \int \int \frac{a_2(x)}{c(x)} dx \rho(x) dx \\ &\dots \dots \dots \\ a_n(x) &= \int \int \frac{a_{n-1}(x)}{c(x)} dx \rho(x) dx \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

и

$$\left. \begin{aligned} a_1(h) &= a_1; \\ a_2(h) &= a_2; \\ a_3(h) &= a_3; \\ &\dots \dots \dots \\ a_n(h) &= a_n; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

очевидно получим

$$1 - a_1 k^2 + a_2 (k^2)^2 - \dots = 0, \quad (97)$$

откуда и определяется искомая частота собственных колебаний.

Заметим, что практически бывает достаточно, ввиду быстрой сходимости разложения (90), удержать в характеристическом уравнении (97) члены до  $(k^2)^2$  включительно.



Для грубо приближенной оценки иногда можно ограничиться членом с ( $k^2$ )

$$k \approx \sqrt{\frac{1}{a_1}}. \quad (98)$$

Для примера рассмотрим колебания конической пружины, представленной на фиг. 15.



Фиг. 15.

В этом случае, очевидно,

$$\rho(x) = \alpha(h-x) \quad (99)$$

$$c(x) = \frac{\beta}{(h-x)^2},$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  — соответствующие константы.

Таким образом

$$\varphi(x) = \int \frac{dx}{c(x)} = -\frac{1}{3\beta}(h-x)^3$$

$$a_1 = \int \varphi(x)\rho(x) dx = -\frac{\alpha}{15\beta} h^5$$

$$a_2 = \int \int \frac{a_1(x)}{c(x)} dx \rho(x) dx = -\frac{\alpha}{1200\beta^2} h^{10}$$

.....

и т. д.

Таким образом уравнение (97) примет вид:

$$1 + \frac{\alpha h^5}{15\beta} - \frac{\alpha^2 h^{10}}{1200\beta^2} + \dots = 0 \quad (100)$$

Отсюда находим

$$\frac{\alpha h^5}{\beta} k^2 \approx 92,9$$

или

$$k = \frac{9,64}{h} \sqrt{\frac{C_0}{\rho_0}} \quad (101)$$

В случае такой же пружины, но с другим закрепленным концом, очевидно, найдем:

$$\left. \begin{aligned} c(x) &= \frac{\beta}{x^2} \\ \rho(x) &= \alpha x \end{aligned} \right\} \quad (99')$$

Таким образом

$$\varphi(x) = \int \frac{dx}{c(x)} = \frac{x^3}{3\beta}$$

$$a_1 = \int \varphi(x) \rho(x) dx = \frac{\alpha h^5}{15\beta}$$

$$a_2 = \int \int \frac{a_1(x)}{c(x)} dx \rho(x) dx = \frac{\alpha^2 h^{10}}{1200 \cdot \beta^2}$$

и т. д.

И следовательно

$$1 - \frac{\alpha h^5}{15\beta} k^2 + \frac{\alpha^2 h^{10}}{1200\beta^2} (k^2)^2 - \dots = 0 \quad (100')$$

Отсюда находим

$$\frac{\alpha h^5}{\beta} \cdot k^2 \approx 20$$

или

$$k \approx \frac{4,47}{h} \sqrt{\frac{C_h}{\rho_h}} \quad (101')$$

Точно также, без затруднений, можно определить с любым приближением низшие частоты нормальных колебаний произвольных пружин.

Заметим, что при выводах явление замыкания витков считалось отсутствующим.

## 5. Вынужденные колебания пружин

Предположим, что свободный конец пружины под действием некоторой периодической силы совершает периодическое движение

$$x = f(t)$$

с периодом  $\frac{2\pi}{\omega}$ .



Представим перемещения свободного конца пружины в виде суммы гармонических составляющих, путем разложения функции  $f(t)$  в ряд Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos i\omega t + b_k \sin i\omega t), \quad (102)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega\varphi) \cos i\omega\varphi d\varphi \\ b_i &= \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega\varphi) \sin i\omega\varphi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Если функция  $f(t)$  задана графически или таблично, то ее всегда можно представить в виде тригонометрического интерполяционного ряда

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos i\omega t + b_k \sin i\omega t), \quad (104)$$

известными методами практического гармонического анализа. Рассмотрим колебания пружины под действием  $i$ -ой гармонической составляющей ряда (104)

$$A_i \cos(i\omega t + \beta_i).$$

В этом случае уравнению (61) должна удовлетворять функция

$$u = A_i w(x) \cos(i\omega t + \beta),$$

так как частота вынужденных колебаний и возмущающей силы одна и та же.

Таким образом, для определения формы колебаний, соответствующей  $i$ -ой гармонической составляющей, из (61) получим уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{i^2 \omega^2}{\alpha^2} w = 0, \quad (105)$$

откуда находим

$$w(x) = A \sin\left(\frac{i\omega}{\alpha} x + \gamma\right). \quad (106)$$

Из граничных условий

$$w(x) = 0 \quad \text{и} \quad w(x) = A_i, \quad (107)$$

следует

$$\gamma = 0 \quad (108)$$

и

$$A = \frac{A_i}{\sin \frac{i\omega h}{\alpha}}. \quad (109)$$

Таким образом и при вынужденных колебаниях форма колебаний является синусоидой

$$w(x) = \frac{A_i}{\sin \frac{i\omega}{\alpha} h} \sin \frac{i\omega}{\alpha} x. \quad (110)$$

Отсюда следует, что максимальная амплитуда колебаний возникает при

$$\frac{i\omega}{\alpha} x_m = \frac{2m+1}{2} \pi \quad (111)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

т. е. в местах пружины, определяемых координатами

$$x_m = \frac{2m+1}{2i} \frac{\pi\alpha}{\omega} \quad (111')$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Максимальное значение амплитуды очевидно будет

$$\frac{A}{\sin \frac{i\omega}{\alpha} h}. \quad (112)$$

Из рассмотрения уравнения (110) также следует, что амплитуда колебаний неограниченно возрастает при

$$\frac{i\omega}{\alpha} h = m\pi. \quad (113)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots,$$

где целое число  $m$  — определяет форму колебания.



Таким образом, критическая частота, при которой возникает резонанс  $m$ -го порядка с  $i$ -ой гармонической составляющей определяется выражением

$$\omega_{i,m} = \frac{m}{i} \frac{\pi\alpha}{h} \quad (113')$$

$$m = 1, 2, 3 \dots$$

$$i = 1, 2, 3 \dots$$

Итак, перемещения в пружине могут быть представлены в таком виде

$$u = \frac{A_i}{\sin \frac{i\omega}{\alpha} h} \sin \frac{i\omega}{\alpha} x \cos (i\omega t + \beta). \quad (114)$$

Суммарные перемещения в пружине очевидно будут

$$U = \frac{a_0 x}{2h} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\sin \frac{i\omega}{\alpha} h} \sin \frac{i\omega}{\alpha} x \cos (i\omega t + \beta_i)$$

или

$$U \approx \frac{a_0 x}{2h} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\sin \frac{i\omega}{\alpha} h} \sin \frac{i\omega}{\alpha} x \cos (i\omega t + \beta_i)$$

Рассмотрим теперь несколько более общий случай вынужденных колебаний цилиндрических пружин.

Пусть на пружину действует периодически меняющаяся, распределенная по длине  $h$  продольная сила<sup>1)</sup>

$$P_x = f(x, t)$$

В этом случае силы инерции элемента  $dx$  пружины

$$\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dx$$

<sup>1)</sup> Этот случай впервые был рассмотрен в мемуаре Пуассона „Mémotre sur la manière d'exprimer les fonctions en séries de quantités périodiques et sur l'usage de cette transformation dans la résolution de differents problemes“. Journal de l'Ecole Polytechnique“, а также весьма подробно академиком А. Н. Крыловым в связи с его исследованием погрешностей показаний индикаторов и крешеров. (А. Н. Крылов — „Некоторые замечания о крешерах и индикаторах“.)

уравновешиваются внутренними силами упругости

$$c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

и распределенными по длине продольными силами

$$f(x, t) dx$$

Таким образом, основное уравнение в этом случае примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} f(x, t) \quad (115)$$

К граничным условиям (для пружин с одним свободным концом)

$$(u)_{x=0} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=h} = 0 \quad (116)$$

прибавляются начальные условия

$$(u)_{t=0} = \varphi(x) \quad (116')$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = \psi(x),$$

где  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  — заданные в интервале  $0 \leq x \leq h$  функции.

Предположим, что перемещения  $u$  в пружине могут быть представлены рядом

$$u = \sum_{(n)} (\chi_i T_i + \bar{\chi}_i \bar{T}_i), \quad (117)$$

в котором функции  $\chi_i$ ,  $T_i$  и  $\bar{\chi}_i$ ,  $\bar{T}_i$  представляют соответственно свободные и вынужденные колебания пружины.

В таком случае ряд

$$\sum_{(i)} \chi_i T_i$$

должен удовлетворять уравнению свободных колебаний и, следовательно, соответственно условиям на краях (116)

$$\sum_{(i)} \chi_i T_i = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \sin \left( \frac{2i+1}{2} \frac{\alpha \pi}{h} t + \beta_i \right) \sin \frac{2i+1}{2} \cdot \frac{\pi x}{h}$$

Соблюдая начальные условия, следует положить

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \sin \beta_i \sin \frac{2i+1}{2} \cdot \frac{\pi x}{h}$$



$$\psi(x) = \frac{\alpha\pi}{2h} \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) A_i \cos \beta_i \sin \frac{2i+1}{2} \cdot \frac{\pi x}{h}$$

Умножая обе части этих тождеств на  $\sin \frac{2i+1}{2} \frac{\pi x}{h} dx$  и интегрируя в пределах от 0 до  $h$ , очевидно, найдем

$$A_i \sin \beta_i = \frac{2}{h} \int_0^h \varphi(x) \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\pi x}{h} dx, \quad (118)$$

$$A_i \cos \beta_i = \frac{2}{h} \int_0^h \psi(x) \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\pi x}{h} dx, \quad (118')$$

откуда  $A_i$  и  $\beta_i$  легко определяются.

Таким образом, не нарушая общности рассуждений, можно положить

$$\chi_i = \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\pi x}{h} \quad (119)$$

$$T_i = A_i \sin \left( \frac{2i+1}{2} \frac{\alpha\pi t}{h} + \beta_i \right) \quad (119')$$

Положим теперь, соответственно условиям на краях, что в ряде (117)

$$\bar{\chi}_i = \chi_i$$

и будем отыскивать функции  $\bar{T}$  с таким условием, чтобы ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \chi_i \bar{T}_i \quad (120)$$

удовлетворял уравнению (115), условиям на краях (116) и начальным условиям при  $t=0$  для вынужденных колебаний

$$\sum_{i=0}^{\infty} \chi_i \bar{T}_i = \sum_{i=0}^{\infty} \chi_i \frac{d\bar{T}_i}{dt} = 0. \quad (121)$$

Представим для этого функцию  $\frac{1}{\rho} f(x, t)$  в виде разложения по функциям  $\chi_i$

$$\frac{1}{\rho} f(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_i(t) \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\pi x}{h} \quad (122)$$

в котором, очевидно,

$$\tau_i(t) = \frac{2}{\rho h} \int_0^h f(x, t) \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\pi x}{h} dx$$

Таким образом, подставляя разложения (120) и (122) в основное уравнение (115) найдем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \chi_i \left\{ \bar{T}_i'' + \alpha^2 \left( \frac{2i+1}{2} \frac{\pi}{h} \right)^2 \bar{T}_i - \tau_i(t) \right\} = 0$$

$$\bar{T}_i'' + \left( \frac{2i+1}{2} \frac{\alpha \pi}{h} \right)^2 \bar{T}_i = \tau_i(t) \quad (124)$$

и, следовательно, соответственно (124), получим:

$$\bar{T}_i = \frac{2h}{(2i+1)\alpha} \frac{1}{\pi} \int_0^t \tau_i(t) \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\alpha \pi}{h} (t-\tau) d\tau \quad (125)$$

или

$$\bar{T}_i = \frac{2h}{(2i+1)\alpha} \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_0^h f(\xi, \tau) \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\alpha \pi}{h} (t-\tau) \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\pi \xi}{h} d\xi d\tau \quad (125')$$

Таким образом

$$U = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ A_i \sin \left( \frac{2i+1}{2} \frac{\alpha \pi t}{h} + \beta_i \right) + \frac{2h}{2i+1} \int_0^t \int_0^h f(\xi, \tau) \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\alpha \pi}{h} (t-\tau) \times \right.$$

$$\left. \times \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\pi \xi}{h} d\xi d\tau \right\} \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\pi x}{h} \quad (126)$$

Полученное уравнение справедливо и для случая сосредоточенных сил. При этом сосредоточенные силы необходимо рассматривать, как равномерно распределенные на малом промежутке  $\delta$  длины пружины.

В самом деле, рассмотрим случай одной сосредоточенной на конце силы.

Очевидно, в этом случае:

$$f(x, t) = 0 \quad \text{для } 0 \leq x \leq h$$

$$f(x, t) = af(t) \quad \text{, } h \leq x \leq h + \delta$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_h^{h+\delta} f(x, t) dx = f(t) \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_h^{h+\delta} a dx = f(t) \cdot A,$$

где  $Af(t)$  — полная нагрузка, приложенная к концу пружины.



Таким образом

$$\begin{aligned} \int_0^h f(x, t) \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\pi x}{h} dx &= f(t) \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{h+\delta} a \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\pi x}{h} dx = \\ &= f(t) \frac{2h}{(2i+1)\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} a \left\{ \cos \frac{2i+1}{2} \pi - \cos \frac{2i+1}{2} \pi \left(1 + \frac{\delta}{h}\right) \right\} = \\ &= Af(t) \sin \frac{2i+1}{2} \pi = (-1)^i Af(t) \end{aligned}$$

Следовательно

$$\bar{T}_i = \frac{(-1)^i}{2i+1} \cdot \frac{4A}{\alpha \pi \rho} \int_0^t f(\tau) \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\alpha \pi}{h} (t-\tau) d\tau \quad (127)$$

и

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ A_i \sin \left( \frac{2i+1}{2} \frac{\alpha \pi t}{h} + \beta_i \right) + \right. \\ &\left. + \frac{(-1)^i}{2i+1} \frac{4A}{\alpha \pi \rho} \int_0^t f(\tau) \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\alpha \pi}{h} (t-\tau) d\tau \right\} \sin \frac{2i+1}{2} \frac{\pi x}{h} \quad (128) \end{aligned}$$

Заменяя частоты собственных колебаний одной буквой

$$\frac{2i+1}{2} \frac{\alpha \pi}{h} = p_i,$$

из (128) получим известное выражение для вынужденных и свободных колебаний

$$U = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ A_i \sin (p_i t + \beta_i) + \frac{(-1)^i}{p_i M} \frac{2A}{\rho} \int_0^t f(\tau) \sin p_i (t-\tau) dt \right\} \sin \frac{p_i}{\alpha} x \quad (129)$$

где  $M = \rho h$  — масса пружины.

Формула (129) дает возможность получить изменение перемещений в пружине при резонансе.

Если к концу пружины внезапно приложена сила  $P$ , то из (129) найдем

$$U = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ A_i \sin (p_i t + \beta_i) + \frac{(-1)^i}{p_i^2} \frac{2P}{M} (1 - \cos p_i t) \right\} \sin \frac{p_i}{\alpha} x \quad (130)$$

Считая, что свободные колебания в результате затухания при установившемся процессе отсутствуют, для вынужденных колебаний получим:

$$U = \frac{2P}{M} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{p_i^2} (1 - \cos p_i t) \sin \frac{p_i}{\alpha} x \quad (131)$$

Если к концу пружины приложена „статически“ сила  $P$ , то закон ее „изменения“ можно представить в таком виде:

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} at$$

В этом случае из (129) найдем

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau) \sin p_i(t - \tau) d\tau &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t at \cdot \sin p_i(t - \tau) d\tau = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{at}{p_i} + \frac{a}{p_i^2} \sin p_i t = \frac{P}{p_i} \end{aligned}$$

и, следовательно, перемещения в пружине будут

$$U = \frac{2P}{M} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{p_i^2} \sin \frac{p_i}{\alpha} x \quad (132)$$

Сравнивая разложения (131) и (132) легко заключить, что максимальные перемещения, претерпеваемые точками пружины

при действии внезапно приложенной силы при  $t_i = \frac{2i+1}{p_i} \pi$

$$U_{max} = \frac{4P}{M} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{p_i^2} \sin \frac{p_i}{\alpha} x \quad (133)$$

— вдвое больше перемещений, сообщаемых при „статическом“ действии этой же силы.

В частном случае, перемещения свободного конца пружины будут

$$\begin{aligned} (U)_h &= \frac{4P}{M} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{p_i^2} \sin \frac{p_i}{\alpha} h = \\ &= \frac{16\pi^2 Ph^2}{\alpha^2 M} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = \frac{2Ph^2}{\alpha^2 M} = \frac{2P}{C} \end{aligned} \quad (134)$$



и

$$(U_c)_h = \frac{Ph^2}{\alpha^2 M} = \frac{P}{C}, \quad (135)$$

где  $C = \frac{\alpha^2 M}{h^2}$ , как не трудно заметить — жесткость пружины.

Указанными приемами можно решить и более сложные задачи вибраций пружин.

Мы же, в излагаемой общей теории пружин, ограничимся рассмотрением указанных случаев; подробная (специальная) теория вибраций пружин различных навивок и форм с произвольным распределением масс и внешних возбуждающих сил рассмотрена автором в отдельной работе.<sup>1)</sup>

## 6. Напряжения от вибраций.

Не трудно теперь определить напряжения, вызываемые вибрацией.

В самом деле, относительная деформация

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{i\omega A_i}{\alpha \sin \frac{i\omega}{\alpha} h} \cos \frac{i\omega}{\alpha} x \cos (i\omega t + \beta) \quad (136)$$

и следовательно напряжение кручения (пренебрегая углом подъема витков) будет

$$\tau_i \approx \frac{chR\partial u}{w\partial x}, \quad (137)$$

где  $w$  — момент сопротивления проволоки при кручении

$$\tau_i \approx \frac{i\omega chRA_i}{\alpha w \sin \frac{i\omega}{\alpha} h} \cos \frac{i\omega}{\alpha} x \cos (i\omega t + \beta). \quad (138)$$

Отсюда следует, что максимальное напряжение имеет место у закрепленного конца

$$x = 0.$$

В действительности, ввиду замыкания крайних витков, максимальные напряжения располагаются несколько выше (в пределах  $0,2 \div 1,0$  витка).

Суммарное напряжение очевидно будет:

$$\tau_c = \frac{ch\omega R}{\alpha w} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{iA_i}{\sin \frac{i\omega}{\alpha} h} \cos \frac{i\omega}{\alpha} x \cos (i\omega t + \beta_i) \quad (138')$$

Максимальные напряжения от колебаний при одной распространяющейся волне можно определить и другим путем

<sup>1)</sup> См. „Труды К. А. И.“ вып. 11.



Пусть  $v$  обозначает скорость, сообщаемую верхнему (свободному) концу пружины. За элементарный промежуток времени  $dt$  абсолютная деформация, очевидно, будет

$$v dt.$$

За этот же промежуток времени длина пружины, захваченная деформациями, будет

$$\alpha dt.$$

Таким образом относительная деформация

$$e = \frac{v}{\alpha} \quad (139)$$

и соответственно напряжения кручения будут

$$\tau = \frac{chvR}{\alpha \omega} \quad (140)$$

Начальное напряжение в пружине не влияет на напряжения от вибраций, так как скорость распространения упругой волны не зависит от напряжения.

Не трудно также показать, что на неподвижно закрепленном конце пружины при отсутствии замыкания витков относительная деформация, а следовательно и напряжение от колебаний вдвое больше соответствующих деформаций, вызываемых этой же волной в других частях пружины.

Действительно, в момент подхода упругой волны к закрепленному концу пружины возникает отраженная волна (см. фиг. 13), имеющая в месте закрепления тот же знак и величину, что и основная. Таким образом, относительная деформация в этом месте представится суммой двух одинаковых относительных деформаций

$$(e)_{x=0} = \frac{2v}{\alpha} \quad (141)$$

и следовательно

$$(\tau)_{x=0} = 2\tau_x. \quad (141')$$

Рассмотрим теперь суммарные перемещения, испытываемые какой-либо точкой пружины от основной и отраженных волн. Очевидно, не ограничивая общности рассуждений, можно рассматривать перемещения при возбуждении первой гармонической составляющей в таком виде:

$$u = A \sin \frac{\omega}{\alpha} x \cos \omega t.$$



Первая отраженная волна подойдет к рассматриваемой точке через промежуток времени

$$\frac{2h}{\alpha},$$

вторая через промежуток

$$\frac{4h}{\alpha}$$

и т. д.

Рассматривая начальный момент при  $t=0$ , очевидно, суммарное перемещение получим в таком виде

$$u = A \sin \frac{\omega}{\alpha} x \sum_{n=0}^n \cos \frac{2nh\omega}{\alpha}, \quad (142)$$

но

$$\sum_{n=0}^n \cos \frac{2nh\omega}{\alpha} = \frac{\sin(n+1)\frac{\omega h}{\alpha} \cos \frac{n\omega h}{\alpha}}{\sin \frac{\omega}{\alpha} h}$$

и следовательно

$$u = A \sin \frac{\omega}{\alpha} x \frac{\sin(n+1)\frac{\omega h}{\alpha} \cos \frac{n\omega h}{\alpha}}{\sin \frac{\omega h}{\alpha}}. \quad (143)$$

Если период возмущающей силы (движения) будет в  $p$  раз больше периода основной формы колебаний<sup>1)</sup>, т. е.

$$\frac{2ph}{\alpha} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (144)$$

то уравнение (143) принимает вид

$$u = A \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{p} \cos \frac{n\pi}{p}}{\sin \frac{\pi}{p}} \sin \frac{x}{h} \frac{\pi}{p}. \quad (145)$$

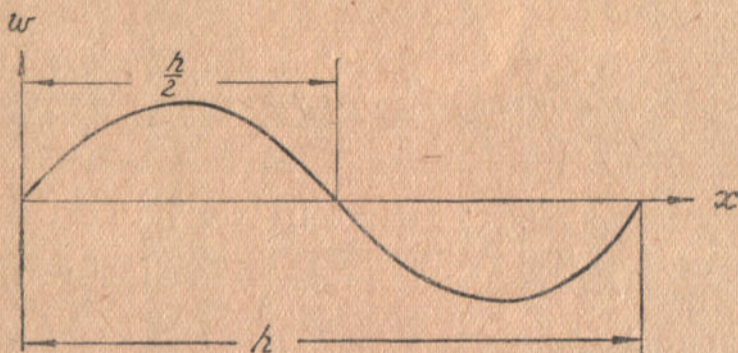
<sup>1)</sup> Предполагается  $p$  — конечное число.

Таким образом при

$$p = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m},$$

имеет место резонанс, при  $p > 2$  перемещения ограничены и не могут быть больше величины

$$u \leq A \sin \frac{\omega}{\alpha} x$$



Фиг. 16.

Из (125) выражение для относительной деформации приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\pi A}{hp} \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{p} \cos \frac{n}{p} \pi}{\sin \frac{\pi}{p}} \cos \frac{\pi x}{hp} \quad (146)$$

Следовательно, с увеличением  $p$ , относительная деформация уменьшается и при достаточно большом  $p$  может стать сколь угодно малой.

Действительно, при  $p \rightarrow \infty$ , что физически соответствует действию на пружину статической силы, относительные деформации (от колебаний), как это и следует, отсутствуют.

Таким образом, практически, для пружин с очень большой жесткостью и при низкой частоте возмущающей силы возникновение больших резонансных перемещений мало вероятно.

Рассмотрим теперь высшие формы колебаний, возможных в пружине. При второй форме ( $m=2$ ) колебания, очевидно, имеет место движение волн с разностью в фазе, соответствующей длине пружины.

Таким образом пружина колеблется в этом случае с удвоенной основной частотой и с узлом колебаний посередине (фиг. 16).



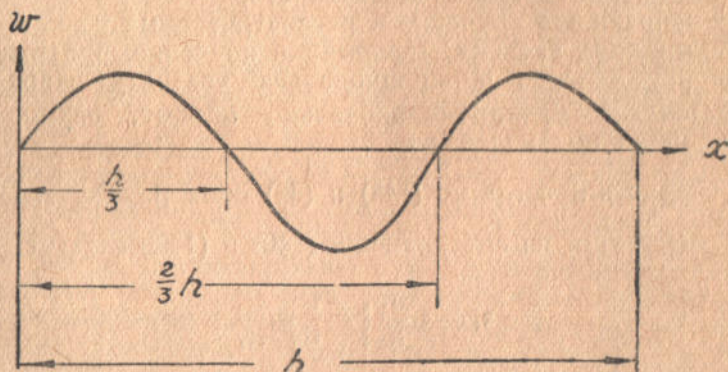
При третьей форме колебания ( $m=3$ ) частота в три раза больше основной, а узлы колебаний расположены на  $\frac{h}{3}$  от концов пружины (фиг. 17).

Таким образом, если считать конечные точки пружины также „узлами“, то общее количество узлов ( $k$ ) при колебаниях  $m$ -ой формы очевидно будет

$$k = 2m + 1 \quad (147)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

В узлах колебаний происходят наложения перемещений и деформаций аналогичные наложению их у закрепленного конца



Фиг. 17.

пружины и следовательно имеет место удвоение напряжений. Однако, в крайних точках пружины удвоение напряжений имеет место при любой форме колебаний, остальные же точки пружины могут испытывать это удвоение только при определенной форме колебаний.

Таким образом, крайние витки пружины находятся в этом смысле в значительно худших условиях.

Как показали многочисленные экспериментальные исследования (Swapp, Sawage, Lher) в пружинах, особенно в клапанных пружинах двигателей, опасные колебания второй и высших форм почти не имеют места.

Формула (140) для определения напряжений в пружине от распространяющейся „изолированной“ волны справедлива и для пружин любой формы и навивки. В этом случае, однако, следует рассматривать скорость распространения упругой волны не вдоль оси пружины, а вдоль оси проволоки.

Если обозначить через  $\bar{\alpha}$  скорость упругой волны вдоль оси проволоки, то легко получить

$$\bar{\alpha} = \frac{2\pi R i}{h} \alpha \quad (148)$$

Из условий равенства энергии деформации  $\bar{v}$ , приходящейся при колебании на единицу объема, в произвольных двух точках, следует для первой точки

$$\bar{v} = \mu \frac{\tau_1^2}{\alpha_1 d_1^2}, \quad (149)$$

для второй

$$\bar{v} = \mu \frac{\tau_2^2}{\alpha_2 d_2^2}, \quad (149')$$

где  $\mu$  — коэффициент пропорциональности,

$\tau$  — напряжения кручения в рассматриваемых точках.

В самом деле, энергия деформации кручения, приходящаяся на единицу объема, пропорциональна квадрату напряжения, а произведение  $\alpha \bar{d}_2$  — пропорционально объему, захваченному деформациями при колебании.

Но скорость  $\bar{\alpha}$  согласно (148) и (69) пропорциональна  $\frac{d}{R}$ .

Таким образом из соотношений (149) и (149') следует,

$$\tau_1 = \tau_2 \frac{d_1}{d_2} \sqrt{\frac{d^1 R_2}{d_2 R_1}} \quad (150)$$

Если под второй точкой разуметь крайнюю точку, на свободном конце пружины, имеющую напряжение от колебания

$$\tau_2 = 2 \frac{v C_0 R_0}{\alpha w_0} = 2\tau_0,$$

то, очевидно, для любой другой точки напряжение, вызываемое этим же колебанием, будет

$$\tau = \tau_0 \frac{d}{d_2} \sqrt{\frac{d}{d_2} \frac{R_2}{R}} \quad (151)$$

В заключение заметим, что напряжения от распространяющихся „изолированных“ волн в пружине, вообще говоря, зависят, согласно выражению (151), от ее геометрических элементов и являются функциями также скорости, сообщаемой свободному концу пружины и некоторых констант материала проволоки.



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВИБРАЦИЙ

1. Экспериментальные устройства

Экспериментальные исследования деформаций при произвольных статических нагрузках практически осуществляются довольно просто. Значительно сложнее вопрос экспериментального исследования вибраций пружин. В этом случае приходится обычно пользоваться измерительными устройствами, основанными на принципе стробоскопа. На фиг. 18 представлено одно из таких устройств.

Исследуемая пружина устанавливается в рабочем положении в специальных опорах, соответствующих опорам при действительной ее работе. Возбуждающий колебания кулачек (*d*) с соответствующим профилем сидит на весу на конце вала, приводимого в движение электромотором с достаточно точной регулировкой и снабженным для уменьшения неравномерности вращения тяжелым маховиком.

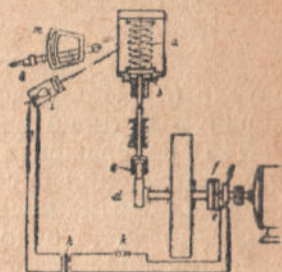
Место проволоки пружины, подвергающееся наблюдению, обычно отмечается насечкой или каким либо другим путем.

Насечка визируется при помощи подзорной трубы с угломером. Стробоскопическое освещение исследуемого элемента проволоки пружины осуществляется посредством неоновой лампы (*i*), получающей ток от батареи (*k*) через индукционную катушку (*h*) с прерывателем (*g*), приводимым в действие кулачком, сидящим на валу электромотора. Прерыватель связан с угломером (*l*), так что фаза освещения по отношению к кулачку может быть установлена по желанию наблюдателя.

При таком устройстве, наблюдаемая точка будет представляться наблюдателю в состоянии покоя и следовательно ее положение может быть достаточно точно определено при помощи подзорной трубы.

Так как между углами, отсчитываемыми на угломере, и перемещениями рассматриваемого элемента не трудно установить элементарное соотношение, то, откладывая перемещения в качестве ординат над соответствующими положениями кулачка прерывателя, которые можно принять за масштаб времени, получим кривую пути по времени наблюдаемого элемента проволоки пружины.

На фиг. 19 изображена такая кривая, снятая при резонансе с 9-ой гармоникой.

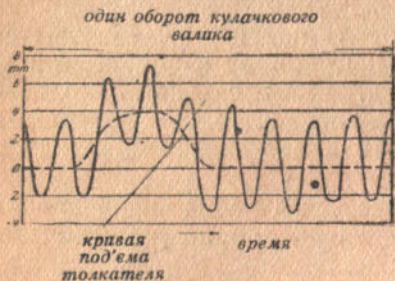


Фиг. 18.

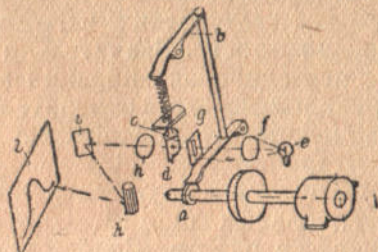


Очевидно, этим же прибором может быть определена и форма колебаний пружины.

На фиг. 20 представлено устройство прибора, при помощи которого кривая пути по времени может быть представлена в виде светящейся линии на матовой пластинке (*l*). При помощи диафрагмы (*d*) с отверстием, узкий луч света, посредством линз (*f*) и (*h*) и зеркала (*i*), отражается на вращающееся со скоростью, равной  $\frac{1}{8}$  скорости вращения кулачкового валика, восьмигранное



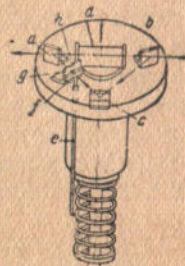
Фиг. 19.



Фиг. 20.

зеркало (*k*). Последнее вытягивает колебания светящейся точки в кривую пути по времени.

Для отображения движения точки любого витка пружины пользуются приспособлением, представленным на фиг. 21. С исследуемым местом витка пружины соединяется весьма тонкая, но достаточно жесткая проволока (*e*), проходящая через отверстие подставки и снабженная на другом конце золотником, скользящим по пластинке с вертикальной щелью. При помощи полупроницаемого зеркала (*b*) световой луч пропускается частью через, соединенную с толкателем диафрагму с круглым отверстием и далее через также полупроницаемое зер-



Фиг. 21.



Фиг. 22.

кало (*a*), на равномерно движущуюся пленку, а частью при помощи зеркала (*c*) на золотник (*f*) и далее через полупроницаемое зеркало на ту-же, движущуюся равномерно, пленку.

Таким образом, движение толкателя представится на пленке в виде светлой линии (*a*) (фиг. 22), а движение элемента витка пружины будет представляться граничными точками светлой области (*b*).



Следует, однако, заметить, что рассмотренное приспособление несколько снижает точность экспериментов, в силу некоторой инертности стержня с золотником.

Ограничиваясь, к сожалению, рассмотрением указанных экспериментальных устройств, отметим существование в настоящее время небезуспешных попыток создания оригинальных электромагнитных безинерционных устройств (*Swann, Sawage*), а также исследований по определению некоторых характеристик проволоки пружины при продолжительной работе на усталость (К. А. И). Последнее особенно важно, так как некоторые технологические процессы, в особенности процессы надлежавшей термообработки проволоки пружины, именно и должны быть проведены сообразно этим характеристикам.

## 2. Методы устранения вибраций

В зависимости от назначений и условий работы пружины, подвергающейся вибрациям, могут быть применены соответствующие способы их устранения.

Наметим некоторые общие практические приемы устранения вибраций. Принципиально имеются две возможности:

1. Соответствующим образом расположить частоты собственных колебаний по отношению к частотам гармоник возмущающей силы (например, в случае клапанных пружин двигателей, расположить собственные частоты так высоко, чтобы даже гармоники высших порядков профиля кулака, при заданном заглушении в пружине, не вызывали резонанса).

2. Поглотить колебания искусственным путем.

Рассмотрим подробнее указанные возможности.

В первом случае устранить опасные вибрации в пружине можно варьируя геометрическими элементами пружины (изменяя диаметр проволоки, диаметр пружины, число витков и. д.).

Практически, однако, по конструктивным или эксплуатационным и другим соображениям, варьирование геометрическими элементами пружины бывает ограничено весьма узкими пределами и не приводит, следовательно, к эффективным результатам.

К этому же способу устранения вибраций следует отнести постановку нескольких соответствующих пружин вместо одной и создание некоторых специальных пружин.

В этом случае возможности более широки. Так, например, весьма удачной следует признать клапанную пружину *Packard'a*, состоящую из двух, закрученных на подобие двух-ходового винта, пружин, концы которых вставлены в специальные обоймы.

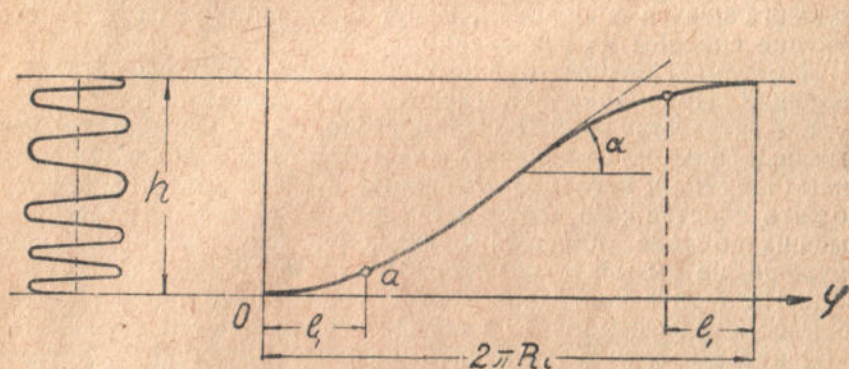
В другой конструкции *Packard* предложил поставить несколько небольших пружин, расположенных вокруг толкателя клапана, достигая этим весьма высоких частот их собственных колебаний.

Устранение вибраций искусственным путем является особо интересным. Этот метод располагает значительно более широкими возможностями, чем первый.



Одним из видов искусственного поглощения колебаний является постановка специальных демпферов (выполненных, например, в виде системы пружинящих листов, прижимающихся к пружине, вызывающих заглушающее вибрации трение). Однако, такого рода заглушающие устройства в большинстве случаев практически себя не оправдали, ввиду возможных повреждений самой пружины. Возможно глушение вибраций путем введения в систему негармонических элементов, подкладывая, например, под неподвижный конец пружины прокладки из материала с явно выраженными демпфирующими свойствами.

Вызвать заглушающее вибрации трение можно также воспользовавшись существованием, при сжатии пружины, поворота конечных витков относительно ее оси, если создать соответствующие опорные поверхности.



Фиг. 23.

Наконец, весьма интересным и эффективным в практическом отношении, как показала эксплуатация, является так называемая „антирезонансная“ пружина.

В этом случае пружина имеет переменный шаг, причем конечные витки имеют меньший угол подъема, чем средние (фиг. 23).

При подходе упругой периодической волны к крайним виткам с уменьшающимся углом подъема, последние начнут замыкаться, резко уменьшая этим число активных витков и, следовательно, повышая жесткость пружины. Чем большие перемещения будут испытывать витки пружины (при подходе, например, к области резонанса), тем сильнее будет уменьшаться число активных витков, повышая жесткость пружины и частоту собственных колебаний, автоматически отодвигая этим самым область резонанса.

В этом случае жесткость пружины меняется с изменением перемещений, испытываемых элементами пружины и, следовательно, имеют место псевдогармонические колебания.

Уменьшение угла подъема, как показали практические исследования, для клапанных пружин двигателей, должно начинаться примерно за 1,2—2 витка до конца пружины (фиг. 23).



В каждом конкретном случае размер ( $l_1$ ) и форма кривой ( $oa$ )—развернутой оси „антирезонансной“ пружины могут быть примерно определены из следующих элементарных соображений: область резонанса такой пружины находится между частотами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , приобретаемыми ею при абсолютно не замкнутых витках и при замкнувшихся до точки ( $a$ ) витках. Наиболее опасная частота будет лежать, по всей вероятности, в точках, недалеко удаленных от середины этой области.

Таким образом, ни одна из опасных гармоник возмущающей силы не должна вызывать резонанса по крайней мере в области близкой к указанной частоте. Это и дает возможность весьма приближенно оценить указанный размер  $l_1$  и форму ( $oa$ ).

Практически, для клапанных пружин быстроходных двигателей эта оценка и приводит к указанной цифре в 1,2—2 замкнувшихся витка у концов пружины при максимальном подъеме клапана. В заключение заметим, что вопрос правильного проектирования пружины должен быть неразрывно связан с специфическими технологическими процессами производства, в первую очередь с процессом и способом термообработки проволоки пружины.

Dans ce travail on envisage la théorie élémentaire des ressorts-vis, fondée sur la théorie générale des pivots minces, élastiques premièrement à ligne courbée, élaborée Bernoulli, Kirchhoff, Clebsch, Larmor, Volterra, St. Venant, Mises et les autres.

Au début on expose la statique des ressorts cylindriques, coniques et dévidés arbitralement, ensuite la dynamique (théorie des vibrations) de ces ressorts et enfin les procédés de l'examen expérimental des vibrations.

A l'examen de vibrations des ressorts le procédé est indiqué donnant possibilité approximativement, mais avec précision suffisante pour la pratique, définir les fréquences cherchées des vibrations propres des ressorts dévidés arbitralement.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bernoulli, *Nouv. Mém.* Berlin (1783).
2. S. Poisson, *Corresp. sur l'Ecole polyt.* t. 3 (1816).
3. S. Poisson, „*Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides*“ (1829).
4. G. Kirchhoff, *Vorles. über Mechanik.*
5. I. Binet, *Journ. de l'Ecole polyt.* t. 10 (1814).
6. O. Massotti, *Mem. di mat. e di fis. della Soc. Ital.* t. 18 (1820).
7. C. Navier, *Bulletin des Sciences à la Société Philomatique* (1824).
8. L. Pochhammer, *Journ. f. Math. (Creel)* t. 10 (1831).
9. I. Giulio, *Mem. della acad. della Sc. di Torino*, t. 4 (1842).
10. S. Venant, *C. R.* t. 17 (1843).
11. C. Caspari, *Math. Enzykl.*, t. VI.
12. E. Phillips, *Ann. d. mines*, t. 20 (1861).
13. W. Thomson and P. Tait, *Natural Philosophy*, (1867).
14. A. Clebsch, *Theorie der Elastizität fester Körper* (1862).
15. W. Thomson u. P. Tait, *Handb. d. theor. Phys.* t. 1, 2.
16. I. Bussinesq, *Journ. de Math.* t. 16 (1871).
17. I. Larmor, *Lond. Math. Soc. Proc.*, t. 15 (1884).
18. A. Castigliano, *Theorie der Biegungs-und Torsionsfedern.*, (1888).



19. A. Basset, Lond. Math. Soc. Proc., t. 23 (1892), Amer. Journ. of math., t. 17.
20. H. Resal, C. R. t. 114, (1892).
21. V. Volterra, Atti di Torino, t. 30 (1895).
22. A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, t. 3 (1897).
23. I. Michell, Lond. Math. Soc. Proc., t. 31 (1899).
24. V. Meyer, Zeitschr. f. Ver. d. Jng. t. 44 (1900).
25. P. Fröhlich, Die dynam. Vorgänge in Zilindr. Schraubenfedern unter besond. Berücks. d. Massendruck kompensation. Z. Math. u. Phys. Bd 56 (1908).
26. F. Magg, Die Steuerungen der Verbrennungskraftmaschinen, (1914).
27. F. Magg, Zehwungungerschehnungen in Zilindr. Schrauben federn u. Gesetze des Schlagens von Ventilsteuerungen. Verh. Ver. Bef. Gewerbfl. Bd 91 (1912).
28. I. Tanaka, Zeitsch. f. a. Math. u. Mech. t. 2 (1922).
29. W. Hort, Schwingungslehre, Berlin, 1922.
30. F. Schleicher, Zeitsch. f. a. Math. u. Mech. t. 4 (1924).
31. R. Mises, Zeitsch. f. a. Math. u. Mech. t. 4 (1924).
32. L. Woolson, Recent developments in aircraft engines. I. Soc. Autom. Eng., v. 16 (1925).
33. A. Röver, Zeitschr. f. a. Math. u. Mech. t. 4 (1924).
34. A. Swann u. Savage, The Surging of engine valve springs Special — Report N 10, London (1925).
35. A. Swann, The Automobile Engineer, (Aug. 1926).
36. W. Donkin u. H. Clark, „S. A. E.“ (Jun. 1927).
37. A. Moorhouse u. W. Griswold, Designing the dual valve spring „S. A. E.“, v. 23 (1928).
38. W. Donkin u. H. Clark, Elektrictelementer and valve spring surge, „S. A. E.“ v. 24 (Mar. 1929)
39. T. Jehle u. W. Spiller, Idyosyncrasies of valve mechanisms and their causes. „S. A. E.“ t. 24 (Feb. 1929).
40. P. Held, Alloys superior to carbone Steel in Endurance test of valve springs. Automotive Industries, v. 67, № 22 (1932).
41. E. Lehr, Swingungen in Ventilledern. V. D. I. (1933, № 18).
42. Dick, Surging in helical valve Springs. The Journal of the Royal Aeronautical Soc. (Jun. 1933).
43. D-r Marti. Technical Review „Sulzer“ № 2, 1936.