

# О КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЕЙ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ДЕЙСТВИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИ МЕНЯЮЩИХСЯ ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ

## ВВЕДЕНИЕ

Весьма важные и интересные в инженерной практике вопросы вибрации тонких стержней, подверженных действию периодически меняющихся продольных сил, изучены сравнительно мало. Задачи в этом случае сводятся к изучению уравнений квазигармонических колебаний, исследованию и установлению областей неустойчивого колебательного движения.

Актуальные в настоящее время вопросы исследования вибраций подмоторных рам аэропланов, шатунов быстроходных двигателей и вообще вибрации сжатых и растянутых стержней в строительной механике сооружений и в общем машиностроении требуют изучения вынужденных колебаний стоек в самом общем виде.

В настоящей статье мы ограничимся рассмотрением вибраций стоек, применительно к некоторым частным случаям.

## I. Основное дифференциальное уравнение

Рассмотрим сначала задачу при достаточно общих условиях. Пусть продольная периодическая сила с периодом

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

приложена к одному из концов прямого тонкого стержня переменной жесткости (фиг. 1).

Если обозначить через

$\rho(x)$  — линейную массу стержня,

$EI(x)$  — жесткость при изгибе,

$u(x, t)$  — поперечное перемещение рассматриваемого элемента, то можно записать очевидное равенство

$$EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = M - M_I - M_P,$$

где  $M$ ,  $M_I$  и  $M_P$  — соответствующие изгибающие моменты заземления, от сил инерции и продольной силы.

Дифференцируя дважды и помня, что

$$\frac{\partial^2 M_j}{\partial x^2} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 M_p}{\partial x^2} = P(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 0,$$

получим окончательно

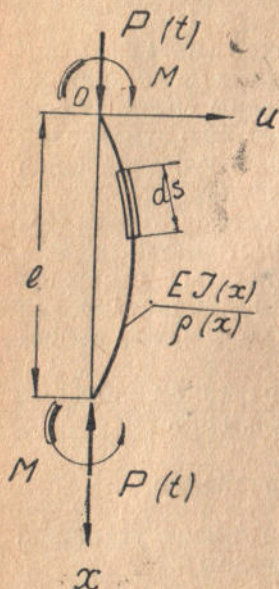
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + P(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) является основным в излагаемой теории.

Если стержень постоянного поперечного сечения, то уравнение (1) переписывается так:

$$EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + P(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Уравнение (2) является основным в теории колебаний тонких стержней постоянного поперечного сечения. Постоянные интегрирования уравнений (1) и (2) определяются по граничным условиям, соответствующим способу закрепления концов. Рассмотрим некоторые частные случаи.



Фиг. 1.

## 2. Колебания стержня с шарнирными концами

В этом случае граничные условия для основного уравнения

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + P(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} (u)_{x=0} &= 0; & \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x=0} &= 0; \\ (u)_{x=l} &= 0; & \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x=l} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



Совершенно ясно, что уравнению (2) можно удовлетворить соответственно граничным условиям (3), положив

$$u = w(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (4)$$

где  $w(t)$  — искомая функция времени, определяемая из уравнения

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{EIn^4\pi^4}{\rho l^4} \left[ 1 - \frac{P(t)}{\frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}} \right] w = 0, \quad (5)$$

а

$$n — \text{целое число,}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Замечая, что

$$\frac{n^2\pi^2 EI}{l^2} = P_{kn}$$

— критическая Эйлера сила  $n$ -го порядка, а

$$\rho l = \frac{G}{g}$$

— масса стержня, запишем уравнение (5) в таком виде:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{n^2 g \pi^2}{l} \frac{P_{kn}}{G} \left[ 1 - \frac{P(t)}{P_{kn}} \right] w = 0. \quad (6)$$

Введем новую переменную

$$t = \frac{\varphi}{k}$$

$$k^2 \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \frac{n^2 g \pi^2}{l} \frac{P_{kn}}{G} \left[ 1 - \frac{P\left(\frac{\varphi}{k}\right)}{P_{kn}} \right] w = 0. \quad (6')$$

Представим выражение

$$1 - \frac{P\left(\frac{\varphi}{k}\right)}{P_{kn}}$$

в виде ряда

$$1 - \frac{P\left(\frac{\varphi}{k}\right)}{P_{kn}} = a^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=0}^p \mu_{2p}^{(i)} [\alpha_{2p}^{(i)} \cos 2i\varphi + \mu_{2p+1}^{(i)} \cos (2i+1)\varphi], \quad (7)$$

<sup>1</sup> Таким образом предполагается, что основная форма колебаний мало отличается от упругой линии, которую приобретает стойка при нагружении ее продольной постоянной силой.

где  $\mu$  — некоторый малый, положительный параметр,  $\alpha_{2p}^{(i)}$  и  $\alpha_{2p+1}^{(i)}$  — соответствующие коэффициенты при  $\cos 2i\varphi$  и  $\cos (2i+1)\varphi$ .

Предполагается

$$\alpha_0^{(0)} = 1.$$

Таким образом уравнение (6') примет вид:

$$k^2 \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \frac{n^2 g \pi^2}{l} \frac{P_{kn}}{G} a^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=0}^p \mu^{2p} [\alpha_{2p}^{(i)} \cos 2i\varphi + \alpha_{2p+1}^{(i)} \cos (2i+1)\varphi] w = 0 \quad (8)$$

Полученное уравнение представляет собой известное уравнение Хилля.

Для определения периодических решений (свободных от секулярных членов) этого уравнения, с периодом  $2\pi$  и  $4\pi$ , т. е. решений, соответствующих, согласно общей теории дифференциальных уравнений<sup>1)</sup>, критическим областям частоты  $k$  возмущающей силы, представим решение  $w$  и частоту  $k$  в виде степенных рядов, разложение в которые производится по степеням общего малого положительного параметра  $\mu$

$$w = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i w_i \quad (9)$$

$$k^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i k_i^2, \quad (10)$$

где функции  $w_i$  ( $i=0, 1, 2, 3, \dots$ )<sup>1</sup> определяются следующей бесконечной системой линейных дифференциальных уравнений

$$k_0^2 \frac{d^2 w_0}{d\varphi^2} + \lambda_0^2 w_0 = 0$$

$$k_0^2 \frac{d^2 w_m}{d\varphi^2} + \lambda_0^2 w_m + \sum_{i=1}^m \left( \frac{d^2 w_{m-i}}{d\varphi^2} \sum_{p=0}^k k_p k_{i-p} + \tau_i(\varphi) w_{m-i} \right) = 0. \quad (11)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

В системе (11)

$$\lambda_0^2 = \frac{\pi^2 g n^2 P_{kn}}{l G} a^2, \quad (12)$$

<sup>1</sup> См., например, I. Horn. Gewöhnliche Differentialgleichungen, 1927. s. 94—100.



а функция  $\tau_k(\varphi)$  при  $k$  четном,  $k = 2n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

$$\tau_{2n} = \lambda_0^2 \sum_{i=0}^n \alpha_{2n}^{(i)} \cos 2i\varphi \quad (13)$$

и при  $k$  — нечетном,  $k = 2n + 1$

$$\tau_{2n+1} = \lambda_0^2 \sum_{i=0}^n \alpha_{2n+1}^{(i)} \cos (2i + 1)\varphi \quad (14)$$

Не приводя длинного ряда преобразований, принципиально не представляющих затруднений, заметим, что определяя из полученной системы функции  $w_0, w_1, w_2, \dots$  с условием отсутствия секулярных членов, мы пришли к следующему заключению: при достаточно малом  $\mu$  наиболее опасной и широкой областью резонанса является область значений частоты  $k$  возмущающей силы, определяемая пределами:

$$\lambda_0^{(0)} - \frac{\alpha_1^{(0)}}{4} \mu \lambda_0^{(0)} + \left( \frac{\alpha_2^{(0)}}{2} - \frac{\alpha_1^{(0)2}}{64} \right) \mu^2 \lambda_0^{(0)} + \dots < k^{(0)} < \lambda_0^{(0)} + \frac{\alpha_1^{(0)}}{4} \mu \lambda_0 +$$

$$+ \left( \frac{\alpha_2^{(0)}}{2} - \frac{\alpha_1^{(0)2}}{64} \right) \mu^2 \lambda_0^{(0)} + \dots \quad (15)$$

$$\lambda_0^{(0)} = 2\lambda_0. \quad (15')$$

Следующей высшей, более узкой областью резонанса будет область, определяемая границами:

$$\lambda_0^{(1)} + \left( \frac{\alpha_2^{(1)}}{4} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{2} - \frac{5\alpha_1^{(0)2}}{24} \right) \mu^2 \lambda_0^{(1)} + \dots < k^{(1)} < \lambda_0^{(1)} +$$

$$+ \left( \frac{\alpha_2^{(0)}}{2} + \frac{\alpha_1^{(0)2}}{24} - \frac{\alpha_2^{(1)}}{4} \right) \mu^2 \lambda_0^{(1)} + \dots \quad (16)$$

$$\lambda_0^{(1)} = \lambda_0 \quad (16')$$

.....

и т. д.

Заметим, что с увеличением порядка областей резонанса, ширина их уменьшается, так как границы областей в этих случаях определяются высшими степенями  $\mu$ , а в пределе, для областей с достаточно высоким порядком, практически полу-

чаются изолированные критические точки, определяемые выражением:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[ \frac{k^{(i)}}{\lambda_0^{(i)}} \right] = 1 + \left[ \frac{\alpha_2^{(0)}}{2} - \frac{\alpha_1^{(0)2} i^2}{4(4i^2 - 1)} \right] \mu^2 + \dots \quad (17)$$

$$\lambda_0^{(i)} = \frac{2\lambda_0}{i} \quad (17')$$

или

$$k^{(i)} \approx \left[ 1 + \left( \frac{\alpha_2^{(0)}}{2} - \frac{\alpha_1^{(0)2}}{16} \right) \mu^2 + \dots \right] \lambda_0^{(i)} \quad (18)$$

и, следовательно, для областей достаточно высокого порядка и при достаточно малом  $\mu$ , можно положить

$$k^{(i)} \approx \left[ 1 + \left( \frac{\alpha_2^{(0)}}{2} - \frac{\alpha_1^{(0)2}}{16} \right) \mu^2 \right] \lambda_0^{(i)} \quad (18')$$

$$\lambda_0^{(i)} = \frac{2\lambda_0}{i}$$

Не трудно теперь доказать весьма интересное положение: критические области различных порядков, при достаточно малом  $\mu$ , располагаются по крайней мере в интервале

$$\lambda_0^{(0)} \left[ 1 - \frac{P(\varphi)_{\max}}{P_{kn}} \right]^{\frac{1}{2}} < k^{(i)} < \lambda_0^{(0)} \left[ 1 - \frac{P(\varphi)_{\min}}{P_{kn}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

Иными словами: резонансные частоты располагаются наверное между частотами, которые приобретает стержень при статическом действии сил  $P_{\min}(\varphi)$  и  $P_{\max}(\varphi)$ .

В самом деле, в силу очевидных неравенств

$$\lambda_0^{(0)} \left[ 1 + \frac{\alpha_2^{(0)}}{4} \mu + \dots \right] < \lambda_0^{(0)} \sqrt{1 - \frac{P(\varphi)_{\min}}{P_{kn}}} \quad (19')$$

$$\lambda_0^{(0)} \left[ 1 - \frac{\alpha_1^{(0)}}{4} \mu + \dots \right] > \lambda_0^{(0)} \sqrt{1 - \frac{P(\varphi)_{\max}}{P_{kn}}} \quad (19'')$$

справедливость сделанного заключения становится очевидной.

### 3. Оценка полученных формул

Не трудно теперь оценить погрешность, совершаемую при опускании в формулах (15), (16), (17) членов, содержащих  $\mu$  в третьей и более высоких степенях.



Из общей теории уравнений математической физики известно, что при рассмотрении максимально-минимальных свойств собственных значений для задач типа Sturm-Liouville'я, можно получить выражение асимптотической оценки.

Таким образом, если дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx} \left( \rho \frac{dy}{dx} \right) - qy + \lambda^2 \rho y = 0$$

имеет граничные условия

$$y_{(0)} = y(2\pi), \quad y'_{(0)} = y'(2\pi),$$

то имеет место следующая асимптотическая формула: <sup>1)</sup>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{\lambda_n} \right)^2 = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \left( \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\rho(x)}{p(x)}} dx \right)^2$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{\lambda_n} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\rho(x)}{p(x)}} dx$$

В рассматриваемом случае

$$\frac{n}{\lambda_n} = \frac{k^{(i)}}{\lambda_0^{(i)}}$$

$$p(x) = 1; \quad q = 0;$$

$$\rho(x) = 1 - \frac{P(\varphi)}{P_{kn}}$$

и следовательно

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[ \frac{k^{(i)}}{\lambda_0^{(i)}} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{P(\varphi)}{P_{kn}}} d\varphi \quad (20)$$

или

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \left[ \frac{k^{(i)}}{\lambda_0^{(i)}} \right] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\rho=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\rho} \mu^{2\rho} \left[ \alpha_{2\rho}^{(i)} \cos 2i\varphi + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu \alpha_{2\rho+1}^{(i)} \cos (2i+1)\varphi \right] \right\}^{\frac{1}{2}} d\varphi = 1 + \\ &+ \left( \frac{\alpha_2^{(0)}}{2} - \frac{\alpha_1^{(0)2}}{16} \right) \mu^2 + \Delta(\mu^{2\rho}, \mu^{2\rho+1}, \alpha_{2\rho}^{(i)}, \alpha_{2\rho+1}^{(i)}), \end{aligned} \quad (20')$$

<sup>1)</sup> См. Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, т. I, стр. 392—393. Г.Т.Т.И. 1933.

где выражение

$$\Delta [\mu^{2p}, \mu^{2p+1}, \alpha_{2p}^{(i)}, \alpha_{2p+1}^{(i)}] = \Delta.$$

представляет относительную погрешность, получаемую в результате опускания членов с  $\mu^3$  и высшими степенями  $\mu$  в разложении (17).

Таким образом

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=0}^p \mu^{2p} \left[ \alpha_{2p}^{(i)} \cos 2i\varphi + \alpha_{2p+1}^{(i)} \cos (2i+1)\varphi \right] \right]^{\frac{1}{2}} d\varphi - 1 - \left( \frac{\alpha_2^{(0)}}{2} - \frac{\alpha_1^{(0)2}}{16} \right) \mu^2 \quad (21)$$

или

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{P(\varphi)}{P_{kn}}} d\varphi - 1 - \left( \frac{\alpha_2^{(0)}}{2} - \frac{\alpha_1^{(0)2}}{16} \right) \mu^2 \quad (21')$$

Относительная погрешность  $\Delta_1$  относительно  $k^{(i)}$  в разложении (17), очевидно, будет

$$\Delta_1 = 1 - \frac{1 + \left( \frac{\alpha_2^{(0)}}{2} - \frac{\alpha_1^{(0)2}}{16} \right) \mu^2}{2\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{P(\varphi)}{P_{kn}}} d\varphi} \quad (22)$$

или

$$\Delta_1 = 1 - \frac{1 + \left( \frac{\alpha_2^{(0)}}{2} - \frac{\alpha_1^{(0)2}}{16} \right) \mu^2}{\int_0^{2\pi} \left[ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=0}^p \mu^{2p} \left[ \alpha_{2p}^{(i)} \cos 2i\varphi + \alpha_{2p+1}^{(i)} \cos (2i+1)\varphi \right] \right]^{\frac{1}{2}} d\varphi} \quad (22')$$

Для примера рассмотрим колебания стержня, подверженного действию периодической силы, изменяющейся по закону

$$P(t) = P_0 + P_1 \cos kt.$$

В этом случае, следует положить:

$$1 - \frac{P(t)}{P_{kn}} = [\alpha_0^{(0)} + \mu \alpha_1^{(0)} \cos \varphi] a^2$$

$$\alpha_0^{(0)} = 1; \quad a^2 = 1 - \frac{P_0}{P_{kn}};$$



$$\alpha_1^{(0)} = \frac{P_{kn}}{P_{kn} - P_0};$$

$$\mu = \frac{P_1}{P_{kn}} \ll 1;$$

$$\alpha_2^{(0)} = \alpha_2^{(1)} = \dots = 0.$$

И следовательно область резонанса определится следующими значениями частоты  $k$  возмущающей силы:

$$2\pi n \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 - \frac{P_0}{P_{kn}}\right) \frac{P_{kn}}{G}} \left[ 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{P_1}{P_{kn} - P_0}\right) - \frac{1}{64} \left(\frac{P_1}{P_{kn} - P_0}\right)^2 - \dots \right] < k^{(0)} < \\ < 2\pi n \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 - \frac{P_0}{P_{kn}}\right) \frac{P_{kn}}{G}} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{P_1}{P_{kn} - P_0}\right) - \frac{1}{64} \left(\frac{P_1}{P_{kn} - P_0}\right)^2 + \dots \right] \quad (23)$$

Если периодическая сила имеет вид

$$P(t) = P_1 \cdot \cos kt,$$

то

$$P_0 = 0$$

и следовательно область резонанса представится таким выражением:

$$2\pi n \sqrt{\frac{g}{l} \frac{P_{kn}}{G}} \left[ 1 - \frac{1}{4} \frac{P_1}{P_{kn}} - \frac{1}{64} \left(\frac{P_1}{P_{kn}}\right)^2 - \dots \right] < k^{(0)} < \\ < 2\pi n \sqrt{\frac{g}{l} \cdot \frac{P_{kn}}{G}} \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{P_1}{P_{kn}} - \frac{1}{64} \left(\frac{P_1}{P_{kn}}\right)^2 + \dots \right]. \quad (24)$$

Если стержень сжат постоянной силой, то

$$P_1 = 0$$

и следовательно из (23) получим:

$$k = 2\pi n \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 - \frac{P_0}{P_{kn}}\right) \cdot \frac{P_{kn}}{G}}, \quad (25)$$

т. е. в этом случае резонансная область стягивается в изолированную точку.

Для растянутого постоянной силой  $P_0$  стержня,

$$P(t) = -P_0$$

и следовательно

$$k = 2\pi n \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 + \frac{P_0}{P_{kn}}\right) \frac{P_{kn}}{G}} \quad (26)$$

Полученные выражения (25) и (26) для  $k$ , очевидно, представляют частоты собственных колебаний сжатых и растянутых стоек.

Для областей резонанса высшего порядка с достаточной степенью точности можно положить существование изолированных критических точек:

$$k^{(i)} \approx \frac{2n\pi}{i} \left[ 1 - \frac{1}{16} \left( \frac{P_1}{P_{kn} - P_0} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{g}{l} \left( 1 - \frac{P_0}{P_{kn}} \right) \frac{P_{kn}}{G}} \quad (27)$$

Оценим относительную погрешность в полученных формулах:

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \mu \alpha_1^{(0)} \cos \varphi} d\varphi + \left[ \frac{\alpha_1^{(0)2}}{16} \right] \mu^2 - 1.$$

Воспользовавшись разложением

$$\sqrt{1 - \mu \alpha_1^{(0)} \cos \varphi} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k \alpha_1^{(0)k}}{2^k k!} \cos^k \varphi,$$

получим

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \left( 2\pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k \alpha_1^{(0)k}}{2^k k!} \int_0^{2\pi} \cos^k \varphi d\varphi \right) + \left[ \frac{\alpha_1^{(0)2}}{16} \right] \mu^2 - 1.$$

Вспоминая, что

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} \varphi d\varphi = 0$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

и

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \varphi d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} 2\pi,$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

закключаем

$$\Delta = \left[ \frac{\alpha_1^{(0)2}}{16} \right] \mu^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{8^k \cdot (2k)! k!} \mu^{2k} \alpha_1^{(0)2k}$$

или

$$\Delta = - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{8^k \cdot (2k)! k!} \left( \frac{P_1}{P_{kn} - P_0} \right)^{2k} \quad (28)$$

$$\Delta = - \frac{1}{1024} \left( \frac{P_1}{P_{kn} - P_0} \right)^4 - \frac{1}{147456} \left( \frac{P_1}{P_{kn} - P_0} \right)^6 - \dots \quad (28')$$



Таким образом, при поставленном условии

$$P_0 + P_1 < P_{kn}$$

$$\left( \frac{P_1}{P_{kn} - P_0} < 1 \right),$$

абсолютная погрешность в полученных формулах не превысит

$$\bar{\Delta} \approx -0,001 \lambda_0^{(i)} \quad (28'')$$

или

$$\Delta = \left| \frac{\bar{\Delta}}{\lambda_0^{(i)}} \right| \approx 0,1\% \quad (28''')$$

т. е. точность полученных разложений вполне достаточна для каких угодно практических приложений.

#### 4. Колебания стержня с одним защемленным, а другим свободным концами

В этом случае граничные условия для основного уравнения (2) принимают вид (фиг. 2)

$$\left. \begin{aligned} (u)_{x=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = 0; \quad (u)_{x=l} = w(t) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Аналогично предыдущему, уравнению (2) можно удовлетворить соответственно граничным условиям (19), положив

$$u = w(t) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad (30)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

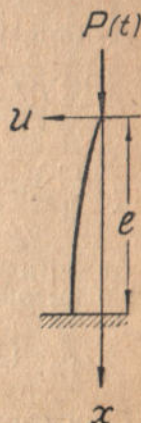
где  $w(t)$  — искомая функция времени  $t$ , определяемая из уравнения

$$k^2 \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \frac{n^4 (2n-1)^4 EI}{16\rho l^4} \left[ 1 - \frac{P\left(\frac{\varphi}{k}\right)}{(2n+1)^2 \pi^2 EI} \right] w = 0, \quad (31)$$

а  $k$ , как и раньше, частота возмущающей силы.

Замечая, что

$$\frac{(2n+1)^2 \pi^2 EI}{4l^2} = P_{kn}$$



Фиг. 2.

— критическая Эйлера сила  $n$ -го порядка, а

$$\rho l = \frac{G}{g}$$

— масса стержня, запишем уравнение (31) в таком виде

$$k^2 \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \frac{(2n+1)^2 \pi^2 g}{4l} \frac{P_{kn}}{G} \left[ 1 - \frac{P \left( \frac{\varphi}{k} \right)}{P_{kn}} \right] \quad (31')$$

Уравнение (31') отличается от уравнения (6') только множителем  $\frac{(2n+1)^2}{4}$  при функции  $w(t)$ , стоящим вместо  $n^2$ .

Следовательно, наиболее опасная и широкая область резонанса определится следующими значениями частоты  $k$  возмущающей силы

$$(2n+1)\pi \sqrt{\frac{g}{l} \left( 1 - \frac{P_0}{P_{kn}} \right) \frac{P_{kn}}{G} \left[ 1 - \frac{1}{4} \frac{P_1}{P_{kn} - P_0} - \frac{1}{64} \left( \frac{P_1}{P_{kn} - P_0} \right)^2 - \dots \right]} < k^{(0)} <$$

$$< (2n+1)\pi \sqrt{\frac{g}{l} \left( 1 - \frac{P_0}{P_{kn}} \right) \frac{P_{kn}}{G} \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{P_1}{P_{kn} - P_0} - \frac{1}{64} \left( \frac{P_1}{P_{kn} - P_0} \right)^2 + \dots \right]}.$$

Для следующей области

$$\frac{2n+1}{2} \pi \sqrt{\frac{g}{l} \left( 1 - \frac{P_0}{P_{kn}} \right) \frac{P_{kn}}{G} \left[ 1 - \frac{5}{24} \left( \frac{P_1}{P_{kn} - P_0} \right)^2 + \dots \right]} < k^{(1)} <$$

$$< \frac{2n+1}{2} \pi \sqrt{\frac{g}{l} \left( 1 - \frac{P_0}{P_{kn}} \right) \frac{P_{kn}}{G} \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{P_1}{P_{kn} - P_0} \right)^2 + \dots \right]} \quad (32')$$

и т. д.

Аналогично предыдущим разложениям для областей достаточно высоких порядков будем иметь

$$k^{(i)} \approx \frac{(2n+1)\pi}{i} \left[ 1 - \frac{1}{16} \left( \frac{P_1}{P_{kn} - P_0} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{g}{l} \left( 1 - \frac{P_0}{P_{kn}} \right) \frac{P_{kn}}{G}} \quad (33)$$

Если периодическая сила имеет вид

$$P(t) = P_1 \cos kt$$

$$P_0 = 0$$

и следовательно область резонанса представится таким выражением

$$(2n+1)\pi \sqrt{\frac{g}{l} \frac{P_{kn}}{G} \left[ 1 - \frac{1}{4} \frac{P_1}{P_{kn}} - \frac{1}{64} \left( \frac{P_1}{P_{kn}} \right)^2 - \dots \right]} < k^{(0)} <$$

$$< (2n+1)\pi \sqrt{\frac{g}{l} \frac{P_{kn}}{G} \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{P_1}{P_{kn}} - \frac{1}{64} \left( \frac{P_1}{P_{kn}} \right)^2 + \dots \right]} \quad (34)$$



Для сжатых и растянутых стержней, вместо областей мы получим изолированные точки

$$k = (2n + 1) \pi \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 - \frac{P_0}{P_{kn}}\right) \frac{P_{kn}}{G}}. \quad (35)$$

и

$$k = (2n + 1) \pi \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 + \frac{P_0}{P_{kn}}\right) \frac{P_{kn}}{G}}. \quad (35')$$

Выражения (35) и (35') для  $k$ , очевидно, представляют низшие частоты собственных колебаний сжатых и растянутых постоянными силами стержней.

Не трудно соответственно (28) определить погрешность, совершаемую при опускании в разложении (33) членов, содержащих  $\rho^3$  и высшие степени  $\rho$ .

Очевидно, в этом случае относительная погрешность такая же, как и в предыдущем случае.

Апрель 1937 г.

Dans l'article présent sont envisagées les vibrations quasi-harmoniques de pivots droits et minces, soumis à l'action des forces longitudinales changeant périodiquement.

On a défini les domaines critiques de l'instabilité dynamique de différents ordres par procès itératif des approximations successives.



## О РАСЧЕТЕ ШАТУНОВ БЫСТРОХОДНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Существующие в настоящее время приемы расчета прочности многих деталей быстроходных двигателей внутреннего сгорания (коленчатых валов, шатунов, пружин и т. д.) являются в той или иной степени некоторым приближением к строгим, но значительно более сложным приемам и методам точного расчета. Однако, в большинстве случаев остается неизвестной оценка совершаемой погрешности как в количественном, так и в качественном, в особенности, отношениях (напр. проблема „эквивалентного диска“ в расчете коленчатых валов на крутильные колебания, динамическая устойчивость шатунов и т. п.), что естественно может привести к результатам грубо приближенным, а иногда и просто неверным.

Как на более простой пример такого рода приближенного расчета, очень часто приводящего к неверным выводам, следует указать на динамический расчет шатунов быстроходных двигателей.

В самом деле, вместо того, чтобы рассматривать динамическую устойчивость шатунов — в существующем расчете рассматривается принципиально иная, не имеющая места в действительности задача — статическая устойчивость в некоторый момент времени.

Совершенно ясно, что такая „идеализация“ явления, кроме количественной погрешности, иногда приводит к совершенно неверным критериям устойчивости, т. к. вместо существования областей динамической неустойчивости, определяется некоторая изолированная критическая точка — статической неустойчивости, часто вовсе не заключающаяся в истинных областях.

Попытки учесть, до некоторой степени, динамическую сторону явления расчетом на поперечные колебания шатуна снова, в существующей постановке вопроса, являются разрешением задачи, принципиально отличной от имеющей место в действительности и, следовательно, приводящей к результатам иногда далеким от истинных.

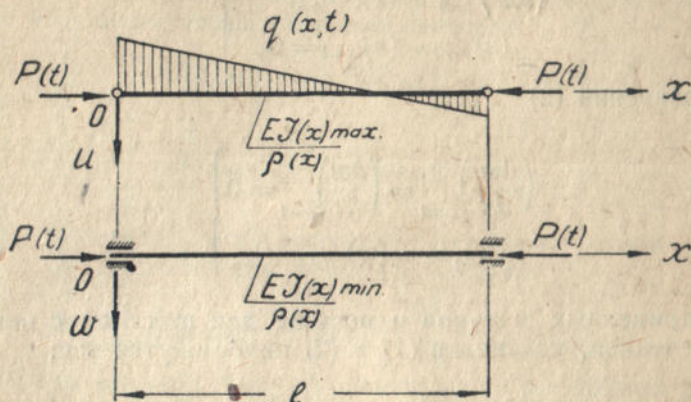
Рассмотрим несколько подробнее вопрос.

Пусть  $EI(x)_{\max}$  и  $EI(x)_{\min}$  — соответствующие максимальные и минимальные жесткости шатуна при изгибе, известные функции  $x$  (фиг. 1 и 2),  $P(t)$  — продольные периодические силы от давления газов и сил инерции,  $q(x,t)$  — интенсивность нормаль-



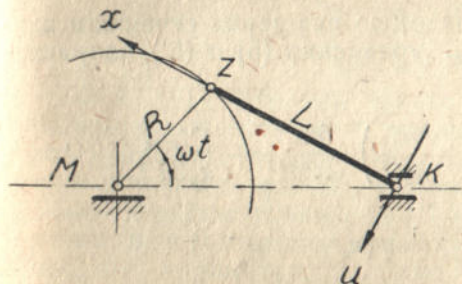
ных составляющих сил инерции шатуна, известная функция координаты ( $x$ ) и времени  $t$ , представленная на фиг. (3),  $\rho(x)$  — линейная масса (масса единицы длины) шатуна, известная функция  $x$ .

Пусть, далее, через  $u(x,t)$  и  $w(x,t)$  обозначены перемещения, испытываемые точками шатуна в плоскостях максимальной

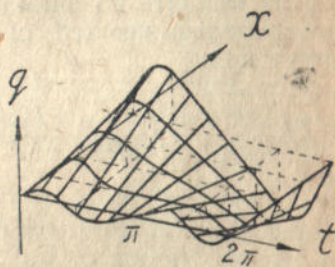


Фиг. 1.

и минимальной жесткостей в направлении, перпендикулярном к недеформированной оси шатуна.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

В таком случае, воспользовавшись уравнением упругой линии шатуна, можно записать очевидные уравнения:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x)_{\max} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x, t) \quad (1)$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x)_{\min} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (2)$$

при условиях на краях для уравнения (1):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=0} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=l} = 0 \\ (u)_{x=0} &= (u)_{x=l} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и для уравнения (2)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=l} = 0 \\ (w)_{x=0} &= (w)_{x=l} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Для прицепных шатунов и вообще для шатунов с неменяющимся сечением, уравнения (1) и (2) переписутся так:

$$EI_{\max} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x, t) \quad (5)$$

и

$$EI_{\min} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (5')$$

Если принять во внимание инерцию вращения сечений и влияние перерезывающей силы, то уравнения (5) и (5'), например, примут вид:

$$\begin{aligned} EI_{\max} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{I_{\max} \rho}{F} \left(1 + \frac{E}{k_0 G}\right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I_{\max}}{k_0 G F^2} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \\ + P(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x, t) \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} EI_{\min} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{I_{\min} \rho}{F} \left(1 + \frac{E}{k_0 G}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I_{\min}}{k_0 G F^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \\ + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \end{aligned} \quad (6')$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения шатуна,  $k_0$  — некоторый коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения.

Уравнения (1) и (2) являются основными в рассматриваемом вопросе, т. к. влияние инерции вращения поперечных сечений и перерезывающей силы, для существующих конструкций шатунов — незначительно.



Если опустить в этих уравнениях члены  $\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  и  $q(x, t)$ , то получаются уравнения статической устойчивости, рассматриваемые в существующих обычных расчетах

$$\left. \begin{aligned} EI(x)_{\max} \frac{d^2 u}{dx^2} + P(t)_{\max} u &= 0 \\ EI(x)_{\min} \frac{d^2 w}{dx^2} + P(t)_{\max} w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если основной возбуждающей колебания силой принять  $q(x, t)$ , то из уравнения (5) следует

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x)_{\max} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (8)$$

— уравнение фигурирующее в некоторых более точных расчетах шатунов (Неск). Однако такого рода упрощения совершенно не очевидны. Ни одно из уравнений (7) или (8) не представляя, конечно, явления в действительности, сильно искажают результаты в количественном и качественном, в особенности, отношениях.

В самом деле, подстановкой

$$u = \psi(x) \Phi(t)$$

$$\text{и} \quad w = \varphi(x) \Psi(t),$$

где  $\psi(x)$  и  $\varphi(x)$  — функции только координаты  $x$ , а  $\Phi(t)$  и  $\Psi(t)$  — функции только времени  $t$ , уравнения (1) и (2) можно привести к рассмотрению соответствующих обыкновенных уравнений с периодическими коэффициентами.

Таким образом уравнения (1) и (2) допускают существование областей неустойчивого движения, определяемых значениями некоторого параметра, например угловой скорости вращения кривошипно-шатунного механизма  $\omega$ .

Пусть области эти определяются следующими значениями  $\omega$

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &\leq \omega \leq \omega_1 \\ \omega_1 &< \omega \leq \omega_2 \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

для уравнения (1) и

$$\left. \begin{aligned} \overline{\omega}_0 &\leq \omega \leq \overline{\omega}_1 \\ \overline{\omega}_1 &< \omega \leq \overline{\omega}_2 \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

для уравнения (2).

Уравнения же (7) и (8) допускают существование критических „неустойчивых изолированных точек“, определяемых параметром  $\omega$

$$\begin{aligned} \omega &= \omega' \\ \omega &= \omega'' \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned} \tag{9'}$$

и

$$\begin{aligned} \omega &= \overline{\omega'} \\ \omega &= \overline{\omega''} \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned} \tag{10}$$

вообще говоря, не далеко удаленных от областей неустойчивости (9) и (10), но в силу способа образования уравнений (7) и (8) не обязательно в них заключаемых.

Таким образом, критические значения параметров, определяемые уравнением (7) и (8), могут в действительности оказаться безопасными и наоборот, некоторые ближайшие точки или целые области значений этих параметров могут оказаться неустойчивыми.

Приведя эти элементарные соображения и не останавливаясь подробно на этом вопросе заметим, что строгая теория динамической устойчивости шатунов произвольных форм и конфигураций быстроходных двигателей, разработанная нами на основании уравнений (1), (2), а также ряд известных нам случаев поломок, подтверждают необходимость указанных уточнений.

Апрель 1937 г.

Dans l'article ci — dessus on expose la revue critique des méthodes de calcul des bielles moteurs à grande vitesse. L'urgence est démontrée d'envisager la théorie minutieuse de la stabilité dynamique des bielles et leur calcul concernant cette théorie.



## К ВОПРОСУ О КОЛЕБАНИЯХ И УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Известная общность задач колебания и устойчивости упругих систем позволяет весьма часто применять приемы и методы, а иногда и самые результаты одной области механики упругого тела к другой.

Понятие собственных частот различных форм нормальных колебаний „эквивалентно“ понятию критических сил различных форм статического равновесия в задачах устойчивости упругих систем.

При совпадении частоты собственных колебаний упругой системы с соответствующей частотой внешней возмущающей силы, форма динамического равновесия перестает быть устойчивой. Точно также, при достижении внешней силы значения критических нагрузок, упругая форма равновесия теряет определенность, т. е. нарушается статическая устойчивость.

Для задач устойчивости как и колебаний упругих систем, относительно простых, можно получить обычно точные решения.

Для более сложных случаев как внешней нагрузки, так и конфигурации упругого тела, имеющего один или даже два размера малых и, следовательно, могущего при, вообще говоря, малых деформациях испытывать конечные перемещения, т. е. терять устойчивую форму равновесия, так же, как и для соответствующих задач колебания, приходится сталкиваться с уравнениями, для которых не известны интегралы в замкнутой форме. В этом случае решение ищется в форме бесконечных рядов.

Это однако часто приводит к суммированию весьма сложных и медленно сходящихся рядов. Затруднения такого рода можно обойти, если составить выражение для изменения энергии системы при малом отклонении системы от известной формы, соответствующей нагрузкам, меньшим критической. При критических значениях нагрузок это изменение энергии будет равно нулю.

Таким образом из выражения

$$T - V = 0, \quad (1)$$

где  $V$  — изменение энергии внутренних сил упругости системы,  $T$  — работа внешних сил при отклонении от рассматриваемой формы равновесия, могут быть определены наименьшие значения критических нагрузок.



Однако для применения указанного приема необходимо, соответственно условиям на краях, задаваться подходящей формой равновесия.

Ясно, что выбранная форма равновесия не будет, вообще говоря, в точности удовлетворять уравнениям равновесия, но при выполнении условий на краях—критическую нагрузку удастся определить достаточно точно.

Точно таким же путем, задаваясь соответствующей формой колебания, можно получить с достаточной точностью частоты собственных колебаний упругих систем (метод *Rayleigh'a*).

При рассмотрении колебаний и устойчивости упругих стержней, форма колебаний или искривленная форма стержня представляется обычно рядом

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x), \quad (2)$$

причем функции  $\varphi_i(x)$  ( $i=0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ ) выбирают таким образом, чтобы ряд (2) с достаточной точностью представлял ожидаемую искривленную форму равновесия или соответствующую форму колебаний.

По выражению (2) не трудно найти величины  $V$  и  $T$ . Очевидно, они представятся функцией параметров разложения  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$ , подобранных таким образом, чтобы значение критической нагрузки или частоты (основной) было минимальным.

Таким образом задача в этом случае сводится к выполнению ряда квадратур, а затем к отысканию *minimum'a* некоторого выражения, зависящего от параметров  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ .

Заметим, между прочим, что упомянутое выражение может быть получено и непосредственно из основного вариационного принципа Гамильтона:

$$\delta \int_0^t (T - V) dt = 0^1) \quad (3)$$

Метод распространяется на случай исследования колебаний и устойчивости упругих систем, для которых отклоненная форма равновесия или рассматриваемая форма колебаний являются функцией нескольких переменных (например, исследование устойчивости и колебания пластинок).

1) Следует указать, что во многих случаях оказывается возможным находить минимизируемый интеграл не составляя интеграла работ упругих и внешних сил, а решая формально задачу обратную задаче вариационного исчисления: по известному (обычно) дифференциальному уравнению упругого равновесия, с соответствующими условиями на краях, отыскать варьируемый интеграл.

В некоторых случаях выражение для минимизируемого интеграла может получиться значительно более простое, чем получаемое из энергетических соображений.



Строгое математическое обоснование этого метода и его развитие дал *W. Ritz*, показавший, между прочим, что для весьма обширного класса задач с увеличением числа параметров  $a_0, a_1, a_2 \dots$  получается сходящийся процесс, дающий в пределе точное решение.

Таким образом, как видим, решение задачи зависит главным образом от вида задаваемой формы колебаний или формы статического равновесия. Обычно, при изучении колебаний и устойчивости упругих стержней функций  $\varphi_i(x)$  задаются в виде степенных или тригонометрических функций.

При вычислении критических сил или частот собственных колебаний указанным приемом, получаемые приближенные решения будут всегда несколько выше истинных, так как предпологая наперед форму колебаний или соответствующую форму изгиба, как бы вводят в рассматриваемую систему дополнительные связи, что сопровождается, вообще говоря, увеличением жесткости рассматриваемой системы, а следовательно и увеличением частот собственных колебаний или величин критических нагрузок.

Следует заметить, что иногда выбор функций  $\varphi_i(x)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) может быть затруднителен, а исследование соответствующих интегралов несколько сложным.

Однако, удачным подбором ряда (2), выражающего форму колебаний или соответствующую форму изгиба, можно в некоторых случаях весьма эффективно решить задачу и непосредственным интегрированием соответствующих уравнений, применяя, например, итеративный процесс последовательных приближений. Так, например, если в задачах устойчивости или колебаний изгиба и кручения стержней предположить существование формы колебаний или формы равновесия, представленной в виде разложения по степеням некоторого параметра, например квадрата искомой частоты или по степеням критической нагрузки

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} k^{2i} \varphi_i(x) \quad (4)$$

или

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_k^i \varphi_i(x), \quad (4')$$

то получающийся абсолютно и равномерно сходящийся процесс для всех физически возможных значений  $x$ , непосредственно вытекающий из основных уравнений

$$\left. \begin{aligned} I(\varphi) + P_k \varphi &= 0 \\ I(\varphi) + k^2 \varphi &= 0 \\ L(\varphi) - k^2 \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$



где

$$\left. \begin{aligned} U(\varphi) &= EI(x) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \\ \bar{l}(\varphi) &= \frac{1}{j(x)} \frac{d}{dx} \left[ GI_{\rho}(x) \frac{d\varphi}{dx} \right] \\ L(\varphi) &= \frac{1}{\rho(x)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

и приводящий к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} U(\varphi_0) &= 0 \\ U(\varphi_i) + \varphi_{i-1} &= 0 \\ i &= 1, 2, 3, \dots, \infty \\ \bar{l}_0(\varphi_0) &= 0 \\ U(\varphi_i) + \varphi_{i-1} &= 0 \\ i &= 1, 2, 3, \dots, \infty \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и

$$\left. \begin{aligned} L(\varphi_0) &= 0 \\ L(\varphi_i) - \varphi_{i-1} &= 0 \\ i &= 1, 2, 3, \dots, \infty \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

при соответствующих условиях на краях, приводит к решению в виде весьма быстро сходящихся рядов

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i k^{2i} = 0 \quad (8)$$

или

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i P_k^i = 0, \quad (8')$$

из которых с любой степенью точности могут быть получены искомые частоты (как основных так и высших форм колебания) или соответствующие критические нагрузки в задачах устойчивости.

Первые приближения дают результаты, получаемые по Рейлею, высшие приближения дают более точные значения, в пределе, при достаточно большом  $i$  — совершенно точные.

Прием пригоден для произвольного задания функций  $EI(x)$ ,  $GI_{\rho}(x)$ ,  $\rho(x)$  и  $j(x)$  — жесткости при изгибе, кручении, линейной массы и ее моментов инерции. Последнее дает возможность решать задачи на случай сосредоточенных сил в задачах устойчивости или на случай сосредоточенных масс в задачах коле-



бания, рассматривая эти силы или массы, как равномерно распределенные на малом участке. Такое обобщающее рассмотрение вопроса дает возможность одним несложным приемом решать весьма разнообразные задачи, получая как ранее известные решения, точные и приближенные, так и некоторые новые решения весьма важные в инженерной практике.

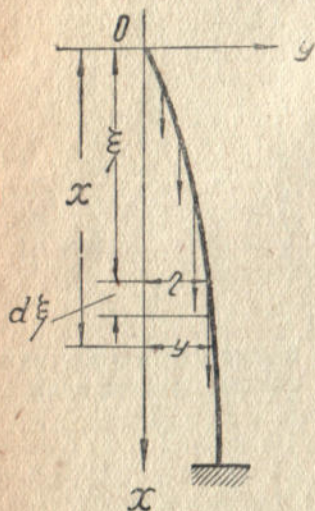
Помещаемые далее статьи, иллюстрируют применение приема к различным задачам колебания и устойчивости упругих систем.

Май 1937 г.

## УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ, НАГРУЖЕННЫХ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПРОДОЛЬНЫМИ НАГРУЗКАМИ

Весьма подробное исследование вопросов устойчивости стержней, нагруженных распределенной продольной нагрузкой было дано А. Greenhill'ом<sup>1)</sup>.

Во многих случаях А. Greenhill получил точные решения в Бесселевых функциях. В других случаях для приближенной оценки критических нагрузок полезным оказалось применение энергетического метода.



Фиг. 1.

В настоящей заметке мы покажем, что для стержней постоянного поперечного сечения, нагруженных произвольно распределенными продольными нагрузками, при надлежащем выборе формы упругого равновесия, можно получить эффективные приближенные решения и непосредственно из основного интегродифференциального уравнения, применяя итеративный процесс последовательных приближений, приводящий к быстро сходящимся рядам.

### 1. Интеграл уравнения упругого равновесия.

Как известно интегро-дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня, при выбранной системе осей координат (фиг. 1) имеет вид

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \int_0^x q(\xi)(\eta - y) d\xi, \quad (1)$$

где  $q(\xi)$  — интенсивность распределенной продольной нагрузки в сечении  $\xi$ ,

$EI$  — жесткость при изгибе.

<sup>1)</sup> А. G. Greenhill, Proc. Cambr. Phil. Soc t. 4 (1881).  
Proc. of the Instit. of Mech. Engineers, 182 (1883).



Условия на концах имеют вид:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = 0; \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = 0 \quad (1')$$

Обозначая через

$$q_0 \cdot q(x)$$

интенсивность распределенной нагрузки в сечении  $x$ , запишем основное уравнение (1) в таком виде

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = q_0 \int_0^x q(x) y dx - q_0 y \int_0^x q(x) dx \quad (2)$$

Предположим, что упругая линия стержня может быть представлена рядом

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q_0^i y_i \quad (3)$$

где  $y_i$  — искомые функции  $x$ .

Таким образом

$$EI \sum_{i=0}^{\infty} q_0^i \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{i=0}^{\infty} q_0^{i+1} \left( \int_0^x q(x) y_i dx - y_i \int_0^x q(x) dx \right)$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2y_0}{dx^2} &= 0 \\ EI \frac{d^2y_m}{dx^2} &= \int_0^x q(x) y_{m-1} dx - y_{m-1} \int_0^x q(x) dx \\ m &= 1, 2, 3, \dots \infty \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Интегрируя в правых частях системы (4) по частям получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2y_0}{dx^2} &= 0 \\ EI \frac{d^2y_m}{dx^2} &= -q_0 \int_0^x \int_0^x q(x) dx \frac{dy_{m-1}}{dx} dx \\ m &= 1, 2, 3, \dots \infty \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Или

$$y_0 = Ax + B$$

$$y_1 = -\frac{A}{EI} \int \int \int \int q(x) dx^4$$

$$y_2 = \frac{A}{(EI)^2} \int \int \int \int q(x) dx \left( \int \int q(x) dx^2 \right) dx^3 \quad (6)$$

$$y_3 = -\frac{A}{(EI)^3} \int \int \int \int q(x) dx \left[ \int \int \int q(x) dx \left( \int \int \int q(x) dx^3 \right) dx^2 \right] dx^3$$

и т. д.

где  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями.

Уравнения (3), (5) являются основными в теории устойчивости стержней постоянного поперечного сечения с меняющейся вертикальной нагрузкой.

Полученные уравнения существенно упрощаются после введения в рассмотрение граничных условий и принимают весьма удобный для практических применений вид.

Покажем теперь, что найденное нами решение (3) остается справедливым при любом задании функции

$$q = q_0 q(x),$$

как непрерывной, так и с разрывами.

Последнее особенно важно, так как дает возможность распространить без каких либо изменений уравнение (1) и предлагаемое решение (3) на случай стержня, нагруженного в разных точках продольными сосредоточенными силами (ярусная нагрузка), рассматривая последние, как равномерно распределенные на малом участке.

В самом деле, для этого достаточно подчинить функцию  $q$  условию

$$q \leq q_0,$$

где  $q_0$  — максимальная интенсивность распределенной нагрузки на длине  $l$ .

Тогда, из соотношений (6) следует

$$y \leq A \left[ x - \frac{q_0 x^4}{EI 4!} + \left( \frac{q_0}{EI} \right)^2 \frac{4x^7}{7!} - \left( \frac{q_0}{EI} \right)^3 \frac{4 \cdot 7 x^{10}}{10!} + \dots \right] + B$$



или

$$y \leq Ax \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{q_0}{EI} \right)^i \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3i-2)}{(3i+1)!} x^{3i} \right] + B \quad (7)$$

Полученный ряд абсолютно и равномерно сходящийся для любого  $0 \leq x \leq l$  в чем не трудно впрочем убедиться.

Не трудно, между прочим, заметить, что разложение (7) представляет развернутый в ряд интеграл от Бесселевых функций с положительными и отрицательными дробными индексами

$$\left( n = \pm \frac{1}{3} \right)$$

$$Ax \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{q_0}{EI} \right)^i \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3i-2)}{(3i+1)!} x^{3i} \right] + B = \\ = \int \left[ \bar{A} I_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q_0}{EI}} x^3 \right) + \bar{B} I_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q_0}{EI}} x^3 \right) \right] x^{\frac{1}{2}} dx \quad (7')$$

Выражение (7) представляет, очевидно, уравнение упругой линии однородного призматического или цилиндрического стержня под действием его веса, с закрепленным нижним и свободным верхним концами.

Принимая во внимание граничные условия (1'), получим известный результат

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left( \frac{q_0}{EI} \right)^i \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3i-2)}{(3i)!} l^{3i} = 0$$

Или

$$1 - \frac{q_0}{EI} \frac{l^3}{6} + \left( \frac{q_0}{EI} \right)^2 \frac{l^6}{180} - \left( \frac{q_0}{EI} \right)^3 \frac{l^9}{180 \cdot 72} + \dots = 0$$

откуда

$$Q_{кр} = (q_0 l)_{кр} = 7,87 \frac{EI}{l^2} \quad (8)$$

Для рассматриваемых стержней, на основании граничных условий, следует записать

$$\sum_{x=0}^{\infty} q_0^i \left( \frac{dy_i}{dx} \right)_{x=l} = \left( \frac{dy_0}{dx} \right)_{x=l} + q_0 \left( \frac{dy_1}{dx} \right)_{x=l} + q_0^2 \left( \frac{dy_2}{dx} \right)_{x=l} + \dots = 0 \quad (9)$$

Или

$$\alpha_0 - \left(\frac{q_0}{EI}\right) \alpha_1 + \left(\frac{q_0}{EI}\right)^2 \alpha_2 - \left(\frac{q_0}{EI}\right)^3 \alpha_3 + \dots = 0 \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \int_i \int \int q(x) dx \\ a_2 &= \int_i \int \int q(x) dx \left( \int_i \int \int q(x) dx \right) dx^2 \\ a_3 &= \int_i \int \int q(x) dx \left[ \int_i \int \int q(x) dx \left( \int_i \int \int q(x) dx \right) dx^2 \right] dx^2 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (11)$$

и т. д.

Или, если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_1(x); & a_1(l) &= a_1 \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_2(x); & a_2(l) &= a_2 \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_m}{dx} &= a_m(x); & a_m(l) &= a_m \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (12)$$

и

$$\int_0^x q(x) dx = \varphi(x) \quad (13)$$

то

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \int_i \int \varphi(x) dx^2 \\ a_2 &= \int_i \int \varphi(x) a_1(x) dx^2 \\ a_3 &= \int_i \int \varphi(x) a_2(x) dx^2 \\ &\dots \dots \dots \\ a_m &= \int_i \int \varphi(x) a_{m-1}(x) dx^2 \end{aligned} \right\} (14)$$

Рассмотрим для примера некоторые частные случаи.



## 2. Устойчивость стержня с линейно меняющейся распределенной нагрузкой

Пусть нагрузка  $q$  меняется по закону прямой линии (фиг. 2)

$$q = q_0 \frac{x}{l}. \quad (15)$$

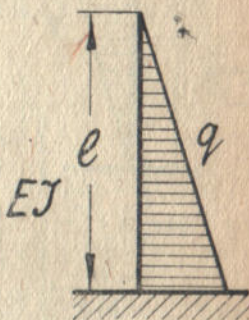
В таком случае

$$q(x) = \frac{x}{l}; \quad \varphi(x) = \int_0^x q(x) dx = \frac{x^2}{2l}$$

$$a_1 = \frac{1}{2l} \int_0^l \int_0^x x^2 dx^2 = \frac{l^3}{24}$$

$$a_2 = \frac{1}{48l^2} \int_0^l \int_0^x x^6 dx^2 = \frac{l^6}{48 \cdot 56}$$

$$a_3 = \frac{1}{56 \cdot 96l^3} \int_0^l \int_0^x x^{10} dx^2 = \frac{l^9}{56 \cdot 96 \cdot 132}$$



Фиг. 2.

и т. д.

Ограничиваясь в основном уравнении членом с  $q_0^2$ , получим

$$1 - \frac{1}{24} \frac{q_0 l^3}{EI} + \frac{1}{48 \cdot 56} \left( \frac{q_0 l^3}{EI} \right)^2 - \dots = 0, \quad (16)$$

откуда

$$\frac{q_0 l^3}{EI} \approx 28,2$$

или

$$Q_{кр} = \left( \frac{q_0 l}{2} \right)_{кр} \approx 14,1 \frac{EI}{l^2}. \quad (16)$$

Удержав в уравнении (10) член, содержащий  $q_0^3$ , получили бы дальнейшее приближение для  $Q_{кр}$

$$Q_{кр} = 16,1 \frac{EI}{l^2}. \quad (18)$$

## 3. Задача Ясинского

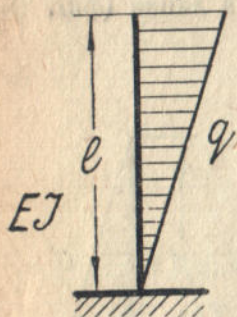
Проф. Ясинским<sup>1</sup> был рассмотрен случай нагружения, указанный на фиг. 3

<sup>1</sup> Ф. С. Ясинский. Полн. собр. соч. т. I.

Очевидно здесь

$$q = q_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (19)$$

Таким образом



Фиг. 3.

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2}{l}$$

и

$$a_1 = \int_0^l \int_0^x \left(x - \frac{x^2}{2l}\right) dx^2 = \frac{l^3}{8}$$

$$a_2 = \int_0^l \int_0^x \left(x - \frac{x^2}{2l}\right) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}\right) dx^2 = \frac{121}{192 \cdot 210} l^6$$

$$a_3 = \dots$$

И следовательно:

$$1 - \frac{1}{8} \frac{q_0 l^3}{EI} + \frac{121}{192 \cdot 210} \left(\frac{q_0 l^3}{EI}\right)^2 - \dots = 0 \quad (20)$$

Откуда

$$\frac{q_0 l^3}{EI} \approx 10,72$$

или

$$Q_{кр} = \left(\frac{q_0 l}{2}\right)_{кр} = 5,36 \frac{EI}{l^2} \quad (21)^*$$

У Ф. С. Ясинского

$$Q_{кр} = 5,12 \frac{EI}{l^2} \quad (22)$$

Как видим погрешность первого приближения около 4,5%. Удержав в основном уравнении член с  $\left(\frac{q_0 l^3}{EI}\right)^3$ , мы получили бы

$$Q_{кр} = 5,13 \frac{EI}{l^2}, \quad (21')$$

т. е. почти совершенно точный результат.

#### 4. Устойчивость стержня, нагруженного распределенной по параболе нагрузкой.

Если стойка нагружена распределенной нагрузкой параболического вида (фиг. 4), то

$$q = q_0 \left(\frac{x}{l}\right)^2 \quad (23)$$



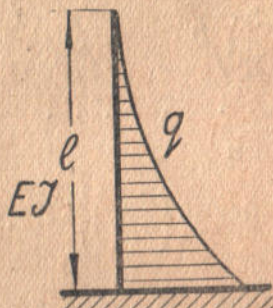
и следовательно

$$\varphi(x) = \frac{x^3}{3l^2}$$

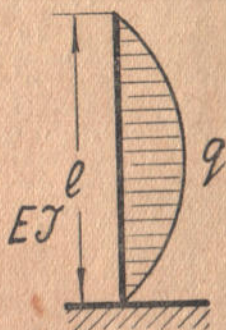
$$a_1 = \frac{1}{3l^2} \int_0^l \int_0^x x^3 dx^2 = \frac{l^3}{60}$$

$$a^2 = \frac{1}{180l^4} \int_0^l \int_0^x x^3 dx^2 = \frac{l^6}{81 \cdot 200}$$

$$a_3 = \dots \dots \dots$$



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Таким образом:

$$1 - \frac{1}{60} \frac{q_0 l^3}{EI} + \frac{1}{81 \cdot 200} \left( \frac{q_0 l^3}{EI} \right)^2 - \dots = 0. \quad (25)$$

Отсюда

$$\frac{q_0 l^3}{EI} \approx 89$$

или

$$Q_{кр} = \left( \frac{q_0 l}{3} \right)_{кр} = 29,5 \frac{EI}{l^2} \quad (25)$$

Удерживая в уравнении (10) член с  $q_0^3$ , получили бы

$$Q_{кр} = 27,3 \frac{EI}{l^2}. \quad (26)$$

### 5. Устойчивость стержня с распределенной по синусоиде нагрузкой

В этом случае (фиг. 5) очевидно

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (27)$$

и следовательно

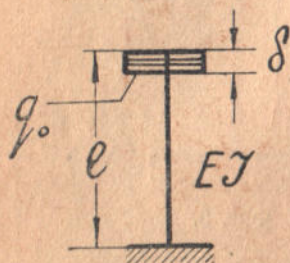
$$\varphi(x) = \frac{l}{\pi} \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right)$$

$$a_1 = \frac{l}{\pi} \int_0^x \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right) dx^2 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2} \right) l^2$$

$$a_2 = \frac{l^2}{\pi^2} \int_0^x \left( \frac{x^2}{2} + \frac{l^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{l} \right) \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right) dx^2 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{1}{24} - \frac{3}{4\pi^2} + \frac{33}{4\pi^2} \right) l^6$$

$$a_3 = \dots \dots \dots$$



Фиг. 6.

Таким образом

$$1 - 0,3986 \frac{q_0 l^3}{\pi EI} + 0,0080 \left( \frac{q_0 l^3}{\pi EI} \right)^2 - \dots = 0 \quad (28)$$

Откуда

$$\frac{q_0 l^3}{\pi EI} \approx 2,65 \quad (29)$$

Или

$$Q_{кр} = \left( \frac{2q_0 l}{\pi} \right)_{кр} \approx 5,3 \frac{EI}{l^2} \quad (29')$$

## 6. Устойчивость стержней, нагруженных сосредоточенными силами

Рассматривая сосредоточенную силу  $P$ , как равномерно распределенную на малом участке  $\delta$  нагрузку интенсивности  $q_0$  (Фиг. 6),

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} q_0 \delta = P, \quad (30)$$

можно получить выражение для критических нагрузок, исходя из основного уравнения (10).

Действительно, рассмотрим случай силы  $P$ , приложенной к свободному концу стержня. Очевидно получим

$$\varphi(x) = \delta$$

$$(x > \delta)$$

$$a_1 = \int_0^x \delta dx^2 = \delta \frac{l^2}{2}$$



$$a_2 = \frac{\delta^2}{2} \int_0^x x^2 dx^2 = \delta^2 \frac{l^4}{4!}$$

.....

$$a_n = \frac{\delta^n}{(2n-2)!} \int_0^x x^{2(n-1)} dx^2 = \delta^n \frac{2n}{(2n)!}$$

.....

Таким образом

$$1 - \frac{\left(\frac{q_0 \delta l^2}{EI}\right)}{\delta \rightarrow 0} + \frac{\left(\frac{q_0 \delta l^2}{EI}\right)^2}{4!} - \frac{\left(\frac{q_0 \delta l^2}{EI}\right)^3}{6!} + \dots = 0$$

Или

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\left(\frac{Pl^2}{EI}\right)^i}{2i!} = \cos \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}} = 0 \quad (31)$$

Откуда получаем известный результат

$$P_{kp} = (2n+1)^2 \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad (32)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким же точно путем можно получить значения критических сил и для большего числа сосредоточенных нагрузок.

Май 1937 г.

Dans cet article sont étudiées certaines questions de la stabilité des pivots droits élastiques, se trouvant sous l'effet des charges voulues.

A l'étude est approprié la méthode des approximations successives.

## ОБ УПРУГИХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БАЛОК ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

### 1. Интеграл амплитуды колебаний

Рассмотрим собственные поперечные колебания балок с меняющейся жесткостью  $EI(x)$  и произвольно распределенной по длине линейной массой

$$\rho(x) = \frac{dm(x)}{dx}$$

Если обозначить через  $u$  перемещения, испытываемые элементами балки в направлении, перпендикулярном к недеформированной оси балки, то по d'Alembert'у уравнение движения, как известно, принимает вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Предположим, что система совершает один из нормальных видов колебания

$$u = w(x) e^{ikt}, \quad (2)$$

где  $w(x)$  — искомая форма колебаний, определяемая из уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] - k^2 \rho(x) w = 0, \quad (3)$$

а  $k$  — круговая частота собственных колебаний.

Предположим, что форма колебаний может быть представлена рядом

$$w(x) = w_0 + k^2 w_1 + (k^2)^2 w_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} w_n, \quad (4)$$

в котором  $w_0, w_1, w_2, \dots$  представляют некоторые искомые функции  $x$ , определяемые следующей бесконечной системой дифференциальных уравнений



$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right] &= 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 w_n}{dx^2} \right] - \rho(x) w_{n-1} &= 0 \\ n &= 1, 2, 3, \dots \infty \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из первого уравнения системы (5) следует

$$w_0 = A \iint \frac{x}{EI(x)} dx^2 + B \iint \frac{1}{EI(x)} dx^2 + Cx + D. \quad (6)$$

Остальные уравнения дают:

$$\left. \begin{aligned} w_n &= A \underbrace{\iint \dots \int \frac{x}{EI(x)} dx^2 \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2}_{4n+2} + \\ &+ B \underbrace{\iint \dots \int \frac{1}{EI(x)} dx^2 \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2}_{4n+2} + \\ &+ C \underbrace{\iint \dots \int x \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2}_{4n} + \\ &+ D \underbrace{\iint \dots \int \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2}_{4n} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$n = 1, 2, 3, \dots \infty,$

где  $A, B, C, D$  — постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями.

Таким образом, форма колебаний может быть представлена следующим образом

$$\begin{aligned} w(x) &= A \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \underbrace{\iint \dots \int \frac{x}{EI(x)} dx^2 \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2}_{4n+2} + \\ &+ B \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \underbrace{\iint \dots \int \frac{1}{EI(x)} dx^2 \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2}_{4n+2} + \\ &+ C \left( x + \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} \underbrace{\iint \dots \int x \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2}_{4n} \right) + \end{aligned}$$

$$+ D \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} \underbrace{\iint \dots \int}_{4n} \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2 \right) \quad (8)$$

Полученное выражение является основным в излагаемой теории.

После введения в рассмотрение краевых условий, полученное выражение существенно упрощается и принимает весьма удобный для практических применений вид.

## 2. Условия существования найденной формы колебаний

В силу сделанных весьма широких допущений относительно задания функций  $EI(x)$  и  $\rho(x)$  — жесткости и линейной массы балки, следует рассмотреть условия сходимости разложения (8).

Для этого достаточно подчинить функции  $EI(x)$  и  $\rho(x)$  следующим условиям

$$EI(x) \geq EI_m$$

и

$$\rho(x) \leq \rho_m, \quad (9)$$

где  $\rho_m$  и  $EI_m$  — максимальное и минимальное значение линейной массы и жесткости в рассматриваемом интервале значений

$$0 \leq x \leq l.$$

В самом деле, в этом случае выполняя квадратуры, будем иметь

$$\begin{aligned} & \underbrace{\iint \dots \int}_{4n+2} \frac{x}{EI(x)} dx^2 \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \times \\ & \times \frac{1}{EI(x)} dx^2 \leq \frac{\rho_m^n}{(EI_m)^{n+1}} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}; \\ & \underbrace{\iint \dots \int}_{4n+2} \frac{1}{EI(x)} dx^2 \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \times \\ & \times \frac{1}{EI(x)} dx^2 \leq \frac{\rho_m^n}{(EI_m)^{n+1}} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\underbrace{\iint \dots \int}_{4n} x \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2 \leq \left( \frac{\rho_m}{EI_m} \right)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

$$\underbrace{\iint \dots \int}_{4n} \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \rho(x) dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2 \leq \left( \frac{\rho_m}{EI_m} \right)^n \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

$$n = 1, 2, 3 \dots \infty$$



Таким образом, в этом случае существует соотношение:

$$\begin{aligned}
 w(x) \leq & A \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \frac{\rho_m^n}{(EI_m)^{n+1}} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} + \\
 & + B \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \frac{\rho_m^n}{(EI_m)^{n+1}} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \\
 & + C \left[ x + \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} \left( \frac{\rho_m}{EI_m} \right)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \right] + \\
 & + D \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} \frac{\rho_m^n}{(EI_m)^{n+1}} \frac{x^{4n}}{(4n)!} \right] \quad (11)
 \end{aligned}$$

Не трудно, однако, заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \frac{\rho_m^n}{(EI_m)^{n+1}} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} = \frac{1}{\alpha^3 EI_m} (\operatorname{sh} \alpha x - \sin \alpha x),$$

где

$$\alpha = \sqrt{k \sqrt{\frac{\rho_m}{EI_m}}},$$

а также

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \frac{\rho_m^n}{(EI_m)^{n+1}} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} = \frac{1}{2\alpha^2 EI_m} (\operatorname{ch} \alpha x - \cos \alpha x),$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} \left( \frac{\rho_m}{EI_m} \right)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} = \frac{1}{2\alpha} (\operatorname{ch} \alpha x + \cos \alpha x)$$

и

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} \left( \frac{\rho_m}{EI_m} \right)^n \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \alpha x + \cos \alpha x)$$

и следовательно

$$w(x) \leq \left( \frac{B}{2\alpha^2 EI_m} + \frac{D}{2} \right) \operatorname{ch} \alpha x + \left( \frac{A}{\alpha^3 EI_m} + \frac{C}{2\alpha} \right) \operatorname{sh} \alpha x +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{D}{2} - \frac{B}{2\alpha^2 EI_m} \right) \cos \alpha x + \left( \frac{C}{2\alpha} - \frac{A}{\alpha^3 EI_m} \right) \sin \alpha x = \\
 & = A_1 \operatorname{ch} \alpha x + B \operatorname{sh}_1 \alpha x + C_1 \cos \alpha x + D_1 \sin \alpha x. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Этим и доказывается абсолютная и равномерная сходимость разложения (8) при любом  $x$  ( $0 \leq x \leq l$ ) и при произвольном задании функций  $EI(x)$  и  $\rho(x)$  как непрерывных, так и прерывных. Последнее особенно важно, так как дает возможность распространить без каких либо изменений уравнение (1) и предлагаемое решение (8) на случай, например, сосредоточенных масс, рассматривая последние, как равномерно распределенные на малом участке.

Полученное предельное значение  $w(x)$  дает, очевидно, решение для балки с неменяющейся жесткостью и свободными концами.

После введения в рассмотрение граничных условий, разложение (8) приобретает, обычно, весьма простой и удобный для практических применений вид.

Таким образом, найденное нами уравнение, определяющее искомую частоту ( $k$ ) колебаний, содержит коэффициенты при степенях  $k^2$  в виде элементарных интегралов.

В силу доказанной быстрой сходимости разложения (8) для вычисления низшей частоты колебаний, достаточно бывает небольшого числа членов полученного ряда.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

### 3. Колебания балок с опертыми концами

Соответственно граничным условиям

$$w_{x=0} = 0 \text{ и } \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = 0,$$

необходимо положить

$$D = 0 \text{ и } B = 0.$$

Остальные условия

$$(w)_{x=l} = 0 \text{ и } \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=l} = 0$$

приводят к следующей системе линейных уравнений:

$$A \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \underbrace{\int \dots \int}_{4n} \frac{x}{EI(x)} dx^2 \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2 +$$



$$\begin{aligned}
& + C \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} \underbrace{\iint \dots \int}_{4n-2} x \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2 = 0 \\
& A \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \underbrace{\iint \dots \int}_{4n+2} \frac{x}{EI(x)} dx^2 \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2 + \\
& + C \left( I + \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} \underbrace{\iint \dots \int}_{4n} x \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2 \right) = 0.
\end{aligned}$$

Откуда, исключая  $A$  и  $C$ , находим:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} k^{2(i+n)} \left\{ \underbrace{\iint \dots \int}_{4n} \frac{x}{EI(x)} dx^2 \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2 \times \right. \\
& \times \underbrace{\iint \dots \int}_{4i} x \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2 - \\
& - \underbrace{\iint \dots \int}_{4n+2} \frac{x}{EI(x)} dx^2 \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2 \times \\
& \left. \times \underbrace{\iint \dots \int}_{4i-2} x \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2 \right\} + \\
& + I \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \underbrace{\iint \dots \int}_{4n} \frac{x}{EI(x)} dx^2 \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2 = 0 \quad (13)
\end{aligned}$$

Полученное уравнение является основным в теории колебаний опертых балок.

Представляя это уравнение в виде

$$a_0 + k^2 a_1 + (k^2)^2 a_2 + \dots = 0,$$

находим коэффициенты  $a_0, a_1, \dots$  элементарным интегрированием в каждом частном случае.

Иногда, для ориентировочного определения низшей частоты, достаточно ограничиться членом содержащим  $k^2$

Таким образом

$$k \approx \sqrt{-\frac{a_0}{a_1}}$$

В случае балки с неменяющейся жесткостью из (13) получим<sup>1)</sup>

$$a_0 = 6l^2$$

$$a_1 = \frac{l}{EI} \left( \int_0^l \int_0^l x^2 \rho(x) dx^2 + 6 \int_0^l \int_0^l \int_0^l x \rho(x) dx^3 - l^2 \int_0^l \int_0^l x \rho(x) dx^2 \right) \quad (15)$$

$$a_2 = \dots$$

и т. д.

Точно также, не трудно написать, подобно (14), основное уравнение и для других случаев закрепления концов.

#### 4. Колебания балок с защемленными концами

В этом случае из условий

$$(w)_{x=0} = 0 \text{ и } \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = 0,$$

находим

$$D = 0 \text{ и } C = 0.$$

Условия  $(w)_{x=l} = 0$  и  $\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=l} = 0$  дают

$$\begin{aligned} & A \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \underbrace{\int \int \dots \int \frac{x}{EI(x)} dx^2}_{4n+2} \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2 + \\ & + B \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \underbrace{\int \int \dots \int \frac{1}{EI(x)} dx^2}_{4n+2} \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2 = 0 \\ & A \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \underbrace{\int \int \dots \int \frac{x}{EI(x)} dx^2}_{4n+1} \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx + \\ & + B \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \underbrace{\int \int \dots \int \frac{1}{EI(x)} dx^2}_{4n+1} \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx = 0 \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> См. нашу статью в VI вып. „Тр. К. А. И.“.



Отсюда следует

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} k^{2(i+n)} \left\{ \underbrace{\int \int \dots \int \frac{x}{EI(x)} dx^{2\rho}(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2}_{4n+2} \times \right.$$

$$\times \underbrace{\int \int \dots \int \frac{1}{EI(x)} dx^2 \cdot \rho(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx}_{4i+1} -$$

$$- \underbrace{\int \int \dots \int \frac{1}{EI(x)} dx^{2\rho}(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx^2}_{4n+2} \times$$

$$\left. \times \underbrace{\int \int \dots \int \frac{x}{EI(x)} dx^{2\rho}(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \dots \frac{1}{EI(x)} dx}_{4i+1} \right\} = 0$$

В этом случае очевидно

$$a_0 = \int_{(l)} \frac{x}{EI(x)} dx^2 \cdot \int_{(0)} \frac{1}{EI(x)} dx - \int_{(0)} \frac{1}{EI(x)} dx^2 \int_{(0)} \frac{x}{EI(x)} dx$$

$$a_1 = \int_{(0)} \frac{x}{EI(x)} dx^2 \cdot \underbrace{\int \dots \int \frac{1}{EI(x)} dx^{2\rho}(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx}_{5} -$$

$$- \int_{(0)} \frac{1}{EI(x)} dx^2 \cdot \underbrace{\int \dots \int \frac{x}{EI(x)} dx^{2\rho}(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx}_{5} +$$

$$\underbrace{\int \dots \int \frac{x}{EI(x)} dx^{2\rho}(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \int \frac{1}{EI(x)} dx}_{6} -$$

$$- \underbrace{\int \dots \int \frac{1}{EI(x)} dx^{2\rho}(x) dx^2 \frac{1}{EI(x)} dx^2 \int \frac{x}{EI(x)} dx}_{6}$$

$$\dots$$

$$\dots$$

и т. д.

Март 1937 г.

Dans cet article on étudie les vibrations transversales normales des poutres de la dureté variable, au moyen de l'intégration de l'équation basale différentielle par la méthode des approximations successives.

# ИТЕРАТИВНЫЙ ПРОЦЕСС ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧАМ КО- ЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ

## ГЛАВА I

### О крутильных колебаниях

В настоящей главе мы рассмотрим некоторые новые формулы для расчета собственных крутильных частот однородных стержней с меняющейся жесткостью и стержней с произвольным числом сосредоточенных дисков различных моментов инерции.

#### I. Основное уравнение

Предположим, что поперечные сечения рассматриваемого стержня при колебании остаются плоскими, а радиусы этих сечений остаются прямолинейными. Введем обозначения: пусть  $GI(x)$  — жесткость при кручении в сечении  $x$  стержня,  $\varphi(x, t)$  — угол скручивания в рассматриваемом сечении в некоторый момент времени, а  $j(x)$  — полярный момент инерции массы относительно оси  $X$ , отнесенный к единице длины стержня

$$j(x) = \frac{dI(x)}{dx},$$

где  $I(x)$  — момент инерции элементарного цилиндра в сечении  $(x)$ , относительно оси  $X$ .

Рассматривая равновесие элементарного цилиндра, выделенного бесконечно близкими сечениями  $m$  и  $m'$ , можем записать

$$j(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left[ GI_p(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx$$

или

$$j(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ GI_p(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]. \quad (1)$$



Полученное уравнение является основным. Для стержней постоянного поперечного сечения, очевидно, получим:

$$j_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = GI_{p0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (1')$$

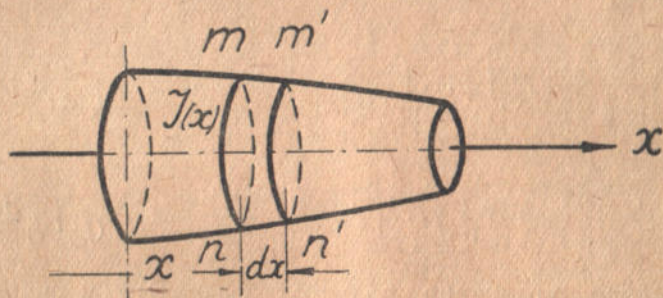
Рассмотрим уравнение (1).

В виду наличия гармонических колебаний

$$\varphi = \psi(x) \cos kt,$$

где  $\psi(x)$  — искомая функция координаты  $x$ , определяемая уравнением

$$\frac{d}{dx} \left[ GI_p(x) \frac{d\psi}{dx} \right] + k^2 j(x) \psi = 0, \quad (2)$$



Фиг. 1.

а  $k$  — круговая частота собственных колебаний.

Предположим, что форма колебаний стержня может быть представлена рядом

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} k^{2i} \psi_i = \psi_0 + k^2 \psi_1 + (k^2)^2 \psi_2 + \dots \quad (3)$$

причем функции  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$  определяются следующей бесконечной системой

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ GI_p(x) \frac{d\psi_0}{dx} \right] &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left[ GI_p(x) \frac{d\psi_m}{dx} \right] + j(x) \psi_{m-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots \infty$$

Из первого уравнения системы (4) следует

$$\psi_0 = A \int \frac{dx}{GI_p(x)} + B \quad (5)$$

Остальные уравнения системы дают

$$\psi_m = (-1)^m \left[ A \underbrace{\int \int \dots \int}_{2m+1} \frac{1}{GI_p(x)} dx j(x) dx \dots \frac{1}{GI_p(x)} dx + \right. \\ \left. + B \underbrace{\int \int \dots \int}_{2m} j(x) dx \frac{1}{GI_p(x)} dx \dots \frac{1}{GI_p(x)} dx \right], \quad (6)$$

$m = 1, 2, 3, \dots$

где  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями.

Таким образом общее решение уравнения (1) представится в таком виде

$$\psi = A \sum_{m=0}^{\infty} (-k^2)^m \underbrace{\int \int \dots \int}_{2m+1} \frac{1}{GI_p(x)} dx j(x) dx \dots \frac{1}{GI_p(x)} dx + \\ + B \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-k^2)^m \underbrace{\int \int \dots \int}_{2m} j(x) dx \frac{1}{GI_p(x)} dx \dots \frac{1}{GI_p(x)} dx \right] \quad (7)$$

Полученное уравнение является основным в излагаемой теории.

## 2. Условия существования найденной формы колебаний

В силу весьма широких допущений относительно задания функций  $GI_p(x)$  и  $j(x)$  как непрерывных, так и прерывных, следует рассмотреть условия сходимости разложения (3).

Для этого достаточно подчинить функции  $GI_p(x)$  и  $j(x)$  условиям

$$\left. \begin{aligned} GI_p(x) &\geq GI_{p0} \\ j(x) &\leq j_0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

в интервале  $0 \leq x \leq l$ .

В самом деле, в этом случае получим

$$\psi \leq A \sum_{m=0}^{\infty} (-k^2)^m \frac{j_0^m x^{2m+1}}{(GI_{p0})^{m+1} (2m+1)!} + \\ + B \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-k^2)^m \frac{j_0^m x^{2m}}{(GI_{p0})^{2m} (2m)!} \right] \quad (9)$$



Но не трудно заметить, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-k^2)^m \frac{j_0^m x^{2+1}}{(GI_0)^{m+1} (2m+1)!} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{GI_0}{j_0}} \sin k \sqrt{\frac{j_0}{GI_0}} x$$

и

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-k^2)^m \frac{j_0 x^{2m}}{(GI_0)^{2m} \cdot (2m)!} = \cos k \sqrt{\frac{j_0}{GI_0}} x$$

и следовательно

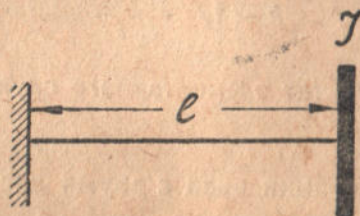
$$\psi \leq \bar{A} \sin k \sqrt{\frac{j_0}{GI_0}} x + \bar{B} \cos k \sqrt{\frac{j_0}{GI_0}} x \quad (10)$$

$$\bar{A} = \frac{A}{k} \sqrt{\frac{GI_0}{j_0}}, \quad \bar{B} = B.$$

Этим и доказывается достаточно быстрая, абсолютная и равномерная сходимость разложения (3) при любом задании функции  $GI_p(x)$  и  $j(x)$  как непрерывных, так и прерывных. Последнее особенно важно, так как дает возможность распространить уравнение (1) и предлагаемое разложение на случай сосредоточенных дисков, рассматривая последние, как распределенные на малом участке. \*

### 3. Колебания вала с диском на конце

Рассматривая диск (фиг. 2) как массу с линейным моментом инерции  $j_1$ , постоянным на малом участке  $\delta$  стержня, можно



Фиг. 2.

легко написать уравнение частот, воспользовавшись основным уравнением (7).

В самом деле, в случае одного диска, помещенного на конце заземленного прямого стержня, отсутствие поворотов у заземленного конца и напряжений у свободного приводят к следующим граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} (\psi)_{x=0} &= 0 \\ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x=l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Таким образом из уравнения (7) следует

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-\kappa^2)^m \underbrace{\int \int \dots \int}_{2m} \frac{1}{GI_p(x)} dx \dots \frac{1}{GI_p(x)} dx = 0 \quad (11)$$

$$x = l$$

Полученное уравнение является основным в теории колебаний таких валов.

Для случая, указанного на фиг. 2 получим

$$\int \int \frac{1}{GI_p(x)} dx \dots \int_{l_1}^{l_1+\delta} x j(x) dx =$$

$$= \frac{I_1 l}{GI_p} + \beta,$$

где  $\beta$  — малая второго порядка относительно  $\delta$ .

Остальные квадратуры уравнения (11) — малые высших порядков относительно  $\delta$ .

Таким образом, в пределе, при  $\delta \rightarrow 0$ , получим

$$1 - \kappa^2 \frac{I_1 l}{GI_p} = 0, \quad (12)$$

откуда

$$k = \sqrt{\frac{GI_p}{I_1 l}}, \quad (12')$$

т. е. известный результат элементарного случая, получаемый и другими путями.

#### 4. Колебания вала с двумя дисками

В этом случае граничные условия остаются теми же (фиг. 3); обозначая через  $j_1$  и  $j_2$  линейные моменты инерции равномерно распределенных на малых участках  $\delta_1$  и  $\delta_2$  масс и выполняя без затруднения соответствующие квадратуры уравнения (11), получим:

$$\int \int \frac{1}{GI_p(x)} dx j(x) dx = \frac{1}{GI_p} \left( \int_{l_1}^{l_1+\delta_1} x j(x) dx + \int_{l_1}^{l_1+\delta_2} x j(x) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{GI_p} (I_1 l_1 + I_2) + \beta_1$$



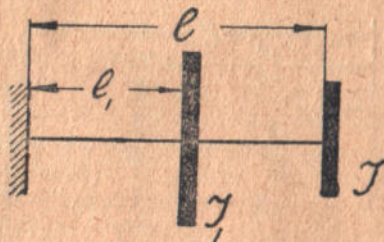
$$\int \int \int \int \frac{1}{GI_p(x)} dx j(x) dx \frac{1}{GI_p(x)} dx j(x) dx =$$

$$= \frac{1}{(GI_p)^2} \int \int \int x j(x) dx^2 j(x) dx = \frac{I_1 I l_1 (l - l_1)}{(GI_p)^2} + \beta_2,$$

где  $\beta_1, \beta_2$  — малые высшего порядка относительно  $\delta_1$  и  $\delta_2$ .

Остальные квадратуры будут малыми высшего порядка относительно  $\delta_1, \delta_2$ . Таким образом, переходя к пределу будем иметь

$$1 - k^2 \frac{I_1 l_1 + I l}{GI_p} + k^4 \frac{I_1 I l_1 (l - l_1)}{(GI_p)^2} = 0, \quad (13)$$



Фиг. 3.

откуда определяются обе искомые частоты.

Легко заметить сходящийся процесс для вычисления корней уравнения частот.

В самом деле, предположим, что момент инерции крайнего диска  $I$  достаточно мал по сравнению с  $I_1$ .

Тогда в первом приближении следует

$$k^2 \approx \frac{GI_p}{I_1 l_1}$$

или

$$k^4 \frac{I_1 I l_1 (l - l_1)}{(GI_p)^2} \approx k^2 \frac{I (l - l_1)}{GI_p}$$

и следовательно уравнение второго приближения будет

$$1 - k^2 \frac{(I_1 + I) l_1}{GI_p} \approx 0 \quad (14)$$

Таким образом при достаточно малом моменте инерции конечного диска, лучшее приближение для частоты получается, если рассматривать приведенную схему, в которой момент инерции отбрасываемого диска  $I$  прибавляется к оставленному на валу  $I_2$ .

Определив по этой формуле частоту, можно искать следующие приближения, если рассматривать момент инерции равным

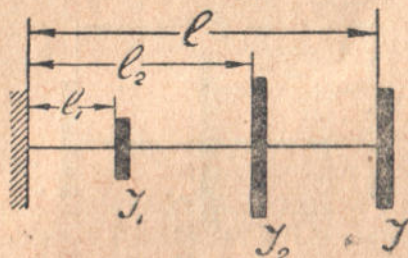
не  $I_1$ , а  $I_1 + \delta I_1$ , где  $\delta I_1$  соответствующая поправка, очевидно, равная

$$\delta I_1 = \frac{(I_1 + I)l}{I_1 l + Il_1} I \quad (15)$$

По „исправленному“ моменту инерции  $I_1 + \delta I_1$  ищется следующее приближение для  $k$  и т. д.

### 5. Колебания вала с тремя дисками

В этом случае (фиг. 4) обозначая через  $j_1, j_2$  и  $j_3$  линейные моменты инерции равномерно распределенных на малых участках  $\delta_1, \delta_2$  и  $\delta_3$  масс, из основного уравнения (11) получим



Фиг. 4.

$$\int \int \frac{1}{GI_p(x)} dx j(x) dx = \frac{1}{GI_p} \left( \int_{l_1}^{l_1+\delta_1} x j(x) dx + \int_{l_2}^{l_2+\delta_2} x j(x) dx + \int_{l}^{l+\delta_3} x j(x) dx \right) = \frac{1}{GI_p} (I_1 l_1 + I_2 l_2 + Il) + \beta_1,$$

$$\int \int \int \frac{1}{GI_p(x)} dx j(x) dx \frac{1}{GI_p(x)} dx j(x) dx = \frac{1}{(GI_p)^2} [I_1 I_2 l_1 (l_2 - l_1) + I_2 I l_2 (l - l_2) + I_1 I l_1 (l - l_1)] + \beta_2,$$

$$\int \dots \int \frac{1}{GI_p(x)} dx j(x) dx \dots j(x) dx = \frac{I_1 I_2 I l_1 (l_2 - l_1) (l - l_2)}{(GI_p)^3} + \beta_3,$$

где  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  — малые высших порядков относительно  $\delta_1, \delta_2$  и  $\delta_3$ .

Таким образом уравнение частоты будет:

$$1 - \frac{k^2}{GI_p} (I_1 l_1 + I_2 l_2 + Il) + \frac{k^4}{(GI_p)^2} [I_1 I_2 l_1 (l_2 - l_1) + I_2 I l_2 (l - l_2) + I_1 I l_1 (l - l_1)] - \frac{k^6}{(GI_p)^3} I_1 I_2 I l_1 (l_2 - l_1) (l - l_2) = 0 \quad (16)$$



Не трудно теперь заметить, что точно так же, как и в предыдущем случае, при достаточно малом моменте инерции конечного диска, лучшее приближение для частоты получается, если рассматривать приведенную схему, в которой момент инерции отбрасываемого диска прибавляется к оставляемому крайнему.

В самом деле, примем в первом приближении за искомое уравнение частоты ур-е (13).

Определяя отсюда  $k^6$  (через  $k^2$  и  $k^4$ ) и подставляя в (16), найдем

$$1 - \frac{k^2}{GI_p} [I_1 l_1 + (I_2 + I) l] + \frac{k^4}{(GI_p)^2} I_1 (I_2 + I) l_1 (l - l_1) = 0 \quad (17)$$

Откуда, после сравнения с (13), справедливость сделанного заключения становится очевидной.

Таким же образом не трудно получить уравнения частот для любого числа дисков различных моментов инерции.

В случае, когда моменты инерции всех дисков, за исключением крайних, одинаковы, а длины соответствующих участков равны — основное характеристическое уравнение (7, 11) — существенно упрощается и представляется возможность, в силу весьма быстрой сходимости разложения (11), обрывая ряд на третьем, или четвертом члене, получить весьма простые и удобные для практических вычислений приближенные формулы.

## ГЛАВА II

### Некоторые вопросы устойчивости упругих систем

#### 1. Стойка с шарнирными концами, сжимаемая продольной осевой силой

Дифференциальное уравнение изогнутой линии в этом случае (фиг. 5) имеет вид:

$$EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \approx -Py, \quad (1)$$

где  $EI(x)$  — жесткость при изгибе.

Таким образом

$$I(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 \quad (1')$$

$$k^2 = \frac{P}{E}$$

Граничные условия в рассматриваемом случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (y)_{x=0} &= 0 \\ (y)_{x=l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

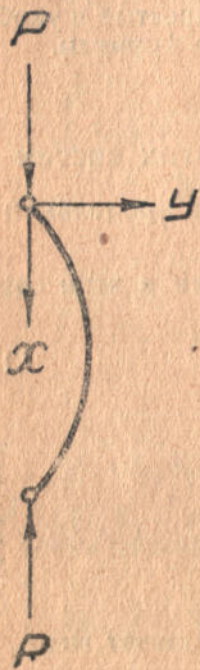
Общее решение уравнения (1') соответственно (1) (гл. I) запишется в таком виде:

$$y = A \left( x + \sum_{i=1}^{\infty} (-k^2)^i \underbrace{\int \int \dots \int}_{2i} \frac{x}{I(x)} dx^2 \frac{1}{I(x)} dx^2 \dots \frac{1}{I(x)} dx^2 \right) + \\ + B \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-k^2)^i \underbrace{\int \int \dots \int}_{2i} \frac{1}{I(x)} dx^2 \frac{1}{I(x)} dx^2 \dots \frac{1}{I(x)} dx^2 \right] \quad (3)$$

В силу доказанной быстрой сходимости разложения (2) (гл. I) достаточно практически бывает двух — трех членов ряда

$$y \approx A \left( x - k^2 \int \int \frac{x}{I(x)} dx^2 + k^4 \int \int \int \int \frac{x}{I(x)} dx^2 \frac{1}{I(x)} dx^2 + \dots \right) + \\ + B \left( 1 - k^2 \int \int \frac{1}{I(x)} dx^2 + k^4 \int \int \int \int \frac{1}{I(x)} dx^2 \frac{1}{I(x)} dx^2 - \dots \right) \quad (4)$$

Для случая стойки постоянного поперечного сечения, очевидно



$$y = A \left[ x + \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{k^2}{I} \right)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \right] + B \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{k^2}{I} \right)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \right] = \\ = \bar{A} \sin \frac{k}{\sqrt{I}} x + B \cos \frac{k}{\sqrt{I}} x \quad (4')$$

Применяя граничные условия получим

$$(y)_{x=0} = 0; \quad B = 0.$$

Из условия

$$(y)_{x=l} = 0,$$

$$\sin \frac{k}{\sqrt{I}} l = 0.$$

Из последнего равенства следует

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} l = m\pi$$

$$m = 1, 2, 3 \dots$$

Фиг. 5.



Откуда легко определяется значение критической силы

$$P_k = \frac{m^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (5)$$

$$m = 1, 2, 3 \dots$$

Для стойки с шарнирными концами переменного сечения из 4) получим

$$l + \sum_{i=1}^{\infty} (-k^2)^i \underbrace{\int \int \dots \int}_{2i} \frac{x}{I(x)} dx^2 \frac{1}{I(x)} dx^2 \dots \frac{1}{I(x)} dx^2 = 0 \quad (6)$$

В силу быстрой сходимости разложения (6), можно ограничиться тремя членами

$$l - k^2 \int \int \frac{x}{I(x)} dx^2 + k^4 \int \int \int \int \frac{x}{I(x)} dx^2 \frac{1}{I(x)} dx^2 \dots \approx 0 \quad (7)$$

$$x = l,$$

откуда приближенное значение критической силы легко определяется.

## 2. Продольный изгиб однородного призматического или цилиндрического стержня под действием собственного веса

Уравнение изогнутой оси стержня имеет вид (фиг. 6)

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M, \quad (8)$$

где

$$M = \int_0^{l-x} q (\eta - y) d\zeta, \quad (8')$$

здесь  $q$  — вес единицы длины стержня.

Таким образом, подставляя (8') в (8) и дифференцируя, будем иметь

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} + q(l-x) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (9)$$

Введением новой переменной

$$Z = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q}{EI}} (l-x)^{\frac{3}{2}}, \quad (10)$$

полученное уравнение можно привести к известному уравнению Бесселя

$$\frac{d^3 y}{dz^3} + \frac{1}{z} \frac{d^2 y}{dz^2} + \left(1 - \frac{1}{dz^2}\right) \frac{dy}{dz} = 0 \quad (11)$$

при  $n = \frac{1}{3}$ .

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$Y = c_1 I_{1/3}(z) + c_2 I_{-1/3}(z), \quad (12)$$

где  $I_{1/3}$  и  $I_{-1/3}(z)$  — соответствующие функции Бесселя дробного порядка.

В силу условий закрепления стержня

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=l} = 0,$$

следовательно  $c_1 = 0$  и общее решение принимает вид.

$$u = c_2 I_{-1/3}(z). \quad (13)$$

Из условий

$$(y)_{x=0} = 0 \text{ и } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0,$$

следует

$$I_{-1/3}(z) = 0. \quad (14)$$

С помощью таблиц функции  $I_{-1/3}(z)$  можно определить те значения  $z$ , при которых эта функция обращается в нуль.

Наименьшее из таких значений приблизительно равно 1,87. Отсюда следует, что при значениях

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{ql^3}{EI}} \leq 1,87, \quad (14')$$

или при

$$ql^3 \leq 7,87 EI, \quad (14'')$$

стержень будет устойчив.

Полагая в уравнении (9)  $\frac{dy}{dx} = \bar{Y}$  и применяя полученное решение (4), будем иметь

$$y = A \left[ \frac{x^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (-k^2)^i \underbrace{\int \int \dots \int}_{2i+1} x(l-x) dx^2 (l-x) dx^2 \dots (l-x) dx^2 \right] + B \left[ x + \sum_{i=0}^{\infty} (-k^2)^i \underbrace{\int \int \dots \int}_{2i+1} (l-x) dx^2 (l-x) dx^2 \dots (l-x) dx^2 \right] \quad (15)$$



Из условия  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0$ , следует

$$B = 0.$$

Из условия  $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=l} = 0$ , следует

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-k^2)^i \frac{\int \int \dots \int x(l-x) dx^2(l-x) dx^2 \dots (l-x) dx^2}{2i-1} = 0 \quad (16)$$

$$1 - \frac{k^2 l^3}{6} + \frac{(k^2 l^3)^2}{180} - \dots = 0, \quad (17)$$

откуда

$$k^2 l^3 = 8,28$$

или

$$\frac{q l^3}{EI} = 8,28. \quad (18)$$

Удержав в разложении (16) еще один член, мы получили бы

$$1 - \frac{k^2 l^3}{6} + \frac{(k^2 l^3)^2}{180} - \frac{(k^2 l^3)^3}{180 \cdot 72} + \dots = 0, \quad (19)$$

откуда

$$\frac{q l^3}{EI} = 7,86.$$

Как видим, результат почти точный.

Май 1937 г.

Dans l'article ci-dessus on demontre l'emploi du procés iteratif des approximations successives dans l'examen de la stabilité et vibrations des systèmes élastiques. Particulièrement sont envisagées les nouvelles formules pour le calcul de fréquences torsionnées de vibrations propres des pivots à la dureté changeante arbitraire et arbres à quantité arbitraire des disques concentrés des différents moments d'inertie, donnant la possibilité de trouver les coefficients à puissances de la fréquence cherchée dans l'équation caractéristique basale en forme des quadratures élémentaires.

## О ПОСТРОЕНИИ ВНЕШНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЕКТИРУЕМОГО АВИАЦИОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

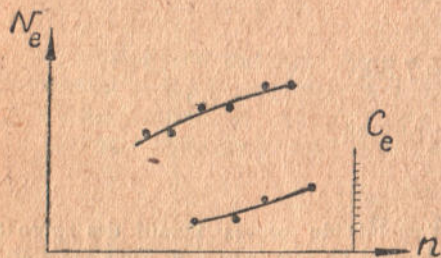
Построение внешней характеристики испытываемого двигателя не вызывает затруднений.

Замерив крутящие (или реактивные) моменты при помощи тормоза или станка при разных нагрузках (при полном открытии дросселя) и соответствующие им обороты, определяем эффективную мощность двигателя по формуле:

$$N_e = \frac{Mn}{716,2} \text{ лс.} \quad (1)$$

( $M$  — кгм,  $n$  — об/мин)

Нанося на график в координатах  $N_e$  —  $n$  величины, соответствующие разным режимам и, соединяя их плавной кривой, получаем внешнюю характеристику двигателя (фиг. 1).



Фиг. 1.

Для построения кривой удельного расхода топлива по внешней характеристике испытываемого двигателя, определяют по существующей методике испытаний, часовой расход топлива  $C_h$  для каждого режима двигателя. Имея значения  $N_e$  для каждого режима и соответствующее  $C_h$ ,

определяют удельный расход топлива, по формуле

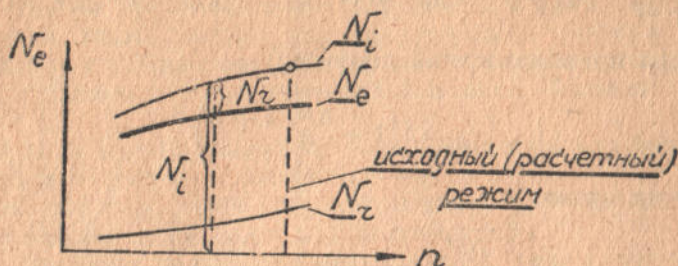
$$C_e = \frac{C_h}{N_e} \text{ кг/лсч.} \quad (2)$$

Нанося на график в координатах  $C_e$  —  $n$  значения  $C_e$  для разных режимов двигателя и, соединив их плавной кривой, получают кривую удельного расхода топлива по внешней характеристике (фиг. 1).

Построение внешней характеристики проектируемого двигателя связано с рядом трудностей.



Для получения графика  $N_e = f(n)$ , приходится строить графики  $N_i = f_1(n)$  и  $N_r = f_2(n)$ . Величины  $N_e$  при разных оборотах, определяют как разность  $N_i - N_r$  (фиг. 2).



Фиг. 2.

Индикаторная мощность двигателя может быть выражена уравнением:

$$N_i = \frac{30}{632} \frac{H_u \eta_i}{L_0 \alpha} i V_h \gamma_0 \eta_v n^3. \quad (3)$$

Приняв для внешней характеристики

$$\frac{\eta_i}{\alpha} \approx \text{const},$$

уравнение (3) можно переписать в таком виде:

$$N_i = K \eta_v n, \quad (4)$$

где

$$K = \frac{30}{632} \frac{H_u \eta_i}{L_0 \alpha} i V_h \gamma_0 \approx \text{const} \text{ (для определенного двигателя).}$$

Таким образом, для построения зависимости  $N_i = f_1(n)$ , необходимо знать закон изменения коэффициента наполнения  $\eta_v$  по числу оборотов (для исходного расчетного режима известны все значения, как то:  $N_e$ ,  $N_i$ ,  $N_r$ ,  $\eta_v$ ,  $\eta_i$ ,  $V_h$  и т. д.).

Выясним зависимость  $\eta_v$  от оборотов.

$$\eta_v = \frac{1}{\varepsilon - 1} \left( \varepsilon \frac{P_a}{P_0} - \frac{P_r}{P_0} \right) \frac{T_0}{T_0 + \Delta t}. \quad (5)$$

<sup>1</sup> Проф. Б. С. Стечкин. Теория авиационного двигателя. М—1931 г.



Обозначив

$$\frac{T_0}{T_0 + \Delta t} = \delta; \quad P_0 - P_a = \Delta P_a; \quad P_r - P_0 = \Delta P_r \text{ и } \frac{\Delta P_r}{\Delta P_a} = a,$$

после ряда преобразований получим:

$$\eta_v = \delta \left( 1 - \frac{\Delta P_a}{P_0} \frac{\varepsilon + a}{\varepsilon - 1} \right). \quad (5')$$

В то же время:

$$\frac{\Delta P_a}{P_0} = 0,0001225 \frac{\Delta P_a}{\gamma};$$

$$\frac{\Delta P_a}{\gamma} = \xi_1 \frac{W_1^2}{2g} + \xi_2 \frac{W_2^2}{2g} + \xi_3 \frac{W_3^2}{2g}$$

где:  $W_1, W_2, W_3$  — средние скорости в диффузоре карбюратора, трубопроводах и клапанах,

$\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — коэффициенты сопротивления карбюратора, трубопроводов и клапанов.

Пользоваться приведенными выражениями для выяснения закона изменения  $\eta_v$  по оборотам проектируемого двигателя не представляется возможным.

Можно построить график  $N_i = f_1(n)$ , зная закон изменения среднего индикаторного давления  $p_i$  — по оборотам.

Однако, в настоящее время нет формул, представляющих закон изменения  $p_i$  по оборотам.

Таким образом, для построения кривой  $N_i = f_1(n)$  необходимо знать закон изменения  $\eta_v$  по оборотам, а такого, могущего иметь практическое применение — нет.

Для установления закона изменения  $\eta_v$  по оборотам проектируемого двигателя поступают, обычно, так:

Принимают изменение  $\eta_v$  пропорциональным наполнению в двигателе такого же типа, как и проектируемый. Для этого необходимо иметь график зависимости  $\eta_v$  от оборотов для двигателя, подобного<sup>1)</sup> проектируемому.

Таких графиков в литературе очень мало.

Опубликованные профессором Л. Марксом<sup>2)</sup> графики изменения  $\eta_v$  от оборотов для двигателей Испано-Сюиза 300 и Ли-

<sup>1)</sup> В данном случае, как и в дальнейшем, условно применяется термин „подобный двигатель“. Имеется в виду двигатель такого же типа, как проектируемый, т. е. одинаковое расположение и число цилиндров такая же система питания и охлаждения, примерно одинаковое число оборотов и литраж.

<sup>2)</sup> Проф. Л. Маркс — „Авиационные двигатели“ — перевод с английского под редакцией проф. Брилинга. М — 1925.



берти использованы рядом авторов по теории авиадвигателя (Стечкин, Александров, Кужма и др.<sup>1)</sup>).

Эти данные, относящиеся к устарелым конструкциям, нельзя применять при проектировании современных авиадвигателей.

Имеется также целый ряд эмпирических формул, дающих изменение  $\eta_v$  по оборотам. Однако, эти формулы пригодны только для определенного типа двигателей и дают большие погрешности.

Данных о законе изменения  $p_i$  по оборотам для разных конструкций двигателей в литературе очень мало.

Таким образом, строя характеристику  $N_i = f_1(n)$  указанными выше методами, допускают ряд неточностей.

При проектировании двигателя, всегда налицо внешние характеристики двигателей, подобных проектируемому.

Следует признать более рациональным для выяснения закона изменения  $\eta_v$  в двигателе, подобном проектируемому, разложить имеющуюся внешнюю характеристику на 2 кривые:

$$N_i = f_1(n) \text{ и } N_r = f_2(n).$$

Для этого, выбрав величину механического *кпд* —  $\eta_m$ , определяют значение  $N_r$  для расчетного исходного режима. Закон изменения  $N_r$  по оборотам можно с достаточной точностью принять для современных двигателей:

$$N_r \approx Dn^2, \quad (6)$$

где  $D = \text{const}$  для данной конструкции

$$\text{и} \quad \frac{N_{r1}}{N_{r2}} \approx \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2. \quad (6')$$

Построив кривую  $N_r = f_2(n)$ , нетрудно построить кривую  $N_i = f_1(n)$ . По ф-ле (4)

$$N_i = k\eta_v n.$$

Отсюда можно установить закон изменения  $\eta_v$  по оборотам и построить график  $N_i = f_1(n)$  для проектируемого двигателя.

Для построения графика изменения удельного расхода топлива по внешней характеристике, также необходимо иметь закон изменения механического *кпд* —  $\eta_m$  по оборотам:

$$C_e = \frac{C_i}{\eta_m}; \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Стечкин — Теория авиационного двигателя. М — 1931 г.

Александров — Характеристики авиадвигателя (Авиационные двигатели, кн. I, ВВА РККА).



$$\eta_m = 1 - \frac{N_r}{N_i} = \frac{1}{1 + \frac{N_r}{N_i}} \quad (8)$$

Для внешней характеристики можно принять

$$C_i \approx \text{const.}$$

Как выяснено выше, закон изменения  $N_r$  по оборотам для проектируемого двигателя точно установить невозможно. Независимо от метода построения внешней характеристики, кривую  $N_r = f_2(n)$  приходится строить по приближенным данным. Если нет данных изменения  $N_r$  для двигателя, подобного проектируемому, принимают  $N_r = Dn^2$ .

Как было обусловлено выше, для построения внешней характеристики проектируемого двигателя, необходимо иметь закон изменения  $\eta_v$  или  $p_i$  по оборотам для двигателя, подобного проектируемому.

Не всегда представляется возможным получить эти данные. Поэтому, наиболее целесообразным будет использование внешней характеристики существующего двигателя, подобного проектируемому, для построения внешней характеристики двигателя, минуя промежуточные операции, как-то: предварительное построение  $N_i = f_1(n)$  и  $N_r = f_2(n)$ .

Внешняя характеристика интересует нас в пределах от  $n_0$  до  $(0,75 - 0,8)n_0$ , где  $n_0$  — исходное, расчетное число оборотов двигателя.

Любую внешнюю характеристику можно привести к уравнению вида:

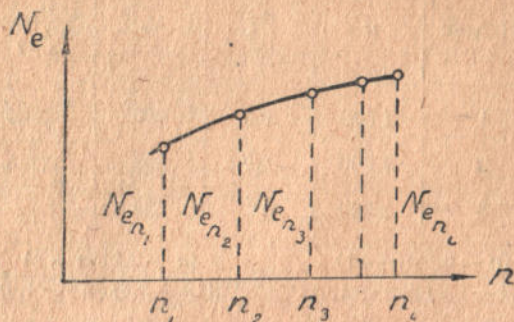
$$N = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \alpha_3 n^3 + \dots + \alpha_i n^i \quad (9)$$

Для получения уравнения внешней характеристики воспользуемся интерполяционной формулой Лагранжа:

$$N_e = \frac{(n - n_2)(n - n_3)(n - n_4) \dots (n - n_i)}{(n_1 - n_2)(n_1 - n_3)(n_1 - n_4) \dots (n_1 - n_i)} N_{en1} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{(n - n_1)(n - n_3)(n - n_4) \dots (n - n_i)}{(n_2 - n_1)(n_2 - n_3)(n_2 - n_4) \dots (n_2 - n_i)} N_{en2} + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{(n - n_1)(n - n_2)(n - n_3) \dots (n - n_{i-1})}{(n_i - n_1)(n_i - n_2)(n_i - n_3) \dots (n_i - n_{i-1})} N_{eni} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$



Для интересующего нас ограниченного диапазона внешней характеристики (от  $n_0$  до  $0,75 - 0,8 n_0$ ), функция может быть достаточно точно представлена 3 точками.



Фиг. 3.

Формула Лагранжа переписывается так (для 3-х точек):

$$N_e = \frac{(n - n_2)(n - n_3)}{(n_1 - n_2)(n_1 - n_3)} N_{en1} + \frac{(n - n_1)(n - n_3)}{(n_2 - n_1)(n_2 - n_3)} N_{en2} + \frac{(n - n_1)(n - n_2)}{(n_3 - n_1)(n_3 - n_2)} N_{en3}. \quad (11)$$

Так как нас интересуют не абсолютные числовые значения  $N_e$  при разных оборотах, а закон изменения  $N_e$  по  $n$ , в дальнейшем будем принимать значения  $N_e$  и  $n$  в исходной (расчетной) точке равными единице, а другие значения  $N_e$  и  $n$  будем выражать в долях единицы, соответственно исходной точке.

Уравнение внешней характеристики с достаточной для практики точностью, может быть представлено так:

$$N_e = -A_1 n^2 + B_1 n - C_1. \quad (12)$$

Уравнение (12) можно представить в таком виде:

$$\frac{N_{ex}}{N_{eo}} = -A \left( \frac{n_x}{n_0} \right)^2 + B \left( \frac{n_x}{n_0} \right) - C, \quad (13)$$

где:  $N_{eo}, n_0$  — расчетная мощность и соответствующее число оборотов,

$N_{ex}, n_x$  — мощность и обороты, меньшие расчетных.

Пример. Дана внешняя характеристика мотора Гвом-Рон Юпитер  $\varepsilon = 6,45$

$n$	1600	1700	1800	1900	2000
$N_e$	460	485	508	524	538

Определить коэффициенты  $A, B, C$ .  
 Возьмем 3 точки, соответствующие  $n = 2000, 1800$  и  $1600$  об/мин.  
 $N_{e0} = 538$  лс,  $n_0 = 2000$  об/мин.

Индекс	$n$	$\frac{n_x}{n_0}$	$N_e$	$\frac{N_{ex}}{N_{e0}}$
1	1600	0,8	460	0,885
2	1800	0,9	508	0,945
3	2000	1	538	1

$$N_e = \frac{(n-0,9)(n-1)}{(0,8-0,9)(0,8-1,0)} 0,855 + \frac{(n-0,8)(n-1)}{(0,9-0,8)(0,9-1,0)} 0,945 +$$

$$+ \frac{(n-0,8)(n-0,9)}{(1-0,8)(1-0,9)} 1 = -1,75n^2 + 3,88n - 1,13.$$

Помня, что представлены были не абсолютные значения  $N_e$  и  $n$ ,

$$\frac{N_{ex}}{N_{e0}} = -1,75 \left( \frac{n_x}{n_0} \right)^2 + 3,88 \frac{n_x}{n_0} - 1,13;$$

таким образом  $A = 1,75$ ;  $B = 3,88$ ;  $C = 1,13$ .

$$\text{Проверка для } n_x = 1700; \frac{n_x}{n_0} = 0,85.$$

$$N_{ex} = N_{e0} \cdot 0,905 = 538 \cdot 0,905 = 486,9 \text{ лс.}$$

$$\text{Ошибка составляет } \frac{486,9 - 485}{485} = 0,39\%.$$

В табл. I приведены значения коэффициентов  $A, B$  и  $C$ , вычисленные для некоторых авиадвигателей. Коэффициенты определены, по данным внешних характеристик, приведенных в таблице.

Построение внешней характеристики проектируемого двигателя сводится к следующему:

Подобрав двигатель, подобный проектируемому, пользуемся ур-нием (13) и коэффициентами, приведенными в таблице 1<sup>1)</sup>.

Задаемся несколькими значениями  $\frac{n_x}{n_0} = 0,95; 0,9; 0,85 \dots$  и определяем  $N_{ex}$ .

$$N_{ex} = N_{e0} \left[ -A \left( \frac{n_x}{n_0} \right)^2 + B \left( \frac{n_x}{n_0} \right) - C \right] \quad (13')$$

1) Количество моторов, представленных в таблице, недостаточно. Однако, никаких трудностей не представляет вычисление коэффициентов для любого двигателя при наличии внешней характеристики.



Таблица 1

№№ пп.	Мотор	Число и распол. цилиндр.	Охлаж- дение	Степень сжатия	D/S	N <sub>40</sub>	n <sub>0</sub>	Данные внешней хар-ки			Коэффициенты			
								$\frac{N_{e1}}{n_1}$	$\frac{N_{e2}}{n_2}$	$\frac{N_{e3}}{n_3}$	A	B	C	
1	AM-34-P	12,	е о н к я д о с	6,0	160/190	740	1 800	660 1 600	740 1 800	$\frac{800}{2 000}$	1,15	2,94	0,79	
2	N.....	12,		6,2	160/190	945	2 300	860 1 900	914 2 100	$\frac{945}{2 300}$	1,5	3,25	0,75	
3	M-17-Ф	12,		6,0	160/190	730	1 650	600 1 300	678 1 500	$\frac{740}{1 700}$	0,85	2,3	0,45	
4	BMW-VI	12,		6,0	160/190	680	1 600	628 1 400	660 1 500	$\frac{680}{1 600}$	2,28	4,89	1,61	
5	Кергясс Конкверрор	12,		5,8	130/158	610	2 400	520 2 000	570 2 200	$\frac{610}{2 400}$	1,19	3,065	0,875	
6	Испано-Сю- иза 12Y bis	12,		5,8	150/180	785	2 400	745 2 000	775 2 200	$\frac{785}{2 400}$	1,81	3,62	0,81	
7	M-22	9, звезд.		с н о с	6,5	146/190	568	2 125	543 1 900	557 2 000	$\frac{566}{2 100}$	1,94	4,13	1,19
8	Гном-Рон Юпитер	9, звезд.			6,45	141/190	550	2 125	460 1 600	508 1 800	$\frac{538}{2 000}$	1,75	3,88	1,13
9	Хорнет сер. В	9, звезд.			5,0	158/170	578	1 923	505 1 700	568 1 900	$\frac{590}{2 000}$	1,8	4,2	1,4
10	M-26	7, звезд.			5,5	150/170	318	1 825	275 1 600	295 1 700	$\frac{312}{1 800}$	1,8	4,48	1,68
11	V.....	14, слвоен. звезд.			5,5	146/165	787	2 000	745 1 800	787 2 000	$\frac{818}{2 200}$	0,812	1,968	0,158
12	MG-11	5, звезд.			5,5	125/140	170	1 870	145 1 600	155 1 700	$\frac{165}{1 800}$	0	1,09	0,09

Определив ряд значений  $N_{e,x}$  при разных оборотах, можно построить график  $N_e = f(n)$ .

График зависимости  $N_e = f_2(n)$  не трудно построить согласно ранее изложенному.

Для построения кривой изменения удельного расхода топлива, надо определить значения  $\eta_m$  для разных оборотов. Это не трудно проделать, воспользовавшись формулой (8).

Закон изменения индикаторной мощности по оборотам можно представить, используя ур-ния (13) и (6'), в таком виде:

$$\frac{N_{ix}}{N_{i0}} = \eta_{m0} \left\{ \left[ -A + \left( \frac{1}{\eta_{m0}} - 1 \right) \right] \left( \frac{n_x}{n_0} \right)^2 + B \frac{n_x}{n_0} - C \right\}, \quad (14)$$

где

$$\eta_{m0} = \frac{1}{1 + \frac{N_{r0}}{N_{e0}}}$$

---



## ХАРАКТЕРИСТИКА РАСПОЛОЖЕНИЯ ВИНТОМОТОРНЫХ ГРУПП НА САМОЛЕТАХ

Расположение в. м. г.<sup>1)</sup> на самолетах не носит стандартного характера. Во всех странах мира можно встретить различного типа установки, которые в большинстве случаев спроектированы из „конструктивных соображений“, очень часто без критического анализа, как с точки зрения аэродинамики, так и прочности, механики полета, производственного процесса и пр. Авиация знает много ошибочных решений этого вопроса.

Рассмотрим и проанализируем ряд конструктивных решений вопроса установки винтомоторной группы на самолете.

1. В. м. г. расположены высоко над крылом и крепятся к крылу при помощи кабана.

В каждой моторной гондоле один мотор, который приводит в движение тянущий винт (по материалам Вейль ZFM, № 8, 1932, г. Например: Летаящая лодка „Rohrbach“, Саундерс-роу и др. (см. схему 1).

2. Тандемная установка. Непосредственно на крыле помещена моторная гондола с двумя, расположенными одна за другой, отдельными винтомоторными группами. Передний мотор приводит в движение тянущий винт, вращающийся перед передней кромкой крыла; задний мотор приводит в движение толкающий винт, вращающийся за задней кромкой крыла. При этом винты имеют противоположное направление вращения. Примером таких установок могут служить: летающая лодка Дорнье „Валь“ (2 мотора),<sup>2)</sup> „Суперваль“ (4 мотора). У сухопутных самолетов: Дорнье ДО F, ДО N и у многомоторных летающих лодок „Комета“, „Латекоер“<sup>3)</sup>, „Блерио 5190“, „Лиорэ э Оливье“, „Н—27“ (фиг. 2) и др.

3. Моторы расположены в передней кромке крыла на подмоторной раме. Тянущие винты вращаются перед передней кромкой крыла; например: расположенные на крыльях винтомоторные группы сухопутных самолетов „ПС-9“, „Авро-642“,

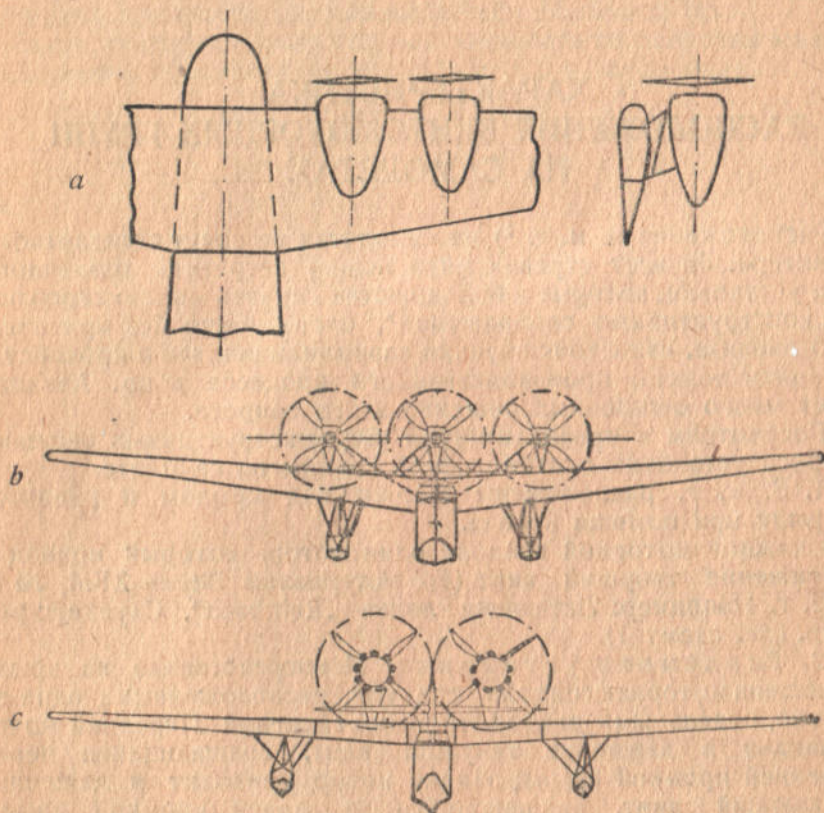
<sup>1)</sup> В. м. г. — сокращение — винтомоторная группа.

<sup>2)</sup>, <sup>3)</sup> по материалам ZFM № 8 1932.



„Дуглас“ (фиг. 3), „Роланц“ - Рорбаха, „Инфлексибль“ Рорбаха, G-24 и G-31 Юнкерса, двухмоторные сухопутные самолеты Юнкерса G-36 и Фокке-Вульф GL 18.

Схема расположения 1.



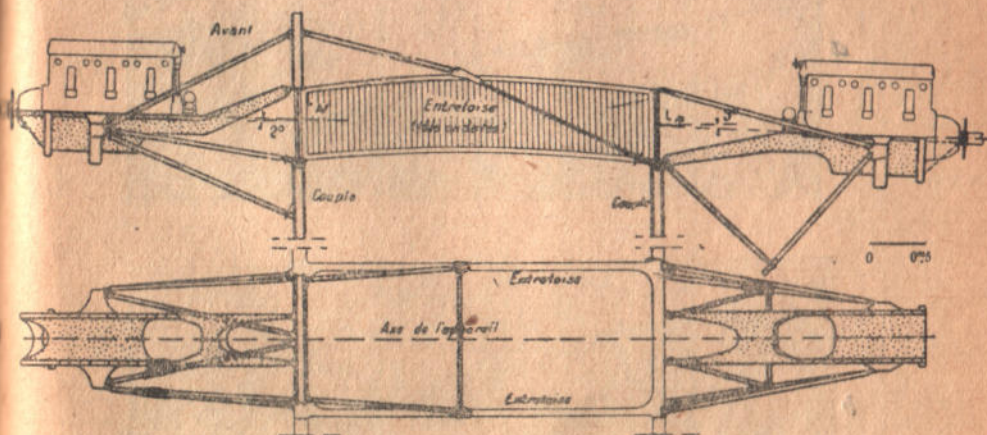
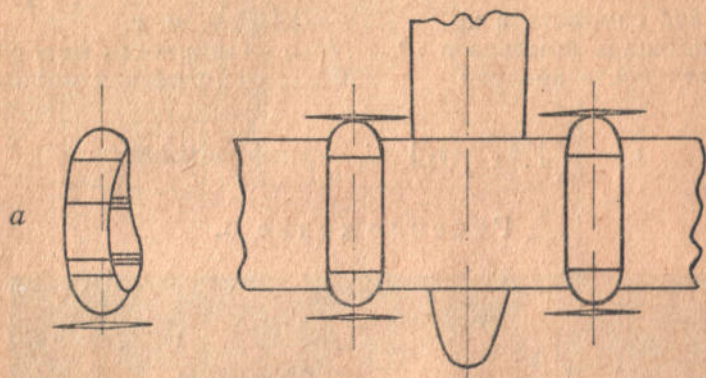
Фиг. 1.

Двухмоторный гидроплан Арадо WS1, четырехмоторный моноплан Рорбаха, заводов Цепелина, Штаакена, пятимоторная летающая лодка Пенюэ-Ришара и др. (см. схему 2).

4. Моторы расположены в гондole и подвешены под крылом. Тянущие винты при вращении находятся на незначительном расстоянии от передней кромки крыла. Такая конструкция встречается на четырехмоторных сухопутных самолетах Фоккера типа F-VIII при в. м. г., расположенных по бокам, у трехмоторных сухопутных самолетов Фоккера (F-VII—3m Fx), трехмоторных сухопутных самолетов Форда, на двухмоторном сухопутном самолете „Латекюэр“ LAT—15 и др..



Приведенные типы самолетов являются только некоторыми из многочисленных примеров, которые немецкий исследователь ВЕЙЛЬ положил в основу сравнения четырехмоторных самолетов при 1-м, 2-м, 3-м и 4-м расположениях по имеющимся у него результатам исследований фирм, производящих эти самолеты.



Фиг. 2.

§ 1

Аэродинамическая оценка положения В. М. Г. на самолетах.

Уменьшение потребной мощности при заданном полетном весе зависит от аэродинамического качества всего самолета. Как известно, добавочное сопротивление вследствие взаимного

влияния крыла, винта и мотоустановки увеличивает  $C_{x\text{сам}}$  и этим увеличивает потребную мощность для горизонтального полета.

$$N_{\text{потр}} = \frac{G \sqrt{\frac{G}{S}}}{75 \sqrt{\rho}} \quad \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\text{const}}{\varepsilon} < N_{\text{мот.}} \eta$$

$G$  — вес самолета в кг

$S$  — площадь крыльев в м<sup>2</sup>

$\rho$  — плотность воздуха

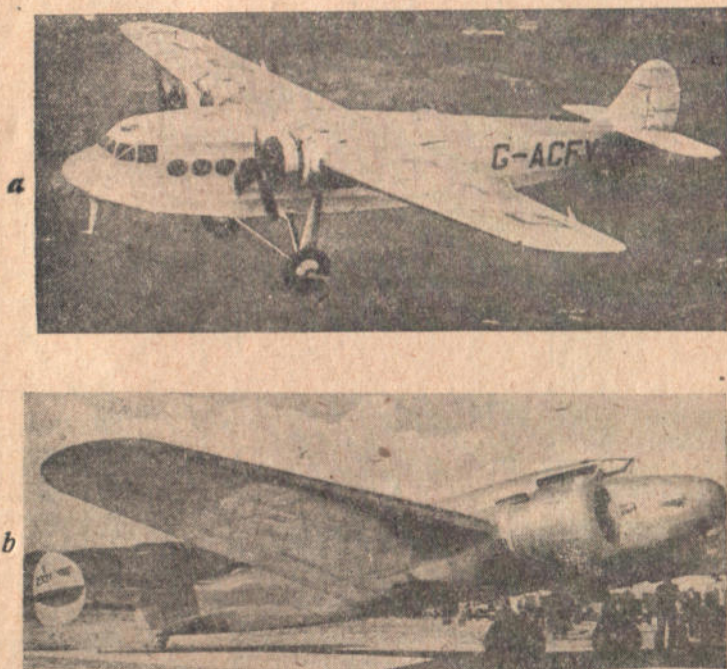
$\eta$  — КПД в. м. г.

$N_{\text{мот}}$  — мощность мотора

$N_{\text{потр}}$  — потребная мощность

$$\varepsilon = \frac{C_y}{C_x} \sqrt{C_y} = KV \overline{C_y} \text{ — коэф. мощности.}$$

### Расположение 3.



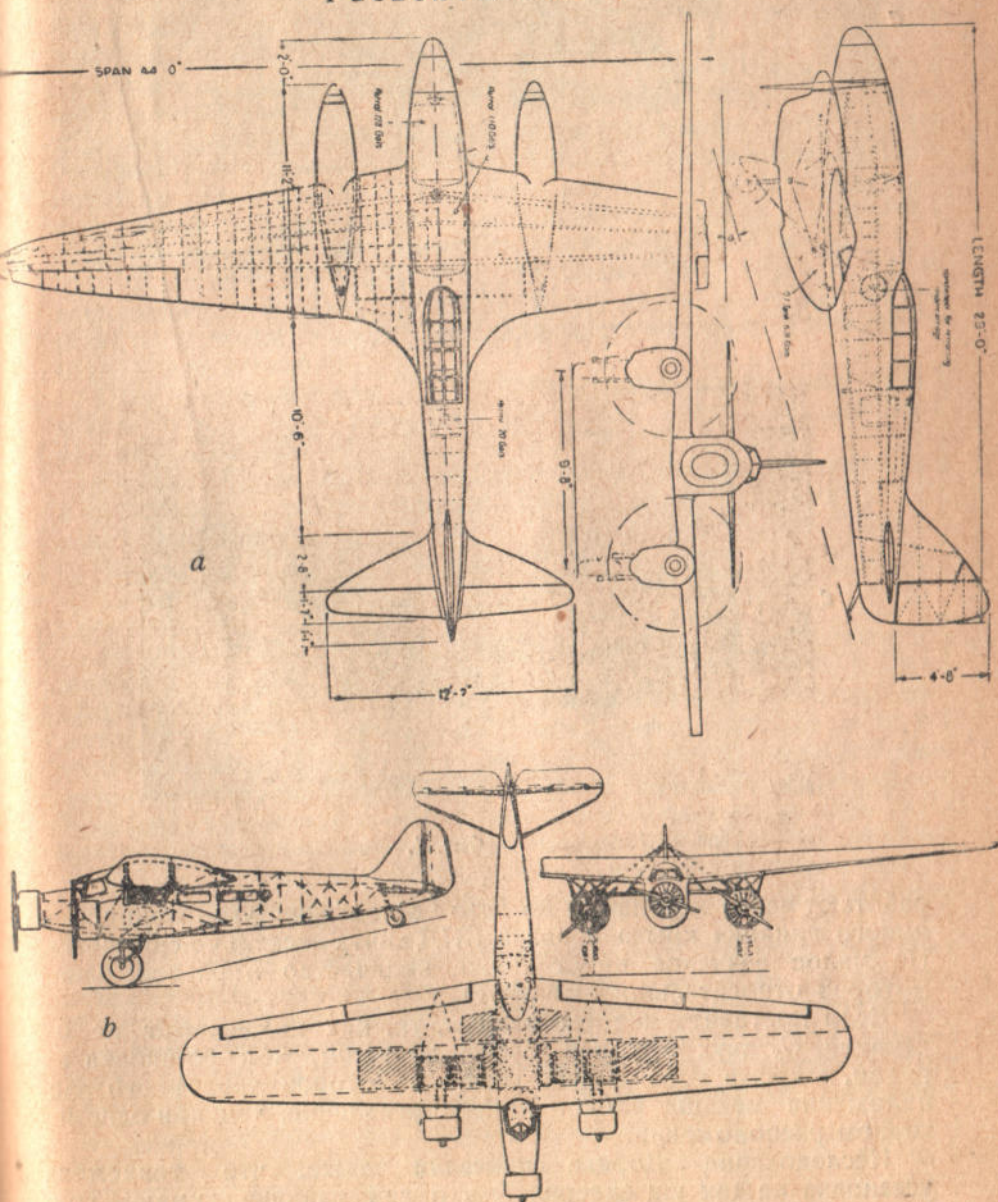
Фиг. 3.

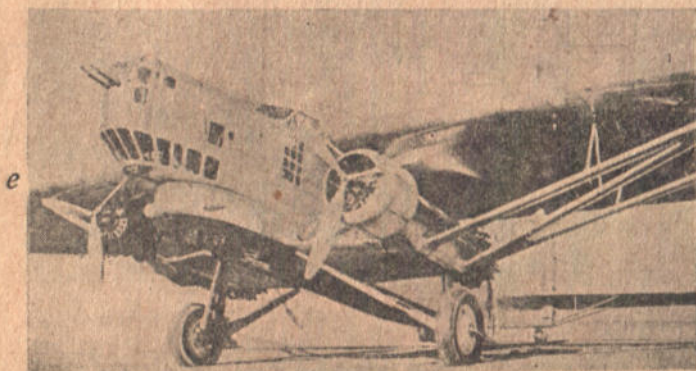
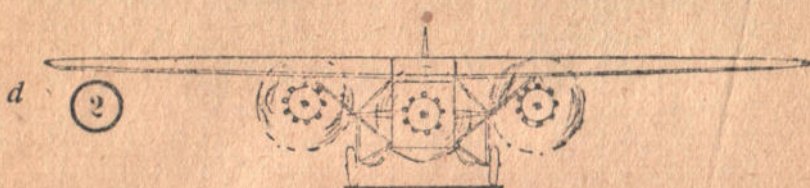
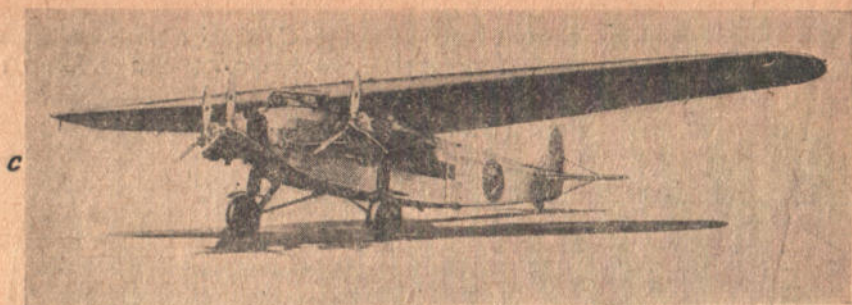
Таким образом добавочное сопротивление вследствие взаимного влияния нужно довести до минимума, должна быть исключена возможность нарушения струи потока; КПД винтов должен приближаться к максимальному теоретическому значению.



У многомоторных самолетов значение  $C_x$  будет наименьшим, когда моторы установлены в крыле или фюзеляже и винты

Расположение 4.





Фиг. 4.

работают через передачу, но зато вследствие увеличения взаимного влияния крыла и винта КПД винта несколько снижается. Не малое значение имеет также количество и расположение моторов относительно друг друга.

Если поставить моторы тандем, то, как показывают исследования,  $C_x$  двух моторов будет меньшим, чем установка их рядом, и кроме того форма гондолы моторов тандемного расположения меньше влияет на сопротивление, чем при одномоторном расположении.

Исследования Дорнье показали также, что тандемная установка не так уж скверна, как о ней раньше думали. Толкающие винты показали не плохой эффект сравнительно с тя-



нушими на испытании гигантских самолетов Штаакена, Дорнье и самолетов Фоккера, имеющих тандемную установку моторов. То же подтвердили и испытания в американских трубах: потеря в тяге мотора при тандемном расположении почти не обнаруживается, если винты находятся на достаточном расстоянии друг от друга и вращаются в противоположном направлении.

Рассуждения Визельбергера по поводу влияния месторасположения винтомоторных групп говорят, что винт, вращающийся над крылом вблизи передней кромки крыла, при больших углах атаки способствует срыву потока при гораздо меньших углах атаки, т. е. уменьшает значения критического угла атаки и уменьшает также значения  $C_{u\max}$ . (Подробнее см. § 2, полярные диаграммы исследования НАСА<sup>1)</sup>).

По испытаниям США в аэродинамической трубе  $D=6$  м. выяснилось, что разница между отдельными расположениями в. м. г. с точки зрения аэродинамического сопротивления и КПД винта невелика.

При расположениях 1 и 4 получаются одинаковые КПД в том случае, если площадь, ометаемая винтом, лежит ниже плоскости крыла.

Однако такое низкое расположение трудно осуществимо и поэтому оно не применяется. Такие же максимальные КПД дает и расположение 3, если винт находится несколько дальше от крыла, но это менее выгодно с конструктивной точки зрения.

Для расположения 3 потеря в КПД выражается в 2% (0,76 вместо 0,78).

По английским данным оказалось, что при первом расположении расстояние между осью воздушного винта и хордой крыла должно быть, по крайней мере, в два раза больше диаметра (или высоты конструкции) моторной гондолы, если хотят избежать взаимного влияния крыла и моторной гондолы. При меньших расстояниях добавочное сопротивление от моторной гондолы возрастало в несколько раз и доходило до 5—18-ти кратного сопротивления свободно обдуваемой моторной гондолы.

В том случае, когда ось винта лежала в хорде крыла, общее сопротивление составляло примерно 0,9 суммы отдельных сопротивлений.

Очень ценны также английские исследования сопротивления остановленных винтов. При этом очень важно то положение, в котором остановился винт. Оказывается, что при неработающем винте сопротивление будет наибольшим в том случае, когда ось винта лежит над крылом. (Расположение 1). При этом расположении сопротивление будет значительно больше, чем сумма сопротивления крыла и винта.

---

<sup>1)</sup> См. ссылку на стр. 232.



Это явление наблюдается при всех углах атаки. Особенно ярко оно выражено при больших углах атаки, т. е. как раз в том случае, когда чаще всего приходится летать с выключенным мотором. Если ось винта находится вблизи хорды крыла, то сопротивление будет значительно меньше, а именно, при небольших углах атаки ( $C_y = 0,35$ ) оно будет еще меньше, чем сумма сопротивления крыла и винта.

Следует отметить еще один интересный факт, выяснившийся при испытании влияния положения винта в трубе. Если винт находится в горизонтальном положении, то наблюдается интерференция и в этом положении зафиксировано наибольшее сопротивление.

Явления интерференции не наблюдалось в том случае, если винт расположен перед крылом под углом  $45^\circ$  и когда винт расположен над крылом, а лопасти находятся под углом  $90^\circ$ . Таким образом при остановленном винте преимущества с точки зрения аэродинамики следует ожидать в 4-м случае.

Для одномоторных самолетов наилучшим расположением с точки зрения аэродинамики следует считать расположение специально сконструированных перевернутых моторов.

## § 2

### Комбинации моторной гондолы и винта, различно размещенных относительно крыльев.

В настоящем разделе мы хотим дать результаты исследования различных комбинаций сочетания моторной гондолы, крыла и винта по опытам НАСА, проведенным в 20-ти футовой винтовой трубе.

Различные положения моторной гондолы на самолете вызывают интерференцию, которая в большей или меньшей степени влияет на лобовое сопротивление, подъемную силу, тягу винта и его КПД.

Исследования НАСА показали, что:

1. Наибольший КПД установки будет в случае моторной гондолы, закрытой обтекателем НАСА.

2. Заделка гондолы в крыло выгодна в том случае, если она закрыта обтекателем и расположена на определенном расстоянии от передней кромки крыла.

3. При заделке мотогондолы в крыло, капот НАСА заделывать не следует. В случае расположения мотогондолы впереди крыла следует также избегать установки боковых кронштейнов на гондоле.

Наивыгоднейшим вариантом для моторной гондолы и тянущего винта, как показали результаты исследования, является гондола, закрытая обтекателем НАСА, размещенная перед крылом так, чтобы винт отстоял от передней кромки крыла на расстоянии, равном примерно  $25\%$  хорды крыла<sup>1)</sup>. Если при

<sup>1)</sup> „Report National Advisory committee For Aeronautics“, февраль 1935 г.



таком расположении мотора снять обтекатель, то это дает значительное уменьшение подъемной силы, особенно на больших углах атаки. Надлежащее расположение моторных гондол и тщательное их закрытие обтекателями имеет особенно большое значение на больших скоростях полета. Ранее произведенные испытания NASA обтекаемой гондолы мотора с воздушным охлаждением, помещавшейся в 21 различных положениях по отношению к толстому монопланному крылу, показали, что положение мотогондолы непосредственно перед крылом является наилучшим. Если из практических соображений требуются менее выгодные положения мотогондолы то они ни в коем случае не должны помещаться слишком близко к крылу, независимо от положения их под или над крылом. Это положение, вызванное необходимостью улучшения аэродинамики машины, отрицательно сказывается на весе винтомоторной установки и в частности вызывает необходимость увеличения сечений элементов под моторной рамой вследствие увеличения вылета системы.

Можно предполагать, что для тяжелых машин это увеличение веса является величиной незначительной сравнительно с весом всей машины, но значительно выгоднее выигрывать в аэродинамике.

### § 3

#### Влияние моторных коков на подъемную силу и лобовое сопротивление крыла.

Выражение результатов испытания приводилось к значениям обычных коэффициентов:

$$\text{Подъемная сила } C_y = \frac{Y}{qS}$$

$$\text{Лобовое сопротивление } C_x = \frac{X}{qS}$$

$$\text{Момент } C_m = \frac{M}{qcS}$$

Где:  $q = \rho v^2$

$\rho$  — массовая плотность воздуха,

$v$  — скорость мт/сек (скорость полета),

$S$  — площадь крыла м<sup>2</sup>,

$C$  — хорда крыла в метрах,

$Y$  — подъемная сила в кг,

$X$  — лобовое сопротивление в кг,

$M$  — момент крыла в кгм.

(Все моменты брались относительно точки, находящейся на

$\frac{1}{4}$  хорды крыла).



Данные для работающего пропеллера приводились к обычным коэффициентам.

$$\alpha = \frac{T - \Delta X}{\rho n^2 D^4}; \quad \beta = \frac{N_{лс}}{\rho n^3 D^5}$$

Где:  $T$  — тяга винта (по валу), работающего впереди крыла.  
 $\Delta X$  — изменение лобового сопротивления крыла от обдувки его пропеллером,

$T - \Delta X$  — эффективная тяга,

$n$  — число оборотов в единицу времени,

$D$  — диаметр винта,

$N'_{лс}$  — мощность мотора,

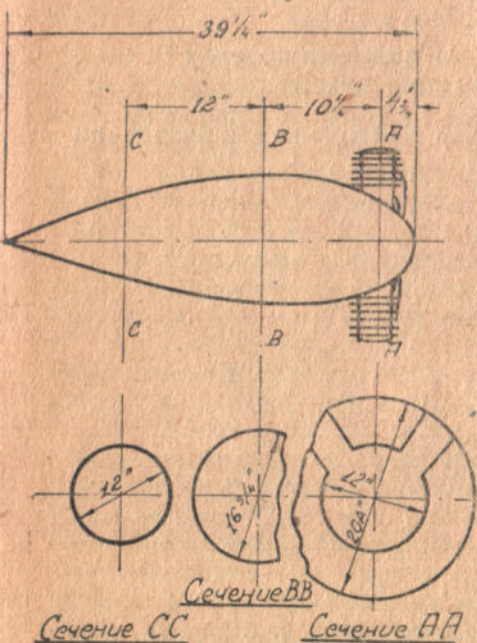
$$\eta_{э} \text{ — эффективный КПД} = \frac{(T - \Delta X) v}{N_{лс}}$$

или

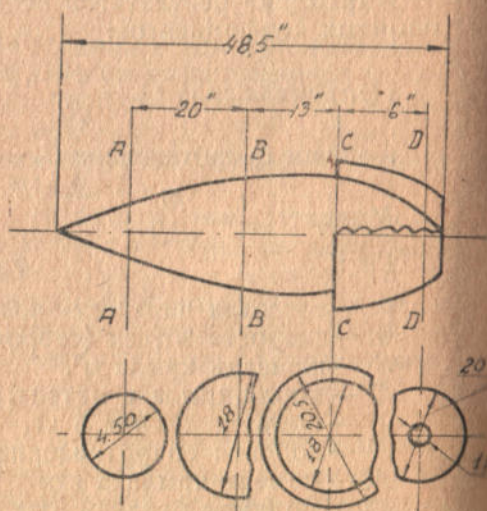
$$\eta = \frac{\alpha v}{\beta n D}$$

Форма мотогондолы, испытанной *NACA*.

(Коэффициенты получены для всех положений гондолы при различных величинах  $\frac{V}{nD}$  и различных углах атаки).



Фиг. 5. Изолированная мотогондола.

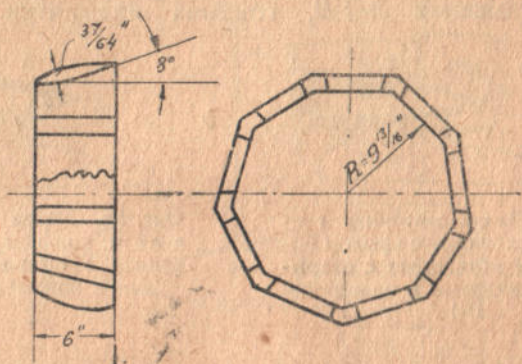


Фиг. 6. Мотогондола с капотом *NACA*.



Картины влияния работы винта на мотогондолу даны на фиг. 13—23. Каждая из кривых представляет собою результат испытания различных комбинаций моторной гондолы и капота, данный в виде полярных диаграмм  $C_y$  по  $C_x$  в сравнении с полярной изолированного крыла.

Отрезки абсциссы между полярной изолированного крыла и полярной какой-нибудь комбинации крыла, гондолы и капота, представляют собою лобовое сопротивление, добавляемое гон-



Фиг. 7.

долой вследствие возникновения интерференции, влияющей также на изменение подъемной силы (отрезок ординат).

На фиг. 13 показаны данные испытаний моторной гондолы и обтекателей в положении В-1-А. Здесь коэффициент подъемной силы  $C_y = 0,2$  соответствует  $0^\circ$  для изолированного крыла.

Как видно здесь лобовое сопротивление, добавляемое малой гондолой с выступающими цилиндрами мотора, приблизительно в 4 раза больше сопротивления, которое добавляется полностью обтекаемой гондолой. Лобовое сопротивление, добавляемое колпаком *NACA* или кольцом с переменными углами при той же гондole, приблизительно в два с половиною раза больше сопротивления, добавляемого полностью обтекаемой гондолой. Эти пропорции соблюдаются приблизительно и на других углах атаки. Следует также отметить потерю подъемной силы на данном угле атаки для гондолы с выступающими цилиндрами мотора.

Преимущества обтекателя вполне очевидны.

Подобные же заключения можно сделать и из фиг. 14 на основании испытания в положении „В“. В этом положении гондола находится отчасти внутри крыла, так что дополнительное лобовое сопротивление невелико. Тем не менее, гондола с выступающими цилиндрами вносит приблизительно в шесть раз, а обруч с переменными углами в четыре раза большее



лобовое сопротивление, чем сопротивление полностью обтекаемой гондолы. Здесь снова совершенно очевидна потеря подъемной силы.

Данные испытания для положения *A-1-B* и *A-2-B<sup>1</sup>*, изображенные на фиг. 15 и 16, носят тот же характер. Результаты испытаний для положения *A-1-B* (фиг. 15) особенно интересны. Здесь обтекатель не дает такого большого преимущества, и оно совершенно исчезает на больших углах атаки. В положении *A-2-B*, гондола находится значительно



Фиг. 8а. Малая моторная гондола, соединенная с крылом посредством обтекателя с открытыми цилиндрами в положении В-1-А.



Фиг. 8б. Малая моторная гондола с кольцом № 3, соединенная с обтекателем и крылом в положении В-1-А.



Фиг. 8с. Малая моторная гондола, обрuch с переменными углами ( $-8^\circ$ ), соединенная посредством обтекателя с крылом в положении А-1-А.



Фиг. 8д. Моторная гондола без обтекателя в положении В-1-А.



Фиг. 8е. Моторная гондола в положении В-1-А.

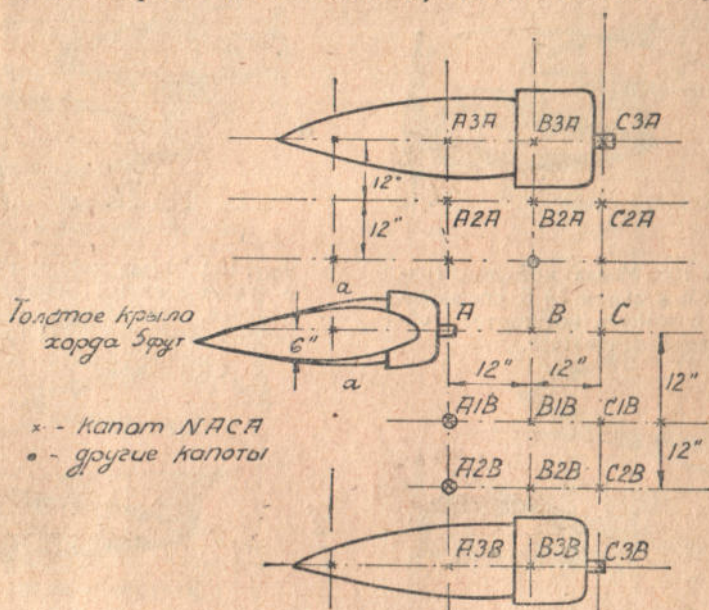
дальше от крыла. Здесь, как видно из фиг. 16, обтекатель показывает более благоприятные результаты, но, опять таки, только на малых углах атаки.

Наилучшим положением мотора, как видно из диаграммы фиг. 16, следует считать положение „В“, т. к. оно исключает потерю подъемной силы.

<sup>1)</sup> Положение мотогондолы относительно крыла разъясняет чертeж 9.

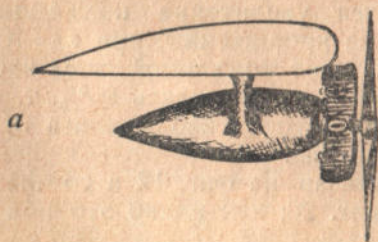


Данные, которые разбирались выше, были получены для моторной гондолы, заделанной в крыло, при разных положениях, кроме положения А-2-В. На фиг. 17 показано влияние обтекателя при положении А-1-В на качество самолета; на фиг. 18 даны результаты испытания положения гондолы над крылом, где скорость потока больше, что явно видно из графика.

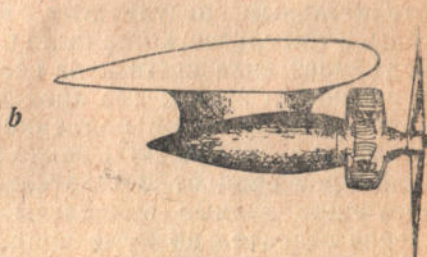


Фиг. 9.

В зависимости от тщательности заделки гондолы в крыло, лобовое сопротивление может быть снижено до 75%, по сравнению с установкой без обтекателя и заделки. Выигрыш в таком случае более явный при положении над крылом и с обтекателем, чем при помещении гондолы под крылом и без обтекателя.



Фиг. 10а. Малая моторная гондола с открытыми цилиндрами, не соединенная с крылом и без обтекателя.

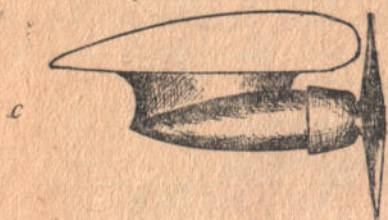


Фиг. 10б. Малая моторная гондола с открытыми цилиндрами, не соединенная с крылом посредством обтекателя.

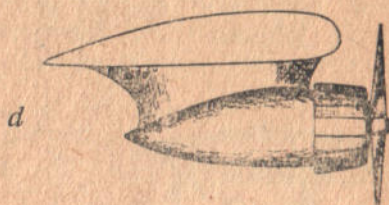


На фиг. 19 даны результаты испытания при наличии боковых кронштейнов при положении „В“.

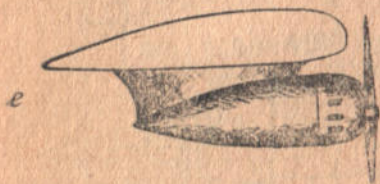
Здесь видно, что кронштейны вызывают дополнительное лобовое сопротивление, доходящее до величины, равной половине сопротивления, происходящего от гондолы с колпаком.



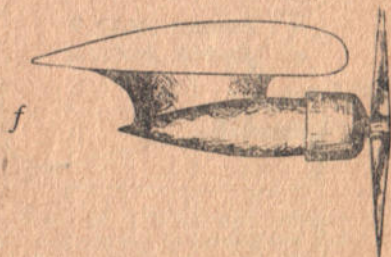
Фиг. 10с. Малая моторная гондола с кольцом № 3, соединенная с крылом посредством обтекателя.



Фиг. 10d. Малая моторная гондола с установленным многогранным обручем, соединенная с крылом посредством обтекателя (угол соединения образует  $8^\circ$ ).



Фиг. 10е. Малая моторная гондола с капотом NASA, соединенная с крылом посредством обтекателя.



Фиг. 10f. То-же, что и на фиг. 10е, но с другим капотом."

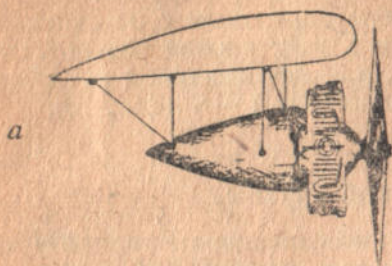
С кольцом 3 и необтекаемой гондолой получается очень незначительный выигрыш от удаления этих кронштейнов. Самым удивительным результатом является увеличение подъемной силы. В том случае, когда были боковые кронштейны, при  $\alpha = 10^\circ$ , подъемная сила составляла всего  $85\%$  от подъемной силы изолированного крыла; без кронштейнов она равнялась  $95\%$ , т. е. почти равнялась той подъемной силе, которая наблюдалась при комбинации обтекаемой гондолы и крыла.

Второй вариант обтекателей показан на фиг. 12 и соответствующие данные приведены на фиг. 20; как видно это положение значительно хуже предыдущих.

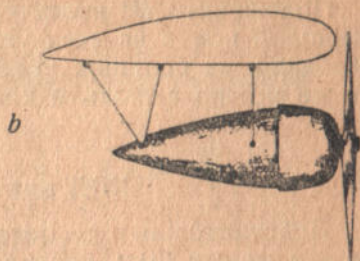
При незначительном эффекте на малых углах атаки, с точки зрения уменьшения лобового сопротивления и увеличения подъемной силы, на больших углах имеем сильное увеличение лобового сопротивления и уменьшение подъемной силы. Особенно



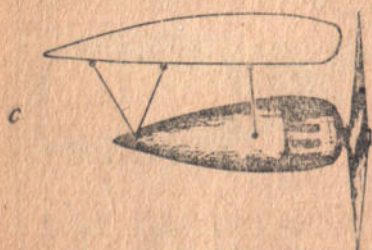
в положении А-1-А. На фиг. 21 даны результаты сравнения гондол с кольцами и обручем переменных углов.



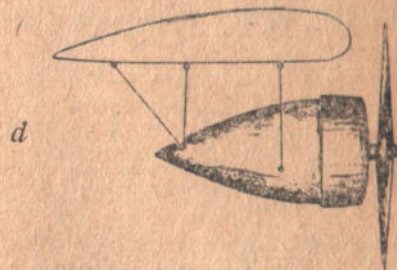
Фиг. 11а. Малая мотогондола с открытыми цилиндрами.



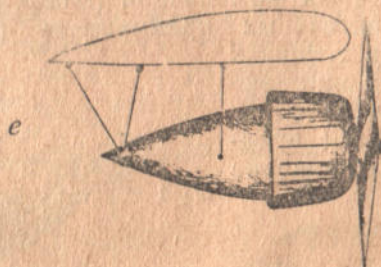
Фиг. 11б. Малая мотогондола с кольцом № 3.



Фиг. 11с. Малая мотогондола с установленным в 8° многогранным обручем.



Фиг. 11д. Малая мотогондола с капотом NACA.



Фиг. 11е. Мотогондола с капотом NACA.

Как видно кольцо „3“ несколько хуже, чем кольцо с переменными углами только на малых углах атаки, а кольцо 1 значительно хуже на всех углах атаки<sup>1)</sup>.

На фиг. 22 и 23 даны результаты испытания гондолы с открытыми цилиндрами и обтекаемых гондол NACA в различных положениях. Как видно из фигуры поляры обтекаемой гон-

<sup>1)</sup> Обруч с переменными углами имеет 9 сторон с разными углами атаки от 6,3° до 8°. Кольца 1 и 3 круглые, фиг. 7.

долы идут почти параллельно, тогда как результаты в случае необтекаемой гондолы указывают, что одно положение является наилучшим при одном угле атаки, а другое при другом.

Положение „В“ является более благоприятным с обтекаемой гондолой почти на всех углах атаки и дает плохие результаты, особенно на больших углах атаки, для необтекаемой гондолы. То же можно сказать и для положения В—1—В (фиг. 18).

#### § 4

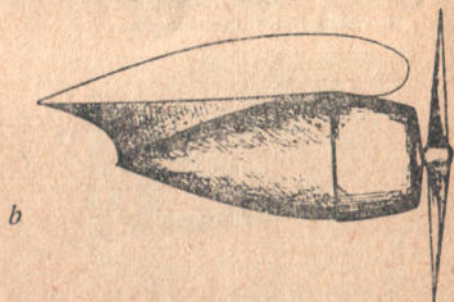
#### КПД винтомоторной группы.

Действительная степень эффективности винтомоторной установки может быть оценена, если учесть влияние работы винта

Винт создает тягу, необходимую для полета самолета, которая будет меняться в за-



Фиг. 12а. Моторная гондоло с капотом NACA в положении В-1-А.



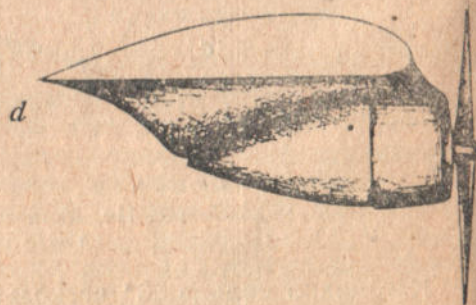
Фиг. 12б. Моторная гондоло с капотом NACA в положении В-1-А.

висимости от различных комбинаций гондолы, винта и крыла. Для оценки сравнительных преимуществ различных систем выясним, при каких условиях получится максимально эффективная тяга винта.

Эффективный КПД представляет собою отношение



Фиг. 12с. Моторная гондоло с капотом NACA в положении А-1-В без обтекателя.



Фиг. 12д. То же с обтекателем.

мощности, идущей на образование эффективной тяги к мощности мотора. Эффективная тяга определяется как тяга винта минус увеличение лобового сопротивления, происходящее за счет обдувки, так что учитывается взаимовлияние винта и крыла.



$$\eta_s = \frac{T - \Delta X}{N_{\text{н.р.}}} v.$$

Так как

$$\frac{T - \Delta X}{\rho n^2 D^4} = C_T \quad (\text{коэф. тяги винта})$$

и

$$\frac{N_{\text{н.р.}}}{\rho n^3 D^5} = C_{\text{н.р.}} \quad (\text{коэф. мощности мотора}),$$

то:

$$\frac{\alpha}{C_{\text{н.р.}}} = \frac{T - \Delta X}{N_{\text{н.р.}}} nD \quad \text{или} \quad \frac{T - \Delta X}{N_{\text{н.р.}}} = \frac{\alpha}{C_{\text{н.р.}}} \cdot \frac{1}{nD}.$$

Откуда

$$\eta_s = \frac{\alpha}{C_{\text{н.р.}}} \cdot \frac{v}{nD}.$$

На преодоление лобового сопротивления гондолы и интерференции с крылом идет доля мощности мотора, уменьшающая  $\eta_s$  на:

$$\eta_{\text{самол.}} = \frac{C_{x_c} - C_{x_z}}{C_{\text{н.р.}}} \cdot \frac{S}{D^2} \left( \frac{v}{nD} \right)^{3.1}$$

$$\eta_q = \eta_s - \eta_{\text{самол.}}$$

т. е.

$$\eta_q = \frac{\alpha}{C_{\text{н.р.}}} \cdot \frac{v}{nD} - \frac{C_{x_c} - C_{x_z}}{C_{\text{н.р.}}} \cdot \frac{S}{D^2} \left( \frac{v}{nD} \right)^3$$

Здесь  $C_{x_c}$  — коэффициент лобового сопротивления самолета (или крыла) в зависимости от того, как происходит испытание.

$C_{x_z}$  — коэффициент лобового сопротивления гондолы при определенном угле атаки.

Эти ф-лы могут быть приложены к любому режиму и, если условия установлены для всех комбинаций гондолы, винта и крыла, то можно сделать непосредственное сравнение.

Научно-исследовательским институтом NASA были подсчитаны факторы для угла атаки  $0^\circ$  изолированного крыла ( $C_y = 0,204$ ) и винта  $\frac{v}{nD} = 0,65$ , соответствующего принятому режиму большой скорости, а также для угла атаки изолированного крыла  $\alpha = 5^\circ$  ( $C_y = 0,326$ ) и  $\frac{v}{nD} = 0,42$ , соответствующего взлету. Большая поступь есть средняя величина, соответствующая максимальному КПД эксперимента.

1) При отсутствии добавочного лобового сопротивления

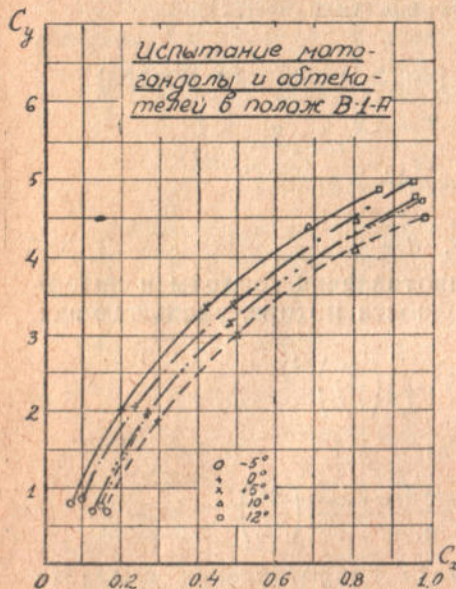
$$X_{\text{самол.}} = (C_{x_c} - C_{x_z}) \rho S v^2 \quad X_{\text{сам}} v = (C_{x_c} - C_{x_z}) \rho S v^3 = N'_{\text{н.р.}}$$

разделим обе части на  $\rho n^3 D^5$ , тогда

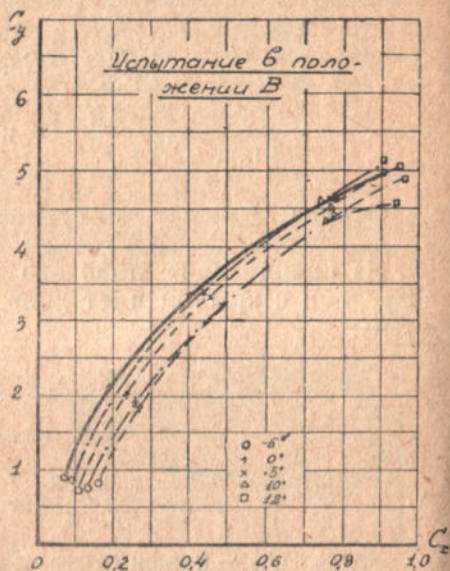
$$C'_{\text{н.р.}} = \frac{(C_{x_c} - C_{x_z}) S v^3}{n^3 D^5} = (C_{x_c} - C_{x_z}) \frac{S}{D^2} \left( \frac{v}{nD} \right)$$

$$\eta_s = \frac{C_{\text{н.р.}}}{C_{\text{н.р.}}} = \frac{C_{x_c} - C_{x_z}}{C_{\text{н.р.}}} \cdot \frac{S}{D^2} \left( \frac{v}{nD} \right)^3.$$

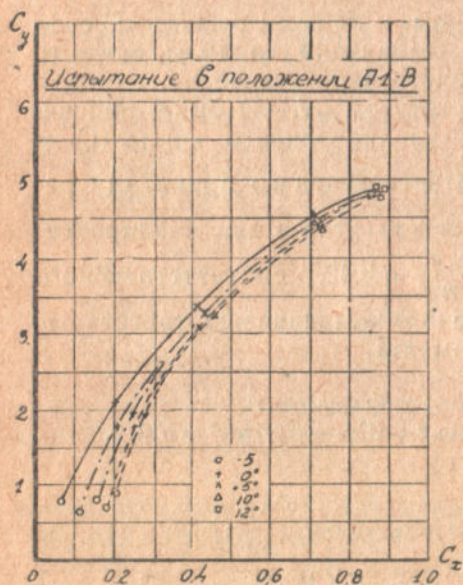
Соответствующая поступь взлета есть средняя величина, полученная при допущении, что скорость взлета равна  $60\% v_{max}$



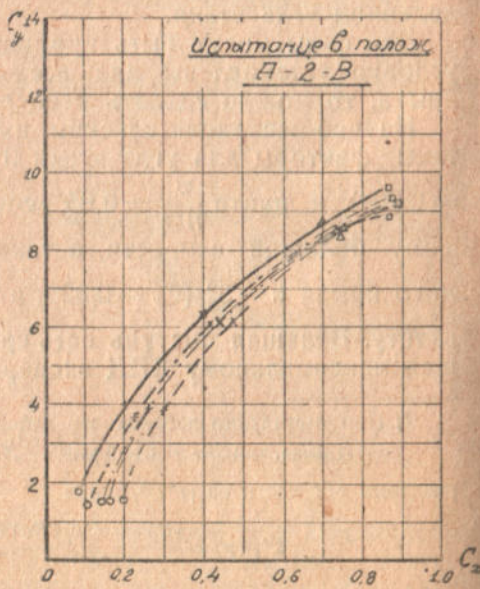
Фиг. 13.



Фиг. 14.



Фиг. 15.

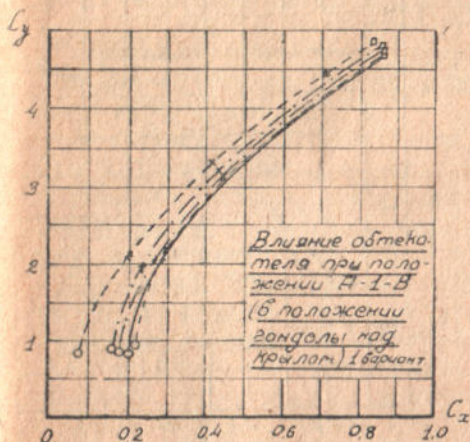


Фиг. 16.

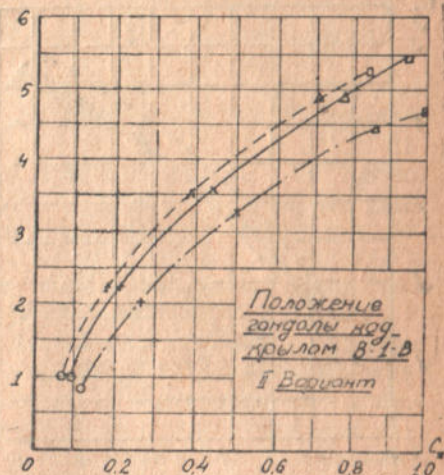


и  $N_{max}$  мотора и мотор развивает постоянный момент, что достаточно верно для большинства авиационных моторов. Угол атаки был подобран так, чтобы получилась подъемная сила в присутствии винта, как при изолированном крыле.

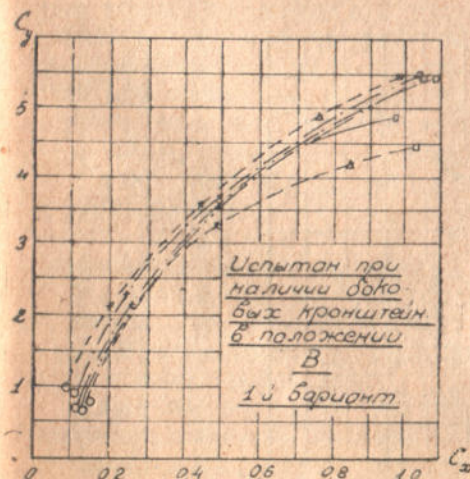
Факторы, полученные таким образом для гондол и капотов в различных положениях, показали, что винт имеет большое влияние на конечный результат. Прежде всего заметно влияние



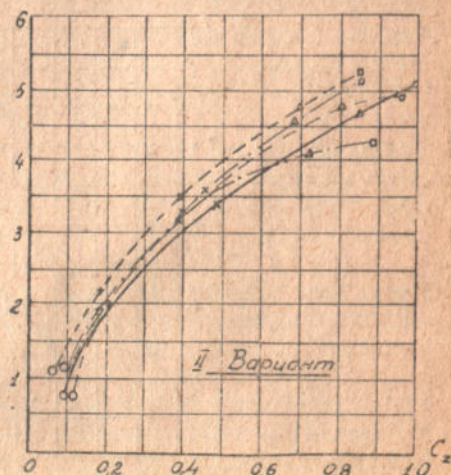
Фиг. 17.



Фиг. 18.



Фиг. 19.

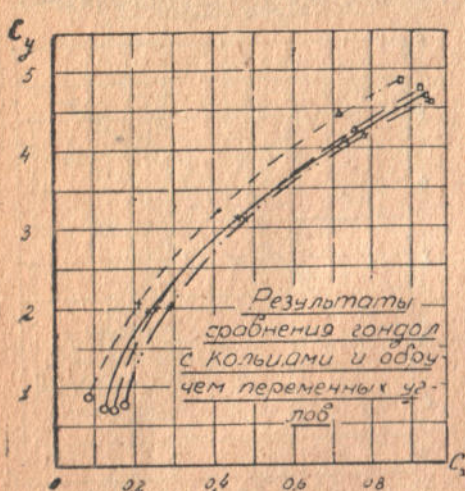


Фиг. 20.

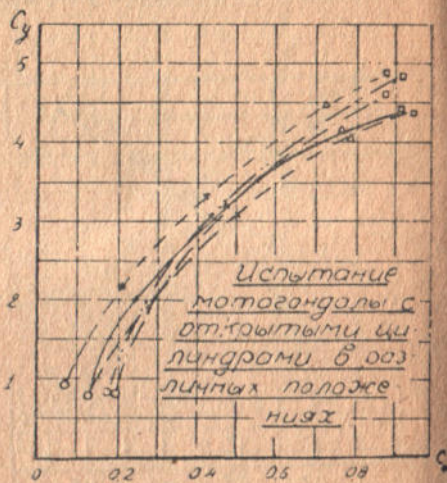
капота на эффективный КПД. При больших скоростях гондола с капотом НАСА дала наименьший эффективный КПД, а кольцо № 1 на малой гондоле наибольший.



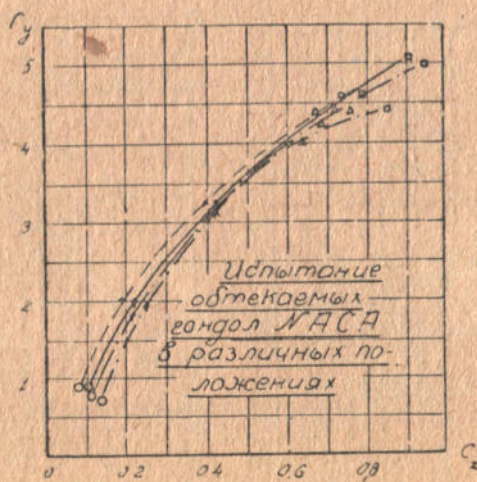
Эффективный КПД с малой гондолой без капота также значительно выше, чем для гондолы с капотом НАСА. Эти результаты вполне согласуются с результатами других испытаний. Очевидно, что тела с большим лобовым сопротивлением, находящиеся за винтом, дают более высокий эффективный КПД, чем тела с малым лобовым сопротивлением. Другими словами, боль-



Фиг. 21.



Фиг. 22.



Фиг. 23.

ший эффективный КПД частично компенсирует большое лобовое сопротивление изолированного тела.



Однако, эти благоприятные изменения эффективного КПД недостаточны для того, чтобы дать более высокие ( $\eta_D$ ) действительные КПД. В случае малой гондолы без капота и с кольцом 1, лобовое сопротивление очень велико, так что чистый результат будет хуже, чем для гондолы с капотом *NACA*, во всех случаях.

## § 5

### Влияние моторных коков и крыло толстого профиля.

Довольно обширный материал по вопросу о рациональном выборе сочетания конструкции моторной гондолы с крылом дают испытания ЦАГИ<sup>1)</sup>.

Физическую картину взаимного влияния крыла и моторных коков, расположенных вдоль передней кромки для случая планирования, можно представить в след. виде: моторные коки, расположенные впереди передней кромки крыла, находятся в зоне повышенного давления и не вызывают дополнительного лобового сопротивления от интерференции.

Крыло в этом случае играет роль обтекателя для моторных коков, заполняющего завихренную область с пониженным давлением сзади моторных коков, благодаря чему лобовое сопротивление моторных коков уменьшается. Моторные коки в свою очередь нарушают обтекание крыла. Эти нарушения в обтекании сводятся, с одной стороны, к местному изменению линии тока, изменению скаса потока и нарушению распределения циркуляции крыла по размаху, с другой стороны, моторные коки способствуют отрыву пограничного слоя и образованию вихрей (беспорядочных и типа Кармана) в местах сочленения поверхностей моторных коков и крыла. Помимо указанных влияний, моторные коки и другие надстройки влияют на горизонтальное оперение и, следовательно, на продольную устойчивость самолета.

Плохо обтекаемые формы моторных коков и другие надстройки на поверхности крыла совместно с фюзележем настолько могут исказить обтекание крыла, что в результате может случиться бафтинг оперения.

На основании нижеизложенных результатов исследования можно сделать выводы о рациональном решении задачи постановки винтомоторной группы на самолете, независимо от технических к нему требований.

Ниже мы помещаем фигуры ряда различных комбинаций моторных установок, по схемам которых проведены испытания в аэродинамической трубе. Результаты взяты из сводных диаграмм, полученных ЭАО ЦАГИ<sup>2)</sup>.

Дополнительные лобовые сопротивления, вызванные наличием на крыле моторных коков и шасси (вместе с эффектом интер-

<sup>1)</sup> См. труды ЦАГИ № 259, работа С. П. Горского.

<sup>2)</sup> См. Там же, стр. 12—18.



ференции), здесь определялись непосредственно по разности между полярой крыла с моторными коками или шасси и полярой изолированного крыла при  $C_y = \text{const}$  и поэтому на всех сводных диаграммах нанесены поляры изолированного крыла. Опыты ЦАГИ показали также, что моторные коки вызывают значительные изменения в аэродинамике крыла. Форма моторных коков и их относительные размеры (по отношению к максимальной ординате профиля крыла) имеют весьма большое значение. Во всех случаях характер изменения  $C_x$  по  $C_y$ , а также изменение наклона кривой  $C_y$  по  $\alpha$  указывает на наличие дополнительного индуктивного сопротивления, вызываемого моторными коками. Некоторые формы моторных коков вызывают, кроме того, довольно большое изменение величин  $C_y$  и  $C_{x\text{max}}$ . Присутствие шасси вызывает наоборот, весьма малую интерференцию. (На летных углах атаки дополнительное сопротивление за счет наличия шасси остается почти постоянным).

Для количественной оценки лобового сопротивления моторных коков различных форм составлена таблица значений коэф.  $C_x$  (см. ниже).

В таблице даны в графе 1 боковой вид моторного кока и площадь миделя, взятая у основания кока, в гр. 3 даны расстояния между осями винтов в мм. и число ширин коков „b“. Исключая первый вариант моторного кока, для которого взяты три расстояния между осями винтов, для всех остальных моторных коков взяты максимальные расстояния между осями, соответствующие винтам на моторах с редуктором.

В графе „4“ взяты значения коэф. „ $C_x$ “ одиночных моторных коков, отнесенные к площади миделя кока.

Эти значения получены путем пересчета по разности между полярами крыла с моторными коками и изолированного крыла при  $C_y = 0$ .

$$\text{По ф-ле} \quad C_x = \frac{(C_{x_1} - C_{x_2}) S_{kp}}{n S_m},$$

где:  $C_{x_1}$  = коэф. лобового сопротивления крыла с моторными коками.

$C_{x_2}$  = то же изолированного крыла.

$n$  = число моторных коков.

$S_m$  = площадь миделя.

В графе „5“ даны коэф.  $C_x$  одного моторного кока, определенные вышеприведенным методом для постоянного значения  $C_y$ , соответствующего максимальной горизонтальной скорости.

При подсчетах за такое значение взято  $C_y = 0,125$  для всех форм коков. Для случая тяжелого самолета это полностью справедливо. Для скоростного самолета следовало бы взять меньшее значение  $C_y$ , примерно, около 0,05, но, принимая во внимание сравнительно небольшие изменения  $C_x$  в указанных пределах, различные варианты просчитаны не были.



В графе „7“ даны значения коэф. „ $C_x$ “ моторных коков, подсчитанных таким же методом, но для экономического режима, для которого взято постоянное значение  $C_y = 0,4$ .

При определении коэф. сопротивления моторных коков указанным методом, в сопротивление моторных коков входит также и сопротивление, получающееся за счет интерференции моторных коков и крыла.

В графах 6 и 8 указано дополнительное увеличение коэф. лобового сопротивления моторных коков по сравнению с коэффициентом „ $C_x$ “ моторных коков для режима чистого пикирования ( $C_y = 0$ ), выраженное в процентах.

Для экономического режима будем иметь:

$$\Delta C_x = \frac{C_{x_{C_y=0,4}} - C_{x_{C_y=0}}}{C_{x_{C_y=0}}} 100\%.$$

Для случая режима полета на земле следует в указанную ф-лу вместо  $C_{x_{C_y=0,4}}$  подставить  $C_{x_{C_y=0,125}}$ .

В графе 9 и 10 указано процентное уменьшение  $C_y$  крыла для углов атаки  $\alpha = 8^\circ$  и  $\alpha = 0^\circ$ , соответствующих приблизительно экономическому режиму и  $v_{\max}$ , за счет присутствия на крыле моторных коков. Указанное влияние условно отнесено к одному моторному коку.

Как уже указывалось выше, моторные коки нарушают распределение циркуляции по размаху крыла и вызывают дополнительную индукцию, которую при учете влияния моторных коков на крыло и следует добавить к величине самоиндукции изолированного крыла.

Безусловно, влияние коков на крыло не протекает в чистом виде, как указывается выше. За счет интерференции коков и крыла изменяется структура потока, обтекающего поверхности крыла; изменяются лобовое сопротивление и подъемная сила коков и профильное сопротивление крыла и т. п. Но если все увеличение лобового сопротивления моторных коков при экономическом угле атаки ( $C_y = 0,4$ ) по сравнению с лобовым сопротивлением для случая пикирования ( $C_y = 0$ ) отнести за счет вызываемой моторными коками индукции, т. е. полагая, что имеет место только лишь „идеальная интерференция“, то результат влияния коков на крыло весьма удобно выразить в эквивалентном уменьшении относительного размаха крыла.

В графе 11 сделаны просчеты, указанные выше, и величина уменьшения  $\lambda_{кр}$ , условно отнесена к одному моторному коку.

$$\Delta \lambda_{кр} = \frac{1}{n} \left( \lambda_{изол.} - \frac{2,4}{\Delta C_{x,0,4} \pi \lambda_{из.} - 0,32} \right)$$

где  $\lambda_{изол.}$  — относительный размах изолированного кока.

$n$  = число моторных коков.



$\Delta C_{x0,4}$  = разность в значении  $C_x$  крыла с моторными коками при  $C_y = 0,4$  и при  $C_y = 0$ .

Дальнейшие исследования касались влияния на крыло выдвижных радиаторов. Как видно из таблицы, моторные коки типа  $G-38$  и 1-й вариант профилированных моторных коков предусматривали капотирование моторов без радиаторных установок, поэтому крыло с упомянутыми моторными коками было испытано также с сотовыми радиаторами выдвижного типа, расположенными снизу носовой части профиля крыла. При наличии на крыле моторных коков типа  $G-38$  радиаторы помещались непосредственно снизу моторных коков и при расположении на крыле профилированных коков — между коками.

Результаты испытаний крыла на полюру с коками и радиаторами и крыла с теми же коками, но без радиаторов показали, что выдвижные радиаторы чрезвычайно сильно увеличивают лобовое сопротивление комбинаций крыла и моторных коков. На малых углах атаки (при  $v_{\max}$ ) дополнительное лобовое сопротивление за счет наличия выдвижных радиаторов в 3—4 раза больше сопротивления моторных коков.

На больших углах атаки, соответственно  $\alpha_{\text{кр}}$ , сопротивление радиаторов, расположенных над коками  $G-38$ , резко падает. Указанное можно объяснить тем, что выдвижные радиаторы в этом случае попадают в область подторможенной скорости близ критической точки профиля и с точки зрения аэродинамики крыла получается несомненная выгода, (многочисленные английские опыты подтверждают это), но, вследствие значительного падения скорости близ критической точки (в критической точке  $v = 0$ ), падает теплоотдача радиаторов и при выборе положения радиатора надо без сомнения учитывать оба указанных фактора. Те же самые радиаторы, помещенные между профилированными коками, вследствие меньшего торможения скорости в зоне радиатора, указывают меньшую степень падения „ $C_x$ “ с увеличением угла атаки.

Помимо изменений в подъемной силе и лобовом сопротивлении моторные коки создают карбирующий момент, величина которого зависит от формы моторного кока и его положения по высоте.

Величина продольного момента  $C_{m_z}$  в функции  $C_y$  выражается в виде:

$$C_{m_z} = a + C C_y$$

где  $a$  = значение  $C_{m_z}$  при  $C_y = 0$ .

$$C = \frac{dC_{m_z}}{dC_y}$$

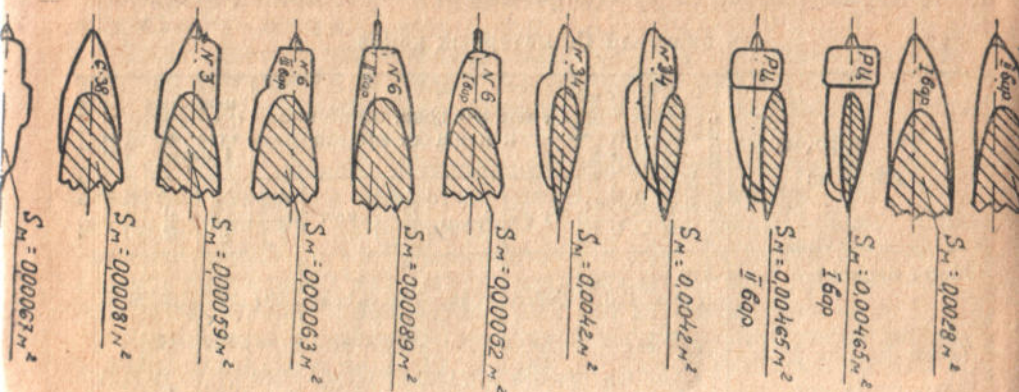
В нижеприведенных таблицах указано влияние моторных коков № 34 и РЦ в виде изменений значений „ $a$ “ и „ $c$ “, принимая линейную зависимость  $C_{m_z}$  по  $C_y$ .



Таблица № 1

значений  $C_x$  моторных коков

Тип и форма мотокока	Расстояние между коками	Отношен. вы- соты кока ко- орд. профиля	$C_x$ одного кока, отнесенное к площади миделя				Уменьшен $C$ в $\frac{v^2}{v_0^2}$ относ. к 1 коку		Эквивалент уменьшен. кр. за счет 1 кока	
			$\alpha_{cy}=0$	$\alpha_{vmax}$	Индук. в $\frac{v^2}{v_0^2}$	$\alpha_{эк.}$	Индук. в $\frac{v^2}{v_0^2}$	$\alpha_{vmax}$		$\alpha_{эк.}$
№ 6-I вариант	110 5,5 в	0,8	0,0615	0,068	10,6	0,175	187	0,7	0,3	0,13
То-же	90 4,5 в	0,8	0,0615	0,0712	15,7	0,196	218	0,7	0,31	0,15
То-же	75 3,7 в	0,8	0,0615	0,0745	21	0,218	255	0,7	0,31	0,162
№ 6-II вариант	110 5,5 в	1,06	0,065	0,0522	20	0,118	81	0,83	0,3	0,08
То-же III вариант	110 6,05 в	0,87	0,33	0,0477	25	0,81	114	0,16	0	0,05
№ 3	110 6,05 в	0,82	0,101	0,912	-10	0,26	136	0,33	0,1	0,15
G — 38	110 4,6 в	1,04	0,0296	0,0267	-9	0,111	276	0,66	0,44	0,13
$S_M = 0,00067 \text{ м}^2$	110 4,25 в	—	0,0177	0,211	19	0,23	130	0	0	0,2
II вар. $S_M = 0,0028 \text{ м}^2$	110 1,5 в	1	0,0224	0,0224	0	0,052	132	1,85	0,8	0,13
I вар. $S_M = 0,0028 \text{ м}^2$	110 1,5 в	1	0,0209	0,0177	-15	0,0477	128	1,85	0,8	0,15
P. II.	210 2,7 в	1,93	0,043	0,041	-4	0,0917	113	3	1,3	0,217
P. II. II вариант	210 2,7 в	1,93	0,615	0,0505	-18	0,0165	0,76	2,3	0	
№ 34 $S_M = 0,0042$	210 4,26 в	2,15	0,05	0,06	20	0,119	138	41	0,73	0,41
№ 34 $S_M = 0,0042$	210 4,26 в	2,15	0,044	0,06	36	0,107	140	7,6	2,5	0,35



Фиг. 24.

Таблица № 2.

Влияние коков N-34 на продольный момент крыла.

	Изолированное крыло	Без радиаторов низко располож. $l=160$ мм	Измен. в $\frac{0}{0}$ отнесен. к I коку	С радиат. низко располож. $l=210$ м	Измен. в $\frac{0}{0}$ отнес. к I коку	С радиат. высоко располож. $l=210$ м	Изменения в $\frac{0}{0}$ отнесен. к I коку
$a = C_m$ при $C_y = 0$	0,04	0,04	0	0,035	-2,1	0,02	-8,3
$C = \frac{dC_m}{dC_y}$	0,213	0,197	-1,25	0,2	-1,0	0,208	-0,4

Таблица № 3.

Влияние коков типа PЦ на продольный момент крыла

	Изолир. крыло	Низкое полож. $l=160$ мм $l=210$ мм	Изменение в $\frac{0}{0}$ отнесенное к I коку	Среднее положен. $l=160$ мм $l=210$ мм	Изменения в $\frac{0}{0}$ отнесен. к I коку
$a = C_m$ при $C_y = 0$	0,04	0,047	+2,9	0,03	-4,15
$C = \frac{dC_m}{dC_y}$	0,213	0,176	-2,9	0,15	-10,5



Отсюда можно сделать заключение, что наилучшим положением следует признать такое, при котором ось кока расположена близко к хорде, несколько ниже ее.

Опыты инженера Николаенко с моторными коками ГНОМ-РОН К—14, по внешней форме близкими к испытанному коку типа РЦ, показали, что  $C_x$ , отнесенный к площади миделя кока, равнялся: 0,06—0,08  $C_x$  моторного кока хорошо обтекаемой формы, для мотора водяного охлаждения оказался порядка 0,07—0,08.

## § 6

### Влияние расстояний между моторными коками на характеристики крыла.

Испытания различных вариантов расположения моторных коков на крыле показали, что наибольшее изменение в индукции при изменении расстояний между коками получается для случаев расположения на крыле моторных коков № 34 и РЦ профилированных коков обоих вариантов и моторных коков над крылом.

Чем ближе друг к другу будут находиться моторные коки, тем большей оказывается вызываемая ими индукция. Для остальных форм моторных коков в пределах взятых расстояний индукция меняется мало. Расположение моторных коков сосредоточенное в центре или двумя группами по концам крыльев практически вызывает одинаковую индукцию.

На момент крыла изменения расстояния между моторными коками в пределах, применяемых на практике, не влияют.

## § 7

### Сравнение положений мотора относительно крыла с точки зрения механики полета.

Продолжительный полет самолета сопровождается постоянно изменением режима работы мотора, (в зависимости от ряда причин, которых мы не будем здесь касаться), осуществляющимся самопроизвольно или пилотом путем регулирования дросселем поступления горючего в мотор. Эти причины приводят к уменьшению или увеличению числа оборотов мотора или совершенной его остановке в полете.

Если линия тяги мотора не проходит через центр тяжести самолета, то получаются добавочные моменты. В зависимости от положения линии тяги относительно центра тяжести самолета могут быть вызваны: пикирующие, кабрирующие и поворачивающие моменты. Это затрудняет технику полета и нарушает безопасность при остановке мотора.



Пикирующие и вращающие моменты компенсируются обычно расположением оперения против струи винта за счет аэродинамических качеств, а также весовых.

(Это вызывает необходимость повышения жесткости хвостовой части фюзеляжа в связи с тем, что центр давления вертикального хвостового оперения будет выше).

Следовательно, с точки зрения механики полета и конструкции, расположение винтов очень высоко над Ц. Т. невыгодно во всех отношениях.

Очевидно, наиболее выгодным расположением с точки зрения механики полета будет (4)<sup>1)</sup>, т. к. при остановке винта самолет переходит в планирование. Таким образом дросселирование здесь заменяет руль высоты.

## § 8

### Оценка с точки зрения прочности.

С точки зрения прочности следует отдать предпочтение расположению „2“<sup>2)</sup>, способствующему минимальному восприятию инерционных сил при посадке.

При расположении „1“ вызываются добавочные вращательные моменты, доходящие до 10<sup>0</sup>/<sub>0</sub> момента от аэродинамических сил.

Гюннер (ZFM 1930 г., стр. 531) и Хилль (сравнение летных данных одномоторных и двухмоторных самолетов Report 747), а также Вейль находят, что для всех остальных типов самолетов вибрация более вероятна.

## § 9

### Экономичность производства.

Расположение 2-е имеет след. преимущества в отношении экономичности производства:

- а) Затрата минимума материала.
- в) Наличие минимума креплений.
- н) Простота монтажа (вследствии больших размеров гондолы). Также заслуживает внимание 3-я схема, которую в вопросе экономичности производства следует однако отнести на второе место после схемы второй. Труднее всего монтировать установку по 1-й и 4-й схемам.

## § 10

### Охлаждение и подача горючего.

Рациональнее всего можно осуществить схему подачи горючего в расположении моторной группы по схеме 2-й и 3-й.

<sup>1)</sup> См. фиг. 4.

<sup>2)</sup> Фиг. 2.



Для расположения 1 и 4 необходимы подвесные радиаторы, что ухудшает монтаж, эксплуатацию и аэродинамику самолета. Особым преимуществом расположения по схеме № 2 является то, что оба радиатора расположены в одной гондоле, что очень важно для арктических и зимних условий, т. к. при остановке мотора при этой схеме можно лучше всего предохранить радиатор от замерзания. (См. Rohrbash „Зависимость экпл. безопасности самолета от конструкции винтомоторных установок“, Ежегодник WGL).

Помимо указанного, конструкторов увлекает эта схема по причине минимума лобового сопротивления, полученного от этой установки по сравнению с другими схемами.

Несколько хуже обстоит с расположением тандем моторов воздушного охлаждения, вследствие худшего охлаждения сзади расположенного мотора, однако, как показали опыты этого недостатка легко избежать. О цилиндрах воздушного охлаждения, расположенных в ряд, пока данных нет.

Подача горючего проще всего в схеме „3“, могущая быть осуществленной самотеком. При других расположениях требуются насосы, которые однако при современном развитии в этой области авиации не затрудняют эксплуатации.

Расположение „4“ совершенно недопустимо для гидросамолетов, т. к. масса воздуха, смешанная только с 1<sup>0</sup>/<sub>10</sub> воды, увеличивает скоростной напор в 8 раз. Для сухопутных самолетов расположение с точки зрения защиты винта почти не играет роли.

## §. 11

### Выводы.

Форма и размеры моторного кока должны быть выбраны таким образом, чтобы изменения, вносимые ими в поляру самолета, были минимальными; во вторых, моторные коки не должны вызывать изменений в устойчивости самолета (в частности не должно иметь место затенение оперения моторными коками); моторный кок ни в коем случае не должен способствовать возникновению бафтинга оперения; моторный кок должен обеспечить надлежащее охлаждение мотора и не должен ухудшать условий обзора; т. об. задача о рациональной форме и сочетании с самолетом моторных коков — задача комплексная и достаточно сложная.

На основании проведенных исследований по комбинации и влиянию формы моторных коков на крыло можно сделать следующее заключение.

1. Лобовое сопротивление и взаимное влияние гондол уменьшается от присутствия капота. Гондолы с капотом, помещенные вблизи крыла, должны тщательно заделываться в крыло, а не поддерживаться только одними стойками.

2. Боковых кронштейнов на гондолах следует избегать.



3. Следует избегать заделывания колпака капота в крыло.
4. Эффективный КПД комбинации гондола — винт — крыло уменьшается от надевания на гондолу капота.
5. Действительный КПД будет наибольшим для гондолы, совершенно закрытой капотом.
6. Наилучшим положением гондолы при тянущем винте будет положение плоскости винта на расстоянии  $25\%$  хорды от передней кромки крыла.
- Во избежание уменьшения подъемной силы следует на гондолу надеть капот.
7. Положение гондолы и тип капота имеют очень большое значение на большой скорости и сравнительно малое значение на скорости взлета.
8. Моторные коки всех форм, расположенные на передней кромке крыла, нарушают распределение циркуляций по размаху крыла и вызывают изменение аэродинамических характеристик крыла, имеющее характер индукции, величина которой для некоторых форм превышает сопротивление коков в два — три раза.
9. Наименьшее лобовое сопротивление на малых углах атаки имеют моторные коки к самолету № 6—1 и III-вариант. (См. табл. 1).
10. Наибольшую индукцию вызывают моторные гондолы, расположенные над крылом, а также коки, расположенные на передней кромке при больших относительных размерах кока сравнительно с толщиной крыла (см. таблицу на табл. 1 строки: 8, 11, 13, 14). Профилированные коки, несмотря на большие относительные размеры, вызывают сравнительно небольшую индукцию.
11. Низкое относительно хорды положение моторных коков вызывает меньшую индукцию сравнительно с верхним. Оптимальным положением следует считать такое, при котором оси моторных коков расположены несколько ниже хорды.
12. Выдвижные радиаторы вызывают весьма большое дополнительное сопротивление на малых углах атаки, превышающее в несколько раз сопротивление моторных коков. Указанное приводит к выводу о необходимости капотирования радиаторов.
13. Уменьшение расстояний между моторными коками вызывает увеличение интерференции. Наибольшее влияние изменения расстояний оказывается для профилированных моторных коков и моторных коков над крылом.
14. Наличие моторных коков на передней кромке крыла вызывает кабрирующий момент крыла, величина которого для моторных коков типа РЦ и №—34 может быть приближенно учтена, пользуясь табл. № 2.
15. Подробное теоретическое и экспериментальное исследование профилированных моторных коков показало их полную пригодность с аэродинамической точки зрения.



## К ВОПРОСУ ОБ УСТАЛОСТИ СВАРНЫХ ШВОВ

В современном самолетостроении сварка является основным технологическим процессом, служащим для скрепления отдельных деталей. Естественно, что сварка в применении к самолетостроению служила объектом многочисленных исследований. В полете в деталях самолета возникают значительные по амплитуде переменные напряжения [1], поэтому одним из наиболее существенных вопросов, связанных с оценкой применимости сварных соединений и их расчетом на прочность, является сопротивляемость переменным нагрузкам.

По своему строению сварной шов неблагоприятен в смысле сопротивляемости переменным нагрузкам. Имеющиеся внутри его мелкие поры и шлаковые включения играют роль надразов, облегчающих возникновение трещины. Ускоряет появление излома также наличие внутренних напряжений в зоне, прилегающей непосредственно к наплавленному металлу. Понятно, что присутствие дефектов в шве, в виде непровара, может резко снизить его прочность.

Действие указанных факторов зависит в значительной мере от рода свариваемого металла, способа сварки, конфигурации свариваемого предмета и типа сварного шва.

Исследование сварных швов на повторный изгиб дает различные результаты в зависимости от обработки шва после сварки и рода сварки. Так, для электросварных швов стали St 37 предел усталости получен от 45% до 94% от предела усталости основного материала [2].

Для стали St 40 при том же исследовании получен предел усталости сварных образцов от 50% до 88%, и для стали St 52 от 41% до 88% от предела усталости основного материала.

При других исследованиях [3] предел усталости электросварных швов, при испытании на повторное растяжение, получен равным от 36% до 44% от предела усталости для основного материала (сталь с содержанием 0,18% углерода), и от 41% до 68% в случае стали с содержанием 0,13% углерода. Газосварные швы того же материала дали предел усталости соответственно 71% и 74% от предела усталости основного материала.

Вобщем замечено, что снижение предела усталости сваренных образцов по сравнению с основным материалом тем больше, чем выше содержание в стали углерода.



Испытание на повторный изгиб сварных тонкостенных труб дало также значительное снижение предела усталости по сравнению с пределом усталости целых труб. Так в случае газовой сварки получен предел усталости от 46% до 49% и в случае электросварки от 32% до 44% [4] от предела усталости целых труб.

Такого же порядка снижение предела усталости сварки (перпендикулярно направлению силы) образцов по сравнению с основным материалом получено и в других исследованиях [4, 5, 7,].

Интересно отметить, что применение высококачественной сварки (покрытые электроды) дает предел усталости сварных швов почти такой же величины, как и для основного материала [5, 6].

Вибропрочность сварных швов в значительной степени зависит от перегрева при сварке; так, двухсторонний поперечный шов имеет предел усталости почти вдвое меньший, нежели односторонний шов. Очевидно, что в этом случае сказывается бо́льший перегрев и возможно большие внутренние напряжения, получающийся при шве двухстороннем, по сравнению с односторонним.

В швах из тонколистовой стали при соблюдении условий обеспечивающих хорошее выполнение сварки, можно ожидать большего предела усталости, так как возможно предполагать получение меньших по величине внутренних напряжений.

Целью настоящей работы было исследование усталости сварных образцов из тонколистовой стали, что имеет большое значение для самолетостроения. Кроме того, были испытаны образцы дюрала, сваренные точечной сваркой, по предложению одного из авиационных заводов.

### Ведение испытания

Испытанию на усталость были подвергнуты четыре партии образцов: две партии были изготовлены из листовой стали, а две из листового дюрала.

Первая партия образцов, состоящая из 8 шт., была изготовлена из цельного стального листа толщиной 2,5 мм., вторая партия — из сваренного листа того же материала. Число образцов во второй партии то же, что и в первой.

Сварка производилась в стык при помощи дуговой электросварки электродом марки № 1.

Исследование структуры сварных швов показало, что нормальная строчечная структура основного материала (фиг. 1) по мере приближения к шву вначале размельчается, давая структуру сорбитообразного характера (фиг. 2.) Затем происходит укрупнение величины зерна, и структура приобретает видманштетовый характер (фиг. 3).

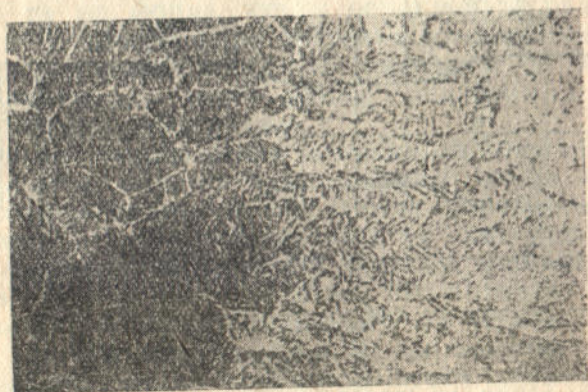




Фиг. 1.

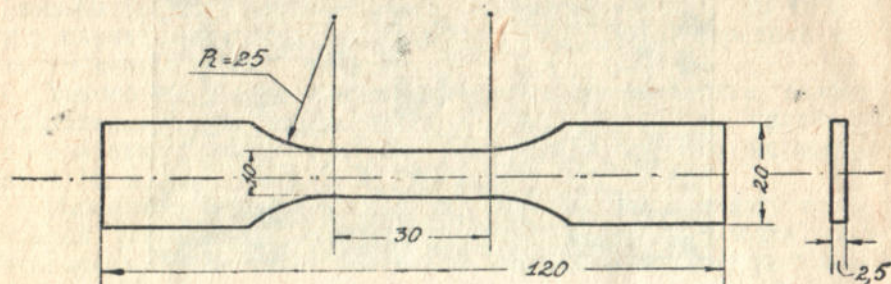


Фиг. 2.



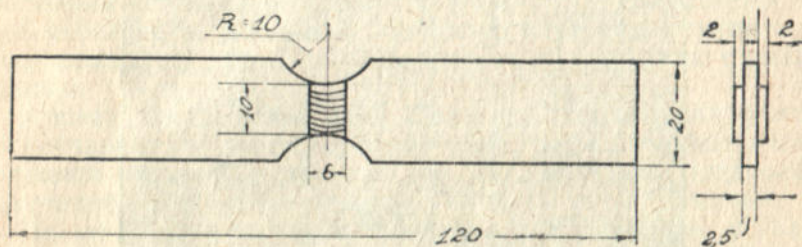
Фиг. 3.

Наплавленный металл имеет структуру, обычную при наплавке электродами из мягкой стали. Наплавка довольно плотная с хорошим проваром.



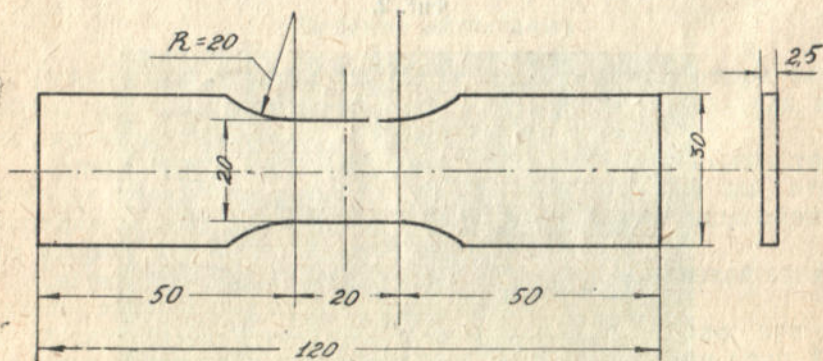
Фиг. 4.

Статические характеристики испытуемых образцов материала, полученные при испытании на растяжение на прессе Гагарина,



Фиг. 5.

приведены в таблице № 1. В таблице помещены средние величины, взятые из 3-х испытаний.



Фиг. 6.

Для испытания на растяжения применялись плоские укороченные образцы ( $l = 5,65 \sqrt{F}$ ).

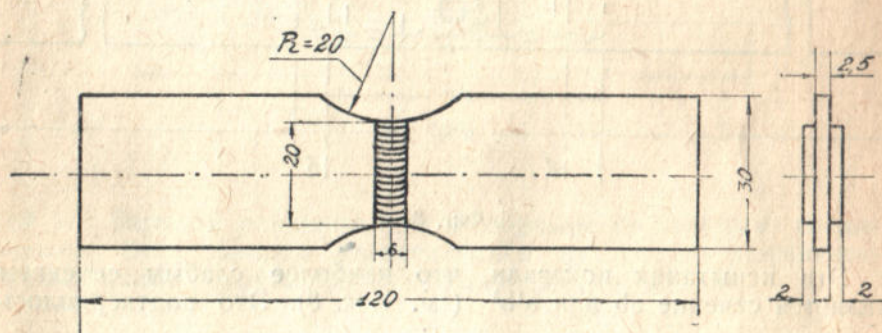


Форма и размеры образца, изготовленного из цельного листа, приведены на фиг. 4, форма и размер образцов со сварным соединением приведены на фиг. 5.

Таблица № 1

Партия	Относительн. удлинен. %	Временное сопротивл. кг/мм <sup>2</sup>	Фиктивное напряжение при разрыве кг/мм <sup>2</sup>	Примечание
1. Из цельного материала . . . .	28,5	43	34	—
2. Со сварным соединением . . . .	—	46	46	Все образцы разрушились вне шва

Формы и размеры образцов, принятых для испытания на усталость, приведены на фиг. 6 и 7.



Фиг. 7.

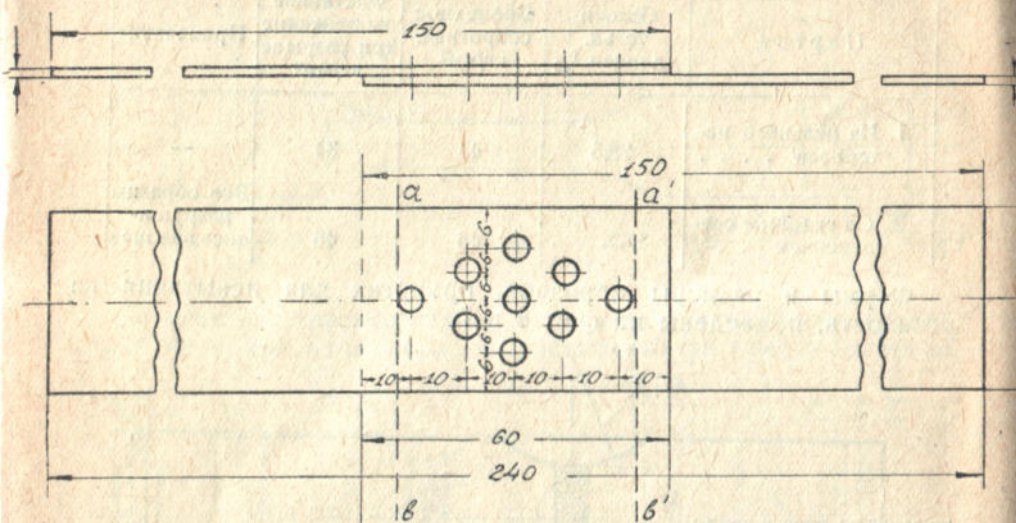
Вначале для испытания на усталость сваренным образцам была дана та же форма, что и образцам из цельного материала, но т. к. обычно (при доброкачественной сварке) разрушение их происходило в сечении, удаленном от места сварки, то для локализации места излома пришлось возле сварки образец ослабить выкружками.

Коэффициент концентрации напряжения, благодаря сравнительно большому радиусу этих выкружек, очень незначителен и им можно при подсчетах напряжения пренебречь.

Дюралевые образцы изготовлялись из полос листового дюралюминия, сваренных в нахлестку точечной электросваркой.

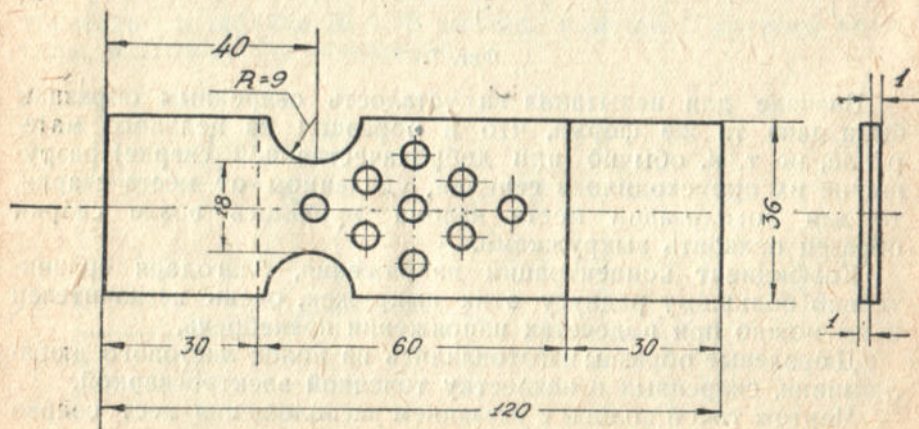
Чертеж такой полосы с указанием расположения мест сварки дан на фиг. 8. В начале испытанию на усталость были подвержены цельные полосы, но т. к. их поломки происходили возле зажимов, то во избежание этого явления пришлось место излома также локализовать путем ослабления сечения выкружками.

Для выбора формы и размеров образцов были произведены предварительные испытания над полосами на усталостной машине, сечение полос при этом по ширине ослаблялось выкружками в различных местах шва.



Фиг. 8.

Эти испытания показали, что наиболее слабым сечением является сечение  $ab$  или  $a'b'$  (см. фиг. 8). Это подтвердилось



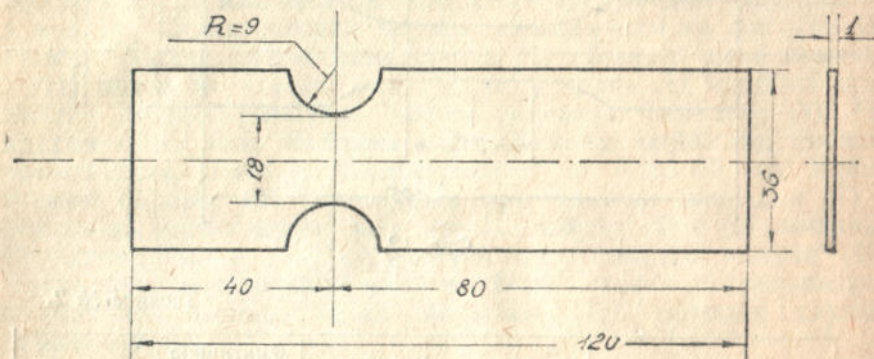
Фиг. 9.

также при испытании полос на растяжение: разрушение происходило по тем же сечениям  $ab$ .



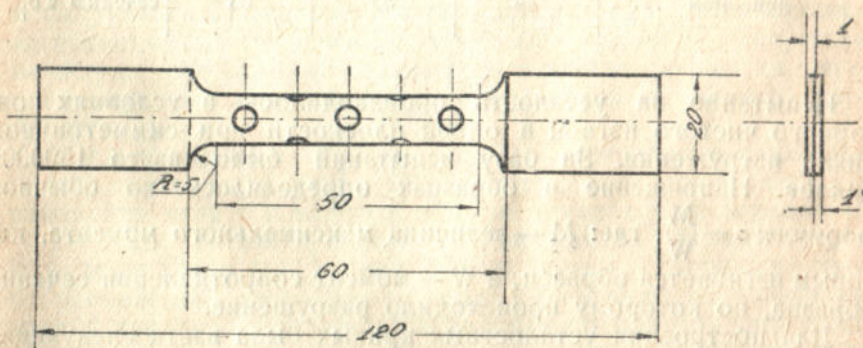
Основываясь на указанном выше, для испытания на усталость образцов с сварным соединением была принята форма, указанная на фиг. 9.

Для выявления влияния сварки на вибропрочность образцов, была испытана вторая партия образцов без сварных соединений



Фиг. 10.

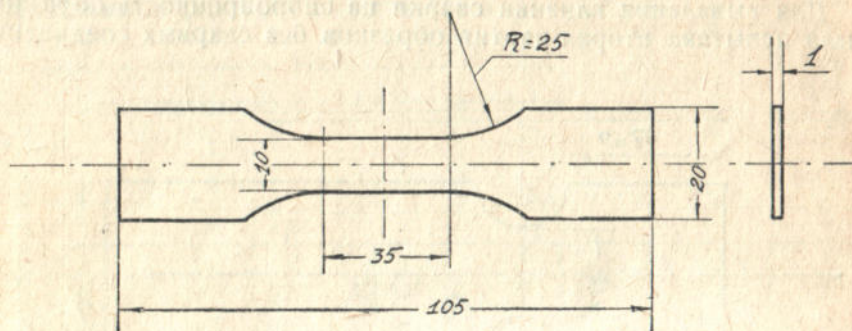
той же формы и размеров, что и образцы со сварным соединением. Эти образцы изготовлялись из тех же дюралюминиевых полос. Чертеж таких образцов дан на фиг. 10.



Фиг. 11.

Статические характеристики дюралюминия, полученные при испытании на растяжение на прессе Гагарина, приведены в таблице № 2 (в таблице помещены средние величины из результатов

трех испытаний). Чертежи образцов, примененных для испытания на растяжение, даны на фиг. 11 и 12.



Фиг. 12.

Таблица № 2.

Партия	Относительное удлинение %	Временное сопротивление кг/мм <sup>2</sup>	Фиктивное напряжение при разрыве кг/мм <sup>2</sup>	Примечание
1. Из цельного материала . . . .	18,5	44	44	—
2. Со сварным соединением . . .	—	33	33	Все три образца разрушились по сечению а б

Испытание на усталость производилось в условиях повторного чистого изгиба в одной плоскости при симметричном цикле нагружения. За базу испытаний было взято 1500000 циклов. Напряжение в образцах определялось по обычной формуле:  $\sigma = \frac{M}{W}$ , где:  $M$  — величина максимального момента, которым изгибается образец, а  $W$  — момент сопротивления сечения образца, по которому происходило разрушение.

Для построения усталостных кривых была взята следующая система координат: по оси абсцисс откладывалось число ( $N$ ) циклов нагрузок, необходимое для поломки образца, а по оси ординат ( $\sigma$ ) максимальное напряжение в образце. Затем, по нанесенным таким образом точкам, проводилась усталостная кривая. По этой кривой определялось напряжение, соответствующее  $N = 1500000$  циклов, которое и принималось за условный предел усталости.



Для выполнения данной работы была сконструирована и построена усталостная машина по типу DVL, дающая возможность производить испытания на плоских образцах в условиях повторного чистого изгиба в одной плоскости при симметричном цикле нагружения. Изгибающий момент может изменяться от 200 до 5000 кг. мм. Частота повторных нагружений—250 циклов в минуту. Схематический чертеж машины дан на фиг. 13. На станине (1) укреплены подшипники (2) главного вала машины.

На одном из концов вала насажен шкив (3), который вращается от электромотора через ременную передачу (4). На другом конце вала насажена эксцентриковая шайба (5), дающая возможность изменять эксцентриситет от 0 до 60 мм. Испытуемый образец (6) укрепляется при помощи накладок (7) и болтов на вертикальных шарнирных стойках (8) и (9) машины. Передняя стойка (8) соединяется при помощи шатуна (10) с эксцентриковой шайбой машины. Задняя стойка (9) соединяется со станиной машины через пружины (11), которые служат динамометром.

Задняя стойка вместе с динамометром может перемещаться вдоль станины, благодаря чему на машине возможно испытание образцов различной длины. Минимальная длина образца — 60 мм. (вместе с головками — 120 мм), максимальная длина образца — 400 мм. (вместе с головками — 460 мм).

Пружинный динамометр по концам имеет обоймы, в которые могут быть установлены пружины различной жесткости, в зависимости от величины измеряемого момента.

Очевидно, что при вращении эксцентриковой шайбы (5) испытуемый образец будет нагружаться с обоих концов равными изгибающими моментами  $M$  и осевыми силами  $P$ . Напряжения от осевых сил малы по сравнению с напряжениями от изгиба, и потому ими при подсчетах напряжений в образце пренебрегали.

Угол поворота  $\varphi$  верхней обоймы динамометра пропорционален величине момента  $M$ , действующего на образец. Для измерения угла  $\varphi$  в верхней обойме прикреплено зеркало (12).

От электрического фонаря (13) на зеркало (12) через двояковыпуклую линзу (14) падает тонкий пучок световых лучей, отбрасываемый зеркалом на экран (15) в виде горизонтальной тонкой световой полоски. При нагружении образца изгибающим моментом эта полоска перемещается по экрану и, при достаточной частоте нагружений, образует светящуюся ленту, длина которой пропорциональна углу, а следовательно и моменту  $M$ , изгибающему образец.

Соответствие между длиной световой ленты и изгибающим моментом было найдено путем статической тарировки машины с помощью приспособления, указанного на схеме пунктиром.







Если при статической тарировке, силе  $P_0$  соответствует перемещение на экране световой полоски на  $S_0$  линейных единиц, то, очевидно, при работе машины, принимая во внимание симметричный цикл нагружения, перемещению полоски  $S$  будет соответствовать момент  $M = \frac{P_0 l S}{S_0} = K \frac{S}{2}$ , где

через  $K$  обозначена постоянная величина  $\frac{P_0 l}{S_0}$  определяемая при тарировке машины.

Напряжения в образце, подсчитанные на основании статической тарировки, проверялись еще при помощи измерений тензOMETрами Гугенбергера.

Разница между подсчитанными напряжениями и измеренными не превосходила 3%.

На машине установлен автомат, выключающий ее при поломке образца. Число циклов нагружения образца устанавливалось по частоте и времени работы машины. Время работы машины фиксировалось автоматическими часами.

При испытании тонкого дюряля вследствие его малой жесткости возникали существенные динамические усилия, которые нами были учтены при расчете изгибающего момента.

### Результаты испытаний

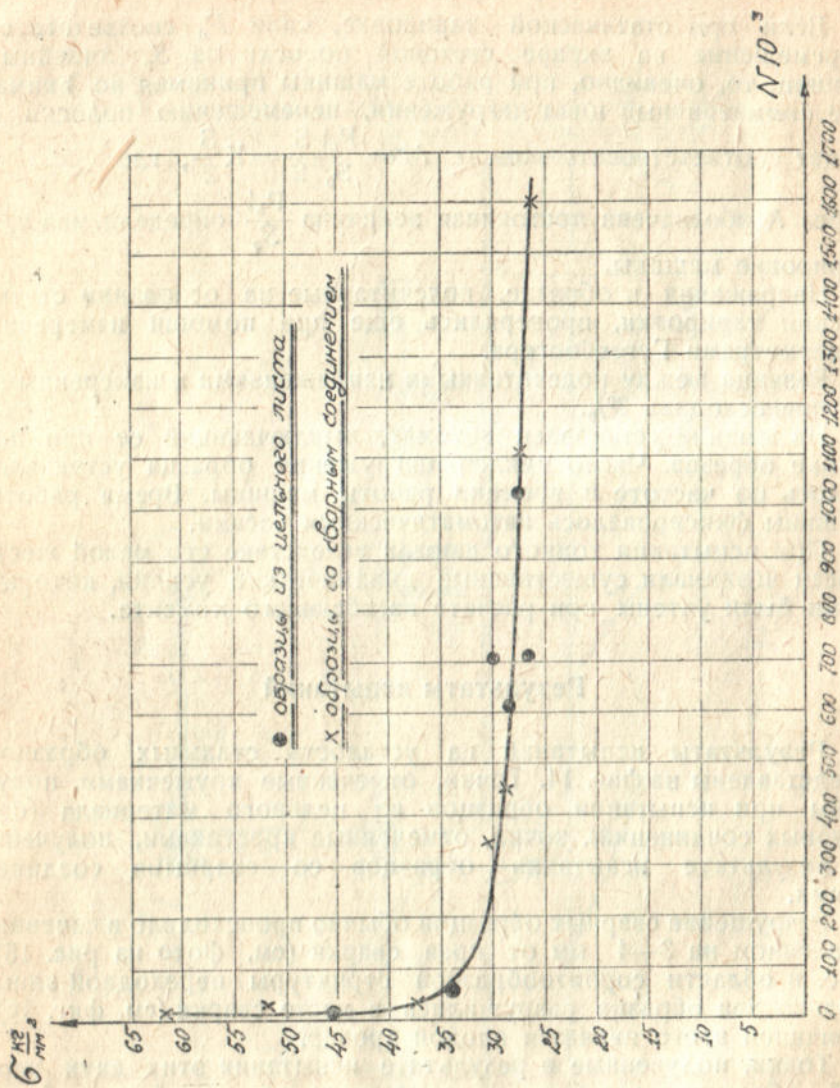
Результаты испытаний на усталость стальных образцов представлены на фиг. 14. Точки, отмеченные кружечками, получены при испытании образцов из цельного материала (без сварных соединений), точки, отмеченные крестиками, получены в результате испытания образцов со сварными соединениями.

Разрушение сварных образцов обычно происходило в сечении, удаленном на 3—4 мм от края сварки (см. фото на рис. 15), т. е. в области сорбитообразной структуры переходной зоны. Только два образца разрушились в месте сварки (см. фиг. 16). Причиной этого является плохой провар.

Точки, полученные в результате испытания этих двух партий образцов, хорошо укладываются на одной и той же кривой, из чего следует заключить, что образцы цельные и образцы со сварным соединением равнопрочны, т. е. доброкачественная электросварка листовой стали не понизила ее вибропрочности.

Величина условного предела усталости для данного материала при повторной симметричной нагрузке чистым изгибом в одной плоскости составляет 26,5 кг/мм<sup>2</sup>.

Результаты испытания на усталость образцов из дюряля даны на фиг. 17.



Фиг. 14.



Фиг. 15.



Точки, отмеченные кружечками, получены в результате испытания цельных образцов (см. фиг. 10).

Точки, отмеченные крестиками, получены в результате испытания образцов со сварным соединением (см. фиг. 9).



Фиг. 16.

Разрушение образцов со сварным соединением всегда происходило возле крайней точки сварки по сечению *ab* (см. фиг. 9 и фото на фиг. 18).



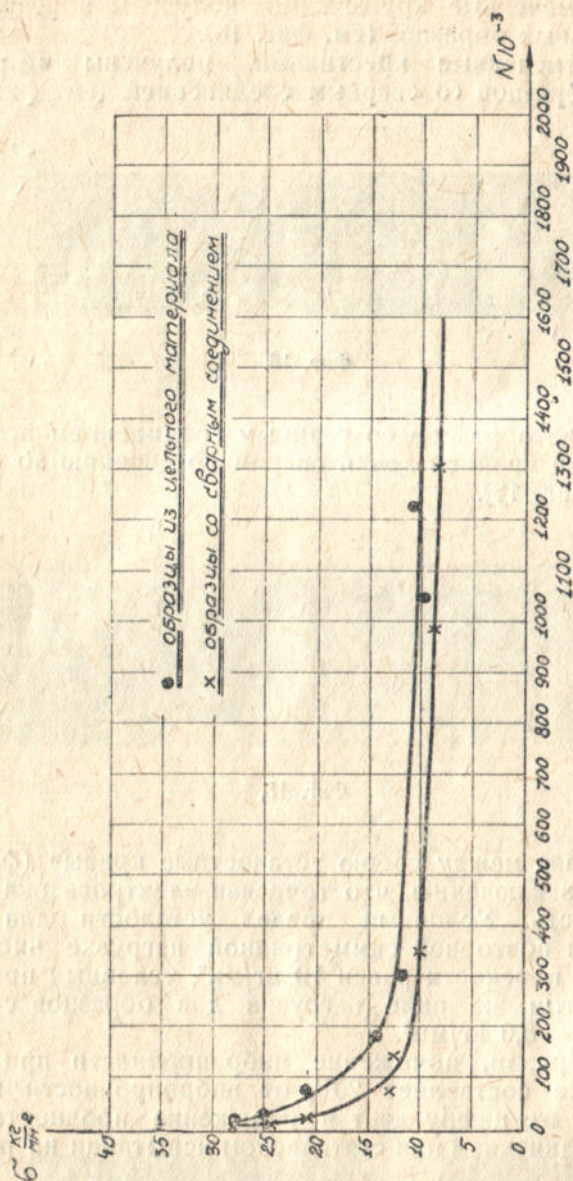
Фиг. 18.

Сопоставляя между собою усталостные кривые (фиг. 17) мы приходим к заключению, что точечная электросварка понижает вибропрочность. Условный предел усталости для цельных образцов при повторной симметричной нагрузке чистым изгибом в одной плоскости равен  $10 \text{ кг/мм}^2$ , условный предел усталости при том же виде нагрузки для образцов со сварным соединением —  $8,0 \text{ кг/мм}^2$ .

Таким образом, понижение вибропрочности при точечной электросварке составляет  $20\%$  от вибропрочности материала. Примерно ту же цифру дает и понижение прочности образца сварным соединением при статическом испытании на растяжение (см. табл. 2).

### Выводы

Недостаточное количество проведенных экспериментов не позволяет сделать каких либо обобщающих выводов, однако те результаты, которые были нами получены с несомненностью



Фиг. 17.

указывают на то, что мнение о малой усталостной прочности сварных соединений преувеличено.

Электросварка тонкой листовой авиационной стали, при надлежащем ее качестве, позволяет получать цифры вибропроч-



ности для сварных швов, близкие к таковым для основного материала.

Также сравнительно хорошие результаты получены при исследовании вибропрочности точечной сварки листового дюрала. Снижение прочности сварного соединения по сравнению с основным материалом составило около 20%, что составляет величину одного порядка со снижением статической прочности тех же образцов (25%).

Для установления расчетных характеристик сварных швов необходимы дальнейшие систематические исследования сварных соединений различной конструкции и различных способов сварки.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Труды Киевского авиационного института, 1937 г., № 7, стр. 70.
  2. Журнал V. D. I., 1933 г., № 26, стр. 720.
  3. Abhandlungen Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, 1933—1934 г., стр. 312 и 380.
  4. Журнал V. D. I., 1933 г., № 21, стр. 556.
  5. Журнал Elektroschweissungen, 1936, стр. 108.
  6. Журнал Elektroschweissungen, 1933, № 4.
  7. Журнал V. D. I., 1933 г., № 19.
-







