

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ
(БЫВШИЙ УКРАИНСКИЙ Н.-И. ИНСТИТУТ СООРУЖЕНИЙ)

624.07
В-74

ВОПРОСЫ КОНСТРУКЦИЙ и ТЕОРИИ СООРУЖЕНИЙ

СБОРНИК № 2

с/с

Цена 7 руб. 50 коп.

Издано
1938 г.



ОНТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ
АРЬКОВ

НКТП
1938

Библиографическое описание этого
издания помещено в „Листописі Укра-
їнського Друку“, „Картковому
Репертуарі“ и других указателях
Української Книжної Палати.

5-4

5092

✓

Ответственный редактор — *Н. С. Черкасов*
Литредактор — *В. Б. Зисельман*
Техредактор — *В. В. Бачинская*
Корректор — *В. Кемарская*

Типо-цинкография ГОНТИ. Харьков, Суздальские ряды, 18/20. Упомян. Глав-
лита № 501. Зак. № 1688. Тираж 1.000. 23¹/₄ печ. лист. Уч.-авт. 24, 1 л. В пе-
листе 45.000 зн. Бумага Окуловской фабр. 60 × 92. Вес 1 метр. с опы 38 к.
Сдано в набор 13/VI 1938 г. Подписано к печати 20/X 1938 г.

ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК

Введение

При исследовании вопросов устойчивости законы деформаций для материала изучаемой конструкции, вид зависимости между напряжением и деформациями для этого материала, — являются фундаментом для всех теоретических построений. Поэтому, прежде чем перейти к рассмотрению вопросов устойчивости железобетонных сооружений, осветим вопрос о деформациях бетона и железобетона.

Полная картина зависимости деформаций бетона от действующих в нем напряжений далеко еще не может считаться вполне выясненной во всех своих деталях. Да и бетон, вследствие сложности своего состава, является материалом глубоко индивидуальным по своим физико-механическим свойствам в каждом отдельном случае, почему все законы деформаций, устанавливаемые для бетонов, носят всегда характер приближенных, относительно верных обобщений.

При экспериментальном изучении деформаций бетона на результаты влияет целый ряд различных факторов. Мы рассмотрим главные из них, при чем будем оценивать значение каждого из этих факторов с точки зрения влияния его на методику расчетов на устойчивость.

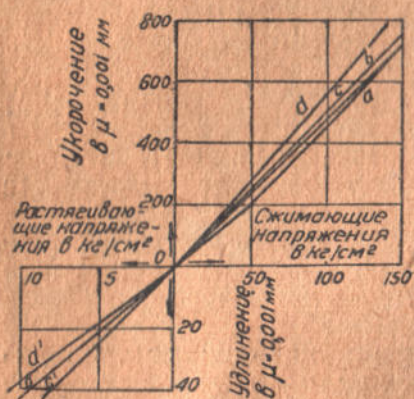
Диаграмма напряжений — деформаций для бетона получается различная, в зависимости от того, приложена ли нагрузка к бетону первый раз (первичная диаграмма) или же мы имеем дело с повторными нагрузками.

Первичная диаграмма деформации имеет вид кривой, т. е. в этом случае бетон, оказывается, не следует закону Гука.

Это является фактом общеизвестным, проверенным на многочисленных опытах и может считаться положением, твердо установленным в науке. При повторных нагрузках картина меняется. Тщательно поставленные исследования, произведенные за последние годы, показали, что при повторных нагрузках бетона в одних и тех же пределах в этом интервале устанавливается строгая пропорциональность между напряжениями и деформациями, т. е. при повторных нагрузках бетон следует закону Гука и модуль упругости бетона при этом будет величиной постоянной. Приведенные на фиг. 1

диаграммы деформаций бетона при растяжении и сжатии повторными нагрузками, представляющие результаты опытов проф. Эйзермана, подтверждают высказанное выше положение. Кривая *a* на фиг. 1 относится к первичному загрузению образца; прямая *сс'* представляет диаграмму деформации напряжения, устанавливающуюся при многократных повторных нагрузках.

Свойства диаграммы деформаций бетона при повторных нагрузках могут быть учтены при статическом расчете железобетонных элементов на проч-



Фиг. 1

ность, так как приложение эксплуатационных нагрузок к сооружению является многократным и всегда повторным, ибо уже в процессе возведения и монтажа в железобетоне всегда возникают напряжения, нередко большие, чем те, которые в нем будут действовать в нормальных условиях.

При расчете же на устойчивость, всегда имеющем в виду критическое состояние элемента, которое никогда не должно достигаться в рационально спроектированном соору-

жении, естественно, все теоретические построения должны опираться только на первичную диаграмму деформаций напряжений бетона, почему в дальнейшем речь будет идти только о диаграммах первичного загрузения.

Влияние времени на вид первичной диаграммы деформаций бетона

Деформации, возникающие в бетоне под действием нагрузки, не сразу достигают своей конечной величины. Они растут на протяжении довольно продолжительного промежутка времени, и полная деформация в бетоне может оказаться значительно превосходящей ту, которая была измерена сейчас же после приложения нагрузки. Это обстоятельство было отмечено давно (Консидер—1899 г., Хэтт—1907 г.), но только в последние годы были произведены опыты, давшие точную картину явления.

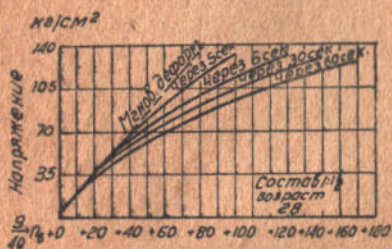
Назовем деформации, возникающие в момент приложения нагрузки, мгновенными деформациями. Мгновенные деформации упруги. Дополнительные деформации, возникающие с течением времени, обычно называют пластическими деформациями бетона.

Название это не совсем точное, так как часть этих дополнительных деформаций исчезает после устранения нагрузки, т. е. является тоже упругой. Лучше было бы назвать эти деформации последующими деформациями, но мы будем при-

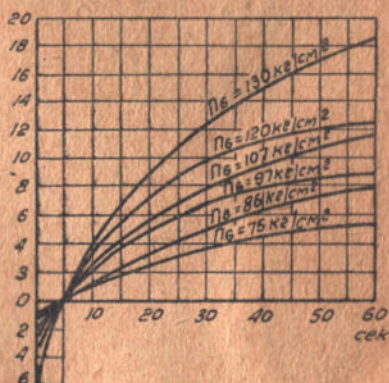
держиваться общепринятого названия. Таким образом, полная деформация будет складываться из мгновенной (упругой) и пластической деформации.

На фиг. 2 нанесены кривые деформаций бетона, измеренных спустя различные промежутки времени после приложения нагрузки. Очевидно, каждая из этих кривых представляет диаграмму деформаций бетона, отнесенную к определенному моменту после приложения нагрузки. Мы видим, что с течением времени кривая деформаций бетона становится все более и более пологой.

Пользуясь кривыми фиг. 3, легко получить диаграмму мгновенных деформаций бетона (нанесена пунктиром на фиг. 2).



Фиг. 2



Фиг. 3

По данным фиг. 2 строим на фиг. 3 кривые нарастания деформации в функции времени. Все эти кривые проходят через точку 5 сек. на оси абсцисс, соответствующую моменту первого наблюдения. Продолжив все кривые до пересечения с осью деформации, получим возможность определить деформации, соответствующие моменту приложения нагрузки. Как видно из фиг. 2, мгновенные деформации связаны с напряжениями линейной зависимостью.

На величину пластических деформаций влияет целый ряд причин: количество цемента в m^3 бетона, род инертных, величина напряжения, возраст бетона и т. д.

На фиг. 4, 5 приведены графики, иллюстрирующие влияние на величину пластических деформаций различных факторов.

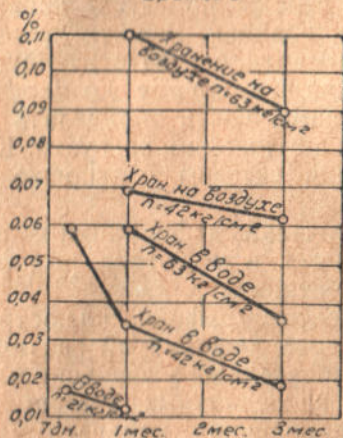
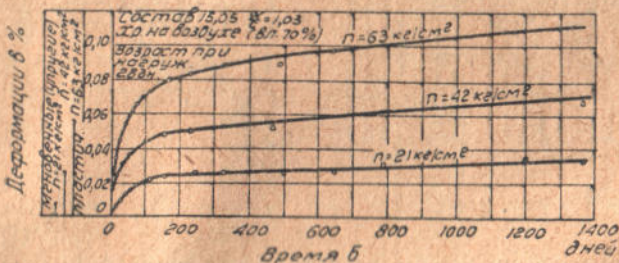
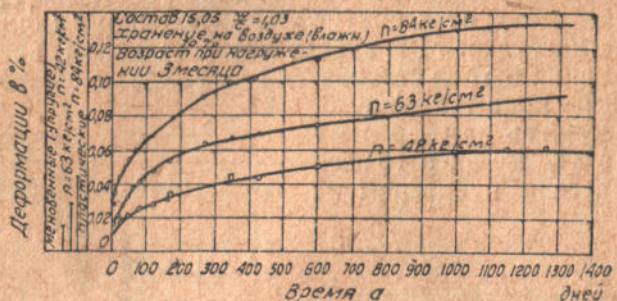
Для сравнения относительного значения пластических деформаций и мгновенных, на отдельных диаграммах указаны сбоку отрезки, выражающие величину мгновенных деформаций. Приводим также таблицу проф. Дэвиса (таблица 1), в которой собраны результаты наблюдений над развитием пластических деформаций в бетоне; в таблице также указаны отношения пластических деформаций к упругим.

Нетрудно видеть, что пластические деформации могут в несколько раз по величине превосходить мгновенные; поэтому не считаться с ними никак не приходится.

Влияние пластических деформаций скажется, очевидно, в уменьшении E_s , модуля упругости бетона.

В таблице 2 приведены соотношения:

E'_s — модуля, вычисленного по диаграмме полных деформаций в различные сроки (фиг. 6) и

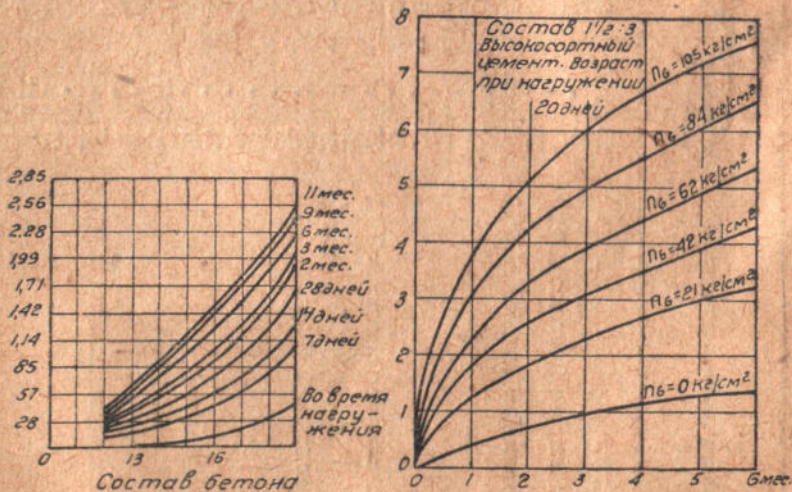
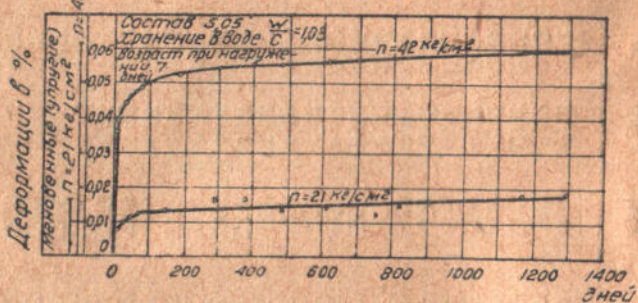
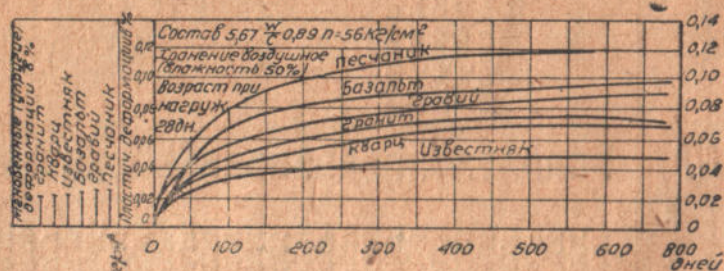


Фиг. 4

E_s — модуля, соответствующего мгновенным деформациям.

При исследовании устойчивости сооружения, мы не ставим условия, чтобы под действием критической нагрузки сооружение мгновенно потеряло устойчивость. Если нагрузка

вызовет потерю устойчивости сооружения по прошествии некоторого времени после ее приложения, то мы будем считать ее критической.



Фиг. 5

Отсюда следует, что при расчете устойчивости железобетонных сооружений надо исходить не из диаграммы мгновенной деформации бетона, а из диаграммы полных деформаций.

Таблица 1
 Результаты наблюдений за развитием пластических деформаций в бетоне (опыты проф. Дэвиса)

№м образца	Состав	Выдерживание под нагрузкой	Возраст к моменту нагружения	Напря- жение в кг/см ²	От момен- та нагру- жения прошло дней	Относительные деформа- ции (в %)			Отно- шение $\frac{\epsilon_{пл}}{\epsilon_{упр}}$	Примечание
						$\epsilon_{упр}$	$\epsilon_{пл}$	$\epsilon_{упр} + \epsilon_{пл}$		
1	1:3,6	В воде	28 дней	56	300	0,02	0,02	0,04	1,0	
2	1:6,3		28 "	56	300	0,02	0,02	0,04	1,0	
3	1:3,6	На воздухе (влажность 70%)	28 "	56	300	0,02	0,04	0,06	2,0	
4	1:6,3		28 "	56	300	0,02	0,06	0,08	3,0	
5	1:5	На воздухе (влажность 50%)	2 мес.	56	500	0,02	0,06	0,08	3,0	
6	1:5,67		28 дней	56	650	0,03	0,12	0,15	4,0	
7	1:5,67		28 "	56	650	0,02	0,10	0,12	5,0	
8	1:5,67		28 "	56	650	0,02	0,08	0,10	4,0	
9	1:5,67		28 "	56	650	0,02	0,07	0,09	3,5	
10	1:5,67		28 "	56	650	0,02	0,05	0,07	2,5	
11	1:5,67	На воздухе (влажность 50%)	28 "	56	650	0,03	0,09	0,12	3,0	
12	1:5,67	" " " 70%	28 "	56	650	0,03	0,06	0,09	2,0	
13	1:5,67	" " " 100%	28 "	56	650	0,03	0,03	0,06	1,0	
14	1:5,67	В воде	28 "	56	650	0,03	0,03	0,06	1,0	
15	1:5,05		7 "	21	1300	0,02	0,02	0,04	1,0	
16	1:5,05		7 "	42	1300	0,06	0,06	0,12	1,0	
17	1:5,05		28 "	21	1300	0,01	0,01	0,02	1,0	
18	1:5,05		28 "	42	1300	0,04	0,04	0,08	1,0	
19	1:5,05		28 "	63	1300	0,07	0,06	0,13	0,86	
20	1:5,05		3 мес.	42	1300	0,02	0,02	0,04	1,0	
21	1:5,05		3 "	63	1300	0,03	0,04	0,07	1,33	
22	1:5,05		3 "	84	1300	0,05	0,05	0,10	1,0	
23	1:5,05	На воздухе (влажность 70%)	28 дней	21	1300	0,01	0,03	0,04	3,0	
24	1:5,05		28 "	42	1300	0,03	0,07	0,10	2,3	
25	1:5,05		28 "	63	1300	0,06	0,11	0,17	1,83	
26	1:5,05		3 мес.	42	1300	0,02	0,06	0,08	3,0	
27	1:5,05		3 "	63	1300	0,04	0,09	0,13	2,25	
28	1:5,05		3 "	84	1300	0,05	0,13	0,18	2,6	

Щебень из песчаника
 Щебень из базальта
 Щебень из гранита
 Щебень из кварца
 Щебень из известняка

Соотношения $\frac{E'_b}{E_b}$ при сжатии для различных сроков выдерживания бетона под нагрузкой (по опытам проф. Дэвиса)

Хранение	На воздухе		В воде	
	Возраст при нагружении			
	28 дней	3 мес.	28 дней	3 мес.
0	1,00	1,00	1,00	1,00
7 дней	0,67	0,60	0,74	0,80
30 "	0,53	0,50	0,68	0,71
3 месяца	0,45	0,43	0,64	0,65
6 месяцев	0,42	0,37	—	—
1 год	0,39	0,27	0,59	0,56
2 года	0,36	0,25	0,56	0,54
3 года	0,34	0,23	0,55	0,51

маций, соответствующих некоторому достаточно большому промежутку времени, протекшему после приложения нагрузки.

Математическое выражение закона деформаций для бетона

Для расчетов необходимо иметь зависимость между напряжениями и деформациями для бетона, выраженную в форме математического уравнения

$$\sigma = \sigma(\epsilon) \quad (1)$$

ли

$$f(\sigma, \epsilon) = 0. \quad (2)$$

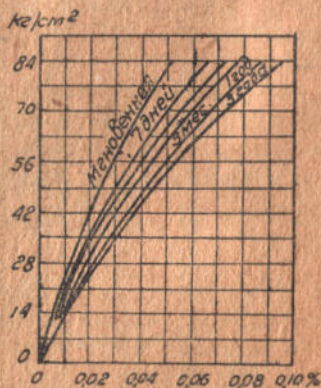
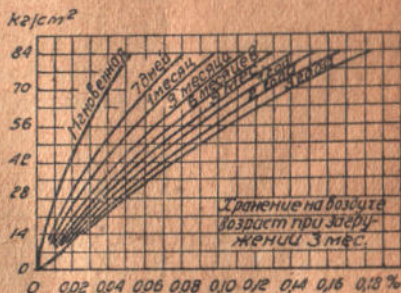
Так, например, в известной формуле Баха—Шюле зависимость (2) раскрывается в форме степенного закона:

$$\epsilon = \alpha \sigma^m. \quad (3)$$

В этой формуле

для бетона 1:2,5:5

$$m = 1,14, \quad \alpha = \frac{1}{298000}$$



Фиг. 6

Найдя из (3) дифференцированием E , получим:

$$E_s = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{m\alpha\sigma^{m-1}}. \quad (4)$$

По этой формуле получается, что при малых σ , E стремится к ∞ . Это неверно¹ и поэтому при малых напряжениях формулой (3) — пользоваться не следует.

В 1933 г. Schreyer²ом была сделана попытка возвратиться к распространенному в прежнее время гиперболическому закону:

$$\sigma = \frac{\alpha\varepsilon}{1 + \beta\varepsilon}. \quad (5)$$

На основании своих опытов над кубиками из различных бетонов он получил (5) в следующем виде:

$$\varepsilon = \frac{0,63 \frac{\sigma}{R}}{1,1 - \frac{\sigma}{R}} \cdot 10^{-3}, \quad (6)$$

где R — временное сопротивление данного бетона в кубиках³.

Наибольшее значение имеет в настоящее время аппроксимирование кривой деформаций напряжений бетона в виде параболы:

$$\sigma = \alpha\varepsilon - \beta\varepsilon^2. \quad (7)$$

Попытки воспользоваться уравнением (7) были сделаны давно. В последнее время⁴ в форме (7) были представлены результаты опытов Австрийской железобетонной комиссии (см. доклад Эмпергера на Международном конгрессе по испытанию материалов в Цюрихе, в 1931 г.). Уравнение (7), кроме того, очень удобно для математических операций. Поэтому в дальнейшем уравнение кривой деформаций бетона мы будем выражать всегда в форме (7).

Коэффициенты α и β для каждого бетона легко найти опытным путем, установив коэффициенты каких-либо двух точек диаграммы деформаций.

Эмпергер дает следующие значения для коэффициентов α и β :

$$\alpha = \frac{5}{3} \cdot \frac{R}{\varepsilon_R}; \quad \beta = \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{\varepsilon_R^2}, \quad (8)$$

где R — прочность бетона в призме, ε_R — предельное полное относительное сжатие бетона, которое, по Эмпергеру, может быть принято в среднем равным 0,001⁴.

¹ См. проф. Я. В. Столяров. Теория железобетона на экспериментальной основе. 1934, стр. 32.

² Подробнее об этом см. проф. Я. В. Столяров. Теория железобетона на экспериментальной основе. 1934, стр. 32.

³ Подробнее об этом см. проф. Я. В. Столяров. Теория железобетона на экспериментальной основе. 1934, стр. 32.

⁴ Проф. Я. В. Столяров. Теория железобетона на экспериментальной основе. 1934, стр. 30.

Подставляя в формулу (8) данные для бетона наиболее употребительной марки $R_{28} = 110 \text{ кг/см}^2$, получим:

$$\alpha = 140\,000 \text{ кг/см}^2; \quad \beta = 56 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

Уравнение (7) для этого бетона будет иметь следующий вид:

$$\sigma = 140\,000 \varepsilon - 56 \cdot 10^6 \cdot \varepsilon^2 \text{ кг/см}^2. \quad (9)$$

Этим уравнением будем пользоваться в дальнейшем при всех расчетах.

Дифференцирование уравнения (7) определяет модуль бетона $E_s = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, как линейную функцию ε :

$$E_s = \alpha - 2\beta\varepsilon; \quad (10)$$

для бетона марки 110 кг/см^2 :

$$E_s = 140\,000 - 112 \cdot 10^6 \varepsilon. \quad (11)$$

Из (10) находим значения модуля E_s в начальный момент (E_0) и в момент разрушения (E_R):

$$E_0 = \alpha; \quad E_R = \alpha - 2\beta\varepsilon_R. \quad (12)$$

соответственно для бетона марки 110 кг/см^2

$$E_0 = 140\,000 \text{ кг/см}^2; \quad E_R = 28\,000 \text{ кг/см}^2. \quad (13)$$

Мы видим из (13), что модуль E_R в момент разрушения составляет 0,2 от E_0 .

Для E_s действующие технические условия и нормы дают два значения:

$$E_s = 210\,000 \text{ кг/см}^2 \text{ при определении деформаций}$$

и

$$E_s = 140\,000 \text{ кг/см}^2 \text{ при расчете напряжений.}$$

Из (13) следует, что наибольшее значение E_s , определяемое из (11), равно $E_0 = 140\,000 \text{ кг/см}^2$. Отсюда можно было бы заключить, что (11) дает преуменьшенные значения E_s . Но, учитывая сказанное выше о нарастании пластических деформаций, следует признать выбор коэффициента уравнения (7), по Эмпергеру, удачным.

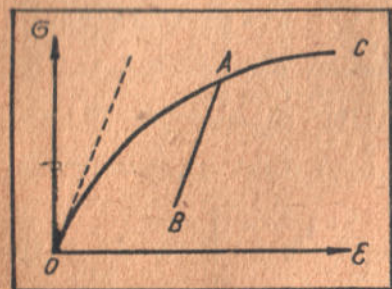
Разгрузка бетона

При разгрузке нагруженного до некоторой точки А диаграммы (фиг. 7) образца, образец частично восстанавливает свою первоначальную форму. Исчезает его упругая деформация, частично исчезает и часть „пластической“ деформации.

Так как восстановление пластической деформации происходит очень неинтенсивно¹ и притом лишь незначительной части ее, то можно считать, что диаграмма разгрузки представляет собой

¹ См. Ю. А. Нилендер. Механические свойства бетона и железобетона.

прямую, параллельную прямой мгновенных (упругих) деформаций (закон Герстнера). Отсюда заключаем, что модуль упругости бетона при разгрузке можно принять равным начальному модулю E_0 . Этот вывод согласуется с данными проф. Роша.



Фиг. 7

Все вышеизложенное относилось к случаю сжатия бетона. Относительно деформаций при растяжении бетона ограничимся следующими замечаниями. При малых деформациях модуль упругости E'_ϵ при растяжении можно считать равным E_ϵ при сжатии. При больших ϵ модуль E'_ϵ падает и притом более интенсивно, чем при сжатии. Зависимость между ϵ и E'_ϵ при растяжении может быть выражена также некоторым уравнением, аналогичным (3), (5) и (7). Можно создать уравнение, выражающее $\sigma = f(\epsilon)$ и пригодное как для растяжения, так и для сжатия (Шюле).

В теории устойчивости чрезвычайно редко приходится оперировать со случаями растяжения бетона. Поэтому общих формул приводить не будем; там, где встретится необходимость, будут сообщены все необходимые дополнительные сведения.

Перечислим теперь те положения, которые мы рассматриваем как исходные в наших исследованиях устойчивости железобетонных конструкций:

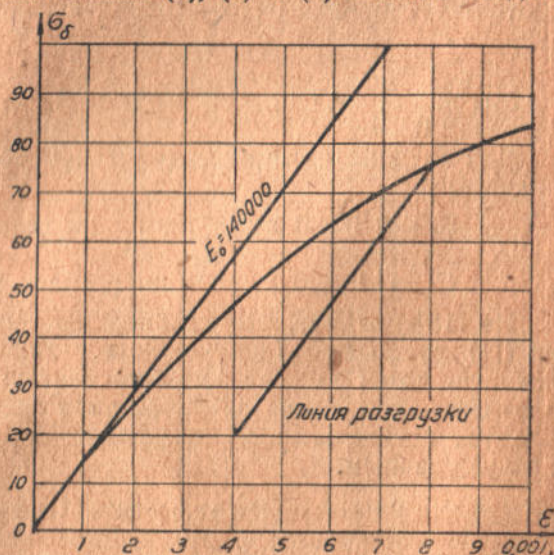
1. Законы деформаций (диаграмма напряжений—деформаций) для бетона и для железа считаются данными. Принимаем для бетона закон деформаций по уравнению (9):

$$\sigma_s = 140\,000 \epsilon - 56 \cdot 10^6 \epsilon^2.$$

Деформации при растяжении бетона

Все вышеизложенное относилось к случаю сжатия бетона.

Относительно деформаций при растяжении бетона ограничимся следующими замечаниями. При малых деформациях модуль упругости E'_ϵ при растяжении мож-



Фиг. 8

На фиг. 8 представлена кривая, выражающая это уравнение. Предел текучести железа принимаем:

$$\sigma_T = 2100 \text{ кг/см}^2.$$

Предел пропорциональности считаем совпадающим с пределом текучести (идеальная диаграмма Prandtl'я).

Модуль Юнга железа — $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

2. Сечения остаются плоскими.

3. Деформации вследствие продольного изгиба бесконечно малы.

Из второго условия следует, что продольные деформации бетона и железа всегда одинаковы. Это положение справедливо и в момент потери устойчивости.

Данные для расчета на устойчивость сжатых железобетонных элементов по теории Энгессера—Кармана

Для исследования устойчивости сжатых железобетонных стержней и оболочек обычно применяется так называемая теория Энгессера—Кармана. Основные принципы этой теории изложены во многих работах, посвященных устойчивости конструкций; приложение ее к случаю железобетонных стержней можно найти у инж. В. Манжаловского¹. Ряд примеров применения ее к различным железобетонным конструкциям дали авторы настоящей статьи².

Главные затруднения при применении теории Энгессера—Кармана к исследованию устойчивости железобетонных стержней возникают вследствие учета влияния арматуры. В связи с этим значительный интерес представляет возможность применения упрощенного метода расчета, который обходит эти трудности.

По упрощенному способу мы предлагаем вычислять $P_{кр}$ для стержней по формуле:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 T J_{прив}}{l^2}, \quad (14)$$

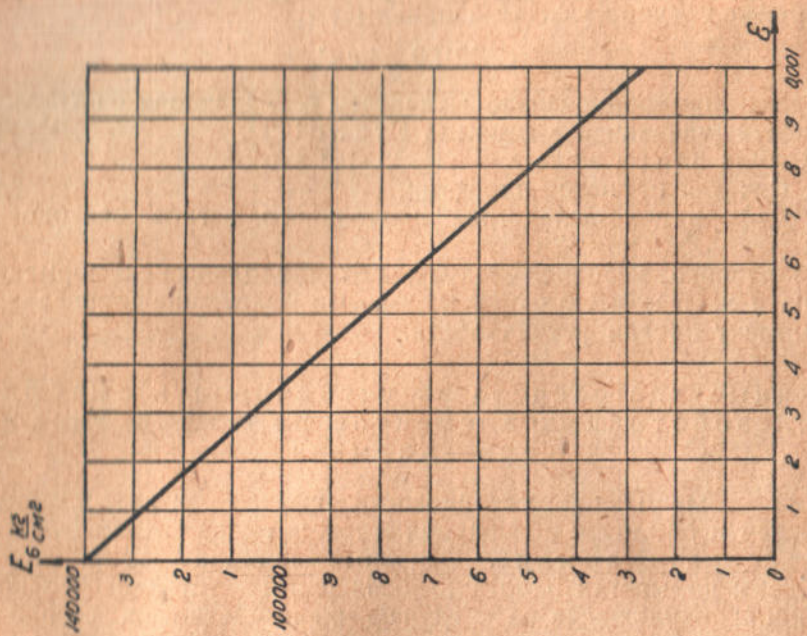
где T — модуль продольного изгиба, вычисленный для стержня, рассматриваемого как чисто бетонный. Согласно известной формуле для прямоугольного сечения

$$T = \frac{4 \cdot 140\,000 \cdot E_b}{(\sqrt{140\,000} + \sqrt{E_b})^2}. \quad (15)$$

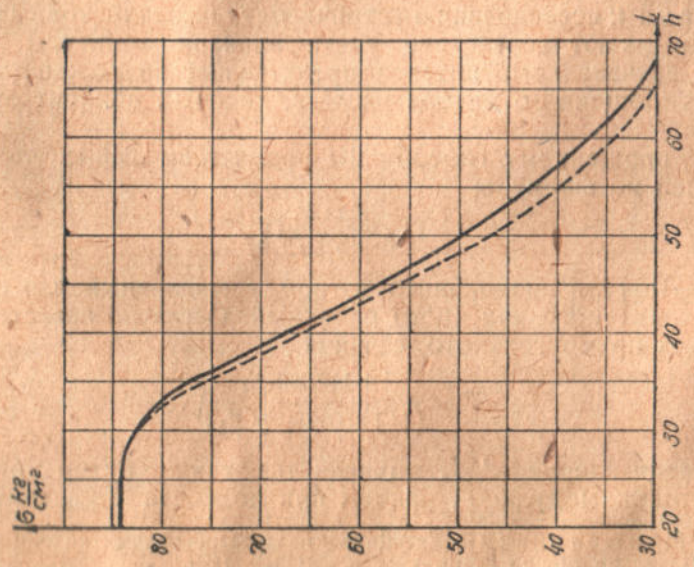
Момент инерции $J_{прив}$ вычисляется также путем приведения арматуры к модулю T , причем при подсчете $J_{прив}$ нейтральная

¹ В. Манжаловский. Устойчивость железобетонных колонн. См. Некоторые задачи по теории устойчивости. ДНТВУ, 1937.

² Проф. Штаерман и доц. Пиковский. Устойчивость железобетонных конструкций. УИС. Харьков, 1936.



Фиг. 10



Фиг. 9

линия — при симметричном сечении — считается, очевидно, уже проходящей через центр тяжести сечения.

Разница в результатах расчета по „точному“ и по приближительному способу получается очень небольшая. Представление о получающихся здесь расхождениях может дать график фиг. 9, где пунктиром нанесена кривая $\sigma_{кр} = f\left(\frac{l}{h}\right)$, построенная для железобетонного стержня по приближенному способу, а сплошной линией — по точному.

На графике А приведены значения T в функции $\sigma_{кр}$. Этими же значениями T будем пользоваться также и при исследовании устойчивости оболочек, так как в оболочках значение T должно быть такое же, как и в прямоугольном стержне.

Кроме графика А, дающего значения модуля T , строим еще следующие вспомогательные графики:

1) Находим модуль бетона E_b :

$$E_b = 140\,000 - 112 \cdot 10^6 \epsilon;$$

строим график $E_b = f(\epsilon)$ (фиг. 10). По графикам фиг. 8 и фиг. 10 строим график $E_b = f(\sigma_b)$ (график В).

2) Пользуясь тем, что относительные удлинения бетона и железа одинаковы, строим график $\sigma_{ж\text{ел}} = f(\sigma_{б\text{ет}})$ (график С), позволяющий по напряжению осевого сжатия, существующему в данный момент в бетоне, найти напряжение в железе.

Предельная сжимаемость бетона $\epsilon_R = 0,001$; следовательно, предельное относительное сжатие железа также 0,001.

Мы видим, что напряжения в железе никогда не могут превзойти предел пропорциональности:

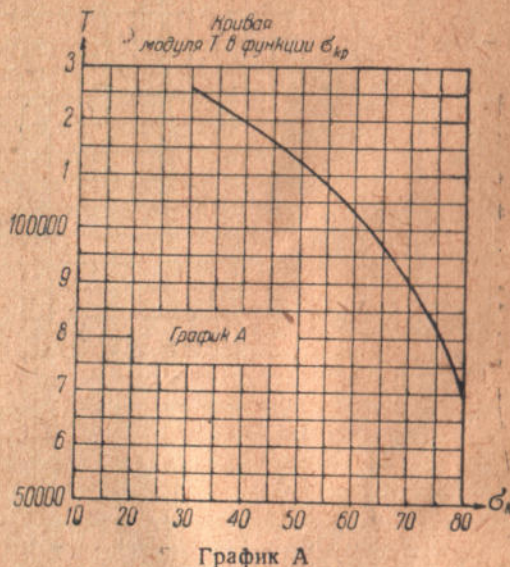
$$(\sigma_{ж\text{ел}}) = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,001 = 2100 \text{ кг/см}^2 = \sigma_T = \sigma_{\text{проп.}}$$

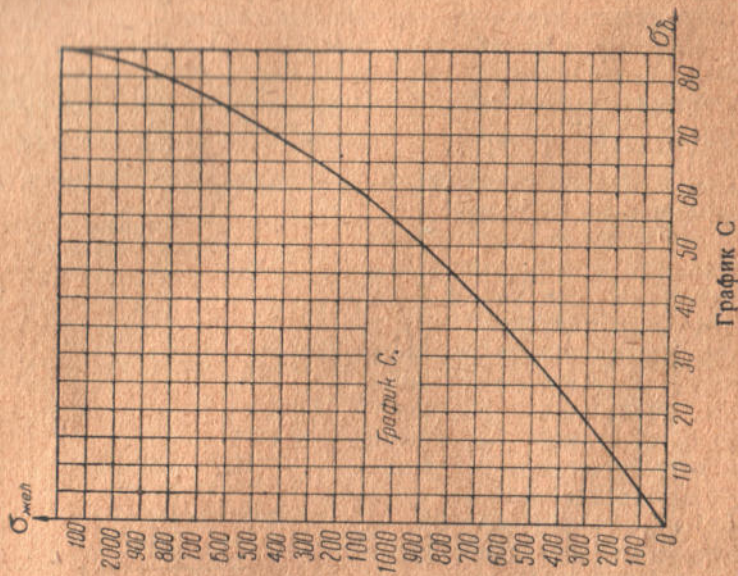
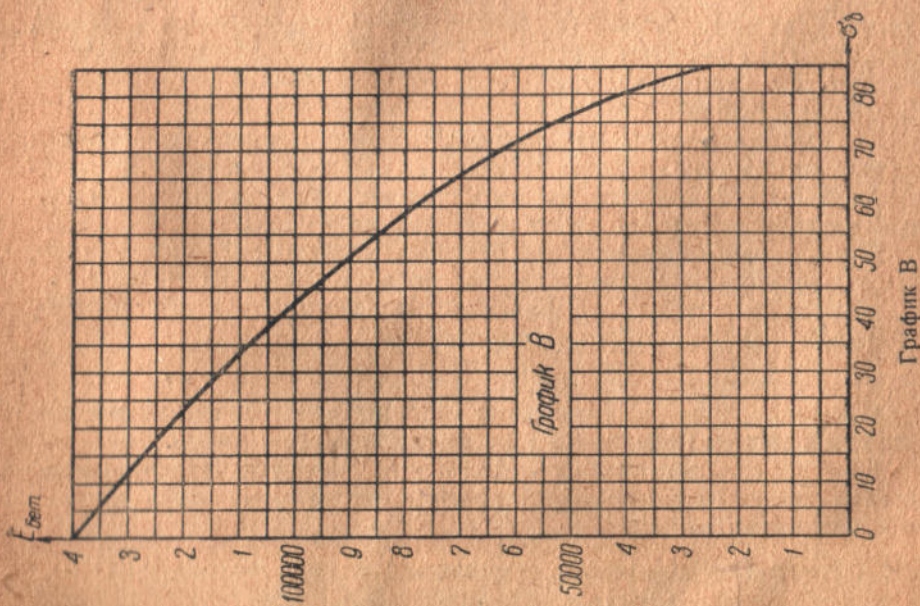
Следовательно, в диаграмме (напряжение — деформация железа) мы используем только ее прямолинейную часть.

При других диаграммах деформаций бетона и железа составление всех перечисленных графиков также не представляет никаких затруднений.

§ 1. Общие замечания о явлениях потери устойчивости в железобетонных оболочках

Теория устойчивости железобетонных складчатых оболочек представляет значительные трудности, обусловленные сложным





видом зависимости между деформациями и напряжениями для железобетона.

Подобно тому, как это имеет место для стержней, арок и т. д. и здесь все возможные виды потери устойчивости в оболочках можем разбить на две категории:

- 1) потеря устойчивости в сжато-изогнутых оболочках;
- 2) потеря устойчивости в сжатых оболочках — Эйлера потеря устойчивости или потеря устойчивости первого рода.

Потеря устойчивости в сжато-изогнутых оболочках принадлежит, в основном, к категории явлений потери устойчивости второго рода — потере устойчивости без разветвления на кривой состояния равновесия; поэтому исследование устойчивости сжато-изогнутых оболочек должно производиться с учетом их конечных деформаций. Даже для простейших случаев — стержней — этот путь вызывал необходимость исключительно большого количества различных вычислительных операций. Для оболочек решение задачи еще более усложнится. Поэтому практически, в условиях современного состояния теории оболочек, проверку устойчивости сжато-изогнутых оболочек приходится сводить к задаче исследования устойчивости сжатой оболочки, наиболее близкой по характеру своего напряженного состояния к данной сжато-изогнутой оболочке.

Теория устойчивости сжатых железобетонных оболочек значительно проще. Исследование их устойчивости производится путем рассмотрения бесконечно-малого ее отклонения от первоначального положения, соответствующего деформации чистого сжатия. Поэтому зависимость между удлинениями и напряжениями здесь будет вполне точно характеризоваться модулем Энгессера—Кармана (см. график А). Напряженное состояние в каждой точке оболочки является двумерным; это состояние сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям напряжениями σ_x , σ_y . Так как в общем случае $\sigma_x \neq \sigma_y$, то модули T в направлении этих напряжений σ_x и σ_y будут различны. Если при этом учесть, что напряжения и σ_x и σ_y различны, вообще говоря, в разных точках оболочки, то, очевидно, задача расчета на устойчивость сжатой оболочки в общем случае может быть сформулирована с точки зрения теории упругости, как задача исследования устойчивости оболочки с переменным модулем упругости и, кроме того, анизотропной в каждой точке в двух направлениях. Постановка задачи в таком общем виде представляет трудности. Важны отдельные частные случаи, когда возможны значительные упрощения. С практической точки зрения такие упрощения могут значительно отступать от охарактеризованной теоретической схемы решения задачи.

§ 2. Классификация явлений потери устойчивости оболочек

Будем в дальнейшем говорить только о сжатых оболочках (первоначальное положение равновесия не сопровождается изгибом срединной поверхности оболочек).

Исследования устойчивости производится, как известно, по второй вариации $\delta^2(A+V)$, поэтому вычисляем вторую вариацию работы деформации $\delta^2 A$.

Остальные вариации: третьего порядка и выше — отбрасываем. Вариация $\delta^2 A$ будет складываться из трех интегралов:

$$\delta^2 A = J_1 + J_2 + J_3. \quad (6)$$

Интегралы J_1 и J_2 объединяют члены второго порядка малости в выражении полного приращения работы деформации (3), которое получим, давая $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma$ приращения (4):

$$J_1 = \int [N_1(\Delta\epsilon_1)_{II} + N_2(\Delta\epsilon_2)_{II} + S(\Delta\gamma)_{II}] dF;$$

$$J_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \int \left\{ [(\Delta\epsilon_1)_I + (\Delta\epsilon_2)_I]^2 - 2(1-\mu)[(\Delta\epsilon_1)_I(\Delta\epsilon_2)_I] - \frac{1}{4}(\Delta\gamma)_I^2 \right\} dF.$$

Интеграл J_1 содержит в себе приращения $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma$, второго порядка малости; интеграл J_2 — квадраты и произведения по два приращения первого порядка малости.

Интеграл J_1 в (6) выражает работу деформации, обусловленную появлением изгибающих и скручивающих моментов в оболочке в момент потери устойчивости.

Интегралы J_1, J_2, J_3 вычисляются без особых затруднений, если известна форма отклонения оболочки от первоначального положения вследствие потери устойчивости. Но именно отыскание этой формы отклонения, которое должно соответствовать условию минимума для критической нагрузки, и представляет наибольшие трудности.

Полное выражение для $\delta^2(A+V)$ получим, прибавляя к (6) вторую вариацию потенциала внешних сил $(\Delta V)_{II}$:

$$\delta^2(A+V) = (\Delta V)_{II} + J_1 + J_2 + J_3. \quad (7)$$

Условие устойчивости для оболочки:

$$\underline{(\Delta V)_{II} + J_1 + J_2 + J_3 > 0}. \quad (8)$$

Легко видеть, что в (7) от нагрузки зависят только $(\Delta V)_{II}$ и J_1 . Отсюда, между прочим, можно сделать заключение о существовании критической нагрузки для любой сжатой оболочки: меняя нагрузки, будем менять только два члена в (7) — $(\Delta V)_{II}$ и J_1 . Следовательно, надлежащим выбором нагрузки можно (7) сделать положительным, отрицательным и равным нулю.

Конечно, должна быть учтена возможность разрушения конструкции до достижения критического состояния.

Решение задачи об устойчивости оболочки получается резко различным, в зависимости от того, равен нулю или нет интеграл J_2 в уравнениях (6), (7) и (8).

Условие $J_2 = 0$ может быть выполнено только, если:

$$(\Delta\epsilon_1)_I = 0; \quad (\Delta\epsilon_2)_I = 0; \quad (\Delta\gamma)_I = 0.$$

В соответствии с этим явления потери устойчивости в оболочках мы делим на две больших группы:

1) явления потери устойчивости, не сопровождающиеся удлинением первого порядка малости срединной поверхности оболочки ($J_2 = 0$);

2) явления потери устойчивости оболочек, сопровождающиеся удлинением срединной поверхности ($J_2 \neq 0$).

Примером потери устойчивости первой категории является потеря устойчивости плоской пластинки или сжатой бесконечнодлинной трубки, находящейся под равномерным внешним давлением. Потерю устойчивости, сопровождающуюся удлинением срединной поверхности, мы наблюдаем обычно в форме местной потери устойчивости, выражающейся в образовании волн и складок. Как правило, можно отметить, что потеря устойчивости второй категории происходит обычно при более высоких критических нагрузках и потому является менее опасной, чем первая.

§ 3. Приведение железобетонной оболочки к оболочке изотропной

Пусть дана железобетонная оболочка толщиной $2h$. Коэффициент армирования поперечного сечения γ . Расстояние между центрами стержней арматуры верхнего и нижнего ряда (фиг. 11) $h' = \alpha \cdot 2h$, где α — коэффициент меньший единицы. Составим выражение для цилиндрической жесткости этой оболочки:

$$D = \frac{1}{1-\mu^2} \left[\frac{T2h^3}{3} + (E_{ст} - T)\gamma 2h \left(\frac{h'}{2}\right)^2 \right] = \\ = T \frac{2h^3}{3(1-\mu^2)} \left[1 + \left(\frac{E_{ст}}{T} - 1\right) 3\gamma\alpha^2 \right] = \frac{T2h^3}{3(1-\mu^2)} \nu. \quad (9)$$

Здесь ν — коэффициент приведения:

$$\nu = 1 + \left(\frac{2,1 \cdot 10^6}{T} - 1\right) 3\gamma\alpha^2. \quad (10)$$



Фиг. 11

В (9) и (10):

$2h$ — толщина оболочки;

$$\alpha = \frac{h'}{2h};$$

h' — расстояние между центрами верхнего и нижнего рядов арматуры;

$E_{ст} = 2,1 \cdot 10^6$ кг/см² — модуль Юнга для стали арматуры;

T — модуль Энгессера—Кармана, определяемый при помощи графика А по напряжению σ_b в бетоне;

γ — коэффициент армирования поперечного сечения оболочки.

Из (9) заключаем, что формулы критических нагрузок, полученные для упругих изотропных оболочек, можно применять для железобетонных оболочек, если в формулы цилиндрической жесткости $D = E \frac{2h^3}{3(1-\mu^2)}$ ввести вместо E произведение $T\nu$.

Так как T различно для разных σ_b , то задача определения критической нагрузки для железобетонной оболочки может быть решена только подбором.

Порядок расчета будет для оболочек различного типа указан ниже.

Формула (10) определяет величину коэффициента приведения при изгибе.

Ниже придется также пользоваться аналогичным коэффициентом приведения при сжатии сечения. Элементарным путем приходим к следующей формуле коэффициента приведения при сжатии:

$$\xi = 1 + \gamma \left(\frac{E_{ст}}{E_b} - 1 \right). \quad (10a)$$

Здесь:

γ — коэффициент армирования сечения;

$E_{ст}$ — модуль Юнга стали;

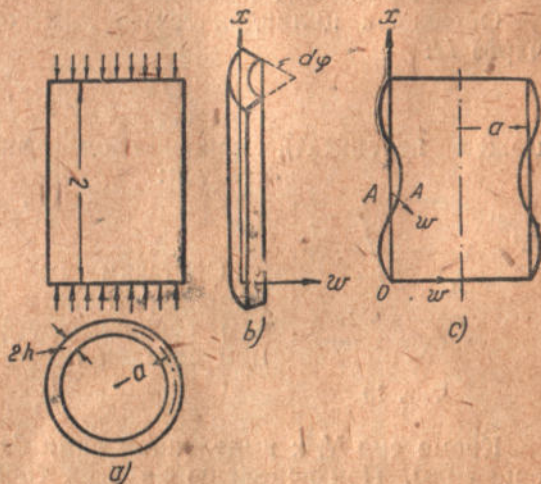
E_b — модуль бетона, находимый по графику В соответственно существующему в бетоне напряжению σ_b .

§ 4. Устойчивость цилиндрической трубы, сжатой продольными силами

Приведем результаты исследования устойчивости цилиндрической трубы, находящейся под действием равномерно распределенных по поперечному сечению продольных усилий.

Сначала рассмотрим случай, когда деформация трубы вследствие потери устойчивости симметрична относительно продольной оси трубы (аксиальная симметрия) (фиг. 12). В этом случае аналитическое решение особенно просто.

Выделим продольную балку—полоску, соответствующую бесконечно малому центральному углу $d\varphi$.



Фиг. 12

Обозначим:

N_1 — сжимающие продольные усилия на единицу длины окружности поперечного сечения;

a — радиус срединной поверхности;

$2h$ — толщина стенки трубы;

w — радиальные перемещения точек трубы вследствие потери устойчивости;

T —модуль Энгессера—Кармана при изгибе в направлении образующей цилиндра (находится по графику А по приведенному сжимающему напряжению в бетоне, вычисленному по силам N_1);

E_0 —модуль Юнга бетона при $\sigma_0 = 0$;

$E_0 = 140\,000 \text{ кг/см}^2$;

μ —число Пуассона.

Рассмотрим сперва случай, когда критические напряжения невелики; при этом можно считать:

$$T = E_0 = E = 140\,000 \text{ кг/см}^2.$$

Напишем уравнение изогнутой оси для выделенной балки—полоски:

$$\frac{E \nu J}{1 - \mu^2} \frac{d^2 w}{dx^2} = M. \quad (11)$$

Здесь:

M —изгибающий момент во взятом сечении;

$J = \frac{2h^3 a d \varphi}{3}$ —момент инерции поперечного сечения полоски;

$\frac{1}{1 - \mu^2}$ —коэффициент, учитывающий условия изгиба для выделенной полоски, аналогично тому, как это делается в пластинках (цилиндрическая жесткость пластинки);

ν —коэффициент приведения.

Обозначая цилиндрическую жесткость стенки нашей трубы через D :

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1 - \mu^2)},$$

можем переписать приведенное выше уравнение изогнутой оси так:

$$D \nu a d \varphi \frac{d^2 w}{dx^2} = M. \quad (12)$$

Составим выражение для изгибающего момента M . Силы N , приложенные в крайнем сечении трубы, дадут в рассматриваемом сечении момент:

$$M_1 = -N a d \varphi w.$$

Кроме сил N , к выделенной нами балке—полоске приложены еще силы. При перемещении всех точек трубы в данном поперечном сечении в радиальном направлении на w , в трубе в поперечном направлении возникнут сжимающие усилия u (на единицу длины):

$$u = E \cdot \frac{w}{a} \xi 2h.$$

Здесь ξ —коэффициент приведения (10а) при сжатии, соответствующий $E = E_0 = 140\,000$. Этот коэффициент приведения ξ вычисляется для сечения трубы, идущего вдоль образующей.

Эти усилия создадут равнодействующую q , играющую роль нагрузки, действующей на нашу балку в направлении перемещения w (фиг. 13):

$$q = -E \frac{w}{a} \xi 2h d\varphi. \quad (13)$$

Обозначая изгибающий момент, вызванный этой нагрузкой через M_2 , перепишем (12):

$$D\nu a d\varphi \frac{d^2 w}{dx^2} = M = M_1 + M_2 = -Na d\varphi w + M_2.$$

Дифференцируя это уравнение дважды, можем написать, используя известную зависимость $\frac{d^2 M}{dx^2} = q$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^2} (D\nu a d\varphi \frac{d^2 w}{dx^2}) &= \frac{d^2 M_1}{dx^2} + \frac{d^2 M_2}{dx^2} = \\ &= -Na \frac{d^2 w}{dx^2} d\varphi - E \frac{w}{a} \xi 2h d\varphi. \end{aligned}$$

Сокращая на $d\varphi$ и перенося все члены в левую часть, получим, после деления всего уравнения на a :

$$\frac{d^2}{dx^2} (D\nu \frac{d^2 w}{dx^2}) + N \frac{d^2 w}{dx^2} + 2 \frac{Eh}{a^2} \xi w = 0. \quad (14)$$

Для практически наиболее важного случая стенки постоянной толщины: $h = \text{const}$; $D = \text{const}$, уравнение (14) приобретает вид:

$$D\nu \frac{d^4 w}{dx^4} + N \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{2Eh}{a^2} \xi w = 0. \quad (15)$$

Условия на концах:

$$\begin{aligned} 1) w_{x=0} &= 0; & 2) w_{x=l} &= 0; \\ 3) M_{x=0} &= 0; & \left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)_{x=0} &= 0; & 4) M_{x=l} &= 0; \\ & & \left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)_{x=l} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение (15) показывает, что выделенная балка будет находиться в условиях стержня, в упругой среде, сжатого продольными силами (продольный изгиб стержня в упругой среде). Используя полученные для случая продольного изгиба стержня в упругой среде результаты, найдем, что (15) дает для критического значения сил N выражение (вместо D подставляем значение $\frac{E2h^3}{3(1-\mu^2)}$)

$$N_{\text{крит}} = \frac{4E V \sqrt{\xi}}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}. \quad (16)$$

Зная $N_{\text{крит}}$, находим критическое напряжение в бетоне:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{2FaN_{\text{кр}}}{F_{\text{прин}}} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \sqrt{\frac{\xi}{\xi_0}} \cdot \frac{h}{a}. \quad (17)$$

В (17) ξ_0 — коэффициент приведения при сжатии для сечения, перпендикулярного образующей.

Приведение площади железа к площади бетона производим по отношению $n = \frac{E_{ст}}{E_0} = \frac{2 \cdot 10^6}{140000} = 15$.

Такой метод расчета, в предположении $E = E_0 = \text{const}$ можно применять только в том случае, если напряжения $\sigma_{кр}$ получатся очень малые, порядка 20 кг/см. В обычных же условиях придется учитывать анизотропность железобетонной трубы, вводя для напряжений, вызываемых силами N , модуль Энгессера — Кармана T , определяя его по графику А.

При этом жесткость D в уравнении (15) будет выражаться через T , а не через E_0 :

$$D = \frac{T 2h^3}{3(1-\mu^2)}; \quad (18)$$

что касается выражения для u , то оно по прежнему будет содержать в себе $E = 140000$ кг/см².

Выражение для $N_{крит}$ после легких преобразований при этих условиях приводится к виду:

$$N_{крит} = \frac{4\sqrt{E_0 \xi_0 T \nu} h^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)} a} = \frac{4\sqrt{E_0 T V \xi_0 \nu} h^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)} a}. \quad (19)$$

Критическое напряжение в бетоне:

$$\sigma_{кр} = \frac{2aN_{кр}}{F_{прив}} = \frac{2\sqrt{E_0 T}}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \sqrt{\frac{\xi_0 \nu}{\xi_0^2} \frac{h}{a}}. \quad (19a)$$

Это напряжение $\sigma_{кр}$ должно совпадать с введенным первоначально в расчет.

В (19a) — коэффициент приведения ν и ξ_0 вычисляются по (10) и (10a).

При E_0 и T , соответственно $\sigma_s = \sigma_{кр}$ (графики А и В).

Заметим, что рассмотренный вид потери устойчивости сжатой цилиндрической трубы относится ко второй категории явлений потери устойчивости в оболочках: потеря устойчивости сопровождается удлинением срединной поверхности оболочки.

Возможны еще и другие виды потери устойчивости сжатой цилиндрической трубы, уже не дающие аксиально симметричной деформации трубы при вылучивании, но удовлетворяющие тем же краевым условиям. Радиальные перемещения w при этих несимметричных деформациях выражаются общим уравнением:

$$w = C \sin n\varphi \cdot \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Здесь:

x — расстояние сечения от конца трубы;

φ — угол, определяющий в полярных координатах положение рассматриваемой точки сечения;

n, m — целые положительные числа.

Виды поперечных сечений при разных значениях $n = 2, 3, 4$ показаны на фиг. 14.

Обозначим:

$$\beta = \frac{2h}{2a};$$

$$\gamma = \frac{am\pi}{l}.$$

Исследование потери устойчивости цилиндрической трубы при несимметричной деформации сечений¹ приводит к следующим результатам.

1. Пока длина трубы так мала, что $\gamma^2 \geq \frac{1}{3} \sqrt{3(1-\mu^2)}$ наименьшее значение критической нагрузки будет соответствовать аксиально симметричной деформации трубы при выпучивании. Увеличение длины, или, что то же самое, уменьшение γ , может вызвать образование форм потери устойчивости с двумя, тремя и т. д. волнами по окружности цилиндра, но величина критической нагрузки во всех этих случаях будет примерно та же, что и при аксиальной деформации трубы.



Фиг. 14

Отсюда делаем важный вывод:

При определении критической нагрузки коротких или длинных труб, соответствующей такой же потере устойчивости, при которой труба подразделяется на большое число полуволи, эту критическую нагрузку следует определять по формуле (19), относящейся к случаю аксиально симметричной деформации трубы.

2. При большой длине стержня (очень малое γ) критическая нагрузка, соответствующая несимметричной деформации, при выпучивании может получиться меньше чем в (19). Здесь в первую очередь должна быть произведена проверка трубы на продольный изгиб, как для обыкновенного стержня с круговым поперечным сечением. Эта проверка (ее можно рассматривать, как соответствующую частному случаю $n = 1$ в формуле w) производится в полном соответствии с общими правилами расчета железобетонных стержней на продольный изгиб.

Для $n > 1$ критическое значение сил N определяется по формуле:

$$N_{кр} = \frac{4 \sqrt{E_0 T} \sqrt{E_0}}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{h^2}{a} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}. \quad (19b)$$

Значения n здесь подбираются так, чтобы (19b) приобрело наименьшее значение.

¹ С. П. Тимошенко. Курс теории упругости, ч. II, стр. 391.

Критическое состояние, соответствующее критической нагрузке по формуле (19b), представляет собой искривление трубы с небольшим числом полуволн.

§ 5. Устойчивость труб, находящихся под внешним давлением. Устойчивость сводов

Для очень длинных труб, нагруженных равномерным внешним давлением, задача определения критической нагрузки сводится к задаче об устойчивости кольца. Значение критической нагрузки определится известной формулой Леви: $q_{кр} = \frac{3EJ}{a^3}$, но вместо EJ — жесткости кольца, здесь в формулу придется ввести цилиндрическую жесткость D_v трубы при изгибе в направлении, перпендикулярном образующей. Тогда формула критической нагрузки для железобетонной цилиндрической длинной трубы кругового сечения будет иметь такой вид:

$$q_{кр} = \frac{3D_v}{a^3}. \quad (21)$$

Здесь:

$q_{кр}$ — критическое давление (сила, приходящаяся на единицу поверхности);

D — цилиндрическая жесткость трубы; $D = \frac{T2h^3}{3(1-\mu^2)}$.

T — модуль Энгессера — Кармана, соответствующая напряжению в бетоне в момент выпучивания;

a — радиус трубы;

ν — коэффициент приведения (10).

Точно также решается задача об устойчивости равномерно нагруженных сводов круговых и параболических, длина которых вдоль шельги велика по сравнению с пролетом свода: критическая нагрузка находится по соответствующим формулам, полученным для арок¹, при замене в них EJ на D_v .

Для сводов небольшой длины, имеющих жесткие оголовки, применение формулы, полученной для плоских арок, дает большую погрешность, так как влияние оголков будет значительно и условия деформации для любой элементарной арки, выделенной двумя сменными поперечными сечениями из свода, будут отличаться от условий изгиба плоской арки.

Для таких сводов обычно критическую нагрузку находят из уравнения, полученного Мизесом для круглой трубы, имеющей по концам жесткие поперечные диафрагмы и находящиеся под внешним гидростатическим давлением. Это уравнение имеет следующий вид:

¹ См., например, сборник „Стойкость арок“, АН УССР, 1936 г., статья проф. И. Я. Штаермана.

$$\frac{(1-\mu^2)a}{Ed} q_{кр} = \frac{1-\mu^2}{n^2-1} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{nl}{\pi a}\right)^2\right]^2} +$$

$$+ \frac{d^2}{3(2a)^2} \left(n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1 - \mu}{1 + \left(\frac{nl}{\pi a}\right)^2} \right), \quad (22)$$

где a — радиус свода;

d — толщина свода;

l — длина (расстояние между диафрагмами);

E — модуль Юнга;

μ — число Пуассона;

n — число волн, получающихся в поперечном сечении трубы при ее выпучивании. Это число должно быть выбрано так, чтобы $q_{кр}$, определяемое из (22), имело наименьшее значение.

Решая (22), находим:

$$q_{кр} = \frac{E}{(n^2-1) \left[1 + \left(\frac{nl}{\pi a}\right)^2\right]^2} \frac{d}{a} + \frac{2d^2 E}{3(1-\mu^2)(2a)^3} \times$$

$$\times \left[n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1 - \mu}{1 + \left(\frac{nl}{\pi a}\right)^2} \right]. \quad (23)$$

Формула (22) относится к случаю изотропной упругой оболочки. Применяя ее к железобетонному своду, мы должны в (23) заменить E произведением модуля Энгессера—Кармана T на коэффициент приведения χ . Тогда формула (23) приобретет следующий вид:

$$q_{кр} = \frac{T\chi}{(n^2-1) \left[1 + \left(\frac{nl}{\pi a}\right)^2\right]^2} \frac{d}{a} + \frac{2d^2 T\chi}{3(1-\mu^2)(2a)^3} \times$$

$$\times \left[n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1 - \mu}{1 + \left(\frac{nl}{\pi a}\right)^2} \right]. \quad (24)$$

Для числа Пуассона μ в случае железобетона мы приняли значение $\mu = 0,16$ (Геллер).

Подставляя $\mu = 0,16$ в (24), получим окончательно следующую формулу для определения критической нагрузки кругового железобетонного свода постоянной толщины:

$$q_{кр} = \frac{T\chi}{(n^2-1) \left[1 + \left(\frac{nl}{\pi a}\right)^2\right]^2} \cdot \frac{d}{a} + \frac{0,68T\chi d^3}{(2a)^3} \left[n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1,16}{1 + \left(\frac{nl}{\pi a}\right)^2} \right]. \quad (25)$$

Значение всех величин см. выше. Величина n должна быть выбрана так, чтобы $q_{кр}$ было наименьшим. Проще всего нужно

значение n отыскивать пробными подстановками. Это не очень сложно, так как n может быть только целым числом.

Задача определения $q_{кр}$ решается подбором. Задаемся некоторым значением критического напряжения $\sigma_{кр}$ в бетоне. Находим соответствующее значение $q_{кр}$ из элементарной зависимости

$$\sigma_{кр} = \frac{q_{кр} a}{F_{прив}}, \quad (26)$$

где:

$$F_{прив} = d \left[1 + \mu \frac{2,1 \cdot 10^6}{E_b} - 1 \right]. \quad (27)$$

В (27):

d — толщина свода;

μ — коэффициент армирования свода (в сечении вдоль образующей);

E_b — модуль бетона, определяемый по $\sigma_{кр}$ — при помощи графика В.

Затем по $\sigma_b = \sigma_{кр}$ по граф. А находим T и затем по (10) — коэффициент ν . Имея T и ν , определяем, пользуясь формулой (25), критическую нагрузку $q_{кр}$. Если это значение $q_{кр}$ совпадает с $q_{кр}$, найденным из (26), задача решена. В противном случае весь расчет повторяется заново.

Задача может быть значительно упрощена применением номограмм для $q_{кр}$, находимых по формуле (25).

В заключение приведем таблицу 3 значений n , соответствующих минимуму $q_{кр}$ в формуле (25), при равной длине и толщине свода. На числа этой таблицы следует смотреть как на ориентировочные, подлежащие дальнейшему уточнению.

Таблица 3
Число волн n при разных толщинах стенки d и длинах трубки l

$\frac{100d}{2a} =$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
$\frac{a}{l} = 0$	2	2	2	2	2	2	2	2
0,1	4	3	3	3	2	2	2	2
0,2	5	4	4	4	3	3	3	3
0,3	6	5	5	4	4	4	4	4
0,4	7	6	5	5	5	4	4	4
0,5	8	6	6	5	5	5	5	4

§ 6. Купольные перекрытия

Рассмотрим купольные железобетонные конструкции, являющиеся оболочками вращения.

Приведем сначала теоретические результаты, полученные по устойчивости изотропных упругих оболочек вращения.

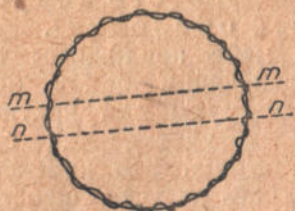
Для цилиндрической оболочки, сжатой продольными силами, еще Тимошенко и Лоренцом (1907 — 1909 гг.) была получена известная формула критического напряжения:

$$\sigma_{кр} = \frac{2Eh}{\sqrt{3(1-\mu^2)}a}, \quad (28)$$

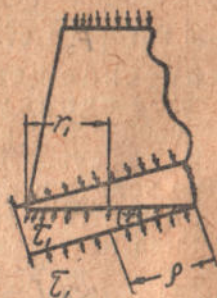
где

E — модуль Юнга;
 $2h$ — толщина оболочки;
 a — радиус срединной поверхности;
 μ — число Пуассона.

Этой формулой мы воспользовались уже в § 4.



Фиг. 15



Фиг. 16

В некоторых особых случаях в (28) вводится специальный коэффициент, меньший единицы, учитывающий возможность несимметричной деформации трубы при потере устойчивости.

Новейшие исследования показали, что для сферической оболочки, находящейся под внешним гидростатическим давлением, критическое напряжение $\sigma_{кр}$ будет определяться той же формулой (28):

$$\sigma_{кр} = \frac{2Eh}{\sqrt{3(1-\mu^2)}a}.$$

С механической точки зрения это легко объясняется тем, что в сферической оболочке двумя сечениями mm и nn можно выделить у экватора пояс, находящийся в условиях сжатой цилиндрической оболочки (элементарный цилиндр) (фигура 15).

Для конической оболочки, как показал И. Я. Штаерман, критическое напряжение также выражается формулой, тождественной (28):

$$\sigma_{кр} = \frac{2Eh}{\sqrt{3(1-\mu^2)}\rho}. \quad (29)$$

В (29) (фиг. 16) ρ — радиус кривизны в рассматриваемой точке конуса.

Остальные обозначения прежние.

Заметим, что хотя критическое напряжение (29) будет наименьшим в самой нижней точке конуса, где наибольшее ρ , тем не менее конус, нагруженный по концам критической нагрузкой, получится равноустойчивым во всех точках своей поверх-

ности, так как действительные напряжения в различных сечениях будут при этих условиях обратно пропорциональны ρ , как и критические напряжения (29).

Совпадение формул критических напряжений для цилиндрической, сферической и конической оболочек позволяет утверждать, что эти формулы имеют приложимость вообще ко всем оболочкам вращения. Отсюда вытекает такой метод расчета оболочек вращения на устойчивость.

В оболочке выделяется „критический конус“ — элементарный конус, заключенный между двумя смежными параллельными кругами, для которого отношение $\frac{h}{\rho}$ имеет наименьшее значение. Критическое напряжение (29) этого конуса есть критическое напряжение всей оболочки¹.

Все эти соображения в полной мере приложимы также к железобетонным куполам, представляющим собой оболочки вращения, но только в расчетные формулы для критического напряжения придется внести изменения, учитывающие специфические свойства материала — железобетона. Эти изменения целиком базируются на принципах расчета на устойчивость железобетонных конструкций, неоднократно применявшихся уже нами, поэтому ограничимся здесь только самыми необходимыми пояснениями, касающимися не способов получения формул, а, главным образом, техники применения их.

Формулы, касающиеся сжатой продольными силами цилиндрической железобетонной оболочки, см. выше в § 4 данной статьи.

Для конической оболочки, нагруженной по концам, будем иметь те же формулы, что и для цилиндрической (вместо a — ρ).

Для сферической оболочки, одинаково армированной во всех направлениях, формула критического напряжения получится из (19а), если положить $E_0 = E_s$ и находим E_s , как и T , по $\sigma_c = \sigma_{кр}$;

$$\sigma_{кр} = \frac{2\sqrt{E_s T}}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{h}{a} \sqrt{\frac{\nu}{\xi}}. \quad (30)$$

Значение критического давления $q_{кр}$ получим из элементарной зависимости:

$$\sigma_{кр} = \frac{q_{кр} a}{4h\xi}. \quad (31)$$

В общем случае произвольной оболочки вращения критическое напряжение для „критического конуса“ будет определяться той же формулой (19а):

$$\sigma_{кр} = \frac{2\sqrt{TE_s}}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{h}{a} \sqrt{\frac{\nu\xi}{\xi^2}}.$$

Здесь величины T , ν , ξ_1 соответствуют меридиональному напряжению в „критическом“ конусе, E_s , ξ — кольцевому напряжению.

¹ Подробно об этом см. Штаерман И. Я. Стейкость оболочек, Журнал Института Математики АН УРСР, № 1, 1936 или Устойчивость оболочек, Сборник трудов Киевского авиационного института, I, 1936.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ СКЛАДЧАТЫХ ПЕРЕКРЫТИЙ НА ПРОЧНОСТЬ И НА УСТОЙЧИВОСТЬ

§ 1. Вступление

По вопросу о расчете на прочность складчатых перекрытий имеется большая литература. Тем не менее, простых и надежных способов расчета мы фактически не имеем и в настоящее время.

Наилучшим следует признать способ Грубера, но и он слишком сложен. В настоящей работе излагается упрощенный метод расчета складчатого перекрытия. Этот метод расчета применен к простейшему типу складчатого перекрытия: однопролетная складка, перекрывающая прямоугольное помещение, но именно этот тип складчатых перекрытий имеет наибольшее значение. Далее рассматривается очень важный вопрос об общей потере устойчивости складчатого перекрытия. Для пологих перекрытий исследование их общей устойчивости может дать результаты, гораздо более невыгодные в смысле надежности сооружения, чем исследование прочности. Между тем, по вопросу об устойчивости складок мы имеем исключительно скудную литературу¹. Приведенные ниже формулы относятся также к определенному виду перекрытия, но метод решения задачи имеет общее значение. Самый метод может рассматриваться, как развитие в области тонкостенных сплошных перекрытий разработанного *Veisch*'ом метода расчета на общую устойчивость перекрытия Феппля².

§ 2. Расчет на прочность складок с шарнирным соединением граней

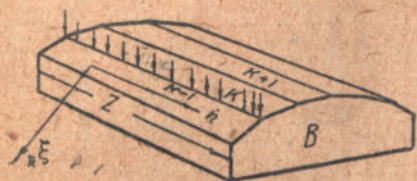
Дана оболочка, перекрывающая прямоугольное в плане помещение (фиг. 1). Разбиваем оболочку на грани; следуя принципу Элерса, полагаем, что все грани шарнирно соединены между собой, но лишены возможности относительных сдвигов.

¹ См. А. А. Пиковский. Устойчивость складчатых оболочек. Киев. 1936.

² См. F. Veisch. *Stahlhochbauten*. Диссертация. Киев. 1936.

См. также: И. Я. Штаерман, А. А. Пиковский. О расчете на устойчивость некоторых видов пространственных решетчатых конструкций (печатается). В этой работе метод *Veisch*'а излагается в значительно упрощенном и исправленном виде. Там также приведены численные примеры расчета.

Нагрузку, действующую на перекрытие, сводим к силам P_k , приложенным по ребрам (фиг. 2). В действительности каждая грань подвергается также поперечному изгибу; изгиб этот будет учтен в дальнейшем (§ 3). Раскладываем приложенные в узлах силы (фиг. 2) на составляющие по направлению граней. Полученные составляющие вызывают работу граней на изгиб в плоскости их наибольшей жесткости (что и обуславливает высокую прочность перекрытия).



Фиг. 1

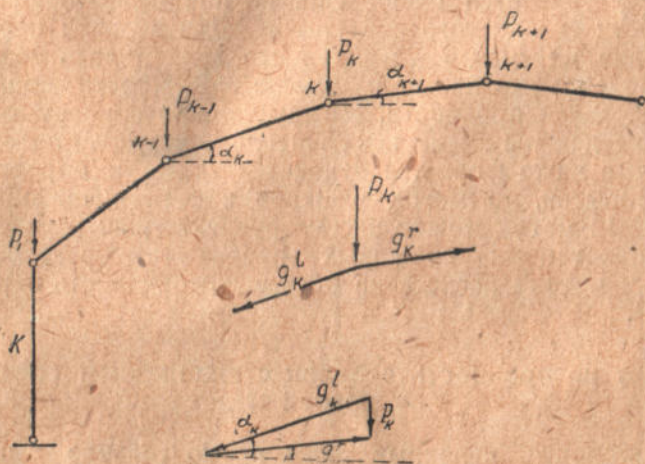
Из силового треугольника ($\vec{g}_k^l +$

$+\vec{g}_k^r = P_k$) легко находим:

$$g_k^l = P_k \frac{\cos \alpha_{k+1}}{\sin(\alpha_k - \alpha_{k+1})} = P_k a_k^l; \quad g_k^r = P_k \frac{\cos \alpha_k}{\sin(\alpha_k - \alpha_{k+1})} = P_k a_k^r. \quad (1)$$

Складывая алгебраически нагрузки, действующие в плоскости каждой грани по ограничивающим ее ребрам, мы получим результирующую нагрузку S_k , вызывающую изгиб грани k в ее плоскости:

$$S_k = g_k^l - g_{k-1}^r = P_k a_k^l - P_{k-1} a_{k-1}^r, \quad (2)$$



Фиг. 2

Кроме того, на грани действуют касательные усилия T_k , возникающие по ребрам, как результат наличия связей, препятствующих относительно сдвигу граней.

Следовательно, каждая грань изгибается погонной нагрузкой S и касательными усилиями T , приложенными по ребрам.

Под действием этих сил в гранях, как и вообще в работающих на изгиб балках, возникают изгибающие моменты M , продольные силы N и перерезывающие силы Q . На фиг. 3 показаны все силы, приложенные к выделенным из перекрытия двум смежным граням k и $k+1$, примыкающим к ребру k .

На основании зависимостей, известных из курса сопротивления материалов, можем написать:

Для грани k :

$$\frac{dM_k}{d\eta} = -T_{k-1}h_k^i - T_k h_k^r + Q_k; \quad (3)$$

$$\frac{dN_k}{d\eta} = T_{k-1} - T_k; \quad (4)$$

$$\frac{dQ_k}{d\eta} = -S_k. \quad (5)$$

Аналогичные выражения пишем для грани $k+1$.

Теперь рассмотрим напряжения по ребру R . Так как грани не имеют возможности относительного сдвига по ребрам, то удлинения граней k и $k+1$ по ребру R — одинаковы; если же равны удлинения, то равны и напряжения.

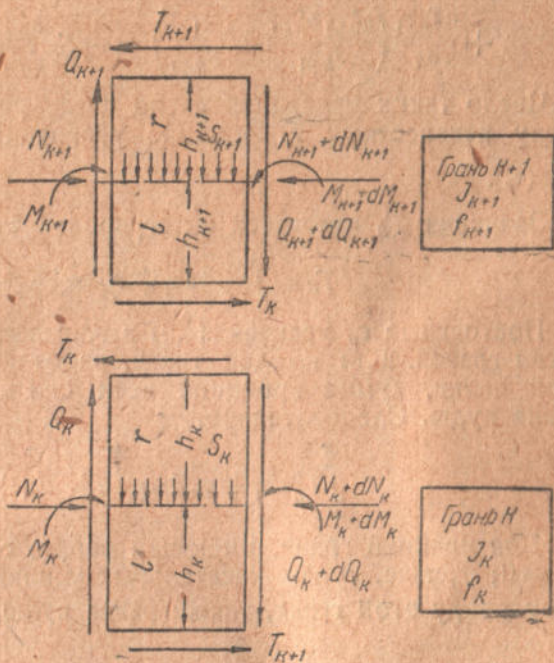
На этом основании можем написать:

$$\frac{M_k}{J_k} h_k^r + \frac{N_k}{F_k} = -\frac{M_{k+1}}{J_{k+1}} h_{k+1}^i + \frac{N_{k+1}}{F_{k+1}}. \quad (6)$$

Считая, что J и F для всех граней одинаковы по всей длине перекрытия, дифференцируем уравнение (6) по η ; после группировки членов получим:

$$\frac{dM_k}{d\eta} \frac{h_k^r}{J_k} + \frac{dM_{k+1}}{d\eta} \frac{h_{k+1}^i}{J_{k+1}} + \frac{dN_k}{d\eta} \frac{1}{F_k} - \frac{dN_{k+1}}{d\eta} \frac{1}{F_{k+1}} = 0. \quad (7)$$

Подставляя в уравнение (7) значения $\frac{dM_k}{d\eta}$ и $\frac{dN_k}{d\eta}$, определяемые для граней k и $k+1$ по формулам (3, 4, 5) и затем дифференцируя его еще раз по η , получаем основное уравнение теории



Фиг. 3

расчета складчатых оболочек по Элерсу — для шарнирного соединения граней:

$$\begin{aligned} & \frac{dT_{k-1}}{d\eta} \left(\frac{h_k^r h_k^l}{J_k} - \frac{1}{F_k} \right) + \frac{dT_k}{d\eta} \left(\frac{(h_{k+1}^l)^2}{J_{k+1}} + \frac{(h_k^r)^2}{J_k} + \frac{1}{F_{k+1}} + \frac{1}{F_k} \right) + \\ & + \frac{dT_{k+1}}{d\eta} \left(\frac{h_{k+1}^r h_{k+1}^l}{J_{k+1}} - \frac{1}{F_{k+1}} \right) = -S_k \frac{h_k^r}{J_k} - S_{k+1} \frac{h_{k+1}^l}{J_{k+1}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Число таких уравнений равно числу ребер и, следовательно, числу неизвестных T . Решение уравнений дает значения всех $\frac{dT_n}{d\eta}$ (τ_n).

Значения T_n находятся интегрированием:

$$T_n = \int \frac{dT_n}{d\eta} d\eta + c_n = T_n^0 + c_n. \quad (9)$$

Постоянные c_n уравнения (9) вычисляются из условий равновесия граней. Для каждой грани, работающей в условиях простой балки, сумма проекций всех сил на горизонтальную ось равна нулю. Следовательно,

$$\int_0^Z T_n^0 d\eta + c_n Z = \int_0^Z T_{n+1}^0 d\eta + c_{n+1} Z.$$

Для крайней грани, имеющей ребро, свободное от нагрузок, $T_0^0 = 0$; отсюда, сумма касательных усилий, приложенных к другому ребру этой грани, также равна нулю, т. е.

$$\int_0^Z T_1^0 d\eta + c_n Z = 0.$$

Переходя от одной грани к другой, получаем общую формулу для c_n :

$$c_n = -\frac{1}{Z} \int_0^Z T_n^0 d\eta. \quad (10)$$

Определив c_n , мы получаем возможность по формуле (9) вычислить действительное значение T_n .

Затем, проинтегрировав зависимости, приведенные в формулах (3, 4), определяем:

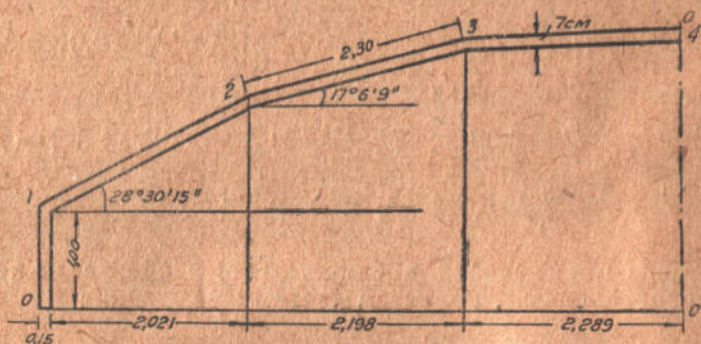
$$M_k = \mathfrak{M}_0 - \int_0^\eta (T_{k-1} h_k^l + T_k h_k^r) d\eta = \mathfrak{M}_0 - M_k^1; \quad (11)$$

$$N_k = \int_0^\eta (T_{k-1} - T_k) d\eta. \quad (12)$$

В этих формулах: h — расстояние от нейтральной оси до крайнего волокна грани; \mathfrak{M}_0 — момент от изгибающих грань нагрузок S_k ,

вычисленный для сечения η балки на двух опорах, пролетом Z ; η — расстояние от края грани до рассматриваемого сечения.

Зная изгибающие моменты и нормальные силы в сечениях, легко определить расчетные напряжения. Такова сущность теории Элерса. Укажем, что уравнения (8) для определения T , были составлены Элерсом в конечной форме. Изложенный нами обобщенный способ расчета, дающий дифференциальные зависимости для T , предложен Г р у б е р о м. Преимущество этого способа заключается в том, что вид уравнений не зависит ни от рода нагрузки, ни от статического характера отдельных элементов перекрытия: условий закрепления по концам, количества промежуточных опор и т. д.



Фиг. 4

По изложенной схеме нами был произведен расчет на прочность складчатого перекрытия с шарнирным соединением граней.

Так как подробное описание этого расчета не входит в нашу задачу, мы ограничимся сообщением полученных результатов.

Рассмотрена была складчатая оболочка перекрытия, изображенного на фиг. 4 (ввиду симметричности конструкции дана половина сечения).

Погонная нагрузка на ребро 1 (и на грань 0—1)

$$P_1 = 0,600 \text{ т/м.}$$

Погонная нагрузка на ребра 2, 3, 4

$$P_2 = P_3 = P_4 = 0,437 \text{ т/м.}$$

Коэффициенты a_n формул (1), при указанных на фиг. 4 значениях углов наклона граней, равны:

$$a_2^1 = 4,828; a_2^2 = 4,446; a_3^1 = 5,034; a_3^2 = 4,828;$$

$$a_4^1 = 5,0335.$$

Откуда по формулам (1) находим:

$$g_1^1 = 0,600 \text{ т/м; } g_1^2 = 0; g_2^1 = 2,110 \text{ т/м; } g_2^2 = 1,933 \text{ т/м;}$$

$$g_3^1 = 2,190 \text{ т/м; } g_3^2 = 2,100 \text{ т/м; } g_4^1 = 2,1896 \text{ т/м.}$$

И затем, по формуле (2) определяем:

$$S_1^0 = 0,600 \text{ т/м}; S_2^0 = 2,110 \text{ т/м}; S_3^0 = 0,257 \text{ т/м}; S_4^0 = 0,0896 \text{ т/м}.$$

(Здесь, как и во всех дальнейших выкладках, индекс 0 указывает на то, что данное значение было получено при расчете складки с шарнирным соединением граней — складки Элерса).

Определив изгибающие грани нагрузки S_n , приступаем к расчету касательных усилий T_n , развивающихся по ребрам перекрытия. Рассматриваем половину сечения, так как усилия в симметричных ребрах соответственно равны; в силу симметрии полагаем также сразу $T_4 = 0$. Расчет ведем, пользуясь уравнением (8).

В нашем примере:

$$F_1 = 0,15 \text{ м}^2; F_2 = F_3 = F_4 = F_n = 0,161 \text{ м}^2; J_1 = 0,0125 \text{ м}^4; \\ J_n = 0,071 \text{ м}^4;$$

$$h_1^l = h_1^r = \frac{z_1}{2} = 0,50 \text{ м}; h_n^l = h_n^r = \frac{z_n}{2} = 1,15 \text{ м}; W_1 = \\ = \frac{J_1}{h_1} = 0,025 \text{ м}^3; W_n = 0,0617 \text{ м}^3.$$

Подставив эти значения в формулы (8) и произведя необходимые преобразования, получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 4,146 \frac{dT_1}{d\eta} + \frac{dT_2}{d\eta} &= -3,22 S_1^0 - 1,30 S_2^0; \\ \frac{dT_1}{d\eta} + 4 \frac{dT_2}{d\eta} + \frac{dT_3}{d\eta} &= -1,30 S_2^0 - 1,30 S_3^0; \\ \frac{dT_2}{d\eta} + 4 \frac{dT_3}{d\eta} &= -1,30 S_3^0 - 1,30 S_4^0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Решив эти уравнения, находим:

$$\tau_1^0 = \frac{dT_1}{d\eta} = -1,0026; \tau_2^0 = \frac{dT_2}{d\eta} = -0,5245; \tau_3^0 = \frac{dT_3}{d\eta} = +0,0185.$$

Интегрируя полученные значения и вычислив затем по формуле (10) постоянные интегрирования c_n , определяем касательные усилия T_n , действующие по ребрам перекрытия:

$$T_1^0 = -1,0026x + 9,0234; T_2^0 = -0,5245x + 4,7205; \\ T_3^0 = +0,0185x - 0,1665.$$

Теперь, зная все силы, приложенные к каждой грани, находим по формулам (11, 12) нормальные силы N и моменты M , после чего легко определяем напряжения. Все расчеты произведены для середины пролета при $\eta = \frac{Z}{2} = 9 \text{ м}$.

Полученные результаты:

$$N_1^3 = -40,605 \text{ т}; \quad N_2^3 = +19,363 \text{ т}; \quad N_3^3 = +21,992 \text{ т};$$

$$N_4^3 = +0,749 \text{ т};$$

$$M_1^3 = +3,997 \text{ т} \cdot \text{м}; \quad M_2^3 = +14,330 \text{ т} \cdot \text{м}; \quad M_3^3 = -13,159 \text{ т} \cdot \text{м};$$

$$M_4^3 = +4,4904 \text{ т} \cdot \text{м}.$$

Откуда:

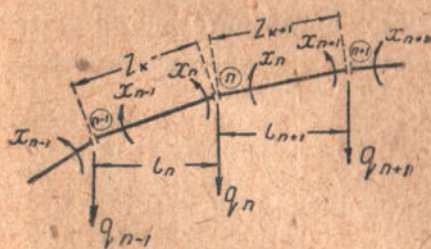
$$\sigma_0 = -43,06 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma_1 = -11,14 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma_2 = 35,13 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_3 = -7,70 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma_4 = +6,82 \text{ кг/см}^2.$$

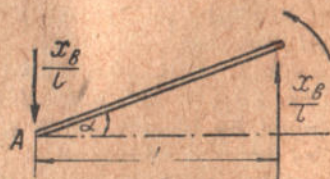
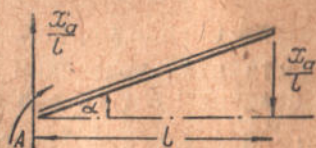
§ 3. Расчет на прочность складок с жестким соединением граней

Все изложенные в предыдущем параграфе расчеты верны при шарнирном соединении граней. В действительности же соединения в железобетонных складках жесткие.

В этом случае, кроме касательных усилий по ребрам, действуют



Фиг. 5



Фиг. 6

моменты x_n , вызывающие поперечный изгиб граней, вследствие чего „безмоментный“ способ Элерса здесь иногда дает большую погрешность. Методология расчета складок с жестким соединением граней разработана Грубером, а у нас Власовым. По предложению Грубера, действие возникающих по ребрам моментов учитывается следующим образом (фиг. 5).

За основную систему принимается складчатая оболочка Элерса с шарнирным соединением граней; моменты x_n являются лишними неизвестными.

Заменяем моменты создающими эквивалентную систему вертикальными узловыми нагрузками q_n (фиг. 6).

Величина нагрузки q_n выражается формулой:

$$q_n = \frac{x_{n-1}}{l_n} - \frac{x_n(l_n + l_{n+1})}{l_n \cdot l_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{l_{n+1}} \quad (14)$$

Прибавляя q_n к внешней силе P_n , получаем полную узловую нагрузку $Q_n = P_n + q_n$, выраженную в виде функции трех неизвестных: x_{n-1} , x_n , x_{n+1} . Разлагая теперь силы Q на составляющие i_k , лежащие в плоскостях граней, мы по аналогии с формулами (1), находим:

$$i_k^i = (P_k + q_k) a_k^i; \quad i_k^r = (P_k + q_k) a_k^r. \quad (1-a)$$

Откуда изгибающая грань нагрузка:

$$c_k = i_k^i - i_{k-1}^i = (P_k + q_k) a_k^i - (P_{k-1} + q_{k-1}) a_{k-1}^i = P_k a_k^i - P_{k-1} a_{k-1}^i + q_k a_k^i - q_{k-1} a_{k-1}^i = S_k^a + (q_k a_k^i - q_{k-1} a_{k-1}^i) = S_k^a + \sum_k q a. \quad (15)$$

Первый член в полученном уравнении выражает влияние внешних сил; второй — влияние моментов x (через q).

Дальнейший расчет ведется совершенно аналогично изложенному в § 2; подставляем лишь во все формулы вместо S_k^a полные изгибающие усилия c_k . В результате получается система

уравнений (8) для определения неизвестных $\frac{dT_k}{d\eta}$, причем в правые части этих уравнений входят выражения, заключающие в себе величины x (так как c_k является функцией от x). Для того, чтобы определить $\frac{dT_k}{d\eta}$ необходимо предварительно вычислить значения x и подставить их в полученную систему, после чего лишь можно приступить к решению уравнений.

Вычисление значений x обычными методами чрезвычайно громоздко. Предложенный Грубером способ хотя и проще других, но все же является настолько сложным и трудоемким, что вряд ли может быть широко применим на практике¹.

Мы сейчас изложим и проиллюстрируем примерным расчетом упрощенный приближенный способ определения моментов x , аналогичный примененному Блейхом к перекрытию Феппля с жесткими кольцами. Значения моментов и напряжений в гранях, исчисленные этим способом, отличаются на 10—15—20% от соответствующих значений, полученных при решении точным методом Грубера, причем отклонение идет в запас прочности.

Рассчитаем рассмотренное выше перекрытие (см. фиг. 4), полагая, что соединения граней по ребрам — жесткие.

Прежде всего, вычисляем по формуле (14) дополнительные узловые нагрузки q_n :

$$q_0 = 0; \quad q_1 = \frac{x_2}{2,021} = 0,4948 x_2;$$

$$q_2 = -x_2 \frac{2,021 + 2,198}{2,021 \cdot 2,198} + \frac{x_3}{2,198} = -0,950 x_2 + 0,455 x_3;$$

¹ Подробное изложение метода Грубера см. А. А. Пиковский. Устойчивость складчатых оболочек. Киев. 1936.

$$q_3 = \frac{x_2}{2,198} - x_3 \frac{2,198 + 2,289}{2,198 \cdot 2,289} + \frac{x_4}{2,289} = 0,455 x_2 - 0,892 x_3 + 0,437 x_4;$$

$$q_4 = \frac{x_3}{2,289} - \frac{x_4 \cdot 2 \cdot 2,289}{2,289^2} + \frac{x_3}{2,289} = 0,874 x_3 - 0,874 x_4.$$

Теперь по формуле (15) находим изгибающие грани нагрузки c_n :

$$c_1 = S_1^3 + (q_1 a_1^1 - q_0 a_0^1) = 0,600 + 0,4948 x_2;$$

$$c_2 = S_2^3 + (q_2 a_2^1 - q_1 a_1^1) = 2,110 + (-4,592 x_2 + 2,199 x_3);$$

$$c_3 = S_3^3 + (q_3 a_3^1 - q_2 a_2^1) = 0,257 + (6,513 x_2 - 6,512 x_3 + 2,199 x_4);$$

$$c_4 = S_4^3 + (q_4 a_4^1 - q_3 a_3^1) = 0,0896 + (-2,196 x_2 + 8,7045 x_3 - 6,5076 x_4).$$

Затем приступаем к определению касательных усилий.

По аналогии с уравнением (13) пишем:

$$\begin{aligned} 4,146 \tau_1 + \tau_2 &= -3,22 c_1 - 1,30 c_2; \\ \tau_1 + 4\tau_2 + \tau_3 &= -1,30 c_2 - 1,30 c_3; \\ \tau_2 + 4\tau_3 &= -1,30 c_3 - 1,30 c_4. \end{aligned} \quad (13a)$$

Подставив значения c_n и решая уравнения, находим:

$$\tau_1 = \tau_1^0 + \tau_1^x = -1,0026 + (1,2077 x_2 - 1,1747 x_3 + 0,2936 x_4);$$

$$\tau_2 = \tau_2^0 + \tau_2^x = -0,5245 + (-0,6146 x_2 + 2,0035 x_3 - 1,2175 x_4);$$

$$\tau_3 = \tau_3^0 + \tau_3^x = +0,0185 + (-1,2513 x_2 - 1,2174 x_3 + 1,7095 x_4)$$

(индекс x означает, что данная величина является функцией дополнительных изгибающих моментов x).

Как видим, все значения изгибающих нагрузок c и касательных усилий τ выражены через x . Для того, чтобы определить c и τ и иметь возможность закончить расчет, необходимо предварительно найти значения x .

Вычисления производим названным выше приближенным способом. Суть его заключается в следующем:

Складчатая оболочка рассчитывается аналогично перекрытию Феппля. Принимаем приближенно, что моменты x распределяются по пролету по синусоидальному закону. В этом случае изгибающий момент x_n , возникающий в любом сечении η грани, может быть выражен в зависимости от x_{\max} посередине пролета, соотношением:

$$x_n = x_{\max} \sin \frac{\pi}{18} \eta.$$

Прежде всего определяем прогиб каждой из граней посередине пролета.

Величина прогиба u_n зависит от действующих на грань изгибающих усилий:

$$c_n = S_n^3 + \sum_n q a \quad \text{и} \quad (\tau_{n-1} + \tau_n) = (\tau_{n-1}^0 + \tau_n^0) + (\tau_{n-1}^x + \tau_n^x).$$

Прогибы во всех гранях определяем от каждого из составляющих усилий в отдельности и затем суммируем их. Все вычисления производим в зависимости от вида нагрузки — по формулам, известным из курса сопротивления материалов.

а) От внешней, равномерно распределенной нагрузки S_n^3 :

$$y_n^I = \frac{5}{384} \cdot \frac{S_n^3 Z^4}{EJ_n}; \quad (16)$$

б) от синусоидальной нагрузки $\sum_n qa$, вызванной изгибающими моментами x :

$$y_n^{II} = \frac{5}{384} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sum_n qaZ^4}{EJ_n}; \quad (17)$$

в) от касательных усилий, вызванных внешней нагрузкой,

$$y_n^{III} = \frac{5 \cdot \left(\frac{Z}{2}\right)^4 \cdot (\tau_{n-1}^3 + \tau_n^3) z_n}{48EJ_n}; \quad (18)$$

г) от касательных усилий, вызванных изгибающими моментами x_n :

$$y_n^{IV} = \frac{(\tau_{n-1}^3 + \tau_n^3) z_n Z^2}{2\pi^3 EJ_n}. \quad (19)$$

Подставив в формулы (16—19) числовые величины и производя необходимые преобразования, находим:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1^I + y_1^{II} + y_1^{III} + y_1^{IV} = \\ &= \frac{1}{E} (10792,84 + 51581,40 x_2 - 8837,96 x_3 + 2208,92 x_4); \\ y_2 &= y_2^I + y_2^{II} + y_2^{III} + y_2^{IV} = \\ &= \frac{1}{E} (6814,29 - 67650,19 x_2 + 35787,55 x_3 - 2815,71 x_4); \\ y_3 &= y_3^I + y_3^{II} + y_3^{III} + y_3^{IV} = \\ &= \frac{1}{E} (-6257,21 + 92827,84 x_2 - 96106,58 x_3 + 34761,11 x_4); \\ y_4 &= y_4^I + y_4^{II} + y_4^{III} + y_4^{IV} = \\ &= \frac{1}{E} (2135,31 - 37043,41 x_2 + 127952,46 x_3 - 93222,81 x_4). \end{aligned}$$

Теперь вычисляем перемещения v_n узлов перекрытия в направлениях, перпендикулярных плоскостям граней, и углы поворота граней ϑ_n . Строим план перемещений (фиг. 7).

Из чертежа легко получаем зависимости:

$$v_k^I = \frac{y_k \cos \Delta_k - y_{k+1}}{\sin \Delta_k}; \quad v_k^r = \frac{y_k - y_{k+1} \cos \Delta_k}{\sin \Delta_k}; \quad (20)$$

где

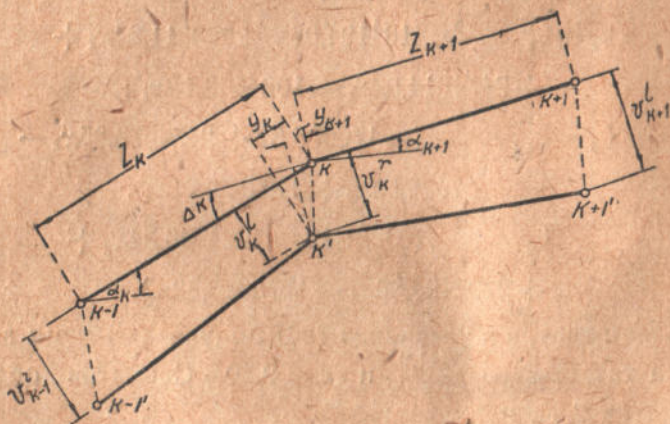
$\Delta_k = \alpha_k - \alpha_{k+1}$; α_k — угол наклона грани k к горизонту.

Далее, из того же чертежа находим ϑ_k — угол поворота грани k :

$$\vartheta_k = \frac{v_k^l - v_{k-1}^r}{z_k}. \quad (21)$$

По формулам (20) для рассматриваемого нами перекрытия имеем:

$$\begin{aligned} v_1^r &= \frac{y_1 - y_2 \cos \Delta_1}{\sin \Delta_1} = \frac{y_1 - y_2 \cos (90^\circ - \alpha_1)}{\sin (90^\circ - \alpha_1)}; \\ v_2^l &= \frac{y_2 \cos \Delta - y_3}{\sin \Delta}; \quad v_2^r = \frac{y_2 - y_3 \cos \Delta}{\sin \Delta}; \\ v_3^l &= \frac{y_3 \cos \Delta - y_4}{\sin \Delta}; \quad v_3^r = \frac{y_3 - y_4 \cos \Delta}{\sin \Delta}; \\ v_4^l &= \frac{y_4 \cos \Delta - y_5}{\sin \Delta} = y_4 \left(\frac{\cos \Delta + 1}{\sin \Delta} \right). \end{aligned}$$



Фиг. 7

Затем по формуле (21) вычисляем углы поворота граней.

Поставив в эту формулу определенные нами величины v_n и числовые значения тригонометрических функций, находим:

$$\begin{aligned} \vartheta_2 &= \frac{1}{2,30} \left[-\frac{y_1}{\sin \Delta_1} + y_2 (\operatorname{ctg} \Delta + \operatorname{ctg} \Delta_1) - \frac{y_3}{\sin \Delta} \right] = \\ &= \frac{1}{2,30} (-1,1379y_1 + 5,5025y_2 - 5,0582y_3) \\ \vartheta_3 &= \frac{1}{2,30} \left(-\frac{y_2}{\sin \Delta} + y_3 \cdot \operatorname{ctg} \Delta - \frac{y_4}{\sin \Delta} \right) = \\ &= \frac{1}{2,30} (-5,0582y_2 + 9,9190y_3 - 5,0582y_4) \\ \vartheta_4 &= \frac{1}{2,30} \left(-\frac{y_3}{\sin \Delta} + y_4 \frac{1 + 2 \cos \Delta}{\sin \Delta} \right) = \\ &= \frac{1}{2,30} (-5,0582y_3 + 14,9772y_4). \end{aligned} \quad (22)$$

Составляем теперь уравнения „трех моментов“ для определения неизвестных моментов x_n :

$$\left. \begin{aligned} 4zx_2 + zx_3 - 6EJ(\vartheta_2 - \vartheta_3) &= \Omega_2^l + \Omega_2^r \\ zx_2 + 4zx_3 + zx_4 - 6EJ(\vartheta_3 - \vartheta_4) &= \Omega_3^l + \Omega_3^r \\ zx_3 + 2zx_4 - 6EJ\vartheta_4 &= \Omega_3^r \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Грузовые члены определены по формуле $\Omega_n = \frac{-6w_n a_n}{z_n}$ известной из теории неразрезных балок.

Произведя необходимые подсчеты, получаем:

$$\Omega_2^l + \Omega_2^r = -0,347 \frac{z^3}{4}; \quad \Omega_3^l + \Omega_3^r = -0,359 \frac{z^3}{4}; \quad \Omega_3^r = -0,179 \frac{z^3}{4}.$$

Входящие в уравнения (23) значения ϑ_n и их разности выражаем в виде функции от x . Подставив в уравнения (22) определенные выше значения y_n , получаем:

$$\begin{aligned} \vartheta_2 - \vartheta_3 &= \frac{1}{2,30E} (164194,06 - 2350811,94x_2 + \\ &\quad + 2474614,89x_3 - 1024463,15x_4); \\ \vartheta_3 - \vartheta_4 &= \frac{1}{2,30E} (-170965,32 + 2474673,85x_2 - \\ &\quad - 4184006,78x_3 + 2402672,81x_4); \\ \vartheta_4 &= \frac{1}{2,30E} (63631,18 - 1024348,34x_2 + \\ &\quad + 2402495,88x_3 - 1572045,32x_4). \end{aligned}$$

Вставляем теперь в уравнения (23) полученные нами значения Ω_n и ϑ_n , а также $J = \frac{0,07^3 \cdot 1,0}{12}$ и $z = 2,30$. Сократив обе части уравнений на 2,30, получаем:

$$\begin{aligned} 4x_2 + x_3 - (5,323 - 76,21x_2 + 80,22x_3 - 33,21x_4) &= -0,459; \\ x_2 + 4x_3 + x_4 - (-5,542 + 80,23x_2 - 135,64x_3 + 77,89x_4) &= -0,475; \\ x_3 + 2x_4 - (2,063 - 33,21x_2 + 77,88x_3 - 50,96x_4) &= -0,237. \end{aligned}$$

Произведя приведение подобных членов и решив уравнения, находим:

$$x_2 = +0,0006; \quad x_3 = -0,120; \quad x_4 = -0,140.$$

Для сравнения приводим результаты, полученные при решении методом Грубера:

$$x_2 = +0,024; \quad x_3 = -0,104; \quad x_4 = -0,138.$$

Найдя таким образом значения x_n , продолжаем расчет обычным способом.

Подставляя в выражения, определяющие c и τ значения x_n , вычисляем:

$$\begin{aligned} c_1 &= S_1^3 + \sum_1 qa = 0,600 + 0,0003 \sin \frac{\pi}{18} \eta; \\ c_2 &= S_2^3 + \sum_2 qa = 2,110 - 0,2665 \sin \frac{\pi}{18} \eta; \end{aligned}$$

$$c_3 = S_3 + \sum_3 qa = 0,257 + 0,4775 \sin \frac{\pi}{18} \eta;$$

$$c_4 = S_4 + \sum_4 qa = 0,0896 - 0,1345 \sin \frac{\pi}{18} \eta;$$

и

$$\tau_1 = \tau_1^y + \tau_1^x = -1,0026 + 0,1006 \sin \frac{\pi}{18} \eta;$$

$$\tau_2 = \tau_2^y + \tau_2^x = -0,5245 - 0,0705 \sin \frac{\pi}{18} \eta;$$

$$\tau_3 = \tau_3^y + \tau_3^x = +0,0185 - 0,0924 \sin \frac{\pi}{18} \eta.$$

Теперь приступаем к вычислению нормальных сил и изгибающих моментов. Интегрируя τ_n (см. формулу 9) и определив затем постоянные c_n (см. формулу 10), получаем:

$$T_1 = -1,0026x + 9,0234 - 0,576 \cos \frac{\pi}{18} \eta = T_1^y - 0,576 \cos \frac{\pi}{18} \eta;$$

$$T_2 = -0,5245x + 4,7205 + 0,404 \cos \frac{\pi}{18} \eta = T_2^y + 0,404 \cos \frac{\pi}{18} \eta;$$

$$T_3 = +0,0185x - 0,1665 + 0,529 \cos \frac{\pi}{18} \eta = T_3^y + 0,529 \cos \frac{\pi}{18} \eta.$$

Далее по формуле (12) определяем нормальные силы для середины пролета ($\eta = \frac{Z}{2} = 9 \text{ м}$):

$$N_1 = \int_0^{\eta} -T_1 d\eta = N_1^y + \int_0^{\eta} -0,576 \cos \frac{\pi}{18} \eta = -40,605 + \\ + 3,300 = -37,305 \text{ м};$$

$$N_2 = \int_0^{\eta} (T_1 - T_2) d\eta = N_2^y + \int_0^{\eta} (-0,576 - 0,404) \cos \frac{\pi}{18} \eta = \\ = 19,363 - 5,615 = +13,748 \text{ м};$$

$$N_3 = \int_0^{\eta} (T_2 - T_3) d\eta = N_3^y + \int_0^{\eta} (0,404 - 0,529) \cos \frac{\pi}{18} \eta = \\ = 21,992 - 0,716 = +21,276 \text{ м};$$

$$N_4 = \int_0^{\eta} T_3 dx = N_4^y + \int_0^{\eta} 0,529 \cos \frac{\pi}{18} \eta = -0,749 + 3,031 = 2,282 \text{ м}.$$

Затем по формуле (11) определяем изгибающие моменты:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1^0 &= \frac{S_1^2 Z^2}{8} + \frac{\sum_1 qa \frac{\pi}{4} Z^2}{8} = \frac{Z^2}{8} \left(S_1^2 + \sum_1 qa \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 40,5 (0,6000 + 0,0002) = + 24,308; \end{aligned}$$

$$\mathfrak{M}_2^0 = \frac{Z^2}{8} \left(S_2^2 + \sum_2 qa \frac{\pi}{4} \right) = 40,5 (2,110 - 0,209) = + 76,992;$$

$$\mathfrak{M}_3^0 = \frac{Z^2}{8} \left(S_3^2 + \sum_3 qa \frac{\pi}{4} \right) = 40,5 (0,257 + 0,375) = + 25,596;$$

$$\mathfrak{M}_4^0 = \frac{Z^2}{8} \left(S_4^2 + \sum_4 qa \frac{\pi}{4} \right) = 40,5 (0,0896 - 0,1056) = - 0,648;$$

$$M'_1 = 0,50 \int_0^{\eta} T_1 d\eta = - 0,50 N_1 = + 18,653;$$

$$\begin{aligned} M'_2 &= 1,15 \int_0^{\eta} (T_1 + T_2) d\eta = M'_2{}^0 + 1,15 \int_0^{\eta} (- 0,576 + 0,404) \cos \frac{\pi}{18} \eta = \\ &= 71,125 - 1,133 = 69,992; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M'_3 &= 1,15 \int_0^{\eta} (T_2 + T_3) d\eta = M'_3{}^0 + 1,15 \int_0^{\eta} (0,404 + 0,529) \cos \frac{\pi}{18} \eta = \\ &= 23,567 + 6,148 = 29,715; \end{aligned}$$

$$M'_4 = 1,15 \int_0^{\eta} T_3 d\eta = 1,15 N_4 = 2,624;$$

$$M_1 = \mathfrak{M}_1^0 - M'_1 = 24,308 - 18,653 = + 5,655 \text{ т} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = \mathfrak{M}_2^0 - M'_2 = 76,992 - 69,992 = + 7,000 \text{ т} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = \mathfrak{M}_3^0 - M'_3 = 25,596 - 29,715 = - 4,119 \text{ т} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = \mathfrak{M}_4^0 - M'_4 = - 0,648 - 2,624 = - 3,272 \text{ т} \cdot \text{м}.$$

Вычисляем напряжения в крайних волокнах граней:

$$\sigma_{01} = \left(- \frac{37,305}{0,150} \mp \frac{5,655}{0,025} \right) \text{ т/м}^2; \quad \sigma_{12} = \left(\frac{13,748}{0,161} \mp \frac{7,000}{0,0617} \right) \text{ т/м}^2;$$

$$\sigma_{23} = \left(\frac{21,276}{0,161} \pm \frac{4,119}{0,0617} \right) \text{ т/м}^2; \quad \sigma_{34} = \left(\frac{2,282}{0,161} \pm \frac{3,272}{0,0617} \right) \text{ т/м}^2;$$

откуда (фиг. 8):

$$\sigma_0 = 47,49 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma_1 = - 2,52 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma_2 = 19,88 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_3 = 6,63 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma_4 = - 3,88 \text{ кг/см}^2.$$

Для сравнения приводим эпюру напряжений в крайних волокнах, полученную при подстановке значений χ_n , вычисленных по методу Грубера (фиг. 9). Как видим, максимальные сжимающие напряжения отличаются на 15%, причем погрешность идет в запас прочности.



Фиг. 8



Фиг. 9

§ 4. Расчет складчатых перекрытий на устойчивость

В зависимости от соотношения размеров перекрытия и характера приложения нагрузки, наиболее опасной может быть потеря устойчивости либо местная, либо общая. Как показали подсчеты, произведенные А. А. Пиковским¹, наиболее вероятными видами потери устойчивости являются:

а) местное выпучивание одной из граней, нередко имеющее место только в средней наиболее напряженной части грани (Эйлера потеря устойчивости);

б) общая потеря устойчивости (потеря устойчивости второго рода).

На местную потерю устойчивости плита складчатого перекрытия может быть рассчитана, как пластинка с опертыми краями. Методология такого расчета разработана достаточно подробно различными авторами; в приложении к складкам задача решена А. А. Пиковским в упомянутой работе, почему мы на этом вопросе останавливаться не будем.

Что же касается проверки складок на общую потерю устойчивости, то, как уже было указано, здесь до сих пор никаких методов расчета не существует.

Мы ниже изложим предлагаемый нами приближенный способ проверки складчатых перекрытий на общую потерю устойчивости.

¹ А. А. Пиковский. Устойчивость складчатых оболочек, Киев, 1936.

Ввиду того, что рассматриваются железобетонные складки, мы в нашем примере произведем поверку складчатого перекрытия, полагая, что грани соединены между собой на ребрах жестко. Шарнирное соединение граней можно рассматривать, как частный случай жесткого, при $x_n = 0$.

Остановимся вкратце на том, какими явлениями вызывается и характеризуется общая потеря устойчивости.

Аналогично тому, что имело место при расчете на прочность, нагрузка, действующая на перекрытие, передается на ребра, положение которых в пространстве мы считаем неизменяемым.

В результате разложения сил по направлениям граней и алгебраического суммирования их, мы получаем нагрузки b , изгибающие грани в их плоскостях. Нагрузки b вызовут прогибы в системе, вследствие чего углы между гранями изменятся (поскольку прогибы будут, вообще говоря, неодинаковы) и углы наклона граней к горизонту уменьшатся.

При постоянных нагрузках это вызовет увеличение усилий b . В том случае, если нагрузка перекрытия настолько велика, что приращение усилий будет равно или превысит приращение отпорности граней вследствие увеличения их прогиба, в системе возникает критическое состояние (состояние безразличного равновесия), которое потом вызовет общую потерю устойчивости перекрытия. После этих предварительных замечаний приступаем к выводу основных формул.

Как мы уже указывали, под действием изгибающих нагрузок углы наклона граней к горизонту уменьшатся. Обозначим уменьшение угла α_k через θ_k . Теперь, по аналогии с формулами (1) находим составляющие внешних сил, действующие по направлениям граней с учетом деформации системы:

$$\left. \begin{aligned} S_k^I &= P_k \frac{\cos(\alpha_{k+1} - \theta_{k+1})}{\sin(\alpha_k - \theta_k - \alpha_{k+1} + \theta_{k+1})} \\ S_k^X &= P_k \frac{\cos(\alpha_k - \theta_k)}{\sin(\alpha_k - \theta_k - \alpha_{k+1} + \theta_{k+1})} \end{aligned} \right\} \quad (1b)$$

Разлагая эти выражения в ряд по Тейлору и, вследствие предполагаемой малости всех θ , принимая во внимание только члены первой степени, получаем:

$$\left. \begin{aligned} S_k^I &= P_k \left(\frac{\cos \alpha_{k+1}}{\sin \Delta_k} + \theta_k \frac{\cos \Delta_k \cos \alpha_{k+1}}{\sin^2 \Delta_k} - \theta_{k+1} \frac{\cos \alpha_k}{\sin^2 \Delta_k} \right), \\ S_k^X &= P_k \left(\frac{\cos \alpha_k}{\sin \Delta_k} + \theta_k \frac{\cos \alpha_{k+1}}{\sin^2 \Delta_k} - \theta_{k+1} \frac{\cos \Delta_k \cos \alpha_k}{\sin^2 \Delta_k} \right), \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где

$$\Delta_k = \alpha_k - \alpha_{k+1}.$$

При жестком соединении граней формулы остаются те же, только вместо внешних сил P_k принимается нагрузка $P_k + q_k$.

т. е. учитывается дополнительная узловая нагрузка, вызываемая действием изгибающих моментов x_n .

Затем, по аналогии с формулой (2), определяем изгибающие грани нагрузки b :

$$b_k = S_k^l - S_{k-1}^r. \quad (2a)$$

Дальнейший ход расчета таков:

Составляем систему уравнений (8), вводя везде b_k вместо S_k . Решая эту систему, находим $\frac{dT}{d\eta}(\tau)$ в функции от Θ (через b). Затем приступаем к определению прогибов y_n посередине граней.

Эти прогибы, очевидно, также будут выражены в функции углов Θ , причем, так как степенями Θ выше первой мы, вследствие их малости, пренебрегаем, — все уравнения будут линейны относительно Θ .

В общем случае по формулам (9, 10, 11) последовательно находим касательные усилия в ребрах и моменты, изгибающие грани.

Дважды интегрируя уравнение $M = EJ \frac{d^2v}{d\eta^2}$, вычисляем прогиб.

Для однопролетного перекрытия, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой, возможно упрощение определения прогиба.

В этом случае все нагрузки, приложенные к грани k , могут быть разбиты на 2 категории:

1) перпендикулярные к оси грани равномерно-распределенные нагрузки q' ;

2) параллельные оси грани срезающие усилия τ вдоль ребер, пропорциональные расстоянию η рассматриваемого сечения от середины грани ($\tau = A\eta$, где A — некий постоянный коэффициент).

Тогда y_n находится как сумма прогибов

$$y_n^q = \frac{5}{384} \frac{q' Z^4}{EJ} \text{ и } y_n^\tau = \frac{AhZ^3}{48EJ}.$$

Вывод второй формулы производится вполне элементарно. Зная прогибы y_n , переходим к определению боковых смещений v_n узлов перекрытия. Вычисления производим по формулам (20).

Изменение углов α на величину Θ в данном случае не играет роли, так как величины смещений v_n представляют собой перпендикуляры, восстановленные из узла n смещенного перекрытия к недеформированным направлениям граней n и $n+1$ (см. фиг. 7). Поэтому путь расчета, рекомендуемый Блейхом, следует признать ошибочным.

Подставляя вместо y_n их значения, получим v_n в виде функций от Θ .

Далее, по формуле (21) составляем уравнения

$$\Theta_n = \frac{v_n^l - v_{n-1}^r}{z} \quad (21a)$$

В этих уравнениях неизвестны только Θ ; число уравнений равно числу неизвестных; все уравнения — первой степени относительно Θ (высшие степени отбрасываются). Неустойчивому (или безразличному) состоянию равновесия системы будут соответствовать неопределенные или бесконечно большие решения для Θ . Математически это выражается условием, что детерминант системы уравнений (21а) в момент потери устойчивости перекрытия обращается в нуль.

На этом основании запас устойчивости перекрытия, при заданных нагрузках, находится следующим путем: в формулы (24) вместо P_k (или $P_k + q_k$), вводятся величины $P_k k$ или $(P_k + q_k) k$ — действительные значения погонных нагрузок вдоль ребер, умноженные на искомый коэффициент устойчивости k . Тогда k войдет во все дальнейшие выкладки. Составляя детерминант системы уравнений (24) и приравнявая его нулю, получаем уравнение степени m относительно k , где m — число граней, не считая крайних вертикальных.

При симметричном перекрытии можно положить, что деформация при потере устойчивости будет симметрична. В этом случае число неизвестных Θ и степень m уравнения для определения k — сокращаются вдвое.

Из всех корней уравнения при вычислении k действительным значением является наименьшее положительное.

Заметим, что изложенный метод расчета не является вполне точным. Здесь принято, что изменение Θ угла наклона грани n к горизонту — постоянно по всей длине грани и равно своему наибольшему значению посередине пролета. В действительности это не так: у опор Θ равно нулю; вообще Θ изменяется вдоль пролета по закону синусоиды.

Однако, мы считаем возможным пренебречь этой неточностью, так как принятое допущение идет всегда в запас устойчивости, причем произведенные нами подсчеты показали, что погрешность не превышает 15 — 20%.

Сейчас мы проиллюстрируем изложенное примерным расчетом.

Определим действительный коэффициент устойчивости перекрытия, рассчитанного на прочность в § 3.

Так как каждая грань представляет собой однопролетную систему, производить вычисление изгибающих моментов нет необходимости. Определяем непосредственно усилия, вызывающие прогибы граней. Аналогично тому, что мы имели при расчете на прочность, величина прогиба u_n зависит от изгибающих усилий, вызываемых погонными равномерно распределенными нагрузками b и срезающими усилиями $\tau \left(\frac{dT}{dr} \right)$.

Сравним формулы (24) с формулами (1, 1а). Очевидно, что выражения (24) могут быть представлены в следующем виде (с учетом дополнительных узловых нагрузок q_n , возникающих от действия моментов x_n и вводя в уравнения коэффициент устойчивости k):

$$\left. \begin{aligned}
 S_k^i &= ki_k^i \left[(P_k k + q_k k) \left(\Theta_k \frac{\cos \Delta_k \cos \alpha_{k+1}}{\sin^2 \Delta_k} - \Theta_{k+1} \frac{\cos \alpha_k}{\sin^2 \Delta_k} \right) \right] = \\
 &= ki_k^i + S_k^{i^p} + S_k^{i^q} \\
 S_k^r &= ki_k^r \left[(P_k k + q_k k) \left(\Theta_k \frac{\cos \alpha_{k+1}}{\sin^2 \Delta_k} - \Theta_{k+1} \frac{\cos \Delta_k \cos \alpha_k}{\sin^2 \Delta_k} \right) \right] = \\
 &= ki_k^r + S_k^{r^p} + S_k^{r^q}
 \end{aligned} \right\} (24a)$$

Отсюда:

$$\begin{aligned}
 b_k &= S_k^i - S_{k-1}^r = k(i_k^i - i_{k-1}^r) + (S_k^{i^p} - S_{k-1}^{r^p}) + (S_k^{i^q} - S_{k-1}^{r^q}) = \\
 &= kc_k + b_k^p + b_k^q.
 \end{aligned} \quad (2b)$$

В формулах (24а и 2b) индекс p означает, что данная величина является функцией внешних сил; индекс q — что данная величина является функцией дополнительных узловых нагрузок q_n . Прогибы, вызываемые нагрузками s_k (и возникающими в результате действия этих нагрузок касательными усилиями), мы определили в § 3 по формулам (16—19).

Переписываем (учитывая коэффициент устойчивости k):

$$\begin{aligned}
 y_1^{I-IV} &= \frac{1}{E} (10792,84k + 51581,40x_2 - 8837,96x_3 + 2208,92x_4); \\
 y_2^{I-IV} &= \frac{1}{E} (6814,29k - 67650,19x_2 + 35787,55x_3 - 2815,71x_4); \\
 y_3^{I-IV} &= \frac{1}{E} (-6257,21k + 92827,84x_2 - 96106,58x_3 + 34761,11x_4); \\
 y_4^{I-IV} &= \frac{1}{E} (2135,31k - 37043,41x_2 + 127952,46x_3 - 93222,81x_4).
 \end{aligned}$$

Далее переписываем из § 3 уравнения (23) также с учетом k :

$$\left. \begin{aligned}
 4zx_2 + zx_3 - 6EJ(\Theta_2 - \Theta_3) &= -0,347 \frac{z^3}{4} k \\
 zx_2 + 4zx_3 + zx_4 - 6EJ(\Theta_3 - \Theta_4) &= -0,359 \frac{z^3}{4} k \\
 zx_3 + 2zx_4 - 6EJ\Theta_4 &= -0,179 \frac{z^3}{4} k
 \end{aligned} \right\} (23a)$$

Решив систему уравнений (23а); находим:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= -0,09614k + 42,16\Theta_2 - 55,10\Theta_3 + 18,07\Theta_4; \\
 x_3 &= -0,07437k - 12,05\Theta_2 + 60,22\Theta_3 - 72,27\Theta_4; \\
 x_4 &= -0,08118k + 6,02\Theta_2 - 30,11\Theta_3 + 114,43\Theta_4.
 \end{aligned}$$

Подставляя в полученные ранее выражения y_n^{I-IV} найденные значения x_n , определяем:

$$\begin{aligned}
 y_1^{I-IV} &= +0,00301k + 1,0926\Theta_2 - 1,6385\Theta_3 + 0,8684\Theta_4; \\
 y_2^{I-IV} &= +0,00519k - 1,5714\Theta_2 + 2,8412\Theta_3 - 1,9668\Theta_4; \\
 y_3^{I-IV} &= -0,00518k + 2,5148\Theta_2 - 5,6908\Theta_3 + 6,0052\Theta_4; \\
 y_4^{I-IV} &= +0,00179k - 1,7451\Theta_2 + 5,9778\Theta_3 - 9,8018\Theta_4.
 \end{aligned}$$

Теперь необходимо учесть прогибы от дополнительных нагрузок, возникающих вследствие деформации перекрытия.

Прежде всего учитываем дополнительную погонную нагрузку, вызываемую внешними силами P_k . (Значения нагрузок P_k принимаем прежние):

$$P_1 = 0,600 \text{ т/м}; P_2 = P_3 = P_4 = 0,437 \text{ т/м}.$$

По формулам (24а) вычисляем:

$$S_1^{ip} = 0; S_2^{ip} = k(10,477\theta_2 - 9,827\theta_3); S_2^{pp} = k(10,688\theta_2 - 9,6330\theta_3);$$

$$S_3^{ip} = k(10,908\theta_3 - 10,688\theta_4); S_3^{pp} = k(11,127\theta_3 - 10,477\theta_4);$$

$$S_4^{ip} = k \cdot 22,035\theta_4.$$

Отсюда по формулам (2b) определяем:

$$b_2^p = k(10,477\theta_2 - 9,827\theta_3); b_3^p = k(-10,688\theta_2 + 20,541\theta_3 - 10,688\theta_4);$$

$$b_4^p = k(-11,127\theta_3 + 32,512\theta_4).$$

И затем по формуле

$$y_n^v = \frac{5}{384} \frac{b_n^p Z^v}{EJ} \quad (16a)$$

находим:

$$y_1^v = 0; y_2^v = k(0,09608\theta_2 - 0,09012\theta_3);$$

$$y_3^v = k(-0,09802\theta_2 + 0,18837\theta_3 - 0,09802\theta_4);$$

$$y_4^v = k(-0,10204\theta_3 + 0,29816\theta_4).$$

Далее учитываем дополнительные узловые нагрузки q'_n . Расчет ведем по тем же формулам (24а) и (2b).

Значения q берем из § 3:

$$q_1 = 0,4948x_2; q_2 = -0,950x_2 + 0,455x_3;$$

$$q_3 = 0,455x_2 - 0,892x_3 + 0,437x_4; q_4 = 0,874x_3 - 0,874x_4.$$

Произведя необходимые вычисления, находим:

$$b_2^q = k(1,378\theta_2 - 1,293\theta_3); b_3^q = k(-1,406\theta_2 + 0,945\theta_3 + 0,315\theta_4);$$

$$b_4^q = k(0,328\theta_3 - 0,009\theta_4).$$

Откуда по формуле

$$y_n^{vi} = \frac{5}{384} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b_n^q Z^4}{EJ} \quad (17a)$$

находим:

$$y_1^{vi} = 0; y_2^{vi} = k(0,00993\theta_2 - 0,00931\theta_3);$$

$$y_3^{vi} = k(-0,01013\theta_2 + 0,00681\theta_3 + 0,00227\theta_4);$$

$$y_4^{vi} = k(0,00236\theta_3 - 0,00006\theta_4).$$

Далее вычисляем изгибы от касательных усилий, возникающих вследствие действия дополнительных нагрузок от деформации перекрытия.

Для определения касательных усилий τ_n^p , вызываемых нагрузками b_n^p , пишем — по аналогии с уравнениями (13):

$$4,146\tau_1^p + \tau_2^p = -1,30b_2^p;$$

$$\tau_1^p + 4\tau_2^p + \tau_3^p = -1,30b_2^p - 1,30b_3^p;$$

$$\tau_2^p + 4\tau_3^p = -1,30b_3^p - 1,30b_4^p.$$

Решая систему уравнений, находим:

$$\tau_1^p = \frac{1}{58,19} (-14,30b_2^p + 3,90b_3^p - 1,30b_4^p);$$

$$\tau_2^p = \frac{1}{58,19} (-16,36b_2^p - 16,17b_3^p + 5,39b_4^p);$$

$$\tau_3^p = \frac{1}{58,19} (+4,09b_2^p - 14,87b_3^p - 20,26b_4^p).$$

Подставляя полученные значения τ_n^p в формулу

$$y_n^{VII} = \frac{5 \binom{Z}{2}^4 \cdot Z_n (\tau_{n-1}^p + \tau_n^p)}{48 \cdot EJ_n}, \quad (18a)$$

вычисляем:

$$y_1^{VII} = k (-0,08570\theta_2 + 0,09224\theta_3 - 0,03758\theta_4);$$

$$y_2^{VII} = k (-0,03445\theta_2 + 0,00068\theta_3 + 0,04787\theta_4);$$

$$y_3^{VII} = k (+0,03687\theta_2 - 0,06375\theta_3 - 0,02749\theta_4);$$

$$y_4^{VII} = k (+0,03658\theta_2 - 0,02178\theta_3 - 0,09058\theta_4).$$

Наконец, определяем касательные усилия τ_n^q , вызываемые нагрузками b_n^q . Снова по аналогии с уравнениями (13) пишем:

$$4,146\tau_1^q + \tau_2^q = -1,30b_2^q;$$

$$\tau_1^q + 4\tau_2^q + \tau_3^q = -1,30b_2^q - 1,30b_3^q;$$

$$\tau_2^q + 4\tau_3^q = -1,30b_3^q - 1,30b_4^q.$$

Решая систему уравнений, находим τ_1^q , τ_2^q и τ_3^q .

Вставляя затем полученные значения в формулу

$$y_4^{VIII} = \frac{Z_n Z^3 (\tau_{n-1}^q + \tau_n^q)}{2\pi^3 EJ_n}, \quad (19a)$$

вычисляем:

$$y_1^{VIII} = k(-0,00156\theta_2 + 0,00134\theta_3 + 0,00008\theta_4);$$

$$y_2^{VIII} = k(-0,00062\theta_2 + 0,00073\theta_3 - 0,00010\theta_4);$$

$$y_3^{VIII} = k(+0,00067\theta_2 - 0,00046\theta_3 - 0,00024\theta_4);$$

$$y_4^{VIII} = k(+0,00066\theta_2 - 0,00065\theta_3 - 0,00011\theta_4).$$

Дальнейший ход расчета таков:

Определяем полные прогибы граней, вызванные всеми действующими усилиями:

$$y_1 = y_1^I + y_1^{II} + y_1^{III} + y_1^{IV} + y_1^V + y_1^{VI} + y_1^{VII} + y_1^{VIII} = +0,00301k + \\ + \theta_2(1,0926 - 0,08726k) + \theta_3(-1,6385 + 0,9358k) + \\ + \theta_4(0,8684 - 0,03750k);$$

$$y_2 = y_2^{I-VIII} = +0,00519k + \theta_2(-1,5714 + 0,7094k) + \\ + \theta_3(2,8412 - 0,09802k) + \theta_4(-1,9668 + 0,04777k);$$

$$y_3 = y_3^{I-VIII} = -0,00518k + \theta_2(2,5148 - 0,07061k) + \\ + \theta_3(-5,6908 + 0,13097k) + \theta_4(-6,0052 - 0,12348k);$$

$$y_4 = y_4^{I-VIII} = +0,00179k + \theta_2(-1,7451 + 0,03724k) + \\ + \theta_3(5,9778 - 0,12211k) + \theta_4(-9,8018 + 0,20741k).$$

Теперь напишем выражения для углов поворота граней θ_n по формулам (22) (мы имеем право так поступить ввиду того, что значения ν_n , а следовательно и θ_n — как указывалось выше — аналогичны вычисленным при расчете перекрытия на прочность).

Произведя необходимые подсчеты, получаем такую систему уравнений:

$$\theta_2 = \frac{1}{2,30} [0,05133k + \theta_2(-22,61026 + 0,84680k) + \\ + \theta_3(46,28335 - 1,30831k) + \theta_4(-42,18597 + 0,92494k)];$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2,30} [-0,08668k + \theta_2(41,71982 - 1,24758k) + \\ + \theta_3(-101,05532 + 2,41255k) + \theta_4(119,09351 - 2,51555k)];$$

$$\theta_4 = \frac{1}{2,30} [0,05301k + \theta_2(-38,85707 + 0,91491k) + \\ + \theta_3(118,31591 - 2,49134k) + \theta_4(-177,17902 + 3,73101k)].$$

Теперь приравниваем нулю детерминант полученной системы:

$$-24,91026 + 0,84680k; 46,28335 - 1,30831k; 42,18597 + 0,92494k; \\ 41,71982 - 1,24758k; -103,35532 + 2,41255k; 119,09351 - 2,51555k; \\ -38,85707 + 0,91491k; 118,31591 - 2,49134k; -179,47902 + \\ + 3,73101k.$$

В результате получаем кубическое уравнение

$$+ 0,0698k^3 - 19,461k^2 + 1139,45k - 17518,33 = 0,$$

из которого и находим интересующее нас наименьшее положительное значение k

$$+ k_{\min} = 25,35.$$

Приведенный метод расчета, содержащий целый ряд упрощений и допущений, является весьма приближенным. В настоящее время авторы разрабатывают более точный способ проверки на общую потерю устойчивости складчатого перекрытия, который даст возможность оценить погрешность приближенного способа. Но при оценке точности приближенного решения следует помнить, что речь идет о железобетонной конструкции, по отношению к которой все расчетные предпосылки всегда будут только приближенными и в известной мере условными. Именно с такой точки зрения надлежит оценивать реальность всяких „точных“ расчетов. Поэтому более желательной была бы экспериментальная проверка полученных нами результатов, проведенная хотя бы на самых примитивных моделях.

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛОНН СТУПЕНЧАТООБРАЗНОГО СЕЧЕНИЯ

§ 1. Введение

В настоящей работе рассмотрен расчет на устойчивость колонн переменного сечения, при ступенчатообразном изменении по высоте их моментов инерции, находящихся под действием вертикальных сил, приложенных центрально к верхнему концу, а также где-либо по высоте колонны.

Рассмотрены случаи, наиболее часто встречающиеся в строительной практике, — момент инерции меняется один и два раза по высоте — при различных условиях закрепления концов: а) нижний конец зашцеилен, верхний свободен и б) нижний конец зашцеилен, верхний шарнирно-оперт. Кроме того, рассмотрена система, состоящая из ряда колонн, соединенных шарнирно друг с другом при помощи горизонтального жесткого ригеля.

Настоящая работа написана и доложена в Украинском научно-исследовательском институте сооружений в 1933 г. Мы ее печатаем без изменений, так как материал, изложенный в ней, не получил еще достаточного освещения в литературе за годы 1933—1937.

За указанный период времени появились следующие, известные нам, интересные работы, посвященные тем же вопросам — устойчивость колонн переменного (ступенчатообразного) сечения и устойчивость связанной системы колонн: „Об одном случае продольного изгиба стержней“, инж. А. Каган, журнал „Проект и Стандарт“, № 6, за 1935 г.; „Проверка общей устойчивости колонн переменного сечения с упругим защемлением концов“, доц. В. А. Балдин, журнал „Внутриводской транспорт и стальные конструкции“, № 8, за 1937 г.; „Об устойчивости стержней и простых рамных систем“, проф. Н. П. Павлюк, „Труды ЛИИКС“, в. I, 1934 г.; „Об устойчивости стержня, входящего в состав связанной системы стержней“, инж. П. П. Михайлов, журнал „Проект и Стандарт“ № 10, за 1934 г., а также ряд работ по устойчивости рамных конструкций, которые мы не отмечаем, так как в данной работе их не рассматриваем.

Основными работами по данному вопросу являются: „Теория продольного изгиба“, акад. Б. Г. Галеркин, „Известия С.-Петербургского Политехнического института“, т. XII, отдел техники, естествознания и математики, вып. 2, 1909 г. и „Подовжний угин та його застосування в техніці“, акад. А. Н. Динник и В. П. Лысков, ГНТИ, 1932 г.

1. Исследование устойчивости отдельно стоящих колонн ступенчатообразного сечения

А. Приближенное решение

§ 2. Приближенный расчет на устойчивость стержня переменного сечения с шарнирно-опертыми концами

Рассмотрим приближенный расчет стержня с шарнирно-опертыми концами с переменным моментом инерции, симметрично ступенчатообразно изменяющимся по высоте (фиг. 1). При этом принимаем его состоящим из $2n$ участков какой угодно протяженности, имеющих различные моменты инерции, постоянные на протяжении каждого участка.

В качестве приближенного метода рассмотрим определение $P_{кр}$, исходя из формулы поперечного изгиба стержня, находящегося под действием нагрузки, вызывающей изгибающие моменты, равные тем, какие бы мы получили при продольном его изгибе, если бы он изогнулся по задаваемой нами кривой.

Для определения величины прогиба в середине рассматриваемого нами стержня, состоящего из $2n$ участков с разными моментами инерции, применяем общий метод расчета балок переменного сечения, излагаемый нами в работе того же наименования¹. На основании этого способа значение прогиба в середине пролета балки ступенчатообразного сечения со свободноопертыми концами при загрузке любого вида выражается следующей формулой:



Фиг. 1

$$y_{l/2} = \frac{1}{EJ_n} \left[\left(\frac{l^3}{24} + \frac{1}{3} \sum_{m=1}^{n-1} \Delta k_m \lambda_m^3 \right) \Phi''' \left(\frac{l}{2} \right) - \frac{l}{2} \Phi' \left(\frac{l}{2} \right) + \Phi \left(\frac{l}{2} \right) \right], \quad (1)$$

где l — пролет балки, J_n — момент инерции поперечного сечения участка балки в середине пролета, λ_m — расстояние конца участка с моментом инерции J_m от начала балки, $k_m = \frac{J_n}{J_m}$ — отношение момента инерции поперечного сечения среднего участка балки к моменту инерции каждого m -го участка, $\Delta k_m = k_m - k_{m+1}$ — разность отношений моментов инерции каждого предыдущего и последующего участков.

Выражение функции $\Phi(x)$ определяется из уравнения:

$$\Phi_u(x) = \sum_{m=1}^{n-1} k_m \int_{\lambda_{m-1}}^{\lambda_m} \varphi_m(t) (x-t) dt + k_n \int_{\lambda_{n-1}}^x \varphi_n(t) (x-t) dt, \quad (2)$$

¹ В. П. Манжаловский. Общий метод расчета балок ступенчатообразного сечения. Сборник научных трудов, I, Харьковский инженерно-строительный институт, 1935.

где:

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)(x-t) dt, \quad (3)$$

$f(x)$ — нагрузка на балке, выраженная в функции от x .

Предположим в первом приближении, что стержень изогнулся по синусоиде (фиг. 2):

$$y = \mu \sin \frac{\pi x}{l}; \quad (4)$$

тогда величина изгибающего момента в любом сечении будет равна:

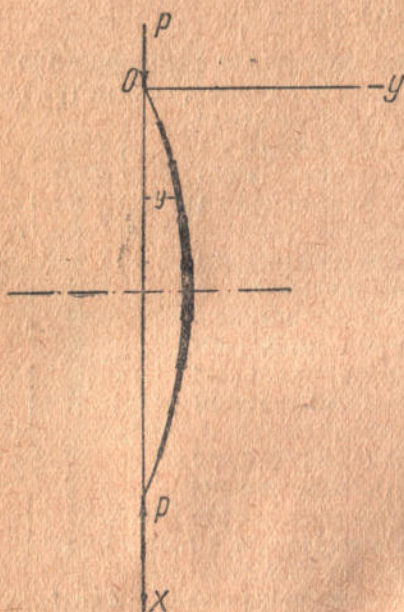
$$M_x = -P\mu \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (5)$$

и выражение для поперечной нагрузки q получит следующий вид:

$$f(x) = \frac{d^2 M_x}{dx^2} = P\mu \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (6)$$

На основании формул (2) и (3) при этом находим:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^x -\frac{P\mu\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi t}{l} \cdot (x-t) dt = \\ &= P\mu \left(\frac{\pi x}{l} - \sin \frac{\pi x}{l} \right) \quad (7) \end{aligned}$$



Фиг. 2

и

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= \sum_{m=1}^{m=n-1} k_m \int_{\lambda_{m-1}}^{\lambda_m} P\mu \left(\frac{\pi t}{l} - \sin \frac{\pi t}{l} \right) (x-t) dt + \\ &+ k_n \int_{\lambda_{n-1}}^x P\mu \left(\frac{\pi t}{l} - \sin \frac{\pi t}{l} \right) (x-t) dt = \frac{P\mu\pi}{l} \left\{ k_n \left(\frac{x^3}{6} + \frac{l^3}{\pi^3} \sin \frac{\pi x}{l} \right) + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \left\{ \frac{\lambda_m^2}{2} x - \frac{\lambda_m^3}{3} + \frac{l^2}{\pi^2} \left[(x - \lambda_m) \cos \frac{\pi \lambda_m}{l} + \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi \lambda_m}{l} \right] \right\} - k_1 \frac{l^2}{\pi^2} x \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \Phi \left(\frac{l}{2} \right) &= \frac{P\mu\pi}{l} \left\{ \frac{l^3}{48} + \frac{l^3}{\pi^3} + \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \left\{ \frac{l\lambda_m^2}{4} - \frac{\lambda_m^3}{3} + \frac{l^2}{\pi^2} \left[\left(\frac{l}{2} - \lambda_m \right) \cos \frac{\pi \lambda_m}{l} + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi \lambda_m}{l} \right] \right\} - k_1 \frac{l^3}{\pi^2} \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\Phi' \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{P\mu\pi}{l} \left[\frac{l^2}{8} + \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \left(\frac{\lambda_m^2}{2} + \frac{l^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi\lambda_m}{l} \right) - k_1 \frac{l^2}{\pi^2} \right], \quad (10)$$

$$\Phi''' \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{P\mu\pi}{l}. \quad (11)$$

Подставляя выражения $\Phi \left(\frac{l}{2} \right)$, $\Phi' \left(\frac{l}{2} \right)$ и $\Phi''' \left(\frac{l}{2} \right)$ в формулу (1) и производя соответствующие сокращения, получаем значение прогиба балки в середине пролета от нагрузки, выражаемое уравнением (6), в следующем виде:

$$\begin{aligned} EJ_n y_{l/2} &= \frac{P\mu\pi}{l} \left[\frac{l^3}{\pi^3} - \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \left(\frac{\lambda_m l^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi\lambda_m}{l} - \frac{l^3}{\pi^3} \sin \frac{\pi\lambda_m}{l} \right) \right] = \\ &= \frac{P\mu l^3}{\pi^3} \left[1 + \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \left(\sin \frac{\pi\lambda_m}{l} - \frac{\pi\lambda_m}{l} \cos \frac{\pi\lambda_m}{l} \right) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как, на основании принятого нами уравнения кривой изгиба (4), прогиб в середине пролета стержня при $x = \frac{l}{2}$ равен:

$$y_{l/2} = \nu, \quad (13)$$

то имеем:

$$EJ_n \nu = \frac{P\mu l^3}{\pi^3} \left[1 + \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \left(\sin \frac{\pi\lambda_m}{l} - \frac{\pi\lambda_m}{l} \cos \frac{\pi\lambda_m}{l} \right) \right]. \quad (14)$$

Из полученного уравнения (14) находим значение критической силы:

$$P_{кр} = \frac{\pi^3 EJ_n}{l^2 \left[1 + \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \left(\sin \frac{\pi\lambda_m}{l} - \frac{\pi\lambda_m}{l} \cos \frac{\pi\lambda_m}{l} \right) \right]}. \quad (15)$$

Принимая во внимание приближенность полученного нами выражения для $P_{кр}$, мы можем его упростить, заменяя $\sin \frac{\pi\lambda_m}{l}$ и $\cos \frac{\pi\lambda_m}{l}$ их разложениями в ряды и пренебрегая членами с высокими степенями, а именно:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi\lambda_m}{l} - \frac{\pi\lambda_m}{l} \cos \frac{\pi\lambda_m}{l} &= \frac{\pi\lambda_m}{l} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi\lambda_m}{l} \right)^3 + \\ &+ \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi\lambda_m}{l} \right)^5 - \dots - \frac{\pi\lambda_m}{l} \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi\lambda_m}{l} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi\lambda_m}{l} \right)^4 - \dots \right] = \\ &= 2 \left[\frac{1}{3!} \left(\frac{\pi\lambda_m}{l} \right)^3 - \frac{2}{5!} \left(\frac{\pi\lambda_m}{l} \right)^5 + \frac{3}{7!} \left(\frac{\pi\lambda_m}{l} \right)^7 - \dots \right] \approx \frac{1}{3} \left(\frac{\pi\lambda_m}{l} \right)^3. \end{aligned}$$

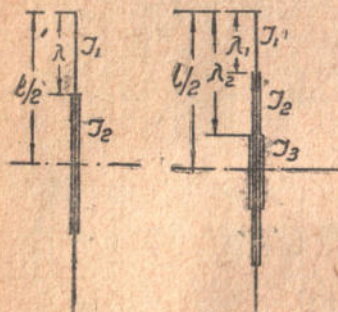
Тогда выражение критической силы для стойки переменного сечения с моментом инерции, симметрично ступенчатообразно

изменяющимся по высоте при числе участков равном $2n$, получает следующий вид:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_n}{l^2 \left[1 + \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \frac{1}{3} \left(\frac{\pi \lambda_m}{l} \right)^3 \right]} = \frac{\pi^2 E J_n}{l^2 \left[1 + \frac{\pi^3}{3} \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \left(\frac{\lambda_m}{l} \right)^3 \right]} \quad (16)$$

или приближенно:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_n}{l^2 \left[1 + 10 \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \left(\frac{\lambda_m}{l} \right)^3 \right]} \quad (17)$$



Фиг. 3.

Фиг. 4

Таким образом, для стоек с числом перемен момента инерции равном:

$$n = 2 \text{ (фиг. 3)}$$

$$n = 3 \text{ (фиг. 4)}$$

получаем при $n = 2$:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_2}{l_2 \left[1 + 10 \Delta k \left(\frac{\lambda}{l} \right)^3 \right]}, \quad (18)$$

где

$$\Delta k = k_1 - k_2 = \frac{J_2}{J_1} - 1,$$

и при $n = 3$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_3}{l^2 \left\{ 1 + 10 \left[\Delta k_1 \left(\frac{\lambda_1}{l} \right)^3 + \Delta k_2 \left(\frac{\lambda_2}{l} \right)^3 \right] \right\}} \quad (19)$$

где

$$\Delta k_1 = k_1 - k_2 = \frac{J_3}{J_1} - \frac{J_3}{J_2},$$

$$\Delta k_2 = k_2 - k_3 = \frac{J_3}{J_2} - 1.$$

При большом числе перемен момента инерции, т. е. величине n , вычисления удобнее проводить согласно таблице 1:

Таблица 1

m	J_m	$k_m = \frac{J_n}{J_m}$	$\Delta k_m = k_m - k_{m+1}$	λ_m	$\frac{\lambda_m}{l}$	$\left(\frac{\lambda_m}{l} \right)^3$	$\Delta k_m \cdot \left(\frac{\lambda_m}{l} \right)^3$

$$S = \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \left(\frac{\lambda_m}{l} \right)^3$$

Тогда:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_n}{l^2 (1 + 10S)}, \quad (20)$$

где:

$$S = \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \left(\frac{\lambda_m}{l} \right)^3 \quad (21)$$

представляет собою сумму цифр последнего столбца таблицы 1.

Полученная нами формула (20) является приближенной, уже вследствие принятой нами упрощенной формы кривой изгиба стойки, которую мы предположили изгибающейся от действия сжимающих сил по синусоиде:

$$y = \mu \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (4)$$

Предполагая использовать результаты, вычисляемые по формуле (20), в качестве первого приближения, при определении точных значений $P_{кр}$ из уравнений, получаемых на основании непосредственного решения дифференциальных уравнений упругой линии стойки, мы не выводим более точных, но вместе с тем и значительно более сложных формул.

Вычисляемые по этой формуле значения критической силы для стержня, изображенного на фиг. 3, отклоняются от истинных, например, при $\frac{\lambda}{l} = 0,4$ для различных значений Δk максимум на 1%; но при $\frac{\lambda}{l}$, изменяющемся от 0,3—0,1, и при любых значениях $\Delta k < 4$, отклонения получаются в пределах от 0,1% до 10%; при других значениях Δk расхождение увеличивается¹.

Принимая, что стержень изгибается по параболе, мы получили бы более сложный вид формулы для приближенного значения $P_{кр}$, не дающий вместе с тем результатов, более приближающихся к точным, чем формула (20). Метод Риза при том же условии:

$$y = \mu \sin \frac{\pi x}{l} \quad (4)$$

приводит к формуле, дающей результаты, значительно отклоняющиеся от истинных.

Рассмотрение же уравнения кривой изгиба в виде двух первых членов тригонометрического ряда:

$$y = \mu_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \mu_2 \sin \frac{3\pi x}{l} \quad (22)$$

показывает, что даже для стержня при числе участков с различными моментами инерции $n=2$, мы получаем настолько сложный вид формулы, что является нерациональным ее применение по сравнению с непосредственным решением уравнений, получаемых на основании точного метода, излагаемого ниже. *Приближенное же выражение, полученное нами, применимо при любом числе перемен моментов инерции.*

¹ Результаты сопоставлены с данными таблицы, приведенной в книге: „Подовжний угин та його застосування в техніці“, акад. А. Н. Динника и В. П. Лысков, Т. В., ВРНГ, УССР, 1932.

Формулу (20) мы можем записать в виде:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (23)$$

где коэффициент длины μ имеет значение:

$$\mu = \sqrt{1 + 10S}. \quad (24)$$

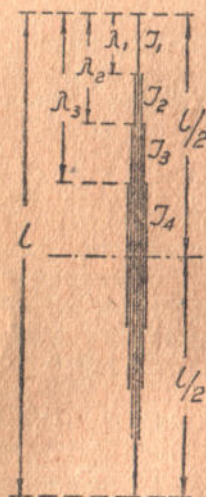
Выражая же $P_{кр}$, по предложению акад. А. Н. Динника, в виде:

$$P_{кр} = K \frac{EJ}{l^2}, \quad (25)$$

получаем коэффициент устойчивости

$$K = \frac{\pi^2}{1 + 10S} \approx \frac{1}{0,1 + S}. \quad (26)$$

Рассмотрим, например, расчет стержня при числе $n = 4$ вида, изображенного на фиг. 5, при значениях J_m , указанных в первом столбце таблицы 1а:



Фиг. 5.

Таблица 1а

m	J_m	$k_m = \frac{J_n}{J_m}$	$\Delta k_m = k_m - k_{m+1}$	λ_m	$\frac{\lambda_m}{l}$	$\left(\frac{\lambda_m}{l}\right)^3$	$\Delta k_m \left(\frac{\lambda_m}{l}\right)^3$
1	5000	4,00	2,34	2,5	0,125	0,00195	0,00456
2	12000	1,66	0,41	4,5	0,225	0,01139	0,00467
3	16000	1,25	0,25	7,0	0,350	0,04287	0,01072
4	20000	1,00					
							$S = 0,01995$

Тогда:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_n}{l^2 (1 + 10S)} = \frac{\pi^2 EJ_n}{l^2 (1 + 10 \cdot 0,01995)} = 8,23 \frac{EJ_n}{l^2},$$

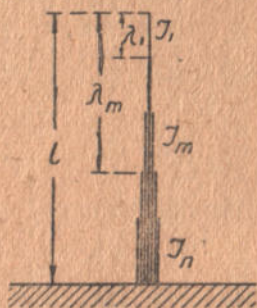
или, следовательно,

$$\mu = \sqrt{1 + 10S} = \sqrt{1 + 10 \cdot 0,01995} = 1,095.$$

§ 3. Применение полученных результатов к случаю стержня с нижним защемленным и верхним свободным концом

Переходим к рассмотрению приближенного расчета стойки с нижним защемленным и верхним свободным концом с переменным моментом инерции, ступенчатообразно изменяющимся по высоте (фиг. 6).

Принимаем ее состоящей из n участков какой угодно протяженности, имеющих различные моменты инерции, постоянные на протяжении каждого участка. Воспользуемся уже полученными нами выводами для стержня с шарнирно-опертыми концами с симметрично-изменяющимся моментом инерции по высоте. Вследствие симметрии, имеющей место в этом случае, мы можем получить необходимые выводы для стойки (фиг. 6) путем простой замены в выведенных формулах для стержня с шарнирно-опертыми концами l на $2l$. Тогда выражение критической силы для рассматриваемого случая на основании формулы (15) получает следующий вид:

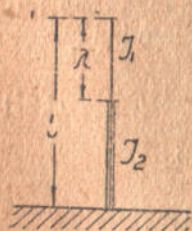


Фиг. 6.

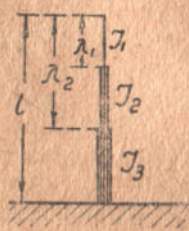
$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_n}{4l^2 \left[1 + \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \left(\sin \frac{\pi \lambda_m}{2l} - \frac{\pi \lambda_m}{2l} \cos \frac{\pi \lambda_m}{2l} \right) \right]} \quad (27)$$

или, упрощая, получаем аналогично выражениям (16) и (17):

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_n}{4l^2 \left[1 + \frac{\pi^3}{24} \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \left(\frac{\lambda_m}{l} \right)^3 \right]} \approx \frac{\pi^2 E J_n}{4l^2 \left[1 + 1,29 \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \left(\frac{\lambda_m}{l} \right)^3 \right]} \quad (28)$$



Фиг. 7



Фиг. 8

Следовательно, при $n=2$ (фиг. 7)

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_2}{4l^2 \left[1 + 1,29 \Delta k \left(\frac{\lambda}{l} \right)^3 \right]} \quad (29)$$

где

$$\Delta k = k_1 - k_2 = \frac{J_2}{J_1} - 1,$$

и при $n=3$ (фиг. 8)

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_3}{4l^2 \left\{ 1 + 1,29 \left[\Delta k_1 \left(\frac{\lambda_1}{l} \right)^3 + \Delta k_2 \left(\frac{\lambda_2}{l} \right)^3 \right] \right\}} \quad (30)$$

где

$$\Delta k_1 = k_1 - k_2 = \frac{J_3}{J_1} - \frac{J_3}{J_2},$$

$$\Delta k_2 = k_2 - k_3 = \frac{J_3}{J_2} - 1.$$

В общем случае может быть применена таблица 1; тогда выражение для критической силы, аналогично формуле (20), получает следующий вид:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_n}{4l^2(1 + 1,29S)}, \quad (31)$$

где S имеет прежнее значение:

$$S = \sum_{m=1}^{m=n-1} \Delta k_m \left(\frac{\lambda^m}{l} \right)^3. \quad (21)$$

Применяя формулу записи для критической силы

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} \quad (23)$$

к формуле (31), получаем выражение для коэффициента длины μ в таком виде:

$$\mu = 2\sqrt{1 + 1,29S}, \quad (32)$$

или, принимая

$$P_{кр} = K \frac{EJ}{l^2}, \quad (25)$$

получаем коэффициент устойчивости

$$K = \frac{\pi^2}{4(1 + 1,29S)} \approx \frac{1,912}{0,078 + S}. \quad (33)$$

В. Точное решение

§ 4. Устойчивость колонны переменного сечения (с двумя разными моментами инерции) с верхним свободным концом

Ниже мы излагаем точное решение задачи продольного изгиба, исходя из известного дифференциального уравнения упругой линии:

$$EJ \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = M^*. \quad (34)$$

Рассмотрены колонны переменного сечения со ступенчато-образным законом изменения момента инерции для случаев, когда число участков равно 2 и 3, как наиболее часто встречающихся на практике.

При исследовании мы пользуемся методом непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений равновесия. При этом решение указанных задач приводит к трансцендентным уравнениям, определяя корни которых U для каждого частного случая, при заданных значениях $\frac{J_m}{J_n}$ и $\frac{\lambda}{l}$, мы находим величину коэффициента K общей формулы продольного изгиба:

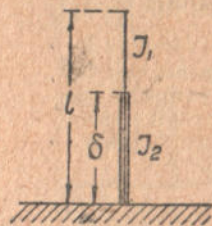
$$P_{кр} = K \frac{EJ}{l^2} \quad (25)$$

* Понятие „точное“, конечно, условно, так как мы пользуемся приближенным дифференциальным уравнением упругой линии (34).

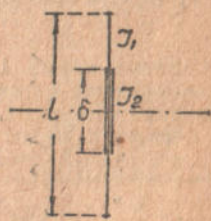
на основании соответствующей простой зависимости:

$$K = \alpha(U). \quad (35)$$

В уже отмеченной нами работе „Подовжний угин та його застосування в техніці“¹ рассмотрена стойка, состоящая из двух частей различного поперечного сечения: 1) со свободно-опертыми концами, 2) с нижним заземленным и верхним свободным концом и 3) при условии заземления обоих концов. Решение задачи для стойки с нижним заземленным и верхним свободным концом (фиг. 9) дано в следующем виде:



Фиг. 9



Фиг. 10

$$P_{кр} = \left(\frac{kU}{1 - \frac{\delta}{l}} \right)^2 \frac{EJ_2}{l^2}, \quad (36)$$

где δ — длина среднего участка стойки, $k = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}}$ и U — корень уравнения:

$$\operatorname{tg} U \cdot \operatorname{tg} \frac{k\delta U}{l - \delta} = \frac{1}{k}. \quad (37)$$

Для стойки со свободно-опертыми концами (фиг. 10) выражение для $P_{кр}$ получает вид:

$$P_{кр} = \left(\frac{2kU}{1 - \frac{\delta}{l}} \right)^2 \frac{EJ_2}{l^2}, \quad (38)$$

где U — корень того же уравнения (37).

Для этого случая в указанной книге составлены таблицы значений корня U и коэффициента K :

$$K = \left(\frac{2kU}{1 - \frac{\delta}{l}} \right)^2, \quad (39)$$

при различных отношениях $\frac{\delta}{l}$ и $\frac{J_1}{J_2}$.

Для случая, рассматриваемого нами, — стойка с нижним заземленным и верхним свободным концом — можно также пользоваться этими таблицами. Для этого, принимая во внимание, что значения критической силы при заданных $\frac{\delta}{l}$ и $\frac{J_1}{J_2}$ для стойки (фиг. 9), в четыре раза меньше, чем для стойки (фиг. 10), необходимо лишь соответственно изменять значения коэффициентов K , уменьшая их в четыре раза.

¹ Акад. А. Н. Динник и В. П. Лысков, loc. cit.

Учитывая требования практики, нами составлены дополнительные таблицы указанных величин U и K :

$$K = \left(\frac{kU}{1 - \frac{\delta}{l}} \right)^2, \quad (40)$$

для часто встречающихся соотношений $\frac{\delta}{l}$ и $\frac{J_1}{J_2}$.

Таблица 2

Значения корня U уравнения (37) для колонны с двумя разными моментами инерции с нижним защемленным и верхним свободным концом

$\frac{J_1}{J_2}$	$\frac{\delta}{l}$			
	0,60	0,65	0,70	0,75
0,04	1,477	1,452	1,416	1,361
0,06	1,431	1,394	1,341	1,259
0,08	1,386	1,337	1,269	1,167
0,10	1,342	1,282	1,202	1,086
0,12	1,302	1,233	1,143	1,019

Таблица 3

Значения коэффициента устойчивости K для колонны (фиг. 9) с нижним защемленным и верхним свободным концом

$\frac{J_1}{J_2}$	$\frac{\delta}{l}$			
	0,60	0,65	0,70	0,75
0,04	0,55	0,69	0,89	1,18
0,06	0,77	0,95	1,19	1,52
0,08	0,96	1,17	1,43	1,74
0,10	1,12	1,34	1,60	1,89
0,12	1,27	1,49	1,74	1,99

Для определения коэффициента φ продольного изгиба по имеющимся таблицам, составленным для основного случая, — стержень с постоянным моментом инерции и со свободно-опертыми концами — гибкость стержня необходимо вычислять по формуле:

$$\lambda = \frac{\mu l}{r}, \quad (41)$$

где l — полная длина стержня,

r — радиус инерции поперечного сечения,

μ — так называемый коэффициент длины.

Значения коэффициента μ определяются из условия, чтобы изменение длины стержня в основном случае делало его эквивалентным рассматриваемому, т. е. чтобы существовало равенство:

$$\frac{EJ\pi^2}{(\mu l)^2} = K \frac{EJ}{r^2}, \quad (42)$$

откуда находим:

$$\mu = \frac{\pi}{\sqrt{K}}. \quad (43)$$

Таким образом, в рассмотренном нами случае продольного изгиба коэффициент длины μ может быть выражен через корни уравнения (37), на основании уравнения (40), следующим образом:

$$\mu = \frac{\pi}{\sqrt{K}} = \frac{\pi \left(1 - \frac{\delta}{l}\right)}{kU}. \quad (44)$$

* Все таблицы настоящей работы составлены младшим научным сотрудником Украинского научно-исследовательского института сооружений К. М. Волонельским.

Пример. В качестве примера определения коэффициентов K и μ , рассмотрим стойку с нижним защемленным и верхним свободным концом при следующих данных (Фиг. 11):

$$\frac{J_1}{J_2} = 0,32 \text{ и } \frac{\delta}{l} = 0,5.$$

Определяем значение $P_{кр}$ на основании приближенного способа:

$$k = \frac{J_2}{J_1} = \frac{1}{0,32} = 3,125;$$

$$\Delta k = 3,125 - 1 = 2,125;$$

тогда на основании формулы (29) получаем:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_2}{4l^2 \left[1 + 1,29 \cdot \Delta k \left(\frac{\lambda}{l} \right)^3 \right]} = \frac{\pi^2 E J_2}{4l^2 [1 + 1,29 \cdot 2,125 \cdot 0,5^3]} = 1,8377 \frac{E J_2}{l^2}.$$

Для более точного определения значения $P_{кр}$ пользуемся уравнением (37):

$$\operatorname{tg} U \cdot \operatorname{tg} aU = \frac{1}{k},$$

где

$$k = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} = \sqrt{0,32} = 0,56569,$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{0,56569} = 1,76775,$$

$$a = \frac{k\delta}{l - \delta} = \frac{k \frac{\delta}{l}}{1 - \frac{\delta}{l}} = \frac{0,56569 \cdot 0,5}{1 - 0,5} = 0,56569$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg} U \cdot \operatorname{tg} 0,56569 U = 1,76775. \quad (37')$$

Принимая полученное приближенное значение коэффициента устойчивости K в качестве первого приближения

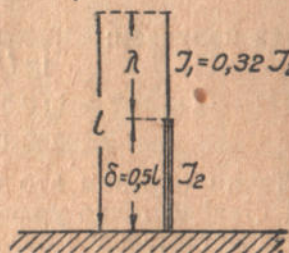
$$K' = 1,8377,$$

находим на основании формулы (40) приближенное значение корня уравнения (37'):

$$U' = \frac{1 - \frac{\delta}{l}}{k} \sqrt{K'} = \frac{1 - 0,5}{0,56569} \sqrt{1,8377} = 1,198. \quad (45)$$

Подставляя это значение U в уравнение (37'), имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} U' &= \operatorname{tg} 1,198 = 2,55866, \\ \operatorname{tg} aU' &= \operatorname{tg} 0,56569 \cdot 1,198 = \operatorname{tg} 0,6778 = 0,80505, \\ 2,55866 \cdot 0,80505 &= 2,059849 \neq 1,76775. \end{aligned}$$



Фиг. 11

Так как принятое нами приближенное значение корня U' не удовлетворяет уравнению (37'), то задаемся новым значением:

$$U'' = 1,16.$$

Тогда получаем:

$$\operatorname{tg} U'' = \operatorname{tg} 1,16 = 2,29580,$$

$$\operatorname{tg} aU'' = \operatorname{tg} 0,56569 \cdot 1,16 = \operatorname{tg} 0,6562 = 0,77006,$$

$$2,29580 \cdot 0,77006 = 1,7679 \approx 1,76775.$$

Таким образом это значение U'' удовлетворяет в достаточной степени точно уравнению (37') и поэтому принимается нами как действительное значение корня:

$$U = 1,16.$$

Тогда, на основании формулы (40), получаем:

$$K = \left(\frac{k}{1 - \frac{\delta}{l}} \cdot U \right)^2 = \left(\frac{0,56569}{1 - 0,5} \cdot 1,16 \right)^2 = 1,7224.$$

Вычисленное нами точное значение коэффициента устойчивости K отличается от найденного по приближенному способу на 6,7%.

На основании формулы (43), зная величину коэффициента устойчивости K , можем также определить значение коэффициента длины μ :

$$\mu = \frac{\pi}{\sqrt{K}} = \frac{\pi}{\sqrt{1,7224}} = 2,394.$$

§ 5. Исследование устойчивости колонны с двумя разными моментами инерции с верхним шарнирно-опертым концом

Исследование устойчивости колонны переменного сечения при числе участков с разными моментами инерции $n=2$, но с верхним шарнирно-опертым концом (фиг. 12) приводит к решению системы двух уравнений:

$$EJ_1 y_1'' + Py_1 - Qx = 0, \quad (46)$$

$$EJ_2 y_2'' + Py_2 - Qx = 0 \quad (47)$$

при следующих граничных условиях:

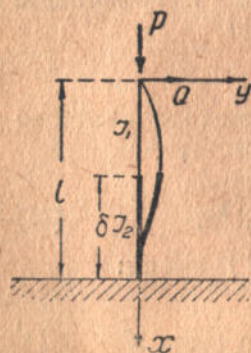
$$x=0, \quad y_1 = 0; \quad (48)$$

$$x=l, \quad y_2 = 0 \text{ и } y_2' = 0; \quad (49-50)$$

$$x=l-\delta, \quad y_1 = y_2 \text{ и } y_1' = y_2'. \quad (51-52)$$

Деля обе части уравнения (46) на P , получаем:

$$\frac{EJ_1}{P} y_1'' + y_1 = \frac{Q}{P} x; \quad (53)$$



Фиг. 12

ясно, что частное решение этого уравнения имеет вид:

$$y_1 = \frac{Q}{P} x. \quad (54)$$

Соответствующее уравнению (46) линейное однородное уравнение

$$\frac{EJ_1}{P} y_1'' + y_1 = 0, \quad (55)$$

общий интеграл которого выражается следующим образом:

$$y_1 = C_1 \cos \eta x + C_2 \sin \eta x, \quad (56)$$

где:

$$\eta = \sqrt{\frac{P}{EJ_1}}; \quad (57)$$

следовательно, общий интеграл уравнения (46) имеет вид:

$$y_1 = C_1 \cos \eta x + C_2 \sin \eta x + \frac{Q}{P} x. \quad (58)$$

Аналогично решение уравнения (47):

$$y_2 = C_3 \cos \rho x + C_4 \sin \rho x + \frac{Q}{P} x, \quad (59)$$

где:

$$\rho = \sqrt{\frac{P}{EJ_2}}. \quad (60)$$

На основании граничных условий (48—52) имеем:

$$C_1 = 0; \quad (61)$$

$$C_3 \cos \rho l + C_4 \sin \rho l = -\frac{Q}{P} l; \quad (62)$$

$$C_3 \sin \rho l - C_4 \cos \rho l = \frac{Q}{P} \cdot \frac{1}{\rho}; \quad (63)$$

$$C_2 \sin \eta (l - \delta) = C_3 \cos \rho (l - \delta) + C_4 \sin \rho (l - \delta); \quad (64)$$

$$C_2 \eta \cos \eta (l - \delta) = -C_3 \rho \sin \rho (l - \delta) + C_4 \rho \cos \rho (l - \delta). \quad (65)$$

Решая совместно уравнения (62) и (63), получаем:

$$C_3 = \frac{Q}{P} \left(\frac{1}{\rho} \sin \rho l - l \cos \rho l \right), \quad (66)$$

$$C_4 = -\frac{Q}{P} \left(\frac{1}{\rho} \cos \rho l + l \sin \rho l \right). \quad (67)$$

Деля уравнение (65) на (64), имеем:

$$\frac{\eta}{\rho} \operatorname{ctg} \eta (l - \delta) = \frac{C_4 \cos \rho (l - \delta) - C_3 \sin \rho (l - \delta)}{C_4 \sin \rho (l - \delta) + C_3 \cos \rho (l - \delta)}. \quad (68)$$

Подставляя в уравнение (68) значения C_3 и C_4 , получаем после преобразований:

$$\frac{\eta}{\rho} \operatorname{ctg} \eta (l - \delta) = \frac{l \sin \rho \delta + \frac{1}{\rho} \cos \rho \delta}{l \cos \rho \delta - \frac{1}{\rho} \sin \rho \delta},$$

откуда имеем:

$$k \cdot \operatorname{tg} \eta (l - \delta) = \frac{\rho l - \operatorname{tg} \rho \delta}{1 + \rho l \operatorname{tg} \rho \delta}, \quad (69)$$

где

$$k = \frac{p}{\eta} = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}}. \quad (70)$$

Обозначая

$$\rho l = U, \quad (71)$$

получаем:

$$\eta(l - \delta) = \frac{\eta(l - \delta)}{\rho l} U = \frac{1 - \frac{\delta}{l}}{k} U \quad (72)$$

и

$$\rho \delta = \frac{\rho \delta}{\rho l} U = \frac{\delta}{l} U; \quad (73)$$

тогда имеем:

$$k \operatorname{tg} \frac{1 - \frac{\delta}{l}}{k} U = \frac{U - \operatorname{tg} \frac{\delta}{l} U}{1 + U \operatorname{tg} \frac{\delta}{l} U}. \quad (74)$$

Полученное уравнение (74) мы можем преобразовать к такому виду:

$$U = \frac{k \operatorname{tg} aU + \operatorname{tg} bU}{1 - k \operatorname{tg} aU \cdot \operatorname{tg} bU}, \quad (75)$$

где:

$$a = \frac{1 - \frac{\delta}{l}}{k} \quad (76)$$

и

$$b = \frac{\delta}{l}. \quad (77)$$

На основании уравнения (71) имеем:

$$\sqrt{\frac{P}{EJ_2}} \cdot l = U \quad (78)$$

и, следовательно,

$$P_{\text{кр}} = U^2 \cdot \frac{EJ_2}{l^2} \quad (79)$$

или

$$P_{\text{кр}} = \left(\frac{U}{k}\right)^2 \frac{EJ_1}{l^2}. \quad (80)$$

Для рассматриваемого случая на основании выведенных уравнений (75) и (79) для ряда значений $\frac{\delta}{l}$ и $\frac{J_1}{J_2}$, наиболее часто встречающихся в практике, составлены таблицы 3 и 4 величин корня U и коэффициента устойчивости K :

$$K = U^2. \quad (81)$$

Таблица 4

Значения корня U уравнения (75) для колонны с двумя разными моментами инерции с нижним зашечленным и верхним шарнирно-опертым концом

$\frac{J_1}{J_2}$	$\frac{\delta}{l}$			
	0,60	0,65	0,70	0,75
0,04	1,65	1,66	1,68	1,76
0,06	1,84	1,86	1,91	2,04
0,08	2,00	2,03	2,11	2,27
0,10	2,13	2,18	2,28	2,47
0,12	2,26	2,32	2,44	2,65

Таблица 5

Значения коэффициента устойчивости K для колонны (фиг. 12) с нижним зашечленным и верхним шарнирно-опертым концом

$\frac{J_1}{J_2}$	$\frac{\delta}{l}$			
	0,60	0,65	0,70	0,75
0,04	2,72	2,76	2,82	3,10
0,06	3,39	3,46	3,65	4,16
0,08	4,00	4,12	4,45	5,15
0,10	4,54	4,75	5,20	6,10
0,12	5,11	5,38	5,95	7,02

Значения коэффициента длины μ могут быть определены на основании общей формулы (43):

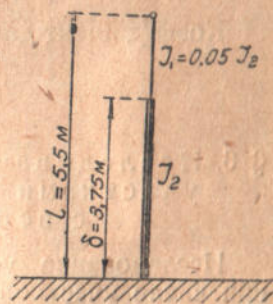
$$\mu = \frac{\pi}{\sqrt{K}}; \quad (43)$$

так как в рассматриваемом случае согласно формуле (81)

$$K = U^2, \quad (81)$$

то имеем:

$$\mu = \frac{\pi}{U}. \quad (82)$$



Фиг. 13

Пример. Рассмотрим стойку переменного сечения с нижним зашечленным и верхним шарнирно-опертым концом при следующих данных (фиг. 13):

$$l = 5,5 \text{ м}, \quad \delta = 3,75 \text{ м} \quad \text{и} \quad \frac{J_1}{J_2} = 0,05.$$

Имеем:

$$\frac{\delta}{l} = 0,6818;$$

тогда, пользуясь таблицей 4 значений корня U , определяем для отношений $\frac{\delta}{l} = 0,6818$ и $\frac{J_1}{J_2} = 0,05$ приблизительно величину корня:

$$U = 1,78.$$

Проверяем полученное значение корня, подставляя его в уравнение (75); при этом имеем:

$$b = \frac{\delta}{l} = 0,6818;$$

$$k = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} = \sqrt{0,05} = 0,2236;$$

$$a = \frac{1 - \frac{\delta}{l}}{k} = \frac{1 - 0,6818}{0,2236} = 1,423;$$

тогда:

$$\operatorname{tg} aU = \operatorname{tg} 1,423 \cdot 1,78 = \operatorname{tg} 2,5329 = -0,6992,$$

$$\operatorname{tg} bU = \operatorname{tg} 0,6818 \cdot 1,78 = \operatorname{tg} 1,2136 = 2,6800,$$

и, следовательно,

$$\frac{0,2236 \cdot 0,6992 + 2,6800}{1 + 0,2236 \cdot 0,6992 \cdot 2,6800} = 1,779 \approx 1,78.$$

Таким образом, полученное нами на основании таблицы 4 значение корня $U = 1,78$ в достаточной степени точно удовлетворяет уравнению (75) и может быть принято нами, как окончательное.

Подставляя его в уравнение (81), находим значение коэффициента устойчивости:

$$K = U^2 = 1,78^2 = 3,1684.$$

Коэффициент длины определяется на основании формулы (82):

$$\mu = \frac{\pi}{U} = \frac{\pi}{1,78} = 1,765.$$

§ 6. Исследование устойчивости колонны с тремя участками с разными моментами инерции с верхним свободным концом

Исследование устойчивости колонны переменного сечения, при числе участков с разными моментами инерции $n = 3$, с нижним зашпеленным и верхним свободным концом (фиг. 14).

Решение рассматриваемой задачи приводит к системе трех дифференциальных уравнений обычного вида:

$$EJ_1 y_1'' + P y_1 = 0; \quad (83)$$

$$FJ_2 y_2'' + P y_2 = 0; \quad (84)$$

$$EJ_3 y_3'' + P y_3 = 0. \quad (85)$$

Граничные условия и условия сопряжения таковы:

$$x = 0, y_1 = 0; \quad (86)$$

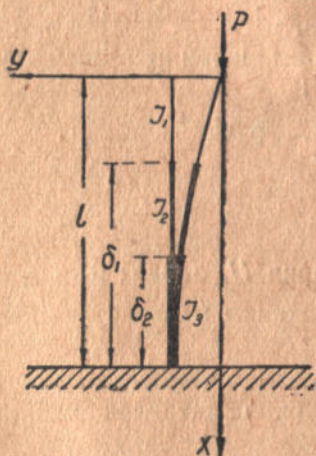
$$x = l, y_3' = 0; \quad (87)$$

$$x = l - \delta_1, y_1 = y_2 \text{ и } y_1' = y_2'; \quad (88-89)$$

$$x = l - \delta_2, y_2 = y_3 \text{ и } y_2' = y_3'. \quad (90-91)$$

Общий интеграл уравнения (83) имеет вид:

$$y_1 = C_1 \cos \eta x + C_2 \sin \eta x, \quad (92)$$



Фиг. 14

где

$$\eta = \sqrt{\frac{P}{EJ_1}}; \quad (93)$$

аналогично для уравнения (84) получаем:

$$y_2 = C_3 \cos \rho x + C_4 \sin \rho x, \quad (94)$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{P}{EJ_2}}, \quad (95)$$

и для уравнения (85):

$$y_3 = C_5 \cos \tau x + C_6 \sin \tau x, \quad (96)$$

где

$$\tau = \sqrt{\frac{P}{EJ_3}}. \quad (97)$$

На основании граничных условий (86—87) и условий сопряжения (88—91) имеем:

$$C_1 = 0; \quad (98)$$

$$\frac{C_5}{C_6} = \operatorname{ctg} \tau l; \quad (99)$$

$$C_2 \sin \eta (l - \delta_1) = C_3 \cos \rho (l - \delta_1) + C_4 \sin \rho (l - \delta_1); \quad (100)$$

$$C_2 \eta \cos \eta (l - \delta_1) = -C_3 \rho \sin \rho (l - \delta_1) + C_4 \rho \cos \rho (l - \delta_1); \quad (101)$$

$$C_3 \cos \rho (l - \delta_2) + C_4 \sin \rho (l - \delta_2) = C_5 \cos \tau (l - \delta_2) + C_6 \sin \tau (l - \delta_2); \quad (102)$$

$$-C_3 \rho \sin \rho (l - \delta_2) + C_4 \rho \cos \rho (l - \delta_2) = -C_5 \tau \sin \tau (l - \delta_2) + C_6 \tau \cos \tau (l - \delta_2). \quad (103)$$

На основании уравнений (100) и (101) имеем:

$$\frac{C_3}{C_4} = \frac{\rho \cdot \sin \eta (l - \delta_1) \cdot \cos \rho (l - \delta_1) - \eta \cdot \cos \eta (l - \delta_1) \cdot \sin \rho (l - \delta_1)}{\rho \cdot \sin \eta (l - \delta_1) \cdot \sin \rho (l - \delta_1) + \eta \cdot \cos \eta (l - \delta_1) \cdot \cos \rho (l - \delta_1)}. \quad (104)$$

Умножая уравнения (102) и (103) на величину $\frac{1}{C_4 \cdot C_6}$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_6} \left[\frac{C_3}{C_4} \cos \rho (l - \delta_2) + \sin \rho (l - \delta_2) \right] &= \\ &= \frac{1}{C_4} \left[\frac{C_5}{C_6} \cos \tau (l - \delta_2) + \sin \tau (l - \delta_2) \right]; \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_6} \left[\frac{C_3}{C_4} \cdot \rho \cdot \sin \rho (l - \delta_2) - \rho \cdot \cos \rho (l - \delta_2) \right] &= \\ = \frac{1}{C_4} \left[\frac{C_5}{C_6} \cdot \tau \cdot \sin \tau (l - \delta_2) - \tau \cdot \cos \tau (l - \delta_2) \right] \end{aligned} \quad (106)$$

и, следовательно, деля уравнение (106) на (105), будем иметь:

$$\frac{\frac{C_3}{C_4} \sin \rho (l - \delta_2) - \cos \rho (l - \delta_2)}{\frac{C_3}{C_4} \cos \rho (l - \delta_2) + \sin \rho (l - \delta_2)} = k_2 \frac{\frac{C_5}{C_6} \sin \tau (l - \delta_2) - \cos \tau (l - \delta_2)}{\frac{C_5}{C_6} \cos \tau (l - \delta_2) + \sin \tau (l - \delta_2)}, \quad (107)$$

где

$$k_2 = \frac{\tau}{\rho} = \sqrt{\frac{J_2}{J_3}}. \quad (108)$$

Принимая во внимание уравнения (104) и (99), после соответствующих преобразований получим:

$$\frac{k_1 \operatorname{tg} \rho (\delta_2 - \delta_1) + \operatorname{ctg} \eta (l - \delta_1)}{k_1 - \operatorname{ctg} \eta (l - \delta_1) \cdot \operatorname{tg} \rho (\delta_2 - \delta_1)} = k_2 \operatorname{tg} \tau \delta_2, \quad (109)$$

где

$$k_1 = \frac{\rho}{\eta} = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}}, \quad (110)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_1} \operatorname{ctg} \eta (l - \delta_1) - k_2 \operatorname{tg} \tau \delta_2 - \operatorname{tg} \rho (\delta_1 - \delta_2) = \\ = \frac{k_2}{k_1} \operatorname{ctg} \eta (l - \delta_1) \cdot \operatorname{tg} \tau \delta_2 \cdot \operatorname{tg} \rho (\delta_1 - \delta_2). \end{aligned} \quad (111)$$

Обозначая

$$\tau \delta_2 = U, \quad (112)$$

получаем:

$$\eta (l - \delta_1) = \frac{\eta (l - \delta_1)}{\tau \delta_2} U = \frac{1 - \frac{\delta_1}{l}}{k_1 k_2 \frac{\delta_2}{l}} U \quad (113)$$

и

$$\rho (\delta_1 - \delta_2) = \rho \frac{(\delta_1 - \delta_2)}{\tau \delta_2} U = \frac{\frac{\delta_1}{l} - \frac{\delta_2}{l}}{k_2 \frac{\delta_2}{l}} U; \quad (114)$$

тогда имеем:

$$\frac{1}{k_1} \operatorname{ctg} \frac{1 - \frac{\delta_1}{l}}{k_1 k_2 \frac{\delta_2}{l}} U - k_2 \operatorname{tg} U - \operatorname{tg} \frac{\frac{\delta_1}{l} - \frac{\delta_2}{l}}{k_2 \frac{\delta_2}{l}} U = \frac{k_2}{k_1} \operatorname{ctg} \frac{1 - \frac{\delta_1}{l}}{k_1 k_2 \frac{\delta_2}{l}} U \cdot \operatorname{tg} U \cdot \operatorname{tg} \frac{\frac{\delta_1}{l} - \frac{\delta_2}{l}}{k_2 \frac{\delta_2}{l}} U \quad (115)$$

или

$$\frac{1}{k_1} \operatorname{ctg} aU - k_2 \operatorname{tg} U - \operatorname{tg} bU = \frac{k_2}{k_1} \operatorname{ctg} aU \cdot \operatorname{tg} U \cdot \operatorname{tg} bU, \quad (116)$$

где:

$$a = \frac{l - \delta_1}{k_1 k_2 \frac{\delta_2}{l}} = \frac{1 - \frac{\delta_1}{l}}{k_1 k_2 \frac{\delta_2}{l}} \quad (117)$$

и

$$b = \frac{\frac{\delta_1}{l} - \frac{\delta_2}{l}}{k_2 \frac{\delta_2}{l}} = \frac{\frac{\delta_1}{l} - \frac{\delta_2}{l}}{k_2 \frac{\delta_2}{l}}. \quad (118)$$

На основании уравнения (112) имеем:

$$\sqrt{\frac{P}{EJ_3}} \cdot \delta_2 = U \quad (119)$$

и, следовательно:

$$P_{кр} = \left(\frac{U}{\delta_2}\right)^2 \cdot EJ_3 = \left(\frac{U}{\delta_2/l}\right)^2 \cdot \frac{EJ_3}{l^2}, \quad (120)$$

или

$$P_{кр} = \left(\frac{U}{k_2 \delta_2}\right)^2 \cdot EJ_2 = \left(\frac{U}{k_2 \frac{\delta_2}{l}}\right)^2 \cdot \frac{EJ_2}{l^2}, \quad (121)$$

или же

$$P_{кр} = \left(\frac{U}{k_1 k_2 \delta_2}\right)^2 \cdot EJ_1 = \left(\frac{U}{k_1 k_2 \frac{\delta_2}{l}}\right)^2 \cdot \frac{EJ_1}{l^2}. \quad (122)$$

Для рассматриваемого случая на основании выведенных уравнений (116) и (120) для ряда частных значений $\frac{\delta_1}{l}$, $\frac{\delta_2}{l}$, $\frac{J_1}{J_2}$ и $\frac{J_2}{J_3}$, наиболее часто встречающихся в практике, составлены таблицы 6 и 7 величин корня U и коэффициента устойчивости K :

$$K = \left(\frac{U}{\delta_2/l}\right)^2. \quad (123)$$

Таблица 6

Значения корня U уравнения (116) для колонны с тремя разными моментами инерции с нижним зашпеленным и верхним свободным концом

$\frac{J_1}{J_2}$ \ $\frac{J_2}{J_3}$	$\frac{\delta_1}{l}$ \ $\frac{\delta_2}{l}$	0,70	0,75	0,75	0,80
		0,50	0,55	0,60	0,65
0,15	0,10	0,283	0,361	0,406	0,527
0,35	0,10	0,371	0,461	0,531	0,662
0,25	0,15	0,404	0,504	0,572	0,714
0,35	0,15	0,442	0,542	0,621	0,759
0,15	0,35	0,492	0,611	0,679	0,831

Таблица 7

Значения коэффициента устойчивости K для колонны (фиг. 14) с нижним зашлепленным и верхним свободным концом

$\frac{J_1}{J_2}$ \ $\frac{\delta_1}{l}$ / $\frac{J_2}{J_1}$ \ $\frac{\delta_2}{l}$	0,70	0,75	0,75	0,80
	0,50	0,55	0,60	0,65
0,15 / 0,10	0,32	0,43	0,46	0,66
0,35 / 0,10	0,55	0,70	0,78	1,04
0,25 / 0,15	0,65	0,84	0,94	1,21
0,35 / 0,15	0,78	0,97	1,07	1,36
0,15 / 0,35	0,97	1,23	1,28	1,63

Значение коэффициента длины μ , на основании формул (43) и (123), получает следующий вид:

$$\mu = \frac{\pi}{\sqrt{K}} = \frac{\pi}{U} \cdot \frac{\delta_2}{l}. \quad (124)$$

Выведенные нами уравнения (115) и (120) для колонны с тремя разными моментами инерции применимы и для колонны с двумя разными моментами инерции. В этом случае при преобразовании колонны типа a (фиг. 15) к виду b (или c) мы принимаем:

$$J_3 = J_2 \quad (125)$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta; \quad (126)$$

тогда имеем:

$$k_1 = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} = k, \quad \eta = \sqrt{\frac{P}{EJ_1}}; \quad (127)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{J_2}{J_3}} = 1, \quad \rho = \tau = \sqrt{\frac{P}{EJ_2}}; \quad (128)$$

$$\frac{\delta_1}{l} = \frac{\delta_2}{l} = \frac{\delta}{l}. \quad (129)$$

При этом уравнение (115) примет следующий вид:

$$\frac{1}{k} \operatorname{ctg} \frac{1 - \frac{\delta}{l}}{k \frac{\delta}{l}} U - \operatorname{tg} U = 0 \quad (130)$$

или

$$\operatorname{tg} U \cdot \operatorname{tg} \frac{1 - \frac{\delta}{l}}{k \frac{\delta}{l}} U = \frac{1}{k}; \quad (131)$$

корень этого уравнения U для определения $P_{\text{кр}}$ должен быть подставлен в уравнение (120):

$$P_{\text{кр}} = \left(\frac{U}{\delta/l}\right)^2 \cdot \frac{EJ_2}{l^2}. \quad (132)$$

Полученные нами для колонны с двумя разными моментами инерции уравнения (131) и (132) отличаются от указанных нами выше уравнений (37) и (36), приведенных в книге акад. А. Н. Динника и В. П. Лыскова: „Подовжний угин та його застосування в техніці“.

Если мы вместо обозначения (112) введем

$$\eta(l - \delta_1) = U, \quad (133)$$

то получим:

$$\tau \delta_2 = \frac{\tau \delta_2}{\eta(l - \delta_1)} U = \frac{k_1 k_2 \frac{\delta_2}{l}}{1 - \frac{\delta_1}{l}} U; \quad (134)$$

$$\rho(\delta_1 - \delta_2) = \frac{\rho(\delta_1 - \delta_2)}{\eta(l - \delta_1)} U = \frac{k_1 \left(\frac{\delta_1}{l} - \frac{\delta_2}{l}\right)}{1 - \frac{\delta_1}{l}} U \quad (135)$$

и, следовательно,

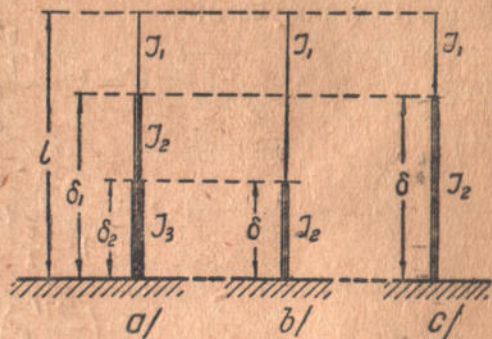
$$\begin{aligned} \frac{1}{k_1} \operatorname{ctg} U - k_2 \cdot \operatorname{tg} \frac{k_1 k_2 \frac{\delta_2}{l}}{1 - \frac{\delta_1}{l}} U - \operatorname{tg} \frac{k_1 \left(\frac{\delta_1}{l} - \frac{\delta_2}{l}\right)}{1 - \frac{\delta_1}{l}} U = \\ = \frac{k_2}{k_1} \operatorname{ctg} U \cdot \operatorname{tg} \frac{k_1 k_2 \frac{\delta_2}{l}}{1 - \frac{\delta_1}{l}} U \cdot \operatorname{tg} \frac{k_1 \left(\frac{\delta_1}{l} - \frac{\delta_2}{l}\right)}{1 - \frac{\delta_1}{l}} U, \end{aligned} \quad (136)$$

а также

$$\sqrt{\frac{P}{EJ_1}} (l - \delta_1) = U, \quad (137)$$

откуда имеем:

$$P_{\text{кр}} = \left(\frac{U}{l - \delta_1}\right)^2 EJ_1 = \left(\frac{U}{1 - \frac{\delta_1}{l}}\right)^2 \cdot \frac{EJ_1}{l^2}, \quad (138)$$



Фиг. 15

или

$$P_{кр} = \left(\frac{k_1 U}{1 - \frac{\delta_1}{l}} \right)^2 \cdot \frac{EJ_2}{l^2}, \quad (139)$$

или же

$$P_{кр} = \left(\frac{k_1 k_2 U}{1 - \frac{\delta_1}{l}} \right)^2 \cdot \frac{EJ_3}{l^2}. \quad (140)$$

Переходя к колонне с двумя разными моментами инерции (фиг. 15) и принимая во внимание равенства (127—129), из уравнения (136), получаем:

$$\frac{1}{k} \operatorname{ctg} U - \operatorname{tg} \frac{k \frac{\delta}{l}}{1 - \frac{\delta}{l}} U = 0 \quad (141)$$

или

$$\operatorname{tg} U \cdot \operatorname{tg} \frac{k \frac{\delta}{l}}{1 - \frac{\delta}{l}} U = \frac{1}{k}; \quad (142)$$

из уравнения (140) имеем:

$$P_{кр} = \left(\frac{kU}{1 - \frac{\delta}{l}} \right)^2 \cdot \frac{EJ_2}{l^2}. \quad (143)$$

Полученное выражение для $P_{кр}$ (143) и уравнение (142) соответствуют формуле (36) и уравнению (37), приведенным в указанной выше книге.

Вычисление корня U и коэффициента устойчивости K в рассматриваемом нами случае колонны с тремя разными моментами инерции проводим в следующем порядке: определяем на основании приближенного способа значение $P_{кр}$ по формуле (30) или путем составления таблицы 1-й и формулы (31); затем для точного определения $P_{кр}$ находим, пользуясь полученной приближенной величиной K , значение корня U в первом приближении на основании уравнения (123):

$$U = \frac{\delta_0}{l} \sqrt{K}; \quad (144)$$

тогда, путем подстановки найденного приближенного значения U и близких к нему величин в уравнение (116), определяем с необходимой точностью значение корня U и коэффициента устойчивости K по формуле (123):

$$K = \left(\frac{U}{\frac{\delta_0}{l}} \right)^2. \quad (123)$$

Точное определение корня U , если оно не слишком отклоняется от вычисляемого по приближенному способу, может быть сделано на основании ниже излагаемого способа определения величины отклонения точного значения корня уравнения (116) от получаемого по приближенной формуле.

Уравнение (116), выведенное при точном решении, может быть записано в такой форме:

$$A + B + C = ABC, \quad (145)$$

где:

$$A = \frac{1}{k_1} \operatorname{ctg} aU, \quad B = -k_2 \operatorname{tg} U, \quad C = -\operatorname{tg} bU; \quad (146-148)$$

$$a = \frac{1 - \frac{\delta_1}{l}}{k_1 k_2 \frac{\delta_2}{l}}, \quad b = \frac{\frac{\delta_1}{l} - \frac{\delta_2}{l}}{k_2 \frac{\delta_2}{l}}, \quad (117-118)$$

U — точное значение корня.

Обозначая приближенное значение корня через U' , имеем:

$$U = U' + \varepsilon. \quad (149)$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} a(U' + \varepsilon) &= \operatorname{ctg} aU' - a\varepsilon \frac{1}{\sin^2 aU'} + a^2 \varepsilon^2 \frac{\cos aU'}{\sin^3 aU'} - \dots \approx \\ &\approx \operatorname{ctg} aU' - \frac{a}{\sin^2 aU'} \varepsilon; \end{aligned} \quad (150)$$

аналогично имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} b(U' + \varepsilon) &= \operatorname{tg} bU' + b\varepsilon \frac{1}{\cos^2 bU'} + b^2 \varepsilon^2 \frac{\sin bU'}{\cos^3 bU'} + \dots \approx \\ &\approx \operatorname{tg} bU' + \frac{b}{\cos^2 bU'} \varepsilon, \end{aligned} \quad (151)$$

и, следовательно,

$$A \approx \frac{1}{k_1} \left(\operatorname{ctg} aU' - \frac{a}{\sin^2 aU'} \varepsilon \right), \quad (152)$$

$$B \approx -k_2 \left(\operatorname{tg} U' + \frac{1}{\cos^2 U'} \varepsilon \right), \quad (153)$$

$$C \approx - \left(\operatorname{tg} bU' + \frac{b}{\cos^2 bU'} \varepsilon \right). \quad (154)$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (145), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_1} \left(\operatorname{ctg} aU' - \frac{a}{\sin^2 aU'} \varepsilon \right) - k_2 \left(\operatorname{tg} U' + \frac{1}{\cos^2 U'} \varepsilon \right) - \left(\operatorname{tg} bU' + \frac{b}{\cos^2 bU'} \varepsilon \right) = \\ = \frac{k_2}{k_1} \left(\operatorname{ctg} aU' - \frac{a}{\sin^2 aU'} \varepsilon \right) \left(\operatorname{tg} U' + \frac{1}{\cos^2 U'} \varepsilon \right) \left(\operatorname{tg} bU' + \frac{b}{\cos^2 bU'} \varepsilon \right); \end{aligned} \quad (155)$$

пренебрегая членами с величинами ε^2 и ε^3 , имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{a}{k_1 \sin^2 aU'} + \frac{k_2}{\cos^2 U'} + \frac{b}{\cos^2 bU'} - \frac{k_2 a \cdot \operatorname{tg} U' \cdot \operatorname{tg} bU'}{k_1 \sin^2 aU'} + \frac{k_2 \operatorname{ctg} aU' \cdot \operatorname{tg} bU'}{k_1 \cdot \cos^2 U'} + \right. \\ \left. + \frac{k_2 b \cdot \operatorname{ctg} aU' \cdot \operatorname{tg} U'}{k_1 \cdot \cos^2 bU'} \right) = \frac{1}{k_1} \operatorname{ctg} aU' - k_2 \operatorname{tg} U' - \operatorname{tg} bU' - \frac{k_2}{k_1} \times \\ \times \operatorname{ctg} aU' \cdot \operatorname{tg} U' \cdot \operatorname{tg} bU', \end{aligned} \quad (156)$$

откуда находим:

$$\varepsilon = 0,5 \cdot \frac{A' + B' + C' - W'}{\frac{a(A' - W')}{\sin 2aU'} - \frac{B' - W'}{\sin 2U'} - \frac{b(C' - W')}{\sin 2bU'}}, \quad (157)$$

где $W' = A'B'C'$; (158)

A' , B' и C' определяются по формулам (146—148) при $U = U'$.

Пример. Рассмотрим стойку переменного сечения с нижним заземленным и верхним свободным концом с тремя разными моментами инерции при следующих данных (фиг. 16):

$$l = 8 \text{ м}; \quad \delta_1 = 6 \text{ м}; \quad \delta_2 = 3,6 \text{ м};$$

$$\frac{J_1}{J_2} = 0,5; \quad \frac{J_2}{J_3} = 0,3.$$

На основании приближенного способа имеем:

m	$k_m = \frac{J_n}{J_m}$	$\Delta k_m = k_m - k_{m+1}$	λ_m	$\frac{\lambda_m}{l}$	$\left(\frac{\lambda_m}{l}\right)^3$	$\Delta k_m \left(\frac{\lambda_m}{l}\right)^3$
1	6,666	3,333	2,0	0,25	0,0156	0,052
2	3,333	2,333	4,4	0,55	0,1664	0,388
3	1,000					$S = 0,440$

Тогда по формуле (31) находим:

$$P = \frac{\pi^2 E J_3}{4l^2 (1 + 1,3 \cdot S)} = \frac{\pi^2 E J_3}{4l^2 (1 + 1,3 \cdot 0,44)} = 1,57 \frac{E J_3}{l^2}.$$

Для получения точного значения $P_{кр}$ воспользуемся уравнением (116):

$$\frac{1}{k_1} \operatorname{ctg} aU - k_2 \operatorname{tg} U - \operatorname{tg} bU = \frac{k_2}{k_1} \operatorname{ctg} aU \cdot \operatorname{tg} U \cdot \operatorname{tg} bU,$$

где:

$$k_1 = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} = \sqrt{0,5} = 0,707.$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{J_2}{J_3}} = \sqrt{0,3} = 0,548,$$

$$\frac{\delta_1}{l} = \frac{6}{8} = 0,75 \quad \text{и} \quad \frac{\delta_2}{l} = \frac{3,6}{8} = 0,45;$$

тогда получаем:

$$a = \frac{1 - \frac{\delta_1}{l}}{k_1 k_2 \frac{\delta_2}{l}} = \frac{1 - 0,75}{0,707 \cdot 0,548 \cdot 0,45} = 1,434,$$

$$b = \frac{\frac{\delta_1}{l} - \frac{\delta_2}{l}}{k_2 \frac{\delta_2}{l}} = \frac{0,75 - 0,45}{0,548 \cdot 0,45} = 1,2166,$$

и, следовательно, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{0,707} \cdot \operatorname{ctg} 1,434U - 0,548 \cdot \operatorname{tg} U - \operatorname{tg} 1,2166U = \\ = \frac{0,548}{0,707} \operatorname{ctg} 1,434U \cdot \operatorname{tg} U \cdot \operatorname{tg} 1,2166U. \end{aligned} \quad (116')$$

Решая полученное уравнение, находим:

$$U \approx 0,54$$

и, следовательно,

$$P_{кр} = \left(\frac{0,54}{0,45}\right)^2 \frac{EJ_3}{l^2} = 1,44 \frac{EJ_3}{l^2}.$$

В данном случае вместо решения уравнения (116') мы можем на основании формулы (157) вычислить величину отклонения точного значения корня этого уравнения от получаемого по приближенному способу.

На основании формулы (123) имеем:

$$U = \frac{\delta_2}{l} \sqrt{K}$$

и, следовательно, подставляя вместо K его приближенное значение

$$K' = 1,57,$$

получаем:

$$U' = \frac{\delta_2}{l} \sqrt{K'} = 0,45 \sqrt{1,57} = 0,563.$$

Тогда по формулам (146—148) имеем:

$$A' = \frac{1}{k_1} \cdot \operatorname{ctg} aU' = \frac{1}{0,707} \operatorname{ctg} 1,434 \cdot 0,563 = 1,3556;$$

$$B' = -k_2 \cdot \operatorname{tg} U' = -0,548 \cdot \operatorname{tg} 0,563 = -0,3455;$$

$$C' = -\operatorname{tg} bU' = -\operatorname{tg} 1,2166 \cdot 0,563 = -0,8159$$

и

$$W' = A'B'C' = 1,3556 \cdot 0,3455 \cdot 0,8159 = 0,3821,$$

также получаем:

$$\sin 2aU' = \sin 2 \cdot 1,434 \cdot 0,563 = 0,9985;$$

$$\sin 2U' = \sin 2 \cdot 0,563 = 0,9023$$

и

$$\sin 2bU' = \sin 2 \cdot 1,2166 \cdot 0,563 = 0,9796.$$

Тогда на основании формулы (170) имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0,5 \frac{A' + B' + C' - W'}{\frac{\alpha(A' - W')}{\sin 2aU'} - \frac{B' - W'}{\sin 2U'} - \frac{b(C' - W')}{\sin 2bU'}} = \\ &= 0,5 \frac{1,3556 - 0,3455 - 0,8159 - 0,3821}{\frac{1,434(1,3556 - 0,3821)}{0,9985} + \frac{0,3455 + 0,3821}{0,9023} + \frac{1,2166(0,8159 + 0,3821)}{0,9796}} = \\ &= -0,0255 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$U = U' + \varepsilon = 0,563 - 0,0255 = 0,5375;$$

тогда

$$K = \left(\frac{U}{\delta_2/l}\right)^2 = \left(\frac{0,5375}{0,45}\right)^2 = 1,4267.$$

§ 7. Исследование устойчивости колонны того же вида, но с верхним шарнирно-опертым концом

Исследование устойчивости колонны переменного сечения, при числе участков с разными моментами инерции $n = 3$, с нижним защемленным и верхним шарнирно-опертым концом (фиг. 17).

Решение этой задачи приводит к системе трех дифференциальных уравнений вида:

$$EJ_1 y_1'' + Py_1 - Qx = 0; \quad (159)$$

$$EJ_2 y_2'' + Py_2 - Qx = 0; \quad (160)$$

$$EJ_3 y_3'' + Py_3 - Qx = 0. \quad (161)$$

Граничные условия и условия сопряжения в данном случае таковы:

$$x = 0, \quad y_1 = 0; \quad (162)$$

$$x = l, \quad y_3 = 0 \text{ и } y_3' = 0; \quad (163 - 164)$$

$$x = l - \delta_1, \quad y_1 = y_2 \text{ и } y_1' = y_2'; \quad (165 - 166)$$

$$x = l - \delta_2, \quad y_2 = y_3 \text{ и } y_2' = y_3'. \quad (167 - 168)$$

Общий интеграл уравнения (159) (см. исследование устойчивости колонны с двумя разными моментами инерции, с нижним защемленным и верхним шарнирно-опертым концом) имеет вид:

$$y_1 = C_1 \cos \eta x + C_2 \sin \eta x + \frac{Q}{P} x, \quad (169)$$

где

$$\eta = \sqrt{\frac{P}{EJ_1}}; \quad (170)$$

аналогично:

$$y_2 = C_3 \cos \rho x + C_4 \sin \rho x + \frac{Q}{P} x, \quad (171)$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{P}{EJ_2}}; \quad (172)$$

и

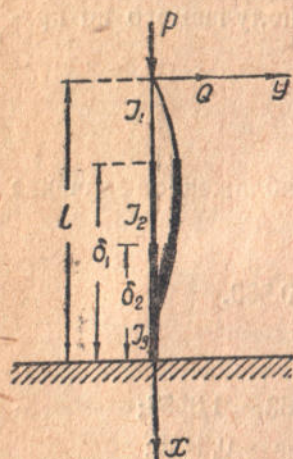
$$y_3 = C_5 \cos \tau x + C_6 \sin \tau x + \frac{Q}{P} x, \quad (173)$$

где

$$\tau = \sqrt{\frac{P}{EJ_3}}. \quad (174)$$

На основании граничных условий и условий сопряжения (162—168) имеем:

$$C_1 = 0; \quad (175)$$



Фиг. 17

$$C_5 \cos \tau l + C_6 \sin \tau l = -\frac{Q}{P} l; \quad (176)$$

$$C_5 \sin \tau l + C_6 \cos \tau l = \frac{Q}{P} \cdot \frac{1}{\tau}; \quad (177)$$

$$C_2 \sin \eta (l - \delta_1) = C_3 \cos \rho (l - \delta_1) + C_4 \sin \rho (l - \delta_1); \quad (178)$$

$$C_2 \eta \cos \eta (l - \delta_1) = -C_3 \rho \sin \rho (l - \delta_1) + C_4 \rho \cos \rho (l - \delta_1); \quad (179)$$

$$C_3 \cos \rho (l - \delta_2) + C_4 \sin \rho (l - \delta_2) = C_5 \cos \tau (l - \delta_2) + \\ + C_6 \sin \tau (l - \delta_2); \quad (180)$$

$$-C_3 \rho \sin \rho (l - \delta_2) + C_4 \rho \cos \rho (l - \delta_2) = -C_5 \tau \sin \tau (l - \delta_2) + \\ + C_6 \tau \cdot \cos \tau (l - \delta_2). \quad (181)$$

Решая совместно уравнения (176) и (177), получаем:

$$\frac{C_5}{C_6} = \frac{\tau l - \operatorname{tg} \tau l}{\tau l \cdot \operatorname{tg} \tau l + 1}. \quad (182)$$

На основании уравнений (178) и (179) имеем:

$$\frac{C_3}{C_4} = \frac{k_1 \cdot \operatorname{tg} \eta (l - \delta_1) - \operatorname{tg} \rho (l - \delta_1)}{k_1 \cdot \operatorname{tg} \eta (l - \delta_1) \cdot \operatorname{tg} \rho (l - \delta_1) + 1}, \quad (183)$$

где

$$k_1 = \frac{\rho}{\eta} = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}}. \quad (184)$$

На основании же уравнений (180) и (181)

$$\frac{\frac{C_3}{C_4} - \operatorname{ctg} \rho (l - \delta_2)}{\frac{C_3}{C_4} \operatorname{ctg} \rho (l - \delta_2) + 1} = k_2 \frac{\frac{C_5}{C_6} - \operatorname{ctg} \tau (l - \delta_2)}{\frac{C_5}{C_6} \operatorname{ctg} \tau (l - \delta_2) + 1}, \quad (185)$$

где

$$k_2 = \frac{\tau}{\rho} = \sqrt{\frac{J_2}{J_3}}. \quad (186)$$

Подставляя в уравнение (185) выражения $\frac{C_3}{C_4}$ (183) и $\frac{C_5}{C_6}$ (182), после преобразований получаем:

$$\operatorname{tg} \tau \delta_2 = \frac{\tau l - k_2 \cdot \frac{k_1 \operatorname{tg} \eta (l - \delta_1) + \operatorname{tg} \rho (\delta_1 - \delta_2)}{1 - k_1 \operatorname{tg} \eta (l - \delta_1) \operatorname{tg} \rho (\delta_1 - \delta_2)}}{1 + \tau l \cdot k_2 \cdot \frac{k_1 \operatorname{tg} \eta (l - \delta_1) + \operatorname{tg} \rho (\delta_1 - \delta_2)}{1 - k_1 \operatorname{tg} \eta (l - \delta_1) \operatorname{tg} \rho (\delta_1 - \delta_2)}} \quad (187)$$

или

$$\frac{1 - k_1 \operatorname{tg} \eta (l - \delta_1) \operatorname{tg} \rho (\delta_1 - \delta_2)}{k_1 \operatorname{tg} \eta (l - \delta_1) + \operatorname{tg} \rho (\delta_1 - \delta_2)} = k_2 \frac{1 + \tau l \operatorname{tg} \tau \delta_2}{\tau l - \operatorname{tg} \tau \delta_2}. \quad (187')$$

Обозначая

$$\tau l = U, \quad (188)$$

получаем:

$$\tau\delta_2 = \frac{\tau\delta_2}{\tau l} U = \frac{\delta_2}{l} U; \quad (189)$$

$$\eta(l - \delta_1) = \frac{\eta(l - \delta_1)}{\tau l} U = \frac{1}{k_1 k_2} \left(1 - \frac{\delta_1}{l}\right) U \quad (190)$$

и

$$\rho(\delta_1 - \delta_2) = \frac{\rho(\delta_1 - \delta_2)}{\tau l} U = \frac{1}{k_2} \left(\frac{\delta_1}{l} - \frac{\delta_2}{l}\right) U. \quad (191)$$

Тогда имеем:

$$\underline{\underline{\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{l} U = \frac{U - k_2 A}{1 + k_2 A U}}}, \quad (192)$$

где

$$A = \frac{k_1 \operatorname{tg} a U + \operatorname{tg} b U}{1 - k_1 \operatorname{tg} a U \cdot \operatorname{tg} b U} \quad (193)$$

и

$$a = \frac{1}{k_1 k_2} \left(1 - \frac{\delta_1}{l}\right), \quad (194)$$

$$b = \frac{1}{k_2} \left(\frac{\delta_1}{l} - \frac{\delta_2}{l}\right). \quad (195)$$

На основании уравнения (188) имеем:

$$\sqrt{\frac{P}{EJ_3}} \cdot l = U \quad (196)$$

и, следовательно,

$$P_{кр} = \underline{\underline{U^2 \frac{EJ_3}{l^2}}} \quad (197)$$

или

$$P_{кр} = \left(\frac{U}{k_2}\right)^2 \frac{EJ_2}{l^2} \quad (198)$$

или же

$$P_{кр} = \left(\frac{U}{k_1 k_2}\right)^2 \frac{EJ_1}{l^2}. \quad (199)$$

Для данного случая на основании уравнений (192) и (193) для ряда частных значений $\frac{\delta_1}{l}$, $\frac{\delta_2}{l}$, $\frac{J_1}{J_2}$ и $\frac{J_2}{J_3}$, наиболее часто встречающихся в практике, составлены таблицы 8 и 9 величин корня U и коэффициента устойчивости K :

$$K = U^2. \quad (200)$$

Значение коэффициента длины μ на основании формул (43) и (200) имеет следующий вид:

$$\mu = \frac{\pi}{\sqrt{K}} = \frac{\pi}{U}. \quad (201)$$

Таблица 8

Значения корня U уравнения (192) для колонны с тремя разными моментами инерции с нижним защемленным и верхним шарнирно-опертым концом

$\frac{J_1}{J_2}$ \ $\frac{\delta_1}{l}$ / $\frac{\delta_2}{l}$	0,70	0,75	0,75	0,80
$\frac{J_2}{J_3}$	0,50	0,55	0,60	0,65
0,15 / 0,10	1,22	1,28	1,30	1,36
0,35 / 0,10	1,58	1,65	1,65	1,75
0,25 / 0,15	1,63	1,70	1,70	1,82
0,35 / 0,15	1,80	1,88	1,88	2,02
0,15 / 0,35	1,82	1,92	1,92	2,12

Таблица 9

Значения коэффициента устойчивости K для колонны (фиг. 17) с нижним защемленным и верхним шарнирно-опертым концом

$\frac{J_1}{J_2}$ \ $\frac{\delta_1}{l}$ / $\frac{\delta_2}{l}$	0,70	0,75	0,75	0,80
$\frac{J_2}{J_3}$	0,50	0,55	0,60	0,65
0,15 / 0,10	1,49	1,64	1,69	1,85
0,35 / 0,10	2,50	2,72	2,72	3,06
0,25 / 0,15	2,66	2,89	2,89	3,31
0,35 / 0,15	3,24	3,53	3,53	4,08
0,15 / 0,35	3,31	3,69	3,69	4,49

§ 5. Пример, характеризующий влияние учета переменности поперечного сечения колонны

Для сравнения результатов, полученных по точному способу, с определяемыми без учета переменности сечения, рассмотрим следующий пример.

Колонна с тремя разными моментами инерции, с нижним заземленным и верхним свободным концом (фиг. 14)

$$\frac{J_1}{J_2} = 0,35; \quad \frac{J_2}{J_3} = 0,10;$$

$$\frac{\delta_1}{l} = 0,80; \quad \frac{\delta_2}{l} = 0,65.$$

На основании таблицы 7—коэффициентов устойчивости — для рассматриваемого случая имеем:

$$K = 1,037,$$

и, следовательно,

$$P_{кр} = 1,037 \frac{EJ_3}{l^2} \quad (120')$$

или на основании формулы (121):

$$P_{кр} = \frac{K}{k_2^2} \cdot \frac{EJ_2}{l^2} = \frac{1,037}{0,10} \cdot \frac{EJ_2}{l^2} = 10,37 \frac{EJ_2}{l^2} \quad (121')$$

или на основании формулы (122):

$$P_{кр} = \frac{K}{k_1^2 k_2^2} \cdot \frac{EJ_1}{l^2} = \frac{1,037}{0,10 \cdot 0,35} \cdot \frac{EJ_1}{l^2} = 29,63 \frac{EJ_1}{l^2}. \quad (122')$$

Не учитывая переменности момента инерции сечения по высоте, т. е. принимая $J = \text{const}$, мы бы получили:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} = 2,4674 \frac{EJ}{l^2}.$$

Таким образом, если бы расчет колонны был произведен, принимая момент инерции ее сечения

$$J = J_1,$$

то значение критической силы получилось бы преуменьшенным в $\frac{29,63}{2,4674} = 12$ раз; если же было бы принято:

$$J = J_2,$$

то получили бы преуменьшение критической силы в $\frac{10,37}{2,4674} = 4,2$ раза, и если бы приняли:

$$J = J_3,$$

то получили бы преувеличенное значение силы $P_{кр}$ в $\frac{2,4674}{1,037} = 2,38$ раза.

Приведенный пример показывает, что учет переменности момента инерции поперечного сечения колонны может в значительной степени сказаться на результате при определении критической силы колонны.

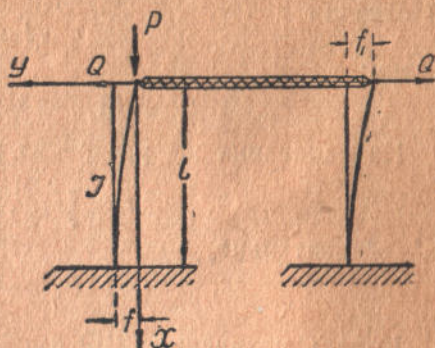
II. Исследование устойчивости систем колонн, связанных шарнирно друг с другом с помощью горизонтального жесткого ригеля

§ 9. Устойчивость системы из двух колонн постоянного поперечного сечения

Переходим к исследованию устойчивости системы колонн, расположенных в одной плоскости и связанных шарнирно друг с другом с помощью горизонтального жесткого ригеля.

Предварительно рассмотрим простейший случай системы, состоящей из двух колонн постоянного поперечного сечения, из которых одна находится под действием силы P , приложенной к ее верхушке.

В этом случае дифференциальное уравнение упругой линии левой колонны имеет вид (фиг. 18):



Фиг. 18

$$EJy'' + Py - Qx = 0, \quad (202)$$

при следующих граничных условиях:

$$x = 0, \quad y = 0; \quad (203)$$

$$x = l, \quad y = f \text{ и } y' = 0. \quad (204-205)$$

Величина прогиба f_1 правой стойки от силы Q равна:

$$f_1 = \frac{Ql^3}{3EJ}; \quad (206)$$

так как

$$f = f_1,$$

то и

$$f = \frac{Ql^3}{3EJ}. \quad (207)$$

Решение уравнения (202) выражается следующим образом:

$$y = C_1 \cos \eta x + C_2 \sin \eta x + \frac{Q}{P} x, \quad (208)$$

где

$$\eta = \sqrt{\frac{P}{EJ}}. \quad (209)$$

На основании граничных условий (203—205) имеем:

$$C_1 = 0; \quad (210)$$

$$C_2 \sin \eta l + \frac{Q}{P} l = \frac{Ql^3}{3EJ} \quad (211)$$

или

$$C_2 \sin \eta l = -\frac{Q}{P} l \left(1 - \frac{1}{3} \eta^2 l^2\right) \quad (212)$$

и

$$C_2 \cos \eta l = -\frac{Q}{P} \cdot \frac{1}{\eta}. \quad (213)$$

Деля уравнение (212) на (213), получаем:

$$\operatorname{tg} \eta l = \eta l \left(1 - \frac{1}{3} \eta^2 l^2\right). \quad (214)$$

Обозначая

$$\eta l = U, \quad (215)$$

имеем:

$$\operatorname{tg} U = U \left(1 - \frac{U^2}{3}\right). \quad (216)$$

На основании же уравнения (215):

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}} \cdot l = U \quad (217)$$

и, следовательно,

$$P_{\text{кр}} = U^2 \frac{EJ}{l^2}. \quad (218)$$

Корень уравнения (216) имеет следующее значение:

$$U = 2,204 \quad (219)$$

и, следовательно,

$$P_{\text{кр}} = 4,857 \frac{EJ}{l^2} \quad (220)$$

или

$$P_{\text{кр}} \approx \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{EJ}{l^2}. \quad (221)$$

Сравнивая значения коэффициентов устойчивости K при продольном изгибе для всех известных случаев закрепления концов при постоянном моменте инерции — а) стойка с обоими свободно-опертыми концами, б) с нижним защемленным и верхним свободным концом, в) с нижним защемленным и верхним шарнирно-опертым концом, г) с двумя защемленными концами — с рассмотренными нами (221), мы видим, что этот коэффициент является как бы недостающим членом указанного ряда случаев продольного изгиба, имеющим значение коэффициента устойчивости K , находящееся между значениями K для стойки с нижним защемленным и верхним свободным концом и K для стойки с обоими свободно-опертыми концами.

Ниже нами приведена *полная таблица значений $P_{\text{кр}}$ для стойки постоянного сечения при различных способах закрепления концов* (табл. 10).

Из этой таблицы видно, что *общее выражение критической силы может быть записано в виде:*

$$P_{\text{кр}} = 2s - 3\pi^2 \frac{EJ}{l^2}, \quad (222)$$

где s — номер рассматриваемого случая, и, следовательно,

$$K = 2^{s-3}\pi^2. \quad (223)$$

Таблица 10

Формулы для определения критической силы для стержня постоянного сечения при различных способах закрепления концов

№ по пор.	Вид закрепления концов элемента	Формулы критической силы
1		$P_{кр} = 2,467 \cdot \frac{EJ}{l^2} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EJ}{l^2}$
2		$P_{кр} = 4,857 \cdot \frac{EJ}{l^2} \approx \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{EJ}{l^2}$
3		$P_{кр} = 9,87 \cdot \frac{EJ}{l^2} = \pi^2 \cdot \frac{EJ}{l^2}$
4		$P_{кр} = 20,19 \cdot \frac{EJ}{l^2} \approx 2\pi^2 \cdot \frac{EJ}{l^2}$
5		$P_{кр} = 39,478 \cdot \frac{EJ}{l^2} = 4\pi^2 \cdot \frac{EJ}{l^2}$

§ 10. Устойчивость системы из двух колонн переменного сечения (с двумя разными моментами инерции)

Переходим теперь к исследованию устойчивости колонны с двумя разными моментами инерции, соединенной шарнирно с помощью жесткого ригеля с другой такой же колонной (фиг. 19) при тех же условиях загрузки — сила P приложена к верхушке левой стойки.

Решение этой задачи приводит к системе двух дифференциальных уравнений вида:

$$EJ_1 y_1'' + P y_1 - Q x = 0 \quad (224)$$

и

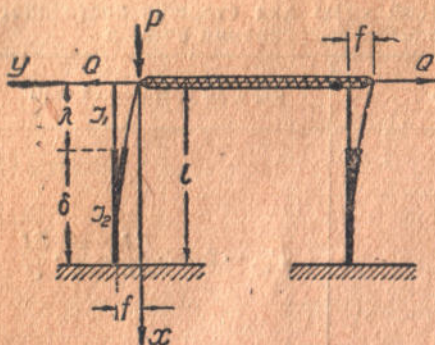
$$EJ_2 y_2'' + P y_2 - Q x = 0, \quad (225)$$

при следующих граничных условиях:

$$x=0, y_1=0; \quad (226)$$

$$x=l, y_2=f \text{ и } y_2'=0; \quad (227-228)$$

$$x=l-\delta, y_1=y_2 \text{ и } y_1'=y_2'. \quad (229-230)$$



Фиг. 19

Величина прогиба f_1 правой стойки от силы Q может быть определена на основании общего метода расчета балок переменного сечения по формуле¹:

$$f_1 = \frac{A_0}{EJ_2}, \quad (231)$$

где

$$A_0 = l \cdot \Phi_n'(l) - \Phi_n(l) \quad (232)$$

и

$$\Phi_n(x) = Q \left[k_n \frac{x^3}{3!} + \sum_{m=1}^{n-1} \Delta k_m \frac{\lambda^2}{2} \left(x - \frac{2}{3} \lambda_m \right) \right]. \quad (233)$$

При числе участков

$$n = 2,$$

принимая за основной момент инерции J_2 , получаем:

$$k_2 = 1$$

и, следовательно,

$$\Phi(x) = Q \left[\frac{x^3}{3!} + \Delta k \frac{\lambda^2}{2} \left(x - \frac{2}{3} \lambda \right) \right]; \quad (234)$$

$$\Phi(l) = Q \left[\frac{l^3}{3!} + \Delta k \frac{\lambda^2}{2} \left(l - \frac{2}{3} \lambda \right) \right]; \quad (235)$$

$$\Phi'(l) = Q \left(\frac{l^2}{2!} + \Delta k \frac{\lambda^2}{2} \right). \quad (236)$$

Тогда имеем:

$$A_0 = Q \left(\frac{l^2}{2!} + \Delta k \frac{\lambda^2}{2} \right) \cdot l - Q \left[\frac{l^3}{3!} + \Delta k \frac{\lambda^2}{2} \left(l - \frac{2}{3} \lambda \right) \right] = \frac{Q}{3} (l^3 + \Delta k \lambda^3) \quad (237)$$

и, следовательно,

$$f_1 = \frac{Q}{3EJ_2} (l^3 + \Delta k \lambda^3) = \frac{Ql^3}{3EJ_2} \left[1 + \Delta k \left(\frac{\lambda}{l} \right)^3 \right]. \quad (238)$$

¹ В. П. Манжаловский. Общий метод расчета балок ступенчатообразного сечения, Сборник научных трудов I, Харьковский инженерно-строительный институт, 1935, стр. 134, формула (45).

Таким образом, мы получаем:

$$f = f_1 = \frac{Ql^3}{3EJ_2} \left[1 + \Delta k \left(\frac{\lambda}{l} \right)^3 \right] \quad (239)$$

или, заменяя

$$\Delta k = k_1 - k_2 = \frac{J_2}{J_1} - 1 = \frac{1}{k_2} - 1, \quad (240)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} \quad (241)$$

и

$$\lambda = l - \delta, \quad (242)$$

получаем:

$$f = \frac{Ql^3}{3EJ_2} \left[1 + \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{\delta}{l} \right)^3 \right] \quad (243)$$

или

$$f = \alpha \frac{Ql^3}{3EJ_2}, \quad (244)$$

где

$$\alpha = 1 + \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{\delta}{l} \right)^3. \quad (245)$$

Решения уравнений (224) и (225) выражаются следующим образом:

$$y_1 = C_1 \cos \eta x + C_2 \sin \eta x + \frac{Q}{P} x, \quad (246)$$

$$y_2 = C_3 \cos \rho x + C_4 \sin \rho x + \frac{Q}{P} x, \quad (247)$$

где

$$\eta = \sqrt{\frac{P}{EJ_1}}, \quad (248)$$

$$\rho = \sqrt{\frac{P}{EJ_2}}. \quad (249)$$

На основании граничных условий и условий сопряжения (226—230) имеем:

$$C_1 = 0; \quad (250)$$

$$C_3 \cos \rho l + C_4 \sin \rho l + \frac{Q}{P} l = \alpha \cdot \frac{Ql^3}{3EJ_2} \quad (251)$$

или

$$C_3 \cos \rho l + C_4 \sin \rho l = -\frac{Q}{P} l \left(1 - \frac{\alpha}{3} \rho^2 l^2 \right); \quad (252)$$

$$C_3 \sin \rho l - C_4 \cos \rho l = \frac{Q}{P} \cdot \frac{1}{\rho}; \quad (253)$$

$$C_2 \sin \eta (l - \delta) = C_3 \cos \rho (l - \delta) + C_4 \sin \rho (l - \delta); \quad (254)$$

$$C_2 \eta \cdot \cos \eta (l - \delta) = -C_3 \rho \sin \rho (l - \delta) + C_4 \rho \cos \rho (l - \delta). \quad (255)$$

Решая совместно уравнения (252) и (253), получаем:

$$C_3 = \frac{Q}{P} \left[\frac{1}{\rho} \sin \rho l - l \left(1 - \frac{\alpha}{3} \rho^2 l^2 \right) \cos \rho l \right] \quad (256)$$

$$C_4 = -\frac{Q}{P} \left[\frac{1}{\rho} \cos \rho l + l \left(1 - \frac{\alpha}{3} \rho^2 l^2 \right) \sin \rho l \right]. \quad (257)$$

Деля уравнение (254) на (255), получаем:

$$k \cdot \operatorname{tg} \eta (l - \delta) = \frac{C_4 \sin \rho (l - \delta) + C_3 \cos \rho (l - \delta)}{C_4 \cos \rho (l - \delta) - C_3 \sin \rho (l - \delta)}, \quad (258)$$

где

$$k = \frac{\rho}{\eta} = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}}. \quad (241)$$

Подставляя в уравнение (258) значения C_3 и C_4 , после соответствующих преобразований получаем:

$$k \operatorname{tg} \eta (l - \delta) = \frac{\rho l \left(1 - \frac{\alpha}{3} \rho^2 l^2 \right) - \operatorname{tg} \rho \delta}{1 + \rho l \left(1 - \frac{\alpha}{3} \rho^2 l^2 \right) \operatorname{tg} \rho \delta}. \quad (259)$$

Обозначая

$$\rho l = U, \quad (260)$$

получаем:

$$\eta (l - \delta) = \frac{1 - \frac{\delta}{l}}{k} U \quad \text{и} \quad \rho \delta = \frac{\delta}{l} U. \quad (261-262)$$

Тогда имеем:

$$k \cdot \operatorname{tg} \frac{1 - \frac{\delta}{l}}{k} U = \frac{U \left(1 - \frac{\alpha}{3} U^2 \right) - \operatorname{tg} \frac{\delta}{l} U}{1 + U \left(1 - \frac{\alpha}{3} U^2 \right) \operatorname{tg} \frac{\delta}{l} U}, \quad (263)$$

или принимая

$$a = \frac{1 - \frac{\delta}{l}}{k}, \quad (264)$$

получаем на основании уравнения (245):

$$\alpha = 1 + k(1 - k^2) \cdot a^3 \quad (265)$$

и, следовательно,

$$k \cdot \operatorname{tg} aU = \frac{U \left[1 - \frac{1 + k(1 - k^2) a^3}{3} U^2 \right] - \operatorname{tg} \frac{\delta}{l} U}{1 + U \left[1 - \frac{1 + k(1 - k^2) a^3}{3} U^2 \right] \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{l} U}. \quad (266)$$

Преобразовывая имеем:

$$U - \frac{1}{3} [1 + k(1 - k^2) a^3] U^3 = \frac{k \operatorname{tg} aU + \operatorname{tg} \frac{\delta}{l} U}{1 - k \cdot \operatorname{tg} aU \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{l} U}. \quad (267)$$

На основании же уравнения (260) имеем:

$$\sqrt{\frac{P}{EJ_2}} \cdot l = U \quad (268)$$

и, следовательно,

$$P_{кр} = U^2 \frac{EJ_2}{l^2} \quad (269)$$

или

$$P_{кр} = \left(\frac{U}{k}\right)^2 \frac{EJ_1}{l^2}. \quad (270)$$

Таким образом, коэффициент устойчивости K получается равным:

$$K = U^2 \quad (271)$$

и, следовательно, коэффициент длины

$$\mu = \frac{\pi}{U}. \quad (272)$$

§ 11. Устойчивость такой же системы, но в случае действия двух сил, приложенных в разных точках по высоте одной из колонн

Исследуем устойчивость колонны с двумя разными моментами инерции, соединенной шарнирно с помощью жесткого ригеля с другой такой же колонной (фиг. 20) при иных условиях загрузки.

Колонну I принимаем под действием вертикальной силы P_1 , приложенной к ее верхушке, и силы P_2 в месте изменения момента инерции поперечного сечения.

Решение этой задачи приводит к системе двух дифференциальных уравнений вида:

$$EJ_1 y_1'' + P_1 y_1 - Q x_1 = 0 \quad (273)$$

Фиг. 20

$$EJ_2 y_2'' + P_1 y_2 + P_2 (y_2 - y_0) - Q x_2 = 0, \quad (274)$$

при следующих граничных условиях:

$$x = 0, \quad y_1 = 0; \quad (275)$$

$$x = l, \quad y_2 = f \quad \text{и} \quad y_2' = 0; \quad (276-277)$$

$$x = l - \delta, \quad y_1 = y_2 = y_0 \quad \text{и} \quad y_1' = y_2'. \quad (278-280)$$

Принимая

$$P_2 = \nu P_1, \quad (281)$$

можем записать уравнение (274) в следующем виде:

$$EJ_2 y_2'' + P_1 [(1 + \nu) y_2 - \nu y_0] - Q x = 0 \quad (282)$$

или

$$EJ_2 y_2'' + (1 + \nu) P_1 y_2 - \nu P_1 y_0 - Q x = 0. \quad (282')$$

Таким образом, мы получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{EJ_1}{P_1} y_1'' + y_1 = \frac{Q}{P_1} x \quad (283)$$

и

$$\frac{EJ_2}{(1+\nu)P_1} y_2'' + y_2 = \frac{Q}{(1+\nu)P_1} x + \frac{\nu}{1+\nu} y_0. \quad (284)$$

Решения этих уравнений:

$$y_1 = C_1 \cos \eta x + C_2 \sin \eta x + \frac{Q}{P_1} x \quad (285)$$

и

$$y_2 = C_3 \cos \rho x + C_4 \sin \rho x + \frac{Q}{(1+\nu)P_1} x + \frac{\nu}{1+\nu} y_0, \quad (286)$$

где

$$\eta = \sqrt{\frac{P_1}{EJ_1}} \quad (287)$$

и

$$\rho = \sqrt{\frac{(1+\nu)P_1}{EJ_2}} = \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{EJ_2}}. \quad (288)$$

Величина прогиба f_2 колонны II от силы Q получена нами выше (§ 10) в виде:

$$f_1 = f_2 = \alpha \frac{Ql^3}{3EJ_2}, \quad (244)$$

где

$$\alpha = 1 + \left(\frac{1}{k^2} - 1\right) \left(1 - \frac{\delta}{l}\right)^3, \quad (245)$$

и

$$k = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}}. \quad (241)$$

На основании граничных условий (275—277) и условий сопряжения (278—280), имеем:

$$C_1 = 0; \quad (289)$$

$$C_3 \cos \rho l + C_4 \sin \rho l + \frac{\nu}{1+\nu} y_0 = -\frac{Ql}{(1+\nu)P_1} \left(1 - \frac{\alpha}{3} \rho^2 l^2\right); \quad (290)$$

$$C_3 \sin \rho l - C_4 \cos \rho l = \frac{Q}{(1+\nu)P_1} \cdot \frac{1}{\rho}; \quad (291)$$

$$y_0 = C_2 \sin \eta (l - \delta) + \frac{Q}{P_1} (l - \delta); \quad (292)$$

$$y_0 = C_3 \cos \rho (l - \delta) + C_4 \sin \rho (l - \delta) + \frac{Q}{(1+\nu)P_1} (l - \delta) + \frac{\nu}{1+\nu} y_0, \quad (293)$$

откуда

$$y_0 = (1 + \nu) [C_3 \cos \rho (l - \delta) + C_4 \sin \rho (l - \delta)] + \frac{Q}{P_1} (l - \delta); \quad (294)$$

$$\begin{aligned} C_2 \eta \cos \eta (l - \delta) + C_3 \rho \sin \rho (l - \delta) - C_4 \rho \cos \rho (l - \delta) = \\ = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{Q}{P_1}. \end{aligned} \quad (295)$$

Решаем совместно полученную систему уравнений (290—292, 294—295).

Подставляя в уравнение (290) значение y_0 (294), получаем:

$$C_3 [\cos \rho l + v \cos \rho (l - \delta)] + C_4 [\sin \rho l + v \sin \rho (l - \delta)] = -\frac{Ql}{(1+v)P_1} \left[1 + v \left(1 - \frac{\delta}{l} \right) - \frac{\alpha}{3} \rho^2 l^2 \right]. \quad (296)$$

На основании же уравнений (292) и (294) имеем:

$$C_2 \sin \eta (l - \delta) = (1 + v) [C_3 \cos \rho (l - \delta) + C_4 \sin \rho (l - \delta)]. \quad (297)$$

После указанных преобразований мы получаем систему уравнений (291) и (295—297).

Решая совместно уравнения (291) и (296), находим:

$$C_3 = \frac{1}{1 + v \cos \rho \delta} \cdot \frac{Ql}{(1+v)P_1} \left\{ \frac{1}{\rho l} [\sin \rho l + v \sin \rho (l - \delta)] - \left[1 + v \left(1 - \frac{\delta}{l} \right) - \frac{\alpha}{3} \rho^2 l^2 \right] \cos \rho l \right\} \quad (298)$$

и

$$C_4 = -\frac{1}{1 + v \cos \rho \delta} \cdot \frac{Ql}{(1+v)P_1} \left\{ \frac{1}{\rho l} [\cos \rho l + v \cos \rho (l - \delta)] + \left[1 + v \left(1 - \frac{\delta}{l} \right) - \frac{\alpha}{3} \rho^2 l^2 \right] \sin \rho l \right\}. \quad (299)$$

Записывая уравнение (295) в виде

$$\frac{1}{\tau} C_2 \cos \eta (l - \delta) = -C_3 \sin \rho (l - \delta) + C_4 \cos \rho (l - \delta) - \frac{v}{1+v} \cdot \frac{Q}{P_1} \cdot \frac{1}{\rho}, \quad (300)$$

где через τ обозначено:

$$\tau = \frac{\rho}{\eta} = \sqrt{(1+v) \frac{J_1}{J_2}}, \quad (301)$$

и, разделив на него уравнение (297), получаем:

$$\tau \operatorname{tg} \eta (l - \delta) = (1 + v) \frac{C_3 \cos \rho (l - \delta) + C_4 \sin \rho (l - \delta)}{-C_3 \sin \rho (l - \delta) + C_4 \cos \rho (l - \delta) - \frac{v}{1+v} \cdot \frac{Q}{P_1} \cdot \frac{1}{\rho}}. \quad (302)$$

Подставляя в это уравнение выражения для C_3 (298) и C_4 (299), и заменяя на основании равенств (241) и (381) τ через

$$\tau = k \sqrt{1+v}, \quad (303)$$

получаем после соответствующих преобразований:

$$k \operatorname{tg} \eta (l - \delta) = -\sqrt{1+v} \frac{\sin \rho \delta - \rho \delta \left[1 + v \left(1 - \frac{\delta}{l} \right) - \frac{\alpha}{3} \rho^2 l^2 \right] \cos \rho \delta}{2v + (1+v^2) \cos \rho \delta + \rho l \left[1 + v \left(1 - \frac{\delta}{l} \right) - \frac{\alpha}{3} \rho^2 l^2 \right] \sin \rho \delta}. \quad (304)$$

Обозначая

$$\rho l = U, \quad (305)$$

получаем:

$$\rho \delta = \frac{\delta}{l} U \quad (306)$$

и

$$\eta(l - \delta) = \frac{1 - \frac{\delta}{l}}{\tau} U. \quad (307)$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} & k \cdot \operatorname{tg} \frac{1 - \frac{\delta}{l}}{k \sqrt{1 + \nu}} U = \\ & = \sqrt{1 + \nu} \frac{U \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\delta}{l} \right) - \frac{\alpha}{3} U^2 \right] \cos \frac{\delta}{l} U - \sin \frac{\delta}{l} U}{U \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\delta}{l} \right) - \frac{\alpha}{3} U^2 \right] \sin \frac{\delta}{l} U + (1 + \nu^2) \cos \frac{\delta}{l} U + 2\nu} \end{aligned} \quad (308)$$

или

$$\begin{aligned} & k \cdot \operatorname{tg} \frac{\lambda}{l} \frac{U}{k \sqrt{1 + \nu}} = \\ & = \sqrt{1 + \nu} \frac{U \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{l} \nu - \frac{\alpha}{3} U^2 \right) \cdot \cos \frac{\delta}{l} U - \sin \frac{\delta}{l} U}{U \left(1 + \frac{\lambda}{l} \nu - \frac{\alpha}{3} U^2 \right) \cdot \sin \frac{\delta}{l} U + (1 + \nu^2) \cos \frac{\delta}{l} U + 2\nu}, \end{aligned} \quad (309)$$

где

$$\lambda = l - \delta, \quad (310)$$

или

$$\begin{aligned} & U \left(1 + \frac{\lambda}{l} \nu - \frac{\alpha}{3} U^2 \right) = \\ & = \frac{k(1 + \nu^2) \operatorname{tg} a U \cos \frac{\delta}{l} U + 2\nu k \operatorname{tg} a U + \sqrt{1 + \nu} \cdot \sin \frac{\delta}{l} U}{\sqrt{1 + \nu} \cdot \cos \frac{\delta}{l} U - k \cdot \sin \frac{\delta}{l} U \operatorname{tg} a U}. \end{aligned} \quad (311)$$

На основании же уравнения (305) имеем:

$$\sqrt{\frac{(1 + \nu) P_1}{E J_2}} \cdot l = U \quad (312)$$

и, следовательно,

$$P_{1кр} = \frac{U^2}{1 + \nu} \cdot \frac{E J_2}{l^2} \quad (313)$$

или

$$P_{1кр} = \frac{1}{1 + \nu} \left(\frac{U}{k} \right)^2 \frac{E J_1}{l^2}. \quad (314)$$

Тогда находим:

$$K = \frac{U^2}{1 + \nu} \quad (315)$$

и, следовательно, учитывая $P_{1кр}$ и $P_{2кр} = vP_{1кр}$, получим коэффициент длины

$$\mu = \frac{\pi}{\sqrt{K(1+v)}} = \frac{\pi}{U}. \quad (316)$$

В случае, когда на колонну I действует лишь одна сила P_1 , то

$$v = 0 \quad (317)$$

и, следовательно,

$$P_{1кр} = U^2 \frac{EJ_2}{l^2} \quad (318)$$

и

$$k \cdot \operatorname{tg} \frac{\lambda}{l} \frac{U}{k} = \frac{U \left(1 - \frac{\alpha}{3} U^2\right) \cos \frac{\delta}{l} U - \sin \frac{\delta}{l} U}{U \left(1 - \frac{\alpha}{3} U^2\right) \sin \frac{\delta}{l} U + \cos \frac{\delta}{l} U} \quad (319)$$

или

$$k \cdot \operatorname{tg} \frac{\lambda}{l} \frac{U}{k} = \frac{U \left(1 - \frac{\alpha}{3} U^2\right) - \operatorname{tg} \frac{\delta}{l} U}{1 + U \left(1 - \frac{\alpha}{3} U^2\right) \operatorname{tg} \frac{\delta}{l} U} \quad (320)$$

или же преобразовывая

$$U - \frac{\alpha}{3} U^3 = \frac{k \operatorname{tg} \frac{\lambda}{kl} U + \operatorname{tg} \frac{\delta}{l} U}{1 - k \operatorname{tg} \frac{\lambda}{kl} U \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{l} U}; \quad (321)$$

коэффициент устойчивости

$$K = U^2 \quad (322)$$

и коэффициент длины

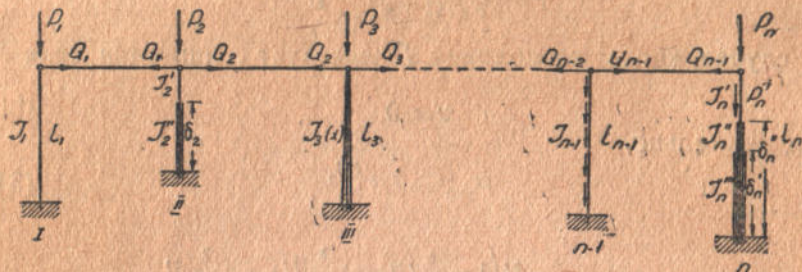
$$\mu = \frac{\pi}{U}. \quad (323)$$

§ 12. Исследование устойчивости системы шарнирно-связанных колонн в общем случае

Переходим к исследованию устойчивости системы, состоящей из ряда колонн, расположенных в одной плоскости и связанных шарнирно друг с другом с помощью горизонтального жесткого ригеля. При этом в данном параграфе мы будем рассматривать указанную систему в самом общем виде, предполагая ее состоящей из n колонн разных высот, разных моментов инерции, с переменным моментом инерции, меняющимся ступенчатообразно или по какому угодно закону¹, и нагруженную

¹ Если только определение прогиба свободного конца такой колонны возможно на основании приближенного дифференциального уравнения упругой линии: $EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M$.

вертикальными силами, центрально приложенными относительно оси каждой колонны к верхушке последней или где-либо в сечении, или нагрузкой распределенной вдоль оси колонны по какому угодно закону (фиг. 21).



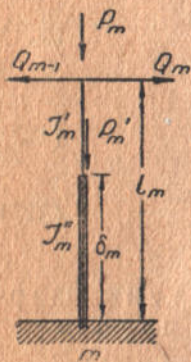
Фиг. 21

Дадим нашей системе горизонтальное перемещение (малое); благодаря жестким связям, соединяющим отдельные колонны в связанную систему, в последних появятся горизонтальные усилия Q , в каждом пролете разные.

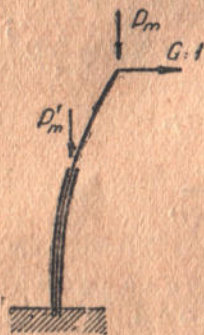
Критическое состояние системы, соответствующее ее переходу из устойчивого состояния равновесия в неустойчивое, может быть определено из условия равенства прогибов всех колонн, находящихся под действием приложенных к ним сил и горизонтальных усилий Q , появляющихся благодаря заданному малому перемещению системы в горизонтальном направлении:

$$f_1 = f_2 = f_3 = \dots = f_{n-1} = f_n. \quad (324)$$

Прогиб каждой m -ой колонны f_m от центрально приложенных к ней внешних вертикальных сил P_m или q_m , распределенных по какому угодно закону, и горизонтальных сил Q_{m-1} и Q_m , появляющихся благодаря связям системы



Фиг. 22



Фиг. 23

(фиг. 22), может быть выражен в виде:

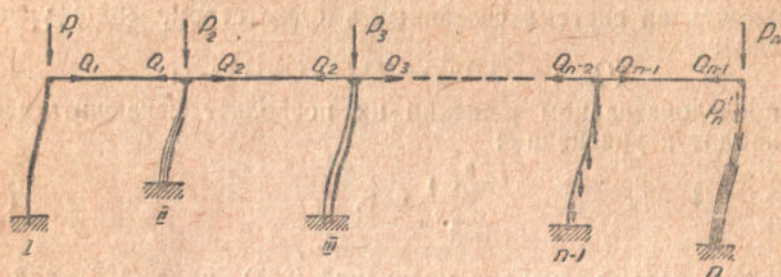
$$f_m = (Q_{m-1} - Q_m) \nu_m, \quad (325)$$

где ν_m — выражение, являющееся функцией геометрических размеров колонны и приложенных к ней вертикальных сил P_m или q_m , и не зависящее от величин сил Q . Иначе говоря ν_m представляет собою прогиб колонны (фиг. 23), находящейся под действием указанной системы вертикальных и горизонтальных сил при

$$Q = 1. \quad (326)$$

где произведения, стоящие под знаком суммы, представляют собою сочетания из n величин ν по $n-1$. Разделив обе части уравнения (335) на произведение

$$\nu_1 \nu_2 \nu_3 \dots \nu_{n-1} \nu_n,$$



Фиг. 24

мы приходим к уже приведенному нами выше уравнению (329):

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{\nu_m} = 0. \quad (329)$$

Полученное уравнение (329) характеризует критическое состояние рассматриваемой системы связанных колонн, соответствующее ее переходу из устойчивого состояния равновесия в неустойчивое; оно дает нам зависимости между всеми факторами, характеризующими систему в рассматриваемый момент (геометрическими размерами колонн и силами).



Фиг. 25

Подобное же уравнение мы получим для системы колонн, связанных друг с другом с помощью жесткого ригеля при жестких узловых соединениях последнего с колоннами. При указанном условии возможным является лишь горизонтальное линейное смещение верхних концов всех колонн на одну и ту же величину f , угловые же перемещения последних будут равны 0 (фиг. 24). Уравнение, характеризующее критическое состояние данной системы, может быть записано в виде, подобном уравнению (329):

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{\xi_m} = 0, \quad (336)$$

где через ξ_m обозначен прогиб верхнего конца каждой m -ой колонны (фиг. 25), находящейся под действием вертикальной центрально приложенной к ней нагрузки и горизонтальной силы

$$Q = 1, \quad (326)$$

при указанных выше условиях — возможным является линейное горизонтальное смещение, угловое же перемещение равно нулю.

Однако, критическое состояние системы в каждом из указанных случаев может быть вызвано различными комбинациями внешних сил, действующих на рассматриваемую конструкцию. Поэтому мы должны иметь в виду не одну какую-либо критическую силу, а всю совокупность внешних сил, вызывающую критическое состояние системы.

Таким образом, отыскивание критической нагрузки для заданной системы оказывается задачей неопределенной, так как может иметь целый ряд решений, удовлетворяющих уравнению (329) или (336).

Эта задача будет иметь одно вполне определенное решение лишь в том случае, если ввести еще дополнительные условия, например, устанавливающие закон возрастания нагрузки, действующей на конструкцию. Такими дополнительными условиями могут явиться следующие.

1. Все силы, действующие на конструкцию, растут пропорционально, все время оставаясь связанными друг с другом постоянными отношениями:

$$\chi^2 = \frac{P_m}{P_k}, \quad (337)$$

где индекс k относится к какой угодно колонне, с которой сравниваются все остальные. В этом случае мы можем определить отношение критического значения каждой из сил $P_m^{кр}$ к ее действительному (заданному) значению P_m :

$$t = \frac{P_m^{кр}}{P_m}; \quad (338)$$

$P_m^{кр}$ — значение каждой m -ой силы, отвечающее критическому состоянию системы.

Величина этого отношения будет одна и та же для всех приложенных сил и представит собою коэффициент запаса на устойчивость рассматриваемой системы при указанном законе роста сил.

2. Растет лишь одна какая-либо из приложенных сил P_k , все остальные остаются неизменными. В этом случае коэффициентом запаса на устойчивость для системы явится отношение критического значения этой силы $P_k^{кр}$ к ее заданному значению P_k :

$$t = \frac{P_k^{кр}}{P_k}; \quad (339)$$

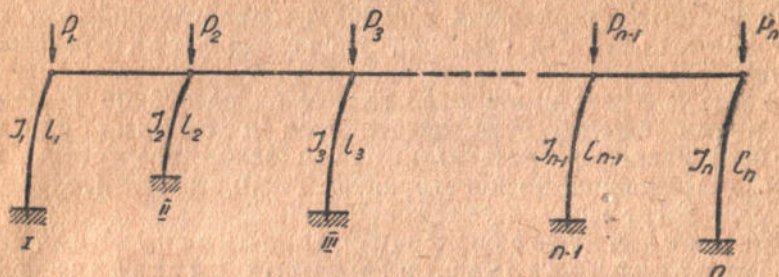
$P_k^{кр}$ — значение k -ой силы, при котором вся система переходит из устойчивого в неустойчивое состояние равновесия.

Рассмотрим систему, состоящую из n колонн постоянного поперечного сечения, но с различными моментами инерции J_m и с различными дли-

нами l_m , загруженную сосредоточенными силами P_m , приложенными к их верхушкам.

В случае шарнирного соединения колонн с связывающим их в одну систему жестким ригелем (фиг. 26), уравнение, соответствующее критическому состоянию системы, запишется в виде:

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{v_m} = 0, \quad (329)$$



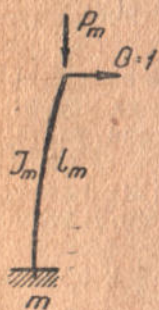
Фиг. 26

где v_m — прогиб верхушки любой m -ой колонны (фиг. 27) равный:

$$v_m = \frac{l_m}{P_m} (\operatorname{tg} \frac{U_m}{l_m} - 1), \quad (340)$$

$$U_m = \sqrt{\frac{P_m l_m^3}{EJ_m}}. \quad (341)$$

Подставляя выражение для v_m (340) в уравнение (329), мы получим:



Фиг. 27

$$\sum_{m=1}^n \frac{P_m}{l_m} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{U_m}{l_m} - 1} = 0. \quad (342)$$

Если все силы, действующие на конструкцию, растут пропорционально их заданным значениям, то мы можем, принимая какую-либо k -ую колонну за основную, выразить все приложенные к системе силы P_m через P_k в виде (337):

$$\chi = \sqrt{\frac{P_m}{P_k}}. \quad (343)$$

Вводя также обозначения:

$$\zeta_m = \frac{l_m}{l_k} \quad (344)$$

$$k = \sqrt{\frac{J_m}{J_k}}, \quad (345)$$

мы можем выразить все U_m через U_k :

$$\frac{U_m}{U_k} = \sqrt{\frac{P_m^2 \cdot EJ_k}{EJ_m \cdot P_k}} = \frac{\lambda_m}{k_m} \zeta_m \quad (346)$$

или

$$U_m = \frac{\lambda_m}{k_m} \zeta_m U_k. \quad (347)$$

Тогда уравнение (342) мы сможем записать в таком виде:

$$\sum_{m=1}^n \frac{\lambda_m^2}{\zeta_m} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\lambda_m}{k_m} \zeta_m U_k} = 0. \quad (348)$$

$$\frac{\lambda_m}{k_m} \zeta_m U_m$$

Определив значения величин λ_m , ζ_m и k_m для заданной системы и составив уравнение вида (348), мы можем решить его относительно U_k , после чего, на основании уравнения (347), найдем и все U_m , а, следовательно, из равенства (341) и значения всех сил P_m , при которых рассматриваемая нами система переходит из устойчивого в неустойчивое состояние равновесия:

$$P_m^{\text{кр}} = U_m^2 \frac{EJ_m}{l_m^2}. \quad (349)$$

При этом коэффициент устойчивости для каждой колонны будет выражаться в виде:

$$K_m = U_m^2. \quad (350)$$

и, следовательно, коэффициент длины

$$\mu_m = \frac{\pi}{U_m}. \quad (351)$$

Пример. Система состоит из трех колонн постоянного сечения с различными моментами инерции и различными длинами и загружена силами P_m , как показано на фиг. 28.

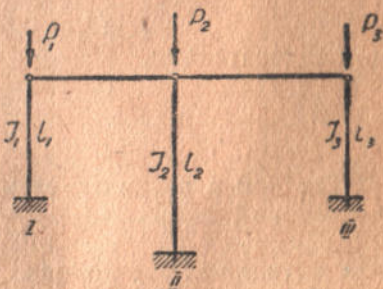
Пусть для заданной системы имеют место следующие соотношения длин, моментов инерции и сил:

$$\zeta_1 = \frac{l_1}{l_2} = 0,7; \quad \zeta_2 = \frac{l_2}{l_2} = 1; \quad \zeta_3 = \frac{l_3}{l_2} = 0,7;$$

$$k_1^2 = \frac{J_1}{J_2} = 0,6; \quad k_2^2 = \frac{J_2}{J_2} = 1; \quad k_3^2 = \frac{J_3}{J_2} = 1;$$

$$\chi_1^2 = \frac{P_1}{P_2} = 0,4; \quad \chi_2^2 = \frac{P_2}{P_2} = 1; \quad \chi_3^2 = \frac{P_3}{P_2} = 0,6;$$

за основную колонну принята вторая.



Фиг. 28

Уравнение (348) при этих данных будет иметь следующий вид:

$$0,7 \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{0,6325}{0,7746} 0,7U_2 - 1} + \frac{1}{\operatorname{tg} U_2 - 1} + 0,6 \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{0,7746}{1} 0,7U_2 - 1} = 0$$

или

$$\frac{0,57148}{\operatorname{tg} 0,57155U_2 - 1} + \frac{1}{\operatorname{tg} U_2 - 1} + \frac{0,85714}{\operatorname{tg} 0,53222U_2 - 1} = 0.$$

Решая его относительно U_2 , будем иметь:

$$U_2 = 2,41,$$

и затем на основании формулы (347):

$$U_1 = 0,57155 \cdot 2,41 = 1,377$$

и

$$U_3 = 0,53222 \cdot 2,41 = 1,283,$$

и, следовательно,

$$\mu_1 = 2,28,$$

$$\mu_2 = 1,30,$$

$$\mu_3 = 2,45.$$

Так как в рассматриваемом нами случае коэффициент длины для второй колонны

$$\mu_2 < 2,$$

для остальных же колонн

$$\mu > 2,$$

то это показывает, что причиной неустойчивого состояния всей системы является вторая колонна, являющаяся наиболее слабой в смысле устойчивости.

В общем случае наиболее слабая колонна в системе может быть определена из условия:

$$\mu_2 = \min \mu_m \quad (352)$$

или, следовательно, на основании формулы (351):

$$U_r = \max U_m. \quad (353)$$

т. е. на основании выражения (347) для нее должен иметь наибольшее значение коэффициент:

$$\frac{\lambda_r \tau_r}{k_r} \quad (354)$$

Если при проектировании конструкции исходить из условия полного использования всех колонн ее составляющих в смысле устойчивости, то все коэффициенты длины μ_m , а, следовательно,

и все U_m должны быть равны между собою, что приводит к равенству:

$$\frac{\lambda_m}{k_m} \zeta_m U_k = U_k \quad (355)$$

и, следовательно,

$$\frac{\lambda_m}{k_m} \zeta_m = 1 \quad (356)$$

или

$$k_m = \lambda_m \zeta_m, \quad (367)$$

т. е.

$$\sqrt{\frac{J_m}{J_k}} = \sqrt{\frac{P_m}{P_k} \cdot \frac{l_m}{l_k}}, \quad (358)$$

откуда

$$J_m = J_k \frac{P_m l_m^2}{P_k l_k^2}. \quad (359)$$

При этих условиях (357) или (359) мы будем иметь:

$$U_1 = U_2 = \dots = U. \quad (360)$$

Следовательно,

$$\sum_{m=1}^n \frac{\lambda_m^2}{\zeta_m} \frac{1}{\operatorname{tg} U - 1} = 0 \quad (361)$$

или, так как

$$U = \operatorname{const}, \quad (362)$$

то

$$\frac{1}{\operatorname{tg} U - 1} \sum_{m=1}^n \frac{\lambda_m^2}{\zeta_m} = 0. \quad (363)$$

Отсюда

$$\frac{1}{\operatorname{tg} U - 1} = 0, \quad (364)$$

$$\operatorname{tg} U - 1 = \infty, \quad (365)$$

$$\operatorname{tg} U = \infty, \quad (366)$$

откуда наименьшее значение для U :

$$U = \frac{\pi}{2} \quad (367)$$

и, следовательно,

$$\mu = 2, \quad (368)$$

т. е. все колонны будут работать как отдельно стоящие, не связанные между собой.

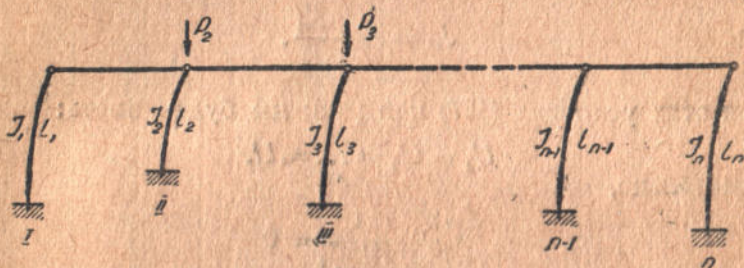
Если в рассматриваемой нами системе, состоящей из n колонн, только часть ω будет загру-

жена силами P , а остальные $n-w$ будут незагруженными (фиг. 29), то для последних в уравнении (348) значения величин χ будут равны нулю:

$$\chi = 0 \quad (369)$$

и, следовательно, соответствующие им члены суммы будут равны:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\chi_m^2}{\zeta_m} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\chi_m}{k_m} \zeta_m U_k} - 1}{\frac{\chi_m}{k_m} \zeta_m U_k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\chi^3}{k} U}{\operatorname{tg} \frac{\chi}{k} \zeta U - \frac{\chi}{k} \zeta U} = \frac{3k_m^2}{\zeta_m^3 U_k^2} \quad (370)$$



Фиг. 29

Тогда уравнение (348) преобразуется следующим образом:

$$\sum_{m=1}^w \frac{\chi_m^2}{\zeta_m} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\chi_m}{k_m} \zeta_m U_k} - 1 + \frac{3}{U_k^2} \sum_{m=w+1}^n \frac{k_m^2}{\zeta_m^3} = 0, \quad (371)$$

где первая сумма относится к загруженным и вторая к незагруженным колоннам.

В частном случае, когда высоты и моменты инерции всех колонн будут равны и загружена будет лишь одна колонна (фиг. 30), мы будем иметь:

$$\chi_m = 1, \quad k_m = 1, \quad \zeta_m = 1 \quad (372-374)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\operatorname{tg} U - 1} + \frac{3(n-1)}{U^2} = 0 \quad (375)$$

или

$$\operatorname{tg} U = U \left[1 - \frac{1}{3(n-1)} U^2 \right]^* \quad (376)$$

* Этот результат был получен нами ранее, см. В. П. Манжаловский. Пятый случай в формулах Эйлера для критической силы, Научно-технический бюллетень СНР № 1, изд. ХИСИ, 1935 г.

Если система будет состоять всего лишь из двух колонн (фиг. 18), то мы получим:

$$\operatorname{tg} U = U \left(1 - \frac{U^2}{3}\right), \quad (216)$$

откуда:

$$U = 2,204 \quad (219)$$

и, следовательно,

$$P_{кр} = U^2 \frac{EJ}{F} = 4,857 \frac{EJ}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EJ}{2l^2}; \quad (221)$$

этот результат получен нами ранее в § 9.



Фиг. 30

Если бы мы имели лишь одну колонну, то мы получили бы

$$\frac{1}{\operatorname{tg} U - 1} = 0, \quad (364)$$

$$\operatorname{tg} U = \infty, \quad (365)$$

$$U = \frac{\pi}{2} \quad (367)$$

и

$$\mu = 2 \quad (368)$$

соответственно первому случаю Эйлера.

Рассмотрим теперь иной случай действия сил на систему (фиг. 26), когда растет лишь одна какая-либо сила P_k , все остальные остаются неизменными.

Тогда уравнение (342) мы можем записать в таком виде:

$$\frac{P_k}{l_k} \frac{1}{\operatorname{tg} U_k - 1} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{P_m}{l_m} \frac{1}{\operatorname{tg} U_m - 1} = 0 \quad (377)$$

или, так как

$$P_k^{кр} = U_k^2 \frac{EJ_k}{l_k^2}, \quad (378)$$

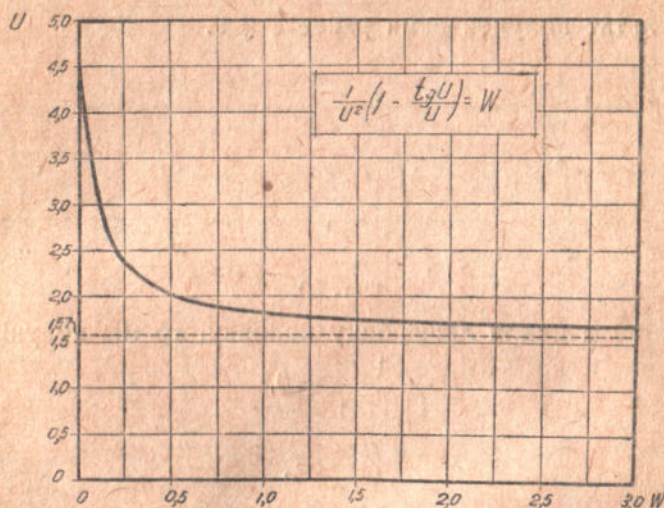
то, подставляя, получим

$$\frac{1}{U_k^2} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} U_k}{U_k}\right) = \frac{EJ_k}{\sum_{m=1}^{n-1} \frac{P_m}{l_m} \frac{1}{\operatorname{tg} U_m - 1}}, \quad (379)$$

$$U_m = \sqrt{\frac{P_m l_m^2}{EJ_m}} \quad (341)$$

Вычислив правую часть уравнения (379) для заданной системы и решая его относительно U_k , мы затем сможем найти

$$P_k^{кр} = U_k^2 \frac{EJ_k}{l_k^2}, \quad (380)$$



Фиг. 31

то значение критической силы $P_k^{кр}$, при котором система переходит из устойчивого в неустойчивое состояние равновесия при указанных условиях загрузки.

Уравнение (379) имеет вид:

$$\frac{1}{U_k^2} \left(1 - \frac{\text{tg} U_k}{U_k} \right) = W, \quad (381)$$

где

$$W = \frac{EJ_k}{l_k^3 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{P_m}{l_m} \frac{1}{\text{tg} U_m}} \quad (382)$$

и

$$U_m = \sqrt{\frac{P_m l_m^2}{EJ_m}} \quad (341)$$

Для удобства определения корня уравнения (381) составлен график (фиг. 31), из которого можно непосредственно определить U_k по вычисленному значению правой части W .

Если в числе колонн будут незагруженные ($\pi - \omega$), то аналогично уравнению (371) мы можем записать:

$$\frac{P_k}{l_k} \frac{1}{\operatorname{tg} U_k - 1} + \sum_{m=1}^{\omega-1} \frac{P_m}{l_m} \frac{1}{\operatorname{tg} U_m - 1} + 3 \sum_{m=\omega+1}^n \frac{EJ_m}{l_m^3} = 0, \quad (383)$$

откуда имеем:

$$\frac{1}{U_k^2} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} U_k}{U_k} \right) = \frac{EJ_k}{l_k^3 \left(\sum_{m=1}^{\omega-1} \frac{P_m}{l_m} \frac{1}{\operatorname{tg} U_m - 1} + 3 \sum_{m=\omega+1}^n \frac{EJ_m}{l_m^3} \right)} \quad (384)$$

или

$$\frac{1}{U_k^2} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} U_k}{U_k} \right) = \frac{EJ_k}{l_k^2 \sum_{m=1}^{\omega-1} \frac{P_m}{\zeta_m} \frac{1}{\operatorname{tg} U_m - 1} + 3 \sum_{m=\omega+1}^n \frac{EJ_m}{\zeta_m^3}}, \quad (385)$$

где

$$\zeta_m = \frac{l_m}{l_k}. \quad (344)$$

В частном случае, если бы высоты и моменты инерции всех колонн были бы равны и загружена была бы лишь одна колонна, то мы пришли бы к ранее полученному нами уравнению:

$$\frac{1}{U_k^2} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} U_k}{U_k} \right) = \frac{1}{3(n-1)} \quad (386)$$

или

$$\operatorname{tg} U = U \left[1 - \frac{1}{3(n-1)} U^2 \right]. \quad (376)$$



Фиг. 32

При других видах загрузки мы могли бы так же, как и в рассмотренном нами случае построить соответствующие уравнения, исходя из основного (329):

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{v_m} = 0, \quad (329)$$

получив выражения для прогиба каждой колонны от действующей на нее вертикальной нагрузки и горизонтальной силы:

$$Q = 1. \quad (326)$$

Например, в случае равномерно-распределенной нагрузки, действующей вдоль оси колонны постоянного сечения (фиг. 32), мы получим, используя решение, данное акад. Б. Г. Галеркиным при исследовании им

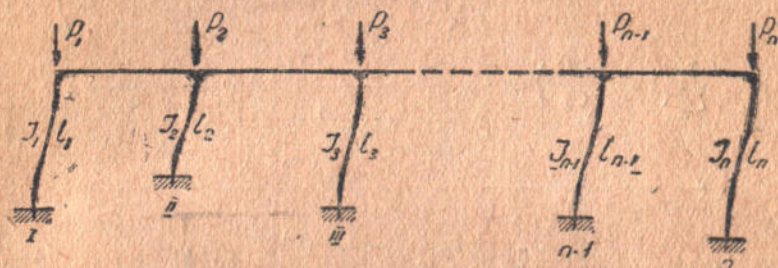
условий устойчивости колонны при указанных условиях загрузки¹, величину прогиба равной:

$$v = \left[\sum_1 - \frac{1 + \sum_2}{1 + \sum_3} \sum_4 \right] \frac{l^3}{EJ}, \quad (387)$$

где

$$\sum_1 = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} a^{2(m-1)}}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \dots (3m-2) (3m-1) 3m}, \quad (388)$$

$$\sum_2 = \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} a^{2(m-1)}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3m-4) (3m-3) (3m-2)}, \quad (389)$$



Фиг. 33

$$\sum_3 = \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} a^{2(m-1)}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3m-4) (3m-3)}, \quad (390)$$

$$\sum_4 = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} a^{2(m-1)}}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \dots (3m-2) (3m-1)}, \quad (391)$$

и

$$a = \sqrt{\frac{Pl^3}{EJ}}. \quad (392)$$

В случае жесткого соединения колонн с связывающим их в одну систему жестким ригелем (фиг. 33), уравнение, соответствующее критическому состоянию системы, запишется в виде:

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{\xi_m} = 0, \quad (336)$$

где ξ_m — прогиб верхушки любой m -ой колонны (фиг. 34), при указанных условиях закрепления равный:

$$\xi_m = \frac{l_m}{P_m} \left(\frac{\text{tg } V_m}{V_m} - 1 \right), \quad (393)$$

¹ Акад. Б. Г. Галеркин. Теория продольного изгиба, «Известия С.-Петербургского Политехнического Института», т. XII, отдел техники, естественная и математики, вып. 2, 1909.

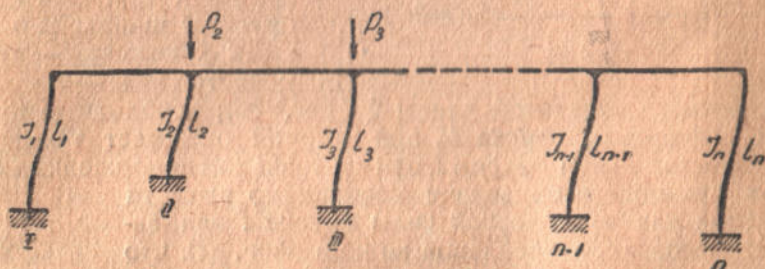
где

$$V_m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P_m \gamma_m^2}{E J_m}} \quad (394)$$

Выражение для ξ_m совершенно подобно выражению для γ_m , поэтому и формулы для рассматриваемого случая будут подобны ранее нами выведенным.

Например, в случае пропорционального роста действующих сил, мы будем иметь:

$$\sum \frac{\gamma_m^2}{\zeta_m} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{k_m} \zeta_m V_k} = 0 \quad (395)$$



Фиг. 35

и затем

$$P_m^{кр} = 4V_m^2 \frac{E J_m}{l_m^2}, \quad (396)$$

коэффициент устойчивости

$$K_m = 4V_m^2 \quad (397)$$

и коэффициент длины

$$\mu_m = \frac{\pi}{2V_m} \quad (398)$$

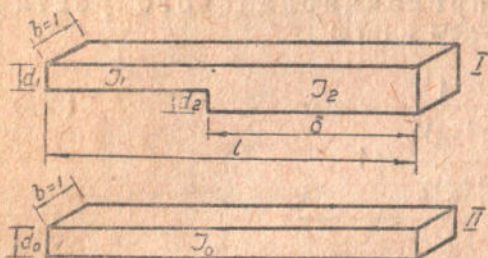
Также для случая, если имеются незагруженные колонны ($n-w$), мы бы имели (фиг. 35):

$$\sum_{m=1}^w \frac{\gamma_m^2}{\zeta_m} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{k_m} \zeta_m V_k} + \frac{3}{V^2} \sum_{m=w+1}^n \frac{k_m^2}{r_m^3} = 0 \quad (399)$$

III. Приведение стержня переменного сечения к стержню постоянного сечения равной устойчивости при той же длине

§ 13. Случай несимметричного стержня переменного сечения

При проработке в секторе конструкций Украинского научно-исследовательского института сооружений проф. Б. Г. Шварцбургом темы „Изыскание рациональных форм конструкций электросварных подкрановых балок со сплошной стенкой“ возникла необходимость в решении задачи, которую можно формулировать так: даны два бруска с шарнирно-опертыми концами: *I* — переменного и *II* — постоянного



Фиг. 36

сечения, одинаковой длины *l* (фиг. 36); необходимо определить толщину *d*₀ бруска *II*, при которой он имеет такую же устойчивость, как и брусок *I*, при центральном приложении сил¹.

При решении этой задачи необходимо вывести выражение для критической силы бруска *I* при заданных условиях закрепления концов (фиг. 37), что приводит к решению системы дифференциальных уравнений:

$$EJ_1 y_1'' + Py_1 = 0 \quad (400)$$

$$EJ_2 y_2'' + Py_2 = 0 \quad (401)$$

при следующих условиях:

$$x=0, \quad y_1=0; \quad (402)$$

$$x=l, \quad y_2=0; \quad (403)$$

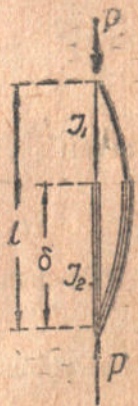
$$x=l-\delta, \quad y_1=y_2 \text{ и } y_1'=y_2'. \quad (404-405)$$

Решения уравнений (400) и (401) имеют вид:

$$y_1 = C_1 \cos \eta x + C_2 \sin \eta x, \quad (406)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{P}{EJ_1}}, \quad (407)$$

$$y_2 = C_3 \cos \rho x + C_4 \sin \rho x, \quad (408)$$



Фиг. 37

¹ Результаты полученных нами выводов были помещены в книге проф. Б. Г. Шварцбурга „Подкрановые балки со сплошной стенкой“, ГНТИ Украины, 1934 г., стр. 43–46.

$$\rho = \sqrt{\frac{P}{EJ_2}}. \quad (40)$$

На основании условий (402—405) имеем:

$$C_1 = 0; \quad (410)$$

$$C_3 \cdot \cos \rho l + C_4 \cdot \sin \rho l = 0; \quad (411)$$

$$C_2 \sin \eta (l - \delta) = C_3 \cos \rho (l - \delta) + C_4 \sin \rho (l - \delta); \quad (412)$$

$$C_2 \eta \cos \eta (l - \delta) = -C_3 \rho \sin \rho (l - \delta) + C_4 \rho \cos \rho (l - \delta). \quad (413)$$

На основании уравнения (411) имеем:

$$\frac{C_3}{C_4} = -\operatorname{tg} \rho l \quad (414)$$

и из уравнений (412) и (413):

$$k \cdot \operatorname{tg} \eta (l - \delta) = \frac{C_3 + \operatorname{tg} \rho (l - \delta)}{-\frac{C_3}{C_4} \operatorname{tg} \rho (l - \delta) + 1}, \quad (415)$$

где

$$k = \frac{\rho}{\eta} = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}}. \quad (416)$$

Тогда, принимая во внимание уравнение (414), получаем:

$$k \cdot \operatorname{tg} \eta (l - \delta) = -\operatorname{tg} \rho \delta \quad (417)$$

или

$$\operatorname{tg} \rho \delta + k \cdot \operatorname{tg} \eta (l - \delta) = 0. \quad (418)$$

Обозначая

$$\rho \delta = U, \quad (419)$$

$$\eta (l - \delta) = \frac{\eta (l - \delta)}{\rho \delta} U = \frac{1}{k} \cdot \frac{l - \delta}{\delta} U = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - \delta/l}{\delta/l} U;$$

имеем:

$$\operatorname{tg} U + k \operatorname{tg} \frac{1 - \delta/l}{\delta/l} U = 0. \quad (421)$$

На основании же уравнения (420) имеем:

$$\sqrt{\frac{P}{EJ_2}} \cdot \delta = U \quad (422)$$

и, следовательно,

$$P_{кр} = \left(\frac{U}{\delta}\right)^2 \cdot EJ_2 = \left(\frac{U}{\delta/l}\right)^2 \cdot \frac{EJ_2}{l^2}. \quad (423)$$

Обозначая

$$\alpha = \frac{\delta}{l}, \quad (424)$$

получаем:

$$\operatorname{tg} U + k \operatorname{tg} \frac{1 - \alpha}{\alpha k} U = 0 \quad (425)$$

$$P_{кр} = \left(\frac{U}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{EJ_2}{l^2}. \quad (426)$$

Так как для бруска II имеем:

$$P_{кр} = \pi^2 \frac{EJ_0}{l^2}, \quad (427)$$

то при условии равной устойчивости обоих брусков получаем:

$$\left(\frac{U}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{EJ_2}{l^2} = \pi^2 \frac{EJ_0}{l^2}, \quad (428)$$

откуда имеем:

$$U = \alpha \pi \sqrt{\frac{J_0}{J_2}}. \quad (429)$$

Подставляя полученное значение U в уравнение (425) имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha k_2 \pi + k \cdot \operatorname{tg} (1 - \alpha) k_1 \pi = 0, \quad (430)$$

где

$$k_1 = \sqrt{\frac{J_0}{J_1}} \text{ и } k_2 = \sqrt{\frac{J_0}{J_2}}, \quad (431, 432)$$

или же

$$\operatorname{tg} \alpha k k_1 \pi + k \cdot \operatorname{tg} (1 - \alpha) k_1 \pi = 0. \quad (433)$$

Вычислив на основании выведенного уравнения (433) значение k_1 при заданных α и k , получаем:

$$J_0 = k_1^2 J_1 \quad (434)$$

и, следовательно,

$$d_0 = d_1 \sqrt[3]{k_1^2}. \quad (435)$$

Пример 1. При $\alpha = 0,5$ и $d_1 = d_2$ имеем:

$$k = 0,3537$$

$$\operatorname{tg} 0,5554 k_1 + 0,3537 \cdot \operatorname{tg} 1,5708 k_1 = 0,$$

$$k_1 = 1,255$$

и, следовательно,

$$d_0 = 1,163 d_1.$$

Пример 2. Принимая $\alpha = 0,5$ и $J_2 = 2J_1$, имеем:

$$k = 0,70711,$$

$$\operatorname{tg} 1,11228 k_1 + 0,70711 \operatorname{tg} 1,5708 = 0,$$

$$k_1 = 1,14$$

и, следовательно,

$$d_0 = 1,093 d_1.$$

§ 14. Случай симметричного стержня переменного сечения

Рассмотрим ту же задачу, но для стержня вида, изображенного на фиг. 38.

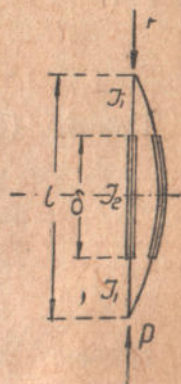
При решении этой задачи мы можем воспользоваться выражением для критической силы для стойки переменного сечения (фиг. 38) при шарнирно-опертых концах:

$$P_{кр} = \left(\frac{2kU}{1-\delta/l} \right)^2 \cdot \frac{EJ_2}{l^2}, \quad (38)$$

где U — корень уравнения:

$$\operatorname{tg} U \cdot \operatorname{tg} \frac{k\delta U}{l-\delta} = \frac{1}{k} \quad (37)$$

$$k = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}}, \quad (37')$$



Фиг. 38

или заменяя

$$\alpha = \frac{\delta}{l}, \quad (296)$$

$$P_{кр} = \left(\frac{2kU}{1-\alpha} \right)^2 \frac{EJ_2}{l^2}, \quad (436)$$

$$\operatorname{tg} U \cdot \operatorname{tg} \frac{k\alpha U}{1-\alpha} = \frac{1}{k}. \quad (437)$$

При $J_0 = \text{const}$ имеем:

$$P_{кр} = \pi^2 \frac{EJ_0}{l^2}. \quad (299)$$

Тогда при условии равной устойчивости получаем:

$$\left(\frac{2kU}{1-\alpha} \right)^2 \cdot \frac{EJ_2}{l^2} = \pi^2 \frac{EJ_0}{l^2}, \quad (438)$$

откуда

$$U = \frac{\pi(1-\alpha)}{2k} \cdot \sqrt{\frac{J_0}{J_2}} = \frac{\pi(1-\alpha)}{2} \cdot \sqrt{\frac{J_0}{J_1}} = \frac{\pi(1-\alpha)}{2} \cdot k_1, \quad (439)$$

где

$$k_1 = \sqrt{\frac{J_0}{J_1}}. \quad (431)$$

Подставляя полученное значение корня U (439) в уравнение (437), имеем:

$$\operatorname{tg} k_1(1-\alpha) \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg} k k_1 \alpha \frac{\pi}{2} = \frac{1}{k}. \quad (440)$$

Вычислив на основании выведенного уравнения значение k_1 при заданных α и k , получаем:

$$J_0 = k_1^2 J_1, \quad (434)$$

или при прямоугольном сечении шириною $b = 1$ имеем:

$$\underline{d_0 = d_1 \sqrt{k_1^2}}. \quad (441)$$

Пример. При $\alpha = 0,6$ и $\frac{J_1}{J_2} = 0,10$ имеем:

$$k = \sqrt{0,10} = 0,31623$$

$$\text{tg } 0,628319 k_1 \cdot \text{tg } 0,29804 k_1 = 3,1623,$$

и, следовательно,

$$k_1 = 2,135,$$

$$d_0 = 1,655 \cdot d_1$$

УСТОЙЧИВОСТЬ РАМ ПРОМЫШЛЕННЫХ ЗДАНИЙ СО СТУПЕНЧАТООБРАЗНО-МЕНЯЮЩИМСЯ СЕЧЕНИЕМ КОЛОНН

I

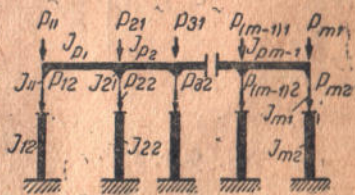
Задача об устойчивости рассматриваемых рам может быть поставлена так: имеется m стоек рамы, нагруженных силами (фиг. 1):

$$P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22} \dots P_{(m-1)1}, P_{(m-1)2}, P_{m1}, P_{m2}.$$

Над k -ой стойкой силы P_{k1} и P_{k2} достигли критического значения. Это значит, что прямолинейная форма равновесия уже неустойчива.

Если силы над k -ой стойкой (P_{k1} и P_{k2}) растут и достигают критического значения, то возможны такие случаи, что одновременно растут и силы, приложенные к другим стойкам. Можно каким угодно образом выразить закон этого роста. В зависимости от принятого закона мы получим то или иное значение критической силы¹. Можно, например, предположить, что в то время, как силы над k -ой стойкой растут и достигают критического состояния, силы в остальных стойках постоянны.

Наиболее естественным для большинства случаев будет предположение, что соотношение между всеми силами во всякий момент действия нагрузки остается постоянным. Для наиболее же ответственных сооружений, в том числе для колонн промышленных зданий, следует считаться с возможностью такого роста нагрузки, когда критического состояния достигают одновременно все стойки². В этом случае (например, в цехах про-



Фиг. 1

¹ По этому вопросу см. Фр. Блейх. Теория и расчет мостов, стр. 195, Гострансиздат, 1931. См. также статью инж. Манжаловского в настоящем сборнике.

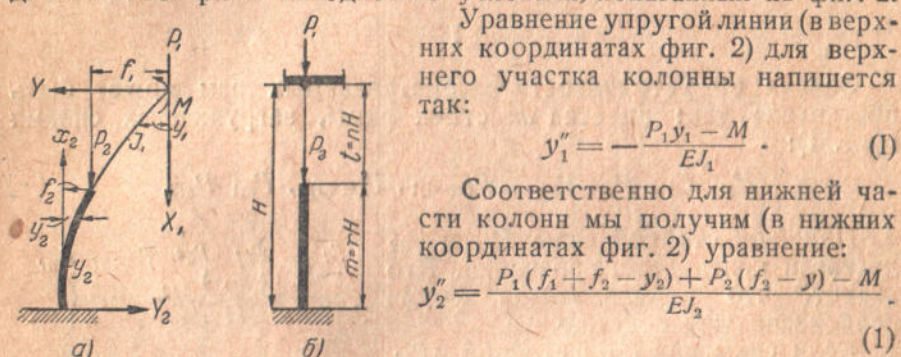
² Мы надеемся еще возвратиться к другим случаям устойчивости рам и, в частности, к вопросу о влиянии эксцентриситетов на величину разрушающей нагрузки в рамах.

мышленных зданий) в рамках, в которых ригель шарнирно связан с колоннами, все стойки работают самостоятельно, как свободностоящие. При жестком соединении ригеля с колоннами, на величину критической силы оказывают влияние лишь моменты защемления колонн в ригелях. Отпорность же колонн равна нулю.

В настоящей статье мы рассматриваем лишь те рамы, в которых одновременно теряют устойчивость все стойки.

II

При одновременной потере устойчивости всех колонн, каждая из стоек рамы находится в условиях, показанных на фиг. 2.



Фиг. 2

Уравнение упругой линии (в верхних координатах фиг. 2) для верхнего участка колонны напишется так:

$$y_1'' = -\frac{P_1 y_1 - M}{EJ_1} \quad (I)$$

Соответственно для нижней части колонн мы получим (в нижних координатах фиг. 2) уравнение:

$$y_2'' = \frac{P_1(f_1 + f_2 - y_2) + P_2(f_2 - y_2) - M}{EJ_2} \quad (II)$$

Вводя обозначение:

$$P_2 = P_1 \gamma \quad (2)$$

и подставляя (2) в (II), получим:

$$y_2'' = \frac{P_1 f_1 + P_1 f_2 (1 + \gamma) - P_1 y_2 (1 + \gamma) - M}{EJ_2} \quad (III)$$

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \sqrt{\frac{P_1}{EJ_1}}, \\ k_2 &= \sqrt{\frac{(1 + \gamma) \cdot P_1}{EJ_2}}, \\ k_3 &= \sqrt{\frac{P_1}{EJ_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Подставив выражения (3) в уравнения (I) и (III), мы получим следующие дифференциальные уравнения:

$$y_1'' + k_1^2 y_1 = \frac{M}{P_1} k_1^2; \quad (Ia)$$

$$y_2'' + k_2^2 y_2 = -\frac{M}{P_1} k_3^2 + k_3^2 f_1 + k_2^2 f_2. \quad (IIa)$$

Общие интегралы дифференциальных уравнений (Ia) и (IIa) равны:

$$y_1 = C_1 \cos k_1 x_1 + C_2 \sin k_1 x_1 + \frac{M}{P_1}; \quad (Ib)$$

$$y_2 = C_3 \cos k_2 x_2 + C_4 \sin k_2 x_2 + f_2 + \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 f_1 - \frac{M}{P_1} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2. \quad (IIb)$$

Уравнения упругих линий (Ib) и (IIb) должны удовлетворять следующим пограничным условиям:

1) $y_1(0) = 0$.

Откуда (из Ib) получаем:

$$C_1 = -\frac{M}{P_1}, \quad (4)$$

2) $y_1'(0) = M\varphi$,

где φ — угол поворота узла, от момента $M = 1$,

$$y_1'(0) = k_1 C_2; \quad C_2 = \frac{M\varphi}{k_1}. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (Ib), получим:

$$y_1 = -\frac{M}{P_1} \cos k_1 x_1 + \frac{M\varphi}{k_1} \sin k_1 x_1 + \frac{M}{P_1}; \quad (6a)$$

$$y_1' = k_1 \frac{M}{P_1} \sin k_1 x_1 + M\varphi \cos k_1 x_1. \quad (6b)$$

3) $y_1(t) = f_1 = -\frac{M}{P_1} \cos k_1 t + \frac{M\varphi}{k_1} \sin k_1 t + \frac{M}{P_1}. \quad (7)$

Подставляя (7) в (II) и учитывая, что $y_2(m) = f_2$, а также, что в силу $y_2'(0) = 0$, $C_4 = 0$, получим:

$$4) \quad y_2(m) = f_2 = C_3 \cos k_2 m + f_2 + \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 \left[\frac{M\varphi}{k_1} \sin k_1 t - \frac{M}{P_1} \cos k_1 t \right],$$

откуда:

$$C_3 = -\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 \left[\frac{\frac{M\varphi}{k_1} \sin k_1 t - \frac{M}{P_1} \cos k_1 t}{\cos k_2 m} \right]. \quad (8)$$

5) $y_1'(t) = y_2'(m)$.

Учитывая уравнения (6), (8) и что:

$$y_2' = -k_2 C_3 \sin k_2 x_2, \quad (9)$$

получим:

$$M \left[\left(\frac{k_1}{P_1} \sin k_1 t + \varphi \cos k_1 t \right) - k_2 \operatorname{tg} k_2 m \frac{k_3^2}{k_2^2} \left(\frac{\varphi}{k_1} \sin k_1 t - \frac{\cos k_1 t}{P_1} \right) \right] = 0. \quad (10)$$

Решение: $M = 0$ соответствует случаю, когда ось колонны остается прямолинейной при любой нагрузке.

Следовательно, остается вторая возможность:

$$\frac{k_1}{P_1} \sin k_1 t + \varphi \cos k_1 t = k_2 \operatorname{tg} k_2 m \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 \left(\frac{\varphi}{k_1} \sin k_1 t - \frac{\cos k_1 t}{P_1} \right). \quad (11)$$

Из уравнений (3) получаем:

$$\left. \begin{aligned} k_2 &= k_1 \alpha, \\ \alpha &= \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}(1 + \gamma)}.$$

Введем обозначения:

$$t/H = n; \quad m/H = r. \quad (14)$$

Вставив (12) и (13) в уравнение (11), после небольших преобразований получим:

$$\varphi \left[\mu \operatorname{tg} k_1 \mu m \cdot \frac{\alpha^2}{\mu^2} \sin k_1 t - \cos k_1 t \right] = \frac{k_1}{P_1} \left[\sin k_1 t + \mu \operatorname{tg} k_1 \mu m \frac{\alpha^2}{\mu^2} \cos k_1 t \right]. \quad (15)$$

После подстановки (14) в (15) окончательно получим трансцендентное уравнение (III), из которого можно определить критическую силу:

$$\frac{\frac{\alpha^2}{\mu} \operatorname{tg} k_1 H \mu r \cdot \cos k_1 H n + \sin k_1 H n}{\frac{\alpha^2}{\mu} \operatorname{tg} k_1 H \mu r \cdot \sin k_1 H n - \cos k_1 H n} = \frac{\varphi P_1}{k_1} = \varphi k_1 E J. \quad (III)$$

После подстановки обозначений (а), уравнение (III) примет вид (IIIа):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha^2}{\mu} &= \psi = \frac{J_1}{J_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{J_1}{J_2} \left(1 + \frac{P_2}{P_1}\right)}} \\ \mu r &= \delta \\ k_1 H &= u \end{aligned} \right\} \quad (а)$$

$$\frac{\psi \operatorname{tg} u \delta + \operatorname{tg} u n}{\psi \operatorname{tg} u \delta \cdot \operatorname{tg} u n - 1} = \varphi k_1 E J_1. \quad (IIIа)$$

Коэффициент длины μ_{H2} определится из уравнения:

$$P_1 + P_2 = \frac{\pi^2 E J_2}{(\mu_{H2} H)^2} = P_1 (1 + \gamma) = k_1^2 E J_1 (1 + \gamma),$$

откуда:

$$\mu_{H2} = \frac{\pi}{u} \sqrt{\frac{J_2}{J_1 (1 + \gamma)}}. \quad (16)$$

В практических расчетах уравнение (III) может быть, как это будет показано ниже, использовано для определения критических сил в многопролетных рамах с переменным моментом инерции, причем (как это будет показано ниже) не требуется решать

совместно дифференциальные уравнения изогнутой оси, составленные для каждой колонны.

Рассмотрим несколько частных случаев использования уравнения III.

А. Колонны по всей высоте имеют постоянное сечение и $P_2 = 0$ (фиг. 3).

В этом случае:

$$m = 0 \quad (r = 0);$$

$$J_1 = J_2; \quad \alpha = 1;$$

$$\gamma = 0; \quad \mu = 1;$$

$$t = H; \quad n = 1.$$

Уравнение III примет следующий вид:

$$\boxed{-\operatorname{tg} u = \varphi k_1 E J_1} \quad (\text{IV})$$

Для крайних колонн

$$\varphi = \frac{L_p}{6EJ_p}. \quad (17)$$

Для средних колонн

$$\varphi = \frac{L_p}{12EJ_p}. \quad (17a)$$

Подставляя (17) и (17a) в (IV), получим уравнения в следующей форме:

$$\boxed{\operatorname{tg} u = -\frac{k_1 L_p}{6} \frac{J_1}{J_p}} \quad (\text{IVa})$$

$$\boxed{\operatorname{tg} u = -\frac{k L_p}{12} \frac{J_1}{J_p}} \quad (\text{IVb})$$

Примеры применения уравнения (IVa).

а) $\frac{H}{L} = 1; \frac{J_1}{J_p} = 0.$

В этом случае наименьший корень уравнения (IVa), отличный от нуля, равен:

$$u = \pi.$$

Коэффициент длины $\mu_H = \frac{\pi}{u}$, т. е. в данном случае:

$$\mu_H = 1.$$

б) $\frac{H}{L} = 1; \frac{J_1}{J_p} = \infty; u = \frac{\pi}{2}; \mu_H = 2.$

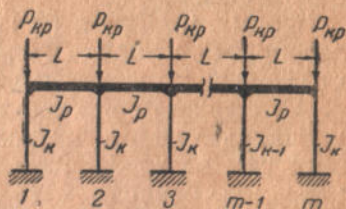
в) $\frac{H}{L} = 1; \frac{J_1}{J_p} = 1; u \cong 2,72; \mu_H \cong \frac{3,14}{2,72} \cong 1,152.$

г) $\frac{H}{L} = 1; \frac{J_1}{J_p} = 0,5; u \cong 2,895; \mu_H \cong \frac{3,14}{2,895} \cong 1,085.$

д) $\frac{H}{L} = 1; \frac{J_1}{J_p} = 2; u \cong 2,458; \mu_H \cong \frac{\pi}{2,458} = 1,28.$

Примеры применения уравнения (IVb).

$$\frac{H}{L} = 1; \frac{J_1}{J_p} = 2; u \cong 2,715; \mu_H = \frac{3,14}{2,715} = 1,16.$$



Фиг. 3

Из этого примера ясно, что средние стойки находятся в несколько более благоприятном положении, чем крайние, и лишь при предельных отношениях — $\frac{J_1}{J_p} = 0$ и $\frac{J_1}{J_p} = \infty$, критические силы крайних и средних колонн (при прочих равных условиях) одинаковы.

Формулы (IIIa) и (IV) можно легко распространить и на более общий случай рамы, показанной на фиг. 1, если допустить, что эпюра моментов пересекает ригели по середине их пролета.

Практически это вполне приемлемо и часто с успехом применялось в предложенных различными авторами методах расчета рам на горизонтальную нагрузку. На этом предположении, например, основан метод инж. Абданка¹. Необходимо отметить, что характер эпюры моментов на ригелях, при одновременной потере устойчивости всех стоек, как раз такой же, как и при загрузении рамы (сосредоточенными в узлах) горизонтальными силами.

В рамах с постоянным моментом инерции и с силами, приложенными только сверху, для крайних стоек, при этом целиком сохраняет силу формула (IVa).

Для средних стоек:

$$\varphi_k = \frac{1}{6E(i_{k-1} + i_k)}, \quad (18)$$

где i_{k-1} и i_k погонная жесткость ригелей, примыкающих к k -ой стойке.

Введем обозначения

$$\frac{J_{pk}}{J_{rk-1}} = \Theta; \quad \frac{L_k}{L_{k-1}} = \Phi, \quad (19)$$

где J_{rk-1} — момент инерции левого ригеля,

J_{pk} — правого,

L_k и L_{k-1} — пролеты ригелей.

Подставив (19) в (18), получим:

$$\varphi_k = \frac{L_{k-1}}{6EJ_{rk-1}} \frac{\Phi}{\Phi + \Theta}. \quad (20)$$

Подставив (20) в (IV), получим:

$$\boxed{-\operatorname{tg} u_k = \frac{kL_{k-1}}{6} \frac{J_{ck}}{J_{rk-1}} \frac{\Phi}{\Phi + \Theta}} \quad (IVc)$$

где J_{ck} — момент инерции k -ой стойки.

¹ Метод фиксации эпюры моментов широко использован кандидатом технических наук инж. Мурашевым в его статье „Расчет устойчивости рам“. „Проект и стандарт“, № 12, 1936. См. также работу доктора Puzien'a в журнале „Der Stahlbau“ Heft 26, 1936 г.

Минимальный корень этого уравнения $= \frac{\pi}{2}$ и $\mu_H = 2$.

Для практического определения коэффициента длины колонн переменного сечения, входящих в состав рам (фиг. 1), мы составляем график, который в свое время будет опубликован.

Остановимся еще на одном вопросе, который имеет чисто практическое значение и возникает при расчете колонн переменного сечения.

Мы привели в формуле (16) коэффициент длины μ_{H2} .

Этому коэффициенту соответствует „приведенный стержень“ высотой $\mu_{H2} \cdot H$, с моментом инерции и площадью сечения — J_2 и F_2 .

Можно колонну заменить приведенным стержнем с моментом инерции J_1 и площадью сечения F_1 .

Нетрудно убедиться, что в этом случае коэффициент длины равен:

$$\mu_{H1} = \frac{\pi}{u \sqrt{1 + \gamma}}.$$

Гибкости приведенных стержней соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\mu_{H1} H}{r_1} = \mu_{H1} H \sqrt{\frac{F_1}{J_1}} \\ \lambda_2 &= \frac{\mu_{H2} H}{r_2} = \mu_{H1} H \sqrt{\frac{F_2}{J_1}} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Критические напряжения соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1кр} &= \frac{P_{1кр}}{F_1} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_1^2} = \frac{\pi^2 E}{\mu_{H1}^2 H^2} \frac{J_1}{F_1} \\ \sigma_{2кр} &= \frac{P_{2кр}}{F_2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_2^2} = \frac{\pi^2 E}{\mu_{H1}^2 H^2} \frac{J_1}{F_2} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Таким образом, $\sigma_{1кр} \neq \sigma_{2кр}$, но $P_{1кр} = P_{2кр}$ и, следовательно, если пользоваться формулой Эйлера, то безразлично к какому моменту инерции „приводить“ нашу колонну. Определив из уравнения (22) J_1 , мы тем самым определяем и J_2 .

Практически, однако, поскольку формула Эйлера применима лишь в определенных пределах, пользуются коэффициентом уменьшения допускаемого напряжения при продольном изгибе.

Этот коэффициент в тех пределах, где формула Эйлера неприменима, носит эмпирический характер и поэтому практически безразлично к какому моменту инерции „приводить“ колонну.

Еще большие неясности возникают при расчете стержней,

работающих на осевую силу и изгиб. В этом случае, как известно, обычно пользуются формулой Навье:

$$\sigma = \frac{N}{F_{\varphi}} \pm \frac{M}{W}.$$

Общеизвестно, что эта формула неверна и носит чисто условный характер. При переменном сечении стоек неясно, каким φ пользоваться. Наиболее безопасно, конечно, во всех сечениях действительной колонны, пользоваться приведенной гибкостью λ_2 , но „условность“ формулы Навье при этом еще более увеличивается.

Поскольку поднятые вопросы выходят из рамок данной статьи, мы надеемся еще к ним возвратиться в специальной работе.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛИТ С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА¹

§ 1. Общая часть

В настоящей работе мы рассматриваем устойчивость тонких изотропичных плит с учетом их собственного веса при различных случаях закрепления сторон, применяя для этого метод акад. Б. Г. Галеркина в несколько видоизмененном виде. Насколько нам известно, задача в такой постановке еще не рассматривалась в литературе, а между тем вопрос учета при продольном изгибе плит, наряду с нагрузками, действующими на грани плиты, собственного веса, имеет свое значение.

Таковыми плитами в строительстве, где следует учитывать собственный вес, являются каменные стены и стены из других материалов с большим собственным весом и малым модулем упругости.

Дифференциальное уравнение упругой поверхности весомой плиты может быть получено, как частный случай, из уравнения (43), приведенного в нашей работе „Уравнения движения и равновесия анизотропной неоднородной тонкой плиты переменной толщины“, если в нем положить $Z'(x, y, t) = M' = L'_1 = S = 0$, а для T_1 и T_2 принять значения:

$$T_1 = -P_1\varphi(y), \quad T_2 = -[P_2 + q(b-y)],$$

где q — вес одной квадратной единицы площади плиты.

Уравнение (43) в этом случае примет вид:

$$\Delta\Delta w + \frac{P_1}{D}\varphi(y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial y} \{ [P_2 + q(b-y)] \frac{\partial w}{\partial y} \} = 0, \quad (1)$$

где $\varphi(y)$ — может быть константой равной единице, или иметь выражение $\varphi(y) = \left(1 - \frac{a \cdot y}{b}\right)$, что отвечает случаю распределения усилий по граням $x=0$ и $x=a$, показанному на фиг. 1.

Обозначим для сокращения письма левую часть уравнения (1) оператором $L(w)$, тогда уравнение (1) запишется так:

$$L(w) = 0. \quad (2)$$

¹ Указанная работа премирована ВНИТО строителей на Всесоюзном совещании имени XX годовщины Октябрьской революции на лучшую научно-исследовательскую работу.

Так как уравнение (1) является уравнением типа Эйлера—Лагранжа, для которого существует функционал¹, в чем можно убедиться, мы можем написать:

$$\iint L(w) \cdot \delta w \cdot dy dx = 0, \quad (3)$$

где $L(w)$ — левая часть уравнения Эйлера—Лагранжа, в данном случае уравнение (1),

δw — вариация минимизирующей функции.

Будем искать приближенное выражение для $w(x, y)$ в форме произведения двух функций, из которых одна является пока неизвестной

$$w_n(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k f_{kn}(y) X_n(x), \quad (4)$$

где

$$w_n(x, y) \simeq w(x, y),$$

A_k — суть произвольные коэффициенты, определяемые в дальнейшем,

$f_{k,n}(y)$ — известные функции, подбираемые так, чтобы функция

$w_n(x, y)$ — удовлетворяла граничным условиям на сторонах $y=0$ и $y=b$,

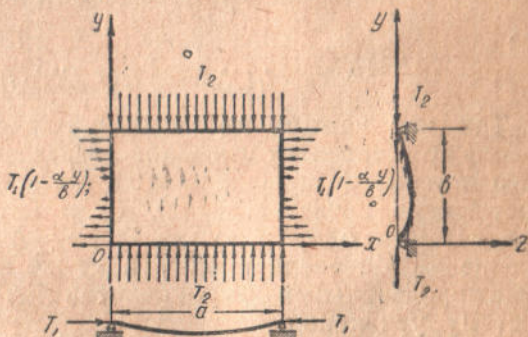
$X_n(x)$ — неизвестная функция, определяемая в дальнейшем. Вставляя значение $w_n(x, y)$ в уравнение (3), получим:

$$\iint \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k L(f_{kn} X_n) \right] \delta \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k f_{kn} X_n \right] dy dx = 0. \quad (5)$$

Но так как функции $f_{kn}(y)$ являются вполне определенными, то вариацию $\delta \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k f_{kn} X_n \right]$ можно записать в таком виде:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [f_{kn} \delta(A_k X_n)].$$

¹ В общем виде этого предположения можно не вводить, если воспользоваться известным методом моментов, из которого, как частный случай, вытекает вышеприведенное уравнение (3). Этим замечанием мы хотим сказать, что излагаемый нами прием применим не только к уравнениям типа Эйлера—Лагранжа, но к более широкому классу дифференциальных уравнений.



Фиг. 1

Уравнение (5) в этом случае примет вид:

$$\int \int \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k L(f_{kn} X_n) \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_{kn} \delta(A_{kn} X_n) \right] dy dx = 0. \quad (6)$$

Откуда, в силу произвольности величин $\delta(A_{kn} X_n)$, получим:

$$\int \int \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k L(f_{kn} X_n) \right] f_{in} dy dx = 0. \quad (7)$$

$$i = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Или, раскрывая оператор $L(f_{kn} X_n)$ и выполняя интегрирование по переменной y в заданных пределах, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} A_k l_i(X_n) dx = 0, \quad (8)$$

где

$$l_i(X_n) = \int L(f_{kn} X_n) \cdot f_{in} dy.$$

Так как каждое из уравнений системы (8) представляет собою обыкновенное линейное дифференциальное уравнение одного и того же порядка и вида (разница между ними только в постоянных коэффициентах), то и интегралы этих уравнений будут иметь одну и ту же форму. А так как каждое из этих уравнений определяет одну и ту же функцию, то для определения произвольных коэффициентов A_{kn} , мы получим следующую систему уравнений:

$$X_{ni} = X_{n(i+1)}, \quad i = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (9)$$

где X_{ni} — соответствующие частные интегралы уравнений системы (8), удовлетворяющие заданным граничным условиям.

Так как всего таких уравнений будет k , а неизвестных коэффициентов $k+1$, то мы все их найти не сможем, но их отношения мы найдем, чего для решения нашей задачи вполне достаточно, так как на один из коэффициентов, благодаря однородности уравнений системы (8), можно разделить.

Применим высказанные соображения к решению отдельных задач на устойчивость тяжелых плит.

§ 2. Устойчивость весомых тонких плит, свободно опертых по контуру

Следуя предлагаемому способу, будем искать частный интеграл уравнения (1) для данного случая (фиг. 1) в такой форме:

$$w_n(x, y) = X_n(x) \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin \frac{(n+k)\pi y}{b}, \quad (10)$$

где n — некоторое целое число,

k — целое число, могущее принимать значения 0, 1, 2, 3...
 Вставляя (10) в уравнение (7) и выполняя дифференцирование, а также умножая каждое уравнение, как это указано выше в (7), соответственно на $\sin \frac{(n+i)\pi y}{b}$ и выполняя интегрирование по y , получим следующую систему уравнений:

$$A_i \left\{ \left[X_n^{IV} - 2 \frac{(n+i)^2 \pi^2}{b^2} \cdot X_n'' + \left(\frac{(n+i)^4 \pi^4}{b^4} - \left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{D} \right) \frac{(n+i)^2 \pi^2}{b^2} \right) X_n \right] \frac{b}{2} \right\} - \\
 - \frac{q}{D} \sum_{k=0} A_k \left[\frac{(n+k)^2 \pi^2}{b^2} \cdot J_2(k, i) + \right. \\
 \left. + \frac{(n+k)\pi}{b} \cdot J_1(k, i) \right] X_n + \frac{X_n''}{D} \sum_{k=0} A_k P_1 J_3(k, i, \alpha_0) = 0,$$

где

$$i = 0, 1, 2 \dots$$

Или:

$$A_i \left\{ \left[X_n^{IV} - 2 \frac{(n+i)^2 \pi^2}{b^2} \cdot X_n'' + \left(\frac{(n+i)^4 \pi^4}{b^4} - \frac{P_2}{D} \frac{(n+i)^2 \pi^2}{b^2} - \right. \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{qb}{D} \cdot \frac{(n+i)^2 \pi^2}{b^2} \right) X_n \right] \frac{b}{2} \right\} - \frac{qb}{D} \sum_{k=0} A_k \left[\frac{(n+k)^2 \pi^2}{b^2} \cdot J_2(k, i) + \right. \\
 \left. + \frac{(n+k)\pi}{b} \cdot J_1(k, i) \right] X_n + \frac{X_n''}{D} \sum_{k=0} A_k \cdot P_1 \cdot J_3(k, i, \alpha) = 0, \quad (11)$$

где:

$$1) \quad J_1(k, i) = \int_0^b \cos \frac{(k+n)\pi y}{b} \sin \frac{(n+i)\pi y}{b} dy =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } (k \pm i) - \text{четном} \\ \frac{2b(n+k)}{\pi [(n+k)^2 - (n+i)^2]}, & \text{при } (k \pm i) - \text{нечетном} \end{cases}$$

$$2) \quad J_2(k, i) = \int_0^b y \sin \frac{(n+k)\pi y}{b} \sin \frac{(n+i)\pi y}{b} dy =$$

$$= \begin{cases} \frac{b^2}{4}, & \text{при } k = i, \\ 0, & \text{при } (k \pm i) - \text{четном,} \\ -\frac{4b^2(n+k)(n+i)}{\pi^2 [(n+k)^2 - (n+i)^2]}, & \text{при } (k \pm i) - \text{нечетном} \end{cases}$$

$$3) \quad J_3(k, i, \alpha_0) = \int_0^b \left(1 - \frac{\alpha_0 y}{b} \right) \sin \frac{(n+k)\pi y}{b} \sin \frac{(n+i)\pi y}{b} dy =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } (k \pm i) - \text{четном,} \\ \frac{b}{2} \left[1 - \frac{\alpha_0}{2} \right], & \text{при } k = i, \\ \frac{4\alpha_0 b}{\pi^2} \cdot \frac{(n+k)(n+i)}{[(n+k)^2 - (n+i)^2]}, & \text{при } (k \pm i) - \text{нечетном.} \end{cases}$$

Рассмотрим первое приближение (11), для чего положим $k=0$ и $i=0$, получим:

$$A_0 \left\{ \left[X_n^{IV} - 2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} X_n'' + \left(\frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{P_2 n^2 \pi^2}{D b^2} - \frac{q b n^2 \pi^2}{2D b^2} \right) X_n \right] \frac{b}{2} - \right. \\ \left. - \frac{q b}{D} \left[\frac{n^2 \pi^2}{b^2} J_2(0,0) + \frac{n \pi}{b} J_1(0,0) \right] X_n + \frac{X_n''}{D} P_1 J_3(0,0, \alpha_0) \right\} = 0.$$

Но так как при $k=0$ и $i=0$ интегралы: $J_1(0,0)$, $J_2(0,0)$ и $J_3(0,0, \alpha_0)$ принимают значения: $J_1(0,0) = 0$, $J_2(0,0) = \frac{b^2}{4}$ и $J_3(0,0, \alpha_0) = \frac{b}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right)$, будем иметь:

$$X_n^{IV} + \left[\frac{P_1}{D} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) - 2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right] X_n'' + \left[\frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{P_2 n^2 \pi^2}{D b^2} - \frac{q b n^2 \pi^2}{2D b^2} \right] X_n = 0. \quad (12)$$

Общий интеграл этого уравнения будет:

$$X_n = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \operatorname{sh} \beta x + C_4 \operatorname{ch} \beta x, \quad (13)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\left[\frac{P_1}{D} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \frac{1}{2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right] + \dots} \\ + \sqrt{\left[\frac{P_1}{D} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \frac{1}{2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right]^2 - \left[\frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{P_2 n^2 \pi^2}{D b^2} - \frac{q b n^2 \pi^2}{2D b^2} \right]}; \\ \beta = \sqrt{- \left[\frac{P_1}{D} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \frac{1}{2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right] + \dots} \\ + \sqrt{\left[\frac{P_1}{D} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \frac{1}{2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right]^2 - \left[\frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{P_2 n^2 \pi^2}{D b^2} - \frac{q b n^2 \pi^2}{2D b^2} \right]}.$$

Определим произвольные постоянные C_1 , C_2 , C_3 и C_4 из граничных условий для $x=0$ и $x=a$.

При

$$x=0; \quad 1) w_n(0, y) = 0 \quad \text{и} \quad 2) w_n''(0, y)_{xx} = 0.$$

При

$$x=a; \quad 3) w_n(a, y) = 0 \quad \text{и} \quad 4) w_n''(a, y)_{xx} = 0. \quad (14)$$

После подстановки в граничные условия (14) будем иметь:

$$1) 0 + C_2 + 0 + C_4 = 0,$$

$$2) 0 - \alpha^2 C_2 + 0 + \beta^2 C_4 = 0,$$

$$3) C_1 \sin \alpha a + C_2 \cos \alpha a + C_3 \operatorname{sh} \beta a + C_4 \operatorname{ch} \beta a = 0,$$

$$4) -C_1 \alpha^2 \sin \alpha a - \alpha^2 C_2 \cos \alpha a + C_3 \operatorname{sh} \beta a + C_4 \beta^2 \operatorname{ch} \beta a = 0.$$

Из первых двух уравнений следует:

$$C_2 = -C_4$$

$$\alpha^2 C_2 = \beta^2 C_4,$$

откуда

$$C_2 = C_4 = 0.$$

Тогда уравнения (3) и (4) примут вид:

$$\begin{aligned} C_1 \sin \alpha a + C_3 \operatorname{sh} \beta a &= 0; \\ -C_1 \alpha^3 \sin \alpha a + C_3 \beta^2 \operatorname{sh} \beta a &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы эта система уравнений имела решение отличное от нуля, необходимо и достаточно, чтобы детерминант этой системы равнялся нулю, т. е. должно быть:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin \alpha a & \operatorname{sh} \beta a \\ -\alpha^3 \sin \alpha a & \beta^2 \operatorname{sh} \beta a \end{vmatrix} = \rho^2 \operatorname{sh} \beta a \sin \alpha a + \alpha^2 \operatorname{sh} \beta a \cdot \sin \alpha a = \\ = (\alpha^2 + \beta^2) \operatorname{sh} \beta a \cdot \sin \alpha a = 0,$$

но $(\alpha^2 + \beta^2) \neq 0$, $\operatorname{sh} \beta a \neq 0$, следовательно:

$$\sin \alpha a = 0 \text{ или } \underline{\alpha a = m\pi} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

Воспользуемся этим равенством $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ для определения критической силы:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \left[\frac{P_1}{D} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \frac{1}{2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right] + \\ &+ \sqrt{\left[\frac{P_1}{D} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \frac{1}{2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right]^2 - \left[\frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{P_2}{D} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} - \frac{qb}{2D} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right]}, \quad (15) \end{aligned}$$

откуда:

$$P_2 = \frac{D\pi^2}{b^2} n^2 \left[1 - \left(\frac{mb}{na} \right)^2 \right]^2 - \left(\frac{m}{n} \right)^2 \left(\frac{b}{a} \right) P_1 \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) - \frac{qb}{2}. \quad (16)$$

При $\alpha_0 = 0$ формула (16) примет вид:

$$P_2 = \frac{D\pi^2}{b^2} n^2 \left[1 + \left(\frac{mb}{na} \right)^2 \right]^2 - \left(\frac{mb}{na} \right)^2 P_1 - \frac{qb}{2}. \quad (17)$$

При $a \rightarrow \infty$ мы получим известную формулу для стержня:

$$P_2 = \frac{EJ\pi^2}{b^2} n^2 - \frac{qb}{2}, \text{ где } n = 1. \quad (18)$$

При $P_1 = 0$ и $q = 0$ мы получим известную точную формулу* для свободно опертой по краям плиты:

$$P_2 = \frac{D\pi^2}{b^2} n^2 \left[1 + \left(\frac{mb}{na} \right)^2 \right]^2.$$

Наименьшее значение P_2 будет при $m = 1$ *:

$$P_2 = \frac{D\pi^2}{b^2} n^2 \left[1 + \left(\frac{b}{na} \right)^2 \right]^2. \quad (19)$$

Из сравнения формул (17) и (18) видим, что влияние собственного веса при первом приближении одинаково как для стержня, так и для плиты.

* С. П. Тимошенко. Курс теории упругости, ч. II, стр. 308. 1916.

Число полуволн n и m как в формуле (17), так и в формуле (19) зависит от отношения $\frac{b}{a}$ и P_1 к P_2 .

Положив в формуле (17) $P_1 = \alpha_2 P_2$, получим:

$$P_2 = \frac{D\pi^2}{b^2} n^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{mb}{na}\right)^2\right]^2}{\left[1 + \alpha_2 \left(\frac{mb}{na}\right)^2\right]} - \frac{1}{\left[1 + \alpha_2 \left(\frac{mb}{na}\right)^2\right]} \cdot \frac{qb}{2}. \quad (20)$$

При $qb = \beta_2 P_2$ и $P_1 = \alpha_2 P_2$ формула (17) примет вид:

$$P_2 = \frac{D\pi^2}{b^2} n^2 \cdot \frac{\left[1 + \left(\frac{mb}{na}\right)^2\right]^2}{\left[1 + \alpha_2 \left(\frac{mb}{na}\right)^2 + \frac{\beta_2}{2}\right]}. \quad (21)$$

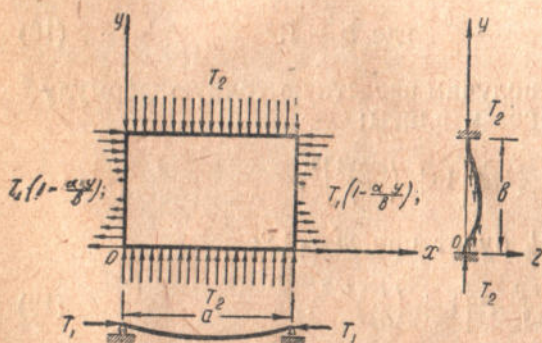
Очевидно, что при $\alpha_2 = 1$ наименьшее P_2 будет при $m = 1$ и $n = 1$, т. е.:

$$P_2 = \frac{Dn^2}{b^2} \cdot \frac{[1 + \lambda^2]^2}{\left[1 + \alpha_2 \lambda^2 + \frac{\beta_2}{2}\right]},$$

где $\lambda = \frac{b}{a}$.

Из сопоставления формул (18) и (19) с точными решениями видим, что первая формула весьма мало отличается от точного решения и вторая полностью совпадает с точным решением, следовательно, надо полагать, что наше первое приближение для практических расчетов вполне достаточно.

§ 3. Устойчивость тонких весомых плит, у которых края $x=0$ и $x=a$ свободно оперты, а края $y=0$ и $y=b$ жестко защемлены



Фиг. 2

Дифференциальное уравнение для данного случая будет иметь такой же вид, как и выше (1).

Возьмем значение функции $w_n(x, y)$ в форме:

$$w_n(x, y) = X_n \sum_{k=0}^{\infty} A_k \times \left(1 - \cos \frac{2(n+k)\pi y}{b}\right). \quad (23)$$

Вставляя (23) в (7), после выполнения дифференцирований и интегрирования по y будем иметь:

$$2 \sum_{k=0} A_k \left\{ X_n^{IV} + \frac{P_1}{D} \left[\left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) + \frac{J_5(k, i, \alpha_0)}{b} \right] X_n'' \right\} +$$

$$+ A_i \left\{ X_n^{IV} - 2 \frac{2^2 (n+i)^2 \pi^2}{b^2} X_n'' + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{2^4 (n+i)^4 \pi^4}{b^4} - \left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D} \right) \frac{2^2 (n+i)^2 \pi^2}{b^2} \right] X_n \right\} = 0, \quad (24)$$

$$(i = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

где:

$$J_4(k, i) = \int_0^b y \cos \frac{2(n+k)\pi y}{b} \cdot \cos \frac{2(n+i)\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq i, \\ \frac{b^2}{4} & \text{при } k = i, \end{cases}$$

$$J_5(k, i, \alpha_0) = \int_0^b \left(1 - \frac{\alpha_0 y}{b} \right) \cos \frac{2(n+k)\pi y}{b} \cos \frac{2(n+i)\pi y}{b} dy =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq i, \\ \frac{b}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) & \text{при } k = i. \end{cases}$$

Рассмотрим приближение, соответствующее $k=0$ и $i=0$, получим:

$$2 A_0 \left\{ X_n^{IV} + \frac{P_1}{D} \left[\left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) + \frac{J_5(0, 0, \alpha_0)}{b} \right] X_n'' \right\} +$$

$$+ A_0 \left\{ X_n^{IV} - 2 \frac{2^2 n^2 \pi^2}{b^2} X_n'' + \left[\frac{2^4 n^4 \pi^4}{b^4} - \left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D} \right) \frac{2^2 n^2 \pi^2}{b^2} \right] X_n \right\} = 0.$$

Перепишем это выражение в таком виде:

$$3 X_n^{IV} + 2 \left\{ \frac{P_1}{D} \left[\left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \right] - \frac{2^2 n^2 \pi^2}{b^2} \right\} X_n'' +$$

$$+ \left[\frac{2^4 n^4 \pi^4}{b^4} - \left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D} \right) \frac{2^2 n^2 \pi^2}{b^2} \right] X_n = 0. \quad (25)$$

Интеграл этого уравнения будет:

$$X_n = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \operatorname{sh} \beta x + C_4 \operatorname{ch} \beta x, \quad (26)$$

где:

$$\alpha = \sqrt{\left[\frac{P_1}{D} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) - \frac{2^2 n^2 \pi^2}{b^2} \right] \frac{1}{3} + \dots}$$

$$+ \sqrt{\left[\left[\frac{P_1}{D} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) - \frac{2^2 n^2 \pi^2}{b^2} \right] \frac{1}{3} \right]^2 - \frac{1}{3} \left[\frac{2^4 n^4 \pi^4}{b^4} - \left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D} \right) \frac{2^2 n^2 \pi^2}{b^2} \right]} \quad (27)$$

$$\beta = \sqrt{- \left[\frac{P_1}{D} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) - \frac{2^2 n^2 \pi^2}{b^2} \right] \frac{1}{3} + \dots}$$

$$+ \sqrt{\left[\left[\frac{P_1}{D} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) - \frac{2^2 n^2 \pi^2}{b^2} \right] \frac{1}{3} \right]^2 - \frac{1}{3} \left[\frac{2^4 n^4 \pi^4}{b^4} - \left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D} \right) \frac{2^2 n^2 \pi^2}{b^2} \right]}$$

Из граничных условий на краях $x=0$ и $x=a$ будем иметь:

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}$$

или

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{P_1}{D} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) - \frac{2^2 n^2 \pi^2}{b^2} \right] - \left(\frac{m\pi}{a} \right) \right\}^2 = \\ & = \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{P_1}{D} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) - \frac{2^2 n^2 \pi^2}{b^2} \right] \right\}^2 - \frac{1}{3} \left[\frac{2^4 n^4 \pi^4}{b^4} - \left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D} \right) \frac{2^2 n^2 \pi^2}{b^2} \right], \end{aligned}$$

откуда:

$$\begin{aligned} & 3 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{2n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{b} \right)^4 - \frac{2P_1}{D} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \times \\ & \times \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \frac{qb}{2D} \left(\frac{2n\pi}{b} \right)^2 - \frac{P_2}{D} \left(\frac{2n\pi}{b} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Полагая $P_1 = \alpha_2 P_2$, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{P_2}{D} \left[\left(\frac{2n\pi}{b} \right)^2 + 3 \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \alpha_2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] = \\ & = 3 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{2n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{b} \right)^4 - \frac{qb}{2D} \left(\frac{2n\pi}{b} \right)^2, \end{aligned}$$

откуда:

$$P_2 = 4 \frac{D\pi^2}{b^2} n^2 \left\{ \frac{\left[1 + \left(\frac{mb}{2na} \right)^2 \right]^2 + 2 \left(\frac{mb}{2na} \right)^4}{\left[1 + 3\alpha_2 \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \left(\frac{mb}{2na} \right)^2 \right]} \right\} - \frac{qb}{2} \frac{1}{1 + 3\alpha_2 \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \left(\frac{mb}{2na} \right)^2}. \quad (29)$$

Сравним отдельные частные случаи полученной формулы (29) с известными.

Если положить в формуле (29) $a = \infty$ и $\sigma = 0$ (модуль Пуассона), то получим известную формулу для устойчивости тяжелого стержня с жестко закрепленными концами и нагруженного сверху силой P_2 *

$$P_2 = 4 \frac{EJ\pi^2}{b^2} n^2 - \frac{qb}{2}.$$

Наименьшее P_2 будет при $n = 1$, т. е.

$$P_2 = 4 \frac{EJ\pi^2}{b^2} - \frac{qb}{2}. \quad (30)$$

Полученная формула (30) весьма мало отличается от точного решения.

Если положим в формуле (29) $\alpha_2 = 0$ и $q = 0$, то получим случай, показанный на фиг. 3:

$$P_2 = \frac{4D\pi^2}{b^2} n^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{mb}{2na} \right)^2 \right]^2 + 2 \left(\frac{mb}{2na} \right)^4 \right\}. \quad (31)$$

Для случая, показанного на фиг. 3, насколько нам известно, формула в явном виде для определения P_2 никем не была приведена, как не были приведены и формулы: (16), (17), (20) и (21).

* Проф. І. Я. Штаерман. Стійкість стін і колон, що перебувають під впливом власної ваги й зосереджених обтяжень, напечатано в збірникі пам'яті акад. К. К. Симинського, іздаєніе Всеукраїнської Академії Наук, Київ, 1933.

Полагая в уравнении (28) $P_2 = \alpha_1 P_1$, мы получим следующую формулу для определения P_1 :

$$P_1 = \frac{D\pi^2}{a^2} m^2 \left\{ \frac{\left[1 + \left(\frac{2na}{mb} \right)^2 \right]^2 + 2}{3 \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) + \alpha_1 \left(\frac{2na}{mb} \right)^2} \right\} - \frac{qb}{2} \left[\alpha_1 + 3 \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \left(\frac{mb}{2na} \right)^2 \right]. \quad (32)$$

Если положить в формуле (32) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = 0$ и $q = 0$, то получим частный случай, рассматриваемый проф. С. П. Тимошенко¹:

$$P_1 = \frac{D\pi^2}{a^2} m^2 \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{na}{mb} \right)^2 + \frac{16}{3} \left(\frac{na}{mb} \right)^4 \right] = \frac{D\pi^2}{a^2} m^2 \frac{\left[1 + 4 \left(\frac{n}{m} \right)^2 \lambda_2 \right]^2 + 2}{3}; \quad (33)$$

при $b = \infty$ и $\sigma = 0$ получим формулу для стержня

$$P_1 = \frac{EJ\pi^2}{a^2} m^2. \quad (34)$$

Наименьшее значение P_1 будет при $m = 1$, тогда:

$$P_1 = \frac{EJ\pi^2}{a^2}.$$

Записывая формулу (33) в форме, которую часто применяет проф. С. П. Тимошенко², получим:

$$P_1 = \frac{D\pi^2 n^2}{b^2} \frac{1}{3} \left\{ \left[\left(\frac{mb}{na} \right) + 4 \left(\frac{na}{mb} \right) \right]^2 + 2 \left(\frac{m}{n} \right)^2 \cdot \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right\}. \quad (35)$$

Вычислим теперь коэффициент, стоящий при $\frac{D\pi^2}{b^2}$ для $\frac{a}{b} = 0,5$, $m = 1$, $n = 1$, получим:

$$k = \frac{[2 + 4 \cdot 0,5]^2 + 2 \cdot 2^2}{3} = 8,00.$$

Точное значение этого коэффициента по С. П. Тимошенко равно $k = 7,69$. Таким образом, первое приближение в данном случае (в остальных случаях мы имели точные и почти точные значения) дает погрешность 4,03%, что для практических расчетов вполне допустимо.

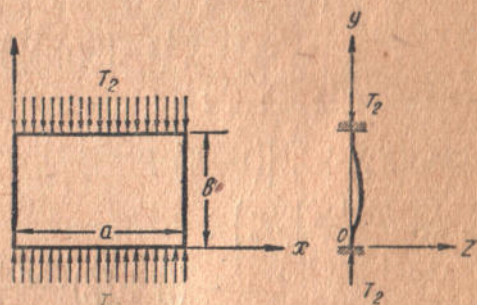
Это точное значение проф. С. П. Тимошенко получено в результате решения следующего трансцендентного уравнения:

$$(\cos \beta_1 b - \operatorname{ch} \gamma_1 b)^2 = -(\sin \beta_1 b - \frac{\beta_1}{\gamma_1} \operatorname{sh} \gamma_1 b) (\sin \beta_1 b + \frac{\gamma_1}{\beta_1} \operatorname{sh} \gamma_1 b), \quad (36)$$

где β_1 и γ_1 имеют прежние значения, приведенные нами выше, в которых необходимо положить $P_2 = 0$.

¹ С. П. Тимошенко. Курс теории упругости, ч. II, стр. 308, 1916.

² С. П. Тимошенко. Известия Киевского политехнического института. 1907.



Фиг. 3

Для суждения о степени сходимости примененного нами способа вычислим еще вторые приближения для P_1 и P_2 , для чего возьмем выражение для функции $w_n(x, y)$ с двумя произвольными коэффициентами A_k

$$w_n(x, y) = X_n \left[A_0 \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{b} y \right) + A_1 \left(1 - \cos \frac{2(n+1)\pi}{b} y \right) \right], \quad (37)$$

после чего из (24), полагая поочередно ($k=0, k=1$ и $i=0$) и ($k=0, k=1$ и $i=1$), получим:

при $k=0, k=1$ и $i=0$

$$\begin{aligned} & 2A_0 \left\{ X_n^{IV} + \frac{P_1}{D} \left[\left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) + \frac{J_5(0,0,\alpha_0)}{b} \right] X_n'' \right\} + 2A_1 \left\{ X_n^{IV} + \right. \\ & \left. + \frac{P_1}{D} \left[\left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) + \frac{J_5(1,0,\alpha_0)}{b} \right] X_n'' \right\} + A_0 \left\{ X_n^{IV} - 2 \frac{2^2 n^2 \pi^2}{b^2} X_n'' + \right. \\ & \left. + \left[\frac{2^4 n^4 \pi^4}{b^4} - \left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D} \right) \frac{2^2 n^2 \pi^2}{b^2} \right] X_n \right\} = 0; \end{aligned}$$

при $k=0, k=1$ и $i=1$

$$\begin{aligned} & 2A_0 \left\{ X_n^{IV} + \frac{P_1}{D} \left[\left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) + \frac{J_5(0,1,\alpha_0)}{b} \right] X_n'' \right\} + 2A_1 \left\{ X_n^{IV} + \frac{P_1}{D} \left[\left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{J_5(1,1,\alpha_0)}{b} \right] X_n'' \right\} + A_1 \left\{ X_n'' - 2 \frac{2^2 (n+1)^2 \pi^2}{b^2} X_n'' + \left[\frac{2^4 (n+1)^4 \pi^4}{b^4} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D} \right) \frac{2^2 (n+1)^2 \pi^2}{b^2} \right] X_n \right\}. \end{aligned}$$

Или после упрощений и преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} & X_n^{IV} [3 + 2\varepsilon_0] + 2X_n'' \left[\frac{P_1}{D} (1 + \varepsilon_0) \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) + \frac{P_1}{D} \frac{J_5(0,0,\alpha_0) + \varepsilon_0 J_5(1,0,\alpha_0)}{b} - n_1^2 \right] + \\ & + X_n \left[n_1^2 - \left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D} \right) \right] n_1^2 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & X_n^{IV} [3\varepsilon_0 + 2] + 2X_n'' \left[\frac{P_1}{D} (1 + \varepsilon_0) \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) + \frac{P_1}{D} \frac{J_5(0,1,\alpha_0) + \varepsilon_0 J_5(1,1,\alpha_0)}{b} - n_2^2 \varepsilon_0 \right] + \\ & + X_n \varepsilon_0 \left[n_2^2 - \left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D} \right) \right] n_2^2 = 0; \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{A_1}{A_0}, \quad n_1 = \frac{2n\pi}{b}, \quad n_2 = \frac{2(n+1)\pi}{b}.$$

Интеграл первого уравнения системы (38) будет:

$$X_n = C_1' \sin \alpha_1 x + C_2' \cos \alpha_1 x + C_3' \operatorname{sh} \beta_1 x + C_4' \operatorname{ch} \beta_1 x.$$

Интеграл второго уравнения системы (38) будет:

$$X_n = C_1'' \sin \alpha_2 x + C_2'' \cos \alpha_2 x + C_3'' \operatorname{sh} \beta_2 x + C_4'' \operatorname{ch} \beta_2 x.$$

После удовлетворения всем граничным условиям на краях $x=0$ и $x=a$, получим:

$$C_1' \sin \alpha_1 a = 0 \quad \text{и} \quad C_1'' \sin \alpha_2 a = 0.$$

Предполагая, что $C_1' \neq 0$ и $C_1 \neq 0$, получим:

$$\sin \alpha_1 a = 0 \text{ и } \sin \alpha_2 a = 0, \quad (39)$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\frac{P_1}{D} N_1 - n_1^2}{3 + 2\varepsilon_0}} + \sqrt{\left(\frac{\frac{P_1}{D} N_1 - n_1^2}{3 + 2\varepsilon_0}\right)^2 - n_1^2 - \frac{\left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D}\right)}{3 + 2\varepsilon_0}}, \quad (40)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\frac{P_1}{D} N_2 - n_2^2 \varepsilon_0}{3\varepsilon_0 + 2}} + \sqrt{\left(\frac{\frac{P_1}{D} N_2 - n_2^2 \varepsilon_0}{3\varepsilon_0 + 2}\right)^2 - n_2^2 \varepsilon_0 - \frac{n_2^2 - \frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D}}{3\varepsilon_0 + 2}}, \quad (41)$$

где

$$N_1 = (1 + \varepsilon_0) \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) + \frac{J_3(0,0,\alpha_0) + \varepsilon_0 J_3(1,0,\alpha_0)}{b},$$

$$N_2 = (1 + \varepsilon_0) \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) + \frac{J_3(0,1,\alpha_0) + \varepsilon_0 J_3(1,1,\alpha_0)}{b}.$$

Для того, чтобы равенства (39) были удовлетворены, необходимо положить:

$$\alpha_1 = \frac{m\pi}{a} = m_1, \quad \alpha_2 = \frac{m\pi}{a} = m_2,$$

где m — некоторое целое число.

Пользуясь выражениями (40) и (41), после освобождения от радикалов получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} n_1^2 \frac{n_1^2 - \left(\frac{P_2}{D} - \frac{qb}{2D}\right)}{3 + 2\varepsilon_0} &= 2 \frac{\frac{P_1}{D} N_1 - n_1^2}{3 + \varepsilon_0} m_1^2 - m_1^4; \\ \varepsilon_0 n_2^2 \frac{n_2^2 - \left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D}\right)}{3\varepsilon_0 + 2} &= 2 \frac{\frac{P_1}{D} N_2 - n_2^2 \varepsilon_0}{3\varepsilon_0 + 2} m_2^2 - m_2^4. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Разрешая уравнения (42) относительно P_1 , получим:

$$\left. \begin{aligned} P_{1,1} &= Dm_1^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2\right]^2 + 2(1 + \varepsilon_0)}{\alpha_1 \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2 + 2N_1} - \frac{\frac{qb}{2}}{\alpha_1 + 2 \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2 N_1}; \\ P_{1,2} &= Dm_2^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{n_2}{m_2}\right)^2\right]^2 \varepsilon_0 + 2(1 + \varepsilon_0)}{\alpha_1 \left(\frac{n_2}{m_2}\right)^2 + 2N_2} - \frac{\frac{qb}{2}}{\alpha_1 + 2 \left(\frac{m_2}{n_2}\right)^2 N_2 \frac{1}{\varepsilon_0}}; \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

где

$$N_1 = (1 + \varepsilon_0) \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) = \frac{3 + 2\varepsilon_0}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right),$$

$$N_2 = (1 + \varepsilon_0) \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) + \varepsilon_0 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) = \frac{2 + 3\varepsilon_0}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right),$$

$$\alpha_1 = \frac{P_2}{P_1}.$$

Неизвестная поправка ε_0 может быть определена из системы (43), если приравнять критическое усилие $P_{1,1}$, полученное по первой формуле, к критическому усилию $P_{1,2}$, полученному по второй формуле.

Найдем поправку ε_0 для случая $P_2 = 0$, $q = 0$ и $\alpha_0 = 0$.

В этом случае значения N_i ($i = 1, 2$) будут:

$$N_1 = \frac{3 + 2\varepsilon_0}{2} \text{ и } N_2 = \frac{2 + 3\varepsilon_0}{2}$$

и система (43) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} P_{1,1} &= Dm_1^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2\right]^2 + 2 + 2\varepsilon_0}{\alpha_1 \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2 + 3 + 2\varepsilon_0} = Dm_1^2 \frac{r_1 + 2\varepsilon_0}{\alpha_1 \eta_1^2 + 3 + 2\varepsilon_0}, \\ P_{1,2} &= Dm_2^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{n_2}{m_2}\right)^2\right]^2 \varepsilon_0 + 2\varepsilon_0 + 2}{\left[\alpha_1 \left(\frac{n_2}{m_2}\right)^2 + 3\right] \varepsilon_0 + 2} = Dm_2^2 \frac{r_2 \varepsilon_0 + 2}{(\alpha_1 \eta_2^2 + 3) \varepsilon_0 + 2}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Отсюда, приравнявая выражение первое к выражению второму и принимая во внимание $m_1 = m_2$, получим:

$$\frac{r_1 + 2\varepsilon_0}{(\alpha_1 \eta_1^2 + 3) + 2\varepsilon_0} = \frac{r_2 \varepsilon_0 + 2}{(\alpha_1 \eta_2^2 + 3) \varepsilon_0 + 2}. \quad (45)$$

Откуда

$$\varepsilon_0^2 + \frac{3}{2} \gamma_2 \varepsilon_0 - \gamma_3 = 0. \quad (46)$$

Или, разрешая это уравнение относительно ε_0 , будем иметь:

$$\varepsilon_0 = \frac{3}{4} \gamma_2 \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4^2 \gamma_3}{3^2 \gamma_2^2}} \right], \quad (47)$$

где:

$$\gamma_2 = \frac{r_2 \left(\alpha_1 \frac{\eta_1^2}{3} + 1 \right) - r_1 \left(\alpha_1 \frac{\eta_2^2}{3} + 1 \right)}{r_2 - (\alpha_1 \eta_2^2 + 3)},$$

$$\gamma_3 = \frac{r_1 - (\alpha_1 \eta_1^2 + 3)}{r_2 - (\alpha_1 \eta_2^2 + 3)}$$

$$r_1 = \left[1 + \left(\frac{n_1}{m_1} \right)^2 \right]^2 + 2, \quad r_2 = \left[1 + \left(\frac{n_2}{m_2} \right)^2 \right]^2 + 2, \quad \eta_1 = \left(\frac{n_1}{m_1} \right), \quad \eta_2 = \left(\frac{n_2}{m_2} \right).$$

При малом значении $\frac{4^2 \gamma_3}{3^2 \gamma_2^2}$ для ε_0 можно дать следующее приближенное выражение:

$$\varepsilon_0 \cong \frac{3}{4} \gamma_2 \left[-1 + 1 + \frac{4^2 \gamma_3}{2 \cdot 3^2 \gamma_2^2} \right] = \frac{2}{3} \frac{\gamma_3}{\gamma_2}. \quad (48)$$

Выражение (48), пользуясь значениями $\gamma_3, \gamma_2, r_1, r_2, \eta_1, \eta_2$ и n_1, n_2, m_1, m_2 , можно записать еще в такой форме:

$$\epsilon_0 = \frac{2}{3} \frac{\gamma - \alpha_1 \gamma_0'}{1 - \gamma + \alpha_1 \gamma_0' r_0'} \quad (49)$$

где

$$\gamma = \frac{n^2 \left[1 + 2 \left(\frac{n}{m} \right)^2 \lambda^2 \right]}{(n+1)^2 \left[1 + 2 \left(\frac{n+1}{m} \right)^2 \lambda^2 \right]},$$

$$\gamma_0' = \frac{n^2}{2(n+1)^2 \left[1 + 2 \left(\frac{n+1}{m} \right)^2 \lambda^2 \right]},$$

$$r_0' = \left\{ 1 + \frac{16}{3} \left(\frac{n+1}{m} \right)^2 \left[\left(\frac{n+1}{m} \right)^2 - \left(\frac{n}{m} \right)^2 \right] \lambda^4 - \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \right\}.$$

Формула для определения критической силы, согласно (44), в этом случае примет вид:

$$P_1 = \frac{D\pi^2}{a^2} m^2 \frac{\left[1 + 4 \left(\frac{n}{m} \right)^2 \lambda^2 \right]^2 + 2 + 2\epsilon_0}{4\alpha_1 \left(\frac{n}{m} \right)^2 \lambda^2 + 3 + 2\epsilon_0} \quad (50)$$

При $\epsilon_0 = 0$ и $\alpha_1 = 0$, как легко видеть, мы будем иметь формулу первого приближения (33).

Выражение (47) для ϵ_0 при $\alpha_1 = 0$ примет вид:

$$\epsilon_0 = \frac{3}{4} (1 - \gamma) \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4^2 \gamma}{3^2 (1 - \gamma)}} \right] \quad (51)$$

Приближенная формула (49) в этом случае примет вид:

$$\epsilon_0 = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{1 - \gamma} \quad (52)$$

Формула (50) при $\alpha_1 = 0$ примет вид:

$$P_1 = \frac{D\pi^2}{a^2} m \frac{\left[1 + 4 \left(\frac{n}{m} \right)^2 \lambda^2 \right]^2 + 2 + 2\epsilon_0}{3 + 2\epsilon_0} \quad (53)$$

или, записывая ее, для удобства сравнения с другими, в форме проф. С. П. Тимошенко¹, будем иметь:

$$P_1 = \frac{D\pi^2}{b^2} n^2 \frac{\left(\frac{m}{n} \frac{1}{\lambda} + 4 \frac{n}{m} \right)^2 + 2 \left(\frac{m}{n} \right)^2 \frac{1}{\lambda^2} (1 + \epsilon_0)}{3 + 2\epsilon_0} = k \frac{D\pi^2}{b^2} n^2, \quad (53a)$$

где

$$k = n^2 \frac{\left(\frac{m}{n} \frac{1}{\lambda} + 4 \frac{n}{m} \lambda \right)^2 + 2 \left(\frac{m}{n} \right)^2 \frac{1}{\lambda^2} (1 + \epsilon_0)}{3 + 2\epsilon_0}.$$

¹ С. П. Тимошенко. Известия Киевского политехнического института, 1907.

Выше нами был вычислен коэффициент k , стоящий при $\frac{D\pi^2}{b^2}$ по формуле первого приближения. Найдем теперь для сравнения значение того же коэффициента k при тех же данных по формуле второго приближения

$$k = 1^2 \frac{[1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 0,5]^2 + 2 \cdot 1^2 \cdot 2^2 (1 + 0,09)}{3 + 2 \cdot 0,09} = 7,77,$$

где:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \frac{3}{4} (1 - \gamma) \cdot \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4^2 \gamma}{3^2 (1 - \gamma)^2}} \right] = \\ &= \frac{3}{4} (1 - 0,125) \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{16 \cdot 0,125}{9(1 - 0,125)^2}} \right] = 0,09 \end{aligned}$$

и

$$\gamma = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1 + 2 \left(\frac{n}{m}\right)^2 \lambda^2}{1 + 2 \frac{(n+1)^2}{m^2} \lambda^2} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 \cdot 0,5^2}{2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 2^2 \cdot 0,5^2} = 0,125.$$

Сравнивая полученное значение $k = 7,77$ с точным значением 7,69, получим погрешность около 1%.

Для более наглядного представления о степени отклонения приближенных значений k , вычисленных по приближенным формулам, от точных значений k , вычисленных для данного случая проф. С. П. Тимошенко, приведем таблицу 1:

Таблица 1

Отношение сторон плиты $\lambda = \frac{a}{b}$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Значение величины γ	0,1447	0,1250	0,1108	0,1006	0,0931	0,0881	0,1250
Значение поправки ϵ_0	0,104	0,09	0,078	0,068	0,065	0,062	0,09
Значение коэффициента k по формуле первого приближения	9,77	8,0	7,35	7,32	7,64	8,22	8,00
Значение коэффициента k по формуле второго приближения	9,54	7,77	7,12	7,10	7,39	7,95	7,77
Значение коэффициента k по формуле (А)	9,46	7,69	7,04	7,00	7,29	7,83	7,69
Точные значения коэффициента k по вычислениям С. П. Тимошенко	9,44	7,69	7,05	7,00	7,29	7,83	7,69

Из таблицы 1 видно, что значения коэффициента k , вычисленные по формуле первого приближения (строка 4), отличаются от точных значений коэффициента k (строка 7) в среднем на 3,5—4,0%. Значения коэффициента k , вычисленные по фор-

муле второго приближения (строка 5), отличаются от точных значений коэффициента k в среднем на 1%¹.

Разрешая уравнения (42) относительно P_2 , получим:

$$\left. \begin{aligned} P_{2,1} &= Dn_1^2 \frac{1 + 2\left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2 + 3\left(\frac{m_1}{n_1}\right)^4 + 2\left(\frac{m_1}{n_1}\right)^4 \varepsilon_0}{1 + 2\alpha_2 N_1 \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2} - \frac{\frac{qb}{2}}{1 + 2\alpha_2 N_1 \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2}, \\ P_{2,2} &= Dn_2^2 \frac{\left[1 + 2\left(\frac{m_2}{n_2}\right)^2 + 3\left(\frac{m_2}{n_2}\right)^4\right] \varepsilon_0 + 2\left(\frac{m_2}{n_2}\right)^4}{\varepsilon_0 + 2\alpha_2 N_2 \left(\frac{m_2}{n_2}\right)^2} - \frac{\frac{qb}{2}}{1 + 2\alpha_2 N_2 \left(\frac{m_2}{n_2}\right)^2}. \end{aligned} \right\} (54)$$

Найдем ε_0 для случая $q=0$ и $\alpha_0=0$.

В этом случае система (54) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} P_{2,1} &= Dn_1^2 \frac{\left[1 + 2\left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2 + 3\left(\frac{m_1}{n_1}\right)^4\right] + 2\left(\frac{m_1}{n_1}\right)^4 \varepsilon_0}{1 + \alpha_2 (3 + 2\varepsilon_0) \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2} = \frac{r_1 + 2\gamma_1^4 \varepsilon_0}{(1 + 3\alpha_2 \gamma_1^2) + 2\alpha_2 \gamma_1^2 \varepsilon_0}, \\ P_{2,2} &= Dn_2^2 \frac{\left[1 + 2\left(\frac{m_2}{n_2}\right)^2 + 3\left(\frac{m_2}{n_2}\right)^4\right] \varepsilon_0 + 2\left(\frac{m_2}{n_2}\right)^4}{1\varepsilon_0 + \alpha_2 (3\varepsilon_0 + 2) \left(\frac{m_2}{n_2}\right)^2} = \frac{r_2 \varepsilon_0 + 2\gamma_2^4}{(1 + 3\alpha_2 \gamma_2^2) \varepsilon_0 + 2\alpha_2 \gamma_2^2}. \end{aligned} \right\} (54a)$$

Приравняв $P_{2,1} = P_{2,2}$, получим:

$$n_1^2 \frac{r_1 + 2\gamma_1^4 \varepsilon_0}{(1 + 3\alpha_2 \gamma_1^2) + 2\gamma_1^2 \alpha_2 \varepsilon_0} = n_2^2 \frac{r_2 \varepsilon_0 + 2\gamma_2^4}{(1 + 3\alpha_2 \gamma_2^2) \varepsilon_0 + 2\gamma_2^2 \alpha_2}, \quad (55)$$

где:

$$\begin{aligned} r_i &= 1 + 2\left(\frac{m_i}{n_i}\right)^2 + 3\left(\frac{m_i}{n_i}\right)^4, \quad (i=1, 2) \\ \gamma_i &= \left(\frac{m_i}{n_i}\right). \end{aligned}$$

Расписывая уравнение (55) относительно ε_0 , получим:

$$\varepsilon_0^2 - \frac{1}{2} \gamma_1 \varepsilon_0 - \gamma_2 = 0, \quad (56)$$

¹ В то время, когда работа была закончена, нам удалось найти следующую формулу для определения критических усилий P_1 :

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{D\pi^2}{b^2} k = \\ &= \frac{D\pi^2}{b^2} n^2 \frac{2\left(\frac{m}{n} \frac{1}{\lambda} + 4 \frac{n}{m} \lambda\right)^2 \cdot \left[1 + 8\left(\frac{n}{m}\right)^2 \lambda^2\right] + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{m}{n}\right)^2 \left[5 + 34\left(\frac{n}{m}\right)^2 \lambda^2\right]}{7 + 26\left(\frac{n}{m}\right)^2 \lambda^2}. \end{aligned} \quad (A)$$

Значение коэффициента k , стоящего при $\frac{D\pi^2}{b^2}$, нами вычислено для нескольких значений λ и вписано для сравнения в таблицу 1 (строка 6). Из сопоставления этих значений коэффициента k с точными значениями проф. С. П. Тимошенко, видим, что вычисленные нами коэффициенты почти точно совпадают с коэффициентами проф. С. П. Тимошенко. Следовательно, приведенная выше формула (A) дает точные значения критических усилий P_1 .

где

$$\gamma_1 = \frac{[n_1^2 r_1 (1 + 3\alpha_2 \gamma_2^2) + 4\alpha_2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 (n_1^2 \gamma_2^2 - n_2^2 \gamma_1^2) - n_2^2 r_2 (1 + 3\alpha_1 \gamma_1^2)]}{[n_2^2 r_2 \gamma_1^2 \alpha_2 - n_1^4 (1 + 3\alpha_2 \gamma_2^2)]},$$

$$\gamma_2 = \frac{[n_1^2 r_1 \gamma_2^2 \alpha_2 - n_2^4 (1 + 3\alpha_1 \gamma_1^2)]}{[n_2^2 r_2 \gamma_1^2 \alpha_2 - n_1^4 (1 + 3\alpha_2 \gamma_2^2)]}.$$

Из уравнения (56) для ϵ_0 будем иметь выражение:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4} \gamma_1 \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4^2 \gamma_2^2}{\gamma_1^2}} \right]. \quad (57)$$

Примечание. Перед радикалом берем тот знак, при котором критическая сила P_1 будет меньшей.

При малом значении $\left(\frac{4^2 \gamma_2^2}{\gamma_1^2}\right)$ величину ϵ_0 можно представить следующей формулой:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4} \gamma_1 \left[1 \pm 1 \pm \frac{1}{2} \frac{4^2 \gamma_2^2}{\gamma_1^2} \right] = (1 \pm 1) \frac{1}{4} \gamma_1 \pm 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}. \quad (58)$$

Формула для определения критической силы, согласно (54а), в этом случае примет вид:

$$P_2 = 4 \frac{D\pi^2}{b^2} n^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{m}{2n}\right)^2 \lambda^2 \right]^2 + 2 \left(\frac{m}{2n}\right)^4 \lambda_1^4 (1 + \epsilon_0)}{1 + \alpha_2 \left(\frac{m}{2n}\right)^2 \lambda_1^2 (3 + 2\epsilon_0)}. \quad (59)$$

Легко видеть, что формула (59) при $\epsilon_0 = 0$ и $\alpha_2 = 0$ обращается в полученную нами ранее формулу (31), а при $a = \infty$ — в формулу (30).

Формулу (59) можно еще написать в таком виде:

$$P_2 = \frac{D\pi^2}{a^2} k = \frac{D\pi^2}{a^2} m^2 \left\{ \frac{\left[\frac{2n}{m} \frac{1}{\lambda_1} + \frac{m}{2n} \lambda_1 \right] + 2 \left(\frac{m}{2n}\right)^2 \lambda_1^2 (1 + \epsilon_0)}{1 + \alpha_2 \left(\frac{m}{2n}\right)^2 \lambda^2 (3 + 2\epsilon_0)} \right\}. \quad (60)$$

Вычислим значение коэффициента k , стоящего при $\frac{D\pi^2}{a^2}$ в формуле (60) в двух случаях: 1) при $\alpha_2 = 0$ и $\epsilon_0 = 0$ и 2) при $\alpha_2 = 0$, но $\epsilon_0 \neq 0$.

Возьмем $\lambda_1 = 1$, при этом наименьшее значение P_2 будет при $m = 1$ и $n = 1$.

При $\epsilon_0 = 0$ для коэффициента k будем иметь выражение:

$$k = 1 \left\{ \left[2 + \frac{1}{2} \right]^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \right\} = 6,75.$$

При $\epsilon_0 \neq 0$ для коэффициента k будем иметь выражение:

$$k = 1 \left\{ \left[2 + \frac{1}{2} \right]^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} (1 - 0,163) \right\} = 6,67,$$

где

$$\varepsilon_0 = 0,163.$$

Т. е. второе приближение дает меньшие значения по сравнению с первым на $1,2^0/0$. На сколько процентов отличается найденное нами значение коэффициента k при втором приближении от точного значения коэффициента k , к сожалению, сказать мы не можем, так как не имеем точных значений коэффициентов k , но по аналогии с предыдущим, вероятно, надо полагать, что точность если не первого, то во всяком случае второго приближения для практических расчетов вполне достаточная.

§ 4. Устойчивость тонких весомых плит, у которых все четыре края жестко защемлены

Для решения настоящей задачи можно воспользоваться некоторыми выражениями предыдущей задачи. Так, например, для нашей задачи вполне подходит выражение интеграла (26) и все предыдущие выражения, начиная с (23) и кончая (27).

Определим произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 , входящие в выражение интеграла (26), исходя из граничных условий, которые имеют место в данном случае. При жестком защемлении краев плиты граничные условия будут:

При

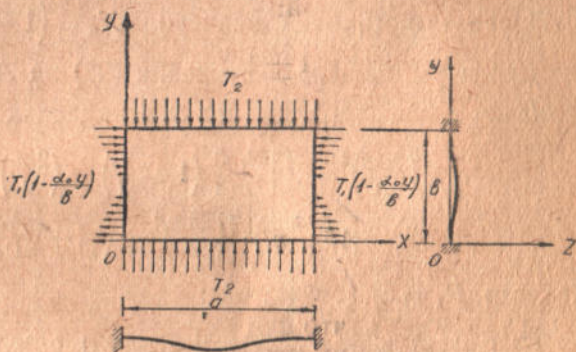
$$\left. \begin{array}{l} x=0 \quad 1) \quad w_n(0, y) = 0, \quad 2) \quad w'_{nx}(0, y) = 0 \\ x=a \quad 3) \quad w_n(a, y) = 0, \quad 4) \quad w'_{nx}(a, y) = 0 \end{array} \right\} \quad (61)$$

После подстановки значений $w(x, y)$ и $w_{nx}(x, y)$, взятых из (23), в граничные условия (61) и выполнения необходимых преобразований, получим следующее трансцендентное уравнение для определения критической силы для плиты с жестко зашеченными краями:

$$(\cos \alpha a - \operatorname{ch} \beta a)^2 = - \left(\sin \alpha a - \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \beta a \right) \left(\sin \alpha a + \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{sh} \beta a \right), \quad (62)$$

где α и β имеют прежние значения (27).

Полученное уравнение (62) по виду совпадает с уравнением (36), но отличается от него значениями α и β . Уравнение (36) было получено, как мы уже указывали, проф. С. П. Тимо-



Фиг. 4

шенко при расчете плиты на устойчивость с двумя продольными жестко защемленными краями и двумя другими — опертыми. Уравнение (62) получено в предположении, что плита имеет жесткие защемления по всем четырем краям.

Чтобы избежать решения трансцендентного уравнения (62), будем рассматривать уравнение (25), как уравнение Эйлера—Лагранжа и воспользуемся для решения его методом Б. Г. Галеркина¹. Будем искать частный интеграл уравнения (25) в форме:

$$X_n = \sum_{l=0} A_l \left(1 - \cos \frac{2(m+l)\pi x}{a}\right), \quad (63)$$

где:

m — некоторое целое число,

l — любое целое число из ряда чисел 0, 1, 2, 3...

Для простоты решения ограничимся первым членом ряда (63), соответствующим $l=0$.

После подстановки значения $X_n = \left(1 - \cos \frac{2m\pi}{a} x\right)$ в выражение (25) и умножения выражения (25) на $A_0 \left(1 - \cos \frac{2m\pi}{a} x\right)$ и выполнения интегрирования по x в пределах от 0 до a получим:

$$3 \left(\frac{2m\pi}{a}\right)^4 - 2 \left[\frac{P_1}{D} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) - \left(\frac{2n\pi}{b}\right)^2 \right] \left(\frac{2m\pi}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{2n\pi}{b}\right) \cdot \left[\left(\frac{2n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D}\right) \right] = 0. \quad (64)$$

Полагая $P_1 = \alpha_2 P_2$, получим:

$$3 \frac{P_2}{D} \left[n_1^2 + \alpha_2 \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) m^2 \right] = 3m^4 + 2n_1^2 m^2 + 3n_1^4 - 3 \frac{qb}{2D} n_1^2,$$

где

$$n_1 = \frac{2n\pi}{b} \quad \text{и} \quad m_1 = \frac{2m\pi}{a}.$$

Откуда

$$P_2 = Dn_1^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2\right]^2 + 2 \left[1 + \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2\right]}{3 \left[1 + \alpha_2 \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2\right]} - \frac{qb}{2} \frac{1}{1 + \alpha_2 \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2}. \quad (65)$$

При $a = \infty$ и $\alpha_2 = 0$ из формулы (65) получаем известную формулу для стержня:

$$P_2 = EJn_1^2 - \frac{qb}{2}. \quad (66)$$

Наименьшее значение P_2 в формуле (66) будет при

$$n_1 = \frac{2\pi}{b}.$$

¹ Б. Г. Галеркин. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок. Вестник инженеров, стр. 897—908, 1915.

При $\alpha_2 = 0$ формула (65) принимает вид:

$$P_2 = Dn_1^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2\right]^2 + 2\left[1 + \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^4\right]}{3} - \frac{qb}{2}. \quad (67)$$

Очевидно, наименьшее значение P_2 будет при $m=1$. Полагая в выражении (64) $P_2 = \alpha_1 P_1$, мы получим следующую формулу для определения P_1 :

$$P_1 = Dm_1^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2\right]^2 + 2\left[1 + \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^4\right]}{3\left[\alpha_1 \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2 + \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right)\right]} - \frac{qb}{2} \alpha_1 + \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2. \quad (68)$$

При $q=0$ и $\alpha_0=0$ получим:

$$P_1 = Dm_1^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2\right]^2 + 2\left[1 + \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^4\right]}{3\left[1 + \alpha_1 \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2\right]}. \quad (69)$$

Формула (65) при $q=0$ и $\alpha_0=0$ примет аналогичный вид формулы (69), т. е. будем иметь:

$$P_2 = Dn_1^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2\right]^2 + 2\left[1 + \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^4\right]}{3\left[1 + \alpha_2 \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2\right]}. \quad (70)$$

Сравним теперь результат, получаемый для P_1 по найденной нами формуле (69) (формула (70) аналогична (69)) с результатами, полученными при тех же условиях К. Сезавой¹ (K. Sezawa) и Тейлором² (G. J. Taylor).

Тейлор, решая точно настоящую задачу, вычислил одно значение для $\frac{P_1 b^2}{D\pi^2} = k = 5,30$ при $\alpha_1 = 1$ и $\lambda = \frac{a}{b} = 1$.

Проф. К. Сезава решал настоящую задачу приближенно и вычислил целый ряд значений k_1 , причем при $\alpha_1 = 1$ и $\lambda = 1$ он получил для коэффициента k_1 выражение 5,61, которое отличается от точного значения, найденного Тейлором, на 5,8%.

Значение k_1 по нашей формуле (69), которая значительно проще решения К. Сезава, будет:

$$k_1 = \frac{b^2 m^2}{\pi^2} \frac{\left[1 + \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2\right]^2 + 2\left[1 + \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^4\right]}{3\left[1 + \alpha_1 \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2\right]} = 4 \frac{4+4}{3[1+1]} = 5,33,$$

которое отличается от точного значения Тейлора на 0,5%.

¹ K. Sezawa. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Heft 4, 1932. Стр. 227—229.

² G. J. Taylor. Zeitsch. f. angew. Math. u. Mech. Heft 4, 1933. Стр. 147—152.

Для суждения о степени сходимости предлагаемого решения в настоящем малоисследованном случае плиты с четырьмя жестко защемленными краями, рассмотрим еще второе приближение, для чего воспользуемся уравнениями (38).

Частные интегралы уравнений (38) будем искать, согласно предыдущему, в форме (63), причем для простоты вычислений ограничимся одним членом ряда (63), соответствующим $l_0 = 0$:

$$X_{n,1} = A_{0,1} \left(1 - \cos \frac{2m'\pi}{a} x\right) \text{ и } X_{n,2} = A_{0,2} \left(1 - \cos \frac{2m''\pi}{a} x\right), \quad (71)$$

где:

m' и m'' — целые числа, определяемые впоследствии;

$A_{0,1}$ и $A_{0,2}$ — произвольные коэффициенты.

Вставляя соответствующие значения (71) в уравнения (38) и умножая каждое уравнение соответственно на одно из выражений (71) и выполняя интегрирование по x в пределах от 0 до a , получим:

$$\left. \begin{aligned} m_1^4 (3 + 2\varepsilon_0) - 2 \frac{P_1}{D} N_1 m_1^2 + 2 n_1^2 m_1^2 - 3 n_1^2 \left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D} \right) + 3 n_1^4 &= 0; \\ m_2^4 (3\varepsilon_0 + 2) - 2 \frac{P_1}{D} N_2 m_2^2 + 2 n_2^2 m_2^2 - 3 n_2^2 \varepsilon_0 \left(\frac{P_2}{D} + \frac{qb}{2D} \right) + 3 n_2^4 \varepsilon_0 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

где:

$$m_1 = \frac{2m'\pi}{a}, \quad m_2 = \frac{2m''\pi}{a},$$

$$N_1 = \left(1 + \varepsilon_0\right) \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) + \frac{J_5(0,0, \alpha_0) + \varepsilon_0 J_5(1,0, \alpha_0)}{b} = \frac{3 + 2\varepsilon_0}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right),$$

$$N_2 = \left(1 + \varepsilon_0\right) \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) + \frac{J_5(0,1, \alpha_0) + \varepsilon_0 J_5(1,1, \alpha_0)}{b} = \frac{3\varepsilon_0 + 2}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right),$$

$$n_1 = \frac{2n\pi}{b}, \quad n_2 = \frac{2(n+1)\pi}{b}, \quad \varepsilon_0 = \frac{A_1}{A_0}.$$

Полагая в формулах (72) $P_2 = \alpha_1 P_1$ и определяя из них значения P_1 , получим:

из первого уравнения:

$$P_{1,1} = Dm_1^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2\right]^2 + 2\left[1 + \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^4\right] + 2\varepsilon_0}{3\alpha_1 \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2 + (3 + 2\varepsilon_0) \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right)} - \frac{\frac{qb}{2}}{\alpha_1 + \left(1 + \frac{2}{3}\varepsilon_0\right) \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2}; \quad (73)$$

из второго уравнения:

$$P_{1,2} = Dm_2^2 \frac{\left\{ \left[1 + \left(\frac{n_2}{m_2} \right)^2 \right]^2 + 2 \left[1 + \left(\frac{n_2}{m_2} \right)^4 \right] \right\} \varepsilon_0 + 2}{3 \alpha_1 \eta_0 \left(\frac{n_2}{m_2} \right)^2 + (3 \varepsilon_0 + 2) \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right)} - \frac{qb}{2} \alpha_1 + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{1}{\varepsilon_0} \right) \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \left(\frac{m_2}{n_2} \right)^2. \quad (74)$$

При $\alpha_0 = q = 0$ формулы (73) и (74) примут вид:

$$P_{1,1} = Dm_1^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{n_1}{m_1} \right)^2 \right]^2 + 2 \left[1 + \left(\frac{n_1}{m_1} \right)^4 \right] + 2 \varepsilon_0}{3 \alpha_1 \left(\frac{n_1}{m_1} \right)^2 + (3 + 2 \varepsilon_0)}; \quad (75)$$

$$P_{1,2} = Dm_2^2 \frac{\left\{ \left[1 + \left(\frac{n_2}{m_2} \right)^2 \right]^2 + 2 \left[1 + \left(\frac{n_2}{m_2} \right)^4 \right] \right\} \varepsilon_0 + 2}{3 \left[\alpha_1 \left(\frac{n_1}{m_1} \right)^2 + 1 \right] \varepsilon_0 + 2}. \quad (76)$$

Неизвестную поправку ε_0 найдем из условия

$$P_{1,1} = P_{1,2}, \quad (77)$$

причем $m' = m''$, так как $X_{n,1} = X_{n,2}$.

Следовательно, согласно (77) для определения ε_0 будем иметь следующее квадратное уравнение:

$$\varepsilon_0^2 + \frac{3}{2} \frac{r_2 (\alpha_1 \eta_1^2 + 1) - r_1 (\alpha_1 \eta_2^2 + 1)}{r_2 - 3 (\alpha_1 \eta_2^2 + 1)} \varepsilon_0 - \frac{r_1 - 3 (\alpha_1 \eta_1^2 + 1)}{r_2 - 3 (\alpha_1 \eta_2^2 + 1)} = 0, \quad (78)$$

где:

$$r_i = \left[1 + \left(\frac{n_i}{m_i} \right)^2 \right]^2 + 2 \left[1 + \left(\frac{n_i}{m_i} \right)^4 \right], \quad (i = 1, 2)$$

$$\eta_i = \left(\frac{n_i}{m_i} \right).$$

Положим в уравнении (78):

$$\gamma_2 = \frac{r_2 (\alpha_1 \eta_1^2 + 1) - r_1 (\alpha_1 \eta_2^2 + 1)}{r_2 - 3 (\alpha_1 \eta_2^2 + 1)},$$

$$\gamma_3 = \frac{r_1 - 3 (\alpha_1 \eta_1^2 + 1)}{r_2 - 3 (\alpha_1 \eta_2^2 + 1)};$$

получим

$$\varepsilon_0^2 + \frac{3}{2} \gamma_2 \varepsilon_0 - \gamma_3 = 0.$$

откуда

$$\varepsilon_0 = \frac{3}{4} \gamma_2 \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4^2 \gamma_3}{3^2 \gamma_2^2}} \right],$$

Так как величина $\frac{4^2 \gamma_3}{3^2 \gamma_2^2}$ малая по сравнению с единицей, в чем можно убедиться пробными вычислениями, то для ε_0 можно дать такое приближенное выражение:

$$\varepsilon'_0 = \frac{3}{4} \gamma_2 \left[-1 + 1 + \frac{1}{2} \frac{4^2 \gamma_3}{3^2 \gamma_2^2} \right] = \frac{2}{3} \frac{\gamma_3}{\gamma_2}.$$

Или, записывая ε'_0 в форме уже применяемой нами выше, получим:

$$\varepsilon'_0 = \frac{2}{3} \frac{\gamma_1 - 3\alpha_1 \gamma_0}{1 - \gamma_1 + 3\alpha_1 \gamma_0 r_0}, \quad (79)$$

где:

$$\gamma_0 = \frac{n^2}{(n+1)^2 \left[2 + 3 \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \lambda^2 \right]},$$

$$\gamma_1 = \frac{n_1^2 \left[2 + 3 \left(\frac{n}{m} \right)^2 \lambda^2 \right]}{(n+1) \left[2 + 3 \left(\frac{n+1}{m} \right)^2 \lambda^2 \right]},$$

$$r_0 = \left\{ 1 + \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \left[\frac{2n+1}{m^2} \right] \lambda^4 - \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что при $\alpha_1 = 0$ выражение (78) для ε'_0 обращается в такое:

$$\varepsilon'_0 = \frac{2}{3} \frac{\gamma_1}{1 - \gamma_1}. \quad (80)$$

Вычислим значение величины ε'_0 для случая, который рассматривал Тейлор $\alpha_1 = 1$ и $\lambda = 1$.

Задавая значениями $n = m = 1$, $\alpha_1 = 1$ и $\lambda = 1$ и вычисляя величины γ_0 , r_0 , γ_1 и вставляя их в формулу (79), получим следующее выражение для ε_0 :

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{3} \frac{\gamma_1 - 3\gamma_0}{1 - \gamma_1 + 3\gamma_0 r_0} = 0,017.$$

Значение коэффициента k_1 , согласно формуле (75) при $\varepsilon_0 = 0,017$, будет равно:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{b^2}{\pi^2} m_1^2 \frac{\left[1 + \left(\frac{n_1}{m_1} \right)^2 \right]^2 + 2 \left[1 + \left(\frac{n_1}{m_1} \right)^4 \right] + 2\varepsilon_0}{3 \left[\alpha_1 \left(\frac{n_1}{m_1} \right)^3 + 1 \right] + 2\varepsilon_0} = \\ &= 4 \frac{4 + 4 + 2 \cdot 0,017}{3[1 + 1] + 2 \cdot 0,017} = 5,325. \end{aligned}$$

Это значение отличается от точного значения $k_1 = 5,30$ на 0,45%.

Другие значения коэффициентов k_1 , вычисленные для различных $\alpha_1 = \frac{P_2}{P_1}$ в первом и втором приближении, приведем в таблице 2, на стр. 148, там же для сравнения приведем и коэффициенты k_1 , вычисленные Сезавой и Тейлором.

Из сравнения приведенных значений k_1 в таблице 2 с значениями k_1 Сезава видим, что наши значения, как вычисленные по формуле первого приближения, так и по формуле второго приближения в пределах изменения $\alpha_1, 0 < \alpha_1 < \infty$ меньше, чем значения k_1 Сезава и ближе приближаются к точным значениям Тейлора.

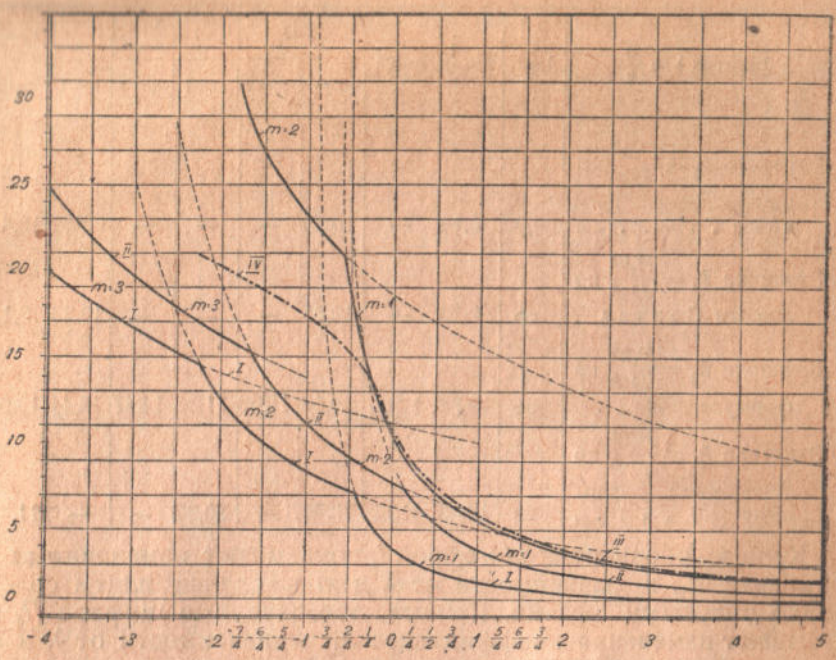
В пределах изменения $\alpha_1 - 2 < \alpha_1 < 0$ наши значения превышают соответствующие значения k_1 Сезава, причем, начиная со значения $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, изгиб в направлении оси X -ов происходит (при наименьшей критической силе) при $m = 2$. При дальнейшем уменьшении α_1 изгиб, вероятно, будет происходить при $m > 2$. Это хорошо видно на фиг. 5 (линия III).

Для сравнения на фиг. 5 также нанесена кривая изменения значений k_1 по вычислениям Сезава (она обозначена линией „пунктир-точка“ и номером IV); нанесена также кривая значений k_1 для плиты со свободно опертыми краями (линия I) и кривая значений k_1 для плиты с двумя продольными жестко защемленными краями и двумя другими опертыми.

Из характера поведения кривой I видно, что для значений $\alpha_1 - \frac{1}{2} < \alpha_1 < \infty$ изгиб будет происходить при наименьшем P_1 при $m = 1$, для значений $\alpha_1 - 2\frac{1}{4} < \alpha_1 < -\frac{1}{2}$ при $m = 2$ и т. д., т. е. квадратная плита со свободно опертыми краями при своем изгибе под действием сил P_1 и P_2 в зависимости от значений $\alpha_1 = \frac{P_2}{P_1}$ подразделяется на полуволны. Такое подразделение, как это видно из фиг. 5, претерпевают и остальные плиты. К. Сезавой, как это видно из характера поведения кривой, отвечающей его данным, это свойство не отмечено. Кроме того, вообще сомнительна точность его вычислений при $\alpha_1 < 0$. Вероятно это объясняется тем, что К. Сезава в своем решении удовлетворил граничным условиям только в отдельных точках по контуру, но не сплошь по всей линии контура, что и дало свои отражения при $\alpha_1 < 0$.

Если рассмотреть динамику изменения значений коэффициента k_1 для прямоугольных плит с различными отношениями сторон плиты $\lambda = \frac{a}{b}$ при $\alpha_1 = 0, (P_2 = 0)$, то будем иметь следующую картину, представленную на графике (фиг. 6), где по оси X -ов отложены различные значения λ , а по оси Y -ов — значение коэффициента k_1 .

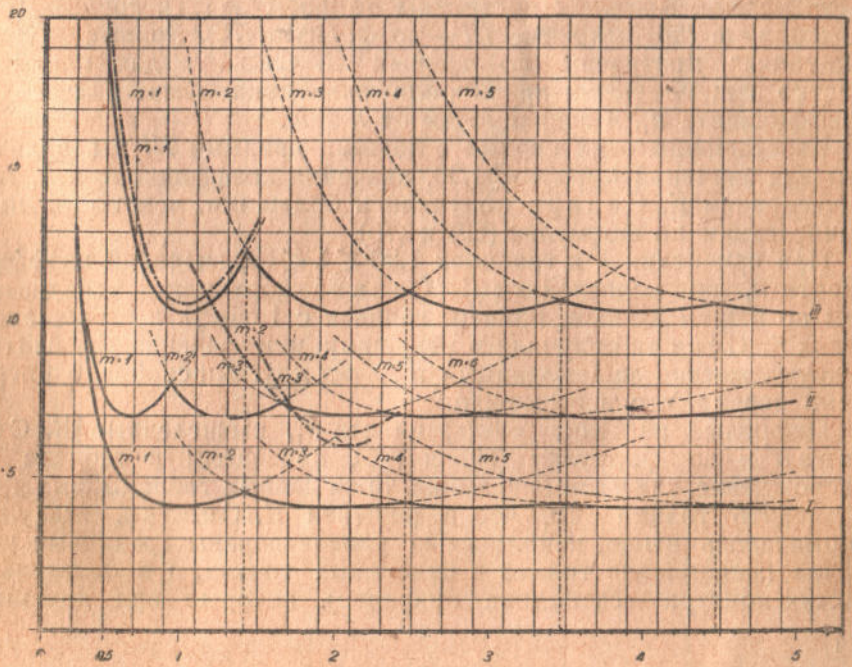
Значения коэффициента $\Gamma_K = \frac{D_0}{D_1}$



Значения отношений $\alpha_1 = \frac{D_0}{\rho_1}$

Фиг. 5

Значения коэффициента Γ



$\lambda \cdot \frac{c}{\delta}$

Фиг. 6

№№ п. п.	Значения $\lambda = \frac{a}{b}$	$\lambda=0$	$\lambda=\frac{1}{2}$	$\lambda=3/4$	$\lambda=1$		$\lambda=\frac{3}{4}$		$\lambda=\frac{3}{2}$		
					$m=1$	$m=2$	$m=1$	$m=2$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
					1	Значение $k_1 = \frac{P_1 a^2}{D\pi^2}$ по вычислениям К. Сезава	4,0	5,14	—	10,65	—
2	Значение $k_1 = \frac{P_1 b^2}{D\pi^2}$ по данным К. Сезава	∞	20,56	—	10,65	—	—	—	13,33	8,18	9,15
3	Значение $k_1 = \frac{P_1 b^2}{D\pi^2}$ по формуле (69)	∞	19,68	12,00	10,66	19,66	11,37	14,47	13,44	12,03	19,66
4	Значение $k_1 = \frac{P_1 b^2}{D\pi^2}$ по уточненной формуле (75)	∞	19,42	11,87	10,38	—	10,86	—	—	11,88	—

Кривые, обозначенные цифрой I, показывают изменения коэффициента k_1 , в зависимости от λ и m в случае плиты со свободно опертыми краями. Кривые, обозначенные цифрой II, показывают изменения коэффициента k_1 , в зависимости от λ и m в случае плиты с двумя продольными жестко защемленными краями и двумя другими свободно опертыми (силы P_1 действуют на свободно опертые края) и аналогично кривые III показывают изменение коэффициента k_1 в случае плиты с жестко защемленными краями. Кривые I построены по формуле (21), кривые II — по формуле (50) и кривые III — по формуле (75). Кривые „пунктир-точка“ построены по данным К. Сезава для плиты с жестко защемленными краями, они также показывают изменение коэффициента k_1 , в зависимости от λ и m .

Из сравнения этих кривых с нашими кривыми III мы видим, что для значений λ $0 \leq \lambda < 1,20$, значения коэффициентов k_1 по вычислениям К. Сезава получились большими, чем по нашим вычислениям по формулам (69) и (75).

При изменении λ в границах $1,20 < \lambda < \infty$, значения коэффициента k_1 по вычислениям К. Сезава получились меньшими, чем по нашим данным, причем, начиная с $1,65 \leq \lambda$ и выше, значения К. Сезава получились меньшими, чем значения для плиты с двумя жестко защемленными и двумя другими свободно опертыми краями, что невозможно.

Цифровые значения коэффициента k_1 , вычисленные К. Сезавой и по формулам (69) и (75), приведены в таблице 3. Расхождение, как данных графика, так и данных таблицы 3 можно объяснить только тем, что в решении К. Сезава, как уже упоминалось выше, неполностью удовлетворены граничные условия (защемление только в отдельных точках, а в остальных частях контура — свободное опирание), которые при длинных

Таблица 3

$\lambda=2$			$\lambda=2,5$			$\lambda=3$			$\lambda=3,5$			$\lambda=4,0$		
$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
27,7	24,2	36,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6,42	6,05	9,12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10,66	13,66	19,66	11,48	11,06	14,47	10,66	12,03	15,18	11,04	10,99	15,04	12,77	10,66	11,38
10,38	—	—	—	10,96	—	10,38	—	—	—	10,69	—	—	10,38	—

плитах, т. е. при больших $\lambda = \frac{a}{b}$ значительно искажают истинное состояние плиты и дают преуменьшенные значения критической силы, приближая эти значения к значениям критической силы, имеющим место при свободном опирании плиты по контуру.

В заключение считаю приятным долгом принести мою благодарность и самое глубокое чувство признательности заслуженному деятелю наук проф.-доктору Д. М. Синцову за просмотр работы перед напечатанием в математической ее части и ценные указания, которые им были сделаны по этой работе.

В специальной части по настоящей работе мне был сделан ряд ценных указаний проф.-доктором В. М. Майзелем, что считаю своим приятным долгом здесь отметить и принести В. М. Майзелю свою искреннюю благодарность.

ВОПРОСЫ РАСЧЕТА СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Расчет сжато-изогнутых стержней представляет собой одну из центральных проблем современной теории сооружений. Практическая важность вопроса привлекает к нему внимание многих исследователей. За последние годы появился целый ряд чрезвычайно интересных работ, теоретических и экспериментальных, как советских, так и иностранных ученых по вопросам теории сжато-изогнутых стержней.

В настоящей работе освещаются некоторые вопросы, связанные с практическим расчетом сжато-изогнутых стержней. Излагаемые здесь соображения, опирающиеся на результаты новейших исследований Chwalla, Jeizek'a, Fritsche, Rös'a, Kaufmann и др., которые установили ряд важных зависимостей, составляющих теперь незыблемое достояние науки, — в некоторых отношениях упрощают уже выработанные методы расчета. Кроме того, в настоящей работе приведены и новые материалы, представляющие интерес с точки зрения разработки практической теории расчета сжато-изогнутых стержней.

§ 1. Практический метод определения критической силы и прогиба сжато-изогнутого стержня

Из различных способов определения критического значения сжимающих сил для сжато-изогнутых стержней наиболее простым и удобным является способ Роша. С ним может конкурировать метод Фритче, но за методом Роша все же остается преимущество наглядности.

В связи с пересмотром действующих технических условий и норм для расчета металлических конструкций ставится вопрос о включении расчета сжато-изогнутых стержней по Рошу в новые нормы. В настоящей статье рассматриваются некоторые приемы, позволяющие упростить расчет по Рошу.

Поясним вкратце, в чем заключается расчет сжато-изогнутых стержней по Рошу.

Основное допущение Роша, положенное им в основу метода, состоит в том, что он, вместо точного очертания изогнутой оси, принимает некоторое приближенное очертание, подчиняя его условию равенства в среднем сечении момента внешних сил и момента внутренних сил.

Обратимся сначала к простейшим примерам.

Дан стержень, растягиваемый внешней силой P . Дадим стержню некоторое абсолютное удлинение f . Внутреннее усилие S_i , соответствующее этому удлинению, найдем из закона Гука:

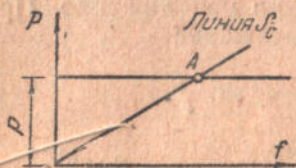
$$S_i = \frac{E \cdot F \cdot f}{l}.$$

Состоянию равновесия в стержне соответствует условие, что внешние силы уравновешиваются с внутренними:

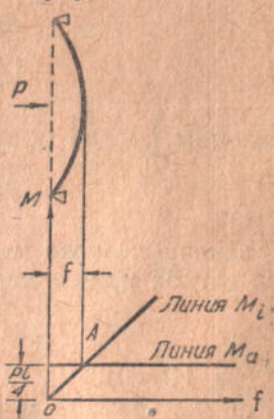
$$\begin{aligned} S_i &= P, \\ \frac{EFf}{l} &= P. \end{aligned}$$

Отсюда можно найти, например, удлинение, вызываемое силой P :

$$f = \frac{Pl}{EF}.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Представим эти соотношения графически (фиг. 1). По оси x откладываем деформации f ; по оси y — силы P и S_i . Сила S_i зависит линейно от f ; следовательно, S_i изобразится прямой, проходящей через начало координат. Пересечение A этой прямой с горизонтальной прямой, проходящей на расстоянии p от оси f , определяет состояние равновесия системы.

Второй пример. Рассмотрим балку на двух опорах, нагруженную силой P посередине. В среднем сечении имеем:

1) момент внутренних сил:

$$M_i = EJ \frac{1}{\rho} = EJ \frac{d^2y}{dx^2};$$

2) момент внешних сил:

$$M_a = \frac{Pl}{4} = \text{const}$$

(не зависит от f).

В координатной системе $M-f$ (фиг. 2) строим линии M_a и M_i . Линия M_a — прямая, параллельная оси f . Чтобы выразить M_i как функцию f , воспользуемся сначала точным уравнением кривой изгиба, соответственно случаю действия силы посередине пролета, что приводит нас к зависимости:

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ}; \quad M_i = \frac{Pl}{4},$$

исключив из этих двух уравнений P , придем к выражению:

$$M_i = \frac{12EJ}{l^2} f.$$

Линия M_i — прямая, проходящая через начало координат. Точка A пересечения линий M_a и M_i соответствует состоянию равновесия системы под действием заданной системы сил (момент внешних сил должен быть равен моменту внутренних). Это состояние определяется равенством:

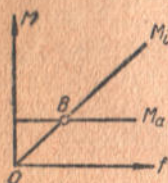
$$M_i = M_a;$$

$$\frac{12EJf}{l^2} = \frac{Pl}{4}.$$

Отсюда находим прогиб посередине:

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Решим задачу тем же методом, но приближенно. Применим для кривой изгиба приближенное выражение



Фиг. 3

Имеем:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

$$M_i = EJ \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=\frac{l}{2}} = -EJf \frac{\pi^2}{l^2};$$

$$M_a = \frac{Pl}{4}.$$

Снова (фиг. 3) строим линии M_i и M_a . В точке пересечения их имеем:

$$M_i = M_a;$$

$$EJf \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{Pl}{4}.$$

Отсюда можем найти приближенное выражение для прогиба f :

$$f = \frac{Pl^3}{4\pi^2 EJ},$$

отличающееся от точного примерно на 20%.

Совершенно также Рош решает задачу об определении прогиба в сжато-изогнутом стержне¹.

Рассмотрим, например, эксцентрично-сжатый стержень (фиг. 4) (сжато-изогнутые стержни по Рошу приводятся к внецентренно-сжатым по моменту в среднем сечении).

Силы — P , эксцентриситет — p . Ищем прогиб f посередине.

Будем сначала считать, что стержень вполне упругий.

Момент M_a внешних сил P посередине полета:

$$M_a = P(f + p). \quad (1)$$

¹ Stahlbau, 1935, Н. 5: 1936, Н. 14.

Строим прямую BC , выражающую P как функцию f . Отрезок, отсекаемый BC на оси f слева от O , равен эксцентриситету p ; угловой коэффициент BC равен P (из (1) $\frac{dM_a}{df} = P$).

Переходим к моменту M_i внутренних сил в среднем сечении:

$$M_i = D \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (2)$$

Вид кривой $y = f(x)$ неизвестен; поэтому P ош принимает приближенно, что кривая изгиба стержня — синусоида:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (3)$$

Введение такого упрощения оправдано многочисленными экспериментальными и теоретическими подтверждениями построенных на нем выводов.

Из (3) имеем:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\frac{l}{2}} = \left(\frac{1}{\rho}\right)_{\max} = -f \frac{\pi^2}{l^2}. \quad (4)$$

Уравнение (2) приобретает следующий вид:

$$M_i = Df \frac{\pi^2}{l^2}. \quad (5)$$

Так как стержень вполне упругий, то $D = \text{const}$ и (5) выражает также прямую. Это прямая OA .

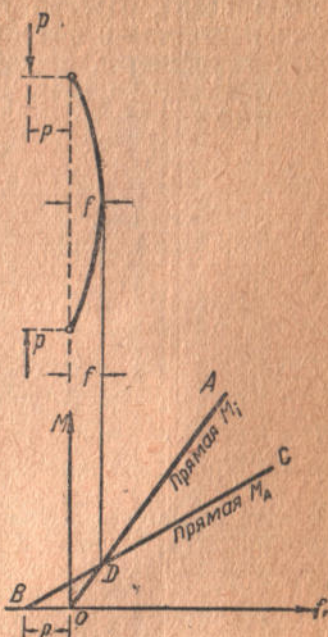
Пересечение BC и OA (точка D) определяет собой состояние равновесия, которое установится. Абсцисса точки D — искомый прогиб f .

Задача имеет решение только в том случае, если прямая M_i круче прямой M_a , т. е. если $\frac{dM_a}{df} < \frac{dM_i}{df}$.

Подставляя вместо M_i и M_a их значения, получим, что должно иметь место неравенство

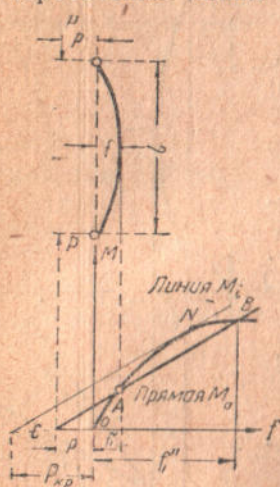
$$P < \frac{D\pi^2}{\rho}.$$

При $P = \frac{D\pi^2}{\rho} = \frac{EJ\pi^2}{l^2} \left(\frac{dM_i}{df} = \frac{dM_a}{df}\right)$ обе прямые параллельны, точка D уходит в бесконечность. Такая сила (равная эйлеровой силе стержня) должна вызвать бесконечно большой прогиб f . Этот вывод, хотя и не отвечающий действительной картине явления, вполне согласуется с выводом элементарной теории внецентренного сжатия упругих длинных стержней, построенной на интегрировании приближенного уравнения упругой линии $EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M$.



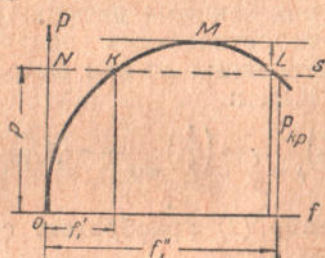
Фиг. 4

Если напряжения переходят за предел пропорциональности, то $D \neq \text{const}$, при данном $\sigma_0 = \frac{P}{F}$ с увеличением f (кривизны стержня) D будет уменьшаться, уравнение (2) в этом случае даст некоторую кривую OAB (фиг. 5), обращенную выпуклостью вверх. Прогиб f попрежнему найдется как абсцисса точки пересечения прямой M_a с линией M_i — кривой OA . Таких точек пересечения линий M_a и M_i будет, вообще говоря, две и



Фиг. 5

данной силе P будут соответствовать два состояния равновесия. Первая, ближайшая к C , точка пересечения A определит собой устойчивое состояние равновесия, вторая B — неустойчивое, которое реально никогда не осуществляется.



Фиг. 6

Легко видеть, что если прямая BC коснулась бы кривой OAB , то этот случай соответствовал бы критическому состоянию стержня: под действием приложенной к нему силы стержень находился бы в состоянии безразличного равновесия, которое от малейшей причины могло бы нарушиться, причем стержень выпучился бы.

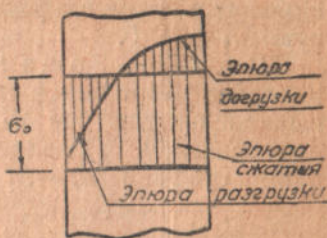
Это легко пояснить на графике $P = F(f)$ (фиг. 6). Пусть кривая L выражает для стержня (фиг. 5) зависимость $P = F(f)$: P — сила, приложенная с эксцентриситетом p ; f — вызываемый ею прогиб. Пусть горизонтальная прямая NS соответствует тому значению силы P , для которого построен чертеж фиг. 5. Прямая NS пересекает кривую OM в двух точках K и L . Абсциссы этих точек — прогибы стержня в двух состояниях равновесия, которые возможны при данном значении силы P . Эти прогибы на чертеже 5 обозначены f_1 и f_1'' (абсциссы точек A и B).

Критическое состояние соответствует точке M . Значит, в критическом состоянии должен получиться только один прогиб, только одно состояние равновесия. Отсюда заключаем, что на фиг. 5 в этом случае прямая M_a должна коснуться кривой M_i .

Проводя на фиг. 5 касательную $NL \parallel BC$, получим, очевидно,

на оси $f P_{кр}$ — эксцентриситет, при котором данная сила P будет критической силой. Повторяя это построение при разных P и $\sigma_0 = \frac{P}{F}$, найдем $P_{кр}$ при заданном P . В этом и заключается метод определения критической силы для сжатого изогнутого стержня по Рошу.

Построение кривой M_i по Рошу производится на основании гипотезы плоских сечений следующим путем. Выбирается ряд значений σ_0 . Момент M_i представляется в виде $M_i = D \frac{1}{\rho} = T_k J \frac{1}{\rho}$, аналогичном формуле $M_i = EJ \frac{1}{\rho}$ при упругих деформациях.



Фиг. 7

При данном σ_0 определяются T_k при разных значениях $\frac{1}{\rho} = \frac{\Delta}{h}$, где $\Delta = \epsilon_a - \epsilon_i$

алгебраическая разность относительных удлинений крайних волокон, на выпуклой и на вогнутой стороне стержня, h — высота сечения. Для определения T_k сначала вычисляется момент M_i

внутренних сил в сечении при данных σ_0 и $\frac{\Delta}{h}$. На фиг. 7 показана эпюра внутренних сил, которая служит для вычисления M_i . Прямоугольник высотой σ_0 — внутренние усилия, соответствующие центральному сжатию σ_0 .

Искривление стержня $\frac{1}{\rho} = \frac{\Delta}{h}$ создает добавочную эпюру, соответствующую моменту M_i .

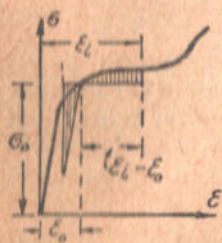
Растягивающие усилия этой эпюры (разгрузка основного напряжения σ_0), согласно закону Герстнера, меняются по закону прямой линии пропорционально добавочным удлинениям волокон, причем модуль упругости здесь принимается равным обычному модулю Юнга материала (для стали $2,1 \cdot 10^6$ кг/см²).

Сжимающие усилия добавочной эпюры повторяют очертания диаграммы $\sigma - \epsilon$ стали (фиг. 8) справа от ординаты σ_0 на расстоянии, которое определяется разностью $\epsilon_i - \epsilon_0$ в рассматриваемом случае (ϵ_0 — удлинение, соответствующее σ_0).

Два условия: 1) сумма растягивающих усилий равна сумме сжимающих усилий и 2) $\epsilon_a - \epsilon_i = \Delta$ однозначно определяют эпюру добавочных усилий при заданных σ_0 и $\frac{\Delta}{h}$.

Имея эпюру добавочных усилий, вычисляем M_i . Затем по Рошу из уравнения:

$$M_i = T_k J \cdot \frac{\Delta}{h}$$



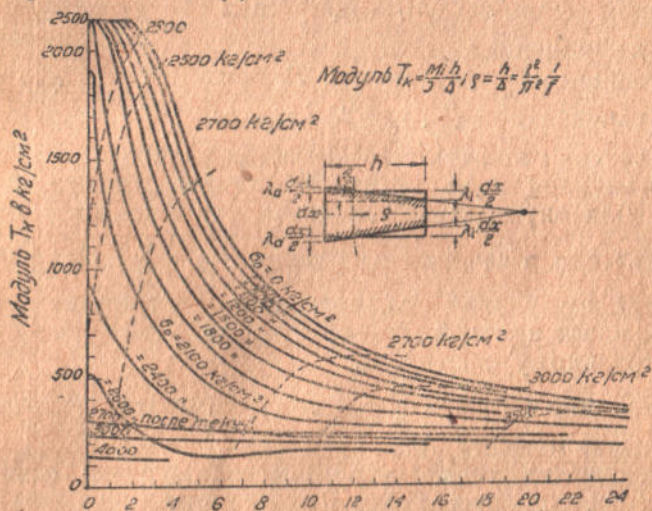
Фиг. 8

находим:

$$T_k = \frac{M_i}{J} \cdot \frac{h}{\Delta} \quad (6)$$

Для стали в случае стержня прямоугольного сечения значения $T_k = T_k(\sigma_0, \Delta)$ приведены Рощем в виде графика (фиг. 9). Пользуясь этим графиком, можно легко построить любую кривую M_i фиг. 5.

Построение Роща можно во многом упростить. Модуль T_k , который вычисляется по моменту M_i , служит опять таки для вычисления того же M_i . Поэтому следует признать, что построение графиков T_k является излишней операцией. Надо строить прямо графики $M_i - M(\Delta)$.



Изменение (увеличение или уменьшение) поперечных размеров сечения в b раз при данных σ_0 и Δ изменяет (увеличивает или уменьшает) M_i также b раз; изменение продольных размеров в h раз изменит M_i в h^2 раз. Поэтому для геометрически подобных сечений момент M_i может быть представлен формулой:

$$M_i = A \frac{J}{h}, \quad (7)$$

где J — момент инерции сечения,

h — высота сечения,

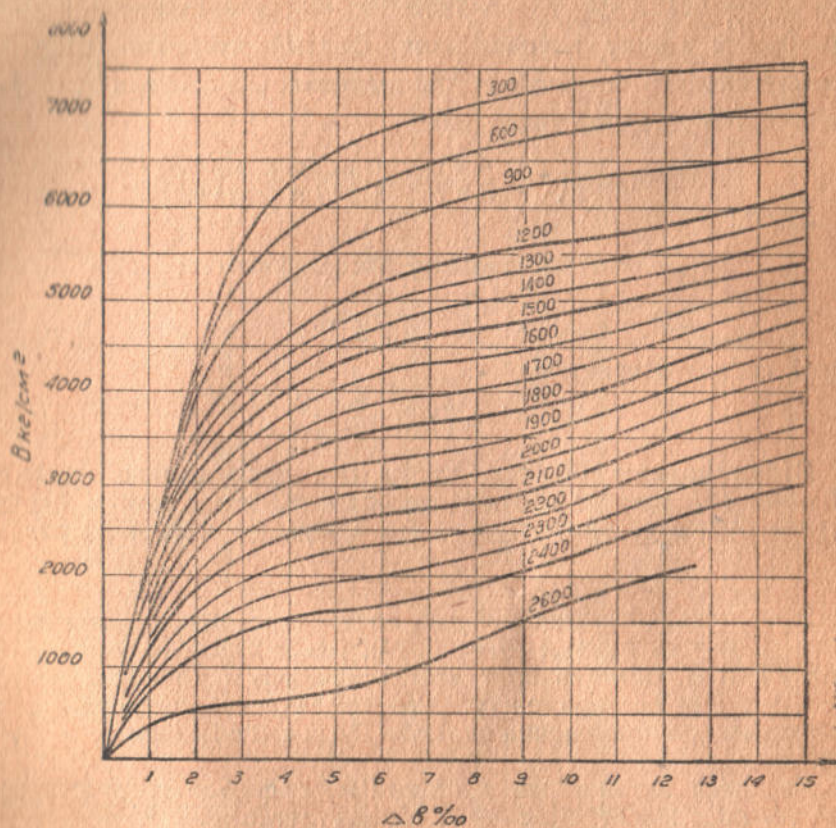
A — коэффициент, одинаковый для всех геометрически подобных сечений.

Мы предлагаем вместо графиков $T_k = T_k(\Delta)$ строить графики $M_i = M_i(\Delta)$; по горизонтальной оси откладываются Δ ; по вертикальной $M_i = A \frac{J}{h}$, причем $\frac{J}{h}$ — буквенный множитель. Ко-

коэффициент A связан с модулем T_k Роша — очевидной независимостью:

$$A = T_k \cdot \Delta. \quad (8)$$

Пользуясь этой формулой, мы по графику $T_k = T_k(\Delta)$ Роша (фиг. 9) построили кривые $M_i = M_i(\Delta)$ (фиг. 10) для стали $\sigma_T = 2700 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_p = 1900 \text{ кг/см}^2$ для прямоугольного сечения.



Фиг. 10

Такие графики должны быть приведены в TU и H и для других форм сечения. Готовые бланки с графиками $M-\Delta$ должны быть приложены к техническим условиям и нормам.

Графиками $M_i = M_i(\Delta)$ можно пользоваться непосредственно для определения критической силы стержня. Переход к графикам $M_i = M_i(f)$ (фиг. 5) вовсе не является обязательным.

Из (4) заключаем, что Δ пропорционально f ; поэтому такой переход легко можно было бы осуществить простой переменной масштаба для горизонтальных расстояний. Но проще, введя в формулу:

$$M_a = P(p + f)$$

вместо f его значение $f = \frac{\Delta \cdot l^2}{h \pi^2}$, строить прямую M_a в зависимости от Δ :

$$M_a = P \left(p + \frac{\Delta \cdot l^2}{h \pi^2} \right).$$

Если в этой формуле поставить:

$$P = bh\sigma_0$$

(мы имеем в виду эксцентрично сжатый стержень длиной l прямоугольного сечения $b \times h$) и выделити множитель $\frac{J}{h}$, то формула для M_a примет такой вид:

$$M_a = bh\sigma_0 \left(p + \frac{\Delta \cdot l^2}{h \pi^2} \right) = \sigma_0 \cdot 12 \left[\frac{p}{h} + \frac{\Delta}{\pi^2} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \right] \frac{J}{h}.$$

Здесь:

$$\frac{p}{h} = \nu \text{ относительный эксцентриситет;}$$

$$\frac{l}{h} = \frac{\lambda}{2\sqrt{3}},$$

где λ гибкость стержня.

$$M_a = 12\sigma_0 \left(\nu + \frac{\Delta}{12\pi^2} \lambda^2 \right) \frac{J}{h}. \quad (9)$$

Строя прямую (9) так, чтобы она коснулась в графиках $M_i = M_i(\Delta)$ кривой, соответствующей σ_0 , введенной в (9), мы вправе будем утверждать, что эта σ_0 будет при данной λ равна σ :

$$\sigma_0 = \sigma_{кр}.$$

Этот путь, позволяющий все построения производить непосредственно на кривых $M_i = M_i(\Delta)$, раз и навсегда установленных TU и H , обеспечивает нам наибольшую точность результата, так как все промежуточные графические построения, неизбежные при применении способа Р о ш а в обычном виде, здесь отпадают.

Абсцисса точки касания прямой (9) с соответствующей кривой M_i определяет собой $\Delta_{кр}$. По $\Delta_{кр}$ легко найти критическое значение $\frac{f_{кр}}{l}$ из уравнений:

$$\frac{\Delta_{кр}}{h} = f_{кр} \frac{\pi^2}{l^2}; \quad \frac{l}{h} = \frac{\lambda}{2\sqrt{3}}.$$

Совершенно так же решается вопрос и для сжато-изогнутого стержня с поперечной нагрузкой; придется только в (1) вместо Pp ввести M_0 — момент от поперечной нагрузки в среднем сечении.

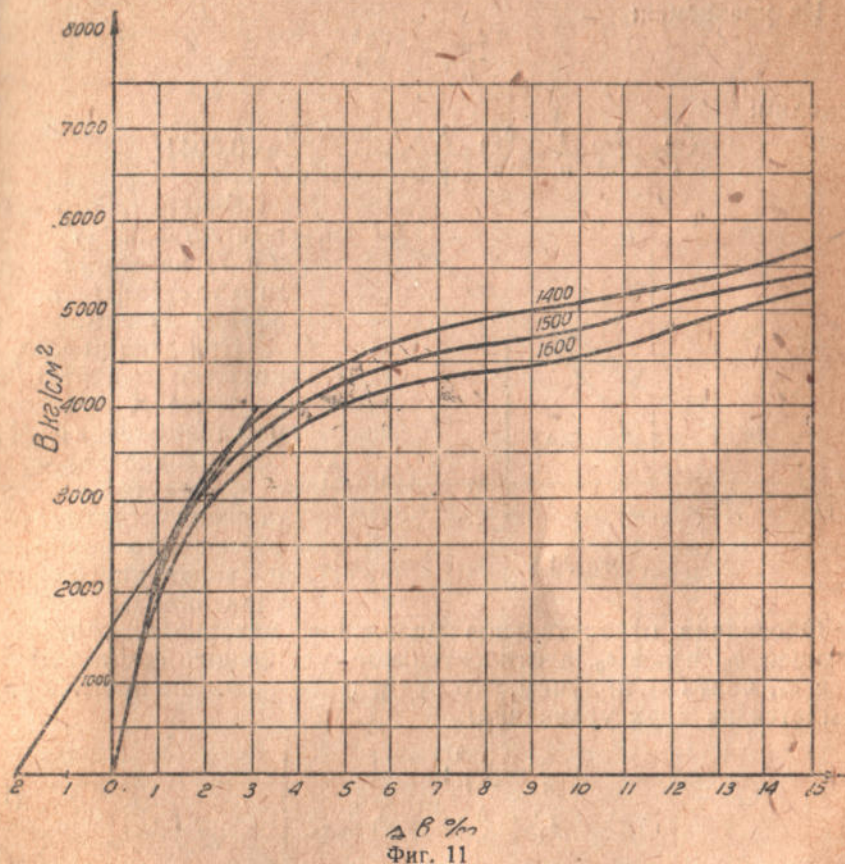
Пример. Надо определить $\sigma_{кр}$ для стального стержня прямоугольного сечения при $\lambda = 70$. Эксцентриситет: $p = 0,5$ $K = \frac{0,5h}{6}$; $\nu = \frac{p}{h} = 0,083$.

Уравнение (9) прямой M_a :

$$M_a = 12\sigma_0 \left(\nu + \frac{\Delta}{12\pi^2} \lambda^2 \right) \frac{J}{h};$$

$$M_a = 12\sigma_0 \left(0,083 + \frac{\Delta \cdot 70^2}{12 \cdot \pi^2} \right) \frac{J}{h}. \quad (10)$$

Задача решается методом проб, причем на графиках $M_i = M_i(\Delta)$ проводится целый ряд прямых (10) (Фиг. 11) при раз-



ных σ_0 . Построение облегчается тем, что все прямые должны проходить через одну точку K , лежащую на оси f слева от начала координат O .

Расстояние K_Δ этой точки от O находим, приравнявая (10) нулю и полагая $\Delta = K_\Delta$:

$$K_\Delta = -\frac{12\pi^2\nu}{\lambda^2} = -\frac{12\pi^2 \cdot 0,083}{70^2} = -0,002.$$

Знак (—) указывает, что K_Δ откладывается влево от O .

Через K проводим ряд прямых (10) при разных значениях σ_0 . Построение показало, что прямая (10) при $\sigma_0 = 1500 \text{ кг/см}^2$ касается кривой $M_i = M_i(\Delta)$ для того же значения $\sigma_0 = 1500 \text{ кг/см}^2$, следовательно, искомое $\sigma_{кр}$:

$$\sigma_{кр} = 1500 \text{ кг/см}^2.$$

Абсцисса точки касания:

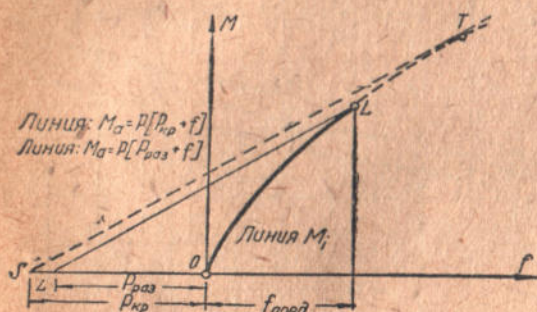
$$\Delta_{кр} = 0,002.$$

Из уравнения:

$$\frac{\Delta_{кр}}{h} = f_{кр} \frac{\pi^2}{l^2}$$

находим:

$$\frac{f_{кр}}{l} = \frac{\Delta_{кр}}{\pi^2} \cdot \frac{l}{h} = \frac{\Delta_{кр}}{\pi^2} \frac{\lambda}{2\sqrt{3}} = \frac{0,002 \cdot 70}{\pi^2 2\sqrt{3}} = 0,0041.$$



Фиг. 12

Заметим, что кривые $M_i = M_i(f)$ (фиг. 2 и 7) не могут быть продолжены произвольно далеко.

При данном σ_0 можно легко рассчитать то значение f , при котором напряжения в крайней, вогнутой стороны стержня достигнут разрушающего напряжения (временного сопротивления) σ_b .

Обозначив относительное удлинение материала, соответствующее σ_0 , через ϵ_0 , а относительное удлинение, соответствующее σ_b , через ϵ_b , получим, что предельное значение прогиба $f_{пред}$ найдется из двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta}{h} &= f \frac{\pi^2}{l^2}; \\ \epsilon_0 + \frac{\Delta}{h} (h - x) &= \epsilon_b. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Если к кривой $M_i = M_i(f)$ в пределах OL ($0 < f < f_{пред}$) нельзя провести касательной параллельной $ST[M_a = P(p_{кр} + f)]$, если такая касательная касается кривой M за $f = f_{пред}$, то, проводя через L линию $LL \parallel ST$ (фиг. 12), получим на оси f слева от O отрезок $P_{раз}$, который определит собой тот эксцентриситет силы P , при котором от действия P стержень начнет разрушаться. В этом случае стержень не будет иметь критического состояния, потеря устойчивости в нем не будет иметь места. Прежде чем стержень дойдет до критического состояния, он разрушится.

Такая картина имеет место в железобетонных сжато-изогнутых стержнях, ее можно ожидать также в мало пластичных сталях.

Прогибы, найденные по Р о ш у для сжато-изогнутого стержня (в критическом состоянии и в далеком от критического состоянии), могут быть уточнены при помощи метода последовательных приближений.

Разбиваем стержень (фиг. 13) на определенное число равных отрезков, например, на 12 отрезков (половину стержня на 6 частей). Задаемся синусоидальной кривой изгиба стержня, и, зная прогиб посередине, найденный по Р о ш у, вычисляем прогибы y_1, y_2, \dots всех остальных точек деления $1, 2, 3, \dots$

Вычисляем изгибающие моменты $M_1 \dots M_6, M_6$ в сечениях $1, 2 \dots 6$. Далее переходим к вычислению исправленных прогибов первого приближения $y_1, y_2, y_3 \dots y_6$.

Вычисление этих прогибов графо-аналитическим способом требует определения по изгибающему моменту кривизны в каждом сечении. Следуя Р о ш у, можно было бы вычислить кривизну по формуле:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Delta}{h} = \frac{M}{T_k J}, \quad (12)$$

где T_k — модуль, находимый по графику фиг. 9.

Этот путь неудобен, так как здесь приходится подбирать T_k по Δ в то время, как Δ является искомой.

Гораздо удобнее пользоваться непосредственно кривыми $M_i = M_i(\Delta)$, построенными выше (см. фиг. 10).

При определении прогибов придется вычислять интегралы вида $\int u dx$. Вычислять их будем по следующим приближенным формулам.

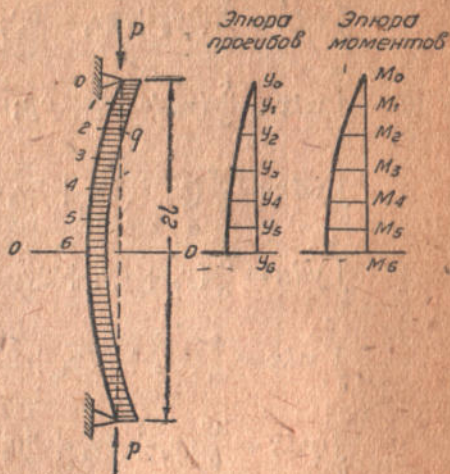
Длина стержня $L = 2l$. Пусть длина l разбита на 6 равных частей. Обозначим: $0, 1, 2, 3, \dots$ номера точек, которые делят l на 6 равных частей.

$S = \frac{l}{6}$ длина каждой части.

y_i значение функции для точки i .

Функция y_i может быть:

$\frac{M_i}{T_k}$ или непосредственно α_i — если вычисляются углы поворота;



Фиг. 13

$\frac{M_i d_i}{T_{KJ}}$ или $x_i d_i$, если вычисляются прогибы.

В последнем случае d_i расстояние от сечения i до оси, в направлении которой ищется перемещение интересующего нас сечения.

Приближенные значения интегралов:

$$\int_0^1 y dx = \frac{S}{12} (5y_0 + 8y_1 - y_2);$$

$$\int_0^2 y dx = \frac{S}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2);$$

$$\int_0^3 y dx = \frac{3S}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3);$$

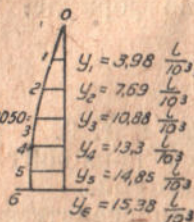
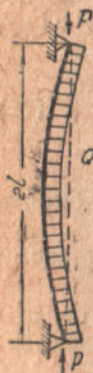
$$\int_0^4 y dx = \frac{S}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4);$$

$$\int_0^5 y dx = \frac{S}{24} (9y_0 + 27y_1 + 27y_2 + 17y_3 + 32y_4 + 8y_5);$$

$$\int_0^6 y dx = \frac{3S}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 2y_4 + 3y_5 + y_6).$$

(13)

Пример. Построить упругую линию для сжато-изогнутого стержня, сжатого продольными силами P и одновременно изогнутого поперечной равномерно-распределенной нагрузкой (фиг. 14). Материал "Сталь-3". Длина стержня: $L = 2l$. Сечение прямоугольное $b \times h$. Гибкость стержня $\lambda = 105$; $\frac{l}{h} = \frac{\lambda}{4\sqrt{3}}$. Среднее напряжение на стержне: $\sigma_0 = 900 \text{ кг/см}^2$. Интенсивность поперечной нагрузки:



$$q = \frac{2nP}{2l} = \frac{0,05 \cdot 900bh}{2l} = 22,5 \frac{bh}{l}.$$

Фиг. 14

Разбиваем половину стержня на 6 равных отрезков точками 1, 2, 3...6. Определяем в сечениях 1...6 изгибающие моменты от поперечной нагрузки:

$$\begin{aligned} M_1 &= 3,44 bhl; & M_4 &= 10,0 bhl; \\ M_2 &= 6,25 bhl; & M_5 &= 10,94 bhl; \\ M_3 &= 8,44 bhl; & M_6 &= 11,25 bhl. \end{aligned}$$

Задаемся прогибами по синусоидальной кривой.

Прогиб y_6 по Рошу: $y_6 = 15,38 \frac{l}{10^3}$; при синусоидальной кривой прогиба, прогибы точек 1, 2, 3...6 (см. фиг. 14) соответственно равны:

$$y_1 = 3,98 \frac{l}{10^3}; \quad y_2 = 7,69 \frac{l}{10^3}; \quad y_3 = 10,88 \frac{l}{10^3};$$

$$y_4 = 13,3 \frac{l}{10^3}; \quad y_5 = 14,85 \frac{l}{10^3}; \quad y_6 = 15,38 \frac{l}{10^3}.$$

Вычисляем в сечениях изгибающие моменты от нагрузки и от силы P :

Сечение 1: $M_1 = 7,02 \text{ bhl}$; $M_1 \frac{h}{J} = 1280 \text{ кг/см}^2$

Сечение 2: $M_2 = 13,15 \text{ bhl}$; $M_2 \frac{h}{J} = 2390 \text{ "}$

Сечение 3: $M_3 = 18,24 \text{ bhl}$; $M_3 \frac{h}{J} = 3320 \text{ "}$

Сечение 4: $M_4 = 21,97 \text{ bhl}$; $M_4 \frac{h}{J} = 4000 \text{ "}$

Сечение 5: $M_5 = 24,29 \text{ bhl}$; $M_5 \frac{h}{J} = 4420 \text{ "}$

Сечение 6: $M_6 = 25,07 \text{ bhl}$; $M_6 \frac{h}{J} = 4560 \text{ "}$

По изгибающим моментам графика (фиг. 10; $M_i = M_i(\Delta)$) находим Δ . Кривизна α стержня в точках 1, 2, 3...6:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{h} = \frac{0,58}{10^3 h}; \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{h} = \frac{1,15}{10^3 h}; \quad \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{h} = \frac{1,68}{10^3 h};$$

$$\alpha_4 = \frac{\Delta_4}{h} = \frac{2,12}{10^3 h}; \quad \alpha_5 = \frac{\Delta_5}{h} = \frac{2,48}{10^3 h}; \quad \alpha_6 = \frac{\Delta_6}{h} = \frac{2,64}{10^3 h}.$$

Для прогибов $y_6, y_5 \dots y_1$ имеем следующие очевидные формулы (x — расстояние от сечения до шарнира O):

$$y_6 = \int_6^0 \alpha dx \cdot x; \quad y_5 = y_6 - \int_6^5 \alpha dx \cdot x; \quad y_4 = y_5 - \int_6^4 \alpha dx \cdot x.$$

Интегралы, входящие в эти формулы, вычисляем по приближенным формулам (13):

$$\int_6^0 \alpha dx = \frac{3dl}{8} \left(\alpha_3 + 3 \frac{5}{6} \alpha_5 + 3 \frac{2}{3} \alpha_4 + 2 \frac{1}{2} \alpha_3 + 3 \frac{1}{3} \alpha_2 + 3 \frac{1}{6} \alpha_1 + 0 \alpha \right);$$

$$\int_6^5 \alpha dx = \frac{dl}{12} \left(5 \frac{1}{6} \alpha_6 + 8,0 \alpha_5 - \frac{1}{6} \alpha_4 \right);$$

$$\int_6^4 \alpha dx = \frac{dl}{3} \left(\frac{1}{3} \alpha_6 + 4 \cdot \frac{1}{6} \alpha_5 + 0 \cdot \alpha_3 \right);$$

$$\int_6^3 x dx = \frac{3dl}{8} \left(\frac{1}{2} x_6 + 3 \frac{1}{3} x_5 + 3 \frac{1}{6} x_4 + 0 \cdot x_3 \right);$$

$$\int_6^2 x dx = \frac{dl}{3} \left(\frac{2}{3} x_6 + 4 \frac{1}{2} x_5 + 2 \frac{1}{3} x_4 + 4 \frac{1}{6} x_3 + 0 \cdot x_2 \right);$$

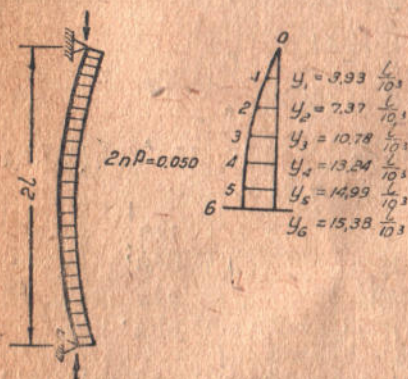
$$\int_6^1 x dx = \frac{dl}{24} \left(9 \frac{5}{6} x_6 + 27 \frac{2}{3} x_5 + 27 \frac{1}{2} x_4 + 17 \frac{1}{3} x_3 + 32 \frac{1}{6} x_2 + 8 \cdot 0 x_1 \right).$$

Прогибы первого приближения (фиг. 15):

$$y_6 = 15,38 \frac{l}{10^3}; \quad y_5 = 14,99 \frac{l}{10^3}; \quad y_4 = 13,24 \frac{l}{10^3};$$

$$y_3 = 10,76 \frac{l}{10^3}; \quad y_2 = 7,54 \frac{l}{10^3}; \quad y = 3,93 \frac{l}{10^3} y_0 = 0.$$

Совершенно также производим вычисление прогибов второго приближения. В данном случае второе приближение не нужно, так как совпадение введенных в расчет прогибов с полученными прогибами получилось достаточно хорошее.



Фиг. 15

§ 2. Расчет сжато-изогнутых стержней по прогибам

Зная критическую нагрузку стержня, можно найти допускаемую нагрузку, соответствующую опасному состоянию. Но необходимо проверить еще допускаемые нагрузки, отвечающие состояниям других категорий. Должна быть проверена прочность стержня. В мало пластических

сталях можно ожидать, что до потери несущей способности произойдет излом стержня.

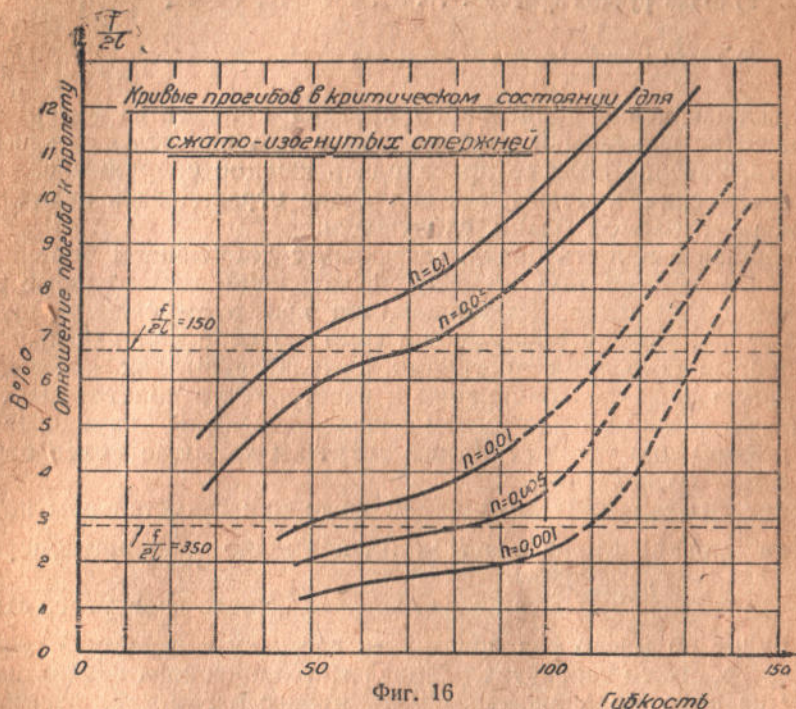
В стержнях из стали „Сталь 3“, как показывает расчет и опыты, потеря устойчивости предшествует разрушению.

Рассмотрим вопрос о прогибах сжато-изогнутых стержней. Как известно, для изогнутых балок величина предельной нагрузки лимитируется почти всегда фактом появления недопустимо больших деформаций. Балка признается разрушенной фактически задолго до ее действительного разрушения. Естественно поэтому поставить вопрос о деформациях в сжато-изогнутых стержнях.

Для стального стержня прямоугольного сечения, нагруженного по схеме фиг. 14, мы, пользуясь способом Роша, нашли критические прогибы при разных гибкостях и для разных зна-

чений параметра n . Результаты расчета приведены на графике фиг. 16.

Из этого графика можно сделать такие выводы. Чем больше n , тем больше прогибы стержня в критическом состоянии. Следовательно, чем больше удельный вес деформации изгиба в сочетании изгиба и сжатия, тем больше прогиб в критическом состоянии. Большим гибкостям соответствуют большие прогибы $\frac{f}{2l}$.



Фиг. 16

Абсолютные значения $\frac{f}{2l}$ получаются, вообще говоря, значительными особенно для высоких значений n . Эти значения $\frac{f}{2l}$ настолько велики, что, оставляя пока открытым вопрос о допустимой величине прогиба в критическом состоянии, можно тем не менее утверждать заранее, что критическая нагрузка стержня, определяющая его предельную несущую способность, не будет в данном случае иметь значения при установлении допускаемой нагрузки. Этот вывод чрезвычайно важен. Он указывает, что существующее направление в теории расчета сжато-изогнутых стержней является безусловно односторонним.

Во многих случаях результаты расчета по Jeizek'y; Fritsche и др. не будут находить себе практического применения, ибо допускаемая нагрузка на стержень будет определяться только условиями деформации стержня.

Установим величину допускаемого прогиба для сжато-изогнутого стержня.

Для изгибаемых балок действующие технические условия и нормы дают следующие нормы прогибов под нагрузкой:

- 1) балки тяжелых кранов с электрическим оборудованием $\frac{1}{800} l$;
- 2) балки ручных кранов $\frac{1}{600} l$;
- 3) балки междуэтажных перекрытий $\frac{1}{250} l$;

При назначении предельного прогиба приходится указывать технические факторы и соображения о том впечатлении незыблемости, которое должно производить каждое сооружение.

Технические причины, заставляющие ограничивать величину прогиба изгибаемой балки, следующие:

Большая зыбкость балки, связанная с допущением большого прогиба, вызывает под подвижной нагрузкой значительные колебания сооружения. Развивающиеся при этом силы инерции создают перегрузку сооружения; сами по себе колебания, обусловленные большими прогибами, нежелательны, так как вызывают расшатывание соединений и расстройство конструкций.

Переходя к сжато-изогнутым стержням, заметим, что значительные деформации таких стержней могут вызвать еще более отрицательные последствия.

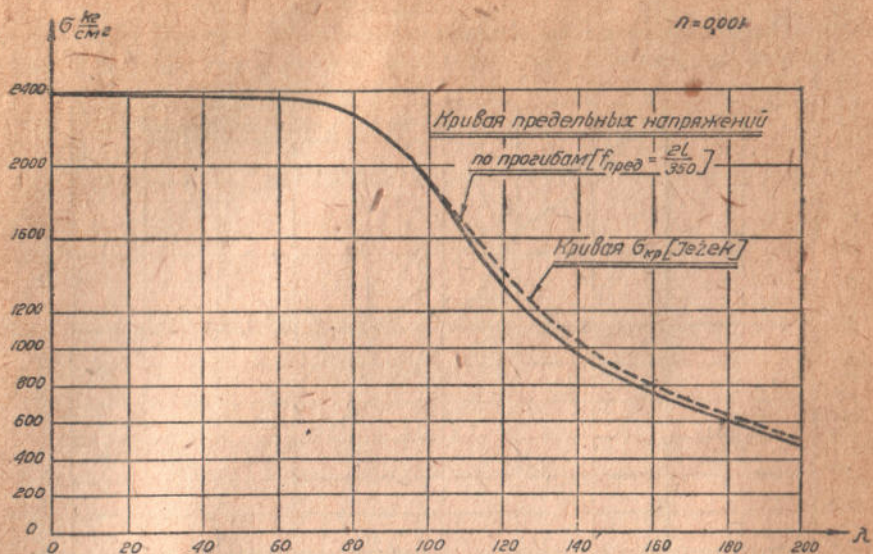
Хотя продольные деформации даже при значительном поперечном прогибе будут очень малы, примерно $\frac{l}{10000}$ при попереч-

ном прогибе $\frac{l}{150}$, но зато осевая нагрузка сжато-изогнутого стержня будет во много раз превышать нагрузку изгибаемой балки. Например, сжато-изогнутая колонна металлического здания цеха несет на себе подкрановые балки, кран с нагрузкой, нагрузку крыши, примыкающих междуэтажных перекрытий и т. д. Даже при ничтожной осевой деформации колонны вся эта огромная масса, поддерживаемая колонной, будет опускаться вместе с верхним сечением колонны. Отсюда ясно, что при назначении допускаемых деформаций сжато-изогнутых стержней необходимо соблюдение большой осторожности.

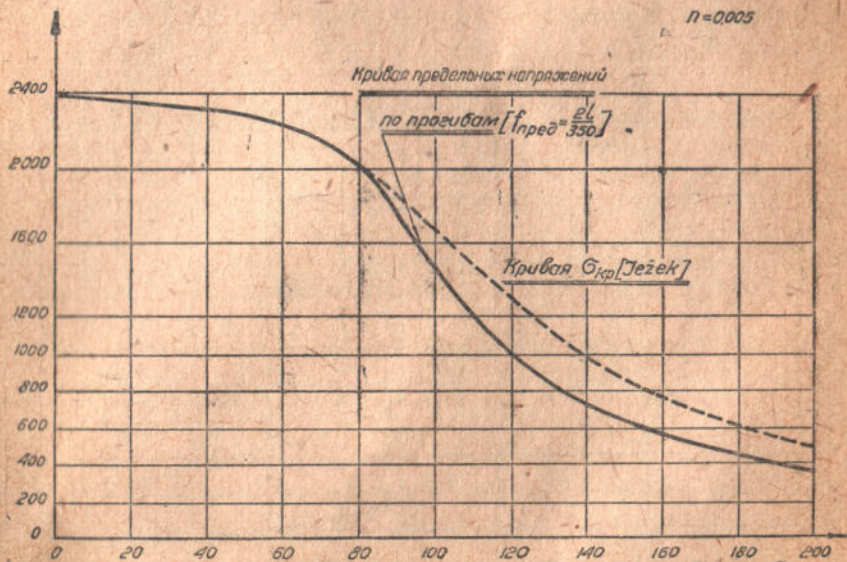
На основании этих соображений мы приняли для сжато-изогнутых стержней ту же норму допускаемого прогиба, что и для изогнутых стержней. Имея в виду условия расчета сжато-изогнутых колонн металлических цехов, мы остановились на предельном допускаемом прогибе для таких колонн $f = \frac{L}{600}$.

Тогда, наибольший прогиб в расчетном опасном состоянии мы должны принять равным (1,71 — запас надежности):

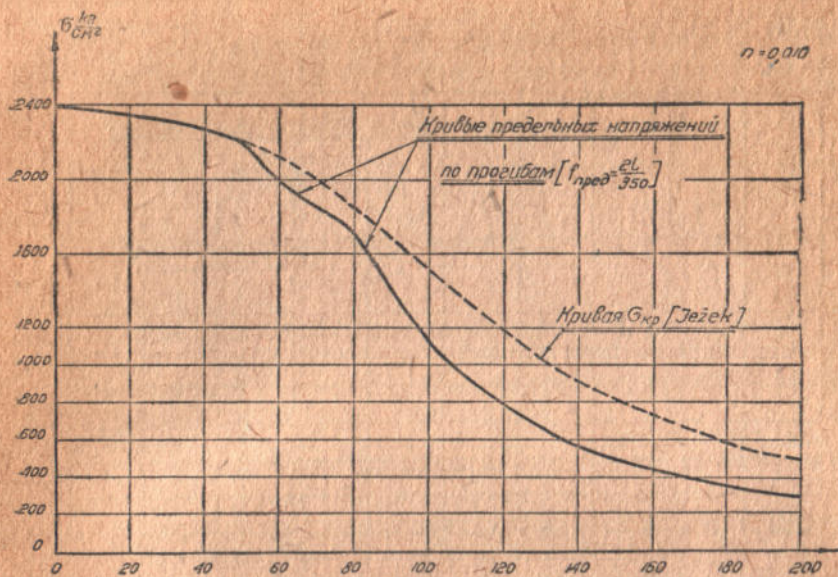
$$f = \frac{1,71 L}{600} = \frac{L}{350}.$$



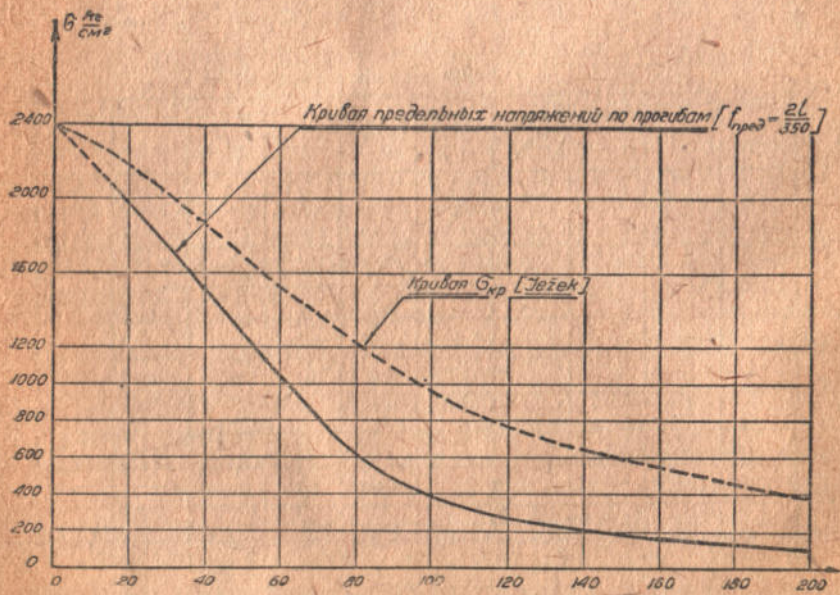
Фиг. 17



Фиг. 18



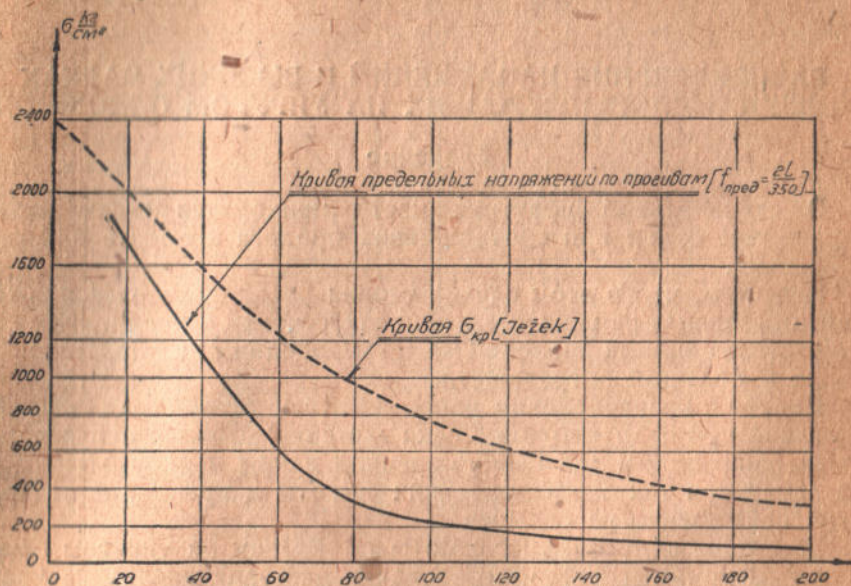
Фиг. 19



Фиг. 20

Исходя из этой величины предельного прогиба, для сжато-изогнутого стержня, исследованного ранее (см. фиг. 14), на фигурах 17—21 построены кривые предельных напряжений по прогибам и взяты по Jeizek'у кривые критических напряжений для разных значений отношения n .

Эти графики приводят нас к следующим выводам:



Фиг. 21

1) для больших n ($n=0,05$; $n=0,1$) расчет сжато-изогнутых стержней надо производить только по прогибам;

2) для малых n ($n=0,001$, $n=0,01$) расчет по прогибам необходим только при относительно больших гибкостях (больше 80—100).

Заметим, что обычно встречающиеся в металлических конструкциях сжато-изогнутые стержни принадлежат чаще всего ко второй категории.